*선형대수-03장-1 2008.8.20 2:33 PM 페이지141

제3장

2차원과 3차원 공간의 벡터

장의 차례

서 론 **넓이, 길이, 질량, 온도와 같은 여러 가지 물리적 양은 그 양의 크기만 주어지면 완전히 묘사된다. 이와 같은 양을 스칼라(scalar)라 한다. 또다른 물리적 양은 크기뿐만 아니라 그 방향까지 지정하지 않으면 간단히 결정되지 않는다. 이와 같은 양을 벡터(vector)라 한다. 예컨대, 바람의 이동은 보통 주어진 바람의 속력과 방향으로 기술된다. 북동방향으로 20 mph, 풍속과 바람의 방향은 풍속도(wind velocity)라 불리우는 하나의 벡터를 이룬다. 벡터의 다른 예는 힘(force)과 변위(displacement)이다. 이 장의 목적은 2차원과 3차원 공간에 있어서 벡터의 몇 가지 기본 이론을 복습하는 데 있다.**

※주의: 이 장의 내용에 이미 익숙한 독자는 이 장을 생략하고 바로 4장으로 들어간다 하더라도 연속성에는 지장이 없다.

3.1 벡터 입문(기하학적)

이 절에서는 2차원과 3차원 공간의 벡터를 기하학적으로 소개하고 벡터에 관한 연산을 정의하여, 이들 연산의 몇 가지 기초적인 성질을 확립하기로 한다.

기하학적 벡터 벡터는 기학적으로 2차원, 3차원 공간의 유향선분이라든지 또는 화살표로써 표현될 수 있다. 화살표에 의하여 그 벡터의 방향을 지정하고 그 길이에 의해서 크기(또는 세기)를 나타내는 것이다. 이 경우 화살표의 출발점 즉, 화살표의 꼬리는 벡터의 시초점

*선형대수-03장-1 2008.8.20 2:33 PM 페이지142

(a) 벡터 $\overrightarrow{AB}$ (b) 동치벡터

그림 3.1.1

(initial point)이라 하고, 화살표의 선단은 종점(terminal point)이라 불리운다. 여기서는 벡터를 나타내는 기호로서 **a**, **k**, **v**, **w**, **x**와 같은 소문자의 볼드체를 사용하고 벡터에 관한 논의와 관련해서 나타내는 실수는 특히 스칼라(scalar)라 부르기로 한다. 특별한 언급이 없는 한, 모든 스칼라는 실수로 생각하고 스칼라는 벡터와 구별해서 단지 a, k, v, w, x 등 명조체의 소문자로써 나타내기로 한다.

예컨대, 그림 3.1.1a와 같은 경우 즉, 벡터 **v**의 시초점이 A이고, 종점이 B인 경우

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$$

로 쓰기로 한다. 벡터가 그림 3.1.1b와 같이 같은 방향과 같은 길이를 가질 때 이들은 동치(equivalent)라 하기로 한다. 벡터를 단지 크기와 방향만으로 결정하고 싶기 때문에 동치벡터가 비록 상이한 점에 위치되었다 할지라도 이들 동치인 벡터를 모두 동일시(regarded as equal)한다.

두 벡터 **v**와 **w**가 동치일 때,

$$\mathbf{v} = \mathbf{w}$$

로 써서 나타내기로 한다.

정의 **v**와 **w**를 임의의 두 벡터라 할 때 합(sum) $\mathbf{v} + \mathbf{w}$는 **v**의 종점을 **w**의 시초점과 일치시켰을 때 **v**의 시초점과 **w**의 종점에 의하여 결정되는 벡터이고, 벡터 $\mathbf{v} + \mathbf{w}$를 **v**의 시초점에서 **w**의 종점에 이르는 화살표로써 나타낸다(그림 3.1.2a).

그림 3.1.2b에서 두 종류의 합 $\mathbf{v} + \mathbf{w}$(청색의 화살표)와 $\mathbf{w} + \mathbf{v}$(회색의 화살표)를 구

(a) 합 $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ (b) $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$

그림 3.1.2

*선형대수-03장-1 2008.8.20 2:33 PM 페이지143

성했다. 이 경우,

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$$

임은 분명하고 두 종류의 합은 $\mathbf{v}$와 $\mathbf{w}$가 만드는 평행4변형의 대각선과 일치하고 이 경우 이들 벡터가 같은 시초점을 갖도록 위치되어 있다.

길이가 0인 벡터를 영벡터(zero vector)라 하고 $\mathbf{0}$으로 표시되며, 모든 벡터 $\mathbf{v}$에 대해서 다음과 같이 정의한다.

$$\mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}.$$

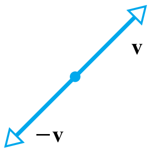


그림 3.1.3 $\mathbf{v}$의 음벡터는 $\mathbf{v}$와 같은 크기이나 그 방향은 역으로 향한다.

영벡터에는 자연적인 방향을 정할 수가 없으나 앞으로의 논제에 편리하도록 임의의 방향으로 향하고 있다고 생각하기로 한다.

$\mathbf{v}$가 영이 아닌 임의의 벡터일 때 $\mathbf{v}$의 음벡터(negative vector)인 $-\mathbf{v}$는 $\mathbf{v}$의 시초점과 종점을 교환해서 그 방향을 역으로 하고 $\mathbf{v}$와 같은 크기의 벡터로 정의한다(그림 3.1.3). 이 벡터는

$$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

인 성질을 갖는다(왜?). 또한 $-\mathbf{0} = \mathbf{0}$으로 정의해 둔다.

두 벡터의 차는 다음과 같다.

정의 $\mathbf{v}$와 $\mathbf{w}$를 임의 두 벡터라 할 때 $\mathbf{v}$에서 $\mathbf{w}$의 차(difference)를

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-\mathbf{w})$$

로 정의한다(그림 3.1.4a).

$-\mathbf{w}$를 만들어 $\mathbf{v}$에 더하지 않고 차 $\mathbf{v} - \mathbf{w}$를 도시하기 위해서는 $\mathbf{v}$와 $\mathbf{w}$의 시초점이 일치하도록 위치시킨 다음에, $\mathbf{w}$의 종점에서 $\mathbf{v}$의 종점으로 향하는 벡터가 벡터 $\mathbf{v} - \mathbf{w}$로 된다(그림 3.1.4b).

(a) (b)

그림 3.1.4

정의 $\mathbf{v}$를 영이 아닌 벡터, k를 영이 아닌 실수(스칼라)라 할 때 곱(product) $k\mathbf{v}$를 $\mathbf{v}$의 길이를 $|k|$배한 벡터로 정의하고 그 방향은 $k > 0$일 때 $\mathbf{v}$의 방향은 변하지 않고 $k < 0$일 때는 $\mathbf{v}$의 방향을 역으로 하고 $k = 0$ 또는 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$일 때 $k\mathbf{v} = \mathbf{0}$으로 정의한다.

*선 형 대 수-03장-1 2008.8.20 2:33 PM 페 이 지144

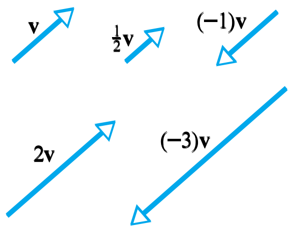


그림 3.1.5

그림 3.1.5에 벡터 $\mathbf{v}$와 $\frac{1}{2}\mathbf{v}$, $(-1)\mathbf{v}$, $2\mathbf{v}$, $(-3)\mathbf{v}$와의 관계를 나타내었다.

정의에서 분명히 한 바와 같이 $(-1)\mathbf{v}$ 벡터는 $\mathbf{v}$와 같은 길이이고 방향만 역으로 되어 있으므로 $\mathbf{v}$의 음벡터와 일치한다. 즉,

$$(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}.$$

형식이 $k\mathbf{v}$인 벡터를 $\mathbf{v}$의 스칼라곱(scalar multiple)라 한다. 그림 3.1.5에 의하여 분명히 한 바와 같이 서로 스칼라곱인 벡터는 나란하다. 역으로 영이 아닌 나란한 벡터는 서로의 스칼라곱임을 밝힐 수 있으나 그 증명은 생략한다.

좌표계의 벡터 벡터를 포함하는 여러 가지 문제는 간혹 직교좌표계를 도입함으로써 간단하게 되는 경우가 많다. 잠깐 동안 2차원 공간(평면상의)의 벡터인 경우로 제한하여 생각하자. $\mathbf{v}$를 평면상의 벡터라 할 때 이것을 표시하기 위하여 그림 3.1.6에서와 같이 직교좌표계의 원점을 시초점이 되게 위치시키자. 그리고 $\mathbf{v}$의 종점의 좌표 (v_1, v_2)를 $\mathbf{v}$의 성분(components of $\mathbf{v}$)이라 부르고,

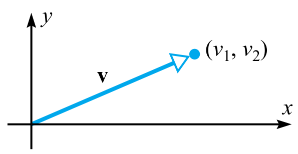


그림 3.1.6 v_1과 v_2는 $\mathbf{v}$의 성분이다.

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2)$$

로 쓰기로 한다.

만일에 동치인 벡터 $\mathbf{v}$와 $\mathbf{w}$를 그 시초점이 원점이 되도록 하면 그 종점은 일치하게 된다(두 벡터는 같은 길이와 같은 방향을 갖는 까닭에). 또한 역으로 성분이 같은 두 개의 벡터는 그 방향이나 길이도 같으므로 동치이다.

즉, 두 개의 벡터

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2) \quad \text{와} \quad \mathbf{w} = (w_1, w_2)$$

가 동치이기 위해서는

$$v_1 = w_1 \quad \text{이고} \quad v_2 = w_2$$

로 되는 것이 필요충분조건이다.

벡터끼리의 합이나 벡터의 스칼라곱이라는 벡터의 연산을 그 성분을 사용해서 표현하기는 쉽다. 그림 3.1.7에서 설명된 바와 같이 두 개의 벡터를

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2) \qquad \mathbf{w} = (w_1, w_2)$$

라 하면,

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2) \tag{1}$$

로 된다.

*선형대수-03장-1 2008.8.20 2:33 PM 페이지145

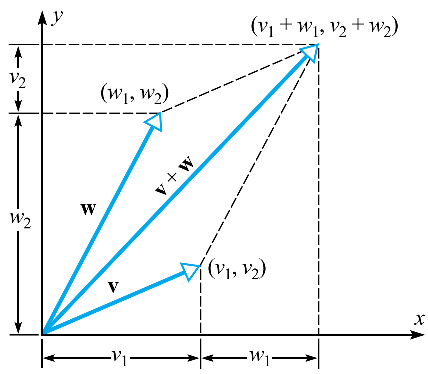


그림 3.1.7

만일 $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$이고 k를 임의의 스칼라라 하면 닮은 3각형을 포함하는 기하학적 논법을 사용함으로써

$$k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2) \tag{2}$$

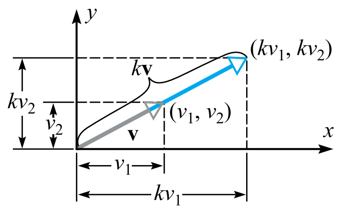


그림 3.1.8

임을 밝힐 수 있다(연습문제 16, 그림 3.1.8 참조). 따라서

예컨대 $\mathbf{v} = (1, -2)$, $\mathbf{w} = (7, 6)$이라 하면,

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (1, -2) + (7, 6) = (1 + 7, -2 + 6) = (8, 4)$$

이고,

$$4\mathbf{v} = 4(1, -2) = (4(1), 4(-2)) = (4, -8)$$

이다.

$\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-1)\mathbf{w}$이기 때문에 공식 (1)과 (2)로부터

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = (v_1 - w_1, v_2 - w_2)$$

이다(밝혀라).

3차원 공간의 벡터 평면상의 벡터가 두 개의 실수를 나열하여 표시할 수 있는 바와 같이 3차원 공간 내의 벡터에 대해서 직교좌표계(rectangular coordinate system)를 도입함으로써 3개의 실수를 나열해서 표시할 수 있다. 공간의 직교좌표계를 구성하기 위해서는 원점(origin)이라 불리우는 점 O를 선정하고서, 이 원점을 지나는 좌표축(coordinate axes)이라 불리우는 서로 직교하는 3개의 축을 선택해서 이들 축을 각각 x, y와 z로 표시한다. 그리고 x축, y축, z축의 각각에 양의 방향을 지정해서 단위에 의한 길이를 지정하면 정해진다(그림 3.1.9a).

두 개의 좌표축마다 좌표평면(coordindte plane)이라 하는 평면이 한개 정해지는데,

*선 형 대 수-03장-1 2008.8.20 2:33 PM 페이지146

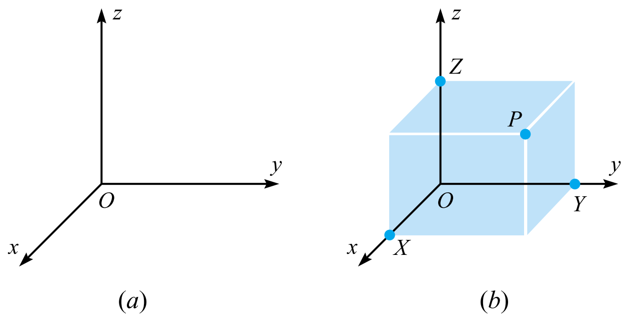


그림 3.1.9

이들은 xy 평면(xy-plane), xz 평면(xz-plane), yz 평면(yz-plane)이라 불리운다. 이 경우 3차원 공간 내의 각 점 P는 P의 좌표(coordinates of P)라 불리우고 3개의 수의 열 (x, y, z)가 대응된다. P를 지나서 yz 평면에 평행한 평면과 x축과의 교점을 X, xz 평면에 평행한 평면과 y축과의 교점을 Y, xy 평면의 나란한 평면과 z축과의 교점을 Z라 한다(그림 3.1.9b).

이 경우 P의 좌표는 부호가 붙은 길이

$$x = OX, \qquad y = OY, \qquad z = OZ$$

로 정의된다. 그림 3.1.10a에 점 (4, 5, 6)과 그림 3.1.10b에 (−3, 2, −4)를 좌표로 하는 점을 표시해 두었다.

3차원의 직교좌표계는 왼손 좌표계(left-handed system), 오른손 좌표계(right-handed system)라 불리우는 두 종류로 분류된다. z축을 회전축으로 생각하여 x축의 양의 방향을 y축의 양의 방향으로 향해서 90°회전시켰을 때, 보통 나사가 진행하는 것과 같은 방향으로 z축의 양방향이 존재하는 좌표계(그림 3.1.11a)는 통상 오른손 좌표계라 불리우고 있다. 또한 나사가 진행하는 역방향으로(나사가 빠지는 방향으로) z축의 음의 방향이 존재할 때 왼손 좌표계라 불리운다(그림 3.1.11b).

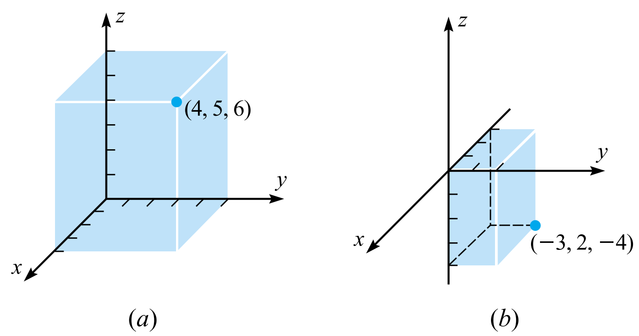
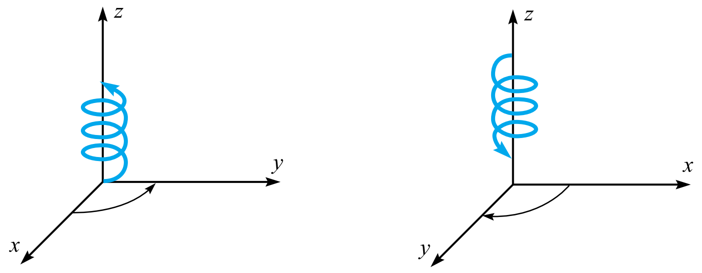


그림 3.1.10

*선형대수-03장-1 2008.8.20 2:33 PM 페이지147



(*a*) 오른손 좌표계 (*b*) 왼손 좌표계

그림 3.1.11

※**주의:** 이 책에서는 오른손 좌표계만을 이용하기로 한다.

그림 3.1.12에서와 같이 3차원 공간 내에 벡터 $\mathbf{v}$가 직각좌표계의 원점에 그 시초점이 있도록 위치하면 종점의 좌표를 $\mathbf{v}$의 성분(components of $\mathbf{v}$)이라 하고

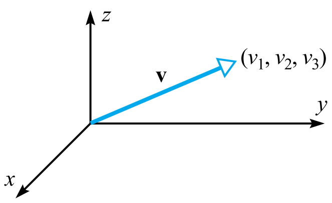


그림 3.1.12

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

로 표기한다. 3차원 공간 내의 두 벡터를 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$라 하면 평면상의 벡터에 사용되었던 바와 똑같은 논법은 다음 결과를 밝히는 데 사용될 수 있다.

> $\mathbf{v}$와 $\mathbf{w}$가 동치이기 위해서는 $v_1 = w_1$, $v_2 = w_2$, $v_3 = w_3$인 것이 필요충분조건이다.
>
> $$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3)$$
>
> $$k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2, kv_3) \text{ (단, } k\text{는 임의의 스칼라)}$$

예제 1 성분에 의한 벡터계산

$\mathbf{v} = (1, -3, 2)$, $\mathbf{w} = (4, 2, 1)$이라 할 때

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (5, -1, 3), \qquad 2\mathbf{v} = (2, -6, 4), \qquad -\mathbf{w} = (-4, -2, -1),$$
$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-\mathbf{w}) = (-3, -5, 1).$$ ◀

간혹 벡터가 항상 원점에서 출발된다고는 할 수 없는 경우가 있다. 일반적으로 벡터 $\overrightarrow{P_1P_2}$의 시초점을 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, 종점을 $P_2(x_2, y_2, z_2)$라고 할 때

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

*선형대수-03장-1 2008.8.20 2:33 PM 페이지148

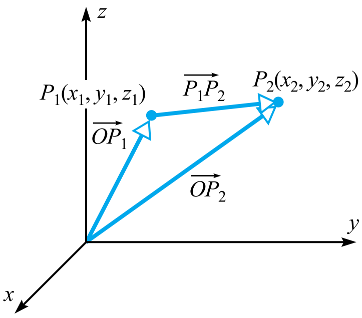


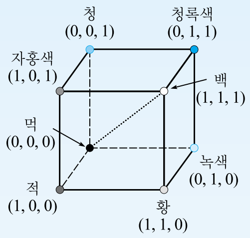
그림 3.1.13

즉, $\overrightarrow{P_1P_2}$의 성분은 좌표를 종점의 좌표에서 시초점의 좌표를 빼서 얻어진다. 그림 3.1.13을 이용하여 벡터 $\overrightarrow{P_1P_2}$는 벡터 $\overrightarrow{OP_2}$와 $\overrightarrow{OP_1}$의 차라고 생각할 수 있으므로,

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

이다.

