Introduction to quantum mechanics I

Tristan Villain – Pierre-François Cohadon – Qinhan Wang

Séance de tutorat du 13 novembre 2024

TD de tutorat 5 : intrication

---

1 Opérateurs adjoints sur les produits tensoriels

Exercice 5.1 du cours.
Soient deux opérateurs A et B sur deux espaces de Hilbert $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$.

1. Montrer que $(A \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes B)^\dagger = A^\dagger \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes B^\dagger$
2. Montrer que $(A \otimes B)^\dagger = A^\dagger \otimes B^\dagger$: les deux opérateurs ne sont pas inversés car ils agissent chacun sur un espace de Hilbert différent.

2 Rappels sur les produits tensoriels

Soient deux systèmes $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ décrits chacun par un espace de Hilbert $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$. On cherche l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ décrivant le système total $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \bigcup \mathcal{S}_2$. Cet espace est appelé produit tensoriel de $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$, noté $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.

1. On suppose que $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ sont respectivement dans les états $|\phi\rangle$ et $|\psi\rangle$. L'état correspondant de $\mathcal{S}$ est noté $|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle$. Quelles propriétés a l'application $(|\phi\rangle, |\psi\rangle) \rightarrow |\phi\rangle \otimes |\psi\rangle$?
2. Soit $\{|n_\alpha^{(i)}\rangle\}$ une base de l'espace $\mathcal{H}_i$. Que dire de la famille $\{|\{n_\alpha^{(1)}\rangle\} \otimes |\{n_\beta^{(2)}\}\rangle\}$? Quelle est la dimension de l'espace $\mathcal{H}$ si les espaces $\mathcal{H}_i$ sont de dimension finie ?
3. On dit qu'un état $|\alpha\rangle$ est factorisable si on peut le mettre sous la forme $|\alpha\rangle = |\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$. Sinon, on dit qu'il est intriqué. Montrer que tout état de $\mathcal{H}$ peut se mettre sous la forme d'une combinaison linéaire d'états factorisés. Montrer aussi qu'il existe toujours dans $\mathcal{H}$ des états intriqués.
4. *Produit scalaire* Donner le produit scalaire de deux états factorisables de $\mathcal{H}$ en fonction des produits scalaires dans chacun des espaces $\mathcal{H}_i$. Même question si un des deux états est intriqué.
5. *Mesures d'observables* On considère $\hat{A}$ une observable sur le système $\mathcal{S}_1$ et dont on notera $|a_i\rangle$ et α_i les vecteurs propres et valeurs propres correspondantes de cette observable. On utilisera des notations similaires pour un autre système, $\mathcal{S}_2$.
   (a) On s'intéresse au système $\mathcal{S}_1$ uniquement. S'il est dans l'état $|\psi\rangle$, quelle est la probabilité de mesurer α_i si la valeur propre est non dégénérée ? Si elle est dégénérée ?
   (b) On considère maintenant le système $\mathcal{S}$. Quelle est l'observable correspondant à $\hat{A}$ dans l'espace produit tensoriel ? Quelles sont ses valeurs propres et ses vecteurs propres ? Quelle est la probabilité de mesurer α_i ? Quel est l'état du système juste après qu'on a mesuré α_i ?

3 Téléportation quantique

La téléportation quantique consiste à transmettre un bit quantique $|\phi\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle$ d'un endroit (Alice) à un autre (Bob) en envoyant deux bits classiques, c'est à dire 2 informations, avec 0 ou 1 pour chaque information. Comme point de départ, on suppose qu'Alice et Bob partagent un état intriqué de type EPR $|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle)$, et Alice détient en plus le spin $|\phi\rangle$ à transmettre. Alice détient donc deux spins, et Bob un seul.

