Mécanique quantique – L3 FIP

Corrigé du TD 10

Etats quantiques d'atomes de césium dans un piège harmonique

---

1 Préambule

1. A partir des données du problème (masse m, fréquence $\omega_0/2\pi$ et constante de Planck $\hbar$, on peut construire par analyse dimensionnelle deux **grandeurs caractéristiques** :

$$z_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}} \quad (1)$$

$$p_0 = \sqrt{m\omega_0\hbar}. \quad (2)$$

2. On peut montrer simplement que les états stationnaires ont la même forme en représentation $\{|z\rangle\}$ et $\{|p\rangle\}$. Les fonctions propres $\varphi_n(z)$ sont en effet solutions de l'équation :

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 z^2\right)\varphi_n(z) = E_n\,\varphi_n(z)\,, \quad (3)$$

qui peut se réécrire en termes des variables

$$Z = \frac{z}{z_0}$$

$$\varepsilon_n = \frac{E_n}{\hbar\omega_0}$$

sous la forme :

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dZ^2} + Z^2\right)\varphi_n(Z) = \varepsilon_n\,\varphi_n(Z)\,. \quad (4)$$

La transformée de Fourier de l'équation (3) donne :

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\left(-\frac{p^2}{\hbar^2}\right) + \frac{1}{2}m\omega_0^2\left(-\hbar^2\frac{d^2}{dp^2}\right)\right)\overline{\varphi}_n(p) = E_n\,\overline{\varphi}_n(p)\,, \quad (5)$$

qui peut également se réécrire :

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dP^2} + P^2\right)\overline{\varphi}_n(P) = \varepsilon_n\,\overline{\varphi}_n(P)\,, \quad (6)$$

avec :

$$P = \frac{p}{p_0}. \quad (7)$$

La comparaison des équations (4) et (6) montre que les fonctions $\varphi_n(Z)$ et $\overline{\varphi}_n(P)$ sont solutions de la même équation de Schrödinger stationnaire à 1D, équation qui n'admet (à un facteur de phase près) qu'une seule solution normée.

Les fonctions d'ondes φ et $\overline{\varphi}$ prennent donc la même forme.

2 Présentation du piège harmonique

Remarque :
On a vu dans le partiel que le couplage entre un atome à deux niveaux et un mode du champ électromagnétique (dans une cavité) décale le niveau fondamental d'une quantité :

$$\Delta E_g = -\frac{n\Omega^2}{\delta}, \tag{8}$$

où $\Omega/2\pi$ est la fréquence de Rabi du vide (liée au dipôle atomique), n le nombre de photons dans la cavité et $\delta = \omega_0 - \omega_c$ le désaccord entre la pulsation de la transition et celle du champ. Ici, le traitement est un peu différent puisqu'on a un faisceau laser, mais on retrouve bien une énergie proportionnelle à l'intensité ($\propto n$) du faisceau laser, qui dépend de z à travers la dépendance spatiale de l'intensité (voir ci-dessous), et < 0 pour $\delta > 0$ (la longueur d'onde de 1 μm étant supérieure à celle de la transition atomique).

3. Les deux faisceaux ayant la même polarisation (voir la figure 1 de l'énoncé) et étant stables en phase l'un par rapport à l'autre, ils peuvent interférer. L'intensité qui résulte de cette interférence à deux ondes (supposées planes pour l'instant) est de la forme :

$$\begin{aligned} I(\mathbf{r}) &= I_0\ [1+\cos\left((\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\cdot\mathbf{r}\right)] && (9)\\ I(z) &= I_0\ [1+\cos\left(2k\ \sin\alpha\ z\right)]\,. && (10)\end{aligned}$$

   L'intensité et l'énergie potentielle sont donc modulées sinusoïdalement avec une période spatiale a telle que $2\pi/a = 2k\ \sin\alpha \Leftrightarrow a = \lambda/2\sin\alpha = 626$ nm.

4. Première correction simple au modèle, l'enveloppe est due à la **taille transverse finie** du faisceau laser (bien représentée sur la figure) : l'intensité décroît au fur et à mesure qu'on s'écarte de l'axe du faisceau laser, avec une taille typique (w_0, pour le *waist*) de l'enveloppe de l'ordre de 100 microns. Ce waist est minimal au point d'intersection grâce à la **focalisation** du faisceau (également représentée sur la figure).

5. La composante affine est due à l'énergie potentielle de pesanteur mgz : on trouve une variation de l'énergie de 100 μK sur 600 μm, soit une pente de $1{,}38\times10^{-23}\times10^{-4}/6\times10^{-4} \simeq 0{,}25\times10^{-23}$ N, ce qui correspond bien à une masse de $0{,}25\times10^{-23}/(9{,}81\times1{,}66\times10^{-27}) \simeq 140$ ua.

6. Dans le contexte des **atomes froids**, il est assez logique de donner l'énergie en échelle de température. On a :

$$\frac{U_0}{k_B} \simeq \frac{2{,}8\times10^{-27}}{1{,}38\times10^{-23}} \simeq 200\,\mu\text{K}. \tag{11}$$

7. Pour assimiler les puits à des puits harmoniques, il faut que sur l'étendue de la fonction d'onde, les corrections anharmoniques au potentiel soient également négligeables. Il faut donc commencer par évaluer la taille caractéristique Δz_0 de la fonction d'onde.

