Mécanique quantique – L3

Pierre-François Cohadon - Tristan Villain - Qinhan Wang

TD 6 - 25/10/2024
Vie et mort d'un photon

On s'intéresse au même système qu'au TD 5 : un atome à deux niveaux (état fondamental $|-\rangle$ et état excité $|+\rangle$, séparés par une énergie $\hbar\omega_0$) et un mode du champ électromagnétique dans une cavité à la fréquence $\omega_c/2\pi$. On note $|+,n\rangle$ l'état où l'atome est dans son état excité, avec n photons et $|-,n\rangle$ celui où l'atome est dans son état fondamental, toujours avec n photons. On a donc :

$$\hat{H}_0|\pm,n\rangle = \left(\frac{\hbar\omega_0}{2}(1\pm 1) + n\hbar\omega_c\right)|\pm,n\rangle \tag{1}$$

Par rapport au système étudié précédemment :

— on ajoute des **zones de Ramsey** (qui permettent chacune de réaliser un pulse $\pi/2$ de l'état atomique) immédiatement avant et immédiatement après la cavité

— l'expérience est réalisée avec une **cavité non-résonnante** avec la transition atomique.

On note $\delta = \omega_0 - \omega_c$ la différence entre la fréquence de la transition atomique ω_0 et celle de la cavité (du champ électromagnétique) ω_c. On suppose dans la suite $\delta > 0$ et $\delta \ll \omega_0$.

On utilise pour l'atome les notations habituelles des spins $\frac{1}{2}$, notamment :

$$|\pm_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle \pm |-\rangle\right) \quad \text{et} \quad |\pm_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle \pm i|-\rangle\right). \tag{2}$$

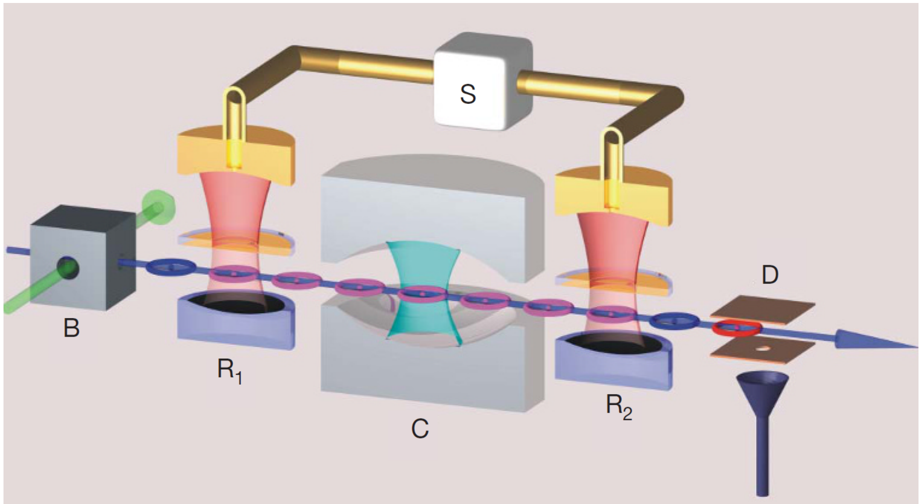

FIGURE 1 – **Montage expérimental**. Des atomes de Rb sont préparés (dans B) dans l'état $|-\rangle$ à partir d'un jet thermique. Les atomes traversent successivement la zone de Ramsey R_1 (qui prépare l'état $|+_x\rangle$), la cavité C (où les atomes sont couplés au champ) et la seconde zone de Ramsey R_2. Les deux zones sont alimentées par la source microonde S. L'état interne des atomes à la sortie de l'ensemble du dispositif est mesuré par ionisation sélective dans le détecteur D.

1 Énergies et états propres dans le cas désaccordé

1. Montrer qu'en l'absence de couplage entre l'atome et le champ, les niveaux d'énergie de $\hat{H}_0$ sont constitués d'un état fondamental non dégénéré et d'une infinité de doublets (couples d'états *proches* en énergie). Donner l'expression des états associés à ces différents niveaux et préciser ce qu'on entend par *proches*.

Quand l'atome est dans la cavité, il y a un couplage entre l'atome et le champ électromagnétique, par un hamiltonien $\hat{H}_c$, dont les seuls éléments de matrice non-nuls sont (pour tout $n \geq 1$) :

$$\langle -, n|\hat{H}_c|+, n-1\rangle = \langle +, n-1|\hat{H}_c|-, n\rangle = \frac{\hbar\Omega}{2}\sqrt{n}, \tag{3}$$

avec $\Omega \ll \delta \ll \omega_0$.