컴퓨터 컬러(채색) 모델에 대한 응용



컴퓨터 모니터(monitor)에 관한 컬러(color)는 일반적으로 소위 RGB 컬러 모델에 근거를 두고 있다. 이 시스템에 있어서 컬러는 원색인 적색(R), 녹색(G)과 청색(B)의 비율을 함께 더하여 만들어진다. 이를 수행하는 한 가지 방법은 이들 원색을 R^3에 있어서 벡터

$$\mathbf{r} = (1, 0, 0) \quad \text{(원적색)}$$
$$\mathbf{g} = (0, 1, 0) \quad \text{(진녹색)}$$
$$\mathbf{b} = (0, 0, 1) \quad \text{(진청색)}$$

과 동일시 하고, 0과 1 사이의 계수를 사용하여 $\mathbf{r}$, $\mathbf{g}$와 $\mathbf{b}$의 1차결합을 형성함으로써 모든 다른 채색을 만드는 것이다. 즉 이들의 계수는 혼합에 있어서 원색의 비율을 나타낸다. 이와 같은 모든 컬러벡터의 집합을 RGB 공간(RGB space) 또는 RGB 컬러의 정육면체(RGB Color Cube)라 불리운다. 이 정육면체에 있어서 각 컬러벡터 $\mathbf{c}$는 $0 \le c_i \le k$일 때

$$\begin{aligned}\mathbf{c} &= c_1\mathbf{r} + c_2\mathbf{g} + c_3\mathbf{b} \\ &= c_1(1, 0, 0) + c_2(0, 1, 0) + c_3(0, 0, 1) \\ &= (c_1, c_2, c_3)\end{aligned}$$

인 형식의 1차결합으로 표현될 수 있다. 그림에서 표시된 바와 같이 정육면체의 모서리는 흑색, 백색, 자홍색, 청록색(Cyan)과 황색인 컬러와 더불어 원색들을 나타낸다. 흑색으로부터 백색으로 뻗는 대각선을 따르는 벡터는 희미한 갈색에 대응한다.

예제 2 **벡터의 성분 구하기**

시초점을 $P_1(2, -1, 4)$에, 종점을 $P_2(7, 5, -8)$에 갖는 벡터 $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$의 성분은

$$\mathbf{v} = (7 - 2, 5 - (-1), (-8) - 4) = (5, 6, -12). \quad ◀$$

2차원 공간에서도 똑같이 시초점을 $P_1(x_1, y_1)$에, 종점을 $P_2(x_2, y_2)$에 갖는 벡터는

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

이다.

좌표축의 평행이동 여러 가지 문제의 해는 좌표축을 이동시켜 본래 (구)좌표계와 나란한 새로운 좌표축을 취함으로써 간단히 구해질 수가 있다.

그림 3.1.14a에서는 xy 좌표계로서 $(x, y) = (k, l)$로 표현되는 점 O'를 원점으로 하는 새로운 $x'y'$ 좌표계를 얻기 위하여 xy 좌표계를 이동시켰다. 따라서 2차원 공간의 점 P는 두 개의 (x, y) 좌표와 (x', y') 좌표를 갖는다. 이들 두 좌표의 관계를 살피기 위해서 벡터 $\overrightarrow{O'P}$(그림 3.1.14b)를 생각하자. xy 좌표계에서 그 시초점은 (k, l)에 있고 그 종점은 (x, y)에 있다. 따라서 $\overrightarrow{O'P} = (x - k, y - l)$이다. $x'y'$ 좌표계에서는 그 시초점은 $(0, 0)$에 있고, 그 종점은 (x', y')에 있다. 따라서 $\overrightarrow{O'P} = (x', y')$이므로

$$x' = x - k, \qquad y' = y - l$$

이 성립한다. 이들 공식을 이동방정식(translation equation)이라 불리운다.

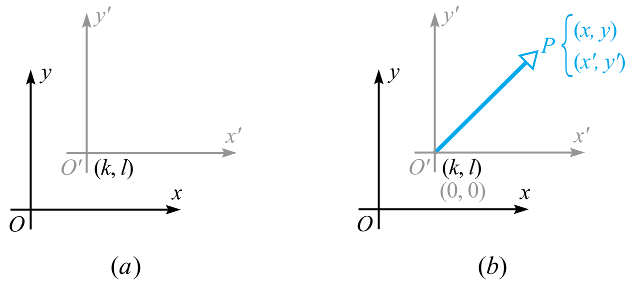


그림 3.1.14

예제 3 **이동방정식의 사용**

xy 좌표계의 원점을 xy 좌표 $(k, l) = (4, 1)$에 갖는 $x'y'$ 좌표계를 얻기 위하여 평행이동시켰다고 하자.

(a) xy 좌표 $P(2, 0)$을 갖는 점의 $x'y'$ 좌표를 구하여라.

(b) $x'y'$ 좌표 $Q(-1, 5)$를 갖는 점의 xy 좌표를 구하여라.

풀이(a): 이동방정식은

$$x' = x - 4, \qquad y' = y - 1$$

이므로 $P(2,0)$의 $x'y'$ 좌표는 $x' = 2 - 4 = -2$와 $y' = 0 - 1 = -1$이다.

풀이(b): (a)의 이동방정식은

$$x = x' + 4, \qquad y = y' + 1$$

*선형대수-03장-1 2008.8.20 2:33 PM 페이지150

로 고쳐 쓸 수 있으므로 Q의 xy 좌표는 $x = -1 + 4 = 3$과 $y = 5 + 1 = 6$이다. ◀

3차원 공간에 있어서의 이동방정식도 역시

$$x' = x - k, \qquad y' = y - l, \qquad z' = z - m$$

이고, 여기서 (k, l, m)은 $x'y'z'$원점의 xyz 좌표이다.

연습문제 3.1

1. 오른손 좌표계의 좌표계를 그리고 다음에 주어진 좌표점의 위치를 정하여라.

(a) $(3, 4, 5)$ (b) $(-3, 4, 5)$ (c) $(3, -4, 5)$
(d) $(3, 4, -5)$ (e) $(-3, -4, 5)$ (f) $(-3, 4, -5)$
(g) $(3, -4, -5)$ (h) $(-3, -4, -5)$ (i) $(-3, 0, 0)$
(j) $(3, 0, 3)$ (k) $(0, 0, -3)$ (l) $(0, 3, 0)$

2. 원점을 시초점으로 갖는 다음 벡터를 그려라.

(a) $\mathbf{v}_1 = (3, 6)$ (b) $\mathbf{v}_2 = (-4, -8)$ (c) $\mathbf{v}_3 = (-4, -3)$
(d) $\mathbf{v}_4 = (5, -4)$ (e) $\mathbf{v}_5 = (3, 0)$ (f) $\mathbf{v}_6 = (0, -7)$
(g) $\mathbf{v}_7 = (3, 4, 5)$ (h) $\mathbf{v}_8 = (3, 3, 0)$ (i) $\mathbf{v}_9 = (0, 0, -3)$

3. 다음에 주어진 시초점 P_1과 종점 P_2를 갖는 벡터의 성분을 구하여라.

(a) $P_1(4, 8)$, $P_2(3, 7)$ (b) $P_1(3, -5)$, $P_2(-4, -7)$
(c) $P_1(-5, 0)$, $P_2(-3, 1)$ (d) $P_1(0, 0)$, $P_2(a, b)$
(e) $P_1(3, -7, 2)$, $P_2(-2, 5, -4)$ (f) $P_1(-1, 0, 2)$, $P_2(0, -1, 0)$
(g) $P_1(a, b, c)$, $P_2(0, 0, 0)$ (h) $P_1(0, 0, 0)$, $P_2(a, b, c)$

4. 시초점을 $P(-1, 3, -5)$에 가지며 다음을 만족하는 영이 아닌 벡터 $\mathbf{u}$를 구하여라.
(a) $\mathbf{u}$는 $\mathbf{v} = (6, 7, -3)$과 같은 방향을 갖는다.
(b) $\mathbf{u}$는 $\mathbf{v} = (6, 7, -3)$과 반대 방향을 갖는다.

5. 종점을 $Q(3, 0, -5)$에 두고 다음을 만족하는 영이 아닌 벡터 $\mathbf{u}$를 구하여라.
(a) $\mathbf{u}$는 $\mathbf{v} = (4, -2, -1)$과 같은 방향을 갖는다.
(b) $\mathbf{u}$는 $\mathbf{v} = (4, -2, -1)$과 반대 방향을 갖는다.

6. $\mathbf{u} = (-3, 1, 2)$, $\mathbf{v} = (4, 0, -8)$, $\mathbf{w} = (6, -1, -4)$라 할 때 다음 벡터의 성분을 구하여라.

(a) $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ (b) $6\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$ (c) $-\mathbf{v} + \mathbf{u}$
(d) $5(\mathbf{v} - 4\mathbf{u})$ (e) $-3(\mathbf{v} - 8\mathbf{w})$ (f) $(2\mathbf{u} - 7\mathbf{w}) - (8\mathbf{v} + \mathbf{u})$

7. $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$와 $\mathbf{w}$를 문제 6의 벡터라 할 때 $2\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{x} = 7\mathbf{x} + \mathbf{w}$를 만족하는 벡터 $\mathbf{x}$의 성분을 구하여라.

8. $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$와 $\mathbf{w}$를 문제 6의 벡터라 할 때 다음을 만족하는 스칼라 c_1, c_2와 c_3를 구하여라.

*선형대수-03장-1 2008.8.20 2:33 PM 페이지151

$$c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v} + c_3\mathbf{w} = (2, 0, 4)$$

9. 다음 등식을 만족하는 스칼라 c_1, c_2와 c_3는 존재하지 않음을 밝혀라.

$$c_1(-2, 9, 6) + c_2(-3, 2, 1) + c_3(1, 7, 5) = (0, 5, 4)$$

10. 다음 등식을 만족하는 모든 스칼라 c_1, c_2와 c_3를 구하여라.

$$c_1(1, 2, 0) + c_2(2, 1, 1) + c_3(0, 3, 1) = (0, 0, 0)$$

11. 점 P의 좌표를 $(2, 3, -2)$, 점 Q의 좌표를 $(7, -4, 1)$이라 할 때

(a) P와 Q를 연결하는 선분의 중점을 구하여라.

(b) P와 Q를 연결하는 선분을 3:4로 내분하는 점을 구하여라.

12. xy 좌표계를 평행이동시켜서 원점 O'을 xy 좌표 $(2, -3)$에 갖는 새로운 $x'y'$ 좌표계를 얻는다고 가정하자.

(a) xy 좌표가 $(7, 5)$인 점 P의 $x'y'$ 좌표를 구하여라.

(b) $x'y'$ 좌표가 $(-3, 6)$인 점 Q의 xy 좌표를 구하여라.

(c) xy 좌표축과 $x'y'$ 좌표축을 그리고 점 P와 Q의 위치를 결정하여라.

(d) $\mathbf{v} = (3, 7)$이 xy 좌표계에 있어서 벡터라 할 때 $x'y'$ 좌표계에 있어서 $\mathbf{v}$의 성분은 얼마인가?

(e) $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$가 xy 좌표계에 있어서 벡터라 할 때 $x'y'$ 좌표계에 있어서 $\mathbf{v}$의 성분은 얼마인가?

13. P를 점 $(1, 3, 7)$이라 하자. 점 $(4, 0, -6)$이 P와 Q를 잇는 선분의 중점이라 할 때 Q점의 좌표는 얼마인가?

14. xyz 좌표계를 평행이동시켜서 새로운 $x'y'z'$ 좌표계를 만든다고 가정하자. $\mathbf{v}$를 xyz 좌표계에서 그 성분이 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$인 벡터라 할 때 $\mathbf{v}$는 $x'y'z'$ 좌표계에 있어서도 같은 성분을 가짐을 밝혀라.

15. 그림 문제 15에 표시된 벡터에 대해서 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$와 $\mathbf{u} - \mathbf{v}$의 성분을 구하여라.

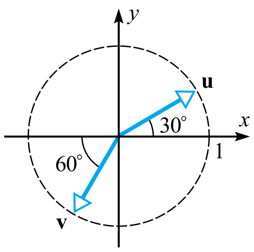


그림 문제 15

16. $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$일 때, $k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2)$임을 기하학적으로 증명하여라.

[이 증명을 $k > 0$인 경우로 제한한 것은 그림 3.1.8에 설명하였다. 그러나 완전한 증명이 되기 위해서는 k의 부호나 벡터가 위치하는 4분면에 따르는 여러 가지 경우가 수반되어야 할 것이다]

*선형대수-03장-1 2008.8.20 2:33 PM 페이지152

토론과 발견

17. 그림 3.1.13에서 벡터

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{OP_1} + \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1})$$

의 기하학적 해석을 논하여라.

18. 합이 영인 네 개의 영이 아닌 벡터를 나타내는 그림을 그려라.

19. 네 개의 영이 아닌 벡터가 주어졌을 때 처음 네 개의 벡터합과 같은 다섯 번째의 벡터를 기하학적으로 어떻게 구성할 수 있는가? 그림을 그려 각자의 방법을 설명하여라.

20. 그림 문제 20에서 표시된 바와 같이 중심으로부터 각 시간에 그려진 벡터를 갖는 시계를 생각하자.

(a) 12에서 종점이 되는 벡터는 그 길이의 두 배이고 다른 벡터는 그대로 둘 때 나타나는 12개의 벡터의 합은 얼마인가?

(b) 3과 9에서 종점이 되는 벡터는 각각 세 배이고, 다른 벡터는 그대로 둘 때 나타나는 12개의 벡터의 합은 얼마인가?

(c) 5, 11과 8에서 종점이 되는 벡터가 이동할 때 남는 9개의 벡터의 합은 얼마인가?

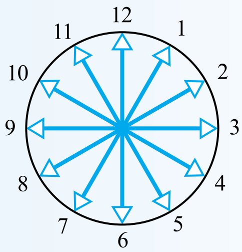


그림 문제 20

21. 다음 명제는 참(T)인지 또는 거짓(F)인지를 따지고 각자의 답을 증명하여라.

(a) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{z}$이면 $\mathbf{y} = \mathbf{x}$이다.

(b) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = 0$이면 모든 a와 b에 대해서 $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = 0$이다.

(c) 같은 길이를 갖는 나란한 두 벡터는 같다.

(d) $a\mathbf{x} = 0$이면 $a = 0$ 또는 $\mathbf{x} = 0$이다.

(e) $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = 0$이면 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$는 나란한 벡터이다.

(f) 벡터 $\mathbf{u} =$ `$\sqrt{2}, \sqrt{3}$j 과 $\mathbf{v} =$ e$\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\sqrt{3}$o은 동치이다.

3.2 벡터의 노름; 벡터산법

이 절에서는 벡터산법 중에서 기본 법칙을 확립하기로 한다.

벡터연산의 성질 2차원 공간과 3차원 공간의 벡터에 관한 가장 중요한 여러 가지 성질은 다음 정리로

*선형대수-03장-1 2008.8.20 2:33 PM 페이지153

주어진다.

정리 3.2.1

벡터산법의 성질

$\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$와 $\mathbf{w}$를 2차원 또는 3차원 공간의 벡터라 하고 k와 l을 스칼라라 할 때 다음 관계가 성립한다.

(a) $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$	(b) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$
(c) $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$	(d) $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$
(e) $k(l\mathbf{u})=(kl)\mathbf{u}$	(f) $k(\mathbf{u}+\mathbf{v})=k\mathbf{u}+k\mathbf{v}$
(g) $(k+l)\mathbf{u}=k\mathbf{u}+l\mathbf{u}$	(h) $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$

증명을 하기에 앞서서, 두 가지 관점에서 벡터를 나타낼 수 있음에 주의하자. 하나는 기하학적인 관점으로서 벡터가 화살표나 유향선분에 의해서 표현될 수 있다는 것이고, 다른 하나는 해석적 관점으로서 벡터가 성분이라고 불리는 수들의 쌍이나 세 짝에 의해 표현된다는 것이다.

따라서 정리 3.2.1의 방정식은 기하학적으로 또는 해석학적으로 증명될 수 있다. 여기서는 이 정리의 (b)만을 예로 들어 위 두 가지 관점에서 증명하기로 하고 나머지 증명에 대해서는 연습문제로 각자에게 맡기기로 한다.

(b)의 증명(해석적인 관점에서): 3차원 공간의 벡터에 관해서 증명하기로 한다. 2차원 벡터에 대해서도 증명방법은 같다.
$\mathbf{u}=(u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v}=(v_1, v_2, v_3)$, $\mathbf{w}=(w_1, w_2, w_3)$라고 하면 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} &= [(u_1, u_2, u_3)+(v_1, v_2, v_3)]+(w_1, w_2, w_3)\\ &= (u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3)+(w_1, w_2, w_3)\\ &= ([u_1+v_1]+w_1, [u_2+v_2]+w_2, [u_3+v_3]+w_3)\\ &= (u_1+[v_1+w_1], u_2+[v_2+w_2], u_3+[v_3+w_3])\\ &= (u_1, u_2, u_3)+(v_1+w_1, v_2+w_2, v_3+w_3)\\ &= \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}).\end{aligned}$$

(b)의 증명(기하학적 관점에서): $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$와 $\mathbf{w}$를 그림 3.2.1에 표시된 바와 같이 $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QR}$과 $\overrightarrow{RS}$로 나타내면

$$\mathbf{v}+\mathbf{w}=\overrightarrow{QS} \qquad \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\overrightarrow{PS}$$

이고 또한,

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\overrightarrow{PR} \qquad (\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\overrightarrow{PS}$$

이다. 따라서 다음이 성립한다.

$$\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}.$$ ■

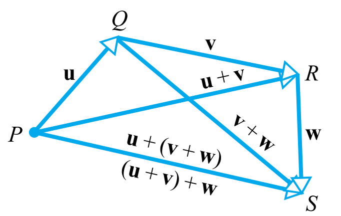


그림 3.2.1 $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$와 $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$는 같다.

※주의: 이 정리의 (b)에 따르면 괄호가 있든, 없든 간에 같은 합이 얻어지므로 기호 $\mathbf{u}+\mathbf{v}+$

*선형대수-03장-1 2008.8.20 2:33 PM 페이지154

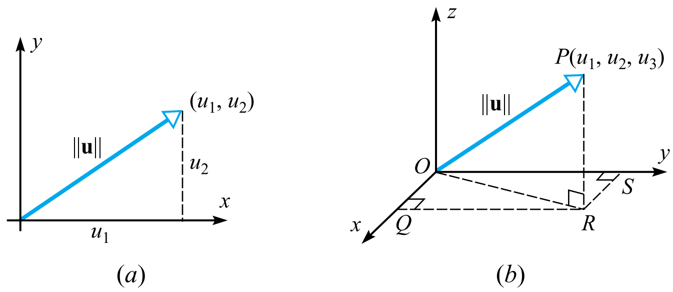


그림 3.2.2

$\mathbf{w}$는 문제가 없다. 더구나 벡터 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$와 $\mathbf{w}$가" 끝에서 끝으로 "위치한다면 합 $\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}$는 $\mathbf{u}$의 시초점에서 $\mathbf{w}$의 종점에 이르는 벡터이다(그림 3.2.1).

벡터의 노름 벡터 $\mathbf{u}$의 길이(length)는 $\mathbf{u}$의 노름(norm)이라고 불리우고 $\|\mathbf{u}\|$인 기호로서 표현된다. 피타고라스 정리에 의하여 2차원 공간의 벡터 $\mathbf{u}=(u_1, u_2)$의 노름은

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \tag{1}$$

이다(그림 3.2.2a). 3차원 공간의 벡터를 $\mathbf{u}=(u_1, u_2, u_3)$라 하고 그림 3.2.2$b$를 사용하여 피타고라스 정리를 두 번 적용하면,

$$\|\mathbf{u}\|^2 = (OR)^2 + (RP)^2 = (OQ)^2 + (OS)^2 + (RP)^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

이 됨으로, 따라서

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}. \tag{2}$$

노름이 1인 벡터를 단위벡터(unit vector)라 한다.

만일 3차원 공간 내의 두 점을 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$라 하면 이들 사이의 거리(distance) d는 벡터 $\overrightarrow{P_1P_2}$의 노름이다(그림 3.2.3). 즉,

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

이므로 (2)로부터

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{3}$$

이 성립한다.

같은 방법으로 2차원 공간의 두 점을 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$라 하면 이들 사이의 거리는

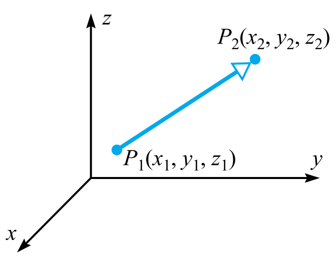


그림 3.2.3 P_1과 P_2 사이의 거리는 벡터 $\overrightarrow{P_1P_2}$의 노름이다.

*선형대수-03장-1 2008.8.20 2:33 PM 페이지155

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{4}$$

으로 주어진다.