8. Si on fait un développement limité de $U(z)$ autour d'un de ses minima $z_k = (k + 1/2)\,a$ (avec k entier relatif), on trouve (en se limitant au second ordre) :

$$U_2 \simeq \frac{\pi^2 U_0}{a^2}\,(z - z_k)^2\,. \tag{12}$$

En identifiant avec l'énergie potentielle d'un oscillateur harmonique de masse m et de pulsation ω_0,

$$U_{\text{harm}} = \frac{1}{2}\,m\omega_0^2\,(z - z_k)^2\,, \tag{13}$$

on obtient une pulsation :

$$\omega_0 = 2\pi\sqrt{\frac{U_0}{2ma^2}} \simeq 2\pi \times 127 \text{ kHz}. \tag{14}$$

L'échelle d'énergie de l'oscillateur $\hbar\omega_0$ est alors de l'ordre de 10^{-28} J, soit 6 μK.

9. On peut calculer la dispersion en position Δz_0 de plusieurs manières, par exemple :
— en remarquant que les deux termes d'énergie cinétique et potentielle sont égaux (par symétrie entre les opérateurs $\hat{z}$ et $\hat{p}$), et en attribuant donc à chaque terme la moitié de l'énergie $\hbar\omega_0\left(n + \frac{1}{2}\right)$ d'un état $|n\rangle$;
— en écrivant $\hat{z}$ en fonction des opérateurs $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$...
Pour cette dernière approche, il faut ensuite développer les carrés et réordonner les termes. C'est un calcul classique qu'il faut absolument savoir faire.
Pour la dispersion Δz_0 par exemple :

$$\begin{aligned}
\Delta z_0^2 &= \langle n=0|\hat{z}^2|n=0\rangle - \left(\langle n=0|\hat{z}|n=0\rangle\right)^2 && (15)\\
\Delta z_0^2 &= \langle 0|\hat{z}^2|0\rangle \text{ car } |n=0\rangle \text{ est pair} && (16)\\
\Delta z_0^2 &= \frac{\hbar}{2m\omega_0}\langle 0|(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)^2|0\rangle && (17)\\
\Delta z_0^2 &= \frac{\hbar}{2m\omega_0}\langle 0|\hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}|0\rangle. && (18)
\end{aligned}$$

On a l'habitude de réordonner tous les termes dans l'**ordre normal**, c'est-à-dire avec les opérateurs $\hat{a}$ à droite (pour agir sur les kets) et $\hat{a}^\dagger$ à gauche (pour agir sur les bras). Cela se justifie notamment quand on calcule des éléments de matrice entre différents états cohérents (cf. le cours ou le prochain TD). En utilisant la relation de commutation $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$, on trouve facilement :

$$\begin{aligned}
\Delta z_0^2 &= \frac{\hbar}{2m\omega_0}\langle 0|\hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2} + (\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1) + \hat{a}^\dagger\hat{a}|0\rangle && (19)\\
\Delta z_0^2 &= \frac{\hbar}{2m\omega_0}\langle 0|\hat{a}^2 + \hat{a}^{\dagger 2} + 2\hat{N} + 1|0\rangle, && (20)
\end{aligned}$$

où $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ est l'opérateur **nombre de quanta**. En remarquant que les deux premiers termes s'annulent dans un état $|n\rangle$, on trouve :

$$\Delta z_0^2 = \langle 0|\hat{z}^2|0\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega_0}, \tag{21}$$

et plus généralement :

$$\Delta z_n^2 = \langle n|\hat{z}^2|n\rangle = \frac{(2n+1)\hbar}{2m\omega_0}. \tag{22}$$

On peut vérifier *classiquement* (ce qui sera justifié plus loin dans le cours) que le terme suivant du développement du potentiel est négligeable, les termes U_2 et U_4 du développement limité étant dans un rapport :

$$\frac{U_4}{U_2} \simeq n\left(\frac{\Delta z_0}{a}\right)^2 \tag{23}$$
$$\frac{U_4}{U_2} \ll 1 \text{ pour } n \leq 10. \tag{24}$$

L'application numérique donne :

$$\Delta z_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}} = 18 \text{ nm}. \tag{25}$$

On obtient immédiatement la dispersion en impulsion en écrivant que le fondamental de l'oscillateur harmonique est un état minimal vis-à-vis de l'inégalité de Heisenberg :

$$\Delta p_0 = \frac{\hbar}{2\Delta z_0} = 2{,}9 \times 10^{-27} \text{ kg.m.s}^{-1}, \tag{26}$$

soit une dispersion macroscopique (!) sur la vitesse :

$$\Delta v_0 = \frac{\Delta p_0}{m} = 13{,}4 \text{ mm.s}^{-1}. \tag{27}$$

10. Pour peupler uniquement l'état fondamental, la température doit vérifier :

$$k_B T \ll \hbar\omega_0 \Leftrightarrow T \ll T_C \simeq 6\ \mu\text{K}. \tag{28}$$

Il est donc nécessaire de refroidir encore les atomes à partir du piège magnéto-optique à 13 μK. Mais comme les différents puits ont une hauteur de 200 μK, les atomes y restent piégés et peuvent être refroidis in situ, une fois l'ensemble des puits chargés.

