

## 第 12 章 行星形成理论

“有物混成，先天地生。”

(There is something undifferentiated yet complete, born before Heaven and Earth.)

— 老子,《道德经》

### 12.1 飞天意大利面神 *Flying Spaghetti Monsterism*

我们的地球最初是怎么形成的？2005 年，堪萨斯州教育委员会以 6 比 4 的表决结果通过新标准，要求学生学习对达尔文进化论的“质疑”，实质上为“智能设计论”<sup>†12.1</sup>进入课堂打开了大门。这一事件迅速引发全国争议，也直接催生了“飞天意大利面神教”（Flying Spaghetti Monsterism）的诞生——一个以讽刺方式主张“若智能设计可以进入课堂，那么任何创造论，包括由飞天意大利面怪物创造宇宙的学说，也应被平等对待”的运动。自此，FSM 成为科学教育与宗教界限讨论中的象征性符号，提醒人们科学理论应建立在可检验的自然理论之上，而非信仰。

一个可靠的理论，必然能够被量化、被计算，并经得起模拟的检验。虽然早在先前，Immanuel Kant<sup>†</sup> 和 Pierre-Simon Laplace<sup>†</sup> 就已经提出了星云假说的雏形，试图用旋转的气体云来解释太阳系和行星的起源，这一思想标志着人类第一次尝试以自然法则而非神话来理解行星的诞生。Kant 在 *Universal Natural History and Theory of the Heavens* 中设想，太阳系源于一片原始气体和尘埃的旋转云团，随着收缩逐渐分化出太阳和行星；Laplace 则进一步提出，旋转星云会形成一系列气体环，最终冷却凝聚成行星。尽管这一理论在宏观上描绘了行星诞生的轮廓，但它在细节上仍显粗糙：对于行星体如何从微小颗粒逐步增长、如何通过碰撞和引力积累形成完整的行星系统，以及行星与太阳间的角动量分布问题，Kant 和 Laplace 都未能提供量化的数学描述。更重要的是，当时缺乏可以验证这些构想的计算方法或数值模拟手段，因此这些早期理论虽开创了星云模型的思路，却仍停留在概念和几何推演阶段，无法成为可检验的科学模型。

更重要的是，拉普拉斯的理论存在着重大的缺陷，按照他的假设，原始星云塌缩时，大部分质量向中心聚集形成了太阳。根据角动量守恒  $L = mvr$ ，当  $r$  减小时， $v$  应该急剧

#### <sup>†</sup>12.1 [作者注]

智能设计论（Intelligent Design），是一种披着科学外衣的创造论。它主张生命的复杂性不可能由自然选择解释，必然有某种“智能力量”在背后设计。

#### <sup>†</sup> [作者注]



Kant 的肖像

#### <sup>†</sup> [作者注]



Laplace 的肖像



Figure 12.1. 飞天意大利面神

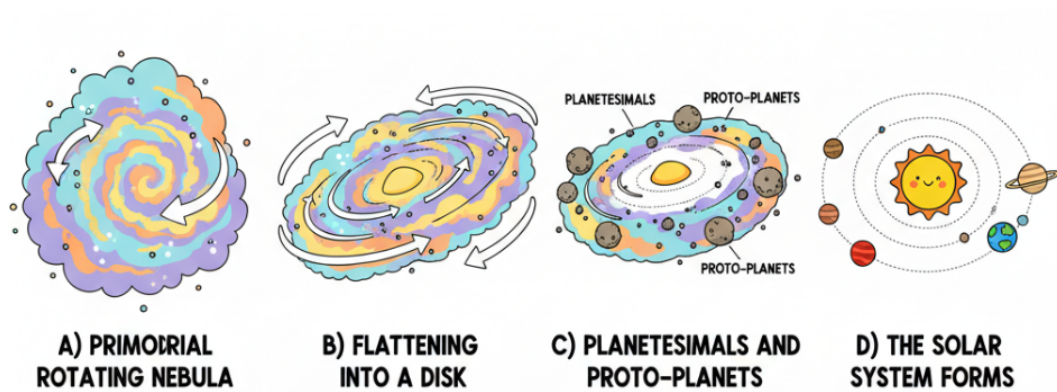


Figure 12.2. ‘星云’概念图

增大。因此，中心天体（太阳）理应继承绝大部分的角动量，并高速旋转。但现实完全相反（读者可以利用现代观测的结果自行计算太阳和木星的角动量验证）。除此之外，我们还需要看看行星能否直接由气体环凝聚形成。