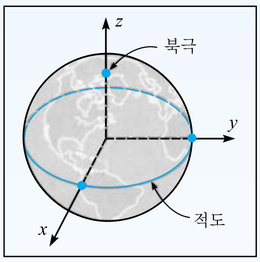
범세계적인 위치추적

GPS(Global Positioning System)는 군부, 함선, 항공기의 조종사, 측량사, 공공사업인 회사, 자동차와 하이커(hikers)가 인공위성 시스템과의 서로 교신에 의하여 현재의 위치를 알아내기 위하여 사용하는 시스템이다. U.S. 국방성에 의하여 작동하는 그 시스템은 명목상은 약 1,100(mi)의 높이로 12시간마다 지구상의 궤도를 그리며 도는 24개의 인공위성을 사용하고 있다. 이들 인공위성은 5개와 8개의 인공위성 사이에 지구상의 어떤 점으로부터 보이도록 선정된 6개의 궤도평면에서 이동한다.

이 시스템이 어떻게 작동하는가를 설명하기 위하여 지구를 하나의 구라 가정하면, 지구의 중심에 원점을 갖는 xyz 좌표계가 존재하고 그 z 축은 북극을 지난다 가정한다. 이 좌표계에 관하여 한 함선이 어떤 시간 t에서 알지못하는 점 (x, y, z)에 있다고 가정하자. 간단히 하기 위하여 거리는 지구의 반지름과 같은 단위로 측정됨으로 함선의 좌표는 항상 방정식

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

을 만족한다. GPS는 시간 t에서 3각분할시스템을 사용한 함선의 좌표 (x, y, z)와 네 개의 인공위성으로부터 계산 거리를 동일시 한다. 이들의 거리는 빛의 속력(근사적으로 0.469 지구반지름/100분의 1초)과 인공위성으로부터 신호가 함선에 전송하는 데 소요된 시간을 사용하여 계산된다.



예컨대 만일에 함선이 시간 t에서 신호를 받었고 인공위성이 시간 t_0에서 신호를 전송하였음이 표시된다면 그 신호에 의하여 항해된 거리 d는

$$d = 0.469(t - t_0)$$

로 될 것이다. 이론적으로 함선에서 인공위선까지의 세 가지 거리를 안다면 함선의 알지못하는 세 개의 좌표를 결정하기에 충분할 것이다. 그러나 문제는 함선(또는 GPS 사용자)에는 전세계적 위치추정을 위하여 아주 정확하게 t를 계산할 수 있는 시계를 지니고 있지 않다는 것이다. 따라서 t는 넷째의 알지 못하는 변수로 보아야 할 것이다. 따라서 네 번째 인공위성까지의 거리를 필요로 한다. 시간 t_0를 전송함과 동시에 각 인공위성은 그 시간에 자신의 좌표 (x_0, y_0, z_0)를 전송한다 가정하자. 따라서 d는

$$d = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

으로 계산할 수 있다. 두 방정식에서 d의 제곱을 계산하고 소수 네 자리 반올림으로 계산한다면 초—등급 방정식(second-degree equation)

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = 0.22(t - t_0)^2$$

을 얻는다. 네 개의 상이한 인공위성이 존재하고, 각 인공위성에 대해서 이와 같은 방정식을 얻을 수 있음으로 알지 못하는 x, y, z와 t_0인 네 개의 방정식을 구성할 수 있다. 이들은 초—등급 방정식이나 이들 네 개의 방정식과 어떤 대수를 사용하여 알지 못하는 x, y, z, t_0에 대해서 풀 수 있는 연립1차방정식을 구성할 수 있다.

예제 1 노름과 거리 구하기

벡터 $\mathbf{u} = (-3, 2, 1)$의 노름은

*선형대수-03장-1 2008.8.20 2:33 PM 페이지156

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(-3)^2 + (2)^2 + (1)^2} = \sqrt{14}$$

이고, 두 점 $P_1(2, -1, -5)$과 $P_2(4, -3, 1)$ 사이의 거리 d는

$$d = \sqrt{(4-2)^2 + (-3+1)^2 + (1+5)^2} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$$

이다. ◀

곱 $k\mathbf{u}$의 정의로부터 벡터 $k\mathbf{u}$의 길이는 $\mathbf{u}$의 길이를 $|k|$배한 것이다. 이 명제를 방정식으로 표현하면

$$\|k\mathbf{u}\| = |k|\|\mathbf{u}\| \tag{5}$$

이다. 이 유용한 공식은 2차원 공간과 3차원 공간에 모두 적용될 수 있다.

연습문제 3.2

1. 다음 벡터 $\mathbf{v}$의 노름을 구하여라.

(a) $\mathbf{v} = (4, -3)$ (b) $\mathbf{v} = (2, 3)$ (c) $\mathbf{v} = (-5, 0)$

(d) $\mathbf{v} = (2, 2, 2)$ (e) $\mathbf{v} = (-7, 2, -1)$ (f) $\mathbf{v} = (0, 6, 0)$

2. 다음의 P_1과 P_2 사이의 거리를 구하여라.

(a) $P_1(3, 4)$, $P_2(5, 7)$ (b) $P_1(-3, 6)$, $P_2(-1, -4)$

(c) $P_1(7, -5, 1)$, $P_2(-7, -2, -1)$ (d) $P_1(3, 3, 3)$, $P_2(6, 0, 3)$

3. $\mathbf{u} = (2, -2, 3)$, $\mathbf{v} = (1, -3, 4)$, $\mathbf{w} = (3, 6, -4)$라 할 때 다음 각각의 식을 계산하여라.

(a) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$ (b) $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (c) $\|-2\mathbf{u}\| + 2\|\mathbf{u}\|$

(d) $\|3\mathbf{u} - 5\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$ (e) $\dfrac{1}{\|\mathbf{w}\|}\mathbf{w}$ (f) $\left\|\dfrac{1}{\|\mathbf{w}\|}\mathbf{w}\right\|$

4. $\|\mathbf{v}\| = 2$ 이고 $\|\mathbf{w}\| = 3$일 때 $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$에 대해서 가능한 최대값과 최소값은 얼마인가? 자신의 결과를 기하학적으로 설명하여라.

5. $\mathbf{u} = (2, 0, 4)$이고 $\mathbf{w} = (1, 3, -6)$이라 하자. 가능하면 다음 각각을 만족하는 스칼라 k, l을 구하여라.

(a) $k\mathbf{u} + l\mathbf{v} = (5, 9, -14)$ (b) $k\mathbf{u} + l\mathbf{v} = (9, 15, -21)$

6. $\mathbf{u} = (2, 6, -7)$, $\mathbf{v} = (-1, -1, 8)$이고 $k = 3$이라 하자. $(2, 14, 11) = k\mathbf{u} + l\mathbf{v}$일 때 l의 값은 얼마인가?

7. $\mathbf{v} = (-1, 2, 5)$라 할 때 $\|k\mathbf{v}\| = 4$를 만족하는 모든 스칼라 k를 구하여라.

8. $\mathbf{u} = (7, -3, 1)$, $\mathbf{v} = (9, 6, 6)$, $\mathbf{w} = (2, 1, -8)$, $k = -2$, $l = 5$라 할 때 이들 벡터와 스칼라는 정리 3.2.1 중에서 다음에 해당되는 등식을 만족함을 밝혀라.

(a) (b) (b) (e) (c) (f) (d) (g)

*선형대수-03장-1 2008.8.20 2:33 PM 페이지157

9. (a) $\mathbf{v}$를 임의의 영이 아닌 벡터라 할 때 $\dfrac{1}{\|\mathbf{u}\|}\mathbf{v}$는 단위벡터임을 밝혀라.

(b) (a)의 결과를 사용하여 벡터 $\mathbf{v} = (3,4)$와 같은 방향을 갖는 단위벡터를 구하여라.

(c) (a)의 결과를 사용하여 벡터 $\mathbf{v} = (-2, 3, -6)$과 반대방향을 갖는 단위벡터를 구하여라.

10. (a) 그림 문제 10(a)의 벡터 $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$의 성분은 $v_1 = \|\mathbf{v}\|\cos\theta$이고 $v_2 = \|\mathbf{v}\|\sin\theta$임을 밝혀라.

(b) $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$를 그림 문제 10(b)에 있는 벡터라 하자. (a)의 결과를 사용하여 $4\mathbf{u} - 5\mathbf{v}$의 성분을 구하여라.

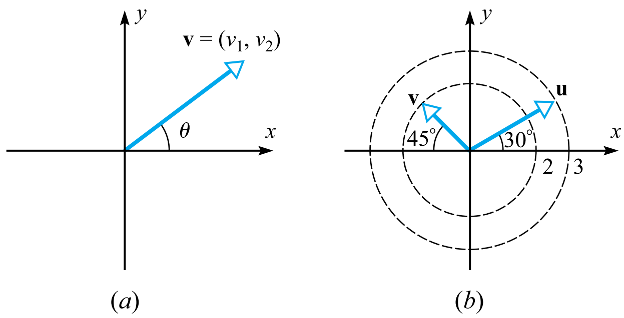


그림 문제 10

11. $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\mathbf{p} = (x, y, z)$라 할 때 $\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\| = 1$을 만족하는 점 (x, y, z)의 집합을 그려라.

12. 2차원 또는 3차원 공간 내의 벡터 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$에 대해서 기하학적으로 $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$임을 밝혀라.

13. 정리 3.2.1의 (a), (c), (e)를 해석학적으로 증명하여라.

14. 정리 3.2.1의 (d), (g), (h)를 해석학적으로 증명하여라.

토론과 발견

15. 문제 9에서 언급한 부등식에 대해서 $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$가 성립 가능한가? 자기의 추론을 설명하여라.

16. (a) 점 $\mathbf{P} = (a, b, c)$가 원점과 xz 평면에서부터 등거리에 있기 위해서는 어떤 관계가 성립해야 하는가? 구해진 관계는 a, b와 c의 양과 음의 값에 대해서 성립함을 확인하여라.

(b) 점 $\mathbf{P} = (a, b, c)$가 xz 평면에서보다 원점에서 더 멀리 있기 위해서는 어떤 관계가 성립해야 하는가? 구해진 관계는 a, b와 c의 양과 음의 값에 대해서 성립함을 확인하여라.

17. (a) 부등식 $\|\mathbf{x}\| < 1$은 평면의 점 $\mathbf{x}$의 위치에 관해서 무엇을 뜻하는가?

(b) 반지름이 1이고, 점 $\mathbf{x}_0$에 중심을 갖는 원 외부에 존재하는 점집합을 나타내는 부

*선형대수-03장-1 2008.8.20 2:33 PM 페이지158

등식을 기술하여라.

18. 그림 문제 18에 있는 3각형은 $k > 0$인 경우에 대해서 정리 3.2.1 (f)의 기하학적 증명을 제공한다. 이를 증명하여라.

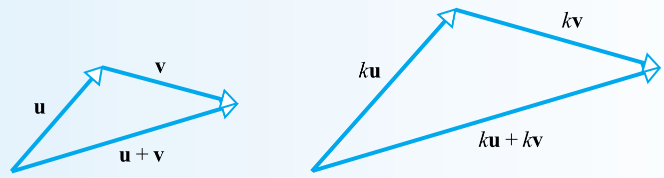


그림 문제 18

3.3 내적(점곱); 정사영

이 절에서는 2차원 공간과 3차원 공간의 벡터끼리인 곱의 중요한 방법을 논하고 기하학에 대한 내적의 몇 가지 응용을 다루기로 한다.

벡터의 점곱(내적)

$\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$를 2차원 또는 3차원 공간 내의 0이 아닌 벡터라 하고 이들 벡터는 시초점이 일치하도록 놓여 있다 하자. $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$가 만드는 각도 중에서 $0 \le \theta \le \pi$를 만족하는 각을 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$가 이루는 각(angle between u and v)이라 한다(그림 3.3.1).

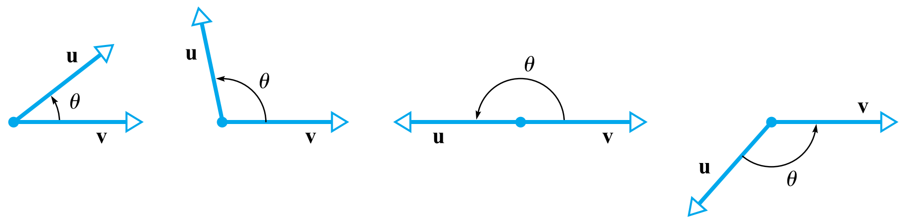


그림 3.3.1 $0 \le \theta \le \pi$를 만족하는 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$가 이루는 각

정의

$\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$를 2차원 또는 3차원 공간의 벡터, θ를 이들이 이루는 각이라 할 때 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$의 유클리드 내적 또는 점곱(Euclidean inner product or dot product) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$를

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{cases} \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos\theta & (\mathbf{u} \neq \mathbf{0},\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}\text{일 때}) \\ 0 & (\mathbf{u} = \mathbf{0},\ \text{또는 } \mathbf{v} = \mathbf{0}\text{일 때}) \end{cases} \tag{1}$$

으로 정의한다.

*선형대수-03장-1 2008.8.20 2:33 PM 페이지159

예제 1 **내적(점곱)**

그림 3.3.2에 표시된 바와 같이 벡터 $\mathbf{u} = (0, 0, 1)$과 $\mathbf{v} = (0, 2, 2)$가 이루는 각은 $45°$이다. 따라서,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos\theta = (\sqrt{0^2+0^2+1^2})(\sqrt{0^2+2^2+2^2})\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2. \blacktriangleleft$$

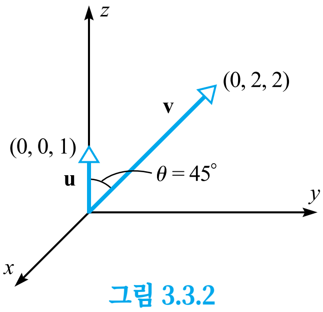


그림 3.3.2

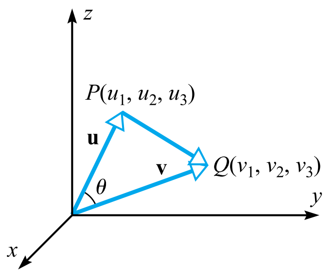


그림 3.3.3

점곱(내적)에 관한 성분공식 계산을 하기 위해서는 두 벡터의 내적을 벡터의 성분으로 표현하는 공식이 바람직하다. 이와 같은 공식을 3차원 공간의 벡터에 대해서 유도하겠는데, 2차원 공간의 벡터에 관한 유도도 방법은 같다.

$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$를 두 개의 0이 아닌 벡터라 하고 그림 3.3.3에서와 같이 이들이 이루는 각을 θ라 하면, 이 경우 여현정리로부터

$$\|\overrightarrow{PQ}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos\theta \tag{2}$$

가 되고, $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$이므로 (2)를

$$\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos\theta = \tfrac{1}{2}(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2)$$

즉,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \tfrac{1}{2}(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2)$$

으로 고쳐 쓸 수 있다. 이 식에

$$\|\mathbf{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, \qquad \|\mathbf{v}\|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2,$$

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 = (v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + (v_3 - u_3)^2$$

을 대입하여 간단히 함으로써

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \tag{3}$$

인 관계가 얻어진다. 이 공식은 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$가 영이 아니라는 가정에서 유도되었으나 이 공식은 $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ 또는 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$일 때도 또한 성립한다(밝혀라).

만일에 $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$를 2차원 공간의 두 벡터라 하면 식 (3)에 대응하는 공식은 다음과 같다.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2. \tag{4}$$

*선형대수-03장-1 2008.8.20 2:33 PM 페이지160

두 벡터가 이루는 각을 구하는 방법 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$가 영이 아닌 벡터이면 공식 (1)은 다음과 같이 표기될 수 있다.

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}. \tag{5}$$

예제 2 공식 (3)을 사용한 내적(점곱)

$\mathbf{u} = (2, -1, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 1, 2)$에 대해서 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$와 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$가 이루는 각도 θ를 구하여라.

풀이: $$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = (2)(1) + (-1)(1) + (1)(2) = 3.$$

주어진 벡터에 대해서

$$\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = \sqrt{6}$$

이고, (5)에서부터

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2}.$$

따라서 $\theta = 60^\circ$이다. ◀

예제 3 기하학적 문제

정육면체의 대각선과 변이 이루는 각을 구하여라.

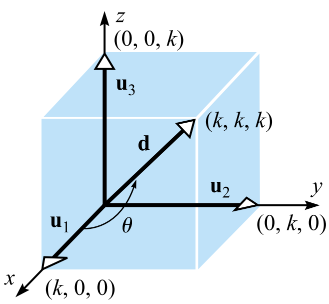


그림 3.3.4

풀이: 정육면체의 한 변의 길이를 k라 하고 그림 3.3.4에 표시한 바와 같은 좌표계를 이용한다.

이제, $\mathbf{u} = (k, 0, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (0, k, 0)$, $\mathbf{u}_3 = (0, 0, k)$라고 하면, 벡터

$$\mathbf{d} = (k, k, k) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$$

는 정육면체의 대각선인 벡터이다. 이 $\mathbf{d}$와 변 $\mathbf{u}_1$이 이루는 각을 θ라 하면

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{d}}{\|\mathbf{u}_1\|\|\mathbf{d}\|} = \frac{k^2}{(k)(\sqrt{3k^2})} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

따라서,

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 54.74^\circ.$$

이것은 기대한 바와 같이 k와 관계가 없음에 유의하여라. ◀

다음 정리는 두 개의 벡터가 이루는 각에 관한 정보를 얻을 때에 내적을 어떻게 이용하면 되는가를 설명해 준다. 또한 내적과 노름 사이의 중요한 관계식을 제공한다.

정리 3.3.1 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$가 2차원 또는 3차원 공간의 벡터이면 다음이 성립한다.

(a) $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$ 즉, $\|\mathbf{v}\| = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})^{1/2}$
(b) $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$가 영이 아닌 벡터이고, θ가 이들이 이루는 각이면

θ = 예각이기 위한 필요충분조건은 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} > 0$이다.
θ = 둔각이기 위한 필요충분조건은 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} < 0$이다.
$\theta = \pi/2$이기 위한 필요충분조건은 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$이다.

증명(a): $\mathbf{v}$와 $\mathbf{v}$가 이루는 각은 0이므로

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta = \|\mathbf{v}\|^2\cos 0 = \|\mathbf{v}\|^2.$$

증명(b): θ는 $0 \le \theta \le \pi$를 만족함으로 θ가 예각이기 위한 필요충분조건은 $\cos\theta > 0$이고 θ가 둔각이기 위한 필요충분조건은 $\cos\theta < 0$이며, $\theta = \pi/2$이기 위한 필요충분조건은 $\cos\theta = 0$이다. 그런데 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta$, $\|\mathbf{u}\| > 0$, $\|\mathbf{v}\| > 0$이므로, $\cos\theta$는 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$와 같은 부호를 가짐으로 이 결과가 성립한다. ■

예제 4 성분에 의한 내적(점곱)을 구하는 방법

$\mathbf{u} = (1, -2, 3)$, $\mathbf{v} = (-3, 4, 2)$, $\mathbf{w} = (3, 6, 3)$이라 하면,

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= (1)(-3) + (-2)(4) + (3)(2) = -5\\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} &= (-3)(3) + (4)(6) + (2)(3) = 21\\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{w} &= (1)(3) + (-2)(6) + (3)(3) = 0.\end{aligned}$$

따라서, $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$가 이루는 각은 둔각, $\mathbf{v}$와 $\mathbf{w}$가 이루는 각은 예각, $\mathbf{w}$와 $\mathbf{u}$가 이루는 각은 직각이다. ◀

직교벡터 수직벡터는 또한 직교벡터(orthogonal vector)라 한다. 정리 3.3.1b에 따르면 영이 아닌 두 벡터가 수직이기 위한 필요충분조건은 이들의 내적이 영인 것이다. 벡터 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$가 하나, 또는 모두가 0일 때 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$가 수직이라고 생각한다면, 예외 없이 두 벡터 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$가 직교하기 위한 필요충분조건은 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$이 되는 것이다. $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$가 직교 벡터임을 표시하기 위하여 $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$로 표기한다.