Remarque :
Les différents puits sont **couplés par effet tunnel**. Pour estimer la probabilité P de passage d'un puits à l'autre, on peut représenter le potentiel harmonique par un potentiel en créneau, de période spatiale a et d'amplitude U_0.

La probabilité de passage pour la barrière carrée (de largeur $a/2$) vaut en effet :

$$P \simeq \frac{16E\,(U_0 - E)}{U_0^2} e^{-\rho a}, \tag{29}$$

avec :

$$\rho = \sqrt{\frac{2m\,(U_0 - E)}{\hbar^2}}. \tag{30}$$

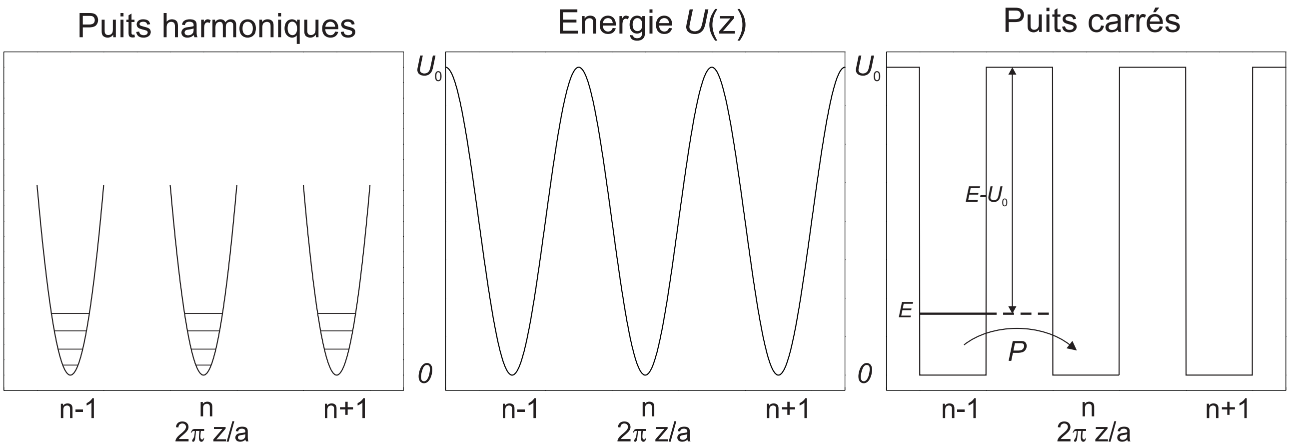

FIGURE 1 – **Potentiel $\mathbf{U_0(z)}$ et formes approchées pour le traiter**. Gauche : puits harmoniques équivalents, utilisés pour calculer les états stationnaires. Centre : potentiel réel $U_0(z)$. Droite : puits carrés équivalents, utilisés pour évaluer le couplage entre les puits.

Même pour $n = 10$ ($E \simeq 10^{-27}$ J), on trouve :

$$1/\rho = 3{,}6 \text{ nm et } P \simeq 10^{-78}. \tag{31}$$

Le couplage entre les différents puits est donc parfaitement négligeable. Les différents puits de potentiel réalisent donc des **puits harmoniques indépendants**.

On notera que **la forme gaussienne des faisceaux (avec l'intensité maximale au centre) entraîne une dispersion des fréquences** ω_0 avec la position du puits. Avec des faisceaux de waist 120 μm et des atomes initialement répartis selon une gaussienne de largeur 56 μm, on trouve une dispersion relative :

$$\Delta\omega_0/\omega_0 \simeq 8~\%. \tag{32}$$

3 Visualisation des fonctions d'onde en impulsion

11. En présence du (ou plus exactement des) potentiel(s) harmonique(s), la distribution de position des atomes reflète :
    - **la dispersion quantique** ($\simeq \sqrt{2n+1}\,\Delta z_0$) de chaque atome autour du minimum de son puits de potentiel ;
    - **la dispersion classique** ($\simeq$ 56 μm) due à la dispersion des centres des différents puits occupés, liée à la taille initiale du nuage d'atomes froids.

    Ici, la dispersion classique est nettement prédominante : imager la distribution de position à $t = 0$ donne donc uniquement accès à la taille du nuage d'atomes froids. De plus, à cause de la limite de diffraction, il est impossible d'accéder directement à la forme de la fonction d'onde.
12. Après la coupure du piège, les atomes sont libres et l'hamiltonien se résume donc au terme d'énergie cinétique. On retrouve le même problème d'**expansion du paquet d'ondes** (qui, d'ailleurs, est aussi gaussien ici pour φ_0) qu'au TD 7.

