Problema 1: RentBike

RentBike es un servicio de alquiler de bicicletas que cuál funciona en el área cercana a la zona universitaria del centro de la ciudad. Las personas se acercan a este lugar y rentan bicicletas para su uso en lugares cercanos. Después de esto, los clientes las devuelven en el mismo lugar. La llegada de clientes al local de RentBike sigue un Proceso de Poisson con media de 5 personas por hora. Por otro lado, los clientes hacen uso de las bicicletas durante un tiempo que se distribuye exponencial con tasa de 9 personas por hora. Actualmente, RentBike cuenta con 6 bicicletas.

a. Modele la situación de RentBike como una cadena de Markov de tiempo continuo.

Variable de estado:
$X(t)$: Número de bicicletas rentadas en el momento t

Espacios de estados:
$S_X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Tasas de transiciones:

$\lambda = 5$ personas por hora
$\mu = 9$ personas por hora

$$q_{i \to i'} = \begin{cases} \lambda & i' = i + 1 \quad i < 6 \\ \mu \cdot i & i' = i - 1 \quad i > 0 \\ 0 & \text{d.l.c.} \end{cases}$$

Problema 2: Viajero en Europa

Un hombre de negocios viaja por Europa entre 4 países: Francia, Alemania, Inglaterra y España. Los viajes los realiza cada mes hacia alguno de estos países dependiendo del éxito en el negocio realizado en el país en el que esté. En algunos meses puede que este hombre permanezca otro mes en el mismo país en el que estaba el mes anterior. Se sabe que si el hombre comienza un mes en Francia, el otro mes deberá permanecer en Francia con probabilidad de 0.5, viajar a Alemania con probabilidad de 0.2, o ir a España en cualquier otro caso. Si comienza un mes en Alemania, permanecerá ahí mismo con probabilidad de 0.55, o viajará a los otros tres países con probabilidades iguales. Si comienza en Inglaterra, el siguiente mes estará en cualquiera de los 4 países con probabilidades iguales. Por último si comienza en España, viajará a Inglaterra con probabilidad de 0.7 o a Alemania con probabilidad de 0.3.

a. Modele este problema como una cadena de Markov de tiempo discreto.

Variable de estado:
X_n: País en el que se encuentra el hombre de negocios al inicio del mes n

Espacios de estados:
$S_X = \{$Francia (Fr), Alemania (Al), Inglaterra (In), España (Es)$\}$

Probabilidades de transiciones:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ Fr \\ Al \\ In \\ Es \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} Fr & Al & In & Es \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 & 0 & 0.3 \\ 0.15 & 0.55 & 0.15 & 0.15 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0 & 0.3 & 0.7 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

b. Dado que el viajero comienza un mes en Inglaterra, encuentre la probabilidad de que en 2 meses deba estar de nuevo en Inglaterra

$$P(X_{n+2} = \text{Inglaterra}|X_n = \text{Inglaterra}) = \mathbf{P}^2_{\text{In,In}}$$

Problema 3: Elefante del Circo

Rosie es un elefante hembra y la mayor atracción del circo Benzini Brothers. Después de cada función, hay una sesión en la que los clientes se toman una foto montados en Rosie. Los clientes llegan a tomarse fotos siguiendo un proceso de Poisson con tasa $\lambda = 0.5 \text{ min}^{-1}$. El tiempo que tarda una persona mientras se le ayuda a subir al elefante, se toma la foto y baja del elefante se distribuye exponencial con media $\frac{1}{\mu} = 4$ minutos. Dado que Rosie es muy nerviosa no pueden haber más de 6 clientes en su carpa. Rosie tarda un tiempo exponencial con media $\frac{1}{\theta} = 45$ minutos en agotarse y demora descansando un tiempo exponencial con media $\frac{1}{\omega} = 10$ minutos. Mientras Rosie está descansando, los clientes que están tanto siendo atendidos como esperando permanecen en el sistema.

a. Modele la situación de Rosie como una cadena de Markov de tiempo continuo.

Variables de estado:
$X(t)$: Número de clientes en el circo en el momento t

$$Y(t) = \begin{cases} R & \text{si Rosie está descansando} \\ W & \text{si Rosie está trabajando} \end{cases}$$

$$W(t) = \{X(t), Y(t)\}$$

Espacios de estados:
$S_X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$S_Y = \{R, W\}$
$S_W = \{S_X \times S_Y\}$

Tasas de transiciones:

$$q_{i,j\to i',j'} = \begin{cases} \lambda & i' = i+1, j' = j & i < 6 \\ \mu & i' = i-1, j' = j & i > 0, j = W \\ \theta & i' = i, j' = R & j = W \\ \omega & i' = i, j' = W & j = R \\ 0 & \text{d.l.c.} \end{cases}$$

Problema 4: Zapatos del Runner

Cada mañana Federico sale de su casa a correr. Él puede salir de la casa por la puerta 1 o por la puerta 2. Independiente del día, él sale por la puerta 1 con probabilidad s_1 o sale por la puerta 2 con probabilidad s_2. Note que $s_1 + s_2 = 1$. Cuando regresa a su casa después de correr, independiente del día, entra por la puerta 1 con probabilidad r_1 o por la puerta 2 con probabilidad r_2. Note que $r_1 + r_2 = 1$. Asuma adicionalmente que la puerta por donde regresa es independiente de la puerta por donde salió.

