

Mécanique quantique – L3

Pierre-François Cohadon - Tristan Villain - Qinhan Wang

TD 5 - 18/10/2024

Oscillations de Rabi quantiques

On s'intéresse dans tout le problème à un système constitué d'un atome à deux niveaux (état fondamental f et état excité e , séparés par une énergie $\hbar\omega_0$) et d'un mode du champ électromagnétique (à la fréquence $\omega_0/2\pi$). Les états propres de l'hamiltonien \hat{H}_0 sont de la forme $|i, n\rangle$ où $i \in \{f, e\}$ et $n \in \mathbb{N}$, avec les énergies propres :

$$\hat{H}_0|f, n\rangle = \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_0 - \frac{\hbar\omega_0}{2} \right) |f, n\rangle \quad (1)$$

$$\hat{H}_0|e, n\rangle = \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_0 + \frac{\hbar\omega_0}{2} \right) |e, n\rangle. \quad (2)$$

n est le **nombre de photons** dans le mode.

L'atome et le champ sont couplés (quand l'atome est dans la cavité) par un hamiltonien \hat{H}_c , dont les seuls éléments de matrice non-nuls sont :

$$\langle f, n+1 | \hat{H}_c | e, n \rangle = \langle e, n | \hat{H}_c | f, n+1 \rangle = \frac{\hbar\Omega_0}{2} \sqrt{n+1}, \quad (3)$$

avec $\Omega_0 \ll \omega_0$.

1 Etats propres du système

1. Montrer qu'à l'exception du niveau fondamental, tous les niveaux d'énergie de \hat{H}_0 sont doublement dégénérés. Donner explicitement l'expression des états associés au premier niveau excité, puis au $n^{\text{ème}}$ niveau excité.
2. Montrer que \hat{H}_c n'a d'élément de matrice non-nul qu'à l'intérieur de chaque doublet dégénéré d'états propres de \hat{H}_0 . Donner explicitement la matrice représentant \hat{H}_c dans le sous-espace associé au $n^{\text{ème}}$ niveau excité.
3. En déduire l'expression exacte des états propres, que l'on notera $|n, \pm\rangle$, et des énergies propres de $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_c$.

2 Oscillation de Rabi

On prépare initialement le système dans l'état $|e, n\rangle$. Il évolue ensuite sous l'effet de \hat{H} .

4. Donner l'expression de l'état du système à l'instant t . Quelle est la probabilité de trouver le système à deux niveaux à l'instant t dans l'état $|f\rangle$?
5. Montrer que la probabilité de basculement du système à deux niveaux oscille au cours du temps avec une pulsation de Rabi Ω_n que l'on déterminera.

3 Oscillations de Rabi multiples

Le système est initialement dans une superposition cohérente d'états $|e, n\rangle$:

$$|\Psi(t=0)\rangle = \sum_n c_n |e, n\rangle. \quad (4)$$

6. Que représentent les coefficients $|c_n|^2$?
7. Donner l'expression de la probabilité $P_{ef}(t)$ de basculement du système à deux niveaux sous l'effet de \hat{H} , et montrer qu'elle peut s'écrire comme une combinaison linéaire des probabilités calculées à la section précédente.
8. Montrer qu'en mesurant $P_{ef}(t)$ en fonction du temps d'interaction, on peut remonter aux probabilités $\mathcal{P}(n)$ d'être initialement dans l'état $|e, n\rangle$.

4 Expérience de 1995

Pour cette expérience, les atomes de ^{85}Rb sont émis par un four et préparés dans l'état excité. La fréquence de transition atomique est $\omega_0/2\pi \simeq 50$ GHz.

L'expérience est réalisée un très grand nombre de fois, ce qui permet d'évaluer les probabilités $\mathcal{P}(n)$. Le temps d'interaction est contrôlé à travers la vitesse des atomes sélectionnés.

Le système est initialement dans l'état $|e, 0\rangle$.

9. Donner un ordre de grandeur de la vitesse des atomes.
10. Expliquer la courbe expérimentale $P_{ef}(t)$ observée (figure A). Quelle est la fréquence $\Omega_0/2\pi$? Pourquoi parle-t-on d'*émission spontanée réversible* ?

Le système est initialement dans l'état $\sum_n c_n |e, n\rangle$.

11. Expliquer la forme des courbes observées sur les figures (B), (C) et (D). Que représentent les tirets sur les courbes (a)...(d) ?
12. Vérifier que les probabilités $\mathcal{P}(n)$ vérifient la loi suivante :

$$\mathcal{P}(n) = \frac{e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{2n}}{n!}, \quad (5)$$

avec $|\alpha|^2 = 0,4, 0,85$ et $1,77$. On pourra faire un tableau de valeurs ou (mieux) écrire un programme python qui trouve la valeur de $|\alpha|$ qui réalise le meilleur ajustement entre la formule (5) et les résultats expérimentaux.

