Домашнее задание 13
Шумилкин Андрей, группа 163

Задача 1

Пусть множество исходов – это последовательность, в которой родились дети и тогда все исходы равновероятны, так как рождение мальчика и девочки равновероятны. То, что мальчик родился в понедельник никак не влияет на вероятность, поскольку в тот же понедельник могла за ним родиться девочка или наоборот(двойняшки) и по условию рождение каждого – равновероятно. Обозначим М – мальчик, Д – девочка. Тогда множество исходов имеет вид $\{\text{ММ}, \text{МД}, \text{ДМ}, \text{ДД}\}$ и вероятность каждого исхода равна $1/4$. С учетом того, что по условию один из детей должен быть мальчиком, а другой – девочкой, нам пододят два из этих исходов – МД и ДМ, и тогда итоговая вероятность равна $1/2$.
Ответ: $\frac{1}{2}$.

Задача 3

Пусть множество исходов – это пятерки выбранных чисел и все исходы равновероятны.
Количество всех исходов равно C_{36}^5. Вероятность выбрать пятерку, среди элементов которой есть число 2 будет равна $\frac{C_{35}^4}{C_{36}^5}$, так как пятерка должна быть выбрана по условию и еще четыре элемента мы выбираем из оставшихся 35-и элементов множества. Вероятность выбрать пятерку, среди элементов которой будет число 5 так же равна $\frac{C_{35}^4}{C_{36}^5} = \frac{5}{36}$.
Теперь посчитаем вероятность выбрать элемент 5 при том, что двойка уже выбрана. Вероятность выбрать пятерку в которой есть элементы и 5, и 2 равна $\frac{C_{34}^3}{C_{36}^5}$.
Тогда вероятность выбрать элемент 5 при том, что элемент 2 уже выбран равна $\frac{C_{34}^3}{C_{36}^5} \cdot \frac{C_{36}^5}{C_{35}^4} = \frac{C_{34}^3}{C_{35}^4} = \frac{4}{35}$.
И, так как $\frac{5}{36} \neq \frac{4}{35}$, то есть вероятность события не равна вероятности его же при условии какого-то другого делаем вывод, что события зависимы.
Ответ: Данные события зависимы.

Задача 4

Пусть множество исходов – это какая-то определенная функция и все исходы равновероятны. Всего вариантов составить какую-либо функцию у нас будет n^n, поскольку она всюду определена и каждому из n элементов одного множества мы можем и должны сопоставить один из n элементов другого множества.
Составить же инъективную функцию у нас $n!$ способов, то есть мы будем элементам первого множества сопоставлять некую перестановку из элементов второго. Значит вероятность того, что функция инъективна равна $\frac{n!}{n^n}$.
Составить функцию так, чтобы $f(1) = 1$ у нас будет $(n-1)^n$ способов, то есть один

элемент мы определяем изначально, а для остальных $n-1$ выбираем один из n элементов другого множества. Тогда вероятность того, что $f(1)=1$ будет $\frac{1}{n}$
Если же хотим получить инъективную функцию у которой $f(1)=1$, то у нас будет $(n-1)!$ способов сделать это, поскольку мы определяем $f(1)=1$ и нам нужно для оставшихся $n-1$ элемента сопоставить различные элементы другого множества, в которое уже не входит 1, так как мы уже составили с ней пару.
Тогда вероятность того, что $f(1)=1$, при условии, что функция инъективна равна $\frac{(n-1)!}{n^n} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n}$.
Можно заметить, что она равна вероятности того, что $f(1)=1$, а значит данные события независимы.
Ответ: Данные события независимы.

Задача 5

Пусть множество исходов –
Обозначим правильное решение как 1, а неправильное – как 0. Рассмотрим все возможные исходы выбора первыми двумя членами жюри. Это: $\{00, 01, 10, 11\}$.
Теперь посчитаем вероятность того, что третий член жюри сделает правильный выбор для каждого случая:

1. 00. Итоговая вероятность равна 0, так как правильного решения тут нет.
2. 01. Вероятность такого случая равна $(1-p)\cdot p$, тогда вероятость правильного выбора третьим членом жюри равна $\frac{p\cdot(1-p)}{2}$.
3. 10. Вероятность такого случая равна $p\cdot(1-p)$, тогда вероятость правильного выбора третьим членом жюри равна $\frac{p\cdot(1-p)}{2}$.
4. 11. Вероятность такого случая равна p^2, тогда вероятость правильного выбора третьим членом жюри равна p^2.