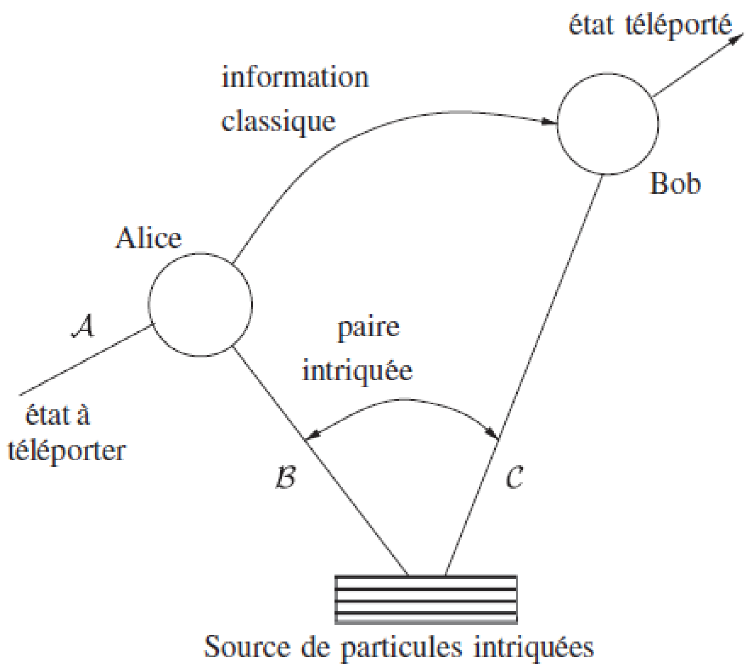

FIGURE 1 – Schéma de l'expérience (figure tirée de "Physique Quantique, Tome 1", par M Le Bellac). $\mathcal{A}$ est le spin possédé par Alice, noté $|\phi\rangle$ dans l'exercice, qui doit être téléporté à Bob. $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont les deux spins intriqués de $|\psi_1\rangle$ envoyés à Alice et Bob.

1. Quelle est l'expression du vecteur d'état $|\Phi\rangle$ du système total ? On placera le spin à transmettre en premier.
2. On rappelle l'expression des quatre états de Bell :

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle) & \qquad |\psi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|++\rangle - |--\rangle) \\ |\psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle) & \qquad |\psi_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|++\rangle + |--\rangle). \end{aligned}$$

   Montrer qu'on peut réécrire l'état de départ $|\Phi\rangle$ sous la forme

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} |\psi_i\rangle \otimes (\alpha_i|+\rangle + \beta_i|-\rangle).$$

   Donner l'expression des coefficients α_i, β_i.

3. Alice effectue maintenant une mesure de l'état de Bell de ses deux spins. L'état de ses spins est donc projeté sur un des quatre états de Bell. Le résultat peut être paramétré par deux bits classiques. Quelle est la probabilité qu'Alice mesure un état de Bell donné ? Quel est l'état du spin de Bob après la mesure, en fonction du résultat de la mesure d'Alice ?
4. Après mesure et donc projection de l'état $|\Phi\rangle$ sur le résultat de mesure, Alice envoie à Bob son résultat de mesure. Bob utilise alors cette information pour agir sur son spin, de sorte que dans tous les cas il se retrouve à la fin avec l'état $|\phi\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle$, ce qui était le but de l'expérience de téléportation.

   Par exemple, si Bob sait qu'Alice a mesuré l'état de Bell $|\psi_1\rangle$, il ne change rien à son spin qui est déjà dans l'état $|\phi\rangle$.

   Pour les trois autres résultats de mesure, proposer une transformation unitaire qui amène le spin de Bob dans l'état $|\phi\rangle$. On cherchera des transformations de la forme $\sigma_x^\alpha \sigma_z^\beta$.
5. Si Bob veut utiliser son spin avant qu'Alice ne fasse de mesure, peut-il faire une transformation unitaire de son spin qui l'amène dans l'état $|\phi\rangle$? Conclure sur le fait que l'expérience ne contredit pas le postulat d'Einstein, selon lequel l'échange d'information ne peut pas se faire plus rapidement que la lumière.
6. Pourquoi l'expérience ne contredit pas le théorème de non clonage ?
7. *Remarque : comment mesurer un état de Bell ?*

   L'idée est de faire une transformation unitaire amenant les états $|\psi_i\rangle$ sur les états $|\pm\pm\rangle$, qu'on sait distinguer simplement. On combine pour cela deux évolutions unitaires :

   — une porte « CNOT » (*controlled not*), qui transforme $|+\pm\rangle$ en $|+\pm\rangle$ et $|-\pm\rangle$ en $|-\mp\rangle$: on applique un NOT sur le deuxième spin si le premier est dans l'état $|-\rangle$.