On verra à la fin du semestre que la formule (5) donne la distribution du nombre de photons dans un **état cohérent**, qui est la description quantique d'un champ microondes classique, injecté dans la cavité.

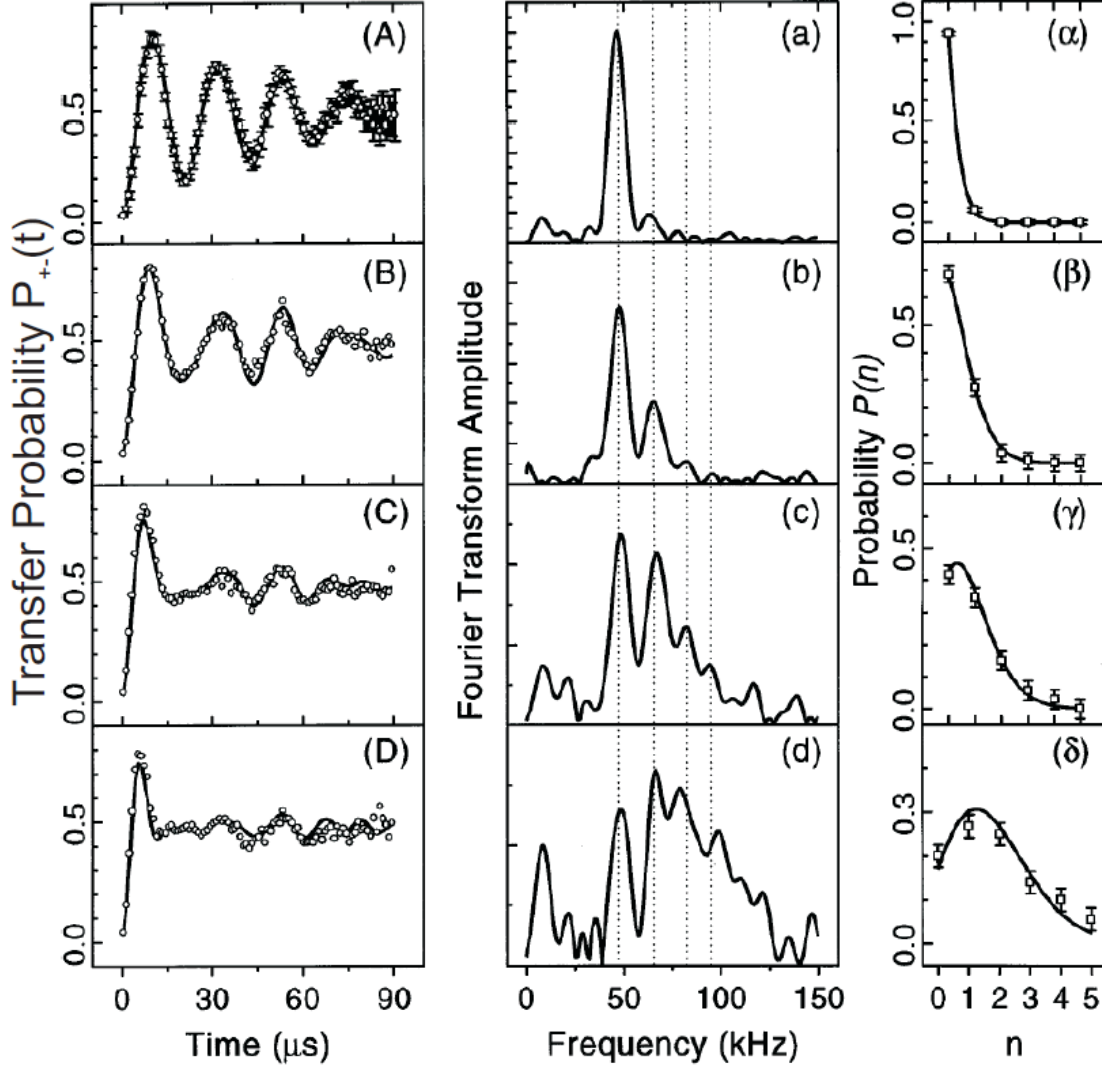


FIGURE 1 – Evolution de $P_{ef}(t)$ pour différents états initiaux du système, avec les décompositions en composantes de Fourier et les coefficients correspondants.

\mathcal{P} mesurées	Figure β	Figure γ	Figure δ
$\mathcal{P}(0)$	0.69	0.42	0.2
$\mathcal{P}(1)$	0.28	0.35	0.27
$\mathcal{P}(2)$	0.03	0.15	0.25
$\mathcal{P}(3)$	0	0.05	0.13
$\mathcal{P}(4)$	0	0.02	0.1
$\mathcal{P}(5)$	0	0	0.06

Bibliographie :

M. Brune *et al.*, Quantum Rabi Oscillations : A Direct Test of Field Quantization in a Cavity, Phys. Rev. Lett. **76**, 1800 (1996).