А общая вероятность выбора правильного решения третьим из судей будет равна сумме данных вариантов:
$p\cdot(1-p)+p^2 = p^2+p-p^2 = p$.
Видно, что эта вероятность равна p – вероятности правильного решения, принимаемого одним добросовестным членом жюри. **Ответ:** Вероятность выбора верного решения равна p и равна вероятности правильного решения, принимаемого одним добросовестным членом жюри.

Задача 7

Посчитаем вероятность как бы спускаясь вниз, при этом вероятность выигрыша при счете 10:9 возьмем, конечно же, за 1.
Тогда вероятность выигрыша при 9:9 $= 1/2$.
9:8 – это будет сумма вероятностей вариантов (выиграть сразу) и (проиграть, а потом выиграть) и она равна $1/2\cdot 1/2 + 1/2 = 3/4$.

9:7 – это будет сумма вероятностей вариантов (выиграть сразу) и (перейти в случай 9:8), для которого мы уже посчитали вероятность и тогда она будет равна $1/2 + 1/2 \cdot 3/4 = 7/8/$. 8:9 – для выигрыша можем перейти в вариант 9:9 для которго уже посчитали, тогда равна $1/2 \cdot 1/2 = 1/4$. 8:8 – перейти в вариант 9:8, либо 8:9, тогда равна $1/2 \cdot 3/4 + 1/2 \cdot 1/4 = 1/2$. 8:7 – перейти в вариант 9:7, либо в вариант 8:8. Тогда вероятность равна $1/2 \cdot 1/2 + 1/2 \cdot 7/8 = 11/16$.
Ответ: 11/16.

Вероятность A при условии B:

$$Pr[A|B] = \frac{Pr[A \cap B]}{Pr[B]}.$$

$$Pr[A|B] = Pr[A] \cdot \frac{Pr[B|A]}{Pr[B]}.$$

Домашнее задание 14
Шумилкин Андрей, группа 163

Задача 1

Раз на вырыши уходит 40%, то есть это «то, что мы будем получать в среднем, если будем повторять эксперимент много раз» => $E[x] = 40$. Тогда по неравенству Маркова $Pr[x \geq 5000] \leq \frac{40}{5000} \leq 0,008$, то есть вероятность выиграть 5000 и больше, меньше или равна 0,008 что меньше 0,01.

Задача 2

В среднем люди жили 26 лет, то есть можем говорить, что математическое ожидание равно 26. Рассмотрим два крайних случая, когда люди, которые жили мало: когда они проживали 0 лет и когда проживали восемь. По условию прожить меньше 9 лет равна 1/2. Тогда прожить больше так же будет 1/2.
Отсюда для 0 получаем: $1/2 \cdot 0 + 1/2 \cdot t_1 = 26$, где t_1 – средний возраст проживших более 8 лет, когда жившие мало жили 0 лет в среднем. Тогда $t_1 = 52$.
И для 8 получаем: $1/2 \cdot 8 + 1/2 \cdot t_2 = 26$, где t_2 – средний возраст проживших более 8 лет, когда жившие мало жили 8 лет в среднем. Тогда $t_2 = 44$.
И раз мы рассмотрели крайние значения, то мы получили границы искомого интервала: 44 и 52.

Задача 3

Как известно, мат. ожидание честной кости равно 3,5, тогда у первого игрока мат. ожидание, то есть и средний выигрыш будет равен 12,25. А у второго средний выигрыш равен $\frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2}{6} = \frac{91}{6}$, что примерно равно 15,1 и больше, чем 12,25. Значит средний выигрыш второго игрока больше, чем у первого.

Задача 4

Пусть у нас будет некоторая индикаторная величина, которая обозначает начинается ли с данного элемента подстрока ab. Заметим, что ее мат. ожидание равно $1/4$, потому что возможных строк всего 4 – $\{1, 2, 3, 4\}$.
Тогда мы можем представить нашу функцию как сумму индикаторных величин, при этом заметим, что позиций с которых может начинаться строка длины 2 всего 19.
И мы знаем, что математическое ожидание мы тогда можем представить как сумму математических ожиданий индикаторных величин, которых всего 19 и значит искомое мат. ожидание равно $19/4$.

Задача 5

Пусть у нас есть некоторая индикаторная велиина, которая обозначает, что завтрак попробован. Вероятность того, что завтрак попробован будет $1 - \frac{9^{15}}{10^{15}}$ и ее математическое ожидание тому же.
Тогда мы можем представить среднее кол-во попробованных завтраков как сумму математических ожиданий индикаторных величин. Их всего 10 и тогда искомое математическое ожидание равно $\frac{9^{15}}{10^{14}}$.