   — une porte « de Hadamard » H qui n'agit que sur le premier spin. Elle s'exprime à l'aide des matrices de Pauli : $H = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x + \sigma_z)$.

   Vérifier que chacun des états de Bell est amené sur un état $|\pm\pm\rangle$ différent.

Bibliographie

— *Article fondateur* : C. H. Bennett *et al*, Phys. Rev. Lett. **70**, 1985 (1993)

— *Vérification expérimentale* : D. Bouwmeester *et al*, Nature **390**, 575 (1997).

4 Échange d'intrication - intrication d'ions

On considère le dispositif suivant :
Deux ions sont piégés à 1 m de distance l'un de l'autre. Chaque ion possède 2 niveaux fondamentaux $|g_1\rangle$ et $|g_2\rangle$ non dégénérés (donc avec des énergies différentes) et 2 excités, $|e_1\rangle$ et $|e_2\rangle$. Seules les transitions $|g_1\rangle \leftrightarrow |e_1\rangle$ et $|g_2\rangle \leftrightarrow |e_2\rangle$ sont possibles. Lorsqu'un ion est excité, il se désexcite par émission spontanée en émettant un photon de longueur d'onde λ_1 pour la transition $|e_1\rangle \to |g_1\rangle$ et un photon de longueur d'onde λ_2, plus courte que λ_1 pour la transition $|e_2\rangle \to |g_2\rangle$, pour la transition $|e_2\rangle \to |g_2\rangle$. On note l'état d'un photon $|+\rangle$ (resp. $|-\rangle$) s'il a une longueur d'onde λ_1 (resp. λ_2).

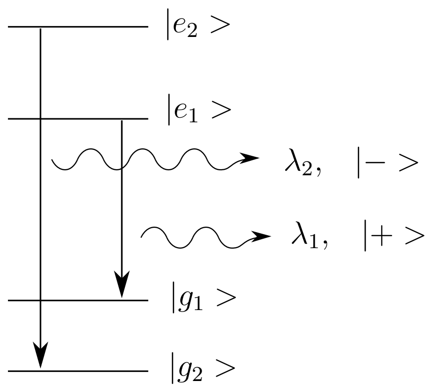

FIGURE 2 – Schéma des niveaux d'énergie et des photons émis (figure tirée de "Physique Quantique, Tome 1", par M Le Bellac).

Les photons émis par chaque ion sont ensuite collectés par deux fibres optiques et envoyés sur une lame séparatrice, qui transmet un photon avec 50 % de chance et le réfléchi avec 50 % de chance.

En sortie de chaque chemin de la lame se trouve un détecteur de photon, qui envoie un signal dès qu'un photon arrive dessus.

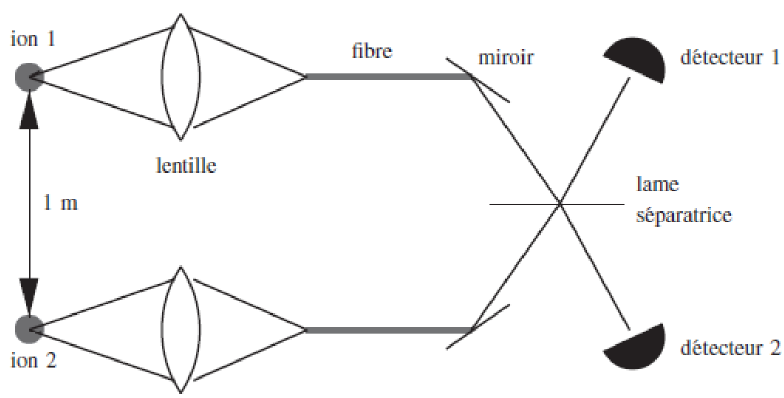

FIGURE 3 – Schéma de l'expérience (figure tirée de "Physique Quantique, Tome 1", par M Le Bellac).

