TD 1 MQ1

1. Quelques propriétés de fonctions d'opérateur

1. soit $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$, $\hat{A}$ observable donc les $|\psi_\alpha\rangle$ forment une base

$$\left(\sum_\alpha f(\lambda_\alpha)\hat{P_\alpha}\right)|\phi\rangle = \sum_\alpha f(\lambda_\alpha)\hat{P_\alpha}|\phi\rangle = \sum_\alpha f(\lambda_\alpha)|\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha|\phi\rangle$$

$$= \sum_\alpha f(\hat{A})|\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha|\phi\rangle = f(\hat{A})\underbrace{\left(\sum_\alpha|\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha|\right)}_{\mathbb{1}}|\phi\rangle = f(\hat{A})|\phi\rangle$$

donc $\sum_\alpha f(\lambda_\alpha)\hat{P_\alpha} = f(\hat{A})$

2. $f(\hat{A})$ observable si hermitienne : $f(\hat{A})^\dagger = f(\hat{A})$

$$f(\hat{A})^\dagger = \left(\sum_\alpha f(\lambda_\alpha)\hat{P_\alpha}\right)^\dagger = \sum_\alpha \overline{f(\lambda_\alpha)}\hat{P_\alpha}^\dagger \qquad \text{car } (a\,A)^\dagger = a^* A^\dagger$$

or soit $|\phi\rangle, |x\rangle \in \mathcal{H}$

$\langle\phi|\hat{P_\alpha}^\dagger x\rangle = \langle\hat{P_\alpha}\phi|x\rangle$

$\langle\hat{P_\alpha}\phi|$ bra associé au ket $|\hat{P_\alpha}\phi\rangle$

$|\hat{P_\alpha}\phi\rangle = P_\alpha|\phi\rangle = |\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha|\phi\rangle = \langle\psi_\alpha|\phi\rangle|\psi_\alpha\rangle$

or bra associé au ket $\langle\psi_\alpha|\phi\rangle|\psi_\alpha\rangle$: $\left(\langle\psi_\alpha|\phi\rangle|\psi_\alpha\rangle\right)^\dagger$

$= \overline{\langle\psi_\alpha|\phi\rangle}\langle\psi_\alpha| = \langle\phi|\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha|$
$= \langle\phi|\hat{P_\alpha}$

donc $\langle\phi|\hat{P_\alpha}^\dagger x\rangle = \left(\langle\phi|\hat{P_\alpha}\right)|x\rangle = \langle\phi|\hat{P_\alpha}x\rangle$

donc $\hat{P_\alpha}^\dagger = \hat{P_\alpha}$: $\hat{P_\alpha}$ hermitien

donc $\sum_\alpha \overline{f(\lambda_\alpha)}\hat{P_\alpha} = \sum_\alpha f(\lambda_\alpha)\hat{P_\alpha}$

$\overline{f(\lambda_\alpha)} = f(\lambda_\alpha)$

or $\lambda_\alpha \in \mathbb{R}$ car $\hat{A}$ observable

donc il faut que $f(x) \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

3. soit $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$ $\quad |\phi\rangle = \sum_\gamma c_\gamma |\psi_\gamma\rangle$ car $\{|\psi_\gamma\rangle\}$ base de $\mathcal{H}$

$$\prod_{\beta\neq\alpha} \frac{\hat{A}-\lambda_\beta}{\lambda_\alpha-\lambda_\beta} |\phi\rangle = \sum_\gamma c_\gamma \prod_{\beta\neq\alpha} \frac{\hat{A}-\lambda_\beta}{\lambda_\alpha-\lambda_\beta} |\psi_\gamma\rangle$$

$$= \sum_\gamma c_\gamma \prod_{\beta\neq\alpha} \frac{\hat{A}|\psi_\gamma\rangle - \lambda_\beta|\psi_\gamma\rangle}{\lambda_\alpha-\lambda_\beta} = \sum_\gamma c_\gamma \prod_{\beta\neq\alpha} \frac{\lambda_\gamma-\lambda_\beta}{\lambda_\alpha-\lambda_\beta} |\psi_\gamma\rangle$$

or le produit est nul sauf si $\gamma=\alpha$

donc $= \sum_\gamma c_\gamma \prod_{\beta\neq\alpha} \delta_{\gamma\alpha} \frac{\lambda_\gamma-\lambda_\beta}{\lambda_\alpha-\lambda_\beta} |\psi_\gamma\rangle$

$$= c_\alpha \underbrace{\prod_{\beta\neq\alpha} \underbrace{\frac{\lambda_\alpha-\lambda_\beta}{\lambda_\alpha-\lambda_\beta}}_{=1}}_{=1} |\psi_\alpha\rangle = c_\alpha|\psi_\alpha\rangle = \hat{P}_\alpha|\psi_\alpha\rangle$$

donc $\hat{P}_\alpha = \prod_{\beta\neq\alpha} \frac{\hat{A}-\lambda_\beta}{\lambda_\alpha-\lambda_\beta}$