Домашнее задание 15
Шумилкин Андрей, группа 163

Задача 1

Как мы знаем, если некоторое множество U бесконечно, а множество V конечно или счетно, то $U \cup V$ равномощно U.
Обозначим $C = A \setminus B$. Тогда мы можем записать $A = C \cup B$. Тогда по свойству, упомянотому выше мощность C равна мощности A и C не может быть не бесконечным, поскольку объединение счетного множества со счетным будет не более, чем счетным.
Значит все утверждение верно.

Задача 2

Заметим, что $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Как мы доказали в прошлой задаче $A \setminus B$ равномощно A. А $(B \setminus A)$ будет не более чем счетно, так как само B счетно.
И тогда из свойства, упомянутого в первой задаче и из транзитивности равномощности заметим, что раз $A \setminus B$ равномощно A и объединение бесконечного множества U и счетного множества V будет равномощно U, что $A \triangle B$ равномощно A.
Значит все утверждение верно.

Задача 3

Как мы знаем, если некоторое множество U бесконечно, а множество V конечно или счетно, то $U \cup V$ равномощно U.
Обозначим $C = A \setminus B$. Тогда мы можем записать $A = C \cup B$. Тогда по свойству, упомянотому выше мощность C равна мощности A и C не может быть не бесконечным, поскольку объединение конечного множества со счетным будет не более, чем счетным.
Значит все утверждение верно.

Задача 4

Как нам известно множество рациональных чисел счетно и в каждом интервале найдется хотя бы одно рациональное число по аксиоме полноты.
Тогда мы можем сопоставить кажому интервалу минимальную рациональную точку, находящуюся в нем. Такое сопоставление будет взаимно-однозначным, поскольку интервалы не пересекаются.
Раз мы смогли найти такое сопоставление, то мощность множества данных интервалов не больше, чем мощность множества рациональных чисел, а оно счетно. Значит множество интервалов будет не более чем счетно.

Задача 5

Как мы знаем, всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество.
Это подмножество равномощно $\mathbb{N}$. Мы можем заметить, что и само $\mathbb{N}$ содержит бесконечное счетное число счетных подмножеств. Такими подмножествами будут, например, являться степени простых чисел, поскольку, как известно, простых чисел бесконечное число, а их степень так же принадлежит $\mathbb{N}$. И при этом они не будут пересекаться по основной теореме арифметики.
Значит из первичной биекции некоторого подмножества нашего множества в $\mathbb{N}$ мы можем выделить сопоставления со множествами различных простых чисел в степени, которые являются счетными и которых бесконечное число, что и будет означать, что всякое бесконечное множество содержит бесконечное число непересекающихся счетных подмножеств.

Домашнее задание 16
Шумилкин Андрей, группа 163

Задача 1

Заметим, что множество вещественных положительных чисел и ноль континуально , поскольку его подмножеством является интервал [0,1], который имеет мощность континуум.
Мы можем каждый круг охарактеризовать тройкой чисел (x, y, r), то есть его координатами центра и радиусом, при этом видно, что для разных кругов эта характеристика будет разной.
Мы можем строить круг в любой точке плоскости и с любым радиусом, значит все три числа примут всевозможные значения из множества положительных вещественных чисел и нуля.
И, как нам известно, $\mathbb{R}^3$ равномощно $\mathbb{R}$, откуда и следует, что множество всех кругов на плоскости континуально.

Задача 2

Нет, неверно, поскольку мы можем выбрать какую-либо точку и построить континуум окружностей с центром в ней и которые имеют радиусы, к примеру, которые равны всем точкам из отрезка [0,1]. Множество таких окружностей будет континуально, поскольку множество всех точек отрезка [0,1] континуально, но множество их центров будет иметь мощность один, так как мы по построению сделали все центры в одной точке.

Задача 3

Да, существует.
Мы знаем, что $\mathbb{R}^2$ равномощно $\mathbb{R}$, а в $\mathbb{R}^2$ мы можем найти такое семейство – это множество параллельных оси x прямых, которые характеризуются $y = c$. Каждая прямая континуальна и их множество тоже континуально, так как c может быть любым из $\mathbb{R}$. И, так как $\mathbb{R}^2$ равномощно $\mathbb{R}$, существует инъекция из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}$ мы каждой прямой можем сопоставить некоторое число и они не будут пересекаться, так как и сами прямые не пересекаются.

Задача 4

Оно будет иметь мощность точно не больше мощности континуума, потому что мы можем любую последовательность перевести из двоичной системы счисления в десятичную и получить некоторое число, которое точно принадлежит R, а R имеет мощность континуума.
Воспользуемся теоремой Кантора-Берштейна.