예제 5 직선에 수직인 벡터

2차원 공간에서 영이 아닌 벡터 $\mathbf{n} = (a, b)$는 직선 $ax + by + c = 0$에 수직임을 밝혀라.

풀이: $P_1(x_1, y_1)$과 $P_2(x_2, y_2)$를 직선상의 다른 두 점이라 하자. 그러면

$$\begin{aligned}ax_1 + by_1 + c &= 0\\ ax_2 + by_2 + c &= 0\end{aligned} \tag{6}$$

이 성립한다. 벡터 $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$은 이 직선에 따르기 때문에(그림 3.3.5) $\mathbf{n}$과

*선형대수-03장-1 2008.8.20 2:33 PM 페이지162

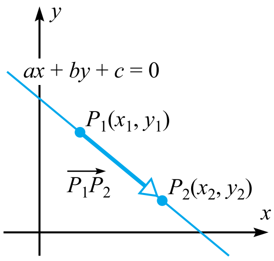


그림 3.3.5

$\overrightarrow{P_1P_2}$가 수직인 것만을 밝히면 된다. (6)의 두 방정식을 빼면

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$$

이고, 이것은 다음 형식으로 표현될 수 있다.

$$(a, b) \cdot (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = 0.$$

즉,

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_1P_2} = 0$$

이므로 $\mathbf{n}$과 $\overrightarrow{P_1P_2}$는 수직이다. ◀

내적으로 지니고 있는 가장 중요한 성질을 정리로 요약해 두기로 한다. 이들은 벡터를 포함하는 계산에서 유용하다.

정리 3.3.2 **내적의 성질**

$\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$를 2차원 또는 3차원 공간의 벡터라 하고 k를 스칼라라 할 때 다음이 성립한다.

(*a*) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

(*b*) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

(*c*) $k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (k\mathbf{v})$

(*d*) $\mathbf{v} \neq 0$이면 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} > 0$, $\mathbf{v} = 0$이면 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$.

증명: 3차원 공간의 벡터에 대해서 (*c*)를 증명하기로 하고 나머지 증명은 연습문제로 넘기기로 한다. $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$라고 하면,

$$\begin{aligned} k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) &= k(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) \\ &= (ku_1)v_1 + (ku_2)v_2 + (ku_3)v_3 \\ &= (k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}. \end{aligned}$$

같은 방법으로,

$$k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (k\mathbf{v}).$$ ■

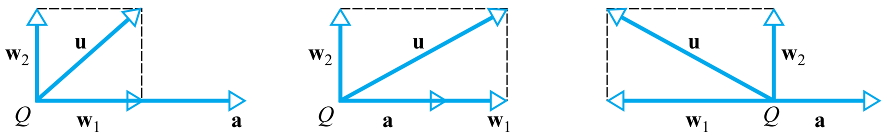
정사영 여러 가지 응용에 있어서 벡터 $\mathbf{u}$를 지정된 영이 아닌 벡터 $\mathbf{a}$에 나란한 부분과 $\mathbf{a}$에 수직 부분인 두 항의 합으로 "분할(decompose)"하는 것은 흥미 있는 일이다. 만일에 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{a}$가 시초점이 어떤 점 Q에서 일치하도록 위치하였다면 벡터 $\mathbf{u}$를 다음에서와 같이 분할할 수 있다(그림 3.3.6).

$\mathbf{u}$의 끝에서 수직으로 $\mathbf{a}$를 지나는 직선으로 내려서 Q에서부터 이 수직선의 밑바닥까지의 벡터 $\mathbf{w}_1$을 구성한 다음에 차

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1$$

을 구성한다.

*선형대수-03장-1 2008.8.20 2:33 PM 페이지163



(*a*) (*b*) (*c*)

그림 3.3.6 벡터 $\mathbf{u}$는 $\mathbf{w}_1$과 $\mathbf{w}_2$의 합이고, 여기서 $\mathbf{w}_1$은 $\mathbf{a}$에 나란하고 $\mathbf{w}_2$는 $\mathbf{a}$에 수직이다.

그림 3.3.6에서 표시한 바와 같이 벡터 $\mathbf{w}_1$은 $\mathbf{a}$에 나란하고 벡터 $\mathbf{w}_2$는 $\mathbf{a}$에 수직이며,

$$\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_1 + (\mathbf{u} - \mathbf{w}_1) = \mathbf{u}$$

이다. 벡터 $\mathbf{w}_1$을 **u에서 a로의 정사영**(orthogonal projection of **u** on **a**) 또는 간혹 **a**를 따르는 **u**의 벡터성분(vector component of **u** along **a**)이라 하고 이것은

$$\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u} \tag{7}$$

로 표시한다. 벡터 $\mathbf{w}_2$를 **a**에 직교하는 **u**의 벡터성분(vector component of **u** orthogonal to **a**)이라 한다. $\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1$이므로 이 벡터는 기호 (7)에 의하여

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u}$$

와 같이 표기될 수 있다. 다음 정리는 벡터 $\text{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{u}$와 $\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{u}$를 계산하는 공식을 제공한다.

정리 3.3.3 만일 **u**와 **a**가 2차원 공간 또는 3차원 공간의 벡터이고 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$이면,

$$\boxed{\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a} \quad (\mathbf{a}\text{를 따르는 }\mathbf{u}\text{의 벡터성분})}$$

$$\boxed{\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{u} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a} \quad (\mathbf{a}\text{에 수직인 }\mathbf{u}\text{의 벡터성분})}$$

이다.

증명: $\mathbf{w}_1 = \text{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{u}$이고, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{u}$라 하자. $\mathbf{w}_1$은 **a**에 나란하므로 이것은 **a**의 스칼라곱이어야 하고 형식 $\mathbf{w}_1 = k\mathbf{a}$로 표기될 수 있다. 따라서,

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = k\mathbf{a} + \mathbf{w}_2. \tag{8}$$

식 (8)의 양변을 **a**와의 내적을 실시하고 정리 3.3.1*a*와 3.3.2를 사용하면,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = (k\mathbf{a} + \mathbf{w}_2) \cdot \mathbf{a} = k\|\mathbf{a}\|^2 + \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{a}. \tag{9}$$

그런데 $\mathbf{w}_2$는 **a**에 수직이므로 $\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{a} = 0$이다. 따라서 (9)는

*선형대수-03장-1 2008.8.20 2:33 PM 페이지164

$$k = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}.$$

$\text{proj}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{u} = \mathbf{w}_1 = k\mathbf{a}$이므로

$$\text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a}$$

를 얻는다. ■

예제 6 a를 따르는 u의 벡터성분

$\mathbf{u} = (2,\ -1,\ 3)$이고 $\mathbf{a} = (4,\ -1,\ 2)$라 하자. $\mathbf{a}$에 따르는 $\mathbf{u}$의 벡터성분과 $\mathbf{a}$에 직교하는 $\mathbf{u}$의 벡터성분을 구하여라.

풀이:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = (2)(4) + (-1)(-1) + (3)(2) = 15$$
$$\|\mathbf{a}\|^2 = 4^2 + (-1)^2 + 2^2 = 21.$$

따라서 $\mathbf{a}$를 따르는 $\mathbf{u}$의 벡터성분은

$$\text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a} = \tfrac{15}{21}(4, -1, 2) = \left(\tfrac{20}{7}, -\tfrac{5}{7}, \tfrac{10}{7}\right)$$

이고, $\mathbf{a}$에 직교하는 $\mathbf{u}$의 벡터성분은

$$\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{u} = (2, -1, 3) - \left(\tfrac{20}{7}, -\tfrac{5}{7}, \tfrac{10}{7}\right) = \left(-\tfrac{6}{7}, -\tfrac{2}{7}, \tfrac{11}{7}\right).$$

검산으로서 독자는 벡터 $\mathbf{u} - \text{proj}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{u}$와 $\mathbf{a}$가 이들의 내적이 0임을 밝힘으로써 수직임을 밝힐 수 있다. ◀

$\mathbf{a}$에 따르는 $\mathbf{u}$의 벡터성분의 길이에 관한 공식은 다음과 같이 표현함으로써 얻어질 수 있다.

$$\begin{aligned}
\|\text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{u}\| &= \left\| \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a} \right\| \\
&= \left| \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} \right| \|\mathbf{a}\| \quad \longleftarrow \quad \text{3.2절의 공식(5)} \\
&= \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}|}{\|\mathbf{a}\|^2} \|\mathbf{a}\| \quad \longleftarrow \quad \|\mathbf{a}\|^2 > 0 \text{ 이므로}
\end{aligned}$$

이고, 이것은

$$\|\text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{u}\| = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}|}{\|\mathbf{a}\|} \tag{10}$$

로 된다. θ로 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{a}$ 사이의 각을 표시하면 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{a}\|\cos\theta$이므로, (10)은 또한

$$\|\text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}\|\,|\cos\theta| \tag{11}$$

*선형대수-03장-1 2008.8.20 2:33 PM 페이지165

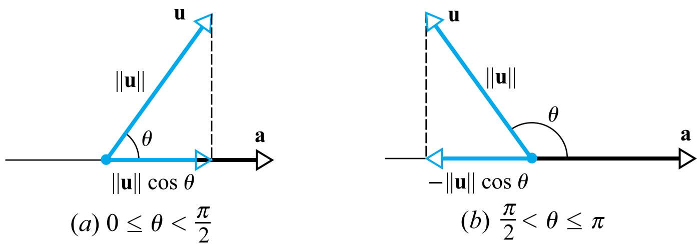


그림 3.3.7

로 표기될 수 있다(밝혀라). 이 결과의 기하학적 해석은 그림 3.3.7에 주어졌다.

한 예로서 평면의 한 점에서 하나의 직선에 이르는 거리에 대한 공식을 유도하는 데 벡터방법을 사용하기로 한다.

예제 7 하나의 점과 하나의 직선 사이의 거리

점 $P_0(x_0, y_0)$와 직선 $ax + by + c = 0$ 사이의 거리 D에 대한 공식을 구하여라.

풀이: $Q(x_1, y_1)$를 직선상의 임의의 점이라 하고 벡터

$$\mathbf{n} = (a, b)$$

는 그 시초점이 Q에 있도록 위치한다 하자.

예제 5에 의하여 벡터 $\mathbf{n}$은 이 직선에 수직이다(그림 3.3.8). 그림에서 표시된 바와 같이 거리 D는 $\overrightarrow{QP_0}$에서 $\mathbf{n}$으로의 정사영인 길이와 같다. 따라서, (10)으로부터

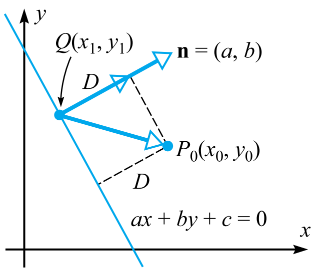


그림 3.3.8

$$D = \|\text{proj}_{\mathbf{n}} \overrightarrow{QP_0}\| = \frac{|\overrightarrow{QP_0} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}.$$

그런데,

$$\overrightarrow{QP_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1)$$
$$\overrightarrow{QP_0} \cdot \mathbf{n} = a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1)$$
$$\|\mathbf{n}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

이므로,

$$D = \frac{|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{12}$$

점 $Q(x_1, y_1)$는 이 직선상에 있기 때문에 그 좌표는 직선의 방정식을 만족한다. 따라서

$$ax_1 + by_1 + c = 0$$

즉,

$$c = -ax_1 - by_1.$$

이 식을 (12)에 대입하면 공식,

*선형대수-03장-1 2008.8.20 2:34 PM 페이지166

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{13}$$

를 얻는다. ◀

예제 8 **거리공식의 사용법**

점 (1, −2)에서부터 직선 $3x + 4y - 6 = 0$까지의 거리 D는 공식 (13)에서부터

$$D = \frac{|(3)(1) + 4(-2) - 6|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-11|}{\sqrt{25}} = \frac{11}{5}$$

이다. ◀

연습문제 3.3

1. 다음의 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$를 구하여라.

(a) $\mathbf{u} = (2, 3),\ \mathbf{v} = (5, -7)$　　(b) $\mathbf{u} = (-6, -2),\ \mathbf{v} = (4, 0)$

(c) $\mathbf{u} = (1, -5, 4),\ \mathbf{v} = (3, 3, 3)$　　(d) $\mathbf{u} = (-2, 2, 3),\ \mathbf{v} = (1, 7, -4)$

2. 문제 1의 각각에 대해서 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$가 이루는 각을 θ라 하고서 $\cos\theta$값을 구하여라.

3. 다음 벡터 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$가 이루는 각은 둔각, 예각, 직각 중 어느 것인가를 결정하여라.

(a) $\mathbf{u} = (6, 1, 4),\ \mathbf{v} = (2, 0, -3)$　　(b) $\mathbf{u} = (0, 0, -1),\ \mathbf{v} = (1, 1, 1)$

(c) $\mathbf{u} = (-6, 0, 4),\ \mathbf{v} = (3, 1, 6)$　　(d) $\mathbf{u} = (2, 4, -8),\ \mathbf{v} = (5, 3, 7)$

4. 다음의 $\mathbf{u}$에서 $\mathbf{a}$로의 정사영을 구하여라.

(a) $\mathbf{u} = (6, 2),\ \mathbf{a} = (3, -9)$　　(b) $\mathbf{u} = (-1, -2),\ \mathbf{a} = (-2, 3)$

(c) $\mathbf{u} = (3, 1, -7),\ \mathbf{a} = (1, 0, 5)$　　(d) $\mathbf{u} = (1, 0, 0),\ \mathbf{a} = (4, 3, 8)$

5. 문제 4의 각각에서 $\mathbf{a}$에 직교하는 $\mathbf{u}$벡터의 성분을 구하여라.

6. 다음 각각에서 $\|\text{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{u}\|$를 구하여라.

(a) $\mathbf{u} = (1, -2),\ \mathbf{a} = (-4, -3)$　　(b) $\mathbf{u} = (5, 6),\ \mathbf{a} = (2, -1)$

(c) $\mathbf{u} = (3, 0, 4),\ \mathbf{a} = (2, 3, 3)$　　(d) $\mathbf{u} = (3, -2, 6),\ \mathbf{a} = (1, 2, -7)$

7. $\mathbf{u} = (5, -2, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 6, 3)$과 $k = -4$에 대해서 정리 3.3.2를 증명하여라.

8. (a) $\mathbf{v} = (a, b)$와 $\mathbf{w} = (-b, a)$는 서로 직교벡터임을 밝혀라.

(b) (a)의 결과를 사용하여 $\mathbf{v} = (2, -3)$에 직교하는 두 벡터를 구하여라.

(c) (−3, 4)에 직교하는 두 개의 단위벡터를 구하여라.

9. $\mathbf{u} = (3,4)$, $\mathbf{v} = (5,-1)$, $\mathbf{w} = (7, 1)$이라 하고 다음 식을 계산하여라.

(a) $\mathbf{u} \cdot (7\mathbf{v} + \mathbf{w})$　　(b) $\|(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w}\|$　　(c) $\|\mathbf{u}\|(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$　　(d) $(\|\mathbf{u}\|\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$

10. $\mathbf{u} = (5, -2, 3)$에 직교하는 영이 아닌 5개의 상이한 벡터를 구하여라.

*선형대수-03장-1 2008.8.20 2:34 PM 페이지167

11. 벡터를 사용하여 꼭지점의 좌표가 $(0, -1), (1, -2), (4, 1)$로서 주어지는 3각형의 내각의 코사인을 구하여라.

12. $A(3, 0, 2)$, $B(4, 3, 0)$과 $C(8, 1, -1)$은 직각 3각형의 꼭지점임을 밝혀라. 어느 꼭지점에서 직각이 되는가?

13. $\mathbf{u} = (1, 0, 1)$과 $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$의 모두에 직교하는 단위벡터를 구하여라.

14. xy 평면의 벡터 $\mathbf{a}$는 9단위의 길이를 가지며, 양의 x축으로부터 시계바늘과 반대방향으로 $120°$에 있는 어떤 방향으로 위치하고 있다. 그리고 그 평면의 벡터 $\mathbf{b}$는 5단위의 길이를 가지며 양의 y방향에 위치하고 있다. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$를 구하여라.

15. xy 평면의 벡터 $\mathbf{a}$는 양의 x축으로부터 시계바늘과 반대방향으로 $47°$에 있는 어떤 방향으로 위치하고 있고, 그 평면의 벡터 $\mathbf{b}$는 양의 x축으로부터 시계바늘 방향으로 $43°$에 있는 어떤 방향으로 위치하고 있다. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$의 값에 관하여 얼마라 할 수 있는가?

16. $\mathbf{p} = (2, k)$, $\mathbf{q} = (3, 5)$라 할 때 다음을 만족시키는 k를 구하여라.

(a) $\mathbf{p}$와 $\mathbf{q}$는 나란하다. (b) $\mathbf{p}$와 $\mathbf{q}$는 직교한다.

(c) $\mathbf{p}$와 $\mathbf{q}$의 사이각은 $\pi/3$이다. (d) $\mathbf{p}$와 $\mathbf{q}$의 사이각은 $\pi/4$이다.

17. 공식 (13)을 사용하여 다음에 주어진 점과 직선 사이의 거리를 계산하여라.

(a) $4x + 3y + 4 = 0$; $(-3, 1)$ (b) $y = -4x + 2$; $(2, -5)$ (c) $3x + y = 5$; $(1, 8)$

18. 등식 $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$을 증명하여라.

19. 등식 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{4}\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \frac{1}{4}\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2$을 증명하여라.

20. 정육면체의 대각선과 하나의 면과의 사이각을 구하여라.

21. $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$와 $\mathbf{k}$를 3차원 공간에 있어서 직교좌표계인 양의 x, y와 z축을 따르는 단위벡터라 하자. $\mathbf{v} = (a, b, c)$를 영이 아닌 벡터라 할 때 벡터 $\mathbf{v}$와 각 $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$가 이루는 각각의 사이각 α, β와 γ를 $\mathbf{v}$의 방향각(direction angles)이라 하고(그림 문제 21), 수 $\cos\alpha$, $\cos\beta$와 $\cos\gamma$를 $\mathbf{v}$의 방향코사인(direction cosines)이라 한다.

(a) $\cos\alpha = a/\|\mathbf{v}\|$임을 밝혀라. (b) $\cos\beta$와 $\cos\gamma$를 구하여라.

(c) $\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\| = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$임을 밝혀라.

(d) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$임을 밝혀라.

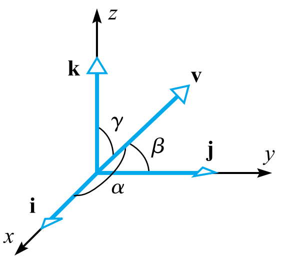


그림 문제 21

*선형대수-03장-1 2008.8.20 2:34 PM 페이지168

22. 문제 21의 결과를 사용하여 치수가 10 cm×15 cm×25 cm인 상자의 대각선이 그 상자의 한 변과 이루는 각을 최적근사도수로 계산하여라. (주의: 계산기를 필요로 한다)

23. 문제 21를 참고로 하여 3차원 공간의 영이 아닌 두 벡터 $\mathbf{v}_1$과 $\mathbf{v}_2$가 수직이 되기 위한 필요충분조건은 이들의 방향코사인이

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2=0$$

을 만족하는 것임을 밝혀라.

24. (a) 꼭지점이 $A(2, 3)$, $C(4, 7)$과 $D(-5, 8)$인 3각형의 넓이를 구하여라.
(b) 사변형 $ABCD$가 평행사변형이 되는 점 B의 좌표를 구하여라. 이 평행사변형의 넓이는 얼마인가?

25. $\mathbf{v}$가 $\mathbf{w}_1$과 $\mathbf{w}_2$의 모두에 직교하면 $\mathbf{v}$는 모든 스칼라 k에 대해서 $k_1\mathbf{w}_1+k_2\mathbf{w}_2$에 직교함을 밝혀라.