Federico tiene 4 pares de zapatos los cuales están repartidos en ambas puertas. Cuando él va a salir por alguna puerta, se pone alguno de los pares de zapatos que hay en esa puerta y sale a correr. Al regresar, deja los zapatos en la puerta por la cual entró. Si cuando va a salir por una puerta no encuentra zapatos disponibles, decide ir a correr descalzo.

a. Modele la situación anterior como una cadena de Markov en tiempo discreto que le permita saber la distribución de los zapatos en las puertas.

Variable de estado:
X_n: Número de pares de zapatos que hay en la puerta 1 justo antes de salir a correr la n-ésima mañana
Y_n: Número de pares de zapatos que hay en la puerta 2 justo antes de salir a correr la n-ésima mañana

$$W(t) = \{X_n, Y_n\}$$

Espacios de estados:

$$S_X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$
$$S_Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$
$$S_W = \{(4,0), (3,1), (2,2), (1,3), (0,4)\}$$

Probabilidades de transiciones:
Para calcular las probabilidades de transición de un paso se observa que independiente del día hay 4 eventos que pueden suceder:

a) Que él salga por la puerta 1 y regrese por la puerta 1 con s_1r_1.
b) Que él salga por la puerta 1 y regrese por la puerta 2 con s_1r_2.
c) Que él salga por la puerta 2 y regrese por la puerta 1 con s_2r_1.
d) Que él salga por la puerta 2 y regrese por la puerta 2 con s_2r_2.

Así, la matriz de probabilidades de transición a un paso está dada por:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} (4,0) \\ (3,1) \\ (2,2) \\ (1,3) \\ (0,4) \end{array} \begin{pmatrix} s_1r_1 + s_2 & s_1r_2 & 0 & 0 & 0 \\ s_2r_1 & s_1r_1 + s_2r_2 & s_1r_2 & 0 & 0 \\ 0 & s_2r_1 & s_1r_1 + s_2r_2 & s_1r_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_2r_1 & s_1r_1 + s_2r_2 & s_1r_2 \\ 0 & 0 & 0 & s_2r_1 & s_1 + s_2r_2 \end{pmatrix}$$

Problema 5: Autos Eléctricos

En el año 2017 el gobierno francés aprobó una nueva regulación que busca reemplazar todos los vehículos de gasolina o diesel del país por vehículos eléctricos. Además de la renovación de los vehículos, esta nueva política implica un cambio en la tecnología instalada en las estaciones de servicio.

Actualmente existen dos métodos para recargar un vehículos eléctricos cuando éste llega a una estación: conectándose a un punto de recarga, o cambiando la batería descargada por una completamente cargada. El tiempo de recarga de la batería es una variable aleatoria exponencial con tasa μ, mientras que el tiempo del cambio de batería es una variable aleatoria con distribución $Erlang(2, \alpha)$. Además, el gobierno local sabe que el 70 % de los vehículos eléctricos que actualmente circulan por la ciudad usan el primer método de recarga.

El gobierno francés ha implementado un plan piloto en la ciudad de París, instalando estaciones de servicio para vehículos eléctricos, con el fin de dimensionar la capacidad requerida para cubrir la demanda de la ciudad en algunos años.

Las estaciones instaladas como parte del plan piloto cuentan con sólo 1 punto de recarga y 1 punto de cambio de baterías. Si un vehículo llega a la estación y el espacio que corresponde a su método de recarga está ocupado, debe ir a otra estación. Por ejemplo, si en la estación solo hay un vehículo en el punto de recarga y llega un vehículo que requiere cambio de batería, éste empieza su servicio inmediatamente, pero si llega otro vehículo para recarga, no entrará a la estación. Finalmente, se ha estimado que los vehículos llegan a cada estación siguiendo un $PP(\lambda)$.

a. Modele la dinámica de utilización de una estación de recarga como una cadena de Markov de tiempo continuo.

