Домашнее задание 2

Примечание: я запутался с обозначением C_n^k и $\binom{n}{k}$, подумав, что в формуле с буквой С большее число так же пишется сверху. Это оказалось не так, но, к сожалению, я узнал об этом слишком поздно, а этой формулы в работе достаточно и я просто не успел ее поправить во всех местах, поэтому, во избежание путаницы, везде оставил ее в виде C_k^n, т.е. с написанием большего числа сверху.

Задача 2

Начнем рассматривать комнаты по пордяку. Способов поселить в первую двухместную комнату у нас C_2^{18}. Далее способов поселить во вторую уже C_2^{16}. Человек осталось 16, так как двоих мы уже "поселили". Далее так же продолжим рассуждать для трехместных и четырехместных комнат. Тогда итоговая формула примет вид: $C_2^{18} \cdot C_2^{16} \cdot C_3^{14} \cdot C_3^{11} \cdot C_4^{8} \cdot C_4^{4} =$ 77189112000.

Задача 3

а)

$$\binom{n}{m} \cdot \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{m-k}.$$

$$\frac{n!}{m! * (n-m)!} \cdot \frac{m!}{k! * (m-k)!} = \frac{n!}{k! * (n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{(m-k)! * (n-k-(m-k))!}$$

$$\frac{n!}{(n-m)!} \cdot \frac{1}{k! * (m-k)!} = \frac{n!}{k!} \cdot \frac{1}{(m-k)! * (n-k-(m-k))!}$$

Разделим обе части уравнения на $n!$ и домножим на $(m-k)!$.

$$\frac{1}{(n-m)!} \cdot \frac{1}{k!} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{(n-k-(m-k))!}$$

Домножим обе части уравнения на $k! * (n-m)!$.

$$1 = 1$$

Задача 4

Отнимем от общего числа акций пять, так как людей пять и каждому должно достаться хотя бы по одной акции, эти мы как бы изначально "раздадим" им по одной. Теперь мы можем просто воспользоваться методом перегородок, при котором кому-то может и не достаться акций вообще, но ответ будет верный, так как мы уже раздали по одной акции. У нас будет 95 акций и четыре перегородки: $C_{95}^{99} = \frac{99!}{95!*4!} = \frac{96*97*98*99}{24} = 3764376$.

Задача 5

Воспользуемся методом перегородок, при этом будем помнить, что в пределах дня порядок пациентов важен. Перегородки будет четыре. Тогда количество всех перестановок элементов и перегородок равно 10!. Но нас не интересуют перестановки самих перегородок, нас интересуют только перестановки пациентов. Тогда, чтобы не учитывать перестановки четырех перегородок, нам нужно количество перестановок всех разделить на количество перестановок, которое равно 4!. Итоговая формула примет вид 10!/4!.

Задача 6

а) Будем рассматривать количество способов проголосовать для одного человека. Так как он может голосовать за любого, в том числе и за себя, способов n. У следующего так же n. Тогда выходит, что есть n ччеловек, каждый из которых может проголосовать n способами, тогда итоговая формула будет n^n.

б) Слегка преeформулируем задачу. У нас есть n голосов, которые нужно распреедлить между n кандидатами. Видно, что можем воспользоваться методом перегородок, при этом перегородок $n - 1$. Тогда итоговая формула C_{n-1}^{2n-1}.

Задача 7

Рассмотрим сначала пересечение двух событий: играющей музыки и идущего дождя, которые продолжались, соответственно, 90% и 50%. Очевидно, что только 10% не заполнено первым событием, а значит их пересечение не может быть меньше 40%. Теперь будем рассматривать пересечение объединения первых двух событий с третьим событием, которое продолжалось 80% времени – выключенным светом. Очевидно, что только пересечение третьего события с подсчитанным уже пересечением первых двух и будет составлять ответ. Опять же видно, что третее событие не заполняет лишь 20%, а значит его пересечение с пересечением первых двух, составляющим 40%, будет никак не меньше 20%, что и будет ответом.

Ответ: 20%.

Задача 9

Из материала учебника мы знаем, что найти кол-во решений уравнения в целых неотрицательных числах $x_1+x_2+\cdots+x_k = n$ мы можем методом перегородок, формулой C_{k-1}^{n+k-1}. В задаче везде под "количество решений уравнения" подразумевается кол-во решений в целых неотрицательных числах.

а) Посчитаем количество решений данного уравнения, когда $x_1 > 3$. Воспользуемся методом преегородок, перегородок три, так как переменных 4. При этом сначала отнимем от десяти четыре для того, чтобы изначально сделать x1 = 4, чтобы когда мы будем считать перегородками и в x1 не "уйдет"ничего, все равно выполнялось условие. Тогда количество решений при $x_1 > 3$ равно $C_3^9 = 84$.

Теперь мы можем просто посчитать вышеописанным способом общее количество решений данного уравнения, отнять от него кол-во неподходящих решений и получить ответ. Общее кол-во решений равно $C_3^{13} = 286$.

А ответ будет $286 - 84 = 202$.

б) Теперь будем рассматривать четыре случай, когда $x_1 = 0, x_1 = 1, x_1 = 2, x_1 = 3$. Для каждого случая мы можем посчитать количество решений уравнения еще с условием $x_2 \leq 3$ аналогично тому, как мы делали в предыдущем пункте. К примеру, рассмотрим первый вариант, когда $x_1 = 0$.

Тогда общее кол-во решений уравнения можно посчитать, только теперь переменных уже осталось три, так как одну мы определили, а значит перегородок будет две. Общее кол-во решений равно C_2^{12}. Теперь нам остается только посчитать кол-во "лишних" решений, т.е. когда $x_2 > 3$. Это мы можем сделать аналогично прошлому пункту, то есть отняв от десяти четыре, как бы изначально приравняв x_2 к четырем и посчитав кол-во решений для уравнения. Таких решений будет C_2^8. А подходящих нам решений будет $C_2^{12} - C_2^8 = 38$.

Аналогично мы можем посчитать для $x_1 = 1, x_1 = 2, x_1 = 3$, только сначала нужно не забыть отнять текущее значение x_1 от десяти. Ответы для этих случаев будут соответсвенно 34, 30 и 26. Тогда общее кол-во решений это кол-во решений уравнения по всем случаям и оно равно 128.