4.1 Partie I : ions + photons

Chaque ion est préparé dans l'état $\frac{1}{\sqrt{2}}(|g_1\rangle + |g_2\rangle)$ puis excité avec un laser en $\frac{1}{\sqrt{2}}(|e_1\rangle + |e_2\rangle)$. Chaque ion peut se désexciter à des temps différents mais on choisit les cas où les photons sont émis (quasiment) en même temps.

1. Pour un seul ion, écrire l'état du système $\{$ion + photon$\}$ après désexcitation.

2. Écrire l'état du système global {ion 1 + photon 1 + ion 2 + photon 2}, et le réécrire comme une superposition d'états $\left|g_{1/2}\right\rangle \otimes \left|g_{1/2}\right\rangle \otimes |\pm\rangle \otimes |\pm\rangle$ où le premier ket correspond à l'ion 1, le deuxième ket à l'ion 2, le troisième ket au photon 1 et le quatrième ket au photon 2.

   Cet état est-il un état intriqué des deux sous-systèmes {ion 1 + photon 1} et {photon 2 + photon 2} ? Conclure si les photons 1 et 2 sont intriqués.
3. Réécrire cet état en terme d'état de Bell des ions :

$$\left|\Phi_{ion}^{\pm}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g_1 g_1\rangle \pm |g_2 g_2\rangle) \quad \text{et} \quad \left|\Psi_{ion}^{\pm}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g_1 g_2\rangle \pm |g_2 g_1\rangle)$$

   et des photons :

$$\left|\Phi_{ph}^{\pm}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|{+}{+}\rangle \pm |{-}{-}\rangle) \quad \text{et} \quad \left|\Psi_{ph}^{\pm}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|{+}{-}\rangle \pm |{-}{+}\rangle).$$

   Les états $\left|\Phi_{ph}^{\pm}\right\rangle$ et $\left|\Psi_{ph}^{+}\right\rangle$ sont des états symétriques lorsqu'on échange les deux photons, et l'état $\left|\Psi_{ph}^{-}\right\rangle$ est antisymétrique en l'échange des deux photons, ce qui sera utile dans la suite.

4.2 Partie II : entrée de la lame séparatrice

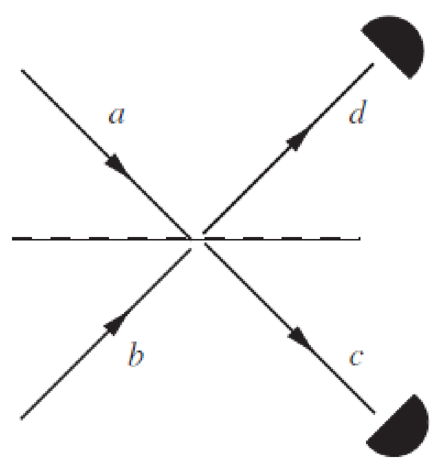

FIGURE 4 – Schéma de la lame séparatrice, avec les modes d'entrée a et b et les modes de sortie c et d (figure tirée de "Physique Quantique, Tome 1", par M Le Bellac)

Les photons collectés sont ensuite envoyés sur la lame séparatrice. Ils sont alors chacun décrits par un mode interne (leur longueur d'onde $|\pm\rangle$), ainsi qu'un mode spatial : un photon arrivant selon la direction a possède un mode spatial $|a\rangle$ et un photon arrivant selon la direction b possède un mode spatial $|b\rangle$. L'état total d'un photon est décrit alors par le produit tensoriel du mode spatial et du mode interne.

On suppose que lorsque les deux photons arrivent sur la lame à $t=0$, on peut les distinguer selon lequel arrive à $t=0^-$ (que l'on nomme photon 1) et celui qui arrive à $t=0^+$ (photon 2). Attention : le photon 1 ici n'est plus le photon 1 du système de la partie I {ion 1 + photon 1 + ion 2 + photon 2}, et de même avec le photon 2. Les photons précédents émis par les atomes, peuvent chacun arriver à $t=0^-$ ou à $t=0^+$, donc être le photon 1 ou 2.

