# 第 2 章　基础

天地有大美而不言，
四时有明法而不议，
万物有成理而不说。

—《庄子·知北游》

## 2.1 时空的几何结构

### 2.1.1 简略的微分几何

物理定律描述的是客观世界的结构，而非人为选取的坐标系中的符号。一个方程若在换坐标时改变了形式，它刻画的便不是自然本身，而只是观察自然的方式。真正的物理规律超越坐标、超越分量、超越基底的选取，在任何观察者眼中都保持同样的形式。

我们习惯于将世界想象为一个三维的欧几里得（or 平直）空间 $E^3$，外加一条独立流逝的一维时间轴，这样的时空可以记作 $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ 的**流形**。我们可以用标量表示时空内的一条只有数值的线段，用矢量在时空内表示一条不仅有数值还有方向的线段（带箭头的线段），用张量（Tensor）表示所处时空承载物理信息的**对象类型**。

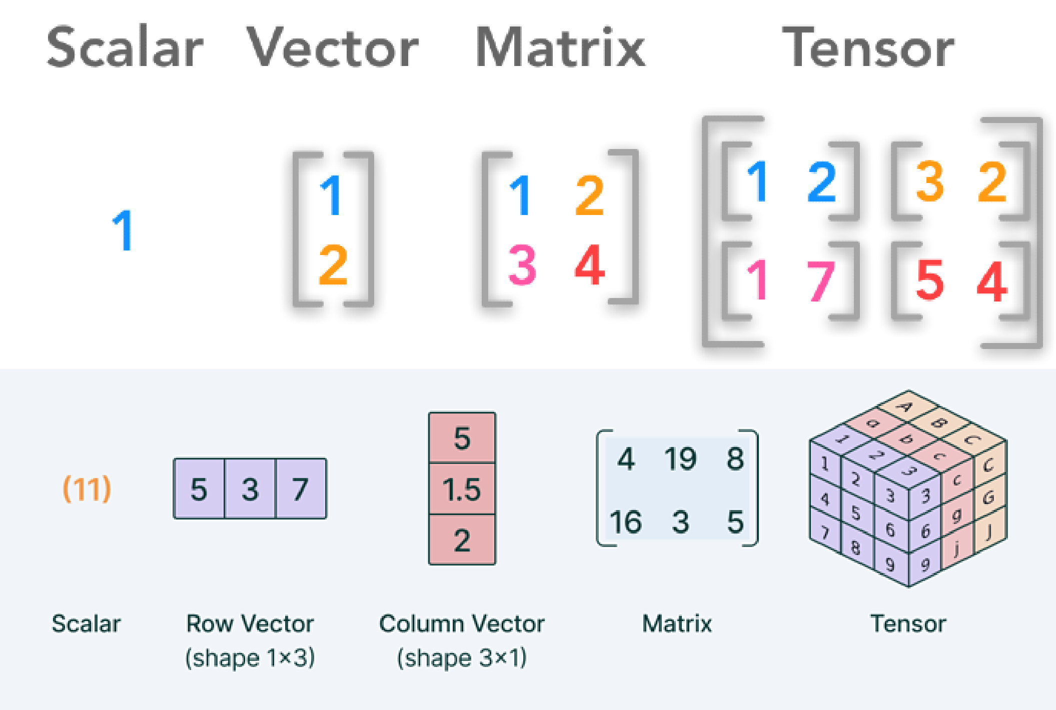


**Figure 2.1.** 张量可以看作是计算机中的存储器

这里有一些概念需要做进一步的补充。流形可以认为是一个由无数点构成的、光滑连续的曲面或体。它可以是一个平坦的平面，一个球面，或者某个复杂的、扭曲的形状。但光是定义了流形，我们还不能用来回答一些基本的问题，首先，两个矢量之间的夹角是多少？之间的距离又是多少？

我们可以定义一个操作**度规张量** $g$，它的作用是接收两个在空间同一点的矢量 **V** 和 **W** 作为输入，输出一个单一的数字（一个标量）。度规张量起到的作用类似于内积，得到了两个矢量的内积自然可以知道夹角以及内积了。度规张量是一个很特殊的张量，它不仅用于存储数据，而且还可以参与运算，类似于计算机里的协处理器。

流形上的任意一点 p，都可以是无穷多个不同运动的起点。所有这些从 p 点出发的、可能的瞬时速度，每一个都代表了一个独特的方向和速率，共同构成了一个平坦的矢量空间。这个空间与流形在 $p$ 点刚好相切，我们称之为点 $p$ 的切空间 $T_pM$。