Инъекция из множества двоичных последовательностей без трех подряд идущих единиц в обычные двоичные последовательности понятна – мы можем просто переводить в те же числа.
Теперь построим инъекцию из множества обычных двоичных послдеовательностей в последовательности без трех единиц подряд. Заметим, что единиц подряд тогда может быть одна или две. Тогда будем "переводить"наше число следующим образом: если на текущей позиции "0 то пишем одну единицу и за ней ноль, а если "1 то две единицы и за ними ноль.
Тогда в итоге получим последовательность без трех единиц подряд, соответствующую обычной двоичной последовательности, при том для разных они будут разные.
По теореме Кантора-Берштейна получаем, что наше множество равномощно множеству обычных двоичных последовательностей, а оно континуально, откуда следует, что наше множество так же имеет мощность континуум.

Домашнее задание 17
Шумилкин Андрей, группа 163

Задача 1

Воспользуемся теоремой Кантора-Берштейна.
Составим инъективные отображения из нашей последовательности в последовательность двоичных слов и обратно.
В последовательности двоичных слов мы можем просто между каждыми двумя символами вставить цифру два и тогда мы получим последовательность, состоящию из 0, 1 и 2 в которой по построению никакие два символа не идут подряд, а так же различным двоичным последовательностям соответствуют различные последовательности из 0, 1 и 2.
Нашу же последовательность мы можем перекодировать следующим образом: 0 будем сопоставлять 10, 1 – 100 и 2 – 1000. Тогда на выходе мы получим обычную двоичную последовательность, при этом она однозначно будет раскодироваться в последовательность из 0, 1 и 2, что и значит, что мы построили инъекцию.
Тогда по теореме Кантора-Берштейна выходит, что мощность множества наших последовательностей равна мощности множества двоичных последовательностей $\Rightarrow$ оно континуально.

Задача 2

Заметим, что отношений эквивалентности не меньше континуума, поскольку если взять даже те отношения, которые разбивают множества на два клааса эквивалентности мы можем закодировать их некоторыми бесконечными двоичными последовательностями таким образом: возьмем первый элемент и все элементы эквивалентные ему, включая его самого обозначим 0, а остальные – 1.

Далее будем идти по элементам и записывать цифру, которую мы сопоставили этому элементу и таким образом будет получаться некая двоичная последовательность, множество которых, как нам известно, континуально.
Теперь заметим, что не больше, поскольку мы каждому отношению можем поставить в соответствие последовательность натуральных чисел, а множество таких последовательностей так же континуально.
Строить такое соответвствие будем следующим образом: первому элементу сопоставляем класс 1 и все эквивалентные ему элементы так же обозначаем 1. Далее находим первый необозначенный элемент и ставим ему в соответствие 2, а так же всем эквивалентным ему элементам. И т.д. n-ому необозначенному элементу ставим число n. В итоге получаем последовательность натуральных чисел.
Таким образом выходит, что наше множество континуально.

Задача 4

Соответствующая ДНФ будет иметь следующий вид:

$$(\neg x_1\wedge\neg x_2\wedge x_3\wedge\neg x_4\wedge x_5\wedge\neg x_6\wedge x_7\wedge\neg x_8\wedge x_9)\vee(\neg x_1\wedge x_2\wedge\neg x_3\wedge x_4\wedge\neg x_5\wedge x_6\wedge\neg x_7\wedge x_8\wedge\neg x_9)\vee$$

$$(\neg x_1\wedge\neg x_2\wedge x_3\wedge\neg x_4\wedge x_5\wedge\neg x_6\wedge x_7\wedge\neg x_8\wedge x_9)\vee(\neg x_1\wedge x_2\wedge\neg x_3\wedge x_4\wedge\neg x_5\wedge x_6\wedge\neg x_7\wedge x_8\wedge x_9)\vee$$

$$(\neg x_1\wedge\neg x_2\wedge x_3\wedge\neg x_4\wedge x_5\wedge\neg x_6\wedge x_7\wedge x_8\wedge x_9)\vee(\neg x_1\wedge x_2\wedge\neg x_3\wedge x_4\wedge\neg x_5\wedge x_6\wedge x_7\wedge x_8\wedge x_9)\vee$$

$$(\neg x_1\wedge\neg x_2\wedge x_3\wedge\neg x_4\wedge x_5\wedge x_6\wedge x_7\wedge x_8\wedge x_9)\vee(\neg x_1\wedge x_2\wedge\neg x_3\wedge x_4\wedge x_5\wedge x_6\wedge x_7\wedge x_8\wedge x_9)\vee$$

$$(\neg x_1\wedge\neg x_2\wedge x_3\wedge x_4\wedge x_5\wedge x_6\wedge x_7\wedge x_8\wedge x_9)\vee(\neg x_1\wedge x_2\wedge x_3\wedge x_4\wedge x_5\wedge x_6\wedge x_7\wedge x_8\wedge x_9)$$

