Correlation functions

X, Y, $E(X,Y)$, $X(t)$. $R_X(t,s) = E(X(t)\cdot X(s))$

$R_X(t,s) = R_X(t-s)$, $m(t) = E(X(t)) = m \Leftrightarrow$ W.S.S (宽平稳)

① $R_X(t,s) = R_X(s,t)$ 偶函数

② $|R_X(\underset{\tau}{t,s})| \le (R_X(\underset{\tau=0}{t,t}) \cdot R_X(\underset{\tau=0}{s,s}))^{1/2}$

①' $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$ ②' $|R_X(\tau)| \le R_X(0)$

$(\tau = t-s)$ 两个时刻差值

相关函数一定在0点取得最大值

宽平稳的性质

③ Positive Definition 正定性

$f(x)$ is p.d. $\Leftrightarrow \forall n, \forall x_1, x_2, \dots, x_n$ 构成 matrix $(f(x_i - x_j))_{ij} \ge 0$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n} \ge 0 \Rightarrow a \in \mathbb{R}^n \quad a^T A a \ge 0$

函数是正定的概念：其构造出的 matrix 都正定

$R_X(\tau)$ is p.d. $\Rightarrow R_X(0) \ge 0$

e.g. $n=1$ $\forall x$, $(R_X(x_1 - x_1)) \ge 0$, 1×1 matrix

$\qquad \qquad \qquad \overset{\shortparallel}{R_X(0)}$

$R_X(\tau)$ is p.d $\Rightarrow R_X(0) \ge |R_X(\tau)|, \forall \tau$

e.g. $n=2$, $x_1 = 0$, $x_2 = \tau \Rightarrow \begin{pmatrix} R_X(x_1-x_1) & R_X(x_1-x_2) \\ R_X(x_2-x_1) & R_X(x_2-x_2) \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} R_X(0) & R_X(-\tau) \\ R_X(\tau) & R_X(0) \end{pmatrix} \ge 0$$

$R_X(\tau) = R_X(-\tau)$

$\Uparrow$

正定矩阵对称

行列式为正

$R_X(0)^2 \ge R_X(\tau)\cdot R_X(-\tau)$

$\forall n, \forall \tau_1, \dots, \tau_n$, $(R_X(\tau_i - \tau_j))_{ij} \ge 0$ $\boxed{?}$

分析 $\forall a \in \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, \dots, a_n)^T$

$$a^T R a = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n R_X(\tau_i - \tau_j) a_i a_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E(X(\tau_i) X(\tau_j)) a_i a_j$$

$$= E\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} X(t_i)X(t_j)a_i a_j\right) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X(t_i)a_i\right)^2 \geq 0$$

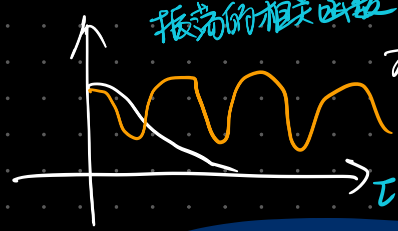
$X = (X(t_1), \cdots, X(t_n))^T$, $(R_X(t_i - t_j))_{ij} = E(XX^T) = R$ Correlation Matrix

$$a^T R a = a^T E(XX^T)a = E(a^T X X^T a)$$

$$= E[(a^T X)^2] \geq 0$$

Characteristic Property → 相关函数是正定函数 (正定 ↔ 相关) 充要

$R_X(0) \geq |R_X(\tau)|, \forall \tau$



$R_X(0) = R_X(T) \Rightarrow$

$R_X(\tau) = R_X(\tau + T)$

$E|X(\tau+T) - X(\tau)|^2 = 0$ mean square Periodic (均方周期性)

