Дискретная математика
Определения
(!!!) – неуверенность в определении

10 декабря 2016 г.

Принцип математической индукции.

Математическая индукция – метод математического доказательства, который используется, чтобы доказать истинность некоторого утверждения для всех натуральных чисел. Для этого сначала проверяется истинность утверждения с номером 1 — **база** индукции, а затем доказывается, что, если верно утверждение с номером n, то верно и следующее утверждение с номером $n + 1$ — **шаг** индукции, или индукционный переход.

Строгая формулировка **принципа математической индукции**:
Пусть у нас имеется последовательность утверждений $P_1, P_2, P_3, \ldots$. И пусть утверждение Y_1 верно *(база индукции)*, и мы умеем доказывать, что, из верности утверждения P_{n-1}, следует верность утверждения P_n*(шаг индукции)*. Тогда все утверждения в данной последовательности верны.

Также существует так называемый **принцип *полной* математической индукции:**
Пусть у нас имеется последовательность утверждений $P_1, P_2, P_3, \ldots$. Если для любого натурального n из того, что истинны все утверждения до него, т.е. $P_1, P_2, \ldots P_{n-1}$ следует истинность самого P_n, то все утверждения в это последовательности истинны .
В этой вариации база индукции оказывается лишней, поскольку оказывается частным случаем индукционного перехода.

Примеры:

1. Доказательство формулы суммы арифметической прогрессии.
2. Доказательство существования в графе-турнире гамильтонова пути.
3. Доказательство представимости любой подстановки в виде произведения транспозиций.

Правила суммы, произведения, дополнения. Конечные слова в алфавите. Перестановки, формулы для числа перестановок. Двоичные слова, подмножества конечного множества.

Правило суммы – если элемент А можно выбрать n способами, а элемент В можно выбрать m способами и данные способы никак не пересекаются, то выбрать А *или* В можно n + m способами.
Из учебника: Другими словами, если надо подсчитать количество объектов какого-то вида, и это объекты можно поделить на непересекающиеся типы, то общее количество объектов равно сумме количеств объектов каждого типа.

Правило произведения – если элемент A можно выбрать n способами, а элемент B можно выбрать m способами, то выбрать A *и* B можно $n + m$ способами.
Из учебника: Если объект интересующего нас вида строится в несколько шагов, и на каждом шаге есть выбор из какого-то числа вариантов, то общее количество объектов равно произведению количеств вариантов выбора для каждого из шагов.

Правило дополнения(!!!) – Если X является подмножеством Y, то разность множеств X и Y называется дополнением множества Y в множестве X.

Конечные слова в алфавите(!!!) – не нашел.

Перестановка из n элементов – это упорядоченный набор чисел 1,2, $\ldots, n$,обычно трактуемый как биекция на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$, которая числу i ставит в соответствие i-й элемент из набора. Число n при этом называется порядком перестановки.
Число всех перестановок степени n равняется $n!$.

Двоичное слово длины n(!!!) – последовательность символов 0 и 1 длины n.

Подмножества конечных множеств:
Множество – понятие множества обычно принимается за одно из исходных (аксиоматических) понятий, то есть несводимое к другим понятиям, а значит, и не имеющее определения. Для его объяснения используются описательные формулировки, характеризующие множество как совокупность различных элементов, мыслимую как единое целое.
Подмножество – множество A является подмножеством множества B, если все элементы, принадлежащие A, также принадлежит B.

Если конечное множество состоит из n элементов, то оно имеет ровно 2^n подмножеств.

Формула включений и исключений. Примеры использования.

Формула включений и исключений – комбинаторная формула, позволяющая определить мощность объединения конечного числа конечных множеств, которые в общем

случае могут пересекаться друг с другом.
Для двух элементов:
$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Для трех элементов:
$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$. Её называют формулой включений-исключений для трёх множеств — сначала вклю- чаем все множества, потом исключаем попарные пересечения, потом снова вклю- чаем пересечение всех трёх.

В общем случае:

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$$

Примеры:

1. Сколько есть перестановок чисел от 0 до 9 таких, что первый элемент больше 1, а последний меньше 8?

   Посчитаем количество "плохих"перестановок, то есть таких, у которых первый элемент меньше либо равен единице (множество таких перестановок обозначим X) и/или последний больше либо равен 8 (множество таких перестановок обозначим Y).

   Тогда количество "плохих"перестановок по формуле включений-исключений равно:

   $|X| + |Y| - |X \cap Y|$

   Проведя несложные комбинаторные вычисления, получим:

   $2 \cdot 9! + 2 \cdot 9! - 2 \cdot 2 \cdot 8!$

   Отнимая это число от общего числа перестановок 10!, получим ответ.

Биноминальные коэффициенты, основные свойства. Бином Ньютона.