Домашнее задание 5

Задача 1

% – деление с остатком. а) Рассмотрим сначала исходный граф-цикл на 2n вершинах.Пронумеруем его вершины. Единтственная его возможная раскраска в два цвета – это когда вершины с четными номерами покрашены в один цвет, а с нечетными – в другой. Заметим, что противоположная вершина к текущей(t) будет $(t+2n/2)\%2n$. Осюда если n четное, то и номер противолежащей вершины к текущей вершине будет давать тоот же остаток при делении на 2, что и номер текущей вершины, т.к. (четное + четное) = четное и (нечетное + четное) = нечетное и деление с остатком так же оставляет ту же четность.

А вот если n – нечетное, то номер противолежащаей вершины будет четным, если номер текущей вершины нечетен и нечетным иначе.

Значит при нечетных n граф можно расскрасить в два цвета, а при нечетных – нет.

б) Если граф можно раскрасить в два цвета, то его, очевидно, можно раскрасить и в три цвета. То есть при нечетных n граф можно раскрасить в три цвета. Теперь рассмотрим случай четных n.

Сразу отметим, что при n = 2, если провести все ребра соединяющие противоположные вершины, то получим полносвязный граф на четырех вершинах, который нельзя раскрасить в три цвета.

Рассмотрим остальные графы при нечетных n. Пусть у нас будут 3 цвета: I, II, III. Покрасим первые n вершин чередуя цвета I и II. n + 1 и 2n покрасим в цвет III. А все, между n + 1 и 2n покрасим, опять же, чередуя I и II. Тогда исходный граф-цикл и вершины n + 1 и 2n и им противолежащие правильно раскрашены по построению. А также остальные тоже, потому что первая половина графа покрашена в чередующиеся I и II и вторая так же, но со "сдвигом"на одну вершину, то есть вершина, противолежащая к вершине из первой половины графа, будет как раз иметь другой цвет.

Задача 2

а) Простой путь мы моежм строить только переходя из вершин одной доли в вершины другой доли и его длина будет не больше, чем количество вершин в наименьшей доли +1 (так как мы можем вернуться еще в первую долю). Значит k <= 2 * min(n, m) + 1.

б) Из рассуждений к задаче 5 видно, что при m=n в таком графе будет гамильтонов цикл длиной 2*n. Также мы заметили, что если вершин в одной из долей меньше, то нам потом будет "не хватать"вершин для завершения цикла. Отметим, что при построении простого цикла, также как и при построении Гимильтонова мы можем переходить из вершины одной доли только к вершинам другой доли, а так же нам в конце нужно вернуться в исходную долю. Из этого всего следует, что для цикла k <= 2 * min(m, n).

Задача 3

Это граф, состоящий из двух компонент связности из 4 и 5 вершин, каждая из которых полносвязна. Тогда в первой будет четыре вершины со степенью 3, а во второй пять вершин со степенью 4, что и требуется по условию задачи. А так как наш граф несвязный, то он не содержит гамильтонов цикл по определению, то есть не является гамильтоновым графом.

Задача 5

а) Эйлеров цикл существует тогда и только тогда, когда граф связный и в нем отсутсвуют вершины нечетной степени. Так как в полном двудольном графе степень каждой вершины по определению равна количеству вершин в доле, в которой ее нет, то он Эйлеров цикл будет существовать в графе $K_{m,n}$ только при четных m и n.

б) Так как граф двудольный, то при построении гамильтонова цикла мы можем переходить из вершины одной доли только в вершины другой доли и при этом не можем посещать одну вершину более чем один раз. Отсюда следует, что m должно быть равно n, так как иначе в какой-то момент при построении нам просто не "хватит"вершин в одной доле, чтобы обойти оставшиеся в другой. И при этом оба числа должны быть больше одного, так как в графе из двух вершин, по одной в каждой доле, не будет гамильтонова цикла.

в) Обозначим вершины первой доли как $1, 2, \ldots 6$, а второй как $1i, 2i, \ldots 6i$.

Тогда Гамильтонов цикл: $1 - 1i - 2 - 2i - 3 - 3i - 4 - 4i - 5 - 5i - 6 - 6i - 1$.

Задача 5

Добавим кратные ребра между теми вершинами, между которыми в исходном графе есть ребро. Тогда кол-во ребер инцендентных каждой вершине удвоится, а значит четные степени вершин останутся четными, а нечетные станут четными. А по теореме, доказанной Эйлером, Эйлеров цикл существует тогда и только тогда, когда граф связный и в нем отсутствуют вершины нечетной степени.

Полученный граф связен, потому что исходный граф был связен, а мы не удаляли ребра, а только добавляли их. То есть в полученном графе с кратными ребрами существует эйлеров цикл, то есть такой обход, в процессе которого мы пройдемся по каждому его ребру единожды. Теперь, если в порядке этого обхода прохождение по добавленным нами кратным ребрам рассматривать как прохождение по соответствующим ребрам исходного графа, мы как раз и получим такой обход в исходном графе, при котором мы пройдемся по каждому его ребру дважды.