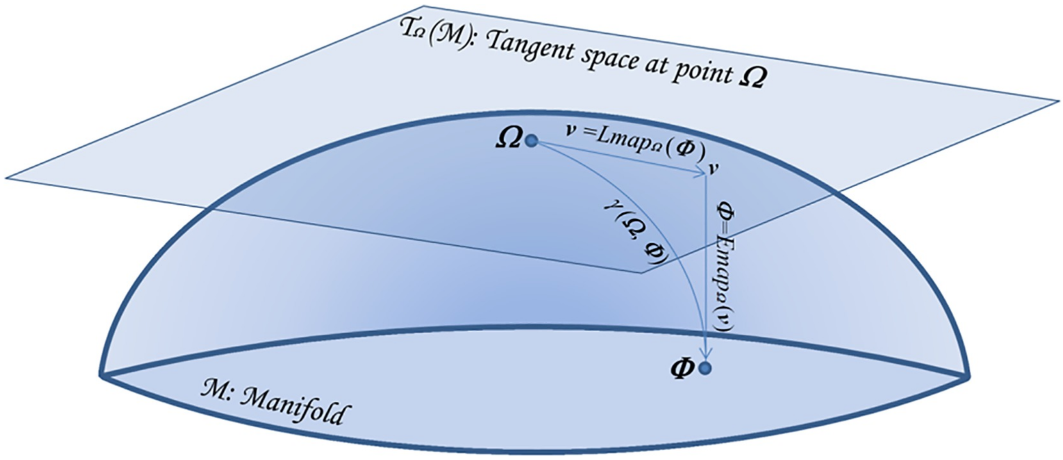


**Figure 2.2.** 一个切平面示意图，切平面是二维流形的“切空间”

三维平直空间内的点所有的切空间是同构的，这很容易理解因为在这个空间里的矢量可以到处平移而保持方向不变的[A1]。但对于生活在一个二维球面流形上的外星人而言，显然在不同的两点上的切平面并不是同构的，因此处理位于毫无关系的两个切平面上的矢量的关系是需要十分慎重的。

对于生活在二维球面流形的外星人来说，很明显的可以看到并不能简单的平移矢量，在平移的过程中，矢量的方向会发生变化。

---

[A1] *[作者注]* 更准确的说，这是平行公理的要求，平行公理的内容是如果一条横截线使得两条直线同侧内角和小于 180°，那么这两条直线向那侧延伸会相交。这句话隐含着平行线的概念在整个空间中是统一的，且不同位置的“方向”可以直接比较的意味

