Домашнее задание 13
Шумилкин Андрей, группа 163

Задача 1

Пусть множество исходов – это последовательность, в которой родились дети и тогда все исходы равновероятны, так как рождение мальчика и девочки равновероятны. То, что мальчик родился в понедельник никак не влияет на вероятность, поскольку в тот же понедельник могла за ним родиться девочка или наоборот(двойняшки) и по условию рождение каждого – равновероятно. Обозначим М – мальчик, Д – девочка. Тогда множество исходов имеет вид $\{\text{ММ}, \text{МД}, \text{ДМ}, \text{ДД}\}$ и вероятность каждого исхода равна $1/4$. С учетом того, что по условию один из детей должен быть мальчиком, а другой – девочкой, нам пододят два из этих исходов – МД и ДМ, и тогда итоговая вероятность равна $1/2$.
Ответ: $\frac{1}{2}$.

Задача 3

Пусть множество исходов – это пятерки выбранных чисел и все исходы равновероятны.
Количество всех исходов равно C_{36}^5. Вероятность выбрать пятерку, среди элементов которой есть число 2 будет равна $\frac{C_{35}^4}{C_{36}^5}$, так как пятерка должна быть выбрана по условию и еще четыре элемента мы выбираем из оставшихся 35-и элементов множества. Вероятность выбрать пятерку, среди элементов которой будет число 5 так же равна $\frac{C_{35}^4}{C_{36}^5} = \frac{5}{36}$.
Теперь посчитаем вероятность выбрать элемент 5 при том, что двойка уже выбрана.
Вероятность выбрать пятерку в которой есть элементы и 5, и 2 равна $\frac{C_{34}^3}{C_{36}^5}$.
Тогда вероятность выбрать элемент 5 при том, что элемент 2 уже выбран равна $\frac{C_{34}^3}{C_{36}^5} \cdot \frac{C_{36}^5}{C_{35}^4} = \frac{C_{34}^3}{C_{35}^4} = \frac{4}{35}$.
И, так как $\frac{5}{36} \neq \frac{4}{35}$, то есть вероятность события не равна вероятности его же при условии какого-то другого делаем вывод, что события зависимы.
Ответ: Данные события зависимы.

Задача 4

Пусть множество исходов – это какая-то определенная функция и все исходы равновероятны. Всего вариантов составить какую-либо функцию у нас будет n^n, поскольку она всюду определена и каждому из n элементов одного множества мы можем и должны сопоставить один из n элементов другого множества.
Составить же инъективную функцию у нас $n!$ способов, то есть мы будем элементам первого множества сопоставлять некую перестановку из элементов второго. Значит вероятность того, что функция инъективна равна $\frac{n!}{n^n}$.
Составить функцию так, чтобы $f(1) = 1$ у нас будет $(n-1)^n$ способов, то есть один

элемент мы определяем изначально, а для остальных $n-1$ выбираем один из n элементов другого множества. Тогда вероятность того, что $f(1)=1$ будет $\frac{1}{n}$
Если же хотим получить инъективную функцию у которой $f(1)=1$, то у нас будет $(n-1)!$ способов сделать это, поскольку мы определяем $f(1)=1$ и нам нужно для оставшихся $n-1$ элемента сопоставить различные элементы другого множества, в которое уже не входит 1, так как мы уже составили с ней пару.
Тогда вероятность того, что $f(1)=1$, при условии, что функция инъективна равна $\frac{(n-1)!}{n^n} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n}$.
Можно заметить, что она равна вероятности того, что $f(1)=1$, а значит данные события независимы.
Ответ: Данные события независимы.

Задача 5

Пусть множество исходов –
Обозначим правильное решение как 1, а неправильное – как 0. Рассмотрим все возможные исходы выбора первыми двумя членами жюри. Это: $\{00, 01, 10, 11\}$.
Теперь посчитаем вероятность того, что третий член жюри сделает правильный выбор для каждого случая:

1. 00. Итоговая вероятность равна 0, так как правильного решения тут нет.
2. 01. Вероятность такого случая равна $(1-p)\cdot p$, тогда вероятость правильного выбора третьим членом жюри равна $\frac{p\cdot(1-p)}{2}$.
3. 10. Вероятность такого случая равна $p\cdot(1-p)$, тогда вероятость правильного выбора третьим членом жюри равна $\frac{p\cdot(1-p)}{2}$.
4. 11. Вероятность такого случая равна p^2, тогда вероятость правильного выбора третьим членом жюри равна p^2.

А общая вероятность выбора правильного решения третьим из судей будет равна сумме данных вариантов:
$p\cdot(1-p)+p^2 = p^2+p-p^2 = p$.
Видно, что эта вероятность равна p – вероятности правильного решения, принимаемого одним добросовестным членом жюри. **Ответ:** Вероятность выбора верного решения равна p и равна вероятности правильного решения, принимаемого одним добросовестным членом жюри.

Задача 7

Посчитаем вероятность как бы спускаясь вниз, при этом вероятность выигрыша при счете 10:9 возьмем, конечно же, за 1.
Тогда вероятность выигрыша при 9:9 = $1/2$.
9:8 – это будет сумма вероятностей вариантов (выиграть сразу) и (проиграть, а потом выиграть) и она равна $1/2\cdot 1/2 + 1/2 = 3/4$.

9:7 – это будет сумма вероятностей вариантов (выиграть сразу) и (перейти в случай 9:8), для которого мы уже посчитали вероятность и тогда она будет равна $1/2 + 1/2 \cdot 3/4 = 7/8/$. 8:9 – для выигрыша можем перейти в вариант 9:9 для которго уже посчитали, тогда равна $1/2 \cdot 1/2 = 1/4$. 8:8 – перйти в вариант 9:8, либо 8:9, тогда равна $1/2 \cdot 3/4 + 1/2 \cdot 1/4 = 1/2$. 8:7 – перейти в вариант 9:7, либо в вариант 8:8. Тогда вероятность равна $1/2 \cdot 1/2 + 1/2 \cdot 7/8 = 11/16$.
Ответ: $11/16$.

Вероятность A при условии B:

$$Pr[A|B] = \frac{Pr[A \cap B]}{Pr[B]}.$$

$$Pr[A|B] = Pr[A] \cdot \frac{Pr[B|A]}{Pr[B]}.$$