Домашнее задание 6

Задача 1

Как известно, в дереве есть 2-раскраска. Так как в дереве 2n вершин, то кол-во вершин одного из цветов точно больше или равно n. Тогда мы можем просто выбрать n вершин этого цвета, а они по определению раскраски графа не будут соединены ребрами.

Задача 2

Предположим, что число листьев меньше или равно половине вершин. Для определенности предположим, что равно. В нашем дереве n-1 ребро. Тогда по лемме о рукопожатиях сумма степеней всех вершин должна быть равна 2n - 2.

Посчитаем теперь сумму степеней, получающуюся у нас. Для определенности будем считать, что, раз у не листовых вершин степень не равна 0(так как дерево связно), 1(так как листья мы уже отобрали) и 2(по условию задачи) оно равно трем. $n/2(суммастепенейлистьев) + n/2 * 3 = 2n$, что больше оценки, полученной с помощью леммы у рукопожатиях. Получили противоречие. При этом, если мы решим сделать все-таки кол-во листьев меньше, чем n/2, то сумма степеней вершин будет увеличиваться, потому что "переделывая"лист во внутреннюю вершину мы увеличиваем его степень как минимум на два(потому что миимальная степень три, как было показано выше).

Значит в дереве обязательно должно быть больше половины листьев.

Задача 4

Сразу заметим, что кубики, которые находятся на границе, можно "отбросить только учтя, что нам необходимо сделать к ним "выход" из внутренних кубиков.

Тогда внутренних кубиков останется $(n-2)^3$. Значит всего компонент связности графа $(n-2)^3+1$, учитывая необходимость связать все внутренние кубики хотя бы с одним внешним.

Значит, чтобы сделать одну компоненту связности, нам нужно добавить как минимум $(n-2)^3$ ребер, то есть, говоря в терминах задачи, удалить $(n-2)^3$ перегородок.

Задача 5

Сделаем ориентированный граф из всех цифр и соединим ребрами те, которые образуют двузначное число, делящееся на 7. Направлено ребро из той вершины, которое обозначает десятки в числе в ту, которая обозначает единицы.

Тогда для поиска необходимого числа мы можем просто начать с как можно большего числа и переходить в максимально возможное, при этом помня, что можно заходить в каждую вершину только один раз.

На построенном графе(рисунок прикрепил к письму) такой обход будет таким: начнем с 9, как с самого большого, перейдем в 8, оттуда в 4 из 4 в 2 и оттуда в 1. Получится 98421.

Это число удовлетворяет условию о том, что соседние числа должны образовывать двузначное, делящееся на семь и оно наибольшее, так как в графе мы начали в максимально возможной цифре и переходили в максимально возможную.

Задача 6

Начнем обход в ширину из той вершины, которую мы желаем сделать достижимой из всех остальных. То есть сначала перейдем во все доступные из нее вершины, потом из этих вершин во все доступные и них. При этом каждый раз переходя от одной вершины к другой, будем добавлять ребро, направление которого противоположно направлению нашего перемещения между этими двумя вершинами. Тогда в итоге мы получим граф из каждой вершины которого мы можем попасть в нашу начальную вершину, поскольку в исходном неориентированном графе существовал путь от нашей начальной вершины до некоторой другой и мы, проходя по этому пути добавляли ребра, ведущие по направлению к нашей начальной вершине.

Задача 7

Докажем по индукции.

База.
n=3. Как бы не направили ребра в таком графе"треугольнике" мы можем просто начать с той вершины из которой будет путь длиной два, а такой точно будет и который и будет являться ггамильтоновым.
Шаг.
Пусть существует гамильтонов обход в любом турнире на n вершинах. Докажем, что он существует так же и в графе на n+1 вершине.

Рассмотрим граф на n+1 вершине. Выберем в нем любую вершину v. Тогда в графе с удаленной вершиной v и всеми инцидентными ей ребрами, существует гамильтонов путь по предположению индукции. Обозначим данный путь как $g_1 \to g_2 \to \dots \to g_n$.

В нашем графе на n+1 вершине по определению должно быть либо ребро $v \to g_1$, либо ребро $g_1 \to v$. Если у нас есть ребро $v \to g_1$, то все – мы нашли гамильтонов путь в данном графе, то есть мы преходим из нашей вершины по ребру в гамильтонов путь на графе из n вершин и получаем как раз гамильтонов путь на нашем графе.

Если же у нас ребро $g_1 \to v$, то посмотрим есть ли такое ребро, которое ведет из нашей вершины в гамильтонов путь на графе из n вершин, т.е. $v \to g_t$. Если есть, то возьмем вершину с минимальным t, а значит все ребра до этого будут вести в нашу вершину v и тогда мы можем просто перейти из предыдущей вершины в гамильтоновом пути – g_{t-1} – в нашу вершину v и это и получится гамильтонов путь в графе на n+1 вершине.

Если же у нас нет такой вершины, в которую ведет ребро из нашей вершины, то тогда обязательно есть ребро $g_n \to v$, то есть пройдя по гамильтонову пути для графа на n вершинах мы перейдем в нашу вершину v по данному ребру, а это и есть гамильтонов путь для графа на n+1 вершине.

Получается, что в любом турнире мы можем построить гамильтонов путь.