3-5. 3장 5번 문제와 추가 문제

Q1. $X^tX = X \Rightarrow X = X^t = X^2$.

(풀이 1) $A^tA = 0$ 이면 $A = 0$인 성질을 이용. $A = X - X^2$라 하면,

$$\begin{aligned}
A^tA &= (X - X^2)^t(X - X^2) \\
&= X^tX - (X^2)^tX - X^tX^2 + (X^2)^t(X^2) \\
&= X^tX - X^tX^tX - X^tX\ X + X^tX^tX\ X \\
&= X^tX - X^t(X^tX) - (X^tX)\ X + X^t(X^tX)X \\
&= X^tX - X^tX - X\ X + (X^tX)\ X \\
&= X^tX - X^tX - X\ X + X\ X = 0 \\
\therefore X - X^2 &= 0 \\
\Rightarrow X &= X^2
\end{aligned}$$

(풀이 2) A1의 결과를 이용. 이번에는 $A = X - X^t$라 하면,

$$\begin{aligned}
A^tA &= (X - X^t)^t(X - X^t) \\
&= X^tX - (X^t)^tX - X^tX^t + (X^t)^tX^t \\
&= (X^tX) - X\ X - (X\ X)^t + X\ X^t \\
&= X - X^2 - (X^2)^t + (X^tX)^t \\
&= 0 - X^t + X^t = 0 \\
\therefore X - X^t &= 0 \\
\Rightarrow X &= X^t
\end{aligned}$$

Q2. $X^tX = X^2 \Rightarrow X = X^t$.

(풀이) $\mathrm{tr}(A^tA) = 0$이면 $A = 0$인 성질을 이용. $A = X - X^t$라 하면,

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(A^tA) &= \mathrm{tr}[(X - X^t)^t(X - X^t)] \\
&= \mathrm{tr}[X^tX - (X^t)^tX - X^tX^t + (X^t)^tX^t] \\
&= \mathrm{tr}(X^tX) - \mathrm{tr}(X\ X) - \mathrm{tr}[(X\ X)^t] + \mathrm{tr}[X\ X^t] \\
&= \mathrm{tr}(X^2) - \mathrm{tr}(X^2) - \mathrm{tr}[(X^2)^t] + \mathrm{tr}[(X^tX)^t] \\
&= 0 - \mathrm{tr}[(X^2)^t] + \mathrm{tr}[(X^2)^t] \\
&= 0 \\
\therefore A &= X - X^t = 0 \\
\Rightarrow X &= X^t
\end{aligned}$$

1-7. 두 가지 방법으로 설명.

(풀이 1) 합 기호를 이용하여 보이면,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} \mu_i x_i &= \sum_{i=1}^{m} \mu_i \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} v_j \\
&= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mu_i \lambda_{ij} v_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \mu_i \lambda_{ij} v_j
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\big(\sum_{i=1}^{m}\mu_i\lambda_{ij}\big)v_j$$

로부터 v_j의 계수들의 합은

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\big(\sum_{i=1}^{m}\mu_i\lambda_{ij}\big) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\mu_i\lambda_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{m}\mu_i\big(\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}\big) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\mu_i\cdot 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

(풀이 2) 행렬과 summing vector $\mathbf{1}$ 을 이용하여 보이면,
$\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_m)^t$, $\Lambda = \{\lambda_{ij}\}$, $\boldsymbol{v} = (v_1,\ldots,v_n)^t$라 할 때, 주어진 조건은 $\boldsymbol{x} = \Lambda\ \boldsymbol{v}$, $\Lambda\ \mathbf{1}_n = \mathbf{1}_m$, $\boldsymbol{\mu}^t\mathbf{1}_m = 1$이라고 정리할 수 있음.

$$\sum_{i=1}^{m}\mu_i x_i = \boldsymbol{\mu}^t\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\mu}^t\Lambda\ \boldsymbol{v}$$

로부터 $\sum_{i=1}^{m}\mu_i x_i$에서 v_j의 계수들의 합은 $\boldsymbol{\mu}^t\Lambda\ \mathbf{1}_n$이므로

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mu}^t\Lambda\ \mathbf{1}_n &= \boldsymbol{\mu}^t\mathbf{1}_m \\
&= 1
\end{aligned}$$