Домашнее задание 19
Шумилкин Андрей, группа 163

Задача 1

Если граф задан матрицей смежности, то нам достаточно просто для каждой вершины подсчитать дизъюнкцию всех переменных в ее строке, кроме той, что стоит на диагонали и тогда мы получим для каждой вершины переменную равную единице только тогда, когда данная вершина соединенена с какой-то другой.
Тогда вторым шагом нам достаточно подсчитать конъюкцию всех этих вершин, которая будет равна нулю, когда хотя бы одна вершина не соединена ни с какими другими вершинами. Значит нам нужно просто взять отрицание подсчитанной конъюкции.
И так как мы просто один раз просматриваем матрицу смежности, размер которой n^2, то схема получится полиномиальной.

Задача 2

Заметим, что выбрать в графе три вершины мы можем C_n^3 способобами, т.е. $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ и данное выражение является полиномом.
Тогда будем выбирать такие тройки, делать конъюнкцию элементов, стоящих в них, которая будет равна единице тогда, когда они образуют треугольник. Тогда отрицание дизъюнкции конъюнкций всех троек как раз и вернет ответ, поскольку просто дизъюнкция конъюкций всех троек будет равна единице как раз тогда, когда в графе есть один треугольник.
И так как троек всего полиномиальное количество, то и схема получится полиномаиального размера.

Задача 3

Чтобы в графе существовал Эйлеров цикл он должен быть связен и все вершины в нем должны быть четной степени.
Четность степени всех вершин мы можем проверить для каждой вершины подсчитав xor(который так же называют сложением по модулю 2) всех переменных в ее строке матрицы смежности, кроме той, что стоит на диагонали. Заметим, что это значение будет равно нулю, если кол-во единиц будет четным. Тогда нам достаточно взять конъюкцию отрицаний данных значений для всех вершин и значение данного выражения будет равно единице, когда степени всех вершин в графе четны. Размерность этой схемы так же будет полиномиальна, так как мы просто раз просматриваем матрицу смежности.
А то, что можно проверить связность графа схемой, глубиной не больше O($log^2 n$) и то, как это сделать с помощью булевых степеней матрицы смежности мы рассматривали на лекции, тогда достаточно просто сделать конъюкцию получившихся из двух данных схем значений и, так как они обе имеют полиномиальный размер, то и итоговая схема так же будет полиномиальна.

Задача 4

Мы знаем, что любую функцию можно записать с помощью конъюкций и дизъюнкций просто представив ее в ДНФ.
Так же заметим, что всего функций будет 2^n. Тогда остается заметить, что СДНФ минимальной функции будет представима как дизъюнкция конъюкций, без отрицаний и размер такой схемы будет n.
Тогда размер общей схемы будет как раз $\mathrm{O}(n * 2^n)$.