4. on a le droit de développer une fonction d'opérateur en série entière d'opérateur

définition de $\exp(\hat{A}) = \sum_n \frac{\hat{A}^n}{n!}$ $\quad$ comme $\exp(x) = \sum_n \frac{x^n}{n!}$

. opérateur unitaire : $\hat{\Pi}^\dagger = \hat{\Pi}^{-1}$

- on rappelle que les v.p de $\hat{\Pi}$ sont de module 1

en effet on calcule $\hat{\Pi}^\dagger|\psi\rangle$ avec $|\psi\rangle$ vecteur propre de $\hat{\Pi}$

associée à la valeur propre λ

p.s. : $\langle\psi|\hat{\Pi}^\dagger|\psi\rangle = (\Pi\psi|\psi\rangle$

$\langle\Pi\psi|$ est la bra associé au ket $|\Pi\psi\rangle = \Pi|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$

or le bra associé au ket $\lambda|\psi\rangle$ est $\langle\psi|\lambda^* = \lambda^*\langle\psi|$

donc $\langle\psi|\Pi^\dagger\psi\rangle = \lambda^*\langle\psi|\psi\rangle = \langle\psi|\lambda^*\psi\rangle$ donc $\hat{\Pi}^\dagger|\psi\rangle = \lambda^*|\psi\rangle$

puis $\hat{\pi}^\dagger \hat{\pi} |\psi\rangle = \hat{\pi}^\dagger \lambda |\psi\rangle = \lambda \lambda^* |\psi\rangle = |\lambda|^2 |\psi\rangle$

$= \underbrace{\hat{\pi}^{-1} \hat{\pi}}_{\mathbb{1}} |\psi\rangle = 1 . |\psi\rangle$

donc $|\lambda|^2 = 1$

. $f(\hat{\pi}^\dagger \hat{A} \hat{\pi}) = \sum_n a_n (\hat{\pi}^\dagger \hat{A} \hat{\pi})^n = \sum_n a_n \hat{\pi}^\dagger \hat{A} \underbrace{\hat{\pi} . \hat{\pi}^\dagger}_{\mathbb{1}} \hat{A} \hat{\pi} \dots \hat{\pi}^\dagger \hat{A} \underbrace{\hat{\pi} . \hat{\pi}^\dagger}_{\mathbb{1}} \hat{A} \hat{\pi}$

$= \sum_n a_n \hat{\pi}^\dagger (\hat{A})^n \hat{\pi} = \hat{\pi}^\dagger \left(\sum_n a_n \hat{A}^n \right) \hat{\pi} = \hat{\pi}^\dagger f(\hat{A}) \hat{\pi}$

5. λ valeur propre de $\hat{R}$

→ polynome caractéristique : $\det(\hat{R} - \lambda \mathbb{1}) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (-\lambda)(-\lambda) - 1.1 =$

$= \lambda^2 - 1 = (\lambda+1)(\lambda-1)$

$\exists \hat{M} \,/\, \hat{M}^\dagger \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \hat{M} = \hat{R}$

donc $f(\hat{R}) = f\left(\hat{M}^\dagger i\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \hat{M}\right) = \hat{M}^\dagger f\left(i\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) \hat{M}$

$f\left(i\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = \exp\left(i\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ car diagonale

puis $f(\hat{R}) = \hat{M}^\dagger \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \hat{M}$

→ je ne sais pas aller plus loin

. observable si hermitienne : $f(\hat{R})^\dagger = f(\hat{R})$

$f(\hat{R})^\dagger = \left(\sum_n \frac{(i\theta \hat{R})^n}{n!} \right)^\dagger = \sum_n \left(\frac{(i\theta \hat{R})^n}{n!} \right)^\dagger$ car $\dagger$ est linéaire

