]
是动力系统理论
结果之一，它描
动下不变环面的

1.2.1 KAM 环面的存在性

根据 Kolmogorov-Arnold-Moser 定理[†1.4]，当扰动参数 ϵ 足够小时，大部分不变环面会持续存在，只要频率满足 Diophantine 条件：

$$|\omega \cdot k| \geq \frac{\gamma}{|k|^\tau}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\} \tag{1.9}$$

其中 $\gamma > 0$，$\tau > n - 1$。这些环面的测度为：

$$\mu(\text{KAM 环面}) = 1 - O(\sqrt{\epsilon}) \tag{1.10}$$

定义 1.1 (共振结构与 Arnold 扩散). 在相空间中，共振条件 $\omega \cdot k = 0$ 定义了共振流形 $\mathcal{R}_k$。这些流形的并集：

$$\mathcal{R} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} \mathcal{R}_k \tag{1.11}$$

在相空间中稠密。在共振附近，系统可能发生 Arnold 扩散，其扩散系数估计为：

$$D \sim \exp\left(-\frac{C}{\sqrt{\epsilon}}\right) \tag{1.12}$$

这解释了为什么行星系统在天文时间尺度上可能不稳定。

定义 1.2 (Nekhoroshev 稳定性). 即使在没有 KAM 环面的区域，系统仍可能表现出指数长的稳定性。Nekhoroshev 定理指出，在时间尺度：

$$T \sim \exp\left(\frac{1}{\epsilon^a}\right), \quad a = \frac{1}{2n} \tag{1.13}$$

内，作用量变化被限制在 $O(\epsilon^b)$ 范围内，其中 $b > 0$ 依赖于系统的非退化性。

[†1.5]

†1.5 [作者注]

太阳系结构示意图

1.2.2 标度律与重整化群流

定义无量纲化的作用量 $\tilde{S} = S/\hbar$ 和时间 $\tilde{t} = t/t_0$，其中 $t_0 = \sqrt{a^3/GM}$ 是动力学时间尺度。在对数尺度下，系统的演化可以用重整化群方程描述：

$$\frac{d\mathcal{L}(\mu)}{d \ln \mu} = \beta(\mathcal{L}) \tag{1.14}$$

其中 μ 是能量尺度，β 是 beta 函数。对于行星系统，我们有：

$$\beta(\lambda) = -\epsilon\lambda^2 + O(\lambda^3) \tag{1.15}$$

这表明在红外极限（$\mu \to 0$）下，耦合常数 λ 趋于零，系统表现出渐近自由性[†1.6]。

†1.6 [作者注]
这个类比来自于量子色动力学（QCD）中的渐近自由性。在行星系统中，它意味着在大尺度上相互作用变弱。

Table 1.1. 太阳系主要天体的轨道半径

天体	轨道半径 (AU)	轨道半径 (km)
水星	0.39	5.8×10^7
金星	0.72	1.1×10^8
地球	1.00	1.5×10^8
火星	1.52	2.3×10^8
木星	5.20	7.8×10^8
土星	9.54	1.4×10^9
天王星	19.19	2.9×10^9
海王星	30.07	4.5×10^9

1.3 引力场的微扰展开与多极矩

考虑一个质量分布 $\rho(\mathbf{r})$ 产生的引力势。在远场区域，我们可以进行多极展开：

1.3.1 引力势的球谐展开

引力势可以展开为：

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(\frac{R}{r}\right)^{l} J_{lm}Y_l^m(\theta,\phi) \tag{1.16}$$

其中 J_{lm} 是多极矩：

$$J_{lm} = \frac{1}{MR^l}\int \rho(\mathbf{r}')r'^l Y_l^{m*}(\theta',\phi')d^3r' \tag{1.17}$$