$2R_X(T)$

$$E(X^2(\tau+T)) + E(X^2(\tau)) - 2E(X(\tau+T)\cdot X(\tau))$$

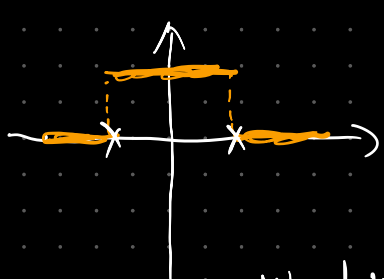
$= 2R_X(0) - 2R_X(T) = 0$ 局部特性 ⇒ 整体特性

"Local" ⇒ "Global" R_X 定义展开

$$|R_X(\tau+T) - R_X(\tau)| = |E(X(0)X(\tau+T)) - E(X(0)\cdot X(\tau))|$$

$$= |E[X(0)\cdot(X(\tau+T) - X(\tau))]| \leq \left(E(X^2(0))\,\underbrace{E|X(\tau+T)-X(\tau)|^2}_{0}\right)^{1/2} = 0$$

$E|X(\tau+T) - X(\tau)|^2 = 0$



Rectangle Window

$R_X(\tau)$ is continuous at 0 ⇒

$R_X(\tau)$ is continuous at τ, $\forall \tau$

$E|X(\tau+\Delta) - X(\tau)|^2 \to 0 \quad (\Delta \to 0)$

mean square continuous

Mean Square continuous

连续
极限：

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t. \forall \Delta < \delta \Rightarrow |f(x+\Delta) - f(x)| \leq \varepsilon$

$\lim_{\Delta \to 0} f(x+\Delta) = f(x)$

distance! Euclid
Metric!

一旦涉及到距离来用
Mean Square Distance $d(X, Y) = (E(X-Y)^2)^{1/2}$

$\underset{r.v.}{X_n} \xrightarrow{n \to \infty} \underset{r.v.}{X}$ $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, s.t. n > N, (E|X_n - X|^2)^{1/2} \leq \varepsilon$

$X_n \to X$
$\downarrow$
$X_n(\omega) \to X(\omega)$

距离是极限的灵魂!!!

距离的特性 ① 非负性 ② 对称性 ③ 三角不等式

针对距离是三角不等式的基础

$|(EX_1^2)^{1/2} - (EX_2^2)^{1/2}| \leq |E(X_1 - X_2)^2|^{1/2}$

$= EX_1^2 + EX^2 - 2(EX_1^2)^{1/2}(EX_2^2)^{1/2} \leq EX_1^2 + EX_2^2 - 2EX_1X_2$

$\Rightarrow$ Cauchy 不等式

随机变量是函数，只是样本点的数据代理

$X: \Omega \to R$ deterministic

No random!

确定性函数

X：随机变量的概念
从样本空间 $\to$ 实数轴
映射

随机性体现在（不确定性）

Chaos 初值敏感 $\to$ 接纳不确定性

$X: \Omega \to R$
(Quantization)
量化

Statiscal Experiment $\Rightarrow$ Samples $\Rightarrow$ Sample Space Ω
确定的集合

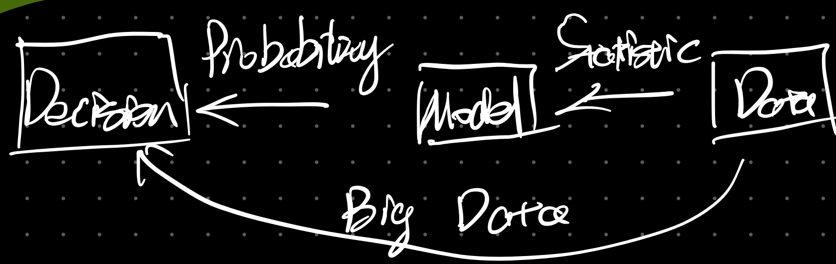
(Ω, Σ, P)

Prior $\to$ Probability $P(A) \in [0, 1]$
样本空间上定义概率　概率是以集合作为自变量

Probability Axiom

Probability / Statistic

表达可能性的大小



概率 Model
统计 Data
两门不同的课

Random Function $X(t) = X(\omega, t)$ 随机过程，随机变量给定了 t

$\Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

样本空间与实数轴的笛卡尔积映射到实数轴.