13. On a déjà vu qu'aux temps longs :

$$\psi(z,t) = \sqrt{\frac{m}{it}} \mathrm{e}^{\frac{imz^2}{2\hbar t}} \overline{\psi}_0 \left(\frac{mz}{t}\right). \tag{33}$$

La distribution en position aux temps longs est proportionnelle à la distribution en impulsion initiale. On a déjà vu qu'après un temps τ, la dispersion en position $\Delta z(\tau)$ des atomes (celle qui est mesurée par le système d'imagerie) vérifie :

$$\Delta z(\tau)^2 = \Delta z(0)^2 + \left(\frac{\Delta p(0)}{m}\right)^2 \tau^2, \tag{34}$$

La mesure de la densité du nuage atomique permet donc a priori de remonter à celle-ci, à condition que la dispersion de position (quantique) initiale soit négligeable devant l'élargissement lié à la dispersion initiale des vitesses :

$$\Delta z(0) \ll \frac{\Delta p(0)}{m}\tau. \tag{35}$$

Pour l'état quantique fondamental $|n=0\rangle$, ces relations s'écrivent :

$$\Delta z(\tau)^2 = \Delta z_0^2 \left(1 + \omega_0^2 \tau^2\right), \tag{36}$$

et la condition (35) s'écrit simplement :

$$\omega_0 \tau \gg 1. \tag{37}$$

Si les atomes sont intialement préparés dans un état $|n\rangle$ autre que le fondamental, on peut qualitativement prédire que **la distribution de position au temps τ présentera des maxima reliés aux maxima de la distribution en impulsion initiale**, soit la distribution de l'éta $|n\rangle$.

14. La gaussienne ajustée au résultat expérimental a une largeur d'environ 300 μm à $1/e$. La distribution de position au temps τ étant de la forme $\exp\{-\frac{z^2}{2\Delta z(\tau)^2}\}$, cela nous donne :

$$2\sqrt{2}\Delta z(\tau) \simeq 300\ \mu\text{m}. \tag{38}$$

La condition $\omega_0\tau \gg 1$ est ici largement remplie : la largeur initiale en position d'origine quantique est donc négligeable.

On peut faire une première estimation de Δv_0 :

$$\Delta v_0 = \Delta z(\tau)/\tau_{\text{vol}} = \frac{300 \times 10^{-6}}{2\sqrt{2} \times 6 \times 10^{-3}} \simeq 18\,\text{mm.s}^{-1}, \tag{39}$$

à comparer aux 13 mm.s^{-1} attendus (voir l'éq. 27) : la largeur initiale du nuage semble donc augmenter sensiblement le résultat.

15. On a en effet également à tenir compte du moyennage lié à la distribution initiale des atomes dans les différents pièges. Si on note Δ_{nuage} la taille du nuage d'atomes froids initial, pour pouvoir interpréter simplement les résultats, on a intérêt à avoir :

$$\begin{aligned}\Delta z_0^2\left(1+\omega_0^2\tau^2\right) &\gg \Delta_{\text{nuage}}^2\\ \Leftrightarrow \omega_0\tau &\gg \Delta_{\text{nuage}}/\Delta z_0.\end{aligned}$$

Numériquement, on trouve $\tau \gg 4$ ms pour l'état fondamental, et une condition moins restrictive pour les états excités, dont les dispersions quantiques croissent comme $\sqrt{n}$. Ici, $\tau = 6$ ms est à peine plus grand que la borne inférieure de 4 ms trouvée précédemment : **il faut donc tenir compte de la largeur initiale du nuage d'atomes froids**.

Si on note $f_1(z-z_k)$ la distribution (normée) en position au temps τ liée à la dispersion du paquet d'ondes (et centrée sur la position z_k du $k^{\text{ième}}$ puits) et $f_2(z_k)$ la distribution (normée) initiale des atomes sur les différents puits, **la distribution de position observée** f s'écrit :

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z-z_k)f_2(z_k)\, dz_k. \tag{40}$$

Cette relation s'interprète simplement en disant que $f(z)$ correspond à la somme des contributions des différents puits ($\int_{-\infty}^{\infty} dz_k ...$), égales au produit du poids du puits ($f_2(z_k)$) par sa contribution propre ($f_1(z-z_k)$) à une distance $(z-z_k)$ de son centre.
Si f_1 et f_2 sont deux gaussiennes de largeurs respectives Δ_1 et Δ_2, leur *produit de convolution* est une gaussienne de largeur $\sqrt{\Delta_1^2+\Delta_2^2}$.
En effet, si

$$f(z) \propto \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-(z-z_k)^2/2\Delta_1^2\right\}\exp\left\{-z_k^2/2\Delta_2^2\right\}\, dz_k, \tag{41}$$

le terme dans l'exponentielle se met sous la forme :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left((z-z_k)^2/\Delta_1^2+z_k^2/\Delta_2^2\right)\\ &=\frac{1}{2}z_k^2\left(1/\Delta_1^2+1/\Delta_2^2\right)-2zz_k/\Delta_1^2+z^2/\Delta_1^2\\ &=\frac{1}{2}\left(1/\Delta_1^2+1/\Delta_2^2\right)\left(z_k^2-\frac{2zz_k}{1+(\Delta_1/\Delta_2)^2}+\frac{z^2}{1+(\Delta_1/\Delta_2)^2}\right)\\ &=\frac{1}{2}\left(1/\Delta_1^2+1/\Delta_2^2\right)\left(\left(z_k-\frac{z}{1+(\Delta_1/\Delta_2)^2}\right)^2-\frac{z^2}{\left(1+(\Delta_1/\Delta_2)^2\right)^2}+\frac{z^2}{1+(\Delta_1/\Delta_2)^2}\right).\end{aligned}$$