Y_l^m 是球谐函数，满足正交归一条件：

$$\int Y_l^m Y_{l'}^{m'*} d\Omega = \delta_{ll'}\delta_{mm'} \tag{1.18}$$

†1.7

†1.7 [作者注]
多极展开是处理非球对称引力场的标准方法。对于快速旋转的行星，四极矩 J_2 通常是最重要的修正项。

例 1.3 (地球四极矩的计算). 地球的四极矩可以通过测量卫星轨道的进动率来确定。考虑一个卫星在倾角为 i 的轨道上运行，其升交点经度 Ω 的进动率为：

$$\dot{\Omega} = -\frac{3}{2}\frac{nR^2}{a^2(1-e^2)^2}J_2\cos i \tag{1.19}$$

其中 $n = \sqrt{GM/a^3}$ 是平均运动。对于地球，测量得到：

$$J_2 = (1.08263 \pm 0.00001) \times 10^{-3} \tag{1.20}$$

这个值可以用来反演地球内部的密度分布。通过求解 Clairaut 方程：

$$\frac{d}{dr}\left(r^4\frac{d\eta}{dr}\right)+6r^3\eta=-6r^3\frac{\rho(r)}{\bar{\rho}(r)} \tag{1.21}$$

我们可以得到地球内部的扁率分布 $\eta(r)$[†1.8]。

1.3.2 有效势与 Roche 极限

在旋转参考系中，考虑潮汐力的影响，有效势能为：

$$U_{\text{eff}}(\mathbf{r})=-\frac{GM_1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|}-\frac{GM_2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|}-\frac{1}{2}\omega^2|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{\text{cm}}|^2 \tag{1.22}$$

其中 ω 是系统的角速度。Roche 极限可以通过求解：

$$\left.\frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial r}\right|_{r=r_R}=0,\quad \left.\frac{\partial^2 U_{\text{eff}}}{\partial r^2}\right|_{r=r_R}=0 \tag{1.23}$$

得到：

$$r_R=2.456R_1\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{1/3} \tag{1.24}$$

重点

Roche 极限的推导涉及到流体静力学平衡和潮汐张量的本征值分析。更精确的计算需要考虑天体的弹性性质和粘滞耗散[†1.9]。

1.3.3 Jeans 逃逸与流体动力学逃逸

大气逃逸是一个复杂的动力学过程，涉及多个物理机制。考虑大气分子的速度分布函数 $f(\mathbf{v},\mathbf{r},t)$，其演化由 Boltzmann 方程描述：

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{r}}f+\mathbf{F}\cdot\nabla_{\mathbf{v}}f=\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{coll}} \tag{1.25}$$

在外逸层（exosphere）中，碰撞项可以忽略，逃逸率由 Jeans 公式给出：

$$\Phi_J=n(r_c)\sqrt{\frac{k_BT}{2\pi m}}\left(1+\frac{GMm}{k_BTr_c}\right)\exp\left(-\frac{GMm}{k_BTr_c}\right) \tag{1.26}$$

其中 r_c 是临界层高度[†1.10]。

定理 1.4 (大气稳定性的 Liouville 定理). *在相空间中，大气分子的分布函数 $f(\mathbf{r},\mathbf{v},t)$ 沿着相流是守恒的。定义相空间体积元 $d\Gamma=d^3r\,d^3v$，则 Liouville 定理指出：*

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\{\mathbf{r},\mathbf{v}\}\cdot\nabla_\Gamma f=0 \tag{1.27}$$

其中 $\{\cdot,\cdot\}$ 是 Poisson 括号。这意味着相空间密度沿轨道守恒。

†1.8 [作者注]
Clairaut 方程是描述自引力流体平衡形状的基本方程，由法国数学家 Clairaut 在 1743 年导出。

Proof. 从 Boltzmann 方程出发，在无碰撞极限下：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0 \tag{1.28}$$

利用 Hamilton 方程 $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$，$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}/m$，以及相空间的不可压缩性：

$$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \nabla_{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{v}} = \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{v}} \cdot \frac{\mathbf{F}}{m} = 0 \tag{1.29}$$

（因为 $\mathbf{F} = -\nabla U$ 是保守力），我们得到：

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \dot{\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0 \tag{1.30}$$

这就是 Liouville 定理[†1.11]。 ■

1.4 作用-角变量与可积系统

行星轨道问题是经典力学中少数完全可积的系统之一。我们引入作用-角变量 (I, θ) 来描述系统的动力学。

1.4.1 Hamilton-Jacobi 理论与可积性

对于可积系统，存在 n 个独立的对合守恒量 $F_1, \ldots, F_n$，满足：

$$\{F_i, F_j\} = 0, \quad \forall i, j \tag{1.31}$$

其中 $\{\cdot, \cdot\}$ 是 Poisson 括号。这些守恒量定义了相空间中的不变环面。

定理 1.5 (Liouville-Arnold 定理). 设 (M, ω) 是 $2n$ 维辛流形，$F_1, \ldots, F_n$ 是 n 个独立的对合守恒量。则：

