제7장 계수(rank)

$Ax=b$

A^{-1}가 존재한다면($|A| \neq 0$) $x=A^{-1}b$

선형결합, 최대계수를 가지는 행렬(full column rank)

7.1 벡터의 선형 결합 (Linear combination)

스칼라 : $a_1, a_2, \cdots, a_n$

n개의 같은 차수의 벡터들 : $x_1, x_2, \cdots, x_n$ (열벡터)

n개의 벡터들에 대한 선형결합

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

예제)

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad x_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$2x_1 + 3x_2 - 4x_3$

$$= 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -2 \\ 11 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 33 \\ 9 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -8 \\ -28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 29 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$

$$= a_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} -2 \\ 11 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 - 2a_2 \\ 11a_1 + a_3 \\ -a_1 + 3a_2 + 2a_3 \\ 6a_1 + 5a_2 + 7a_3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 11 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}=Xa$$

일반적으로 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad a=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=\sum_{i=1}^{n} a_ix_i=Xa$$

"Xa는 행렬 X의 열들의 선형 결합인 열벡터"

"$a'X$는 행렬 X의 행들의 선형 결합인 행벡터"

"AB : 이것의 행은 B의 행들의 선형결합

열은 A의 열들의 선형결합"

7.2 선형변환 (Linear transformation)

$b=Xa$

벡터 a에서 Xa로의 선형변환

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}=b=Xa=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

7.3 선형종속과 선형독립 (Linear dependence and independence)

a. 정의

$$Xa=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$$

정의) 선형종속인 벡터 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0$을 만족하는 벡터 $a(\neq 0)$가 존재하고, $x_1, x_2, \cdots, x_n$중 어느 것도 영벡터가 아니면 $x_1, x_2, \cdots, x_n$들은 선형종속인 벡터(linearly dependent vectors)

예제)

$$x_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} \quad x_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad x_4 = \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ -18 \end{pmatrix} \quad x_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$2x_1 + x_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ -18 \end{pmatrix} = 0$$

$a_1 x_1 + a_2 x_4 = 0 \qquad (a_1 = 2,\ a_2 = 1)$

x_1, x_4 는 선형 종속

$$2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$

x_1, x_2, x_3 는 선형종속

$x_{1,} x_2$?

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = \begin{pmatrix} 3a_1 \\ -6a_1 \\ 9a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5a_2 \\ -5a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a_1 \\ -6a_1 + 5a_2 \\ 9a_1 - 5a_2 \end{pmatrix}$$

$a_1 = 0,\ a_2 = 0$

$x_{1,}\ x_2$: 선형독립

정의) $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0$ 을 만족하는 유일한 벡터가 $a = 0$인 경우에 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 은 선형 독립인 벡터 (linearly independent vectors)

b. 일반적인 특성

(iv) 영벡터

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$a_1 = a_2 = 0$

a_3 = 임의의 실수값

영벡터는 제외

기호 : LIN 선형독립 (linearly independence)

7.4 선형종속인 벡터

a. 적어도 두 개의 a가 0 이 아니다

$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p = 0$

하나만 0 이 아니라고 가정

$a_2x_2 = 0$

x_2는 0벡터가 아니기 때문에 모순

b. 한 벡터는 다른 벡터들의 선형 결합

$a_1, a_2 \neq 0$

$$x_1 + \frac{a_2}{a_1}x_2 + \cdots + \frac{a_p}{a_1}x_p = 0$$

$$\therefore x_1 = -\frac{a_2}{a_1}x_2 - \frac{a_3}{a_1}x_3 - \cdots - \frac{a_p}{a_1}x_p$$

예제)

$$2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{3}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3$$

c. 행렬의 분할 (126쪽 아래 예제)

$$x_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} \quad x_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad x_4 = \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ -18 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = -\frac{1}{2}x_1 \\ x_3 = \frac{2}{3}x_1 + x_2 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & (\frac{2}{3}x_1 + x_2) & -2x_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & (x_1x_2)\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$=(x_1\ \ x_2)\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{2}{3} & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}=X_1(I\ \ K)$$

$\hookrightarrow X_1$ $\hookrightarrow I$ $\hookrightarrow K$

d. 영인 행렬식

차수 = p 선형종속인 p개의 벡터들

$|X|=0$

예제)

$$|x_1\ \ x_2\ \ x_3|=\begin{vmatrix}3 & 0 & 2 \\ -6 & 5 & 1 \\ 9 & -5 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -5 & 1\end{vmatrix}=0$$

