Домашнее задание 2

Во всей работе $\binom{n}{k}$ – это количество сочетаний по k из n элементов.

Задача 1

Найти сумму всех пятизначных чисел, составленных из нечетных цифр.

Решение.

Заметим, что всего у нас пять нечетных цифр: $1, 3, 5, 7, 9$. Их сумма равна 25. Будем рассматривать поразрядно пятизначные числа. Каждое число в каждом разряде может войти $5 * 5 * 5 * 5$ раз, потому что у когда мы "установили"одно число у нас остается четыре разряда в которх может быть любое другое нечетное число. Отсюда мы можем заметить, что и сумма в одном разряде может войти 5^4 раз. Также заметим, что сумма в первом разряде будет $25 * 10^1$, $25 * 10^2$ во втором ... и $25 * 10^5$ в пятом.

Тогда, если нумеровать разряды справа налево и обозначить текущий номер разряда за i для каждого разряда формула будет: $25 * 10^i * 5^4$. То есть итоговая формула:

$$\sum_{i=1}^{5} 25 * 5^4 * 10^i = 173609375.$$

Задача 2

Для определенности будем говорить о *натуральных* числах.

Пункт а)

Посчитаем все числа до миллиона в которых нет единицы. Мы можем сделать это так: Будем считать, что у нас есть шесть позиций на которых могут стоять числа от нуля до девяти, исключая единицу, то есть их девять штук. Тогда, к примеру, когда на первых пяти позициях будут стоять нули мы учтем все однозначные числа, потом когда на первых четырех позициях будут стоять нули мы учтем двухзначные и так далее до того, когда нулей не будет и мы учтем все шестизначные числа без единиц. $9^6 = 531441$. Теперь отнимем от 10^6 вычисленное кол-во чисел без единиц, очевидно, получим кол-во чисел с единицами. $10^6 - 9^6 = 468559$. Надо отметить, что здесь учтен ноль, но не учтено 10^6. То есть итоговые значения будут: 531440 чисел без единиц и 468560 чисел с единицами. Но на общий ответ пункта а это, как видим, не влияет. Ответ: в первом миллионе больше чисел без единиц.

Пункт б)

Аналогично. Чисел без единиц $9^7 - 1$(не учитываем ноль). $= 4782968$. С единицами $10^7 - 9^7 + 1$(учитываем 10^7) $= 5217032$. Ответ: в певых десяти миллионах больше чисел с единицами.

Задача 3

Найдем количество десятизначных чисел в которых все цифры различны. Будем рассматривать число с левого края. На первое место мы можем поставить любую из 10 цифр, кроме нуля(так как число не может начинаться с нуля), то есть 9. На второе место, чтобы сохранялось свойство различности всех цифр, мы можем поставить любую цифру, включая теперь уже ноль, но исключая то, которое было на первом месте $=$ 9. На третье место мы можем поставить любую цифру за исключением двух, что стояли на предыдущих местах $= 8$. И так же рассуждаем далее, до 10-го места, на которое мы можем поставить уже лишь одну цифру. В итоге имееи $9 * 9 * 8 * 7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 3265920 = 9 * 9!$ десятизначных чисел в которых все цифры различны. Тогда мы можем получить кол-во десятизначных чисел у которых хотя бы две цифры совпадают просто отняв полученное значение от общего кол-ва десятизначных цифр. $(10^10 - 10^9) - 3265920 = 8996734080 = (9 * 10^9) - 9 * 9!$. А теперь просто посчитаем вероятность по известной формуле (кол-во благоприятных исходов)/(кол-во всех исходов). $8996734080/(10^10 - 10^9) = \frac{9*(10^9-9!)}{9*10^9} = \frac{10^9-9!}{10^9}$.

Ответ: $\frac{10^9-9!}{10^9}$.

Задача 4

а)Возьмем некого человека. Способов выбрать ему пару у нас будет $2n - 1$. Первая пара готова. После чего возьмем другого человека. Способов выбрать ему пару уже будет $2n - 3$. И т.д. вплоть до предпоследнего человека, способов выбрать которому пару будет один, так как останется лишь один человек. Можем записать это как $\prod_{i=0}^{n-1}(2n - 2 * i + 1)$. б) Из предыдущего пункта: 2n и $2*i$ очевидно четные и четное-четное=четное.

Тогда как четное+1 = нечетное. И нечетное*нечетное = нечетное, а у нас произведения ряда нечетных чисел – значит и все произведение будет нечетное.