$= \sum_n \frac{1}{n!} (-i\theta)^n (\hat{R}^n)^\dagger = \sum_n \frac{1}{n!} (-i\theta)^n (\hat{R}^\dagger)^n$ car $R^\dagger$ commute avec $R^\dagger$

$= \sum_n \frac{1}{n!} (-i\theta)^n \hat{R}^n$ car $\hat{R}$ hermitien

$= \exp(-i\theta \hat{R}) \neq f(\hat{R})$

donc $f(\hat{R})$ non hermitien

→ $\exp(\hat{A})$: important car décrit l'évolution des états soumis à $\hat{H}$

6. $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{A}(\hat{B}\hat{C}) - (\hat{B}\hat{C})\hat{A} = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{B}\hat{C}\hat{A}$

⚠ les opérateurs ne commutent pas a priori, mais le produit d'opérateurs est associatif

$[\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] = (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})\hat{C} + \hat{B}(\hat{A}\hat{C} - \hat{C}\hat{A})$

or produit est distributif sur l'addition

$= \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \cancel{\hat{B}\hat{A}\hat{C}} + \cancel{\hat{B}\hat{A}\hat{C}} - \hat{B}\hat{C}\hat{A} = \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{B}\hat{C}\hat{A}$

$= [\hat{A}, \hat{B}\hat{C}]$

7. $[\hat{A}, f(\hat{B})] = [\hat{A}, \sum_n b_n \hat{B}^n] = \sum_n b_n [\hat{A}, \hat{B}^n]$ car $[\,,\,]$ linéaire à droite et à gauche

or $[\hat{A}, \hat{B}^n] = [\hat{A}, \hat{B}\cdot\hat{B}^{n-1}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{B}^{n-1} + \hat{B}[A, \hat{B}^{n-1}]$

$[\hat{A}, \hat{B}^{n-1}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{B}^{n-2} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{B}^{n-1}]$

donc $[\hat{A}, \hat{B}^n] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{B}^{n-1} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{B}]\hat{B}^{n-2} + \hat{B}^2[\hat{A}, \hat{B}^{n-1}]$

$= [\hat{A}, \hat{B}]\hat{B}^{n-1} + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{B}^{n-1} + \hat{B}^2[\hat{A}, \hat{B}^{n-1}]$

car $\hat{B}$ commute avec $[\hat{A}, \hat{B}]$

$= n\,[\hat{A}, \hat{B}]\hat{B}^{n-1} + \hat{B}^n \underbrace{[\hat{A}, \mathbb{1}]}_{=0}$

$= n\,[\hat{A}, \hat{B}]\hat{B}^{n-1}$

donc $[\hat{A}, f(\hat{B})] = \sum_n b_n\, n\, [\hat{A}, \hat{B}]\hat{B}^{n-1} = [\hat{A}, \hat{B}] \sum_n n\, b_n \hat{B}^{n-1}$

$= [\hat{A}, \hat{B}] f'(\hat{B})$

2. Espace de Hilbert - opérateur

redémontrer $\langle \varphi | \psi \rangle = \overline{\langle \psi | \varphi \rangle}$ pour des matrices

$$\langle \psi | A^\dagger | \varphi \rangle = \langle \psi | A^\dagger \varphi \rangle = \overline{\langle \varphi | A | \psi \rangle} = \overline{\langle \varphi | A \psi \rangle} = \langle A \psi | \varphi \rangle$$

→ c'est bien la même définition

1. (a) soit $|\varphi\rangle, |\psi\rangle \in \mathcal{H}$, leurs bras associés $\in \mathcal{H}^*$ sont $\langle \varphi |$, $\langle \psi |$

$$\langle \varphi | (\lambda \hat{A})^\dagger | \psi \rangle = \langle \varphi | (\lambda \hat{A})^\dagger \psi \rangle = \langle (\lambda \hat{A}) \varphi | \psi \rangle$$

or $\langle | \rangle$ antilinéaire à gauche :

$$= \lambda^* \langle \hat{A} \varphi | \psi \rangle = \lambda^* \langle \varphi | \hat{A}^\dagger \psi \rangle = \langle \varphi | \lambda^* \hat{A}^\dagger \psi \rangle$$

