

Mécanique quantique – L3

Pierre-François Cohadon - Tristan Villain - Qinhan Wang

TD 8 - 15/11/2024

Fonctions d'ondes, représentation $|x\rangle$ et représentation $|p\rangle$

1 Expansion libre d'un paquet d'ondes

On cherche à établir l'évolution temporelle de la fonction d'onde d'une particule libre.

Soit $|\psi_0\rangle$ l'état de la particule à $t = 0$.

1. Si on note $\psi_0(x) = \langle x|\psi_0\rangle$ et $\overline{\psi_0} = \langle p|\psi_0\rangle$, quelle relation existe-il entre $\psi_0(x)$ et $\overline{\psi_0}(p)$?
2. Donner l'expression du vecteur d'état $|\psi(t)\rangle$ en représentation impulsion.
3. En déduire que l'on a :

$$\psi(x, t) = \int dx' \mathcal{G}(x, x', t) \psi_0(x'), \quad (1)$$

$$\text{avec } \mathcal{G}(x, x', t) = \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar t}} e^{im(x-x')^2/2\hbar t}. \quad (2)$$

Quel est l'analogie optique de cette relation ?

4. On suppose la taille initiale du paquet d'ondes petite devant celle à l'instant t .
Donner dans ce cas l'expression de $\psi(x, t)$.
5. Faire le calcul exact de $\psi(x, t)$ avec un état de départ gaussien :

$$\psi_0(x') = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} e^{-\frac{x'^2}{4\sigma^2}}, \quad (3)$$

avec $\sigma \in \mathbb{R}$. Commenter.

On rappelle que pour α complexe (de partie réelle positive), on a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}. \quad (4)$$

2 Expérience d'interférences atomiques

On prépare à $t = 0$ le système de la première partie dans une superposition de deux paquets d'ondes centrés respectivement en 0 et a .

1. En utilisant les résultats de la partie précédente, donner l'expression de la fonction d'onde du système à un instant $t > 0$. On supposera toujours la taille initiale des paquets d'ondes petite devant celle à l'instant t .
2. Montrer que la distribution de probabilité présente des franges d'interférences dont on donnera le pas. Quel est l'analogie optique de cette expérience ?
3. La figure suivante est tirée d'une expérience réalisée sur des atomes de ^{87}Rb de masse $m = 1,45 \times 10^{-25}$ kg. Le temps d'expansion est de 28 ms. Donner la séparation initiale des deux paquets d'ondes.

Bibliographie :

C. Fort, P. Maddaloni, F. Minardi, M. Modugno et M. Inguscio,
Spatial interference of coherent atomic waves by manipulation of the internal quantum state, Optics Letters **26**, 1039 (2001).

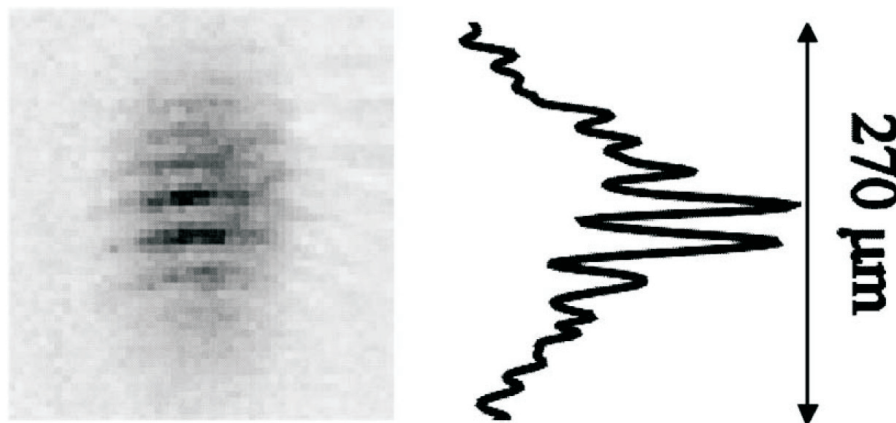


FIGURE 1 – **Expérience d'interférences atomiques.** Gauche : Vue du nuage après expansion et interférences entre les deux paquets. Droite : Profil de densité détecté le long de l'axe.