Домашнее задание 8
Шумилкин Андрей, группа 163

Задача 1

Переформулируя задачу, нам нужно получить такую строчку, состоящую только из чисел 2, 3, 4 и 5, чтобы можно было между некоторыми из них поставить знаки умножения и полученное выражение равнялось 2007.
По ОТА мы можем разложить 2007 на простые множители, притом единственным образом. Это разложение будет иметь вид $3^2 \cdot 223$.
Тогда искомая строчка будет иметь вид 33223 и Вовочка расставил знаки следующим образом: $3 \cdot 3 \cdot 223 = 2007$. Значит у него две двойки и три тройки, то есть итоговая в четверти у него выйдет "3".
Можно задуматься, а не существует ли другой подходящей строки. Нет, поскольку по-другому представить число 2007 множителями(не только простыми), состоящими только из 2, 3, 4 и 5 нельзя, так как вообще единственное другое разложение(не считая самого 2007) имеет вид $669 \cdot 3$.

Задача 2

Нужно доказать, что произведение $(m+1) \cdot (m+2) \cdot \ldots \cdot (m+n)$ делится на:
а) n.
Пусть $(m+1) \equiv t\ (mod\ n)$. Тогда $(m+2) \equiv t+1\ (mod\ n)$. И в какой-то момент мы найдем такое $(m+k)$, когда $(t+k-1)$ будет равно n(поскольку k принимает значения от 1 до n и значит t в нашем сравнении принимает значения от 0 до n-1 по определению сравнений), а значит $(m+k) \equiv 0\ (mod\ n)$, т.е. $(m+k)$ делящееся на n, а значит и произведение в которое оно входит в качестве множителя тоже будет делиться на n.
б) n!.
Надо доказать, что $\frac{(m+1)\cdot(m+2)\cdot\ldots\cdot(m+n)}{n!}$. Можно заметить, что это равно $\mathrm{C}_{m+n}^{n}\cdot$, потому что $\mathrm{C}_{m+n}^{n} = \frac{(m+n)!}{n!*(m+n-n)!} = \frac{(m+1)\cdot(m+2)\cdot\ldots\cdot(m+n)!}{n!}$, а, как известно, биноминальные коэффициенты – это целые числа(можно заметить с помощью треугольника Паскаля, т.е. определения в виде $C_n^k = C_{n-1}^k + C_n^{k-1}$ и того, что в первых двух строках треугольника все числа – это единицы, т.е. они целочисленны), т.е. n подряд идущих чисел делятся на $n!$.

Задача 4

а)
Пусть число из 69 единиц будет x. Тогда заметим, что $9x + 1 = 10^{69}$.
71 – простое число, тогда по малой теореме Ферма $10^{70} \equiv 1\ (mod\ 71)$.
Значит пусть $t = 10^{69}$. Тогда $10t \equiv 1\ (mod\ 71)$. Легко заметить, что решением сравнения будет $t_0 = 64$ и тогда $10^{69} \equiv 64\ (mod\ 71)$.
Из представления x получаем: $9x \equiv 63\ (mod\ 71)$. $(9, 71) = 1 = 9 \cdot (8) - 71$. $8 \cdot 63 \equiv$

$4 \cdot 126 \equiv 4 \cdot 55 \equiv 2 \cdot 110 \equiv 220 \equiv 7 \ (mod\ 71)$.
Ответ: 7.
б)

Задача 5

Переформулируя: $4^{n!} \equiv 1 \ (mod\ n)$.
Любое нечетное положительное n будет взаимно просто с 4. Тогда по теореме Эйлера $4^{\varphi(n)} \equiv 1 \ (mod\ N)$. И тогда $4^{n!} \equiv 1 \ (mod\ N)$, поскольку n! делится на $\phi(n)$(т.к. $phi(n) < n$),то есть $4^{n!} - 1$ делится на n.

Задача 6

Если число делится на 4 и 5, то оно делится на 20. И если число делится на 20 и 6, то оно делится на 60.
Значит нам нужно найти минимальное число, которое на 60 делится с остатком 1, а на 7 с остатком ноль. Мы можем сделать это просто подбором(61, 121, 181, ...) и таким числом будет 301.

Задача 9

Переформулируя задачу, нужно найти подходящий x, при том, что $7^x \equiv 1 \ (mod\ 10000)$.Заметим, что 7 взаимно просто с N.
По теореме Эйлера $7^{\varphi(10000)} \equiv 1 \ (mod\ 10000)$ и значит такая тепень существует.
Теперь осталось вычислить функцию Эйлера от 10000. Разложим 10000 - 1 $=$ 9999 на протые множители. $9999 = 3^2 \cdot 11 \cdot 101$. Тогда функция Эйлера от 10000 равна: $(3^2 \cdot \frac{2}{3}) \cdot (11 \cdot \frac{10}{11}) \cdot (101 \cdot \frac{100}{101}) = 6000$. Имеем $7^{6000} \equiv 1 \ (mod\ 10000)$.