Задача 5

Мы можем выразить:

$$\neg X = X|X$$
$$X\vee Y = (X|X)|(Y|Y)$$
$$X\wedge Y = (X|Y)|(X|Y)$$

А мы знаем, что любое выражение можно выразить в виде ДНФ в котором как раз и применяются только эти три операции $\Rightarrow$ мы можем выразить любое выражение через штрих Шеффера $\Rightarrow$ система связок, состоящая только из штриха Шеффера обладает полнотой.

Задача 6

В качестве доказательства можно привести алгоритм приведения к КНФ, практически аналогичный алгоритму приведения к ДНФ, только эквивалентность представим по другому.
1. На первом шаге избавляемся от импликаций и эквивалентностей в выражении, представляя их в виде:

$$A\to B = \neg A\vee\neg B$$

$$A \leftrightarrow B = (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$$

2. Далее все знаки отрицания, относящиеся к выражениям заменим так, чтобы они относились к конкретным переменным:

$$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$$

3. Далее избавимся от всех знаков двойного отрицания.
4. Применяем там, где нужно, свойство дистрибутивности конъюкции и дизъюнкции.

В итоге получаем конъюкцию дизъюнкций переменных или их отрицаний.

Домашнее задание 18
Шумилкин Андрей, группа 163

Задача 1

Заметим, что данное выражение истинно, когда в нем либо одна переменная равна 1, либо три переменных равны 1.
Мы можем с помощью выражения $(x \wedge y \wedge z)$ записать ту часть выражения, которая истинна, когда все три переменных рывны 1.
Тогда нам остается записать часть выражения, которая истинна тогда и только тогда, когда лишь одна переменная равна 1.
Мы можем это сделать с помощью такого выражения: $(\neg((x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z))) \wedge (x \vee y \vee z)$. То есть мы сначала проверяем, что в каэждой паре переменных хотя бы один равен нулю, откуда и получаем, что всего будет не больше одной переменной, равной единице. А потом проверяем, что она именно одна, а не ноль.
В итоге получаем:

$$(x \wedge y \wedge z) \vee (\neg((x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z))) \wedge (x \vee y \vee z).$$

Задача 2

Выпишем 9 наборов переменных, на которых функция истинна:
$\{0111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111\}$
Видим, что в восьми из них первая цифра истинна, а в одном – три последних. Заметим, что в оставшихся наборах, на которых функция не истинна такого нет, поэтому мы можем записать ее просто в виде $x_1 \vee (x_2 \wedge x_3 \wedge x_4)$.
Тогда схему можем записать как $g_1 = x_1,\ g_2 = x_2,\ g_3 = x_3,\ g_4 = x_4,\ g_5 = g_2 \wedge g_3,\ g_6 = g_4 \wedge g_5,\ g_7 = g_1 \wedge g_7$. Выход – g_7.

Задача 3

Мы можем строить схему по выражению вида: $(x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4) \vee \ldots \vee (x_{n-2} \wedge \neg x_{n-1} \wedge x_n)$.
Тогда мы можем добавить на первом "уровне"2n вершин в наш граф-схему: сами значения переменных $x_1, x_2, \ldots x_n$ и отрицания значений переменных $x_2, x_3, \ldots x_{n-1}$.
Тогда на втором уровне будем делать конъюкицию первых двух переменных в каждой из скобок, то есть $(x_1 \wedge \neg x_2), (x_2 \wedge \neg x_3), \ldots (x_{n-2} \wedge \neg x_{n-1})$ – на нем у нас будет n вершин.
Тогда на третьем уровне будем делать конъюкцию значений в вершинах, полученных на втором уровне с третьей переменной в скобках. На это так же потребуется n вершин.
После чего у нас останется n значений и нам нужно будет проверить равно ли хотя бы одно из них 1. Тогда мы просто сделаем дизъюнкцию первого значения со вторым, далее полученного значения с третьим и так далее. На выходе у нас как раз будет 1, если в исходном слове было подслово 101 и на эти дизъюнкции у нас уйдет n вершин.
Тогда размер полученной схемы будет (из рассчета 2n + n + n + n) – $O(6n) = O(n)$.