Задача 5

Пусть первая масть у нас уже стоит в порядке возрастания. Теперь нам нужно вставить в колоду вторую масть в порядке возрастания. Вставлять каждую карту новой масти мы можем как до всех карт первой масти, так и между ними, так и после них, а значит мы точно можем воспользоваться методом перегородок, разбивая их на 14 групп: $\binom{13+14-1}{13}$. У нас станет уже 26 карт в колоде. Будем втсавлять карты третьей масти аналогично. Получим 39 карт и вставим точно таким же способом карты четвертой масти. Тогда итоговая формула будет: $\binom{26}{13} * \binom{39}{13} * \binom{52}{13}$.

Количество всех способов расположений карт – 52!. Тогда итоговая вероятность $\frac{52!}{\binom{26}{13}*\binom{39}{13}*\binom{52}{13}!} = \frac{1}{3*13!}$.

Задача 6

Всего способов выбрать шесть карт из колоды в 36 существует $\binom{36}{6} = \frac{31*32*33*34*35*36}{6!} = 1947792$.

а) Туза всего четыре, тогда в колоде без них 32 карты, а значит выбрать шесть карт без тузов совсем будет $\binom{32}{6} = \frac{27*28*29*30*31*32}{6!}$ способа. Значит количество способов выбрать шесть карт с хотя бы одним тузом будет равняться разности количества всех способов выбрать шесть карт и количества способов выбрать шесть карт без тузов.

Тогда вероятность будет равна: $\frac{\frac{31*32*33*34*35*36}{6!} - \frac{27*28*29*30*31*32}{6!}}{\frac{31*32*33*34*35*36}{6!}} \approx 0,534$.

б) Рассмотрим как вообще мы можем соотнести четыре масти к шести картам. У нас будет всего два способа такого разбиения: $2+2+1+1$ и 3+1+1+1. Теперь посчитаем кол-во способов подобрать такие разбиения. Для $2+2+1+1$: Выбрать две карты из одной масти у нас $\binom{9}{2}$ и это войдет в квадрате, так как мы выбираем две карты два раза для двух разных мастей. Еще, так как масти четыре, а нам нужно выбрать две из которых мы и будем брать по две карты, то это еще домножим на $\binom{4}{2}$ – кол-во способов выбрать две масти из четырех. И еще нам остается выбрать две любых карты из двух оставшихся мастей – это 9^2. В общем получаем $\binom{4}{2} * (\binom{9}{2})^2 * 9^2$. Для $3+1+1+1$: Выбрать три карты из одной масти у нас $\binom{9}{3}$ и, так как масти четыре нам еще нужно домножить это на 4 – кол-во способов выбрать одну масть из четырех. Теперь нам нужно выбратть три оставшихся карты других мастей. В других мастях так же по 9 карт, а значит способов сделать это 9^3. В общем получаем $4 * \binom{9}{3} * 9^3$.

Раз у нас два способа различных разбиений на масти, то ответом будет сумма вариантов каждого из способов. Конечная формула: $\binom{4}{2} * (\binom{9}{2})^2 * 9^2 + 4 * \binom{9}{3} * 9^3$.

А вероятность равна: $\frac{\binom{4}{2} * (\binom{9}{2})^2 * 9^2 + 4 * \binom{9}{3} * 9^3}{1947792} \approx 0,45$.

Задача 7

Начнем рассматривать комнаты по пордяку. Логично, что так как студентов 7, то у нас существует 7 способов поселить их в одноместную комнату. Далее будем заселять двухместную комнату, но так как мы перед этим уже заселили одноместную, то расчет будем делать уже из шести студентов. Тогда кол-во таких способов: $\binom{6}{2} = /frac6!2! * 4! = 15$. В конце будем заселять четырехместную комнату, но, так как у нас к этому моменту осталось всего четыре студента, то и способ будет один. Итоговая формула примет вид $7 * 15 * 1 = 105$.

Задача 8

Будем выбирать команды, которые играют на домашнем поле. Из 16 нам нужно выбрать 8 команд. Это $\binom{16}{8}$. Мы выбрали некую последовательность команд, играющих на домашнем поле, теперь нужно сопоставить каждому члену этой последовательности противника из оставшихся команд, которых восемь, а значит кол-во способов сопоставить противников 8!. Итоговая формула $\binom{16}{8} * 8!$.

Задача 9

Представим книги числами от одного до 20. После заметим, что нам нужно разделить их четырьмя перегородками, т.е. до первой перегородки – на первую полку, между первой и второй – на вторую, ... после четвертой – на пятую. Тогда добавим эти перегородки в наш ряд книг(к примеру представим их цифрой "0") и всего цифр получится 24. Тогда чтобы каждая книга побывала на всех возможных местах нам нужно рассмотреть все перестановки получившегося "ряда"чисел, а их будет 24!. Но так как мы считали перегородки тоже за книги у нас появились лишние перестановки. Так как перегородок было 4, то итоговая формула примет вид $24!/4! = 10626$.