Домашнее задание 12
Шумилкин Андрей, группа 163

Задача 1

Любое подмножество декартова произведения данных множеств будет бинарным отношением, т.е. всего исходов $2^4 = 16$.
Теперь посчитаем кол-во неблагоприятных исходов. Обозначим элементы множества A цифрами, т.е. a_1 будет 1, a_2 – 2. Заметим, что это только три подмножества: $\{(1,1),(1,2),(2,1)\}, \{(2,2),(1,2),(2,1)\}$и$\{(1,2),(2,1)\}$.
Тогда благоприятных исходов будет 13 и вероятность будет равна кол-ву благоприятных исходов поделеному на кол-во всех исходов.
Ответ: $\frac{13}{16}$.

Задача 2

Если $a \neq b$, то вероятность будет равна нулю, поскольку мы не сможем построить биекцию между неравномощными множествами.
Будем рассматривать случай. когда $a = b$. Найдем количество благоприятных исходов. Будем сопоставлять множеству A какую-либо перестановку элементов множества B так, что первый элемент множества A будет отображен в первый элемент этой перестановки, второй – во второй и т.д. Тогда количество благоприятных исходов будет равно $a!$, т.к. $a = b$.
А количество всех исходов будет равно a^a, так как мы каждый элементу из A выбираем отображение в элемент из B, которых всего b и $b = a$.
Тогда вероятность благоприятного исхода будет равна кол-ву благоприятных исходов поделенному на кол-во всех исходов.
Ответ: $\frac{a!}{a^a}$.

Задача 3

19-ый элемент в перестановке может быть любым и никак не повлияет на ответ, поскольку не будет в ходить ни в первые 18, ни в последние 18.
Так как это перестановка, то наибольшее среди первых восемнадцати либо строго больше наибольшего среди последних восемнадцати, либо строго меньше него. Тогда у нас количество благоприятных исходов будет равно количеству неблагоприятных, поскольку мы можем кажой перестановке с благоприятным исходом сопоставить перестановку с неблагоприятным исходом, просто перевернув ее и при этом этом это будет биекция между множеством благоприятных исходов и множеством неблагоприятных. То есть количество благоприятных исходов будет равна кол-ву неблагоприятных и вероятность благоприятного исхода будет равна 0.5
Ответ: $\frac{1}{2}$.

Задача 4

Всего исходов будет C_{36}^5, то есть мы выбираем из 36 чисел 5 и просто располагаем их в порядке убывания.
Тогда количество благоприятных исходов будет C_{35}^4, так как единицу мы как бы выбрали заранее и она по построению последовательности будет стоять последней, так как меньше нее чисел нет.
Тогда вероятность благоприятного исхода будет равна кол-ву благоприятных исходов поделенному на кол-во всех исходов.
Ответ: $\frac{5}{36}$.

Задача 5

Всего исходов будет C_{36+5-1}^5 – кол-во сочетаний с повторениями.То есть мы просто выбираем 5 элементов(возможно с повторениями) из 36.
Тогда количество благоприятных исходов будет C_{36+4-1}^4, так как единицу мы как бы выбрали заранее и она по построению последовательности будет стоять последней(даже если мы), так как меньше нее чисел нет.
Тогда вероятность благоприятного исхода будет равна кол-ву благоприятных исходов поделенному на кол-во всех исходов.
Ответ: $\frac{39!}{36!\cdot 4!} \cdot \frac{36!\cdot 5!}{40!} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$.

Задача 6

Будем рассматривать первые 10 позиций и последние 10. Обозначим их множества как A и B.
У нас может быть три случая:
1.$|A| > |B|$
2.$|A| < |B|$
3.$|A| = |B|$.

Все двоичные слова подходящие под первый случай будут неблагоприятными исходами, поскольку что бы ни стояло на 11 позиции в последних 11-ти единиц будет уже явно меньше или равно, чем в первых 10, т.е. в первых десяти никак не может быть меньше единиц, чем в последних 11-ти.
Все двоичные слова подходящие под второй случай будут благоприятными исходами, поскольку что бы ни стояло на 11 позиции в последних 11-ти единиц будет уже явно больше, чем в первых 10, потому что их и так больше, а мы либо добавляем еще единицу, либо оставляем все как есть.
Мы можем построить биекцию между множеством двоичных слов, подходящих к первому случаю и множеством двоичных слов, подходящих ко второму. Тогда после рассмотрения двух этих случаев у нас будет поровну благоприятных случаев и неблагоприятных.
В третьем же случае все будет зависить от того стоит ли на 11-ой позиции единица или ноль, а значит половина будет благоприятными исходами, а половина – нет, так

как у нас множество *всех* двоичных слов.
То есть у нас по итогу равное количество благоприятныхх и неблагоприятных исходов, а значит вероятность благоприятного исхода будет равна 0.5.
Ответ: $\frac{1}{2}$.

