Домашнее задание 15
Шумилкин Андрей, группа 163

Задача 1

Как мы знаем, если некоторое множество U бесконечно, а множество V конечно или счетно, то $U \cup V$ равномощно U.
Обозначим $C = A \setminus B$. Тогда мы можем записать $A = C \cup B$. Тогда по свойству, упомянотому выше мощность C равна мощности A и C не может быть не бесконечным, поскольку объединение счетного множества со счетным будет не более, чем счетным.
Значит все утверждение верно.

Задача 2

Заметим, что $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Как мы доказали в прошлой задаче $A \setminus B$ равномощно A. А $(B \setminus A)$ будет не более чем счетно, так как само B счетно.
И тогда из свойства, упомянутого в первой задаче и из транзитивности равномощности заметим, что раз $A \setminus B$ равномощно A и объединение бесконечного множества U и счетного множества V будет равномощно U, что $A \triangle B$ равномощно A.
Значит все утверждение верно.

Задача 3

Как мы знаем, если некоторое множество U бесконечно, а множество V конечно или счетно, то $U \cup V$ равномощно U.
Обозначим $C = A \setminus B$. Тогда мы можем записать $A = C \cup B$. Тогда по свойству, упомянотому выше мощность C равна мощности A и C не может быть не бесконечным, поскольку объединение конечного множества со счетным будет не более, чем счетным.
Значит все утверждение верно.

Задача 4

Как нам известно множество рациональных чисел счетно и в каждом интервале найдется хотя бы одно рациональное число по аксиоме полноты.
Тогда мы можем сопоставить кажому интервалу минимальную рациональную точку, находящуюся в нем. Такое сопоставление будет взаимно-однозначным, поскольку интервалы не пересекаются.
Раз мы смогли найти такое сопоставление, то мощность множества данных интервалов не больше, чем мощность множества рациональных чисел, а оно счетно. Значит множество интервалов будет не более чем счетно.

Задача 5

Как мы знаем, всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество.
Это подмножество равномощно $\mathbb{N}$. Мы можем заметить, что и само $\mathbb{N}$ содержит бесконечное счетное число счетных подмножеств. Такими подмножествами будут, например, являться степени простых чисел, поскольку, как известно, простых чисел бесконечное число, а их степень так же принадлежит $\mathbb{N}$. И при этом они не будут пересекаться по основной теореме арифметики.
Значит из первичной биекции некоторого подмножества нашего множества в $\mathbb{N}$ мы можем выделить сопоставления со множествами различных простых чисел в степени, которые являются счетными и которых бесконечное число, что и будет означать, что всякое бесконечное множество содержит бесконечное число непересекающихся счетных подмножеств.