(1) 水平集 $M_c = \{F_1 = c_1, \ldots, F_n = c_n\}$ 是 n 维不变流形

(2) 若 M_c 紧致且连通，则 $M_c \cong \mathbb{T}^n$（n 维环面）

(3) 存在作用-角坐标 $(I, \theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n$，使得哈密顿量只依赖于作用量：$H = H(I)$

(4) 运动方程简化为：$\dot{I} = 0$，$\dot{\theta} = \omega(I) = \partial H / \partial I$

[†1.12]

对于 Kepler 问题，守恒量包括能量 E、角动量 $\mathbf{L}$ 和 Laplace-Runge-Lenz 矢量 $\mathbf{A}$：

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \frac{GMm^2\mathbf{r}}{r} \tag{1.32}$$

这些守恒量生成 SO(4) 对称群（对于束缚态）或 SO(3,1) 对称群（对于散射态）[†1.13]。

†1.9 [作者注]
对于刚体，Roche 极限约为 $2.9R_1(\rho_1/\rho_2)^{1/3}$。流体和刚体的差异反映了物质响应潮汐力的不同方式。

†1.10 [作者注]
Jeans 逃逸只适用于外逸层。在更低的大气层中，需要考虑流体动力学逃逸，这涉及到求解 Navier-Stokes 方程的边界层问题。

例 1.6 (Delaunay 变量与正则微扰论). 对于 Kepler 问题, Delaunay 变量 (L, G, H, l, g, h) 是最自然的作用-角变量:

$$L = \sqrt{GMa}, \quad l = M \quad (\text{平近点角}) \tag{1.33}$$

$$G = L\sqrt{1-e^2}, \quad g = \omega \quad (\text{近日点幅角}) \tag{1.34}$$

$$H = G\cos i, \quad h = \Omega \quad (\text{升交点经度}) \tag{1.35}$$

其中 M 是平近点角, ω 是近日点幅角, Ω 是升交点经度, i 是轨道倾角。

在 Delaunay 变量中, Kepler 哈密顿量简化为:

$$H_0 = -\frac{G^2M^3m^3}{2L^2} \tag{1.36}$$

当加入微扰(如其他行星的引力、相对论修正、非球形引力场等)时, 我们可以使用正则微扰论:

$$H = H_0(L) + \epsilon H_1(L, G, H, l, g, h) + \epsilon^2 H_2 + \cdots \tag{1.37}$$

通过 von Zeipel 方法或 Lie 级数方法, 可以系统地消除快变量, 得到平均化的哈密顿量[†1.14]。

1.4.2 久期微扰与长期演化

考虑 N 体问题的哈密顿量:

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m_i} - \sum_{i<j} \frac{Gm_im_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \tag{1.38}$$

引入质量比参数 $\mu_i = m_i/M_*$, 其中 M_* 是中心天体质量。在 $\mu_i \ll 1$ 的极限下, 我们可以展开:

$$H = H_0 + \sum_{i=1}^{N} \mu_i H_1^{(i)} + \sum_{i<j} \mu_i\mu_j H_2^{(ij)} + \cdots \tag{1.39}$$

久期项(secular terms)来自于共振附近的小除数问题。定义共振条件:

$$\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\omega} = k_1\omega_1 + \cdots + k_n\omega_n = 0, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n \tag{1.40}$$

其中 $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ 是频率向量。在共振附近, 微扰级数出现小除数, 导致长期演化[†1.15]。

†1.11 [作者注]
Liouville 定理是统计力学的基石。它保证了在哈密顿系统中, 相空间体积是守恒的, 这对于定义微正则系综至关重要。

1.5 原行星盘的流体动力学与磁流体动力学

行星形成于原行星盘, 这是一个复杂的多相流体系统, 涉及气体、尘埃、磁场和辐射的相互作用。