Домашнее задание 11
Шумилкин Андрей, группа 163

Задача 1

Назовем функции f и g. По определению функции она сопоставляет каждому элементу из области определения ровно один элемент из области значения. Пусть A – область опеределения для обеих функция, так как они обе определены всюду. F – область значений f, а G – область значений g.
а) Если объединение функций тоже функция, то она доложны всем элементам(так как обе функции всюду определены) из множества A сопоставлять только лишь один элемент из множества $(A \cup B)$. Тогда если $\forall\ x\ in\ A \Rightarrow f(x) = g(x)$, то объединение функций так же будет функцией.
б) Если пересечение функций тоже функция, то она доложны всем элементам(так как обе функции всюду определены) из множества A сопоставлять только лишь один элемент из множества $(A \cap B)$. А так как в пересечении функций и так будут только лишь те элементы, для которых $f(x) = g(x)$, то оно всегда будет функцией.

Задача 2

Сразу приведем контрпример для $=$ и $\subseteq$. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4\}, Y = \{1, 2\}, A = \{1\}$ и $f(1) = 1, f(2) = 1, f(3) = 1, f(4) = 2$. Тогда $f^{-1}(f(A)) = \{1, 2, 3\}$ и оно явно не равно A а так же не является его подмножеством.
А вот $\supseteq$ подходит по определению, поскольку $f(A) = \{y : y = f(x), x \in A\}$ и $f^{-1}(f(A)) = \{x : f(x) \in f(A)\}$, а значит $\forall a \in A$ точно окажутся в прообразе, так как $f(a) \in f(A)$.

Задача 3

Сразу приведем контрпример для $=$ и $\subseteq$. Пусть $A = \{1, 2\}, B = \{3, 4\}$и $f(1) = 1, f(2) = 1, f(3) = 1, f(4) = 2$. Тогда $f(A \setminus B) = \{1\}$, а $f(A) \setminus f(B) = \varnothing$.
А вот $\supseteq$ подходит, поскольку в $f(A \setminus B)$ будут значения от всех элементов из A, которых нет в B. А вот в $f(A)$ могут быть значения элементов, которые есть в A и при этом есть в B, но они пропадут, когда мы применим разность множеств, поскольку их значения так же будут и в $f(B)$. С ними так же могут пропасть и некоторые значения от элементов только из A, если $f(a) = f(b)$, но точно ничего не добавиться, поэтому это множество и будет подмножеством $f(A \setminus B)$.

Задача 4

Сразу приведем контрпример для $=$ и $\subseteq$. Пусть $A = \{1\}, B = \{2\}$и $f(1) = 1, f(2) = 1, f(3) = 1, f(4) = 2$. Тогда $f^{-1}(A \setminus B) = \{1\}$, а $f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B) = \varnothing$.

Задача 5

а) Нам нужно каждому элементу из A поставить в соответствие некий элемент из B или не сопоставлять, считая, что для него функция не определена. Выбрать один элемент у нас $b+1$ способов(так как мы еще можем его вообще не брать) и это надо сделать a раз. Значит количество способов это сделать b^a.
б) Нам нужно элементам из A поставить в соответствие некий элемент из B, притом так как это инъекция все выбранные элементы из B должны быть различны, но так же мы можем не сопоставлять некоторым элементам из A никакие элементы из B вообще.
Будем определять для какого кол-ва элементов(обозначим n) функция опеределена. Тогда кол-во таких функций будет: $C_a^n \cdot C_b^n$ – кол-во способов выбрать сами эти элементы, умноженное на кол-во способов выбрать сопоставленные им. Кол-во элементов, для которых определена функция может быть от нуля до a и тогда итоговая формула:

$$\sum_{n=0}^{a} C_a^n \cdot C_b^n.$$

Задача 6