$E|X(t+\Delta)-X(t)|^2 = 2R_X(0) - 2R_X(\Delta) \xrightarrow{\Delta \to 0} 0$ 取极限得 $\to 0$

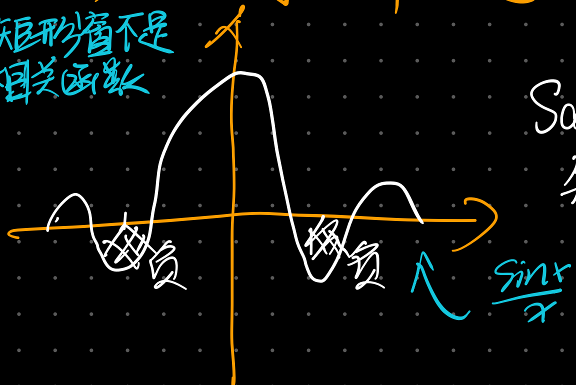
$|R_X(t+\Delta) - R_X(t)| \le (E X^2(0) \cdot E|X(t+\Delta) - X(t)|^2)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{\Delta \to 0} 0$

讨论一元相关函数一定讨论宽平稳　由此得均方均值连续

Bochner $f(x)$ is P.d $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(j\omega x) dx \ge 0$

矩形窗的傅利叶变换(有负值)　☆正定 $\Leftrightarrow$ 当且仅当一个函数的傅利叶变换是正的

矩形窗不是相关函数



$Sa(x)$ (sinc)

矩形窗不是正定的

正定的"正"可以体现在函数的傅利叶变换(频域上看，值是正的)

" $\Leftarrow$ " $F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-j\omega x) dx \Rightarrow$

$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \exp(j\omega x) d\omega$

$R(x)$ $\exp(j\omega x)$

$\varphi(x) = \exp(j\omega x)$

$\forall n, \forall x_1, x_2, \cdots x_n \quad (\exp(j\omega(x_i - x_j)))_{ij} = B$

$\forall a \in \mathbb{C}^n \Rightarrow a^H B a \geq 0$

$$a^H B a = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \exp(j\omega(x_i - x_j))\overline{a_i} a_j = \left|\sum_{i=1}^{n} \exp(j\omega x_i)\overline{a_i}\right|^2$$

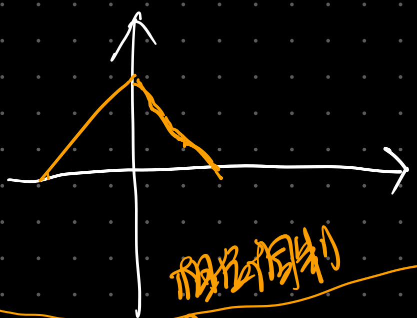
$$\left(\sum_{i=1}^{n} \exp(j\omega x_i)\overline{a_i}\right)\left(\sum_{j=1} \exp(-j\omega x_j) a_j\right) \geq 0$$

$h(\omega, x)$ 为 P.d $\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k h(\omega_k, x)$ 为 P.d 其中 $a_k \geq 0$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} a(\omega) h(\omega, x) d\omega$ 为 P.d (与求和相似)

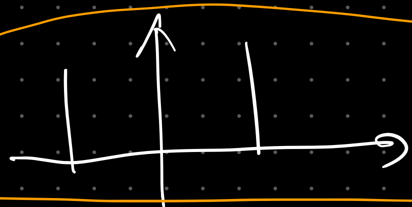
$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{F(\omega)}_{\geq 0} \exp(j\omega x) d\omega$

$\Rightarrow f(x) \geq 0$



相似判别

三角波傅xx变换是 $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$
(两个矩形波卷积出来的)

$\cos(2\pi f \tau) \Rightarrow$  正定

$\exp(-2\lambda\tau)$ 可以用定义 $\forall a \in \mathbb{R}^n \Rightarrow a^T B a \geq 0$
随机电报 可得 此相关函数是正定
函数表示的