考虑早期太阳星云为一个薄盘，绕质量为  $M_*$  的中心恒星旋转。我们定义以下物理量：盘面密度  $\Sigma(R, t)$ ，二维压强  $P(R, t)$ （等温气体下  $P = c_s^2 \Sigma$ ），径向与角向速度  $v_R(R, t)$  和  $v_\phi(R, t)$ ，盘自身引力势  $\Phi(R, t)$  以及中心恒星势  $\Phi_* = -GM_*/R$ 。

在稳态下，圆盘沿圆轨道旋转，径向力平衡满足

$$R\Omega_0^2 = \frac{GM_*}{R^2} + \frac{1}{\Sigma_0} \frac{dP_0}{dR} + \frac{d\Phi_0}{dR}. \quad (12.1)$$

由于中心恒星质量远大，而盘自引力和压强梯度相比之下较小，可近似得到开普勒旋转：

$$\Omega_0(R) \approx \sqrt{\frac{GM_*}{R^3}}, \quad (12.2)$$

说明离中心越近旋转越快，形成差动旋转盘。

在稳态基础上叠加微小扰动，将各物理量写成平衡值加扰动量：

$$\Sigma(R, t) = \Sigma_0 + \Sigma_1(R, t), \quad (12.3)$$

$$v_R(R, t) = v_{R1}(R, t), \quad v_\phi(R, t) = R\Omega_0 + v_{\phi1}(R, t), \quad (12.4)$$

$$P(R, t) = P_0 + P_1 = P_0 + c_s^2 \Sigma_1, \quad (12.5)$$

$$\Phi(R, t) = \Phi_0 + \Phi_1(R, t), \quad (12.6)$$

其中  $\Sigma_1, v_{R1}, v_{\phi1}, P_1, \Phi_1$  均为一阶小量。代入连续性方程、欧拉方程和泊松方程，并忽略二阶及以上小量，得到线性化方程组：

$$\frac{\partial \Sigma_1}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \Sigma_0 v_{R1}) + \frac{\Sigma_0}{R} \frac{\partial v_{\phi1}}{\partial \phi} = 0, \quad (12.7)$$

$$\frac{\partial v_{R1}}{\partial t} - 2\Omega_0 v_{\phi1} = -\frac{1}{\Sigma_0} \frac{\partial P_1}{\partial R} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial R}, \quad (12.8)$$

$$\frac{\partial v_{\phi1}}{\partial t} + \frac{\kappa^2}{2\Omega_0} v_{R1} = -\frac{1}{R\Sigma_0} \frac{\partial P_1}{\partial \phi} - \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \phi}, \quad (12.9)$$

$$\nabla^2 \Phi_1 = 4\pi G \Sigma_1 \delta(z), \quad (12.10)$$

其中  $\kappa$  为回旋频率：

$$\kappa^2(R) = \frac{2\Omega_0}{R} \frac{d}{dR} (R^2 \Omega_0), \quad (12.11)$$

对于开普勒盘有  $\kappa \approx \Omega_0$ 。

假设扰动为局部平面波形式，沿径向传播且轴对称：

$$\Sigma_1, v_{R1}, v_{\phi1}, \Phi_1 \sim e^{i(kR - \omega t)}, \quad \frac{\partial}{\partial \phi} = 0. \quad (12.12)$$

代入连续性方程：

$$-i\omega \Sigma_1 + ik \Sigma_0 v_{R1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Sigma_1 = \frac{k \Sigma_0}{\omega} v_{R1}. \quad (12.13)$$

对于欧拉方程的径向分量：

$$-i\omega v_{R1} - 2\Omega_0 v_{\phi 1} = -ik \frac{P_1}{\Sigma_0} - ik\Phi_1, \quad (12.14)$$

注意  $P_1 = c_s^2 \Sigma_1$ ,  $\Phi_1$  与  $\Sigma_1$  通过泊松方程满足薄盘近似：

$$\Phi_1 = -\frac{2\pi G \Sigma_1}{|k|}. \quad (12.15)$$

代入上式：

$$-i\omega v_{R1} - 2\Omega_0 v_{\phi 1} = -ik \frac{c_s^2 \Sigma_1}{\Sigma_0} + ik \frac{2\pi G \Sigma_1}{|k|} = -ik c_s^2 \frac{\Sigma_1}{\Sigma_0} + 2\pi G \Sigma_1. \quad (12.16)$$