L'intégration sur z_k fait disparaître la dépendance en z du premier terme (par changement de variable). Il ne reste qu'une gaussienne avec un terme $1/2\Delta^2$ en facteur de $-z^2$ dans l'exponentielle, avec :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\Delta^2} &= \frac{1}{2}\left(1/\Delta_1^2 + 1/\Delta_2^2\right)\left(\frac{1}{\left(1+(\Delta_1/\Delta_2)^2\right)^2} - \frac{1}{1+(\Delta_1/\Delta_2)^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1/\Delta_1^2 + 1/\Delta_2^2\right)\left(\frac{1-\left(1+(\Delta_1/\Delta_2)^2\right)}{\left(1+(\Delta_1/\Delta_2)^2\right)^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\Delta_1^2+\Delta_2^2}.
\end{aligned}$$

On peut également retrouver plus rapidement ce résultat en remarquant que la transformée de Fourier d'un produit de convolution est le produit des transformées de Fourier, et que le produit de deux gaussiennes est une gaussienne...

En tenant compte de la distribution initiale de 56 μm de large, on déduit une dispersion quantique (corrigée des effets de la taille initiale du nuage) des vitesses Δv :

$$\Delta v = \frac{1}{\tau}\sqrt{\Delta z(\tau)^2 - \Delta_{\text{nuage}}^2} \simeq 15 \text{ mm.s}^{-1}, \tag{42}$$

en meilleur (et même bon !) accord avec la valeur théorique.

16. **On attend une distribution de position** au temps τ **qui reflète la distribution d'impulsion de l'état** $|n=1\rangle$. La distribution observée présente bien la structure symétrique avec un double pic attendue, la distribution ne s'annulant pas en $z=0$ à cause de la largeur initiale du nuage. La distribution de vitesses est de la forme :

$$P(v) \propto v^2 e^{-v^2/2\Delta v_0^2}, \tag{43}$$

et elle est maximale pour $v_\pm = \pm\sqrt{2}\Delta v_0$. Expérimentalement, on trouve des maxima à une distance d'environ 200 μm, ce qui pour un temps de vol de 10 ms conduit à :

$$v_\pm = \pm 20 \text{ mm.s}^{-1}, \tag{44}$$

en bon accord avec la valeur attendue (de l'ordre de 19 mm.s^{-1}).

4 Réalisation d'un superposition cohérente de deux états

17. Chacun des états $|0\rangle$ et $|1\rangle$ évolue à sa fréquence propre. Par linéarité de l'équation de Schrödinger, on obtient alors :

$$\Psi(x,t=0) \longrightarrow \Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_0(z)\mathrm{e}^{-i\omega_0 t/2} + \varphi_1(z)\mathrm{e}^{-3i\omega_0 t/2}\right) \tag{45}$$

$$\Psi(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{-i\omega_0 t/2}}{\sqrt{2}}\left(\varphi_0(z) + \varphi_1(z)\mathrm{e}^{-i\omega_0 t}\right), \tag{46}$$

avec $\omega_0 = (E_1 - E_0)/\hbar$ la fréquence de Bohr associée aux états $|\varphi_0\rangle$ et $\varphi_1\rangle$.

18. Le carré de la fonction d'onde totale s'exprime simplement :

$$|\Psi(z,t)|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_0 + \varphi_1 \mathrm{e}^{-i\omega_0 t}\right)\right|^2 \tag{47}$$

$$|\Psi(z,t)|^2 = \frac{1}{2}\left(|\varphi_0(z)|^2 + |\varphi_1(z)|^2 + 2\cos\omega_0 t\, \varphi_0(z)\varphi_1(z)\right). \tag{48}$$

Le **module carré de la fonction d'onde totale** (cf. la figure 2) est donc la somme de $|\varphi_0|^2$ (une bosse centrée en $z=0$), de $|\varphi_1(z)|^2$ (deux bosses plus étroites, de part et d'autre de $z=0$) et d'une fonction avec un creux et une bosse, modulée dans le temps. A $t=0$, la somme de ces 3 fonctions, en phase, crée une bosse à droite. A $t=T/4$, le cosinus s'annule et on obtient une fonction paire (un dromadaire mal fichu). A $t=T/2$ (soit $\Omega t=\pi$), la phase du terme croisé est inversée et la bosse se retrouve à gauche.