Задача 4

Будем представлять двоичное число из n разрядов как набор переменных $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots x_0$.
Сначала поймем, что простой путь умножить число на три в двоичном представлении – это сначала удвоить его, а потом прибавить к результату его самого.
Удвоение числа делается достаточно просто – оно сдвигается влево на 1 бит.
Теперь разберемся со сложением. Заметим, что при сложении двух данных чисел у нас получиться число с $n + 1$ разрядом. Обозначим их как $y_n, x_{n-1}, \ldots y_0$.
Начнем складывать. $y_0 = x_0$, поскольку второе число сдвинуто влево в этом разряде у него 0.
Чтобы продолжить складывать нам нужно ввести дополнительную переменную, назовем их z, в которой мы будем хранить то число, которое будет переходить в следующий разряд. Т.е. $y_1 = x_1 \vee x_0$ и $z_1 = x_0 \wedge x_1$ и тогда $y_2 = x_2 \vee x_1 \vee z_1$.
Тогда далее имеем: $y_i = x_i \vee x_{i-1} \vee z_{i-1}$,
$z_i = (x_{i-1} \wedge x_i) \vee (x_{i-1} \wedge z_{i-1}) \vee (x_i \wedge z_{i-1})$.
И такое упрощение, а точнее то, что мы не повторяем вычисление пременных, а уже используем вычисленные раннее позволяет нам построить схему полиномиального размера.

Домашнее задание 19
Шумилкин Андрей, группа 163

Задача 1

Если граф задан матрицей смежности, то нам достаточно просто для каждой вершины подсчитать дизъюнкцию всех переменных в ее строке, кроме той, что стоит на диагонали и тогда мы получим для каждой вершины переменную равную единице только тогда, когда данная вершина соедиденена с какой-то другой.
Тогда вторым шагом нам достаточно подсчитать конъюкцию всех этих вершин, которая будет равна нулю, когда хотя бы одна вершина не соединена ни с какими другими вершинами. Значит нам нужно просто взять отрицание подсчитанной конъюкции.
И так как мы просто один раз просматриваем матрицу смежности, размер которой n^2, то схема получится полиномиальной.

Задача 2

Заметим, что выбрать в графе три вершины мы можем C_n^3 способобами, т.е. $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ и данное выражение является полиномом.
Тогда будем выбирать такие тройки, делать конъюнкцию элементов, стоящих в них, которая будет равна единице тогда, когда они образуют треугольник. Тогда отрицание дизъюнкции конъюнкций всех троек как раз и вернет ответ, поскольку просто дизъюнкция конъюкций всех троек будет равна единице как раз тогда, когда в графе есть один треугольник.
И так как троек всего полиномиальное количество, то и схема получится полиномаиального размера.

Задача 3

Чтобы в графе существовал Эйлеров цикл он должен быть связен и все вершины в нем должны быть четной степени.
Четность степени всех вершин мы можем проверить для каждой вершины подсчитав xor(который так же называют сложением по модулю 2) всех переменных в ее строке матрицы смежности, кроме той, что стоит на диагонали. Заметим, что это значение будет равно нулю, если кол-во единиц будет четным. Тогда нам достаточно взять конъюкцию отрицаний данных значений для всех вершин и значение данного выражения будет равно единице, когда степени всех вершин в графе четны. Размерность этой схемы так же будет полиномиальна, так как мы просто раз просматриваем матрицу смежности.
А то, что можно проверить связность графа схемой, глубиной не больше $O(log^2 n)$ и то, как это сделать с помощью булевых степеней матрицы смежности мы рассматривали на лекции, тогда достаточно просто сделать конъюкцию получившихся из двух данных схем значений и, так как они обе имеют полиномиальный размер, то и итоговая схема так же будет полиномиальна.

Задача 4

Мы знаем, что любую функцию можно записать с помощью конъюкций и дизъюнкций просто представив ее в ДНФ.
Так же заметим, что всего функций будет 2^n. Тогда остается заметить, что СДНФ минимальной функции будет представима как дизъюнкция конъюкций, без отрицаний и размер такой схемы будет n.
Тогда размер общей схемы будет как раз O($n * 2^n$).

