Домашнее задание 9
Шумилкин Андрей, группа 163

Задача 1

Только для бинарных отношений над пустыми множествами.
Поскольку над любым непустым множством A отношение вида $P(x, x), x \in A$ будет принадлежать либо $\bar{P}$, либо P^{-1}, поскольку:
Пусть изначальное отношение P включает в себя пары (x, x), тогда его дополнение не будет их включать, а вот обратное отношение будет.
Если же изначальное отношение не содержит данные пары, то его дополнение будет их включать, а вот обратное отношение нет.

Задача 2

а) Нет, не будет. Контрпример:
$A = a_1, a_2, a_3$. $P_1 = (a_1, a_3)$. $\bar{P}_1 = (a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_2, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_1), (a_3, a_2), (a_3, a_3)$.
Как видим, P_1 транзитивно, а вот $\bar{P}_1$ нет, поскольку $\bar{P}_1(a_1, a_2) \wedge \bar{P}_1(a_2, a_3) \not\Rightarrow \bar{P}_1(a_1, a_3)$.
б) Назовем пересечение множеств I – оно будет транзитивно, поскольку пусть $(a, b) \in I \wedge (b, c) \in I$ – из этого по определению пересечения множест следует, что $(a, b) \in P_1 \wedge (b, c) \in P_1$ и $(a, b) \in P_2 \wedge (b, c) \in P_2$, а так как и P_1 и P_2 транзитивны, то из этого следует $(a, c) \in P_1, P_2$, а так как I – пересечение множеств, то и $(a, c) \in I$.
в) Контрпример. $A = a, b, c, d, P_1 = (a, b), (b, c), (a, c), P_2 = (c, d)$. Тогда $P_1 \cup P_2 = (a, b), (b, c), (a, c), (c, d)$ и оно не транзитивно, поскольку $P_1 \cup P_2(a, c) \wedge P_1 \cup P_2(c, d) \not\Rightarrow P_1 \cup P_2(a, d)$.
г) Нет. Контрпример: $P_1 = (c, b), (x, c), (x, b), P_2 = (a, c), (b, x)$. Оба отношения транзитивны и $P_1 \circ P_2 = (a, b), (b, c), (b, b)$ и, как видно, композиция не транзитивна, так как $P_1 \circ P_2(a, b) \wedge P_1 \circ P_2(b, c) \not\Rightarrow P_1 \circ P_2(a, c)$.

Задача 3

Обозначим отношение R, карты меньшие или равные десятке соответствующей цифрой и карты больше десятки заглавной буквой, которая является первой в слове их обозначающем: Валет - В и т.д. Будем, не теряя общности, рассматривать карту произвольной масти и обозначать просто согласно выбранным обозначением без указания конкретной масти.
а) Да, будет, потому что сказано "одна из карт ... другая", а не "первая ... вторая", к примеру. То есть будет спаведливо как R(6, Валет), так и R(Валет, 6).
б) Нет, оно нерефликсивно. Потому что никакая карта не может одновременно быть как младше деятки, так и старше десятки, т.е. контрпример: $R(8, 8)$ – ложно.
в) Нет, оно не транзитивно. Контрпример R(9, Валет) $\wedge$ R(Дама, 8) – истинно, но из R(9, Валет) $\wedge$ R(Дама, 8) $\not\Rightarrow$ $R(9, 8)$, поскольку $R(9, 8)$ ложно.
Посчитаем кол-во возможных пар относительно карт меньших десятки, при этом уже рассматривая карты конкретных мастей.

Карт меньших десятки у нас 4 и у каждой из них четыре масти. Ставим их на место слева в нашем отношении. Тогда справа может стоять любая карта, большая десятки, которых так же четыре и у каждой четыре масти. Также нужно не забыть домножить все это на 2, так как каждую пару мы можем "перевернуть" и она так же будет истинна.
$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 = 512$.

Задача 4

а) Да, может, если операция нерефлексивна. Тогда, к примеру, мы можем взять все возможные пары для первого элемента, притом так, чтобы он был как слева, так и справа. Всего получится 30 пар. Потом возьмем пару второго третьим, и наоборот – третьего со вторым. Выходит 32 пары. И последней парой возьмем (первый элемент, первый элемент). Выходит 33 элемента и полученное отношение симметрично.

Задача 5

а) Любоая комбинация пар элементов A(даже пустая) определяется неким отношением на множестве. Посчитаем общее количество пар возможных для составления из элементов множества A.
Мы каждый элемент можем поставить в пару с каждым, значит это 2^n. Как известно, количество подмножест множества C равно $2^{|C|}$. Тогда количество всех возможных комбинаций пар равно 2^{n^2}.
б) Чтобы отношение было рефлексивным оно должно содержать в себе $(x, x), \forall x \in A$. Тогда, можем сказать, что нужно посчитать количество подмножеств множества, n элементов которого принадлежат любому из подмножеств и это 2^{n^2-n}.
в) Построим для каждого отношения матрицу, состоящую из единиц и нулей. Единица будет стоять в клетке с индексом (x, y) тогда, когда в отношение входит пара (x, y). Тогда заметим, что мы можем ставить единицы на главной диагонали или выше нее и, чтобы соблюдалось условие симметричности отношения, так же ставить единицу в клетке ниже главной диагонали, симметричной относительно нами выбранной относительно главной диагонали. А всего клеток выше главной диагонали(считаем идя по столбцам или строкам) $1+2+\ldots+n$ – арифметическая прогрессия, сумма которой равна $\frac{n^2+n}{2}$. И, по уже известной формуле количества подмножеств множества получаем $2^{\frac{n^2+n}{2}}$.

Задача 6

*а)*Из данных отношений мы можем посмотреть как отношение P делит множество A на классы эквивалентности. Мы можем заметить, что a, b, c лежат в одном классе, а d, e в другом.
Тогда весь вопрос к какому классу относится f, при этом f точно не принадлежит ко

второму классу, где d, e по условию. Тогда она может либо принадлежать тому же классу, что и a, b, c, либо входить в новый класс, куда будет относиться только этот элемент – f.
Выходит, что у нас будет либо два, либо три класса эквивалентности.
б) Данный элемент, так как про него ничего не известно может либо относится к одному из уже существующих классов эквивалентности, либо входить в свой собственный класс, куда относится только он. И вариантов какие классы могут получится при наличествовании такого элемента в A получится семь, поскольку:
Если f принадлежит классу эквивалентности, где лежат a, b, c, то g может либо так же принадлежать этому классу, либо принадлежать классу, где находятся d, e, либо образовывать свой собственный новый класс – всего 3 варианта.
Если же f образует свой собственный класс, то g может либо относиться к одному из трех существующих классов, либо образовывать свой собственный класс – всего 4 варианта.