A noter que la fonction d'onde reste évidemment normée tout le temps, puisque le terme dépendant du temps a une valeur moyenne spatiale nulle :

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz\, \varphi_0(z)\varphi_1(z) = 0. \tag{49}$$

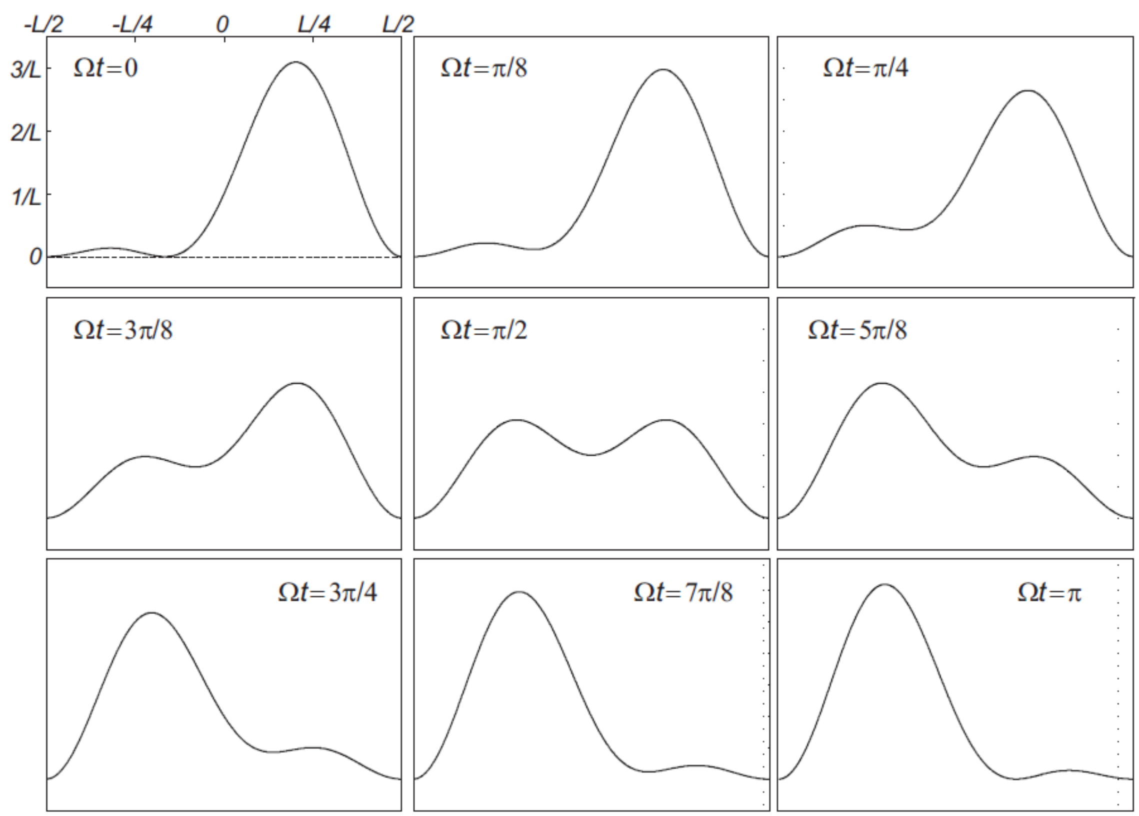

FIGURE 2 – **Évolution temporelle du module carré de la fonction d'onde** $|\Psi(z,t)|^2$ pour une superposition symétrique des deux premiers états propres d'un puits carré infini, correspondant à l'éq. (48). Le résultat est tout à fait similaire à ce que l'on trouve ici pour un puits harmonique, si ce n'est que les fonctions décroissent doucement à l'infini plutôt que de s'annuler abruptement aux bords du puits.

