Домашнее задание 17
Шумилкин Андрей, группа 163

Задача 1

Воспользуемся теоремой Кантора-Берштейна.
Составим инъективные отображения из нашей последовательности в последовательность двоичных слов и обратно.
В последовательности двоичных слов мы можем просто между каждыми двумя символами вставить цифру два и тогда мы получим последовательность, состоящию из 0, 1 и 2 в которой по построению никакие два символа не идут подряд, а так же различным двоичным последовательностям соответствуют различные последовательности из 0, 1 и 2.
Нашу же последовательность мы можем перекодировать следующим образом: 0 будем сопоставлять 10, 1 – 100 и 2 – 1000. Тогда на выходе мы получим обычную двоичную последовательность, при этом она однозначно будет раскодироваться в последовательность из 0, 1 и 2, что и значит, что мы построили инъекцию.
Тогда по теореме Кантора-Берштейна выходит, что мощность множества наших последовательностей равна мощности множества двоичных последовательностей $\Rightarrow$ оно континуально.

Задача 2

Заметим, что отношений эквивалентности не меньше континуума, поскольку если взять даже те отношения, которые разбивают множества на два клааса эквивалентности мы можем закодировать их некоторыми бесконечными двоичными последовательностями таким образом: возьмем первый элемент и все элементы эквивалентные ему, включая его самого обозначим 0, а остальные – 1.
Далее будем идти по элементам и записывать цифру, которую мы сопоставили этому элементу и таким образом будет получаться некая двоичная последовательность, множество которых, как нам известно, континуально.
Теперь заметим, что не больше, поскольку мы каждому отношению можем постаавить в соответствие последовательность натуральных чисел, а множество таких последовательностей так же континуально.
Строить такое соответвствие будем следующим образом: первому элементу сопоставляем класс 1 и все эквивалентные ему элементы так же обозначаем 1. Далее находим первый необозначенный элемент и ставим ему в соответствие 2, а так же всем эквивалентным ему элементам. И т.д. n-ому необозначенному элементу ставим число n. В итоге получаем последовательность натуральных чисел.
Таким образом выходит, что наше множество континуально.

Задача 4

Соответствующая ДНФ будет иметь следующий вид:

$$(\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4 \wedge x_5 \wedge \neg x_6 \wedge x_7 \wedge \neg x_8 \wedge x_9) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4 \wedge \neg x_5 \wedge x_6 \wedge \neg x_7 \wedge x_8 \wedge \neg x_9) \vee$$
$$(\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4 \wedge x_5 \wedge \neg x_6 \wedge x_7 \wedge \neg x_8 \wedge x_9) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4 \wedge \neg x_5 \wedge x_6 \wedge \neg x_7 \wedge x_8 \wedge x_9) \vee$$
$$(\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4 \wedge x_5 \wedge \neg x_6 \wedge x_7 \wedge x_8 \wedge x_9) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4 \wedge \neg x_5 \wedge x_6 \wedge x_7 \wedge x_8 \wedge x_9) \vee$$
$$(\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4 \wedge x_5 \wedge x_6 \wedge x_7 \wedge x_8 \wedge x_9) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4 \wedge x_5 \wedge x_6 \wedge x_7 \wedge x_8 \wedge x_9) \vee$$
$$(\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4 \wedge x_5 \wedge x_6 \wedge x_7 \wedge x_8 \wedge x_9) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4 \wedge x_5 \wedge x_6 \wedge x_7 \wedge x_8 \wedge x_9)$$

Задача 5

Мы можем выразить:

$$\neg X = X|X$$
$$X \vee Y = (X|X)|(Y|Y)$$
$$X \wedge Y = (X|Y)|(X|Y)$$

А мы знаем, что любое выражение можно выразить в виде ДНФ в котором как раз и применяются только эти три операции $\Rightarrow$ мы можем выразить любое выражение через штрих Шеффера $\Rightarrow$ система связок, состоящая только из штриха Шеффера обладает полнотой.

Задача 6

В качестве доказательства можно привести алгоритм приведения к КНФ, практически аналогичный алгоритму приведения к ДНФ, только эквивалентность представим по другому.
1. На первом шаге избавляемся от импликаций и эквивалентностей в выражении, представляя их в виде:

$$A \rightarrow B = \neg A \vee \neg B$$
$$A \leftrightarrow B = (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$$

2. Далее все знаки отрицания, относящиеся к выражениям заменим так, чтобы они относились к конкретным переменным:

$$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$$

3. Далее избавимся от всех знаков двойного отрицания.
4. Применяем там, где нужно, свойство дистрибутивности конъюкции и дизъюнкции.

В итоге получаем конъюкцию дизъюнкций переменных или их отрицаний.