Spectral Analysis of Stochastic Processes

① $X(t)$ deterministic. Periodic $X(t+T)=X(t)$

$$X(t)=\sum_k \boxed{a_k}\exp(jw_k t),\quad w_k=\frac{2k\pi}{T},\quad \frac{2\pi}{T}\ \text{Base frequency}$$

$$a_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\exp(-jw_k t)\,dt,\quad \left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$$

傅利叶级数

若非周期函数

截断周期后，周期延拓

傅利叶级数

正交基

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\{\exp(jw_k t)\}_{k=-\infty}^{\infty}$$ orthogonal Basis, Fourier Series.

② $(-\infty,\infty)$ $T\to\infty$. $\frac{2\pi}{T}\to 0$

$$X(t)=\frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-T/2}^{T/2}x(s)\exp(-jw_k s)\,ds\right)\exp(jw_k t)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-T/2}^{T/2}x(s)\exp\Big(-j\overset{w_k}{\boxed{\tfrac{2k\pi}{T}}}s\Big)ds\right)\exp\Big(j\overset{w_k}{\boxed{\tfrac{2k\pi}{T}}}t\Big)$$

$\Delta x_k\to 0$

$\sum_k f(x_k)(x_k-x_{k-1})\to 0$

Integral Sum

改写上式：

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\left(\boxed{\int_{-T/2}^{T/2}x(s)\exp\Big(-j\frac{2k\pi}{T}s\Big)ds}\right)\exp\Big(j\frac{2k\pi}{T}t\Big)\frac{2\pi}{T}$$

$\Rightarrow$ $T\to\infty$时，$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{X}(w)\exp(jwt)\,dw$

$$\Rightarrow \begin{cases} X(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{X}(w)\exp(jwt)\,dw \\ \hat{X}(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}X(t)\exp(-jwt)\,dt \end{cases}$$

Fourier Transform

Fourier Integral

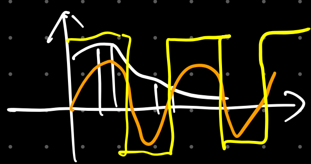
傅利叶变换

$$X(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-T/2}^{T/2}X(t)\cdot\exp\left(-j\frac{2k\pi}{T}\cdot t\right)dt\right)\exp\left(j\frac{2k\pi}{T}t\right)\cdot\frac{2\pi}{T}$$

$T\to\infty \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}$ convergence? 积分是否收敛?

$$\boxed{\begin{array}{l} X(t)\in L^1(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}|X(t)|dt<\infty \text{ 确定性信号收敛的条件} \\ \text{eg. } \cos(t)\to \frac{1}{2}(\delta(\omega-1)+\delta(\omega+1)) \end{array}}$$

随机信号: stationary



衰减信号的积分会发散

振幅 → 能量, 有损, 相位信息没了

物理解释: I^2T 能量

$$\boxed{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}E\left|\int_{-T/2}^{T/2}X(t)\exp(-j\omega t)dt\right|^2}$$

相位信息没了

$\frac{1}{T}(I^2T)=I^2T$

$$\frac{1}{T}E\left|\int_{-T/2}^{T/2}X(t)\exp(-j\omega t)dt\right|^2$$

$$=\frac{1}{T}E\left(\int_{-T/2}^{T/2}X(t)\exp(-j\omega t)dt\right)\cdot\overline{\left(\int_{-T/2}^{T/2}X(s)\exp(-j\omega s)ds\right)}$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\int_{-T/2}^{T/2}\boxed{E\left(X(t)\overline{X(s)}\right)}\exp(-j\omega(t-s))dtds$$

suppose. W.S.S $\quad R_X(s,t)=R_X(t-s)$

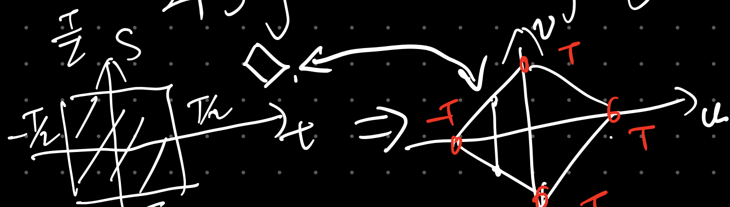
$$=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\int_{-T/2}^{T/2}R_X(t-s)\exp(-j\omega(t-s))dtds$$