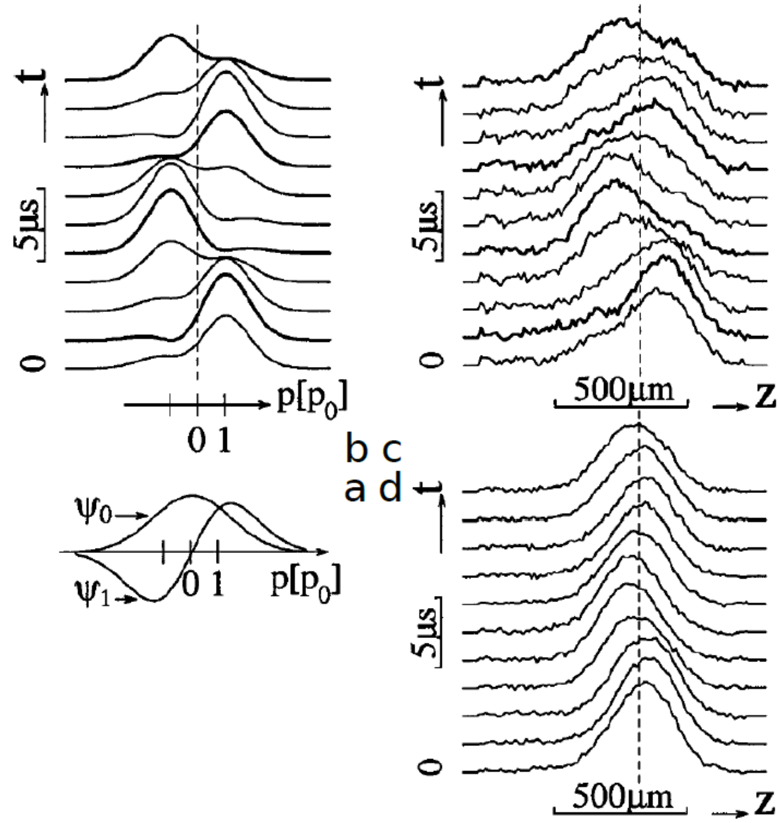

FIGURE 3 – **Évolutions avec et sans déformation d'une combinaison linéaire de deux états propres** d'un oscillateur harmonique à 1 D. a : Fonctions d'ondes des deux premiers niveaux. b : Evolution temporelle attendue du module carré de la fonction d'onde $|\Psi(z,t)|^2$ pour une superposition symétrique : $\Psi(z,t=0) = \frac{1}{\sqrt{2}} = (\varphi_0(z) + \varphi_1(z))$. c : Courbe expérimentale correspondante. d : Courbe expérimentale pour un état cohérent $|\alpha = 0{,}28\rangle$ (voir le TD 10). Figure adaptée de la figure 5 de I. Bouchoule *et al.*, Phys. Rev. Lett. **83**, 4027 (1999).

On peut aussi caractériser l'oscillation en calculant la position moyenne $\langle\hat{z}\rangle(t)$:

$$\langle\hat{z}\rangle(t) = \langle\Psi(t)\,|\hat{z}|\,\Psi(t)\rangle \tag{50}$$

$$\langle\hat{z}\rangle(t) = \left\langle \frac{\mathrm{e}^{+i\omega_0 t/2}}{\sqrt{2}}\left(\varphi_0 + \varphi_1\mathrm{e}^{+i\omega_0 t}\right)|\hat{z}|\,\frac{\mathrm{e}^{-i\omega_0 t/2}}{\sqrt{2}}\left(\varphi_0 + \varphi_1\mathrm{e}^{-i\omega_0 t}\right)\right\rangle. \tag{51}$$

Sans surprise, la phase globale se simplifie et la seule évolution se fait à la fréquence de Bohr $\omega_0/2\pi$ du système. On obtient (en supposant les fonctions d'onde φ_0 et φ_1 réelles) :

$$\langle\hat{z}\rangle(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dz\,\left(\Psi_1 + \Psi_2\mathrm{e}^{+i\Omega t}\right) z\left(\Psi_1 + \Psi_2\mathrm{e}^{-i\Omega t}\right) \tag{52}$$

$$\langle\hat{z}\rangle(t) = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} dz\,z|\varphi_0|^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} dz\,z|\varphi_1|^2 + 2\cos\omega_0 t\int_{-\infty}^{+\infty} dz\,z\varphi_0\varphi_1\right). \tag{53}$$

Les deux premiers termes sont nuls puisqu'on intègre une fonction impaire sur un intervalle centré sur 0. Le dernier terme est par contre non nul puisque φ_0 et φ_1 sont respectivement paire et impaire et on trouve bien un terme oscillant à la pulsation ω_0 :

$$\langle \hat{z} \rangle(t) = 2\left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)\left(\frac{4}{\pi}\right)^{1/4}\left(\int_{-\infty}^{\infty} dz\, z^2 \mathrm{e}^{-\frac{m\omega_0 z^2}{\hbar}}\right)\cos\omega_0 t \tag{54}$$

$$\langle \hat{z} \rangle(t) = \frac{4}{\pi}(4\pi)^{1/4}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}\cos\omega_0 t, \tag{55}$$

l'intégrale étant la même que celle utilisée pour calculer $\Delta\hat{z}^2$ dans l'état $|0\rangle$ (sans garantie sur le préfacteur numérique). A noter que les calculs (intéressants pour vous) dans le cas d'un puits carré infini sont détaillés dans le complément A_{III} du Cohen-Tannoudji.

5 Réalisation d'un état comprimé

20. Une fois le piège coupé, les atomes sont libres.
Les points d'impulsion $\pm p_0$ vont se déplacer de $\pm p_0\tau_1/m$ **: la distribution, initialement circulaire, va se déformer et devenir elliptique**.
Le point $(0, 1)$ va ainsi se déplacer en $(p_0\tau_1/z_0, 1) = (\omega_z\tau_1, 1)$ et le grand axe de l'ellipse aura une longueur $q_1 = \sqrt{1 + \omega_z^2\tau_1^2} \simeq 4$.
On **admet** que la largeur q_2 du petit axe est telle que $q_1 q_2 = 1$. Cela signifie que l'aire de l'ellipse est conservée par l'évolution unitaire (théorème de Liouville). L'état initial présente des fluctuations isotropes dans toutes les "directions" de l'espace des phases, et on admet que l'aire du cercle est minimale. Au cours de l'évolution, les fluctuations ne sont plus isotropes, mais restent minimales au sens défini précédemment. En revanche, si on se concentre uniquement sur les directions z et p, on remarque que les fluctuations en p sont constantes, mais que Δz croît, conformément aux résultats déjà vus en TD.
L'état ne reste donc pas minimal vis-à-vis des inégalités d'Heisenberg.