26. $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$를 2차원 또는 3차원 공간에서 영이 아닌 벡터라 하고 $k=\|\mathbf{u}\|$이고 $l=\|\mathbf{v}\|$이라 하자. 이 경우 $\mathbf{w}=l\mathbf{u}+k\mathbf{v}$는 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$가 이루는 각을 2등분함을 밝혀라.

토론과 발견

27. 다음 항목들은 어느 것 하나도 수식과는 맞다고 할 수 없다(뜻이 없다). 그 이유는?
(a) $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})$ (b) $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})+\mathbf{w}$ (c) $\|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\|$ (d) $k\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v})$

28. $\text{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{u}=\text{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{a}$가 성립가능한가? 각자의 논법을 설명하여라.

29. $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$일 때 방정식 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$의 양변에서 $\mathbf{u}$를 소거하여 $\mathbf{v}=\mathbf{w}$가 성립하는가? 각자의 논법을 설명하여라.

30. $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$와 $\mathbf{w}$는 3차원 공간에서 서로 직교하는 영이 아닌 벡터라 하고, 이들 벡터와 3차원 공간의 하나의 벡터 $\mathbf{r}$과의 내적을 알고 있다고 가정하자. $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$에 의한 $\mathbf{r}$의 식과 내적을 구하여라.
(힌트: $\mathbf{r}=c_1\mathbf{u}+c_2\mathbf{v}+c_3\mathbf{w}$ 형식의 식을 구하여라)

31. $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$는 2차원 또는 3차원 공간의 수직벡터라 하자. 방정식 $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2=\|\mathbf{u}\|^2+\|\mathbf{v}\|^2$으로 표현되는 유명한 정리는 무엇인가? 답을 뒷받침하는 그림을 그려라.

3.4 벡터곱

기하학, 물리학과 공학의 여러 가지 문제에 대한 벡터의 응용에 있어서 3차원 공간에서 주어진 두 벡터에 수직이 되는 벡터를 구성하는 것은 중요하다. 이 절에서는 이와 같은 벡터를 구성하는 방법을 소개하고자 한다.

*선 형 대 수-03장-1 2008.8.20 2:34 PM 페 이 지 169

벡터곱 3.3절에서부터 2차원 또는 3차원 공간에 있어서 두 벡터의 내적은 스칼라였음을 상기하자. 이제 벡터곱이 벡터를 구성하는 벡터 곱셈의 하나인 형태를 정의하겠지만, 이것은 오직 3차원 공간에서만이 적용 가능하다.

정의

3차원 공간의 벡터 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$와 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$에서

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2,\ u_3v_1 - u_1v_3,\ u_1v_2 - u_2v_1)$$

을 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$의 외적 또는 벡터곱 (cross product)이라 한다. 행렬식을 이용하면

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) \tag{1}$$

로도 표기된다.

※주의: 공식 (1)을 암기하는 대신에 다음과 같이 하면 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$의 성분을 얻을 수 있다.

- 2×3 행렬

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

를 구성한다. 여기서 제1행은 $\mathbf{u}$의 성분이고 제2행은 $\mathbf{v}$의 성분이다.

- $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$의 제1성분을 구하려면 제1열을 삭제하고서 만든 행렬식을 취하면 되고, $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$의 제2성분을 구하려면 제2열을 삭제하여 만든 행렬식에 음의 부호를 취하면 되고, $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$의 제3의 성분을 구하려면 제3열을 삭제하여 만든 행렬식을 취하면 된다.

예제 1 **벡터곱의 계산법**

$\mathbf{u} = (1, 2, -2)$, $\mathbf{v} = (3, 0, 1)$이라 하고서 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$를 구하여라.

풀이: 위 주의에서 언급한 암기방법 또는 (1)의 어느 하나로부터 다음이 성립한다.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right)$$
$$= (2, -7, -6)\,. \blacktriangleleft$$

두 벡터의 내적과 벡터곱 사이에는 중요한 차이가 있다. 즉 내적의 결과는 스칼라이고 벡터곱의 결과는 하나의 벡터이다. 다음 정리는 내적과 벡터곱 사이에 성립하는 몇 가지 중요한 관계를 제시하고, 또한 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$는 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$에 모두 직교함을 나타낸다.

정리 3.4.1 **벡터곱과 내적을 수반하는 관계**

$\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$와 $\mathbf{w}$를 3차원 공간의 벡터라 할 때 다음이 성립한다.

*선형대수-03장-1 2008.8.20 2:34 PM 페이지170

(*a*) $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=0$	($\mathbf{u}\times\mathbf{v}$와 $\mathbf{u}$는 직교)
(*b*) $\mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=0$	($\mathbf{u}\times\mathbf{v}$와 $\mathbf{v}$는 직교)
(*c*) $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2=\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2$	(라그랑주의 항등식)
(*d*) $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v}-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{w}$	(벡터곱과 내적과의 관계)
(*e*) $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v}-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\mathbf{u}$	(벡터곱과 내적과의 관계)

증명(*a*): $\mathbf{u}=(u_1, u_2, u_3)$이고 $\mathbf{v}=(v_1, v_2, v_3)$라 하면 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) &= (u_1, u_2, u_3)\cdot(u_2v_3-u_3v_2,\, u_3v_1-u_1v_3,\, u_1v_2-u_2v_1)\\ &= u_1(u_2v_3-u_3v_2)+u_2(u_3v_1-u_1v_3)+u_3(u_1v_2-u_2v_1)=0.\end{aligned}$$

증명(*b*): (*a*)와 같다.

증명(*c*):

$$\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2=(u_2v_3-u_3v_2)^2+(u_3v_1-u_1v_3)^2+(u_1v_2-u_2v_1)^2 \qquad (2)$$

이고

$$\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2=(u_1^2+u_2^2+u_3^2)(v_1^2+v_2^2+v_3^2)-(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)^2 \qquad (3)$$

이므로, (2)와 (3)의 우변을 전개하여 이들이 일치함을 밝힘으로써 증명은 완료된다.

증명(*d*)와 (*e*): 연습문제 26과 27을 참조하여라. ■

라그랑주(Joseph Lauis Lagrange: 1736~1813): 프랑스계 이태리 수학자이며 천문학자.

공무원의 아들이었던 라그랑주는 이태리의 튜링(Turin)에서 태어났으며(세례명은 Giuseppe Lodovico Lagrangia로 기록되어 있다), 그의 아버지는 라그랑주가 법률가로 성정하기를 원했으나 천문학자 할리(Halley)의 자서전을 읽은 다음에 수학과 천문학에 매혹되었다. 그는 16세에 독학으로 수학의 연구를 시작했고 19세에 튜링에 있는 왕립포병학교의 교관으로 임명되었다. 다음 해에 그는 변분학이라는 수학의 한 분야를 개척하는 새로운 방법을 사용하여 몇 가지 유명한 문제들을 풀었다. 천체역학의 여러 문제에 대한 이들 방법과 라그랑주의 응용은 매우 대단한 것이었음으로, 25세에 이르러 그의 많은 동료로부터 살아있는 위대한 수학자로 존경을 받았다. 라그랑주의 걸작 중의 하나는 그의 저서인 해석역학(me'canique analytique)인데, 여기서 그는 역학의 이론을 몇 가지 일반적인 공식으로 환원하였고 이것으로부터 필요한 다른 모든 방정식이 유도될 수 있었다.

라그랑주

라그랑주의 부친이 여러 번 금융투기에 실패하여 그의 가족은 매우 검소하게 살 수밖에 없었던 것은 역사적으로 흥미 있는 사실이다. 라그랑주 그 자신이 말하기를 그의 가족이 부유하였더라면 수학에 자기의 운명을 걸지 않았을 것이라고 하였다.

라그랑주의 열렬한 찬미자는 나폴레옹이었고 그에게 예우로써, 백작 원로원 칭호와 레종-도뇌에르 훈장(Legion of Honor)을 수여했다. 그의 명성에도 불구하고 라그랑주는 항상 겸손해 하는 검소한 사람이었다. 사후에 그는 판테온(pantheon)에서 명예와 함께 잠들었다.

*선형대수-03장-1 2008.8.20 2:34 PM 페이지171

예제 2 **u×v는 u와 v에 수직이다**

$\mathbf{u} = (1, 2, -2)$, $\mathbf{v} = (3, 0, 1)$이라 하면 예제 1에서 밝힌 바와 같이 이 경우,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (2, -7, -6)$$

이고

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (1)(2) + (2)(-7) + (-2)(-6) = 0$$

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (3)(2) + (0)(-7) + (1)(-6) = 0$$

이므로, 정리 3.4.1에서 확인된 바와 같이 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$는 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$의 각각에 직교한다. ◀

벡터곱에 관한 기본적인 계산규칙을 다음에 정리해 두기로 하자.

정리 3.4.2 **벡터곱의 성질**

$\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$를 3차원 공간의 벡터, k를 임의의 스칼라라 할 때 다음이 성립한다.

(*a*) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$
(*b*) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$
(*c*) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$
(*d*) $k(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (k\mathbf{v})$
(*e*) $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$
(*f*) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

증명은 어느 것이나 벡터곱의 정의 (1)과 행렬식의 성질을 이용하여 직접 얻어지므로 여기서는 참고로 (*a*)의 증명만을 하기로 한다.

증명(*a*): 식 (1)에서 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$의 순서를 교환하면 (1)의 각 성분의 행렬식에 있어서 그 행이 교환되는 것이므로 행렬식의 값은 행을 교환하면 (-1)을 곱한 것이 되고, 따라서 벡터곱의 각 성분의 부호가 바뀐다. 즉, $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = -(\mathbf{v}\times\mathbf{u})$가 성립한다. ■

나머지 부분의 증명은 연습문제로 남긴다.

예제 3 **표준단위벡터**

벡터

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \qquad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \qquad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

을 생각하자. 이들 벡터는 어느 것이나 길이가 1이고 좌표축 상에 존재한다(그림 3.4.1 참조). 이들의 특수한 벡터를 3차원 공간의 3개의 표준단위벡터(standard unit vectors)라 부른다. 3차원 공간의 임의의 벡터 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$는 $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$를 사용해서 나타내면,

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1(1, 0, 0) + v_2(0, 1, 0) + v_3(0, 0, 1) = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

로 쓸 수 있다. 예컨대

*선형대수-03장-1 2008.8.20 2:34 PM 페이지172

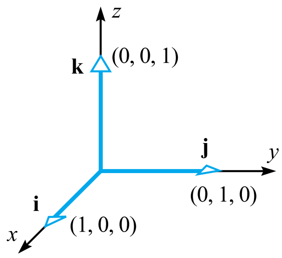


그림 3.4.1 표준단위벡터

$$(2, -3, 4) = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

이다.

또한 식 (1)에서부터 다음을 얻는다.

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (0, 0, 1) = \mathbf{k}\,. \quad ◀$$

독자는 힘들이지 않고 다음 결과를 구할 수 있다.

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0} & \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0} & \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} & \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} & \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} \end{array}$$

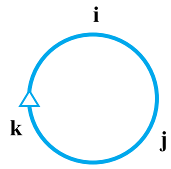


그림 3.4.2

그림 3.4.2는 이들 결과를 기억하는 데 도움이 된다. 이 도식에 따르면 시계바늘 방향으로 연속하는 두 벡터의 벡터곱은 그 방향을 따르는 다음 나머지 벡터이고, 시계바늘 반대방향으로 연속되는 두 벡터의 벡터곱은 그 방향을 따르는 다음 나머지 벡터에 음(−)을 붙인 것이다.

벡터곱에 관한 행렬식 형식 또한 단위벡터 **i**, **j**, **k**를 사용하여 **u**×**v**를 다음과 같이 3×3 행렬식 형태의 기호로 표현할 수도 있다. 즉

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}\,. \quad (4)$$

예컨대, **u** = (1, 2, −2), **v** = (3, 0, 1)이라 하면,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 6\mathbf{k}\,.$$

이것은 예제 1의 결과와 일치한다.

※주의: 일반적으로 **u**×(**v**×**w**) = (**u**×**v**)×**w**는 성립하지 않는다.

예컨대,

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$$

이므로

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) \neq (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j}.$$

*선형대수-03장-1 2008.8.20 2:34 PM 페이지173

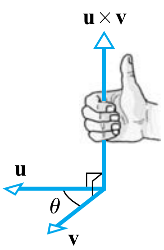


그림 3.4.3

정리 3.4.1에서 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$는 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$ 각각에 직교하고 있음을 알 수 있다. $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$가 다같이 영벡터가 아니면 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$의 방향은 다음 오른손법칙(right-hand rule)* (그림 3.4.3)에 의하여 구할 수가 있다. $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$가 이루는 각을 θ라 하고, $\mathbf{u}$를 θ 만큼 회전시켜서 $\mathbf{v}$에 표갤 수 있다고 하자. 이 경우 $\mathbf{u}$에서 $\mathbf{v}$로 향해 오른쪽 손을 꽉 쥐었을 때, 그 엄지손가락의 방향이 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$의 방향이라 생각하면 된다.

독자는 이 오른손법칙을 단위벡터곱에 실시해 보면

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k},\qquad \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i},\qquad \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}$$

로 됨을 알 수 있다.

벡터곱의 기하학적 뜻 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$가 3차원 공간의 벡터이면 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$의 노름은 유용한 기하학적 해석을 갖는다. 정리 3.4.1에서 주어진 라그랑주의 항등식은

$$\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2=\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2 \tag{5}$$

이었다.

$\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$가 이루는 각을 θ라 하면 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta$로 쓸 수 있으므로 (5)를 변형하면,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2&=\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2-\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2\cos^2\theta\\&=\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2(1-\cos^2\theta)\\&=\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2\sin^2\theta\end{aligned}$$

로 된다. $0\le\theta\le\pi$이므로 $\sin\theta\ge 0$이다. 따라서

$$\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|=\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\sin\theta \tag{6}$$

라는 공식이 얻어진다. 그런데 $\|\mathbf{v}\|\sin\theta$란 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$가 만드는 평행4변형의 높이로 되어 있다 (그림 3.4.4). 따라서, 이 평행4변형의 넓이 A는 (6)에서부터

$$A=(\text{밑변})(\text{높이})=\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\sin\theta=\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|$$

로 주어진다.

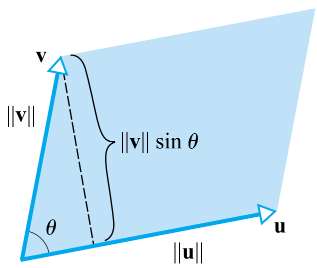


그림 3.4.4

이 결과는 비록 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$가 동일직선상에 있다 할지라도 성립한다. 그 이유는 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$가 만드는 평행4변형의 넓이는 영이고 이 경우 $\theta=0$인 까닭에 (6)에서부터 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{0}$이다.

*이 교재에서는 오른손 좌표계만 적용함을 상기하여라. 이것 대신 왼손 좌표계가 사용되었다면 왼손법칙(left-hand rule)이 적용될 것이다.

*선형대수-03장-1 2008.8.20 2:34 PM 페이지174

따라서 다음 정리를 얻는다.

평행4변형의 넓이

정리 3.4.3 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$가 3차원 공간의 벡터이면 $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|$는 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$가 만드는 평행4변형의 넓이와 같다.

3각형의 넓이

예제 4 점 $P_1(2, 2, 0)$, $P_2(-1, 0, 2)$와 $P_3(0, 4, 3)$으로 결정되는 3각형의 넓이를 구하여라.

풀이: 3각형의 넓이 A는 벡터 $\overrightarrow{P_1P_2}$와 $\overrightarrow{P_1P_3}$가 만드는 평행4변형의 넓이의 $\frac{1}{2}$이다(그림 3.4.5). 3.1절의 예제 2에서 논한 방법을 사용하면 $\overrightarrow{P_1P_2} = (-3, -2, 2)$이고 $\overrightarrow{P_1P_3} = (-2, 2, 3)$이므로

따라서 $$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = (-10, 5, -10).$$

$$A = \tfrac{1}{2}\|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}\| = \tfrac{1}{2}(15) = \tfrac{15}{2}.$$ ◀

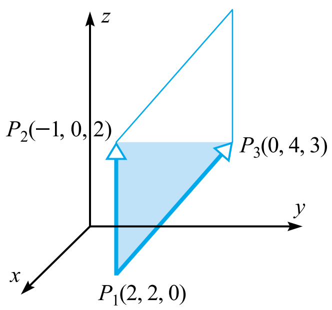


그림 3.4.5

$\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$와 $\mathbf{w}$를 3차원 공간의 벡터라 할 때

정의 $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$를 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$와 $\mathbf{w}$의 스칼라3중적(scalar triple product)이라 한다.

$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$와 $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$의 스칼라3중적은 공식

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \tag{7}$$

로부터 계산될 수 있다.

이 사실은 공식 (4)로부터

*선형대수-03장-1 2008.8.20 2:34 PM 페이지175

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \mathbf{u}\cdot\left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} u_1 - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} u_2 + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} u_3$$

$$= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

인 까닭에 성립한다.

예제 5

스칼라3중적의 계산

벡터

$$\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}, \qquad \mathbf{v} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}, \qquad \mathbf{w} = 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

의 스칼라3중적 $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$를 계산하여라.

풀이: (7)에서부터 다음과 같다.

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-5)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 60 + 4 - 15 = 49$$

※주의: 기호$(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\times\mathbf{w}$는 스칼라와 벡터와의 벡터곱을 구성할 수 없는 까닭에 뜻이 없다. 따라서 $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$ 대신에 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{w}$로 쓸지라도 혼돈은 나타나지 않는다. 그러나 분명히 하기 위하여 일반적으로 괄호를 삽입한다. (7)에서부터

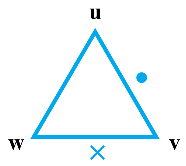


그림 3.4.6

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \mathbf{v}\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{u})$$

는 이들 곱을 나타내는 3×3 행렬식은 서로 두 번 행을 교환하여 얻어질 수 있는 까닭에 성립한다(밝혀라). 이들 관계는 그림 3.4.6의 3각형의 꼭지점의 벡터 **u**, **v**와 **w**를 시계바늘 방향으로 이동시킴으로써 기억될 수 있다.

행렬식의 기하학적 해석 다음 정리에서 2×2와 3×3 행렬식의 유용한 기하학적 해석을 제공한다.

정리 3.4.4

(a) 행렬식

*선형대수-03장-1 2008.8.20 2:34 PM 페이지176

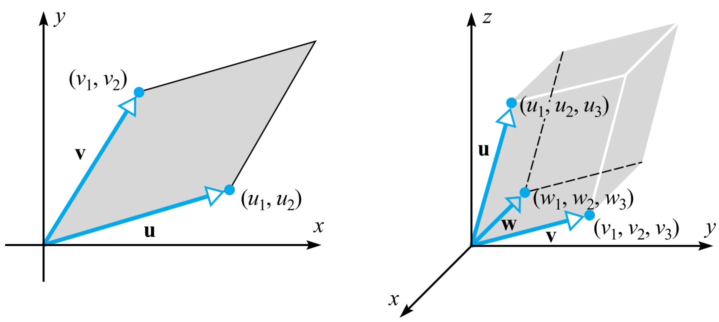
$$\det\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix}$$

의 절대값은 2차원 공간의 벡터 $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$와 $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$가 만드는 평행4변형의 넓이와 같다(그림 3.4.7*a* 참조).

(*b*) 행렬식

$$\det\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

의 절대값은 3차원 공간의 벡터 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$와 $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$가 만드는 평행6면체의 부피와 같다(그림 3.4.7*b* 참조).



(*a*) (*b*)

그림 3.4.7

증명(*a*): 증명의 실마리는 정리 3.4.3을 사용하는 것이다. 그러나 이 정리는 3차원 공간의 벡터에 적용되는 반면에 $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$와 $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$는 2차원 공간의 벡터이다. 이와 같은"차원 문제(dimension problem)"를 피하기 위하여 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$를 xyz 좌표계의 xy 평면의 벡터로 생각할 (그림 3.4.8*a*) 경우, 이들 벡터를 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, 0)$과 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, 0)$으로 표현한다.

