Домашнее задание 4

Задача 1

Представим задачу в виде графа. Тогда вершины это люди, а ребра – их знакомство. Тогда количество пар знакомых людей – это количество ребер в графе. И из того, что у каждых двух человек ровно пять общих знакомых мы можем заключить, что каждое ребро входит в ровно пять циклов длины три(цикл: ребро между двумя рассматриваемыми людьми – ребро от первого человека до общего знакомого – ребро от второго человека до общго знаокомого). Тогда 5 * (кол-во ребер) = 3 * (кол-во циклов длины 3). А так как 5 не делится на три, то кол-во ребер(кол-во пар знакомых) должно делиться на 3.

Задача 2

Обозначим кол-во ребер за $num(E)$.

а) Чтобы граф из n вершин был связным нужно как минимум n-1 ребро (это будет дерево). А полносвязный граф имеет $\frac{n(n-1)}{2}$ ребер. Тогда $n-1 \leq num(E) \leq \frac{n(n-1)}{2}$.

б) Граф с минимальным кол-вом ребер, а значит с максимальным кол-вом вершин при каком-то кол-ве ребер – дерево и в нем $(num(E)) + 1$ вершина. А наименьшее кол-во вершин при наибольшем количестве ребер достигается в полносвязном графе. Значит минимальное кол-во вершин в графе с $num(E)$ ребер будет равно количеству вершин $n_{num(E)}$ в полносвязном графе, для которого $num(E) \leq \frac{n_{num(E)}(n_{num(E)}-1)}{2}$, потому что мы рассматриваем только простые графы, а значит в них не может быть кратных ребер и петель. Значит $n_{num(E)} \leq num(E) \leq (num(E))+1$.

Задача 4

Количество ребер в графе равно половине суммы степеней его вершин. Количество вершин у нас n и степень каждой вершины равна k по определению регулярного графа. Тогда nk должно быть четным, иначе при делении его на два получится нецелое число, а кол-во ребер не может быть нецелым.

Степень вершины в графе из n вершин без кратных ребер и петель(а мы такие и рассматриваем) не может быть по определению больше, чем $n-1$.

Задача 5

Мы можем взять подграф нашего графа, который будет являться связным и ацикличным. Такой подграф можно найти с помощью алгоритма: начнем с любой вершины. Отметим ее как посещенную. После перейдем во все вершины, доступные из нее и также пометим их как посещенные, а ребра по которым перешли добавим в подграф. Далее перейдем во все вершины, которые доступны из этих вершин и опять добавим ребра по которым преешли в подграф. И так до тех пор, пока останутся непосещенные вершины. Так как граф неориентированный и связный мы точно посетим все вершины. После мы можем просто удалить любой лист этого подграфа и удалить в наешм основном графе вершину ему соответсвующую и основной граф все равно останется связен, поскольку наша вершина – лист, она имеет только одно ребро в подграфе, притом с вершиной до которой мы смогли дойти из предыдущих вершин. А с другими вершинами она не имеет ребер ,что означает, что мы смогли добраться до тех вершин каким-то другим путем и удаление этой вершины никак не повлияет на его существование.

Задача 6

а) Пример прикрепил во вложении к письму.

.