$2x_1+3x_2-3x_3=0$

$x_1=-\frac{3}{2}x_2+\frac{3}{2}x_3$ (선형종속)

e. 역행렬 => $|X|=0$

=> 역행렬이 존재하지 않음

f. 열벡터들이 선형종속 $\Leftrightarrow$ $|X|=0$

$\hookrightarrow$ 차수가 p인 p개의 벡터들

$Xa=0$ $X=(x_1,x_2,\cdots,x_p)$

(i) X의 열들이 선형종속

(ii) $Xa=0$은 영벡터가 아닌 적당한 a에 대하여 성립

(iii) $|X|=0$ p차수 p개

7.5 선형독립(LIN)인 행렬

a. 0이 아닌 행렬식과 역행렬

X의 차수가 p , p개의 열들 $X=(x_1,\cdots,x_p)$

(i) $x_1,\cdots,x_p$ LIN

(ii) $a=0$에 대해서만 $Xa=0$

(iii) X : nonsingular (정칙), X^{-1} 가 존재

b. LIN 벡터들의 선형결합

$x_1, \cdots, x_p$ (p차수) : LIN

$v:(p\times 1)$ $v=Xm$ m이 존재 ($\because m=X^{-1}v$)

즉, v는 서로 독립인 p개의 벡터들의 일차결합으로 표현 가능

예제) $x_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ $x_2=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ $v=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ $X=\begin{pmatrix}2\,3\\1\,5\end{pmatrix}$

$v=Xm$

$$m=X^{-1}v=\begin{pmatrix}2&3\\1&5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}5&-3\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}5x-3y\\-x+2y\end{pmatrix}$$

c. LIN 벡터의 최대 개수

정리) 차수가 n인 LIN 벡터들의 개수는 n 보다 작거나 같다.

$u_1, u_2, \cdots, u_n$ 이 차수가 n인 LIN 벡터들

$$u_{n+1}(\neq 0)\quad u=(u_1,\ \cdots,u_n)\quad q=-U^{-1}u_{n+1}\quad q=\begin{pmatrix}q_1\\\vdots\\q_n\end{pmatrix}$$

$$U_q+u_{n+1}=0\ \Rightarrow\ q_1u_1+q_2u_2+\cdots+q_nu_n+u_{n+1}=0$$

따름정리) 차수가 n인 p개의 벡터들이 LIN이면 p$\leq$n 이다.

예제) $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$

차수=2 LIN

$x_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ $x_2=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ $x_3=\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}$ 선형종속

$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ 선형종속

$$\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\,3\\1\,5\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}2\,3\\1\,5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}\right)$$

$$=\begin{pmatrix}2&3\\1&5\end{pmatrix}\left(\frac{1}{7}\begin{pmatrix}5&-3\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}\right)$$

$$=\begin{pmatrix}2\,3\\1\,5\end{pmatrix}\left(\frac{1}{7}\begin{pmatrix}11\\9\end{pmatrix}\right)$$

$x_3 = \frac{11}{7}x_1 + \frac{9}{7}x_2$

$\frac{11}{7}x_1 + \frac{9}{7}x_2 - x_3 = 0$ 선형종속

7.6 행렬에서 LIN 행과 열들의 수

정리) 행렬에서 LIN 행들의 수는 LIN 열들의 수와 같다.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 9 & 14 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 의 행들 LIN => $\begin{pmatrix} 6 & 9 & 14 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 의 행들 LIN

가정) k개의 LIN 행벡터, m개의 LIN 열벡터

pf) $A_{p\times q} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} X_{k\times m} & Y_{k\times(q-m)} \\ Z_{(p-k)\times m} & W_{(p-k)\times(q-m)} \end{pmatrix}$

k 개의 행 $(X\ \ Y)$ 의 행벡터들 LIN

m 개의 열 $\begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix}$ 의 열벡터들 LIN

$(Z\ \ W)$의 행벡터들을 $(X\ \ Y)$ 행벡터들의 선형결합

Z 의 행벡터들 X의 행벡터들의 선형결합

$\Rightarrow Z = TX$ 인 T가 존재

가정 : X의 열들이 선형종속

$\exists a \neq 0 \ \ s.t \ \ Xa = 0$

$\Rightarrow Za = TXa = 0$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix} a = 0$

