Домашнее задание 7

Задача 1

a) Верно. $a = k \cdot c, b = l \cdot c + r$. Тогда $a + b = (k + l) \cdot c + r.$, а значит $a + b$ не делится на с.
b) Неверно. Контрпример: $a = 1, b = 5, c = 3$.
1 не делится на 3 и 5 не делится на 3, но $1 + 5 = 6$ делится на 3.
c) Неверно. $a = k \cdot c + r, b = l \cdot c + t$. Тогда $a \cdot b = c \cdot (klc + kt + lr) + rt$. Значит если произведение остатков будет делиться на c, то и ab будет делиться на c. Как контрпример можно привести: $a = 12, b = 15, c = 10$. 180 делится на 10.
d) Верно. $a = b \cdot l, b = c \cdot k$, тогда $a = c \cdot k \cdot l$ и $a \cdot b = c^2 \cdot k^2 \cdot l$, что, очевидно, делится на c^2.

Задача 2

*a)*При разложении каждого множителя факториала на простые двойка присутствует в 2(1), 4(2), 6(1), 8(3), 10(1), 12(2), 14(1), 16(4), 18(1), 20(2). В скобках указано в какой степени она в него входит. Всего получается 2^{18}. Значи 20! при делении на 2^{15} даст остаток 0.
b) Остаток будет равен 2^{18}.
Как видно из предыдущего пункта 20! можно представить в виде $2^{18} \cdot (2k + 1) = 2^{19} \cdot k + 2^{18}$. Видно, что $2^{19} \cdot k + 2^{18} \equiv 2^{18}(mod\ 2^{19})$.

Задача 4

Воспользуемся алгоритмом Евклида.
$(2^{2016} - 1, 2^{450} - 1)$.
$(2^{2016} - 1 - (2^{450} - 1), 2^{450} - 1)$.
$(2^{2016} - 2^{450}, 2^{450} - 1)$.
$(2^{2016} - 2 \cdot 2^{450} + 1, 2^{450} - 1)$.
$(2^{2016} - 2^{1566} \cdot 2^{450} + 2^{1566} - 1, 2^{450} - 1)$.
$(2^{1566} - 1, 2^{450} - 1)$.
Тогда далее:
$(2^{1566} - 1, 2^{450} - 1)$.
$(2^{216} - 1, 2^{450} - 1)$.

$(2^{216}-1, 2^{18}-1)$.
$(2^{18}-1, 2^{18}-1)$.
$gcd(2^{2016}-1, 2^{450}-1) = 2^{18}-1$.

Задача 5

$74 \cdot t \equiv 1\ (mod\ 47)$. Решим диофантово уравнение вида $74x + 47y = 1$
$47x + 27y = 1$
$27x + 20y = 1$
$20x + 7y = 1$
$7x + 6y = 1$
$6x + y = 1$
$x = 1$
$y = -7$
Значит искомый обратный элемент равен семи.

Задача 6

Решим диофантово уравнение вида $39x + 221y = 104$
$221x + 39y = 104$
$39x + 26y = 104$
$26x + 13y = 104$
$13x = 104$
$x = 8$
$gcd(221, 39) = 13$.

Задача 7

Чтобы данное число делилось на 22 оно должно делиться на 2 и 11. Очевидно, что для делимости $n^{10}-1$ на 2 n должно быть нечетным. По малой теореме Ферма для любого n, не делящегося на 11, n^{10} при делении на 11 даст остаток 1. Тогда $n^{10}-1$ кратно 11.
Значит $n^{10}-1$ кратно 22 для всех нечетных n, не кратных 11.