Variables de estado:
$X(t) =$ Estado del punto de recarga en el instante t.
$Y(t) =$ Estado del punto de cambio de batería en el instante t.
$Z(t) = \{X(t), Y(t)\}$

Espacios de estados:
$S_X = \{\text{Vacío (0)}, \text{Ocupado (1)}\}$
$S_Y = \{\text{Vacío (0)}, \text{Ocupado en la primera fase del servicio (1)},$
$\text{Ocupado en la segunda fase de servicio (2)}\}$
$S_Z = \{S_X \times S_Y\}$

Tasas de transiciones:

$$q_{i,j \to i',j'} = \begin{cases} 0.7 \cdot \lambda & i' = 1, j' = j \quad i = 0 \\ 0.3 \cdot \lambda & i' = i, j' = 1 \quad j = 0 \\ \mu & i' = 0, j' = j \quad i = 1 \\ \alpha & i' = i, j' = 2 \quad j = 1 \\ \alpha & i' = i, j' = 0 \quad j = 2 \\ 0 & \text{d.l.c.} \end{cases}$$

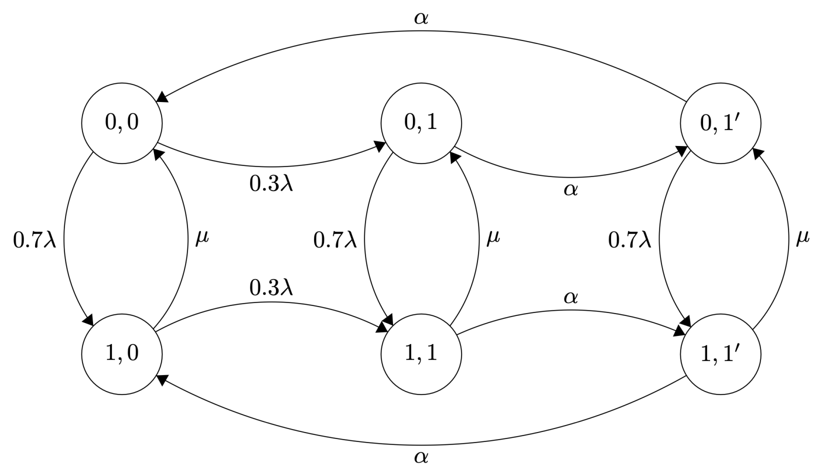

Figure 1: Diagrama de tasas de transición Auto eléctrico

Problema 6: Bus Rapid Transit

La ciudad de Rio de Janeiro en Brasil cuenta con el sistema BRT (Bus Rapid Transit) más grande de América Latina, BRT Rio. Gracias a un avanzado sistema de trazabilidad, se ha calibrado la frecuencia de los buses para que un bus tarde exactamente 3 minutos entre cada par de estaciones del recorrido (y de la misma forma, cada 3 minutos para un bus en una estación). Cada uno de los buses del sistema tiene capacidad para 40 pasajeros sentados y 70 de pie. De las 40 sillas, 2 son puestos preferenciales para mujeres embarazadas, adultos mayores y personas con movilidad reducida. Actualmente, el gobierno de la ciudad esta buscando implementar políticas de inclusión y justicia social, por lo que quiere evaluar la ocupación de las sillas prefenciales en los buses. Para esto, la ciudad ha hecho un esfuerzo significativo para caracterizar el comportamiento de los usuarios que usan estas sillas, y ha determinado que los pasajeros preferenciales llegan a una estación siguiendo un Proceso de Poisson con tasa λ pasajeros/minuto, y se bajan del bus en una estación con probabilidad p. Suponga que si un pasajero preferencial no se puede subir al primer bus que llega, utiliza otro medio de transporte (metro, bus municipal, etc.).

a. Formule un modelo que le permita al gobierno de Brasil conocer la ocupación de las sillas preferenciales.

    Variable de estado:
    X_n: Sillas ocupadas en la n-ésima parada del bus

    Espacios de estados:

$$S_X = \{0, 1, 2\}$$

    Variables aleatorias:
    Demanda (D): $\sim$ Poisson (λ)

$$P[D = x] = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}$$
$$P[D \geq x] = \sum_{i=x}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}$$

Bajada de pasajeros: $\sim$ Binomial(N,p)

$$p_{N,h} = \binom{N}{h} p^h (1-p)^{N-h}.$$

Probabilidades de transiciones:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P(D=0) & P(D=1) & P(D \geq 2) \\ P(D=0) \cdot p_{1,1} & P(D=0) \cdot p_{1,0} + P(D=1) \cdot p_{1,1} & P(D \geq 2) \cdot p_{1,1} + P(D \geq 1) \cdot p_{1,0} \\ P(D=0) \cdot p_{2,2} & P(D=0) \cdot p_{2,1} + P(D=1) \cdot p_{2,1} & P(D \geq 2) \cdot p_{2,2} + P(D \geq 1) \cdot p_{2,1} + P(D \geq 0) \cdot p_{2,0} \end{pmatrix}$$