L'état du sous-système {photon 1} ($t=0^-$) arrivant selon b, avec un mode interne $|+\rangle$ est noté $|b\rangle \otimes |+\rangle$. L'état total des deux photons où le photon 1 arrive en b avec un état interne $|+\rangle$ et le photon 2 arrive en a avec un état interne $|-\rangle$ s'écrit alors :

$$|b\rangle \otimes |a\rangle \otimes |+\rangle \otimes |-\rangle \equiv |ba\rangle \otimes |+-\rangle \in \mathcal{H}_{spat} \otimes \mathcal{H}_{int}$$

Avant d'arriver sur la lame, les deux photons arrivant ne sont pas intriqués d'après la question 3. On peut alors écrire le système total comme un état séparable des modes spatiaux des deux photons $\in \mathcal{H}_{spat}$, et des modes internes des deux photons $\in \mathcal{H}_{int}$.

4. On se concentre sur la partie spatiale ($\mathcal{H}_{spat}$). Puisque chaque photon 1 ou 2 peut arriver en a ou en b, l'état général du système peut s'écrire comme n'importe quelle superposition des deux. Écrire cette superposition des deux photons arrivant en a et b (ils ne peuvent pas arriver tous les deux en a ou en b). Quelle est la dimension de cet espace vectoriel ?
5. Trouver la base de cet espace dont les deux vecteurs sont symétriques en l'échange des deux photons $\left|\Psi^+_{spat}\right\rangle$ pour l'un et antisymétriques $\left|\Psi^-_{spat}\right\rangle$ pour l'autre.
6. Lorsqu'ils arrivent sur la lame séparatrice les deux photons ne peuvent plus être considérés comme deux système indépendants, donc l'état total $\in \mathcal{H}_{spat} \otimes \mathcal{H}_{int}$, et on doit prendre en compte les modes spatial et interne des deux photons. On verra dans le cours du deuxième semestre que les photons sont des particules de spin 1, donc des bosons (particules de spin entier). Pour un système de bosons, l'état global doit être symétrique en l'échange des particules (pour des fermions, de spin demi-entier, il doit être quant à lui antisymétrique). Pour cela, deux possibilités : soit les sous-états spatiaux et internes sont tous les deux symétriques, soit ils sont tous les deux antisymétriques. Écrire alors les états totaux $\in \mathcal{H}_{spat} \otimes \mathcal{H}_{int}$ possibles, en prenant les états de Bell écrits dans la question 3 pour la partie interne. Les deux photons sont-ils intriqués ?

4.3 Partie III : sortie de la lame séparatrice

La lame séparatrice transmet un photon avec un probabilité 50% et le réfléchit avec une probabilité 50%, en lui donnant un phase π réflexion sur un miroir métallique). L'action sur les modes spatiaux est donc :

$$|a\rangle \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|c\rangle + \mathrm{i}\,|d\rangle)$$

$$|b\rangle \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{i}\,|c\rangle + |d\rangle\,,$$

où $|c\rangle$ est l'état d'un photon dans la direction c et $|dc\rangle$ dans la direction d.

7. En déduire les états du sous-système spatial $\in \mathcal{H}_{spat}$ en sortie de la lame pour les états $|ab\rangle$ et $|ba\rangle$ en entrée. Puis les états en sortie pour les états symétriques $\left|\Psi^{+}_{spat}\right\rangle$ et anti-symétriques $\left|\Psi^{-}_{spat}\right\rangle$.
8. Quel sont les états possible du système total $\mathcal{H}_{spat} \otimes \mathcal{H}_{int}$ en sortie de la lame ?
9. En sortie de chaque direction de la lame est placée un détecteur de photon. Quel est l'état spatial du système si un seul des détecteur est déclenché ? Quel est l'état du système si les deux détecteurs sont déclenchés simultanément ?
10. On suppose que lors de la mesure, les deux détecteurs se déclenchent. Écrire le projecteur de cette mesure sur le système total $\mathcal{H}_{spat} \otimes \mathcal{H}_{int}$ en sortie de la lame. Quel est l'état du système après la mesure ?
11. Quel alors est l'état interne des photons ? Cet état est-il intriqué ?
12. Quel est alors l'état des deux ions ? A-t-on réussi à intriquer les deux ions, qui n'étaient au départ pas intriqués ?