car linéaire à droite

$$= \langle \varphi | (\lambda^* \hat{A}^\dagger) | \psi \rangle$$

donc $(\lambda \hat{A})^\dagger = \lambda^* \hat{A}^\dagger$

(b) $\langle \varphi | (\hat{A} + \hat{B})^\dagger | \psi \rangle = \langle (\hat{A} + \hat{B}) \varphi | \psi \rangle = \langle \hat{A} \varphi | \psi \rangle + \langle \hat{B} \varphi | \psi \rangle$

car $\langle | \rangle$ antilinéaire à gauche

$$= \langle \varphi | \hat{A}^\dagger \psi \rangle + \langle \varphi | \hat{B}^\dagger \psi \rangle = \langle \varphi | (\hat{A}^\dagger + \hat{B}^\dagger) \psi \rangle$$

car linéaire à droite

donc $(\hat{A} + \hat{B})^\dagger = \hat{A}^\dagger + \hat{B}^\dagger$

(c) $\langle \varphi | (\hat{A} \circ \hat{B})^\dagger \psi \rangle = \langle (\hat{A} \circ \hat{B}) \varphi | \psi \rangle = \langle \hat{A} (\hat{B} \varphi) | \psi \rangle$ car $\circ$ est associatif

$$= \langle \hat{B} \varphi | \hat{A}^\dagger \psi \rangle = \langle \varphi | \hat{B}^\dagger (\hat{A}^\dagger \psi) \rangle = \langle \varphi | (\hat{B}^\dagger \circ \hat{A}^\dagger) \psi \rangle$$

donc $(\hat{A} \circ \hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger \circ \hat{A}^\dagger$

→ ⚠ on dit très souvent produit d'applications car représentation matricielle : produit, mais c'est bien une composition

→ on écrit souvent $\hat{A} \circ \hat{B} \equiv \hat{A} \hat{B}$

2. soit λ valeur propre de $\hat{A}$, associée au vecteur propre $|\psi\rangle$

$$\langle\psi| A^\dagger|\psi\rangle = \overline{\langle\psi|A|\psi\rangle} = \overline{\langle\psi|\lambda\psi\rangle} = \bar{\lambda}\,\overline{\langle\psi|\psi\rangle} = \bar{\lambda}\langle\psi|\psi\rangle$$

$$= \langle\psi|A|\psi\rangle = \langle\psi|\lambda|\psi\rangle = \lambda\langle\psi|\psi\rangle$$

donc $\bar{\lambda} = \lambda$ (car $\langle\psi|\psi\rangle \neq 0$ car $|\psi\rangle$ $\vec{vp}$ donc $\neq \emptyset$)

donc $\lambda \in \mathbb{R}$

$\rightarrow$ important : en MQ, les observables sont hermitiennes car les mesures qu'on fait sont des nombres réels

3.

$$\langle\psi|\hat{A}^{-1}\hat{A}|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{A}^{-1}\lambda|\psi\rangle = \lambda\langle\psi|\hat{A}^{-1}|\psi\rangle = \lambda\langle\psi|\hat{A}^\dagger|\psi\rangle = \lambda\overline{\langle\psi|A|\psi\rangle}$$

$$= \lambda\lambda^*\langle\psi|\psi\rangle = |\lambda|^2\langle\psi|\psi\rangle$$

et $= \langle\psi|\mathbb{1}|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle$

donc $|\lambda|^2 = 1$

4. $e^{it\hat{A}} = \sum_n \frac{(it\hat{A})^n}{n!}$:

$$(e^{it\hat{A}})^\dagger = \sum_n \frac{((it\hat{A})^n)^\dagger}{n!} = \sum_n \frac{((it\hat{A})^\dagger)^n}{n!}$$ car $it\hat{A}$ commute avec lui-m

$$= \sum_n \frac{(-it\hat{A}^\dagger)^n}{n!} = \sum_n \frac{(-it\hat{A})^n}{n!} = e^{-it\hat{A}}$$

- démontrons que $e^{\hat{A}}.e^{\hat{B}} = e^{A+B}$ si $[A,B]$ commutent :

$$e^{\hat{A}}.e^{\hat{B}} = \left(\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}\hat{A}^p\right)\left(\sum_{q=0}^{\infty}\frac{1}{q!}\hat{B}^q\right) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{1}{p!q!}\hat{A}^p\hat{B}^q$$

$$\underset{k=p+q}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{k}\frac{1}{p!(k-p)!}\hat{A}^p\hat{B}^{k-p}$$

et $\exp(A+B) = \sum_k \frac{1}{k!}(\hat{A}+\hat{B})^k$

or $(\hat{A}+\hat{B})^k = (\hat{A}+\hat{B})(\hat{A}+\hat{B})\dots(\hat{A}+\hat{B})$