$\Rightarrow m$개의 열들은 선형종속

$\Rightarrow$ 모순 $\Rightarrow$ m개의 열들은 LIN

$\therefore m \leq k$ 마찬가지로 $k \leq m \Rightarrow k = m$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 6 & 0 & 12 & 10 \end{pmatrix}$$

a_1, a_2만 LIN

LIN 열들의 수 = 2

7.7 행렬의 계수 (RANK)

“행렬에서 LIN 열들의 수와 LIN 행들의 수는 같다”

정의) A의 계수는 $r_A = r(A)$로 표시

(i) r_A는 양의 정수 ($r_0 = 0$ 으로 정의)

(ii) $r(A_{p\times q}) \le p$ 이며, $r(A_{p\times q}) \le q$ 이다

(iii) $r(A_{n\times n}) \le n$

(iv) $r_A = r \ne 0$ 일 때 차수 r의 정칙인 A의 정방부분행렬이 적어도 하나 존재

$$A_{p\times q} = \begin{pmatrix} X_{r\times r} & Y_{r\times(q-r)} \\ Z_{(p-r)\times r} & W_{(p-r)\times(q-r)} \end{pmatrix}$$

(v) $r(A_{n\times n}) = n \ \Rightarrow A : nonsingular,\ A^{-1}$존재

(vi) $r(A_{n\times n}) < n \Rightarrow A^{-1}$ 존재하지 않음. $A : \mathrm{sin}gular$

(vii) $r(A_{p\times q}) = p \le q$ 일 때 $\Rightarrow$ “A는 최대행 계수 (full row rank)를 갖는다”

(viii) $r(A_{p\times q}) = q \le p$ 일 때 $\Rightarrow$ “A는 최대열 계수 (full column rank)를 갖는다”

(ix) $r(A_{n\times n}) = n$, A는 최대계수 (full rank)를 갖는다.

7.11 벡터공간 (vector space)

vector space

$$\begin{cases} x_i + x_j \in S,\ ax_i \in S \text{ 이면} \\ S : \text{벡터공간} \end{cases}$$

c. 생성집합(spanning set)과 기저(bases)

벡터 공간내의 원소들의 모든 선형결합은 같은 벡터 공간에 속함

예) $x_1, x_2, x_3 \in S$

$$\Rightarrow (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) \in S$$

벡터공간 S의 모든 벡터가 t개의 벡터들 $x_1, x_2, \cdots, x_t$의 선형결합으로 표현

$x_1, x_2, \cdots, x_t$는 벡터공간 S를 생성(span) 시킨다.

$\{x_1, x_2, \cdots, x_t\}$: LIN => S에 대한 기저(basis)이다.

S에 대한 모든 기저는 같은 개수의 벡터를 가지고 있고 그 개수는 S의 차원(dimension)이라 하며 dim(S)로 나타낸다.

예제)

$$x_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\quad x_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\quad x_3=\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$$

$S=span\{x_1,x_2,x_3\}=span\{x_1,x_2\}$

$\dim(S)=2$

e. 부분공간 (subspace)

$$S_1=\left\{\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\\0\\0\end{pmatrix};\alpha,\beta,\gamma\in R\right\}$$

$S_1\subset R^5$

S_1 : vector space

S_1 은 R^5의 (vector)subspace

예제)

$$S_2=\left\{x\,;\,x=\begin{pmatrix}\alpha\\0\\0\end{pmatrix},\alpha\in R\right\}\quad S_3=\left\{y\,;\,y=\begin{pmatrix}0\\0\\\beta\end{pmatrix},\beta\in R\right\}\quad S_4=\left\{z\,;\,z=\begin{pmatrix}\gamma\\0\\\delta\end{pmatrix},\gamma\in R,\gamma\in R\right\}$$

S_2,S_3,S_4: (vector)sub-space ⊂ R^3

$S_2=span\{(\ 1\ 0\ 0\ )'\}$

$S_3=span\{(\ 0\ 0\ 1\ )'\}$

$S_4=span\{(\ 1\ 0\ 0\ )',(\ 0\ 0\ 1\ )'\}$

f. 행렬의 치역(range)과 영 공간(null space)

$r_A=rank(A)$, r_A개의 LIN열들

$r_A=\dim[R(A)]$

↳ A의 열들의 선형결합으로 이루어진 vector space

$R(A)=\{y\ ;\ y=Ax,\ x\in R^q\}$

A의 r개의 LIN 열들은 $r(A)$의 기저

$$N(A)=\left\{x\,;\underbrace{\begin{pmatrix}2&1&3&-1\\3&5&1&2\end{pmatrix}}_{A}x=0\right\}$$