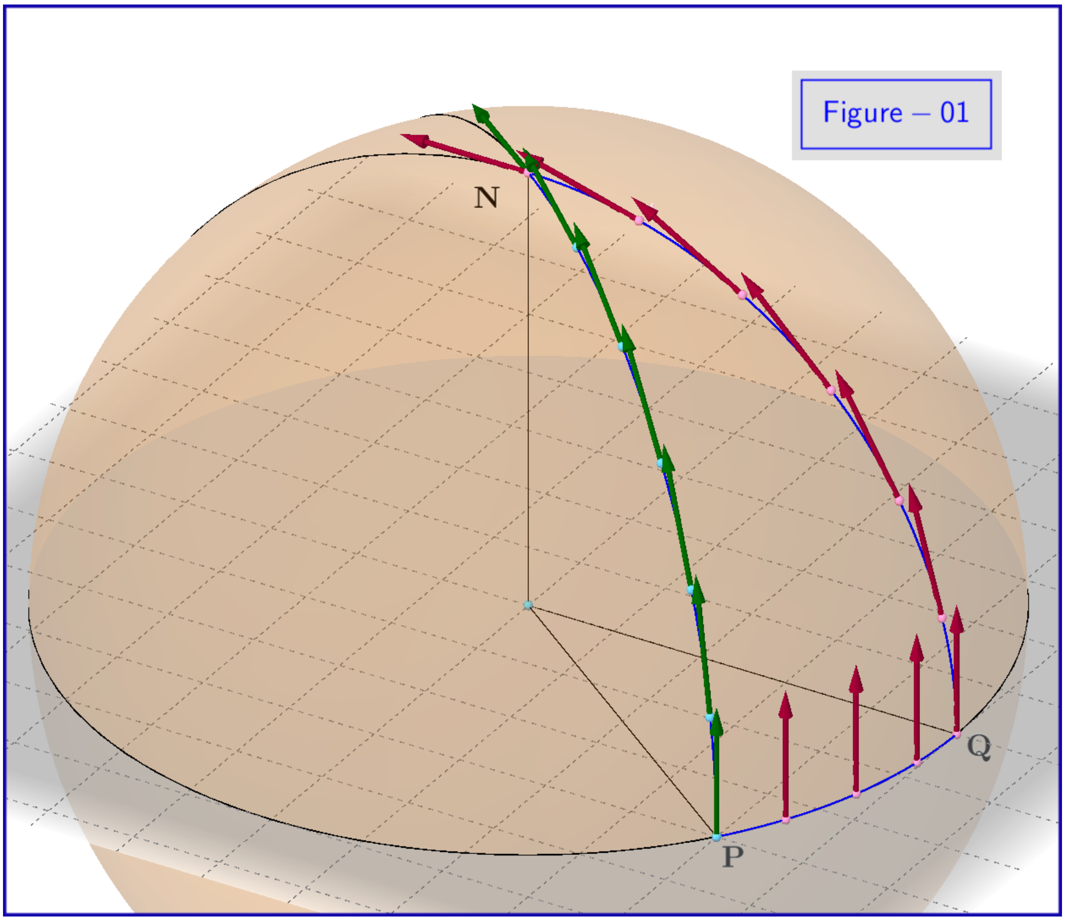


**Figure 2.3.** 二维球面流形上一点任意切矢量的平移路径

因此，我们需要引入**联络**的概念，数学符号 $\nabla$ 记作它在无穷小的尺度上，精确地定义了当一个矢量从一个点的切空间，移动到无限邻近的另一个点的切空间时，怎样才算“保持了方向”。这个过程被称为平行输运 (Parallel Transport)。

$\nabla$ 是联络算子，作用在一个矢量上 $\nabla_U V$，我们称为协变导数。首先联络必须尊重我们的度规，因为度规定义了我们如何去测量角度和长度，所以在平移输运的过程中，需要满足两个矢量 $g(W,V)$ 为一个恒定的常数，也可以写作

$$\nabla \mathbf{g} = 0 \tag{2.1}$$

此外，联络还必须是无挠的（无扭曲的），类比于导航，两点之间的路径必须是可交换的，我们从一点 P 出发，先沿着矢量 A 移动一个无穷小的距离，再沿着矢量 B 移动一个无穷小的距离。然后我们从 P 点换个顺序，先沿 B 再沿 A，这两条路径的终点理应是同一个点，即

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = \underbrace{[X,Y]}_{\text{Lie 括号}} \tag{2.2}$$

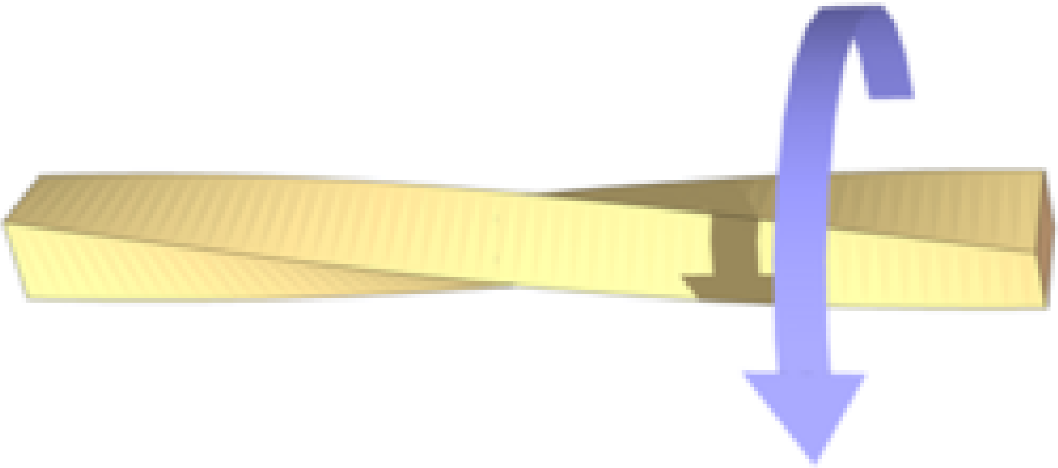

**Figure 2.4.** 扭曲示意图，很明显和弯曲不同

有关 Lie 括号的内容我们如果下次遇到再进行讲解。黎曼几何基本定理告诉我们，在任何黎曼流形（或伪黎曼流形）上，存在一个唯一的、无挠率的、度量的联络，称为列维-奇维塔联络或给定度量的 (pseudo-) 黎曼联络。因此，在二维球面流形上，联络的形式是唯一确定的。