Задача 7

Вероятностное пространство – Посчитаем вероятность неблагоприятного исхода, тогда когда оно будет меньше или равно 0.5 и будет достигаться то, что вероятность благоприятного исхода будет больше или равно 0.5.
Обозначим кол-во карт, которые мы вытягиваем x. Тогда количество всех исходов будет равно C_{36}^{x}, а количество неблагоприятных C_{32}^{x}. Значит вероятность неблагоприятного исхода равноа $\frac{(36-x)!}{(32-x)!\cdot 33\cdot 34\cdot 35\cdot 36} = \frac{(33-x)\cdot(34-x)\cdot(35-x)\cdot(36-x)}{33\cdot 34\cdot 35\cdot 36}$.
Далее посмотрим значение этого выражения при x и когда оно достигнет 0.5 мы и найдем ответ.
При $x = 1$ оно будет равно 1256640/1413720.
При $x = 2$ оно будет равно 1113024/1413720.
При $x = 3$ оно будет равно 982080/1413720.
При $x = 4$ оно будет равно 863040/1413720.
При $x = 5$ оно будет равно 755160/1413720.
При $x = 6$ оно будет равно 657720/1413720.

Видим, что при $x = 5$ оно еще больше 0.5, а при $x = 6$ меньше. Значит достаточно вытащить шесть карт из колоды.
Ответ: достаточно вытащить 6 карт.

Задача 8

Вероятностное пространство – группы студентов по 30 человек
Посчитаем количество неблагоприятных исходов, т.е. такую ситуацию, когда ни у окого из группы не будут совпадать дни рождения(остальные будут благоприятными, поскольку если день рождения совпадают у троих человек, то они, конечно же, совпадают и у двоих).
Берем день рождения первого человека и вероятность того, что оно не совпадет с день рождением кого-то из ранее выбранных будет равна 1, так как до этого мы никого еще не выбрали. Затем будем рассматривать день рождения второго. Вероятность того, что они различны будет $\frac{364}{365}$, поскольку благоприятными исходами будут 364 дня, исключая день рождения первого человека из группы. Для третьего выбранного соответственно вероятность будет $\frac{363}{365}$. И так далее, а дял последнего $\frac{365-30}{365} = \frac{335}{365}$.
Тогда итоговая вероятность благоприятного исхода будет $\frac{365\cdot 364\cdot 363\cdot\ldots\cdot 335}{365^{n}}$ и она будет примерно равна 0.3.
А количество благоприятных исходов будет равно 1 - (кол-во неблагоприятных), т.е. будет больше или равно 0.6, а значит больше 0.5.

Линал

При фиксированном $m = 10$, то есть когда n заметно больше чем m эффективнее оказывается метод Гаусса.

Иначе же, если фиксированное $n = 100$, то есть m заметно больше, то эффективнее оказывается метод, использующий обратную матрицу.

Посчитаем их сложность. При этом, поскольку лабораторная по линейной алгебре, будем руководствоваться методами, которые мы изучили в курсе линейной алгебры, не беря во внимание, что во внутренних функциях python они каким-то образом могут быть реализованы несколько быстрее.

Метод обратной матрицы: 1. Мы можем найти обратную матрицу за $O(n^3)$, методом Гаусса-Жордана, к примеру. 2. Потом нам надо будет обратную матрицу умножить на матрицу B и это можно сделать за $O(n^2 \cdot m)$ операций.

Итог: $O(n^2 \cdot m + n^3)$.

Метод Гаусса: 1. Сложность самого метода Гаусса составляет $O(n^3)$, но нам нужно еще повторять каждую операцию на присоединенной нами матрице B, то есть, по сути, нам нужно n^2 раз сложить ее строки и тогда итоговая сложность будет $O(n^3 + n^2 \cdot m)$.