雅可比矩阵的行列式绝对值

积分换元 $\quad u=t-s,\ v=t+s \Rightarrow dtds=\boxed{\det\left|\frac{\partial(t,s)}{\partial(u,v)}\right|}dudv$, $=\frac{1}{2}$

$$\left(\frac{\partial(t,s)}{\partial(u,v)}\right)^{-1}=\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(t,s)}\right)=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2T}\iint_{\Diamond}R_X(u)\exp(-j\omega u)dudv$$



$$\Rightarrow = \frac{1}{2T}\left(\int_{-T}^{0}\int_{-T-u}^{T+u} + \int_{0}^{T}\int_{u-T}^{-u+T}\right) R_X(u)\exp(-j\omega u)\,dv\,du$$

$$= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\int_{-T+|u|}^{T-|u|} R_X(u)\exp(-j\omega u)\,dv\,du$$

$$= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(2T-2|u|)R_X(u)\exp(-j\omega u)\,du$$

$$= \int_{-T}^{T}\left(1-\frac{|u|}{T}\right)R_X(u)\cdot\exp(-j\omega u)\,du$$

Bochener的定理 相关函数正定，那么傅利叶变换后的值 ≥ 0

傅利叶变换

$$\xrightarrow{T\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty}\boxed{R_X(u)}\exp(-j\omega u)\,du$$ 相关函数的傅利叶变化

$= S_X(\omega)$ (Power Spectral Density) X的功率谱密度

PSD. 二阶量

傅利叶反变换

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_X(\omega)\exp(j\omega u)\,d\omega = R_X(u) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}S_X(\omega)\,d\omega = R_X(0)$$

(Wiener-Khinchine Relation)

Power $= E|X(t)|^2$ (功率) 二阶矩在时域上的对应关系：功率和能量的对偶

书 "Cybernetics"《控制论》

$S_{aX}(\omega) = |a|^2 S_X(\omega)$, $S_{X+Y}(\omega) \overset{?}{=} S_X(\omega)+S_Y(\omega)$

$S_X(\omega) = S_X(-\omega)$ 二阶量 通常情况下不相等

$X(t)$ 为 real $\Rightarrow$ 功率谱密度一定是对称 (偶函数) W.S.S下的 $R_X(\tau) = R_X^*(-\tau)$

证：$S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}R_X(t)\exp(-j\omega\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau)\cdot\cos(\omega\tau)\,d\tau$

$+ j\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau)\cdot\sin(\omega\tau)\,d\tau$ 偶 × 奇 → ∫积分后为0

$= \int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau)\cos(\omega\tau)\,d\tau$

$$\Rightarrow S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}R_X(-\tau)\cos(\omega\tau)\,d\tau$$

故 $S_X(\omega) = S_X(-\omega)$

eg. $R_X(0) - R_X(\tau) \geq \frac{1}{4}(R_X(0) - R_X(2\tau))$

$\Leftrightarrow 3R_X(0) - 4R_X(\tau) + R_X(2\tau) \ge 0$

$$(x\ y\ z)\begin{pmatrix} R_X(0) & R_X(\tau) & R_X(2\tau) \\ R_X(\tau) & R_X(0) & R_X(\tau) \\ R_X(2\tau) & R_X(\tau) & R_X(0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ge 0$$ （因为相关函数是正定的）

待定系数法

$$3\quad f_1(x,y,z)\cdot R_X(0) + f_2(x,y,z)\cdot R_X(\tau) + f_3(x,y,z)\, R_X(2\tau) \ge 0$$

$$R_X(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_X(w)\,dw \qquad R_X(2\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_X(w)\, e(2jw\tau)\,dw$$