Домашнее задание 19
Шумилкин Андрей, группа 163

Задача 1

Если любая цифра числа π вычислима, то и любая пятерка подряд идущих цифр в числе π вычислима, т.е. мы моежм вычислять по числу из числа π и для всем встречающимся пятеркам сопоставлять единицу в некоторой функции, а тогда и их множество разрешимо по определению, т.к. множество называется разрешимым, если его характеристическая функция вычислима.
Хоть число π и бесконечно, а значит мы точно не знаем все пятерки цифр, которые могут в нем встречаться, но всего таких пятерок может быть лищь 10^5, а значит кол-во элементов в подмножестве, которое должен перечислить алгоритм также будет конечно. Любое конечное множество разрешимо и если множество разрешимо, то оно и перечислимо.

Задача 2

Раз мы можем перечислить элементы всего множества X, то мы точно так же можем перечислить элементы и необходимого подмножества X – чисел, сумма цифр которых равна 10.
Т.е. мы можем «идти» по X как при его перечислении, но включать в то множество, которое мы перечисляем только его элементы, соответсвующие условию.

Задача 3

Мы можем описать алгоритм перечисления такого множества: берем декартово произведние множеств $A \times B$ и каждый его элемент выводим. Тогда получается, что это вычилсимая функиция из множества $A \times B$ в некоторое множество его значений, а множество значений вычислимой функции – перечислимо.

Задача 4

По сути мы можем описать такой алгоритм, проверяющий некоторое свойство натуральных чисел: он на вход получает число и выводит и дает ответ 1(да), если данное число не принадлежит конечному подмножеству элементы которого не являются значениями рассматриваемой функции.
Тогда полученное множество будет по определению разрешимым, так как его характиристическая функция вычилсима. А разрешимое множество также является перечислимым.
А для непустого множество это равносильно тому, что оно является множеством значений некойвсюду определенной вычислимой функции, а значит рассматриваемая функция вычислима.

Домашнее задание 21
Шумилкин Андрей, группа 163

Задача 1

Поскольку существует функция, которая на всей области своео определения равна константе n и притом она вычислима, поскольку мы просто для любых входных данных выводим n, то для ее вычисления в нумерации универсальных функций есть некоторая программа, имеющая номер p, притом на элементе с тем же номером p ее значение будет равно равно n. Тогда и искомое множество будет совпадать с $\mathbb{N}$

Домашнее задание 22
Шумилкин Андрей, группа 163

Задача 1

Мы можем написать бесконечное количество различных программ, результатом работы которых при входных даных, равных некоторому x, будет 2017, потому что мы можем делать в самой программе хоть что(к примеру, комментарии, которые содержат произвольный текст приводят к тому, что возникает бесконечное множество таких программ), поэтому все они будут различны, но выводить константное число. Тогда, если мы занумеруем эти программы, как раз получится, что найдется бесконечно много подходящих p.

Задача 2

Введем функцию от двух аргументов – $V(n, x) = nx$. Видно, что она вычислима – достаточно просто домножить входные данные на константу n и также она всюду определена.
По свойству главных нумераций есть $V(n, x) = U(q(n), x) = nx$, то есть так же есть и необходимая всюду определенная вычислимая функция $q(n)$.

И тогда по теореме о неподвижной точке существует $U(q(n), x) = U(n, x) = nx$, поскольку функция $q(n)$ вычислима, что мы заметили из свойства главных нумераций.

Задача 3

По свойству главных нумераций есть $V(n, x) = U(q(n), x)$, то есть так же есть и необходимая всюду определенная вычислимая функция $q(n)$.

И тогда по теореме о неподвижной точке существует $U(q(p), x) = U(p, x)$, поскольку функция $q(n)$ вычислима, что мы заметили из свойства главных нумераций. Отсюда и выходит, что найдется такое р, что $V(p, x) = U(p, x)$

Домашнее задание 23
Шумилкин Андрей, группа 163

Задача 1

Как нам известно из тезиса Чёрна-Тьюринга всякая вычислимая функция вычислима машиной Тьюринга, а нигде не определенная функция является вычислимой, поскольку достаточно просто "зациклить"программу, то есть чтобы она уклонилась от выдачи какого-либо ответа – это и будет алгоритм ее вычисления.
Значит существует МТ, которая вычисляет нигде не определенную функцию.
Пусть A – входной алфавит и q – некотрый символ из $A \cup \{\Lambda\}$ Тогда нам достаточно просто зациклить МТ и мы можем сделать это следующей таблице переходов:

$$\delta :\mapsto \Big\{ (q, 0) \mapsto (q(\text{тот же самый}), 0, +1)$$

Где 0 – начальное состояние.
Действительно, согласно таблице, машина сначала просто "пройдет"по входным данным в виде числа, а потом продолжит двигаться вправо по пустым символам бесконечно, так как лента машины бесконечна.