$N(A)=\{x\,;Ax=0\}$

↳ 영공간

$n(A)=\dim(N(A))$

- $X=(\ x_1,\ \cdots,x_q\ )$

  $X'y=\begin{pmatrix}x_1'\\\vdots\\x_q'\end{pmatrix}y=0$ 이면

  X의 모든 열들 X와 y 는 직교, $R(X)\perp R(Y)$

제 8장 표준형 (canonical forms)

8.1 기본 연산자 (Elementary operators)

a. 행연산자

$E_{ij}A$: i번째 행과 j번째 행을 바꿈

예) $E_{12}A = \begin{pmatrix} 0&1&0 \\ 1&0&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&1&1 \\ 2&2&2 \\ 3&3&3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2&2&2 \\ 1&1&1 \\ 3&3&3 \end{pmatrix}$

$R_{ii}(\lambda)A$: i번째 행에 λ를 곱한다

예) $(R_{22}(4))A = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&4&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&1&1 \\ 2&2&2 \\ 3&3&3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&1&1 \\ 8&8&8 \\ 3&3&3 \end{pmatrix}$

$P_{ij}(\lambda)A$: A의 i번째 행에 λ배의 j번째 행을 더한다

$P_{12}(\lambda)A = \begin{pmatrix} 1&\lambda&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&1&1 \\ 2&2&2 \\ 3&3&3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2\lambda & 1+2\lambda & 1+2\lambda \\ 2&2&2 \\ 3&3&3 \end{pmatrix}$

b. 전치행렬 (Transposes)

$E_{ij}' = E_{ij}$ $\qquad$ $R_{ii}(\lambda)' = R_{ii}(\lambda)$ $\qquad$ $P_{ij}(\lambda)' = P_{ji}(\lambda)$

c. 열연산

$AT = (T'A')'$

$AE_{12} = (E_{12}A')'$

↳ A'의 행의 순서를 바꿈 → A의 열의 순서를 바꿈

예) $\begin{pmatrix} 1&1&1 \\ 2&2&2 \\ 3&3&3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&1&0 \\ 1&0&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&1&1 \\ 2&2&2 \\ 3&3&3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 4&5&6 \\ 7&8&9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&1&0 \\ 1&0&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2&1&3 \\ 5&4&6 \\ 8&7&9 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 4&5&6 \\ 7&8&9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&\lambda&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&2\lambda&3 \\ 4&5\lambda&6 \\ 7&8\lambda&9 \end{pmatrix}$

$AP_{ji}(\lambda) = (P_{ji}(\lambda)'A')' = (P_{ij}(\lambda)A')$

예) $AP_{21}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1&1&1 \\ 2&2&2 \\ 3&3&3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&0&0 \\ \lambda&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 2+2\lambda & 2 & 2 \\ 3+3\lambda & 3 & 3 \end{pmatrix}$

d. 역행렬

$E_{ij}{}^{-1} = E_{ij}$　　　$R_{ii}(\lambda)^{-1} = R_{ii}(1/\lambda)$　　　$(P_{ij}(\lambda))^{-1} = P_{ij}(-\lambda)$

8.2 계수와 기본 연산자

a. 계수

$r(E_{ij}A) = r(A)$
$r(R_{ii}(\lambda)A) = r(A)$
$r(P_{ij}(\lambda)A) = r(A)$

b. 기본 연산자들의 곱

E : 기본 연산자 행렬
P, Q : 기본 연산자들의 곱 (예, $P = E_3E_2E_1$)

$$r(A) = r(E_1A) = r(E_2(E_1A)) = r(E_3(E_2E_1A)) = r(PA)$$

c. 동치관계 (Equivalence)

P, Q : 기본 연산자들의 곱
$B = PAQ$ => B는 A와 동치 ($B \cong A$)
↳ 모든 기본 연산자 행렬들은 역행렬을 가짐
$A = P^{-1}BQ^{-1}$ $(A \cong B)$
$r_A = r_B$

8.3 행렬의 계수 계산

a. 특별한 LIN 벡터들

$$x_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$: LIN

$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 형태의 벡터는 x_1, x_2, x_3의 선형 결합

$$\exists a_1, a_2, a_3 \ \ s{\cdot}t{\cdot} \begin{pmatrix} 4a_1 + 2a_2 - a_3 \\ 3a_2 + 2a_3 \\ 7a_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 9 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$: 행 사다리꼴 $rank(A) = 3$

b. 계수의 계산

예제1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & -4 & 0 & -7 \end{pmatrix} \qquad A \cong \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -7 & -10 & -11 \\ 0 & -14 & -20 & -22 \end{pmatrix} \qquad A \cong \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -7 & -10 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