对角向分量：

$$-i\omega v_{\phi 1} + \frac{\kappa^2}{2\Omega_0} v_{R1} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{\phi 1} = \frac{\kappa^2}{2\Omega_0 i\omega} v_{R1}. \quad (12.17)$$

将  $v_{\phi 1}$  代回径向方程，并用  $\Sigma_1 = (k\Sigma_0/\omega)v_{R1}$ ：

$$-i\omega v_{R1} - 2\Omega_0 \frac{\kappa^2}{2\Omega_0 i\omega} v_{R1} = -ik c_s^2 \frac{k\Sigma_0 v_{R1}}{\omega \Sigma_0} + 2\pi G \frac{k\Sigma_0 v_{R1}}{\omega} \quad (12.18)$$

$$-i\omega v_{R1} - \frac{i\kappa^2}{\omega} v_{R1} = -i \frac{k^2 c_s^2}{\omega} v_{R1} + \frac{2\pi G k \Sigma_0}{\omega} v_{R1}. \quad (12.19)$$

两边同时乘以  $i\omega$  并整理：

$$\omega^2 v_{R1} = \kappa^2 v_{R1} - 2\pi G \Sigma_0 |k| v_{R1} + c_s^2 k^2 v_{R1}. \quad (12.20)$$

因此得到色散关系：

$$\omega^2 = \kappa^2 - 2\pi G \Sigma_0 |k| + c_s^2 k^2. \quad (12.21)$$

其中  $\kappa^2$  表示旋转稳定作用， $-2\pi G \Sigma_0 |k|$  表示自引力的不稳定作用， $c_s^2 k^2$  表示压强稳定作用。

为了系统发生引力不稳定（形成团块），需要  $\omega^2 < 0$ ，即

$$c_s^2 k^2 - 2\pi G \Sigma_0 k + \kappa^2 < 0. \quad (12.22)$$

将其视为关于波数  $k$  的二次函数：

$$f(k) = c_s^2 k^2 - 2\pi G \Sigma_0 k + \kappa^2, \quad (12.23)$$

要判断是否存在不稳定模式，需要找到该二次函数的最小值，并判断最小值是否小于零。

二次函数  $f(k) = ak^2 + bk + c$  的最小值出现在导数为零的点：

$$\frac{df}{dk} = 2ak + b = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{\text{crit}} = -\frac{b}{2a}. \quad (12.24)$$

对本问题， $a = c_s^2$ ,  $b = -2\pi G \Sigma_0$ ，得到最不稳定波数：

$$k_{\text{crit}} = \frac{\pi G \Sigma_0}{c_s^2}. \quad (12.25)$$

将  $k_{\text{crit}}$  代回  $f(k)$ , 得到最小值:

$$f(k_{\text{crit}}) = c_s^2 \left( \frac{\pi G \Sigma_0}{c_s^2} \right)^2 - 2\pi G \Sigma_0 \left( \frac{\pi G \Sigma_0}{c_s^2} \right) + \kappa^2 \quad (12.26)$$

$$= \frac{\pi^2 G^2 \Sigma_0^2}{c_s^2} - \frac{2\pi^2 G^2 \Sigma_0^2}{c_s^2} + \kappa^2 \quad (12.27)$$

$$= \kappa^2 - \frac{\pi^2 G^2 \Sigma_0^2}{c_s^2}. \quad (12.28)$$

要使系统发生不稳定, 最小值必须小于零:

$$\kappa^2 - \frac{\pi^2 G^2 \Sigma_0^2}{c_s^2} < 0 \quad \Rightarrow \quad \kappa^2 < \frac{\pi^2 G^2 \Sigma_0^2}{c_s^2}. \quad (12.29)$$

两边开方并整理, 引入无量纲参数 Toomre  $Q$ :

$$Q \equiv \frac{c_s \kappa}{\pi G \Sigma_0} < 1, \quad (12.30)$$

其中  $Q < 1$  表示自引力足够克服旋转剪切和压强稳定作用, 扰动会增长形成团块;  $Q > 1$  则表示盘稳定, 扰动无法增长。

代入早期稀薄太阳星云中的推测值计算 (这一步同样留给读者做验证), 可以得到  $Q \gg 1$ , 这说明拉普拉斯假说中气体环直接凝聚成行星的过程在物理上不可行。行星必须通过尘埃颗粒聚集、原行星体形成、逐步增长的积累过程形成。