따라서,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\mathbf{k} = \det\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix}\mathbf{k}$$

이다. 이제 정리 3.4.3과 $\|\mathbf{k}\| = 1$인 사실로부터 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$가 만드는 평행4변형의 넓이 A는

$$A = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \left\|\det\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix}\mathbf{k}\right\| = \left|\det\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix}\right|\|\mathbf{k}\| = \left|\det\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix}\right|$$

이고, 이것으로 증명은 끝났다.

증명(*b*): 그림 3.4.8*b*에서 표시된 바와 같이 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$와 $\mathbf{w}$가 만드는 평행6면체의 밑면을 $\mathbf{v}$와 $\mathbf{w}$가 만드는 평행4변형으로 취한다. 정리 3.4.3에서부터 밑면의 넓이는 $\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|$이고, 그림

*선형대수-03장-1 2008.8.20 2:34 PM 페이지177

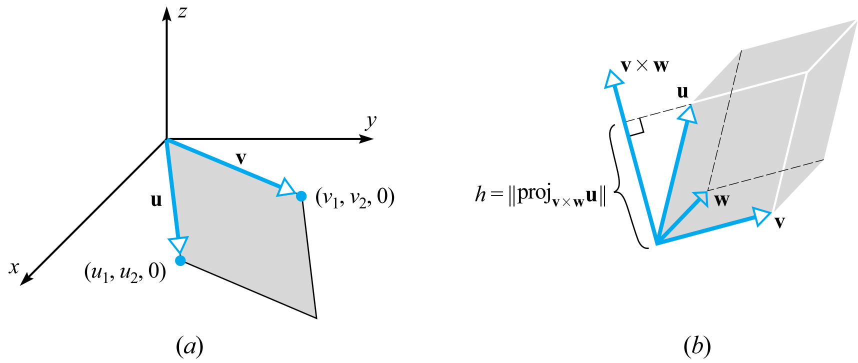


그림 3.4.8

3.4.8*b*에서 설명된 바와 같이 평행6면체의 높이는 **u**에서 **v**×**w**로의 정사영의 길이이다. 따라서 3.3절의 공식 (10)에 의하여

$$h = \|\text{proj}_{\mathbf{v}\times\mathbf{w}}\mathbf{u}\| = \frac{|\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})|}{\|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\|}$$

이다. 따라서 평행6면체의 부피 V는

$$V = (\text{밑변의 넓이})\cdot(\text{높이}) = \|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\|\frac{|\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})|}{\|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\|} = |\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})|$$

이고, 따라서 (7)에서부터

$$V = \left|\det\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}\right|$$

이다. 이것으로 증명은 끝났다. ■

※주의: 만일 V로써 **u**, **v**와 **w**가 만드는 평행6면체의 부피를 나타내면 정리 3.4.4와 공식 (7)에서부터

$$V = \left|\det\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}\right| = |\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})|$$

가 성립한다. 이 사실과 정리 3.3.1*b*에서부터

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \pm V$$

라 할 수 있고, 여기서 + 또는 −는 **u**와 (**v**×**w**)가 이루는 각이 예각이냐 또는 둔각이냐에 따라서 나타난다.

공식 (8)은 주어진 3개의 벡터가 동일 평면에 있는지를 확인하는 검증법을 제공해 준다. 동일 평면에 있지 않는 3개의 벡터는 양의 부피를 갖는 평행6면체를 결정하는 까닭

에 (8)에서부터 $|\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})| = 0$이기 위한 필요충분조건은 이들 벡터 **u**, **v**와 **w**가 동일 평면에 있는 것이다. 따라서 다음 결과를 얻을 수 있다.

정리 3.4.5 벡터 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$와 $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$가 같은 시초점을 갖는다면 이들이 동일 평면에 있기 위한 필요충분조건은

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

으로 되는 것이다.

벡터곱과 좌표계의 독립성 당초 이 책에서는 벡터라는 것을 2차원 또는 3차원 공간 내의 유향선분 혹은 화살표로써 정의했다. 그리고 좌표계와 성분은 벡터끼리의 계산을 간단히 하기 위하여 나중에 도입하였다. 따라서 벡터는 좌표계가 도입되었든지 아니되었든지 상관없이 " 수학적 실체(mathematical existence) "를 만족한다. 더구나 벡터의 성분은 벡터 그 자신에 고유한 것이라 할 수 없고 어디까지나 선택된 좌표계에 의존한다. 예컨대 그림 3.4.9에서 평면의 고정된 벡터와 두 가지 상이한 좌표계를 표시하였다. xy 좌표계에 있어서 **v**의 성분은 (1, 1)이고 $x'y'$ 좌표계에 있어서는 $(\sqrt{2}, 0)$이다.

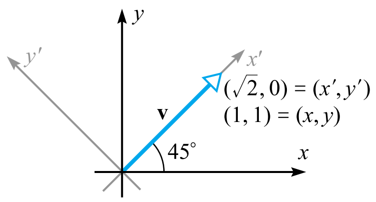


그림 3.4.9

이 사실로부터 벡터곱의 정의에 대한 중대한 의문이 발생하게 된다. 그것은 벡터곱 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$를 **u**와 **v**의 성분에 의해서 정의했고, 이 성분들이 좌표계의 선택에 따라 달라지므로 두 고정된 벡터 **u**, **v**가 서로 다른 좌표계에서 서로 다른 벡터곱을 가질 수 있는 것처럼 생각되기 때문이다. 그러나 이것은 다행히도 그러하지 않다. 이렇게 됨을 알기 위해서는 다음을 상기하면 된다.

- $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$는 **u**, **v**와 직교한다.
- $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$의 방향은 오른손법칙에 의해서 정해진다.
- $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\sin\theta$.

이상의 세 가지 성질에 의하여 벡터곱 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$는 완전히 결정된다. 첫째와 둘째 성질에 의하여 그 방향이 완전히 확정되고, 셋째 성질에 의하여 그 길이(노름)가 확정된다. $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$의 이들 세 가지 성질은 어느 것이나 단지 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$의 길이와 이들의 상대적인 위치 관계에만이 의존하는 것에 지나지 않으며, 특별히 어떠한 오른손 좌표계가 사용되었는가에는 의존하지 않는다. 벡터 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$는 상이한 오른손 좌표계가 도입되었더라도 변하지 않는다. 따라서 $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$의 정의를 내재적(coordinate free)인 정의라 한다. 이 결과는 벡터곱의 개념을 같은

*선형대수-03장-1 2008.8.20 2:34 PM 페이지179

문제에 있어서 여러 가지 좌표계에 응용하려는 물리학, 공학자들에게는 중요하다.

예제 6

u×v는 좌표계와 무관하다

u, **v**를 서로 직교하고 길이가 1인 벡터라 하자(그림 3.4.10*a*에 표시한 바와 같이). 이 경우 만일에 그림 3.4.10*b*와 같은 *xyz* 좌표계를 도입하면

$$\mathbf{u} = (1, 0, 0) = \mathbf{i} \qquad \mathbf{v} = (0, 1, 0) = \mathbf{j}$$

이고,

이므로,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

이다.

한편으로 만일에 그림 3.4.10*c*와 같은 $x'y'z'$ 좌표계를 도입하면,

$$\mathbf{u} = (0, 0, 1) = \mathbf{k} \qquad \mathbf{v} = (1, 0, 0) = \mathbf{i}$$

이고,

로 되므로,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} = (0, 1, 0)$$

이다. 그런데 그림 3.4.10*b*와 3.4.10*c*를 비교하면 *xyz* 좌표계에서 (0, 0, 1)로 되는 벡터와 $x'y'z'$ 좌표계에서 (0, 1, 0)으로 되는 벡터와는 동일한 것임을 알 수 있다. 즉 *xyz* 좌표계를 이용하느냐, $x'y'z'$ 좌표계를 이용하느냐에 관계없이 동일한 벡터적 **u**×**v**가 얻어진다. ◀

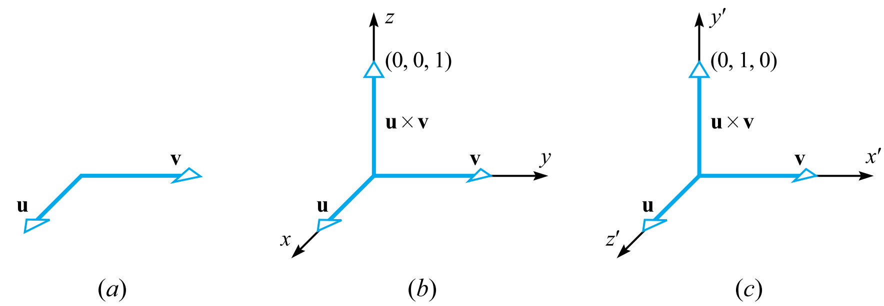


그림 3.4.10

연습문제 3.4

1. **u** = (3, 2, −1), **v** = (0, 2, −3), **w** = (2, 6, 7)이라 하고 다음을 계산하여라.

(a) $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ (b) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ (c) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$

(d) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ (e) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} - 2\mathbf{w})$ (f) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) - 2\mathbf{w}$

2. 다음 벡터 **u**와 **v** 모두에 직교하는 벡터를 구하여라.

(a) $\mathbf{u} = (-6, 4, 2)$, $\mathbf{v} = (3, 1, 5)$ (b) $\mathbf{u} = (-2, 1, 5)$, $\mathbf{v} = (3, 0, -3)$

3. 다음 **u**와 **v**가 만드는 평행4변형의 넓이를 구하여라.

*선형대수-03장-1 2008.8.20 2:34 PM 페이지180

(a) $\mathbf{u} = (1, -1, 2),\ \mathbf{v} = (0, 3, 1)$ (b) $\mathbf{u} = (2, 3, 0),\ \mathbf{v} = (-1, 2, -2)$

(c) $\mathbf{u} = (3, -1, 4),\ \mathbf{v} = (6, -2, 8)$

4. 다음 꼭지점 P, Q와 R을 갖는 3각형의 넓이를 구하여라.

(a) $P(2, 6, -1),\ Q(1, 1, 1),\ R(4, 6, 2)$ (b) $P(1, -1, 2),\ Q(0, 3, 4),\ R(6, 1, 8)$

5. 벡터 $\mathbf{u} = (4, 2, 1)$과 $\mathbf{v} = (-3, 2, 7)$이라 하고 정리 3.4.1의 (a), (b)와 (c)를 밝혀라.

6. $\mathbf{u} = (5, -1, 2)$, $\mathbf{v} = (6, 0, -2)$, $\mathbf{w} = (1, 2, -1)$이라 하고 정리 3.4.2의 (a), (b)와 (c)를 밝혀라.

7. 벡터 $\mathbf{u} = (2, -3, 5)$에 직교하는 벡터 $\mathbf{v}$를 구하여라.

8. 다음 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$에 대한 스칼라3중적 $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$를 구하여라.

(a) $\mathbf{u} = (-1, 2, 4),\ \mathbf{v} = (3, 4, -2),\ \mathbf{w} = (-1, 2, 5)$

(b) $\mathbf{u} = (3, -1, 6),\ \mathbf{v} = (2, 4, 3),\ \mathbf{w} = (5, -1, 2)$

9. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 3$이라 가정하고 다음을 구하여라.

(a) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{v})$ (b) $(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u}$ (c) $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

(d) $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$ (e) $(\mathbf{u} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v}$ (f) $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{w})$

10. 다음 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$와 $\mathbf{w}$를 변으로 갖는 평행6면체의 부피를 구하여라.

(a) $\mathbf{u} = (2, -6, 2),\ \mathbf{v} = (0, 4, -2),\ \mathbf{w} = (2, 2, -4)$

(b) $\mathbf{u} = (3, 1, 2),\ \mathbf{v} = (4, 5, 1),\ \mathbf{w} = (1, 2, 4)$

11. 다음 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$와 $\mathbf{w}$를 그 시초점이 일치하도록 위치시켰을 때, 이들은 동일 평면에 있는지를 결정하여라.

(a) $\mathbf{u} = (-1, -2, 1),\ \mathbf{v} = (3, 0, -2),\ \mathbf{w} = (5, -4, 0)$

(b) $\mathbf{u} = (5, -2, 1),\ \mathbf{v} = (4, -1, 1),\ \mathbf{w} = (1, -1, 0)$

(c) $\mathbf{u} = (4, -8, 1),\ \mathbf{v} = (2, 1, -2),\ \mathbf{w} = (3, -4, 12)$

12. yz 평면에 나란하고 벡터 $(3, -1, 2)$에 수직인 모든 단위벡터를 구하여라.

13. 벡터 $\mathbf{w} = (1, 2, 0)$에 수직이며 $\mathbf{u} = (3, 0, 1)$과 $\mathbf{v} = (1, -1, 1)$에 의하여 결정되는 평면에 있는 모든 단위벡터를 구하여라.

14. $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$, $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3)$라 하고 다음을 밝혀라.

$$(\mathbf{a} + \mathbf{d}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{d} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

15. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times (\mathbf{u} - \mathbf{v})$를 간단히 하여라.

16. 벡터곱을 사용하여 $\mathbf{u} = (2, 3, -6)$과 $\mathbf{v} = (2, 3, 6)$과의 사이각의 사인(sine)을 구하여라.

17. (a) 꼭지점 $A(1, 0, 1)$, $B(0, 2, 3)$과 $C(2, 1, 0)$을 갖는 3각형의 넓이를 구하여라.

(b) (a)의 결과를 사용하여 꼭지점 C에서부터 변 AB에 이르는 높이의 길이를 구하여라.

*선 형 대 수-03장-1 2008.8.20 2:34 PM 페이지181

18. $\mathbf{u}$를 하나의 직선상의 임의의 점에서부터 그 직선상에 있지 않는 점 P에 이르는 벡터라 하고 $\mathbf{v}$를 그 직선에 나란한 벡터라 할 때 P와 그 직선 사이의 거리는 $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|/\|\mathbf{v}\|$로 주어짐을 밝혀라.

19. 문제 18의 결과를 사용하여 다음에 주어진 점 P와 점 A, B를 지나는 직선 사이의 거리를 구하여라.

(a) $P(-3, 1, 2)$, $A(1, 1, 0)$, $B(-2, 3, -4)$ (b) $P(4, 3, 0)$, $A(2, 1, -3)$, $B(0, 2, -1)$

20. θ를 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$의 사이각이라 하고 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \neq 0$이라 하면 $\tan\theta = \|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|/(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$임을 증명하여라.

21. $\mathbf{u} = (3, 2, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 1, 2)$와 $\mathbf{w} = (1, 3, 3)$을 변으로 갖는 평행6면체를 생각하자.

(a) $\mathbf{u}$와 $\mathbf{w}$가 결정하는 면의 넓이를 구하여라.

(b) $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$가 결정하는 면을 포함하는 평면과의 사이각을 구하여라.

(주의: 벡터와 평면과의 사이각은 그 벡터와 법선 사이의 보각으로 정의하고, 이 각은 $0 \leq \theta \leq \pi/2$를 만족한다)

22. 점 $A(0, -2, 1)$, $B(1, -1, -2)$와 $C(-1, 1, 0)$에 의해서 결정되는 평면에 수직인 벡터 $\mathbf{n}$을 구하여라(문제 21의 주의사항 참조).

23. $\mathbf{m}$과 $\mathbf{n}$을 그림 3.4.10의 xyz 좌표계에서 그 성분이 $\mathbf{m} = (0, 0, 1)$, $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$인 벡터라 하자.

(a) 그림 3.4.10의 $x'y'z'$ 좌표계에서 $\mathbf{m}$과 $\mathbf{n}$의 성분을 구하여라.

(b) xyz 좌표계의 성분을 사용하여 $\mathbf{m}\times\mathbf{n}$을 계산하여라.

(c) $x'y'z'$ 좌표계의 성분을 사용하여 $\mathbf{m}\times\mathbf{n}$을 계산하여라.

(d) (b)와 (c)에서 얻어진 벡터가 동일함을 밝혀라.

24. 다음 항등식을 증명하여라.

(a) $(\mathbf{u} + k\mathbf{v}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ (b) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{z}) = -(\mathbf{u} \times \mathbf{z}) \cdot \mathbf{v}$

25. $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$와 $\mathbf{w}$를 3차원 공간의 영이 아닌 벡터로서 같은 시초점을 가지며 이들 중의 두 개는 동일 직선상에 있지 않다고 하자. 이 경우 다음을 밝혀라.

(a) $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$는 $\mathbf{v}$와 $\mathbf{w}$가 결정하는 평면에 있다.

(b) $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w}$는 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{v}$가 결정하는 평면에 있다.

26. 정리 3.4.1의 (d)를 증명하여라. [힌트: 첫째로 $\mathbf{w} = \mathbf{i} = (1, 0, 0)$인 경우에 이 결과를 증명한 다음에 $\mathbf{w} = \mathbf{j} = (0, 1, 0)$인 경우를 증명하고, 또한 $\mathbf{w} = \mathbf{k} = (0, 0, 1)$인 경우에 증명한다. 마지막으로 $\mathbf{w} = w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + w_3\mathbf{k}$로 표현하고서 임의의 벡터 $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$에 대해서 증명하여라]

27. 정리 3.4.1의 (e)를 증명하여라. [힌트: 정리 3.4.2a를 정리 3.4.1d의 결과에 적용하여라]

28. $\mathbf{u} = (1, 3, -1)$, $\mathbf{v} = (1, 1, 2)$, $\mathbf{w} = (3, -1, 2)$라 하고, 문제 26의 기법을 사용하여 $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$를 계산하여라. 그리고 그 결과를 직접 계산함으로써 검산하여라.

29. $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$와 $\mathbf{d}$가 동일 평면에 있으면 $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = \mathbf{0}$임을 증명하여라.

*선형대수-03장-1 2008.8.20 2:34 PM 페이지182

30. 4면체의 부피는 $\frac{1}{3}$(밑면의 넓이) · (높이)라는 입체기하학의 정리가 있다. 이 결과를 사용하여 각 변의 벡터가 **a**, **b**와 **c**인 4면체의 부피는 $\frac{1}{6}|\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})|$임을 증명하여라(그림 문제 30).

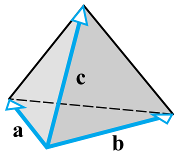


그림 문제 30

31. 문제 30의 결과를 사용하여 다음 꼭지점 P, Q, R과 S를 갖는 4면체의 부피를 구하여라.

(a) $P(-1, 2, 0)$, $Q(2, 1, -3)$, $R(1, 0, 1)$, $S(3, -2, 3)$

(b) $P(0, 0, 0)$, $Q(1, 2, -1)$, $R(3, 4, 0)$, $S(-1, -3, 4)$

32. 정리 3.4.2의 (b)를 증명하여라.

33. 정리 3.4.2의 (c)와 (d)를 증명하여라.

34. 정리 3.4.2의 (e)와 (f)를 증명하여라.

토론과 발견

35. (a) **u**와 **v**는 동일직선상에 있지 않으며 이들의 시초점은 3차원 공간의 원점에 있다 가정하자. $\mathbf{w} = \mathbf{v}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$는 **u**와 **v**에 관하여 어떤 방향으로 행하는지를 설명하는 밑그림을 그려라.

(b) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$와 $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$의 값은 얼마라고 할 수 있는가? 논법을 설명하여라.

36. $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$이라 할 때 방정식 $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \mathbf{u}\times\mathbf{w}$의 양면에서 **u**를 소거하면 $\mathbf{v} = \mathbf{w}$가 성립하는가? 논법을 설명하여라.

37. 다음 식 중의 하나는 뜻이 없다. 그것은 어느 것이며 그 이유를 말하여라.

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}), \qquad \mathbf{u}\times\mathbf{v}\times\mathbf{w}, \qquad (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\times\mathbf{w}$$

38. $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \mathbf{0}$일 때 벡터 **u**와 **v**에 관해서 어떻게 말할 수 있는가?

39. 실수의 곱에 관하여 성립하나 벡터의 벡터곱에 관하여 성립하지 않는 대수적 법칙 몇 가지를 들어라.