$= (\hat{A}\hat{A}+\hat{A}\hat{B}+\hat{B}\hat{A}+\hat{B}\hat{B})\dots(\hat{A}+\hat{B})$

$= (\hat{A}^2 + 2\hat{A}\hat{B} + \hat{B}^2)\dots(\hat{A}+\hat{B})$

⚠ uniquement si $[\hat{A},\hat{B}]=0$

$$= \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \hat{A}^p \hat{B}^{k-p}$$

donc
$$e^{A+B} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\cancel{k!}} \sum_{p=0}^{k} \frac{\cancel{k!}}{p!(k-p)!} \hat{A}^p \hat{B}^{k-p}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{k} \frac{1}{p!(k-p)!} \hat{A}^p \hat{B}^{k-p} = e^A . e^B = e^{A+B}$$

- ici $\hat{U}^\dagger\hat{U} = e^{-it\hat{A}} e^{it\hat{A}} = e^{-it\hat{A}+it\hat{A}}$ car $-it\hat{A}$ commute avec $it\hat{A}$

$= e^{0_{\mathcal{H}}} = \mathbb{1}$ car dans la somme de exp, seul le terme $k=0$ est non nul

donc $\hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1}$

→ important car évolution temporelle de $|\psi\rangle$ est donnée par $e^{-\frac{it\hat{H}}{\hbar}}|\psi(0)\rangle$

3. Espace de dimension finie

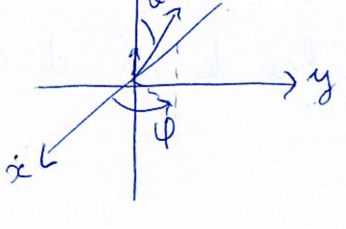
1. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$

$Tr(A) = a+d \qquad det(A) = ad - bc$

$\chi(\lambda) = det(A - \lambda\mathbb{1}) = det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc$

$= \lambda^2 - \lambda(a+d) + ad - bc = \lambda^2 - \lambda\, Tr(A) + det(A)$

2.



$\vec{\sigma_u} = \sigma_x \vec{e_x} + \sigma_y \vec{e_y} + \sigma_z \vec{e_z}$

$\sigma_u = \vec{\sigma_u} . \vec{u} = \sigma_x u_x + \sigma_y u_y + \sigma_z u_z$

avec $u_x = \vec{u} . \vec{e_x}$

$u_y = \vec{u} . \vec{e_y}$

$u_z = \vec{u} . \vec{e_z}$

→ donner σ_u dans la base où σ_z est diagonale
⇒ les σ_x σ_y σ_z sont données par les matrices de Pauli

(en fait l'énoncé n'est pas très bien dit)

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\sigma_u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\sin\theta\sin\varphi + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cos\theta$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\cos\varphi - i\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi + i\sin\theta\sin\varphi & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\, e^{-i\varphi} \\ \sin\theta\, e^{+i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

- $\vec{\sigma_u} = \sigma_u \vec{u}$

- $Tr(\sigma_u) = 0$ $\quad$ $\det(\sigma_u) = -\cos^2\theta - \sin^2\theta = -1$

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda+1)(\lambda-1)$$

→ les valeurs propres sont -1, $+1$

- on cherche $|+1\rangle$ telque $\sigma_u|+1\rangle = +|+1\rangle$
  $|-1\rangle$ tel que $\sigma_u|-1\rangle = -|-1\rangle$

$$\text{pour } |+1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \begin{cases} \alpha(\cos\theta - 1) + \beta\sin\theta\, e^{-i\varphi} = 0 \\ \alpha\sin\theta\, e^{i\varphi} + \beta(\cos\theta + 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\alpha\sin\frac{\theta}{2} + \beta\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi} = 0$$

de plus $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ pour que $|+1\rangle$ soit normé

et on est à une phase près:

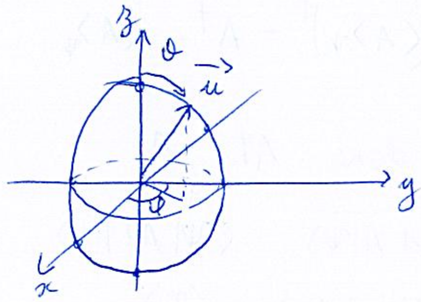
on choisit $|+1\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi} \end{pmatrix}$ dans la base des $\vec{vp}$ de σ_z

et $|-1\rangle = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2}e^{i\varphi} \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ on a bien $\langle -1 | +1 \rangle = \left(-\sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi}\right) \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} e^{+i\varphi} \end{pmatrix}$

$$= -\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} e^{+i\varphi} = 0$$

sphère de Bloch :



n'importe quel état $\in \mathcal{H}$ de dimension 2 $\simeq \mathbb{C}^2$ normalisé peut s'écrire sous cette forme et représenté sur la sphère de Bloch

4. Inégalité d'Heisenberg

1. Si elles commutent, on peut les mesures sans que la mesure de l'une affecte l'autre.
   ↳ nécessaire pour décrire le monde réel

   mathématiquement : il existe une base de $\mathcal{H}$ à la fois $\vec{vp}$ de A et $\vec{vp}$ de $\vec{B}$

2. $\langle A \rangle_\psi = \sum_n \mathcal{P}(a_n) a_n$ $\qquad$ $\mathcal{P}(a_n)$: proba de mesurer a_n pour l'état $|\psi\rangle$

$$= \sum_n \langle\psi| P(a_n) |\psi\rangle a_n = \langle\psi| \underbrace{\sum_n P(a_n) a_n}_{A} |\psi\rangle = \langle\psi| A |\psi\rangle$$

$$(\Delta A)^2_\psi = \langle (A - \langle A\rangle_\psi)^2 \rangle_\psi = \langle A^2\rangle_\psi - \langle A\rangle_\psi^2$$

comme en physique classique

$\| \hat{C}(\lambda)|\psi\rangle\|^2 = \langle\psi|C^\dagger(\lambda)\, C(\lambda)|\psi\rangle$.

$C^\dagger(\lambda) = \delta A^\dagger - i\lambda\, \delta B^\dagger$

or $\delta A^\dagger = A^\dagger - (\langle A\rangle_\psi)^\dagger = A^\dagger - \overline{\langle A\rangle_\psi}$ car $\langle A\rangle_\psi \in \mathbb{C}$

A hermitien donc $A^\dagger = A$

et $\overline{\langle A\rangle_\psi} = \overline{\langle\psi|A|\psi\rangle} = \langle\psi|A^\dagger|\psi\rangle$ par définition de $\dagger$

$= \langle\psi|A|\psi\rangle = \langle A\rangle_\psi$

donc $\delta A^\dagger = \delta A$

puis $C^\dagger(\lambda)\, C(\lambda) = (\delta A - i\lambda\,\delta B)(\delta A + i\lambda\,\delta B) = \delta A^2 + \lambda^2\delta B^2 + i\lambda\,\delta A\delta B - i\lambda\,\delta B\delta A$

$= \delta A^2 + \lambda^2\,\delta B^2 + i\lambda\,[\delta A, \delta B]$

donc $\| C(\lambda)|\psi\rangle\|^2 = \langle\psi|\delta A^2|\psi\rangle + \lambda^2\langle\psi|\delta B^2|\psi\rangle + i\lambda\,\langle\psi|[\delta A,\delta B]|\psi\rangle$,

or $\langle\psi|\delta A^2|\psi\rangle = \langle\psi|\,(A - \langle A\rangle_\psi)^2|\psi\rangle = (\Delta A)^2_\psi$

donc $\|C(\lambda)|\psi\rangle\|^2 = (\Delta A)^2_\psi + \lambda^2(\Delta B)^2_\psi + i\lambda\,\langle\psi|[\delta A,\delta B]|\psi\rangle$

et $[\delta A, \delta B] = [A - \langle A\rangle_\psi, B - \langle B\rangle_\psi] = [A, B]$ car les scalaires commutent

donc $\|C(\lambda)|\psi\rangle\|^2 = (\Delta A)^2_\psi + \lambda^2(\Delta B)^2_\psi + i\lambda\,\langle\psi|[A,B]|\psi\rangle$

. on a un polynome d'ordre 2 et $\geqslant 0$

donc $(i\,\langle\psi|[A,B]|\psi\rangle)^2 - 4\times(\Delta A)^2_\psi(\Delta B)^2_\psi \geqslant 0$

donc $4\,(\Delta A)^2_\psi(\Delta B)^2_\psi \geqslant (\langle\psi|[A,B]|\psi\rangle)^2$

donc $(\Delta A)_\psi(\Delta B)_\psi \geqslant \frac{1}{2}|\langle\psi|[A,B]|\psi\rangle|$