Задача 2

Приведем таблицу переходов:

$$\delta :\mapsto \begin{cases} (0,0) \mapsto (1,0,+1) \\ (1,0) \mapsto (0,0,+1) \\ (\Lambda,0) \mapsto (\Lambda,0,0) \end{cases}$$

Где 0 – начальное состояние.

Заметим, что если головка находится над символом из алфавита w, то есть над 0 или 1, то она сдвинется вправо, предварительно записав в предыдущую ячейку "отрицание"текущего символа, то есть инвертирует его.
Когда же головка дойдет до пробельного символа она просто остановится, при этом к этому моменту все символы входа из w будут инвертированы, что по определению, данному в задаче, и будет представлять инвертированное входное слово.

Задача 3

Пусть q – любая буква входного алфавита, а l – любой символ из символов входного алфавита и Λ.

Приведем таблицу переходов:

$$\delta :\mapsto \begin{cases} (a,0) \mapsto (a,1,+1) \\ (b,1) \mapsto (b,2,+1) \\ (a,2) \mapsto (a,3,+1) \\ (q,3) \mapsto (q,3,+1) \\ (\Lambda,3) \mapsto (\Lambda,4,-1) \\ (q,4) \mapsto (\Lambda,4,-1) \\ (\Lambda,4) \mapsto (1,5,+1) \\ \\ (a,1) \mapsto (a,0,+1) \\ (b,d \in \{0,2\}) \mapsto (b,0,+1) \\ (c,d \in \{0,1,2\}) \mapsto (c,0,+1) \\ (\Lambda,d \in \{0,1,2\}) \mapsto (\Lambda,6,-1) \\ (q,6) \mapsto (\Lambda,6,-1) \\ (\Lambda,6) \mapsto (0,5,+1) \\ \\ (\Lambda,5) \mapsto (\Lambda,5,0) \end{cases}$$

Где 0 – начальное состояние.
Действительно, если головка наткнется на последовательность aba, то машина перейдет в состояние 3, после чего просто сдвинется до ближайшего справа Λ, перейдет

в состояние 4 и пойдет влево, до ближайшего Λ, попутно «затирая» все входные данные. Когда она дойдет до Λ, то у нас на ленте будут только пробельные символы, а значит достаточно лишь вывести ответ – 1, поскольку мы в состоянии 4, а в него можно попасть, только если мы нашли aba. Поэтому мы ставим один и переходим в состояние 5, а также сдвигаемся на одну клетку вправо, где стоит Λ и, согласно таблице переходов, останавливаемся. Таким образом в случае нахождения последовательности символов aba машина работает правильно.

Если же машина не находит aba, то она так и идет до ближайшего справа Λ, не доходя до состояния 3 и когда она приходит в него она переходит в состояние 6 и идет до ближайшего слева Λ, попутно «затирая» входные данные, подобному случаю, когда мы все-таки нашли aba, только в данном случае у нее другое состояние –6. Придя в ближайшее слева Λ она выводит ответ – 0, и переходит в состояние 5, сдвигается вправо и останавливается. Таким образом в случае ненахождения последовательности символов aba машина также работает правильно.

Задача 4

Опишем общую идею алгоритма, который будем реализовывать с помощью МТ.
У нас сначала должны идти нули, а потом единицы, то есть по итогу у нас не должно быть подслов вида 10, но кол-во 0 и 1 не должно измениться. Значит нам нужно преобразовывать 10 в 01.
Тогда мы можем просто ходить по слову и искать самое левое 10, преобразовывать его в 01 и возвращаться в начало слова, и так до тех пор, пока 10 не останется, то есть пока мы не дойдем до ближайшего справа Λ, не найдя ни одного.
Мы можем реализовать следующим образом. Пусть s_0 – начальное состояние. Начинаем двигаться влево, сохраняя его и символы, если встречаем нули. Если же мы встречаем 1, то переходим в s_1 и сдвигаемся вправо далее, если далее встречаем 0, находясь в состоянии s_1, то переходим в s_2, пишем на его месте 1, сдвигаемся влево. Далее пишем 0, снова сдвигаемся влево и переходим в состояние s_3.
В состоянии s_3 мы должны просто двигаться влево до ближайшего $Lambda$ и, дойдя до него, не изменяя его, сдвинуться вправо и перейти в состояние s_0 для которого уже описаны действия выше.
Если же мы встречаем Λ в состоянии s_1 или s_0, то мы просто останавливаемся, потому что это значит, что мы не встретили по пути 10 и слово уже отсортированно в требующемся нам порядке.
Поскольку мы смогли описать алгоритм в виде для МТ мы и можем построить такую МТ, то есть она существует.