3.5 3차원 공간의 직선과 평면

이 절에서는 벡터를 이용해서 3차원 공간의 직선과 평면의 방정식을 유도하고 어떤 기하학적인 기본문제를 풀기 위하여 이들 방정식을 이용하기로 한다.

3차원 공간의 평면 해석기하학에서 평면상의 직선의 방정식은 그 기울기와 그 평면상의 한 점을 주면 결정된다. 같은 방법으로 3차원 공간의 평면은 경사각을 주고 그 평면상의 한 점을 지정하면 결정될 수 있다. 평면의 경사각을 기술하는 간편한 방법은 그 평면에 수직인 영이 아닌 법선벡터(normal vector)를 지정하는 것이다.

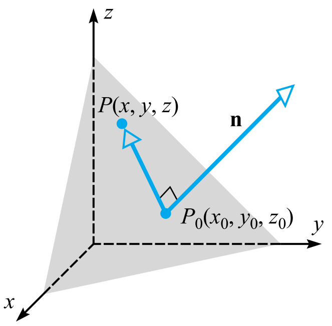


그림 3.5.1 법선벡터를 갖는 평면

점 $P_0(x_0, y_0, z_0)$를 지나며 그 법선벡터가 $\mathbf{n} = (a, b, c)$로써 주어지는 평면의 방정식을 구하고자 한다 하자. 그림 3.5.1에서와 같이 분명한 것은 평면이 백터 $\overrightarrow{P_0P}$가 $\mathbf{n}$과 직교하는 점 $P(x, y, z)$의 전체로 이루어진다. 즉,

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0. \tag{1}$$

그런데, $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$이므로 방정식 (1)에 대입해서

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{2}$$

으로 표현할 수 있다. 이것을 평면방정식의 점−법선형(point-normal form)이라 한다.

예제 1 **평면의 점−법선형 방정식 구하기**

3차원 공간의 점 $(3, -1, 7)$을 지나고 백터 $\mathbf{n} = (4, 2, -5)$에 직교하는 평면의 방정식을 구하여라.

풀이: (2)로부터 구하는 평면의 점−법선형은

$$4(x - 3) + 2(y + 1) - 5(z - 7) = 0$$

이다. ◀

(2)를 전개하고 항끼리 모으면 (2)는

$$ax + by + cz + d = 0$$

인 형식으로 고쳐 쓸 수 있고, 여기서 a, b, c와 d는 상수이고 a, b와 c는 모두 영이 아니다. 예컨대 예제 1의 방정식은

$$4x + 2y - 5z + 25 = 0$$

으로 고쳐 쓸 수 있다.

다음 정리에서 밝히는 바와 같이 형식이 $ax + by + cz + d = 0$인 모든 방정식은 3차원 공간의 평면을 나타낸다.

정리 3.5.1 a, b, c와 d가 상수이고 a, b와 c가 모두 영이 아니면, 방정식

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0} \tag{3}$$

*선형대수-03장-1 2008.8.20 2:34 PM 페이지184

인 그래프는 벡터 $\mathbf{n} = (a, b, c)$를 법선으로 갖는 평면이다.

방정식 (3)은 x, y와 z의 일차방정식이고 이것을 평면방정식의 일반형(general form)이라 한다.

증명: 가정에 의하여 계수 a, b, c는 모두 0이 아니다. 여기서 $a \neq 0$이라고 가정하자. 이 경우 방정식 $ax + by + cz + d = 0$은 $a(x + (d/a)) + by + cz = 0$으로 고쳐 쓸 수 있다. 그런데, 이것은 점 $(-d/a, 0, 0)$을 지나며 그 법선으로 $\mathbf{n} = (a, b, c)$를 갖는 평면의 점-법선형으로 되어 있다. $a = 0$인 경우는 $b \neq 0$ 또는 $c \neq 0$이 성립되므로 같은 방법으로 다른 경우를 증명할 수 있다. ■

연립1차방정식

$$\begin{aligned} ax + by &= k_1 \\ cx + dy &= k_2 \end{aligned}$$

의 해는 두 직선 $ax + by = k_1$, $cx + dy = k_2$의 xy평면상에서의 교점에 대응하는 바와 같이 연립1차방정식

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= k_1 \\ dx + ey + fz &= k_2 \\ gx + hy + iz &= k_3 \end{aligned} \tag{4}$$

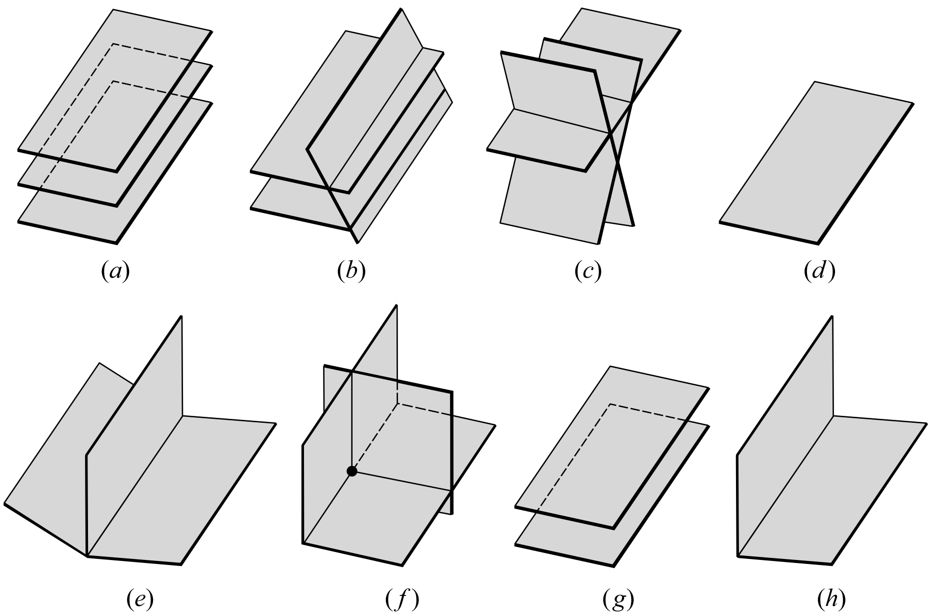


그림 3.5.2 (a) 해가 없다(3개의 평면이 나란함). (b) 해가 없다(두 개의 평면이 나란함). (c) 해가 없다(3개의 평면은 공통된 교점을 갖지 않는다). (d) 무한개의 해가 있다(3개의 평면이 일치함). (e) 무한개의 해가 있다(3개의 평면이 한 직선을 공유함). (f) 오직 한 개의 해가 있다(3개의 평면이 한 점만을 공유함). (g) 해가 없다(일치한 두 평면은 셋째 평면에 나란하다). (h) 무한개의 해가 있다(일치한 두 평면이 셋째 평면과 한 직선을 공유함).

*선 형 대 수-03장-1 2008.8.20 2:34 PM 페이지185

인 해는 3개의 평면 $ax + by + cz = k_1$, $dx + ey + fz = k_2$와 $gx + hy + iz = k_3$가 xyz 공간 내에서의 서로 만나는 교선의 점에 대응한다.

그림 3.5.2에 연립1차방정식 (4)가 해를 갖지 않은 경우, 한 개만의 해를 갖는 경우, 무한히 많은 해를 갖는 경우의 기하학적 가능성 몇 가지를 도시해 두었다.

예제 2 **세 점을 지나는 평면의 방정식**

공간 내의 3점 $P_1(1, 2, -1)$, $P_2(2, 3, 1)$, $P_3(3, -1, 2)$를 지나는 평면의 방정식을 구하여라.

풀이: 주어진 세 점은 구하고자 하는 평면에 있는 까닭에 이들 좌표는 평면의 일반 방정식 $ax+by+cz+d=0$을 만족해야 한다. 따라서

$$\begin{aligned} a + 2b - c + d &= 0 \\ 2a + 3b + c + d &= 0 \\ 3a - b + 2c + d &= 0 \end{aligned}$$

이고, 이 연립방정식을 풀면

$$a = -\frac{9}{16}t, \quad b = -\frac{1}{16}t, \quad c = \frac{5}{16}t, \quad d = t$$

로 된다. 예컨대 $t = -16$이라 하면 구하고자 하는 방정식은

$$9x + y - 5z - 16 = 0$$

이다. t의 값을 다른 값으로 택할지라도 이 방정식의 배수에 지나지 않음으로 $t \neq 0$인 임의의 값에 대해서도 구하고자 하는 평면의 방정식이 성립한다.

별해: $P_1(1, 2, -1)$, $P_2(2, 3, 1)$, $P_3(3, -1, 2)$가 평면에 있으므로 벡터 $\overrightarrow{P_1P_2} = (1, 1, 2)$와 $\overrightarrow{P_1P_3} = (2, -3, 3)$은 그 평면에 나란하다. 따라서 $\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = (9, 1, -5)$는 이 평면에 수직이고 따라서, 이것은 $\overrightarrow{P_1P_2}$와 $\overrightarrow{P_1P_3}$에 모두 수직이다. 이 사실과 P_1이 평면에 있다는 사실로부터 평면방정식의 점-법선형은

$$9(x - 1) + (y - 2) - 5(z + 1) = 0$$

즉,

$$9x + y - 5z - 16 = 0$$

이다. ◀

평면방정식의 벡터형 벡터 기호는 평면방정식의 점-법선형을 표현하는 유용한 다른 방법을 제공해 준다. 그림 3.5.3을 참조하기 바란다. $\mathbf{r} = (x, y, z)$를 원점에서 점 $P(x, y, z)$에 이르는 벡터, $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$를 원점에서 점 $P_0(x_0, y_0, z_0)$에 이르는 벡터, $\mathbf{n} = (a, b, c)$를 평면에 수직인 법선벡터라 하면, $\overrightarrow{P_0P} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$이므로 공식 (1)은

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0 \tag{5}$$

으로 고쳐 쓸 수 있다. 이것을 평면방정식의 벡터형(vector form of the equation of a

*선형대수-03장-1 2008.8.20 2:34 PM 페이지186

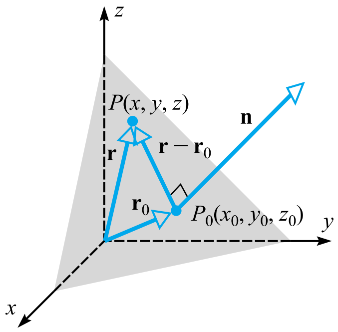


그림 3.5.3

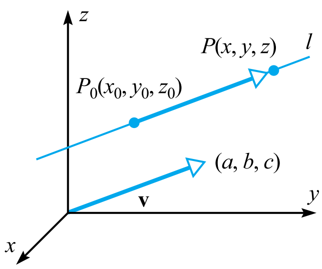


그림 3.5.4 $\overrightarrow{P_0P}$는 $\mathbf{v}$에 나란하다.

plane)이라 한다.

예제 3 **공식 (5)를 사용한 평면의 벡터방정식**

방정식

$$(-1, 2, 5) \cdot (x-6, y-3, z+4) = 0$$

은 점 (6 ,3, −4)를 지나며 벡터 $\mathbf{n} = (-1, 2, 5)$에 수직인 평면의 벡터방정식이다. ◀

3차원 공간의 직선 이제 3차원 공간의 직선에 대한 방정식을 구하는 방법을 설명하기로 한다. l을 3차원 공간의 점 $P_0(x_0, y_0, z_0)$를 지나고 영이 아닌 벡터 $\mathbf{v} = (a, b, c)$에 나란한 직선이라 가정한다. l은 벡터 $\overrightarrow{P_0P}$가 $\mathbf{v}$에 나란한 점 $P(x, y, z)$로서 이루어짐이 분명하다. 즉

$$\overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{v} \tag{6}$$

를 만족하는 스칼라 t가 존재함은 그림 3.5.4에서 분명하다. (6)을 성분형으로 쓰면,

$$(x-x_0, y-y_0, z-z_0) = (ta, tb, tc)$$

이고, 이것으로부터

$$x = x_0 + ta, \qquad y = y_0 + tb, \qquad z = z_0 + tc$$

가 성립한다. 매개변수 t가 $-\infty$에서 $+\infty$로 변함에 따라서 점 $P(x, y, z)$는 직선 l을 그린다. 이 방정식

$$x = x_0 + ta, \quad y = y_0 + tb, \quad z = z_0 + tc \qquad (-\infty < t < +\infty) \tag{7}$$

를 l의 매개변수방정식(parametric equation)이라 한다.

예제 4 **직선의 매개변수방정식**

점 (1, 2, −3)을 지나고 벡터 $\mathbf{v} = (4, 5, -7)$에 나란한 직선을 매개변수방정식으로 표현

*선 형 대 수-03장-1 2008.8.20 2:34 PM 페이지187

하면 다음과 같다.

$$x = 1 + 4t, \quad y = 2 + 5t, \quad z = -3 - 7t \qquad (-\infty < t < +\infty).$$

예제 5 **직선과 *xy* 평면과의 교점(만나는 점)**

(a) 두 점 $P_1(2, 4, -1)$, $P_2(5, 0, 7)$을 지나는 직선 l의 매개변수방정식을 구하여라.
(b) 위 직선 l과 xy 평면과의 교점을 구하여라.

풀이 (*a*): 벡터 $\overrightarrow{P_1P_2} = (3, -4, 8)$은 l에 나란하고 $P_1(2, 4, -1)$은 l상에 있음으로 직선 l의 매개변수방정식은

$$x = 2 + 3t, \quad y = 4 - 4t, \quad z = -1 + 8t \qquad (-\infty < t < +\infty)$$

로 주어진다.

풀이 (*b*): 직선 l과 xy 평면과의 교점에서는 $z = -1 + 8t = 0$ 즉, $t = 1/8$이어야 한다. 이 t값을 l의 매개변수방정식에 대입하면, 구하는 교점은

$$(x, y, z) = \left(\tfrac{19}{8}, \tfrac{7}{2}, 0\right)$$

이다.

예제 6 **두 평면의 교선**

다음 두 평면의 교선에 대한 매개변수방정식을 구하여라.

$$3x + 2y - 4z - 6 = 0, \qquad x - 3y - 2z - 4 = 0$$

풀이: 두 평면이 교선은 다음 연립방정식

$$\begin{aligned} 3x + 2y - 4z &= 6 \\ x - 3y - 2z &= 4 \end{aligned}$$

를 만족하는 모든 점 $P(x, y, z)$로 이루어짐으로 이 연립방정식을 풀면

$$x = \tfrac{26}{11} + \tfrac{16}{11}t, \quad y = -\tfrac{6}{11} - \tfrac{2}{11}t, \quad z = t$$

로 되고, 따라서 교선 l의 매개변수방정식은 다음과 같다.

$$x = \tfrac{26}{11} + \tfrac{16}{11}t, \quad y = -\tfrac{6}{11} - \tfrac{2}{11}t, \quad z = t \qquad (-\infty < t < +\infty).$$

직선방정식의 벡터형 벡터 기호는 직선의 매개변수방정식을 표현하는 유용한 다른 방법을 제공해 준다. 그림 3.5.5를 참조하기 바란다. $\mathbf{r} = (x, y, z)$를 원점에서 점 $P(x, y, z)$로의 벡터, $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$를 원점에서 점 $p_0(x_0, y_0, z_0)$로의 벡터, $\mathbf{v} = (a, b, c)$를 직선에 나란한 벡터라 하면 $\overrightarrow{P_0P} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$이므로 공식 (6)은

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{v}$$

로 고쳐 쓸 수 있다. t값의 범위를 고려하면 이것은 또한

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} \qquad (-\infty < t < +\infty) \tag{8}$$

로 고쳐 쓸 수 있다. 이것을 3차원 공간의 직선방정식의 벡터형(vector form of the equation of a line)이라 한다.

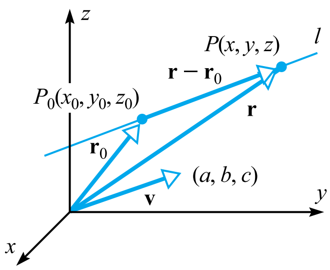


그림 3.5.5 3차원 공간의 직선에 관한 벡터 해석

예제 7 주어진 벡터에 나란한 직선

방정식

$$(x, y, z) = (-2, 0, 3) + t(4, -7, 1) \qquad (-\infty < t < +\infty)$$

은 점 $(-2, 0, 3)$을 지나고 벡터 $\mathbf{v} = (4, -7, 1)$에 나란한 직선의 벡터방정식이다. ◀

거리를 포함하는 몇 가지 문제 3차원 공간에서 두 가지 기본" 거리문제 "를 논함으로써 이 절을 끝맺기로 한다.

문 제:

(a) 점과 평면 사이의 거리를 구한다.

(b) 두 개의 나란한 평면 사이의 거리를 구한다.

이 두 문제는 서로 연관되어 있다. 만일에 어떤 한 점과 평면 사이의 거리를 구할 수 있으면 하나의 평면과 다른 평면에 있는 임의의 점 P_0 사이의 거리를 계산함으로써 나란한 두 평면 사이의 거리를 구할 수 있다(그림 3.5.6).

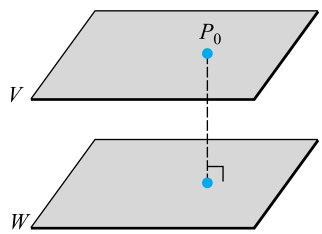


그림 3.5.6 나란한 두 평평 V와 W 사이의 거리는 점 P_0와 W 사이의 거리와 같다.

정리 3.5.2 **점과 평면 사이의 거리**

점 $P_0(x_0, y_0, z_0)$와 평면 $ax + by + cz = d = 0$ 사이의 거리 D는

$$\boxed{D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}} \tag{9}$$

이다.

증명: $Q(x_1, y_1, z_1)$을 평면의 임의의 점이라 하고, 법선 $\mathbf{n} = (a, b, c)$가 그 시초점이 Q에 있도록 위치한다고 하자. 그림 3.5.7에 설명된 바와 같이 거리 D는 $\overrightarrow{QP_0}$에서 $\mathbf{n}$으로의 정사영의 길이와 같다. 따라서 3.3절의 (10)에서부터

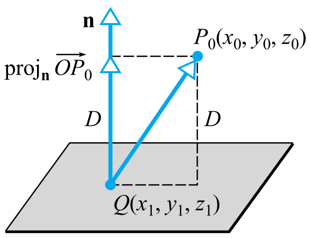


그림 3.5.7 점 P_0에서 평면에 이르는 거리

$$D = \|\text{proj}_{\mathbf{n}}\overrightarrow{QP_0}\| = \frac{|\overrightarrow{QP_0}\cdot\mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}.$$

그런데,

$$\overrightarrow{QP_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$$
$$\overrightarrow{QP_0}\cdot\mathbf{n} = a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)$$
$$\|\mathbf{n}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

따라서,

$$D = \frac{|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \tag{10}$$

점 $Q(x_1, y_1, z_1)$은 이 평면에 있으므로 그 좌표는 평면의 방정식을 만족한다. 따라서,

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0$$

즉,

$$d = -ax_1 - by_1 - cz_1.$$

이 식을 (10)에 대입하면, (9)로 된다. ■

※주의: (9)와 2차원 공간의 점과 직선 사이의 거리에 관한 공식[3.3절의 (13)]과는 비슷함에 유의하여라.

예제 8 **점과 평면 사이의 거리**

점 (1, −4, −3)과 평면 $2x - 3y + 6z = -1$ 사이의 거리 D를 구하여라.

풀이: (9)를 적용하기 위하여 평면의 방정식을 다음 형식으로 고쳐 쓴다.

$$2x - 3y + 6z + 1 = 0.$$

이 경우

$$D = \frac{|2(1) + (-3)(-4) + 6(-3) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2}} = \frac{|-3|}{7} = \frac{3}{7}. \blacktriangleleft$$

*선 형 대 수-03장-1 2008.8.20 2:34 PM 페 이 지 190

두 평면이 주어졌다면 이들은 서로 교차하든지 또는 나란할 것이다. 두 평면이 교차하는 경우에는 예제 6에서와 같이 이들이 공유하는 직선 즉, 이들의 교선을 구할 수 있고, 나란한 경우에는 이들 평면 사이의 거리를 구할 수 있다. 다음 예제는 후자의 문제를 설명해 준다.