. on peut aussi le démontrer avec Cauchy-Schwartz

$\|A\|\|B\| \geqslant |\langle A, B\rangle|$ ou $\int|f|^2\int|g|^2 \geqslant \left(\int f\cdot\bar{g}\right)^2$

5. Eléments de matrice

. $\hat{A}$ représenté par la matrice $(A_{ij})_{i,j}$ dans la base $\{|i\rangle\}_i$

$|\psi\rangle$ représenté par $(c_i)_i$ dans la base $\{|i\rangle\}_i$

alors $|\psi\rangle = \sum_i c_i |i\rangle$

. matriciellement : $(\hat{A}|\psi\rangle)_i = \sum_j A_{ij} c_j$

. $\hat{A}|\psi\rangle = \mathbb{1}\hat{A}\mathbb{1}|\psi\rangle = \left(\sum_i |i\rangle\langle i|\right)\hat{A}\left(\sum_j |j\rangle\langle j|\right)|\psi\rangle$

$= \left(\sum_i |i\rangle\langle i|\right)\hat{A} \sum_j |j\rangle\langle j|\psi\rangle$

$= \left(\sum_i |i\rangle\langle i|\right) \sum_j \hat{A}|j\rangle\langle j|\psi\rangle$

car $\hat{A}$ est linéaire et que $|j\rangle\langle j|\psi\rangle$ est un vecteur

or $\hat{A}|j\rangle\langle j|\psi\rangle$ est un vecteur, donc on peut lui appliquer $\langle i|$

$= \sum_i |i\rangle \sum_j \langle i|\hat{A}|j\rangle\langle j|\psi\rangle$

$= \sum_i \sum_j \langle i|\hat{A}|j\rangle \underbrace{\langle j|\psi\rangle}_{= c_j} |i\rangle$

or, matriciellement $= (x_i)_i$ dans la base $|i\rangle$,

avec $x_i = \sum_j \langle i|\hat{A}|j\rangle c_j$

et également $= \sum_j A_{ij} c_j$

donc $\sum_j \left(\langle i|\hat{A}|j\rangle c_j - A_{ij} c_j\right) = 0$

donc $\left(\langle i|\hat{A}|j\rangle - A_{ij}\right) c_j = 0 \quad \forall j$

donc $\langle i|\hat{A}|j\rangle - A_{ij} = 0$

donc $A_{ij} = \langle i|\hat{A}|j\rangle$

→ important pour calculer le hamiltonien de ≥ 2 états

pour $\mathcal{H}$ de dimension N, $\hat{H} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $\quad \hat{H} = (H_{ij})_{i,j \in N}$

6. Opérateur de saut

1. $A^\dagger = \left(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| \right)^\dagger = (|0\rangle\langle 1|)^\dagger + (|1\rangle\langle 0|)^\dagger = |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| = A$
   → on aurait pu le faire matriciellement
2. $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ forment une base de $\mathcal{H}$

matriciellement : $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

alors $\hat{A}$ est représenté par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^{(0,1)} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^{(1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \det\left(\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \right) = \lambda^2 - 1^2 = (\lambda+1)(\lambda-1)$$

. pour $+1$: $A\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = +1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \text{et } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

$$\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

donc $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, aussi écrit $|\varphi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ $\vec{vp}$ de $\hat{A}$

. pour -1 $\quad A\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\alpha = -\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

donc $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, aussi écrit $|\varphi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$ $\vec{vp}$ de $\hat{A}$

$$\langle x_1 | x_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle 0| + \langle 1|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\right) = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\langle 0|0\rangle}_{1} - \underbrace{\langle 0|1\rangle}_{0} + \underbrace{\langle 1|0\rangle}_{0} - \underbrace{\langle 1|1\rangle}_{1} \right)$$

$$= \frac{1}{2}(1 - 1) = 0$$

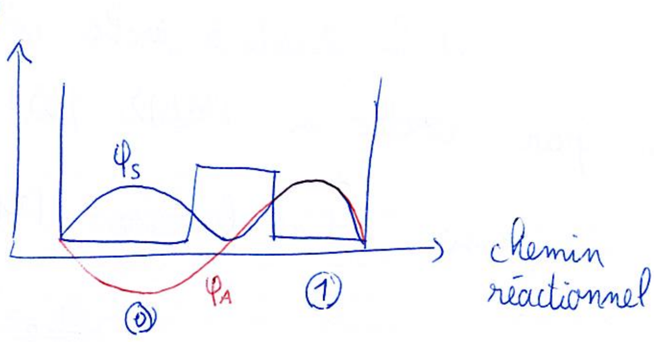
→ ils sont bien orthogonaux et forment une base (A est hermitien)

