Chapter 5 Class Part II

coop711

2015-11-05

5.5 역행렬을 이용한 대수적 단순화

(a) 행렬에 의한 나눗셈은 존재하지 않음.

- $A\,X = B$ 에서 A^{-1} 이 존재하면 양변 좌측에 각각 A^{-1} 를 곱해서 $A^{-1}A\,X = A^{-1}B$, 즉, $X = A^{-1}B$가 성립함. 그러나 우측에 곱했을 때는 다른 결과가 나오게 됨.

(b) $P\,K = Q\,K$라고 해서 $P = Q$가 되는 것은 아님.

- $\begin{bmatrix} 7 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 22 & 31 \\ 0 & 26 & 39 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

```
matrix(c(7, 3, 5, 3, 4, 10), 2)
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    7    5    4
## [2,]    3    3   10
```

```
matrix(c(1, -1, 0, 2, 0, 2, 2, 1, 3), 3)
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    2    2
## [2,]   -1    0    1
## [3,]    0    2    3
```

```
matrix(c(7, 3, 5, 3, 4, 10), 2) %*% matrix(c(1, -1, 0, 2, 0, 2, 2, 1, 3), 3)
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    2   22   31
## [2,]    0   26   39
```

```
matrix(c(3, 2, 1, 2, 8, 11), 2)
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    3    1    8
## [2,]    2    2   11
```

```
matrix(c(1, -1, 0, 2, 0, 2, 2, 1, 3), 3)
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    2    2
## [2,]   -1    0    1
## [3,]    0    2    3
```

```
matrix(c(3, 2, 1, 2, 8, 11), 2) %*% matrix(c(1, -1, 0, 2, 0, 2, 2, 1, 3), 3)
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    2   22   31
## [2,]    0   26   39
```

- K 가 역행렬을 가지면, 양변 우측에 K^{-1} 을 곱하여 $P\,K\,K^{-1} = Q\,K\,K^{-1}$, 즉 $P = Q$.

(c) $R + R\,S\,T = R(I + S\,T)$

- 만일, T^{-1} 이 존재하면, $R + R\,S\,T = R(I + S\,T) = R(T^{-1}T + S\,T) = R(T^{-1} + S)T$.

(d) $x \neq 1$ 일 때, $1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = (x^n - 1)/(x - 1)$. 이와 비교되는 행렬대수는?

- $(X - I)^{-1}$ 이 존재하면, $I + X + X^2 + \cdots + X^{n-1} = (X^n - I)(X - I)^{-1}$. 또한 $I + X + X^2 + \cdots + X^{n-1} = (X - I)^{-1}(X^n - I)$

예제 5.5 $(I + M^{-1})^{-1} = M(M + I)^{-1}$

- 먼저 $(I + M^{-1})M(M + I)^{-1} = I$ 를 보이자.

$$(I + M^{-1})M(M + I)^{-1} = (M + M^{-1}M)(M + I)^{-1} = (M + I)(M + I)^{-1} = I.$$

양변 좌측에 $(I + M^{-1})^{-1}$ 을 곱하면,

$$(I + M^{-1})^{-1}(I + M^{-1})M(M + I)^{-1} = (I + M^{-1})^{-1}.$$

이것을 간단히 하면,

$$M(M + I)^{-1} = (I + M^{-1})^{-1}.$$

5.6 역행렬을 이용한 연립방정식의 해

- $A\vec{x} = \vec{b}$ 에서 A^{-1} 이 존재하면 양변 좌측에 A^{-1} 을 곱하여 $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$를 얻는다.

예제 5.6 $A\vec{x} = \vec{b}$. 단, $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 5 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

따라서, 연립방정식의 해는

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 5 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

```r
source("adjoint.R")
A <- matrix(c(2, 1, 1, -2, 1, 0, -1, -2, -1), 3)
b <- c(5, 1, 4)
minor(A, 1, 1)
```

```
## [1] -1
```

```r
minor(A, 2, 1)
```

```
## [1] 2
```

```r
minor(A, 3, 1)
```

```
## [1] 5
```

```r
minor(A, 1, 2)
```

```
## [1] 1
```

```r
minor(A, 2, 2)
```

```
## [1] -1
```

```r
minor(A, 3, 2)
```

```
## [1] -3
```

```r
minor(A, 1, 3)
```

```
## [1] -1
```

```r
minor(A, 2, 3)
```

```
## [1] 2
```

```r
minor(A, 3, 3)
```

```
## [1] 4
```

```r
cofactor(A, 1, 1)
```

```
## [1] -1
```

```
cofactor(A, 2, 1)
```

```
## [1] -2
```

```
cofactor(A, 3, 1)
```

```
## [1] 5
```

```
cofactor(A, 1, 2)
```

```
## [1] -1
```

```
cofactor(A, 2, 2)
```

```
## [1] -1
```

```
cofactor(A, 3, 2)
```

```
## [1] 3
```

```
cofactor(A, 1, 3)
```

```
## [1] -1
```

```
cofactor(A, 2, 3)
```

```
## [1] -2
```

```
cofactor(A, 3, 3)
```

```
## [1] 4
```

```
adjoint(A)
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]   -1   -2    5
## [2,]   -1   -1    3
## [3,]   -1   -2    4
```

```
det(A)
```

```
## [1] 1
```

```
solve(A)
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]   -1   -2    5
## [2,]   -1   -1    3
## [3,]   -1   -2    4
```

```
solve(A, b)
```

```
## [1] 13  6  9
```

자료 저장

```
save.image("chapter_5_class_II.rda")
```