Домашнее задание 1

Задача 1

$$1 \cdot (n-1) + 2 \cdot (n-2) + \ldots + (n-1) \cdot 1 = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{6}.$$

Решение.

База.

$n = 1$.

$1 \cdot 0 = \frac{(1-1) \cdot 1 \cdot (1+1)}{6}$.

$0 = 0$

Шаг.

Мы можем представить левую часть уравнения как

$$\sum_{i=1}^{n-1} i \cdot (n-i) = \sum_{i=1}^{n-1} (i \cdot n - i^2) = \sum_{i=1}^{n-1} (i \cdot n) - \sum_{i=1}^{n-1} i^2.$$

Также заметим, используя формулу суммы арифмитической прогрессии, что

$$\sum_{i=1}^{n-1} (i \cdot n) = \left(\frac{1 + (n-1)}{2} \cdot (n-1) \right) \cdot n = \frac{n^3 - n^2}{2}.$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} (i \cdot (n+1)) = \sum_{i=1}^{n} (i \cdot n) + \sum_{i=1}^{n} (i) = \frac{n^3 + n^2}{2} + \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n^3 + 2n^2 + n}{2}.$$

Тогда докажем, что

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (i \cdot n) - \sum_{i=1}^{n} i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^{n-1} (i \cdot n) - \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \right) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{6} - \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{6}.$$

$$\frac{n^3 + 2n^2 + n}{2} - \frac{n^3 - n^2}{2} - n^2 = \frac{(n^3 + 2n^2 + n^2 + 2n) - (n^3 + n^2 - n^2 - n)}{6}.$$

$$\frac{3n^2 + n}{2} - n^2 = \frac{3n^2 + 3n}{6}.$$

$$\frac{n^2 + n}{2} = \frac{n^2 + n}{2}.$$

Задача 2

$$\cos(x) + \cos(2x) + \ldots + \cos(nx) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}.$$

База.

$n = 1$

$$\cos(x) = \frac{\sin\frac{3}{2}x}{2sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}.$$

$$\cos(x) = \frac{\sin\frac{3}{2}x}{2sin\frac{x}{2}} - \frac{\sin\frac{1}{2}x}{2sin\frac{x}{2}}.$$

$$\cos(x) = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos(x)}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

$$\cos(x) = \cos(x).$$

Шаг. Докажем, что

$$\cos(x) + \cos(2x) + \ldots + \cos(nx) + \cos x(n+1) = \frac{\sin(n+1+\frac{1}{2})x}{2sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}.$$

$$\frac{\sin(n+1+\frac{1}{2})x}{2sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} + cosx(n+1).$$

$$\frac{\sin(n+1+\frac{1}{2})x}{2sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x - \sin\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos x(n+1)}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

$$\frac{\sin(n+1+\frac{1}{2})x}{2sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x - \sin\frac{x}{2} + \sin(\frac{x}{2}+nx+x) + \sin(\frac{x}{2}-nx-x)}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

$$\frac{\sin(\frac{x}{2}+nx+x) - \sin\frac{x}{2}}{2sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x - \sin\frac{x}{2} + \sin(\frac{x}{2}+nx+x) + \sin(\frac{x}{2}-nx-x)}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

$$\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x + \sin(\frac{x}{2}-nx-x)}{2\sin\frac{x}{2}} = 0.$$

$$\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x - \sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} = 0.$$

$$\frac{0}{2\sin\frac{x}{2}} = 0.$$

$$0 = 0.$$

Задача 4

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > 13/24, \text{ для всех } n > 1.$$

База.

$n = 2$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = 14/24 > 13/24.$$

Шаг.

Докажем, что послдеовательность будет возрастающей, а значит, что $f(n+1) > f(n)$ и тогда из базы $=>$ $f(n) \geq 14/24$ при $n \geq 2$ и значит $f(n) > 13/24$ при $n > 1$.

$\left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2(n+1)}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{n+1} = \frac{2(n+1)+2n+1-2(2n+1)}{2(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0.$

Последовательность возрастающая, так как разность между ее текущим и предыдущим членом положительна.

Задача 7

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > 13/24, \text{ для всех } n > 1.$$

База.

$n = 1.$

$4/2^1 = 2.$

Шаг.

Заметим, что текущее число на шаге n будет делиться на 2^{n+1} либо нацело, либо с остатком равным единице.

Обозначим число на шаге n за t. Будем просто приписывать слева 3 или 4. Тогда мы можем представить следующее число как $3 * 10^n + t = 3*(2^n*5^n)+t$ в случае, если мы приписали тройку и $4*10^n+t = 2^{n+2}*5^n+t$. Легко заметить, что $2^{n+2} * 5^n$ делится на 2^{n+1} нацело, а $3 * (2^n * 5^n)$ с остатком один. Тогда мы можем в случае, если t делится на 2^{n+1} нацело добавлять в начало числа четверку, а если же с остатком 1 – тройку.