예제 9 나란한 두 평면 사이의 거리

평면

$$x + 2y - 2z = 3 \quad \text{과} \quad 2x + 4y - 4z = 7$$

은 이들의 법선 $(1, 2, -2)$와 $(2, 4, -4)$가 나란한 벡터이므로 나란하다. 이들 평면 사이의 거리를 구하여라.

풀이: 이들 평면 사이의 거리를 구하기 위하여 하나의 평면의 임의의 점을 선택하여 다른 평면에 이르는 거리를 계산할 수 있다. 방정식 $x + 2y - 2z = 3$에서 $y = z = 0$이라 놓으면 이 평면에서 점 $P_0(3, 0, 0)$을 얻는다. (9)에서부터 P_0와 평면 $2x + 4y - 4z = 7$ 사이의 거리는

$$D = \frac{|2(3) + 4(0) + (-4)(0) - 7|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2}} = \frac{1}{6}$$

이다. ◀

연습문제 3.5

1. 다음에 주어진 점 P를 지나고 $\mathbf{n}$을 법선벡터로 갖는 평면방정식의 점—법선형을 구하여라.

(a) $P(-1, 3, -2)$; $\mathbf{n} = (-2, 1, -1)$ (b) $P(1, 1, 4)$; $\mathbf{n} = (1, 9, 8)$

(c) $P(2, 0, 0)$; $\mathbf{n} = (0, 0, 2)$ (d) $P(0, 0, 0)$; $\mathbf{n} = (1, 2, 3)$

2. 문제 1의 평면방정식을 일반형으로 표현하여라.

3. 다음 방정식의 점—법선형을 구하여라.

(a) $-3x + 7y + 2z = 10$ (b) $x - 4z = 0$

4. 다음에 주어진 세 점을 지나는 평면의 방정식을 구하여라.

(a) $P(-4, -1, -1)$, $Q(-2, 0, 1)$, $R(-1, -2, -3)$

(b) $P(5, 4, 3)$, $Q(4, 3, 1)$, $R(1, 5, 4)$

5. 아래에 주어진 각각의 두 평면은 나란한가를 결정하여라.

(a) $4x - y + 2z = 5$와 $7x - 3y + 4z = 8$

(b) $x - 4y - 3z - 2 = 0$과 $3x - 12y - 9z - 7 = 0$

(c) $2y = 8x - 4z + 5$와 $x = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}y$

6. 다음 직선과 평면이 나란한가를 결정하여라.

*선형대수-03장-1 2008.8.20 2:34 PM 페이지191

(a) $x = -5 - 4t,\ y = 1 - t,\ z = 3 + 2t;\quad x + 2y + 3z - 9 = 0$

(b) $x = 3t,\ y = 1 + 2t,\ z = 2 - t;\quad 4x - y + 2z = 1$

7. 다음 두 평면은 수직인가를 결정하여라.

(a) $3x - y + z - 4 = 0,\ x + 2z = -1$ (b) $x - 2y + 3z = 4,\ -2x + 5y + 4z = -1$

8. 다음 직선과 평면은 수직인가를 결정하여라.

(a) $x = -2 - 4t,\ y = 3 - 2t,\ z = 1 + 2t;\quad 2x + y - z = 5$

(b) $x = 2 + t,\ y = 1 - t,\ z = 5 + 3t;\quad 6x + 6y - 7 = 0$

9. 다음에 주어진 점 P를 지나고 $\mathbf{n}$에 나란한 직선의 매개변수방정식을 구하여라.

(a) $P(3, -1, 2);\ \mathbf{n} = (2, 1, 3)$ (b) $P(-2, 3, -3);\ \mathbf{n} = (6, -6, -2)$

(c) $P(2, 2, 6);\ \mathbf{n} = (0, 1, 0)$ (d) $P(0, 0, 0);\ \mathbf{n} = (1, -2, 3)$

10. 다음에 주어진 점을 지나는 직선의 매개변수방정식을 구하여라.

(a) $(5, -2, 4),\ (7, 2, -4)$ (b) $(0, 0, 0),\ (2, -1, -3)$

11. 다음에 주어진 두 평면의 교선의 매개변수방정식을 구하여라.

(a) $7x - 2y + 3z = -2$ 와 $-3x + y + 2z + 5 = 0$

(b) $2x + 3y - 5z = 0$ 과 $y = 0$

12. 다음에 주어진 점 P_0를 지나고 $\mathbf{n}$을 법선벡터로 갖는 평면방정식의 벡터형을 구하여라.

(a) $P_0(-1, 2, 4);\ \mathbf{n} = (-2, 4, 1)$ (b) $P_0(2, 0, -5);\ \mathbf{n} = (-1, 4, 3)$

(c) $P_0(5, -2, 1);\ \mathbf{n} = (-1, 0, 0)$ (d) $P_0(0, 0, 0);\ \mathbf{n} = (a, b, c)$

13. 다음 평면들은 나란한가를 결정하여라.

(a) $(-1, 2, 4) \cdot (x - 5, y + 3, z - 7) = 0;\ (2, -4, -8) \cdot (x + 3, y + 5, z - 9) = 0$

(b) $(3, 0, -1) \cdot (x + 1, y - 2, z - 3) = 0;\ (-1, 0, 3) \cdot (x + 1, y - z, z - 3) = 0$

14. 다음 평면들은 수직인가를 결정하여라.

(a) $(-2, 1, 4) \cdot (x - 1, y, z + 3) = 0;\ (1, -2, 1) \cdot (x + 3, y - 5, z) = 0$

(b) $(3, 0, -2) \cdot (x + 4, y - 7, z + 1) = 0;\ (1, 1, 1) \cdot (x, y, z) = 0$

15. 다음에 주어진 P_0를 지나고 벡터 $\mathbf{v}$에 나란한 직선방정식의 벡터형을 구하여라.

(a) $P_0(-1, 2, 3);\ \mathbf{v} = (7, -1, 5)$ (b) $P_0(2, 0, -1);\ \mathbf{v} = (1, 1, 1)$

(c) $P_0(2, -4, 1);\ \mathbf{v} = (0, 0, -2)$ (d) $P_0(0, 0, 0);\ \mathbf{v} = (a, b, c)$

16. 직선

$$x = 0,\quad y = t,\quad z = t \qquad (-\infty < t < +\infty)$$

는

(a) 평면 $6x + 4y - 4z = 0$에 있음을 밝혀라.

(b) 평면 $5x - 3y + 3z = 1$ 아래에 있고 주어진 직선과 나란함을 밝혀라.

(c) 평면 $6x + 2y - 2z = 3$보다 위쪽에 있고 주어진 직선과 나란함을 밝혀라.

17. 점 $(-2, 1, 7)$을 지나며 직선 $x - 4 = 2t,\ y + 2 = 3t,\ z = -5t$에 수직인 평면의 방정식을

*선형대수-03장-1 2008.8.20 2:34 PM 페이지192

구하여라.

18. 다음의 방정식을 구하여라.

(a) xy 평면 (b) xz 평면 (c) yz 평면

19. 점 (x_0, y_0, z_0)를 포함하며 다음을 만족하는 평면의 방정식을 구하여라.

(a) xy 평면에 나란하다. (b) yz 평면에 나란하다. (c) xz 평면에 나란하다.

20. 원점을 지나며 평면 $7x + 4y - 2z + 3 = 0$에 나란한 평면의 방정식을 구하여라.

21. 점 $(3, -6, 7)$을 지나며 평면 $5x + 2y + z - 5 = 0$에 나란한 평면의 방정식을 구하여라.

22. 직선

$$x - 9 = -5t, \quad y + 1 = -t, \quad z - 3 = t \qquad (-\infty < t < +\infty)$$

와 평면 $2x - 3y + 4z + 7 = 0$과의 교점을 구하여라.

23. 직선 $x = -1 + 3t,\ y = 5 + 2t,\ z = 2 - t$를 포함하고 평면 $2x - 4y + 2z = 9$에 수직인 평면의 방정식을 구하여라.

24. 점 $(2, 4, -1)$을 지나며 평면 $x - y - 4z = 2$와 $-2x + y + 2z = 3$의 교선을 포함하는 평면의 방정식을 구하여라.

25. 점 $(-1, -2, -3), (-2, 0, 1), (-4, -1, -1)$과 $(2, 0, 1)$은 같은 평면에 있음을 밝혀라.

26. 점 $(-2, 5, 0)$을 지나고 평면 $2x + y - 4z = 0$과 $-x + 2y + 3z + 1 = 0$에 나란한 직선의 매개변수방정식을 구하여라.

27. 점 $(-2, 1, 5)$를 지나고 평면 $4x - 2y + 2z = -1$과 $3x + 3y - 6z = 5$에 수직인 평면의 방정식을 구하여라.

28. 점 $(2, -1, 4)$를 지나고 평면 $4x + 2y + 2z = -1$과 $3x + 6y + 3z = 7$의 교선에 수직인 평면의 방정식을 구하여라.

29. 평면 $8x - 2y + 6z = 1$에 수직이고 점 $P_1(-1, 2, 5)$와 $P_2(2, 1, 4)$를 지나는 평면의 방정식를 구하여라.

30. 두 직선

$$x = 3 - 2t, \quad y = 4 + t, \quad z = 1 - t \qquad (-\infty < t < +\infty)$$

와

$$x = 5 + 2t, \quad y = 1 - t, \quad z = 7 + t \qquad (-\infty < t < +\infty)$$

가 나란함을 밝히고 이들이 결정하는 평면의 방정식을 구하여라.

31. 점 $(1, -1, 2)$와 직선 $x = t,\ y = t + 1,\ z = -3 + 2t$를 포함하는 평면의 방정식을 구하여라.

32. 직선 $x = 1 + t, y = 3t, z = 2t$를 포함하고 평면 $-x + 2y + z = 0$과 $x + z + 1 = 0$의 교선에 나란한 평면의 방정식을 구하여라.

*선 형 대 수-03장-1 2008.8.20 2:34 PM 페 이 지193

33. 점 $(-1, -4, -2)$와 $(0, -2, 2)$에서부터 같은 거리에 있는 점으로 이루어지는 평면의 방정식을 구하여라.

34. 직선

$$x-5=-t, \quad y+3=2t, \quad z+1=-5t \qquad (-\infty < t < +\infty)$$

는 평면 $-3x+y+z-9=0$에 나란함을 밝혀라.

35. 두 직선

$$x-3=4t, \quad y-4=t, \quad z-1=0 \qquad (-\infty < t < +\infty)$$

과

$$x+1=12t, \quad y-7=6t, \quad z-5=3t \qquad (-\infty < t < +\infty)$$

는 서로 만남을 밝히고 그 교점을 구하여라.

36. 문제 35의 두 직선을 포함하는 평면의 방정식을 구하여라.

37. 다음 평면의 교선에 대한 매개변수방정식을 구하여라.

(a) $-3x+2y+z=-5$와 $7x+3y-2z=-2$

(b) $5x-7y+2z=0$ 과 $y=0$

38. 좌표축의 절편이 $x=a$, $y=b$와 $z=c$인 평면의 방정식은 a, b와 c가 영이 아니면

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

임을 밝혀라.

39. 다음 각각에서 주어진 점과 평면 사이의 거리를 구하여라.

(a) $(3, 1, -2)$; $x+2y-2z=4$

(b) $(-1, 2, 1)$; $2x+3y-4z=1$

(c) $(0, 3, -2)$; $x-y-z=3$

40. 다음 각각에서 주어진 나란한 평면 사이의 거리를 구하여라.

(a) $3x-4y+z=1$과 $6x-8y+2z=3$

(b) $-4x+y-3z=0$과 $8x-2y+6z=0$

(c) $2x-y+z=1$과 $2x-y+z=-1$

41. 직선 $x=3t-1$, $y=2-t$, $z=t$와 다음 각각의 점 사이의 거리를 구하여라.

(a) $(0, 0, 0)$ (b) $(2, 0, -5)$ (c) $(2, 1, 1)$

42. a, b와 c가 모두 영이 아닐 때 직선

$$x=x_0+at, \quad y=y_0+bt, \quad z=z_0+ct \qquad (-\infty < t < +\infty)$$

는

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

를 만족하는 모든 점 $P(x, y, z)$로 이루어짐을 밝혀라. 이것을 직선의 대칭방정식(sym-

*선 형 대 수-03장-1 2008.8.20 2:34 PM 페이지194

metric equations)이라 한다.

43. 문제 9의 (a)와 (b)에 있는 직선에 대한 대칭방정식을 구하여라(주의: 이 용어에 대해서는 문제 42를 참여하여라).

44. 두 평면의 교선이 다음 직선으로 주어지는 두 평면의 방정식을 구하여라.

(a) $x = 7 - 4t, \quad y = -5 - 2t, \quad z = 5 + t \qquad (-\infty < t < +\infty)$

(b) $x = 4t, \quad y = 2t, \quad z = 7t \qquad (-\infty < t < +\infty)$

(힌트: 직선의 대칭방정식에 있어서 각 상등은 그 직선을 포함하는 평면을 나타낸다. 용어에 관해서는 문제 42를 참조하여라).

45. 3차원 공간에서 서로 교차하는 두 평면은 두 가지 교각을 결정한다. 즉 예각($0 \le \theta \le 90°$)과 그 보각 $180° - \theta$이다(그림 문제 45, $\mathbf{n}_1$과 $\mathbf{n}_2$를 각 평면에 대한 영이 아닌 법선벡터라 할 때 $\mathbf{n}_1$과 $\mathbf{n}_2$ 사이각은 법선벡터의 방향에 따라서 θ 또는 $180° - \theta$이다(그림 문제 45).
다음 각각에서 두 평면의 교각 중의 예각을 최적근사도수로 구하여라.

(a) $x = 0$과 $2x - y + z - 4 = 0$

(b) $x + 2y - 2z = 5$와 $6x - 3y + 2z = 8$

(주의: 계산기를 필요로 한다)

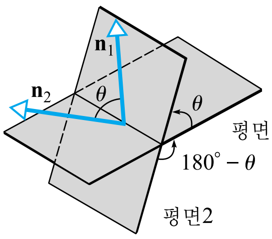


그림 문제 45

46. 평면 $x - y - 3z = 5$와 직선 $x = 2 - t, y = 2t, z = 3t - 1$ 사이의 예각인 교각을 최적근사도수로 구하여라(힌트: 문제 45 참조).

토론과 발견

47. 두 직선 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$와 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 - t\mathbf{v}$는 공통으로 무엇을 만족하는가? 설명하여라.

48. 직선 $x = x_0 + at, y = y_0 + bt, z = z_0 + ct$와 평면 $ax + by + cz = 0$ 사이에는 어떤 관계가 존재하는가? 각자의 논법을 설명하여라.

49. $\mathbf{r}_1$과 $\mathbf{r}_2$를 각각 원점에서부터 점 $P_1(x_1, y_1, z_1)$과 점 $P_2(x_2, y_2, z_2)$에 이르는 벡터라 할 때 방정식

$$\mathbf{r} = (1 - t)\mathbf{r}_1 + t\mathbf{r}_2 \qquad (0 \le t \le 1)$$

은 기하학적으로 무엇을 나타내는가? 각자의 논법을 설명하여라.

50. 점 (x_0, y_0, z_0)를 지나는 두 수직선의 매개변수방정식을 기술하여라.

*선형대수-03장-1 2008.8.20 2:34 PM 페이지195

51. 3차원 공간의 직선 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$는 평면 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2$에 나란한지, 아닌지를 말하여라. 자신의 답을 증명하여라.

52. 다음 명제는 참(T)인지 또는 거짓(F)인지를 진술하고 각자의 답이 타당함을 증명하여라.

(a) a, b와 c가 모두 영이 아니면 직선 $x = at$, $y = bt$, $z = ct$는 평면 $ax + by + cz = 0$에 수직이다.

(b) 3차원 공간의 나란하지 않는 두 직선은 적어도 한 점에서 만나야 한다.

(c) $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$와 $\mathbf{w}$가 $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = 0$을 만족하는 3차원 공간의 벡터이면 이들 세 벡터는 같은 평면에 있다.

(d) 방정식 $\mathbf{x} = t\mathbf{v}$는 2차원 공간의 모든 벡터 $\mathbf{v}$에 대해서 직선을 나타낸다.

3장의 응용(컴퓨터 사용)문제

다음 연습문제는 기술유틸리티를 사용하여 풀 수 있도록 설계되어 있다. 대표적으로, 이것은 MATLAB, Mathematica, Maple, Derive 또는 Mathcad이나, 어떤 다른 형태의 선형대수의 소프트웨어 또는 어떤 선형대수의 기능출력을 갖춘 과학계산기일 수도 있다. 각 연습문제에 대해서 독자가 사용하는 특수 유틸리티에 관한 관련된 도큐멘테이션(documentation)을 숙지할 필요가 있다. 이들 연습문제의 목적은 독자의 유틸리티로 기본실력을 제공하는 데 있다. 일단 이들 연습문제에 있는 기법들을 완전히 터득만 한다면, 독자의 기술유틸리티를 사용하여 정규 연습문제에 있는 대부분의 문제를 풀 수 있을 것이다.

3.1절 **T1.** (벡터) 벡터입력과 벡터의 덧셈, 뺄셈과 스칼라와의 곱의 방법에 관한 독자의 도큐멘테이션을 읽은 다음에 예제 1에 있는 계산을 이행하여라.

T2. (벡터의 그림) 2차원 또는 3차원 공간의 선분을 그릴 수 있는 기술유틸리티를 사용하고 있다면, 자신이 선택한 시초점과 종점을 갖는 몇 가지 선분을 그려라. 또한 자신의 유틸리티가 화살축(→)을 설정할 수 있는지를 조사할 수도 있고, 이 경우에는 기하학적 벡터와 같은 선분을 그릴 수가 있다.

3.3절 **T1.** (내적과 노름) 어떤 기술유틸리티에는 내적과 노름을 계산하는 명령이 제공되어 있는가 하면, 어떤 것은 내적만을 계산하는 명령이 제공되어 있다. 후자의 경우에 있어서는 노름은 공식 $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$로부터 계산될 수 있다. 내적(과 이용할 수 있는 경우, 노름)을 구하는 법에 관한 독자의 도큐멘테이션을 읽은 다음에 예제 2의 계산을 이행하여라.

T2. (정사영) 벡터 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{u}$를 입력할 때 독자의 유틸리티로 $\mathrm{Proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{u}$를 계산하는 프로그램을 작성할 수 있는가를 확인하여라. 작성된 프로그램으로써 계산작업을 점검하고서, 예제 6에 있는 계산을 이행하여라.

3.4절 **T1.** (벡터곱) 벡터곱을 구하는 법에 관한 독자의 도큐멘테이션을 읽은 다음에 예제 1에 있는 계산을 이행하여라.

T2. (벡터곱의 공식) CAS로 작업을 하는 경우에는 이를 사용하여 공식(1a)를 확증하여라.

*선형대수-03장-1 2008.8.20 2:34 PM 페이지196

T3. (벡터곱의 성질) CAS로 작업을 하는 경우에는 이를 사용하여 정리 3.4.1의 결과를 증명하여라.

T4. (3각형의 넓이) 독자의 기술유틸리티로 세 가지 좌표를 입력하였을 때 이들 세 점으로 결정되는 3차원 공간의 3각형의 넓이를 구하는 프로그램을 작성할 수 있는지를 확인하여라. 예제 4에 있는 3각형의 넓이를 계산하여 각자의 작업을 점검하여라.

T5. (스칼라3중적의 공식) CAS로 작업을 하는 경우에는 이를 사용하여 두 변 사이의 차가 영임을 밝힘으로써 공식 (7)을 증명하여라.

T6. (평행6면체의 부피) 독자의 기술유틸리티로 세 개의 벡터 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$와 $\mathbf{w}$를 입력했을 때 이들 세 벡터로 결정되는 3차원 공간의 평행6면체의 부피를 구하는 프로그램을 작성할 수 있는지를 확인하여라. 3.4절의 연습문제 10을 풀어봄으로써 자신의 작업을 검산하여라.