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_X(w)\, e(jw\tau)\,dw$$

因为 $S_X(w)$ 偶，其在 $\exp(\times)$ 中的奇信号的积分为 0

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_X(w)\,(3 - 4\underbrace{\exp(jw\tau)}_{\cos(w\tau)} + \underbrace{\exp(jw2\tau)}_{\cos(2w\tau)})\,dw \ge 0$$

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_X(w)\cdot\exp(jw\tau)\,dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_X(w)\cos(w\tau)\,dw$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_X(w)\cdot(3 - 4\cos(w\tau) + \underbrace{\cos(2w\tau)}_{2\cos^2(w\tau)-1})\,dw$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_X(w)\,[2(\cos(w\tau)-1)^2]\,dw \ge 0$$

$X(t) \longrightarrow$ [H] $\longrightarrow Y(t)$, $Y(t) = (h * X)(t)$

线性系统　LTI

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t,\tau) \ldots$$ 时不变 移为 $h(t-\tau)$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)X(\tau)\,d\tau$$

$$\hat{Y}(w) = H(w)\cdot\hat{X}(w)$$

若 $\hat{X}$ 是随机的

$$R_Y(t,s) = E(Y(t)\overline{Y(s)}) = E\left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)X(\tau)\,d\tau\ \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} h(s-r)X(r)\,dr}\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} E(X(\tau)\overline{X(r)})\,h(t-\tau)\,\overline{h(s-r)}\,d\tau\,dr$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau-r)\,h(t-\tau)\,\overline{h(s-r)}\,d\tau\,dr$$

$\tau - r + t - \tau + s - r$ 目前消不掉 τ 与 r，故不是卷积

构造 $\check{h}(t) = \overline{h(-t)}$

① 所有被卷积函数的自变量加在一起是否可把积分变量消没了

② 卷积后是函数，新函数的自变量是所有被卷积函数自变量之和留下的那部分

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}$$

$\int_{-\infty}\int_{-\infty} R_X(\tau-r)h(\cdots)\tilde{h}(\cdots)d(\cdots)$

$= (R_X \circledast h \circledast \tilde{h})(t-s)$

$S_Y(w) = S_X(w)H(w)\cdot\tilde{H}(w)$, $\tilde{H}(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{h}(t)\exp(-jwt)dt$

$= \int_{-\infty}^{+\infty}\overline{h(-t)}\exp(-jwt)dt$

$= \overline{\int_{-\infty}^{+\infty}h(-t)\exp(jwt)dt}$

$= \overline{\int_{-\infty}^{+\infty}h(t')\exp(-jwt')dt'}$

$= \overline{H(w)}$

$= S_X(w)\cdot H(w)\cdot\overline{H(w)}$

$= \boxed{S_X(w)|H(w)|^2}$

$\boxed{R_X(\tau) \xleftrightarrow{F} S_X(w)}$

傅利叶变换

例子：

$|E(X(t)Y(t))| \le (E X^2(t), E Y^2(t))^{1/2}$

$\Rightarrow |R_{XY}(0)| \le (R_X(0)\cdot R_Y(0))^{1/2}$

互谱

$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}S_{XY}(w)dw\right| \le \left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty}S_X(w)dw\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}S_Y(w)dw\right)\right]^{1/2}$

相当于加了滤波器(通常)，因此是个线性系统

若任意 $[a,b] \Rightarrow \left|\int_a^b S_{XY}(w)dw\right| \le \left(\int_a^b S_X(w)dw\cdot\int_a^b S_Y(w)dw\right)^{1/2}$

$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}|H(w)|^2 S_{XY}(w)dw\right|$, $\int_{-\infty}^{+\infty}|H(w)|^2 S_X(w)dw$, $\int_{-\infty}^{+\infty}|H(w)|^2 S_Y(w)dw$

X, Y 经过线性系统($[a,b]$的滤波器)后，$H(w)=\begin{cases}1, & w\in[a,b]\\ 0, & \text{others}\end{cases}$

显然上式成立.