

Introduction to quantum mechanics I

Tristan Villain – Pierre-François Cohadon – Qinhan Wang

Séance de tutorat du 2 octobre 2024

TD de tutorat 2 : Opérateurs et exercices du cours

1 Espace de Hilbert - Opérateurs

Soit \mathcal{H} un \mathbb{C} -espace vectoriel dont on note $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit hermitien. On rappelle que $\langle \varphi | \psi \rangle = \overline{\langle \psi | \varphi \rangle}$

Soit \hat{A} un endomorphisme de \mathcal{H} . On définit \hat{A}^\dagger tel que :

$$\langle \psi | \hat{A}^\dagger | \varphi \rangle = \overline{\langle \varphi | \hat{A} | \psi \rangle}$$

1. Montrer que :

(a) si $\lambda \in \mathbb{C}$, $(\lambda \hat{A})^\dagger = \lambda^* \hat{A}^\dagger$;

(b) $(\hat{A} + \hat{B})^\dagger = \hat{A}^\dagger + \hat{B}^\dagger$;

(c) $(\hat{A} \circ \hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger \circ \hat{A}^\dagger$.

2. Une application \hat{A} est dite hermitienne ssi $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$. Montrer que les éléments diagonaux et les valeurs propres d'une application hermitienne sont réelles.

3. Une application \hat{U} est dite unitaire ssi $\hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1}$. Montrer que les valeurs propres d'une application unitaire sont des nombres complexes de module 1.

4. Si \hat{A} est hermitienne, montrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\hat{U} = e^{it\hat{A}}$ est unitaire.

2 Espace de dimension finie

1. On se place dans l'espace $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$. Montrer que le polynôme caractéristique d'une matrice A s'écrit :

$$\chi(\lambda) = \det(A - \lambda \text{Id}) = \lambda^2 - \text{Tr}(A)\lambda + \det(A).$$

2. On note \mathbf{u} le vecteur unitaire repéré par les coordonnées polaires (θ, ϕ) (θ étant l'angle de \mathbf{u} avec (Oz)) et on considère $\sigma_{\mathbf{u}} = \sigma_x u_x + \sigma_y u_y + \sigma_z u_z$. Donner l'expression de $\sigma_{\mathbf{u}}$ dans la base où σ_z est diagonale. Calculer les vecteurs propres et les valeurs propres associées. On donne l'expression des matrices de Pauli :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3 Quelques propriétés des fonctions d'opérateurs

Soit \hat{A} une observable, dont on note λ_α les valeurs propres (qu'on peut supposer non-dégénérées : $\alpha \neq \beta \Rightarrow \lambda_\alpha \neq \lambda_\beta$) et $|\psi_\alpha\rangle$ les états propres correspondants.

Soit f une fonction du plan complexe dans lui-même. On définit l'opérateur $f(\hat{A})$ par son action sur les états propres :

$$f(\hat{A})|\psi_\alpha\rangle = f(\lambda_\alpha)|\psi_\alpha\rangle$$

1. Montrer que :

$$f(\hat{A}) = \sum_{\alpha} f(\lambda_\alpha) \hat{P}_\alpha,$$

où $\hat{P}_\alpha = |\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha|$ est le projecteur sur le sous-espace propre associé à λ_α .

2. À quelle condition $f(\hat{A})$ est-elle une observable ?
3. Montrer que :

$$\hat{P}_\alpha = \prod_{\beta \neq \alpha} \frac{\hat{A} - \lambda_\beta}{\lambda_\alpha - \lambda_\beta}.$$

On suppose maintenant que f est développable en série entière. On a alors naturellement :

$$f(\hat{A}) = \sum_n a_n \hat{A}^n.$$

4. *Changement de base*

Soit $\hat{\Pi}$ un opérateur (unitaire) de changement de base.

Montrer que $\hat{\Pi}^\dagger f(\hat{A}) \hat{\Pi} = f(\hat{\Pi}^\dagger \hat{A} \hat{\Pi})$.

5. Soit \hat{R} un opérateur représenté dans une certaine base par la matrice :

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Trouver les valeurs propres de \hat{R} .

En déduire la matrice de $f(\hat{R}) = \exp(i\theta\hat{R})$ dans la base de départ.

Cet opérateur est-il une observable ?

6. Montrer que $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]$.
7. Soient \hat{A} et \hat{B} deux observables qui commutent avec $[\hat{A}, \hat{B}]$.
Montrer que $[\hat{A}, f(\hat{B})] = [\hat{A}, \hat{B}]f'(\hat{B})$.

4 Inégalité de Heisenberg

1. Que dire de deux observables commutant entre elles ?

2. Soient deux observables \hat{A} et \hat{B} et un système dans un état $|\psi\rangle$ *quelconque*.

Montrer que :

$$\Delta\hat{A} \cdot \Delta\hat{B} \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|.$$

Indication :

On pourra considérer l'opérateur $\hat{C}(\lambda) = \delta\hat{A} + i\lambda\delta\hat{B}$ où λ est un réel quelconque, $\delta\hat{A} = \hat{A} - \langle\hat{A}\rangle$ et $\delta\hat{B} = \hat{B} - \langle\hat{B}\rangle$, et calculer la norme de $\hat{C}(\lambda)|\psi\rangle$.

5 Éléments de matrice

Soit $|\psi\rangle$ un vecteur de \mathcal{H} et \hat{A} un opérateur sur \mathcal{H} .

Soit $(|\psi\rangle)_i$ une base de \mathcal{H} . \hat{A} est représenté matriciellement dans la base $(|\psi\rangle)_i$ par $(A_{ij})_{i,j}$.

Montrer que l'élément de matrice $A_{ij} = \langle i|\hat{A}|j\rangle$

6 Opérateur de saut

Soit un espace de Hilbert \mathcal{H} de dimension 2, et l'opérateur $\hat{A} = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$.

1. Montrer que $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$.
2. Déterminer ses valeurs propres et vecteurs propres, et montrer qu'ils sont orthogonaux.

Soit un système décrit par le Hamiltonien de saut $\hat{H} = -\hat{A}$.

3. Décrire l'évolution temporelle du système pour un état initialement dans un des états propres du Hamiltonien. Puis faire de même pour un système initialement dans $|0\rangle$.