. si état initial $|0\rangle \to |1\rangle$ et inversement : sauts

- molécule d'ammonial

(0) (1)

inversion



$\rightarrow$ états du hamiltonien : superposition de $|0\rangle$ et $|1\rangle$: la molécule est à la fois à gauche et à droite

3. $\hat{H}^\dagger = \hat{H}$ donc $\hat{H}$ peut bien être un hamiltonien

- on note les valeurs propres de $\hat{H}$ $E_S = -1$, $E_A = +1$, correspondant à φ_s et φ_A

  (les puits ont une énergie négative car ce sont des puits, d'où le $H = -A$, c'est juste une convention)

- soit $|\Psi(t)\rangle$ l'état du système au temps t

  alors $i\hbar \dfrac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle$

  si initialement, le système est en $|\varphi_s\rangle$, alors $\hat{H}|\Psi(t_0)\rangle =$
  $\hat{H}|\varphi_s\rangle = E_s |\varphi_s\rangle$

  on doit alors résoudre $|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{i\hat{H}(t-t_0)}{\hbar}} |\Psi(t_0)\rangle$

  (équa. diff. usuelle, mais avec cette fois un opérateur : on a le droit de le faire en développant en série entière, et en faisant des calculs infinitésimaux en t)

puis $|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{i\hat{H}(t-t_0)}{\hbar}} |\Psi(t_0)\rangle = e^{-\frac{iE_s(t-t_0)}{\hbar}} |\varphi_s\rangle$

$\rightarrow$ $|\Psi(t)\rangle$ évolue au cours du temps avec une phase $e^{-i\frac{E_s(t-t_0)}{\hbar}}$

. la proba de mesurer $|\Psi(t)\rangle$ dans $|0\rangle$ est:

$$|\langle 0|\Psi(t)\rangle|^2 = \left|\langle 0|\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-iE_S(t-t_0)/\hbar}(|0\rangle+|1\rangle)\right|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-iE_S(t-t_0)/\hbar}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

$\longrightarrow$ constant au cours du temps

- si maintenant l'état initial est $|\varphi_A\rangle$, $|\Psi(t)\rangle = e^{-iE_A(t-t_0)/\hbar}|\varphi_A\rangle$

et la proba de mesurer $|\Psi(t)\rangle$ dans $|0\rangle$ est:

$$|\langle 0|\Psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

$\longrightarrow$ constant aussi

- si cette fois on prépare les système en $|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\varphi_S\rangle + |\varphi_A\rangle)$, une superposition d'états propres:

comme $\hat{H}$ est linéaire: $|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-iE_S(t-t_0)/\hbar}|\varphi_S\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-iE_A(t-t_0)/\hbar}|\varphi_A\rangle$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-iE_S(t-t_0)/\hbar}\left(|\varphi_S\rangle + e^{-i(E_A-E_S)(t-t_0)/\hbar}|\varphi_A\rangle\right)$$

$\longrightarrow$ déphasage pour $|\varphi_A\rangle$ comparé à $|\varphi_S\rangle$

. la proba de mesurer $|\Psi(t)\rangle$ dans $|0\rangle$ est:

$$|\langle 0|\Psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{2}\Big|\underbrace{\langle 0|\varphi_S\rangle}_{\langle 0|\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}} + e^{-i(E_A-E_S)(t-t_0)/\hbar}\underbrace{\langle 0|\varphi_A\rangle}_{\langle 0|\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}}\Big|^2$$

$$= \frac{1}{4}\left|1 + e^{-i(E_A-E_S)(t-t_0)/\hbar}\right|^2 = \frac{1}{2}\cos\left((E_A-E_S)(t-t_0)/\hbar\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cos(\omega t)$$

avec $\omega = (E_A - E_S)/\hbar$

et $|\langle 1|\Psi(t)\rangle|^2 = \frac{1}{2}\sin(\omega t)$

$\Longrightarrow$ un état préparé comme une superposition d'états propres oscille en densité de probabilité