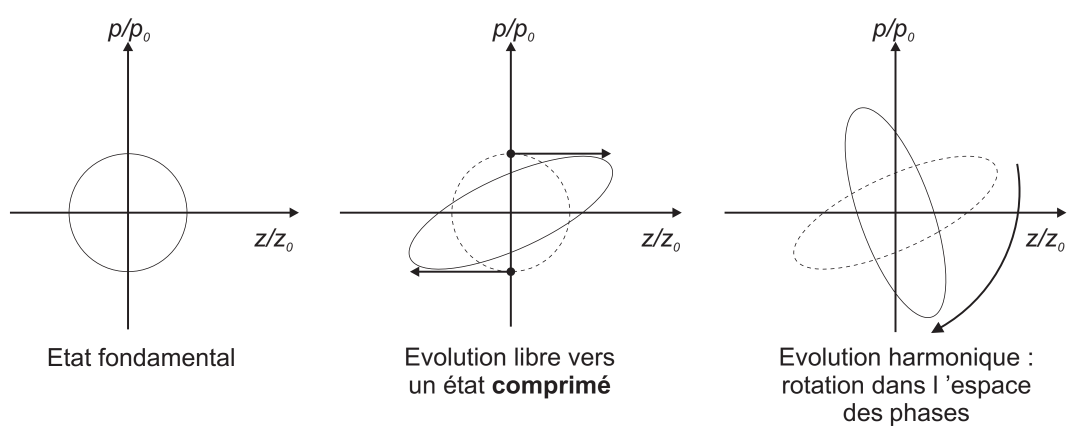

FIGURE 4 – **Evolution temporelle de la distribution dans l'espace des phases**. Partant de l'état fondamental, la distribution se déforme lors de la phase d'évolution libre, puis tourne à la pulsation ω_0 quand on rétablit les faisceaux de piégeage.

21. L'état est donc **comprimé** en ce sens qu'il présente des directions privilégiées dans l'espace des phases. Au temps τ_1, quand on rebranche le piège, c'est une combinaison linéaire de z et de p qui est comprimée.

    Une fois le piège rebranché, la distribution reprend son évolution harmonique et tourne à ω_z : on va ainsi observer en τ_2 une alternance de minima ($\simeq$ 0,25, quand la distribution est alignée selon z) et de maxima ($\simeq 4$, quand elle est alignée selon p).

    La figure 4 résume l'évolution temporelle pendant ces deux phases.

22. Pour un temps τ_2 quelconque, on observe $p_{\mathrm{rms}} = \sqrt{q_1^2 \cos^2\theta + q_2^2 \sin^2\theta}$, où θ est l'angle (qui tourne à ω_z dans le sens des aiguilles d'une montre) entre le grand axe de l'ellipse et l'axe des p. La figure 21 présente l'évolution attendue, **à la fréquence $2\omega_0$ puisqu'un demi-tour de l'ellipse suffit à redonner la même distribution**.

23. **L'inégalité de Heisenberg ne contraint que le produit** $\Delta\hat{z}\Delta\hat{p} \geq \frac{\hbar}{2}$.
    Elle est, elle, toujours vérifiée, même quand $\Delta\hat{p} < p_0$.

24. L'effet principal à prendre en compte est **la dispersion des fréquences d'oscillation**. Cette superposition d'oscillations à différentes fréquences (avec $\Delta\omega_0/\omega_0 \simeq 8\%$) conduit (comme dans de nombreuses expériences de physique : interférences avec une source polychromatique par exemple) à une diminution drastique du contraste après quelques oscillations.

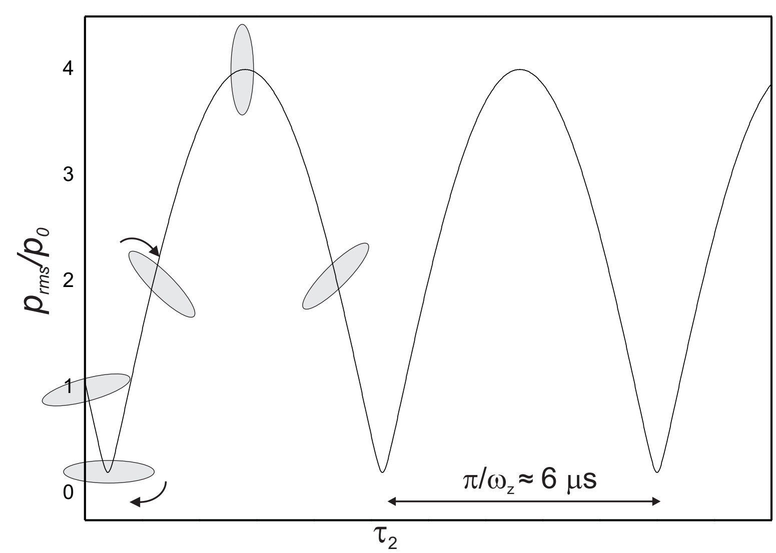

FIGURE 5 – **Evolution temporelle de la largeur en impulsion attendue**, avec $q_1 = 1/q_2 = 4$. La courbe oscille à la pulsation $2\omega_0$. Le maximum est atteint pour une distribution alignée selon p, le minimum pour une distribution alignée selon z.