Домашнее задание 18
Шумилкин Андрей, группа 163

Задача 1

Заметим, что данное выражение истинно, когда в нем либо одна переменная равна 1, либо три переменных равны 1.
Мы можем с помощью выражения $(x \wedge y \wedge z)$ записать ту часть выражения, которая истинна, когда все три переменных рывны 1.
Тогда нам остается записать часть выражения, которая истинна тогда и только тогда, когда лишь одна переменная равна 1.
Мы можем это сделать с помощью такого выражения: $(\neg((x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z))) \wedge (x \vee y \vee z)$. То есть мы сначала проверяем, что в каэждой паре переменных хотя бы один равен нулю, откуда и получаем, что всего будет не больше одной переменной, равной единице. А потом проверяем, что она именно одна, а не ноль.
В итоге получаем:

$$(x \wedge y \wedge z) \vee (\neg((x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z))) \wedge (x \vee y \vee z).$$

Задача 2

Выпишем 9 наборов переменных, на которых функция истинна:
{0111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111}
Видим, что в восьми из них первая цифра истинна, а в одном – три последних. Заметим, что в оставшихся наборах, на которых функция не истинна такого нет, поэтому мы можем записать ее просто в виде $x_1 \vee (x_2 \wedge x_3 \wedge x_4)$.
Тогда схему можем записать как $g_1 = x_1,\ g_2 = x_2,\ g_3 = x_3,\ g_4 = x_4,\ g_5 = g_2 \wedge g_3,\ g_6 = g_4 \wedge g_5,\ g_7 = g_1 \wedge g_7$. Выход – g_7.

Задача 3

Мы можем строить схему по выражению вида: $(x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4) \vee \ldots \vee (x_{n-2} \wedge \neg x_{n-1} \wedge x_n)$.
Тогда мы можем добавить на первом "уровне"2n вершин в наш граф-схему: сами значения переменных $x_1, x_2, \ldots x_n$ и отрицания значений переменных $x_2, x_3, \ldots x_{n-1}$.
Тогда на втором уровне будем делать конъюкицию первых двух переменных в каждой из скобок, то есть $(x_1 \wedge \neg x_2), (x_2 \wedge \neg x_3), \ldots (x_{n-2} \wedge \neg x_{n-1})$ – на нем у нас будет n вершин.
Тогда на третьем уровне будем делать конъюкцию значений в вершинах, полученных на втором уровне с третьей переменной в скобках. На это так же потребуется n вершин.
После чего у нас останется n значений и нам нужно будет проверить равно ли хотя бы одно из них 1. Тогда мы просто сделаем дизъюнкцию первого значения со вторым, далее полученного значения с третьим и так далее. На выходе у нас как раз

будет 1, если в исходном слове было подслово 101 и на эти дизъюнкции у нас уйдет n вершин.
Тогда размер полученной схемы будет (из рассчета 2n + n + n + n) – $O(6n) = O(n)$.

Задача 4

Будем представлять двоичное число из n разрядов как набор переменных $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots x_0$.
Сначала поймем, что простой путь умножить число на три в двоичном представлении – это сначала удвоить его, а потом прибавить к результату его самого.
Удвоение числа делается достаточно просто – оно сдвигается влево на 1 бит.
Теперь разберемся со сложением. Заметим, что при сложении двух данных чисел у нас получиться число с $n+1$ разрядом. Обозначим их как $y_n, x_{n-1}, \dots y_0$.
Начнем складывать. $y_0 = x_0$, поскольку второе число сдвинуто влево в этом разряде у него 0.
Чтобы продолжить складывать нам нужно ввести дополнительную переменную, назовем их z, в которой мы будем хранить то число, которое будет переходить в следующий разряд. Т.е. $y_1 = x_1 \vee x_0$ и $z_1 = x_0 \wedge x_1$ и тогда $y_2 = x_2 \vee x_1 \vee z_1$.
Тогда далее имеем: $y_i = x_i \vee x_{i-1} \vee z_{i-1}$,
$z_i = (x_{i-1} \wedge x_i) \vee (x_{i-1} \wedge z_{i-1}) \vee (x_i \wedge z_{i-1})$.
И такое упрощение, а точнее то, что мы не повторяем вычисление пременных, а уже используем вычисленные раннее позволяет нам построить схему полиномиального размера.