$rank(B) = rank(A) = 2$

예제2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & -1 & 2 \\ -7 & 6 & 2 \\ 2 & 8 & 13 \end{pmatrix} \quad A \cong \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & -17 & -22 \\ 0 & 34 & 44 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A \cong \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & -17 & 22 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A \cong \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & -17 & 22 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

$rank(A) = rank(B) = 3$

8.4 표준형으로 유도

$$B = PA = (PI)A = (E_3E_2E_1I)A$$

예제 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & 4 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

① 2행-3× (1행)

② 3행-5× (1행)

③ 3행-2× (2행)

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-5&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\-5&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\1&-2&1\end{pmatrix}$$

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\1&-2&1\end{pmatrix}$$

$$PA=\begin{pmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&4&3\\3&-1&2&-2\\5&-4&0&-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&4&3\\0&-7&-10&-11\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

예제2.(계속)

$$A=\begin{pmatrix}1&4&6\\4&-1&2\\-7&6&2\\2&8&13\end{pmatrix}\simeq\begin{pmatrix}1&4&6\\0&-17&-22\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

① 2행-4× (1행)

② 3행+7× (1행)

③ 4행-2× (1행)

④ 3행+2× (2행)

⑤ 3행 ↔ 4행

b. 열 연산

예제1.(계속)

$$PA=\begin{pmatrix}1&2&4&3\\0&-7&-10&-11\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

① 2열-2× (1열)　② 3열-4× (1열)　③ 4열-3× (1열)

$$PA\cong\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-7&-10&-11\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

④ 3열-10/7× (2열)　⑤4열-11/7× (2열)　⑥2열× (-1/7)

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-7&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=C\cong PA$$

$C=PAQ$

$$Q=\begin{pmatrix}1&-2&-4&-3\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&-\frac{10}{7}&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-\frac{11}{7}\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-\frac{1}{7}&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&-2&-\frac{8}{7}&-3\\0&1&-\frac{10}{7}&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-\frac{11}{7}\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-\frac{1}{7}&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&-2&-\frac{8}{7}&\frac{1}{7}\\0&1&-\frac{10}{7}&-\frac{11}{7}\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-\frac{1}{7}&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&\frac{2}{7}&-\frac{8}{7}&\frac{1}{7}\\0&-\frac{1}{7}&-\frac{10}{7}&-\frac{11}{7}\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=Q$$

$$PAQ=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=C$$

c. 동치 표준형 (Equivalent canonical form)

정리. $rank(A)=r\neq 0$, A는 다음 행렬과 동치

$$P_{m\times m}\,A_{m\times n}\,Q_{n\times m}=\begin{pmatrix}I_r&0\\0&0\end{pmatrix}=C$$

I_r : 차수 r인 항등행렬

A : $n\times n$

P : $m\times m$: 정칙 → 기본 연산자들의 곱

Q : $n\times n$: 정칙 → 기본 연산자들의 곱

d. P와 Q의 비유일성

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\\frac{3}{7}&-\frac{1}{7}&0\\1&-2&1\end{pmatrix}\qquad Q=\begin{pmatrix}1&-2&-\frac{8}{7}&\frac{1}{7}\\0&1&-\frac{10}{7}&-\frac{11}{7}\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$PAQ=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e. 존재성은 보장

f. 최대 계수 인자분해

정리) $rank(A_{p\times q})=r$

$A=K_{p\times r}L_{r\times q}$ 인 K와 L은 각각 최대열 계수와 최대행 계수를 가진다.

즉, $rank(A)=rank(L)=r$

pf) $\exists P, Q \;\; s.t.$

$$PAQ=\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A=P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q^{-1}$$

$$P^{-1}=(\; K_{p\times r} \quad W_{p\times (p-r)} \;)$$

$$Q^{-1}=\begin{pmatrix} L_{r\times q} \\ Z_{(q-r)\times q} \end{pmatrix}$$

$$A=(\; K \;\; W \;)\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L \\ Z \end{pmatrix}$$

$$=(\; K \quad O \;)\begin{pmatrix} L \\ Z \end{pmatrix}$$

$$=K_{p\times r}L_{r\times q}$$

예제)

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 14 \\ 4 & 9 & 3 & 24 \end{pmatrix} \qquad P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \;\; Q=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$PAQ=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$