2. En ordonnant les états de la base comme $\{|-,0\rangle, |+,0\rangle, |-,1\rangle, |+,1\rangle, |-,2\rangle, |+,2\rangle, \ldots\}$, esquisser la matrice (infinie) du hamiltonien total dans cette base. Qu'observe-t-on ? Expliquer brièvement pourquoi la recherche des valeurs et vecteurs propres de $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_c$ peut se faire dans des sous-espaces $\mathcal{E}_n$ (avec $n \geq 1$) de dimension 2.
Donner une base de $\mathcal{E}_n$.
3. En tenant compte du couplage $\hat{H}_c$, donner les énergies propres du système (donc de $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_c$) dans la limite $\Omega \ll \delta$. **On se contentera de l'ordre non-nul le plus bas en Ω/δ** et **on approximera les états propres de $\hat{H}$ par ceux de $\hat{H}_0$.**
Justifier brièvement cette approximation. On notera $E_{\pm,n}$ ces énergies.
4. Montrer qu'en présence de couplage, la différence d'énergie $\Delta E(n)$ entre les états $|+,n\rangle$ et $|-,n\rangle$ se met sous la forme :

$$\Delta E(n) = \hbar\omega_0 + \frac{\hbar\Omega^2}{2\delta}\left(n + \frac{1}{2}\right). \tag{4}$$

On admet qu'on peut prendre en compte la partie constante de $\Delta E(n)$ en redéfinissant l'état (un peu comme on l'a fait dans le TD sur la résonance magnétique). Ce point sera précisé par la suite (cf. les questions 11 et 12). **On ne garde donc pour l'instant que le terme proportionnel à n.**

2 Évolution de l'état atomique en présence de n photons

On suppose que la cavité contient exactement n photons. La première zone de Ramsey (avec des photons à ω_0) fait passer l'atome de l'état excité $|+\rangle$ à l'état $|+_x\rangle$, si bien que quand l'atome entre dans la cavité, le système est dans l'état :

$$|\psi(t=0)\rangle = |+_x, n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+,n\rangle + |-,n\rangle\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

5. Montrer qu'après un temps d'interaction t_{int}, l'état du système peut se mettre sous la forme :

$$|\psi(t_{\text{int}})\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+,n\rangle + \mathrm{e}^{in\phi_0}|-,n\rangle\right). \tag{6}$$

Donner l'expression de ϕ_0.

6. Évaluer la valeur de δ nécessaire pour avoir $\phi_0 = \pi$. La fréquence de couplage est $\Omega/2\pi = 50\,\text{kHz}$, la cavité fait $w_0 = 6\,\text{mm}$ de large et on prend une vitesse v_0 des atomes de l'ordre de $100\,\text{m.s}^{-1}$. On gardera cette valeur de ϕ_0 dans toute la suite.
7. Quel est dans ce cas l'état atomique à la sortie de la cavité si $n = 0$? si $n = 1$?
On se limite dans la suite (sauf à la toute dernière question) à un photon au maximum.

3 Mesure du nombre de photons

On réalise maintenant la même séquence, avec initialement le système dans l'état :

$$|\psi(t=0)\rangle = c_0|+_x,0\rangle + c_1|+_x,1\rangle = \frac{c_0}{\sqrt{2}}\left(|+,0\rangle + |-,0\rangle\right) + \frac{c_1}{\sqrt{2}}\left(|+,1\rangle + |-,1\rangle\right), \tag{7}$$

avec $|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$.

8. Montrer que la mesure de la composante $\hat{\sigma}_x$ (immédiatement après l'interaction avec la cavité) permet de mesurer le nombre n de photons. Quels résultats peut-on obtenir, avec quelle probabilité ? Quel est l'état du système après la mesure ?
9. Quel est le résultat d'une mesure effectuée ensuite (avec un autre atome) ? Cette expérience se rapproche-t-elle plutôt de l'expérience de Stern et Gerlach ou de l'expérience sur l'effet Zénon ?
10. Quelle étape supplémentaire faut-il effectuer avant la détection pour effectuer une mesure similaire si on ne peut mesurer que $\hat{\sigma}_z$? C'est le cas de l'expérience discutée par la suite, où on mesure l'état atomique $|+\rangle$ ou $|-\rangle$.
11. Que change la prise en compte du terme $\frac{1}{2}$ dans l'équation (4) ?
12. En considérant le nombre de photons N présents dans la première zone de Ramsey, justifier également qu'on ait pu éliminer le terme $\hbar\omega_0$ dans la même équation.
13. Commenter les courbes expérimentales, notamment :
    (a) la succession de résultats similaires pour la mesure de l'état atomique, seulement perturbée par certains résultats discordants (qui représentent environ 10% des résultats)
    (b) la possible origine de ces résultats discordants (on pourra faire comme s'il s'agissait vraiment d'une mesure de composante d'un spin $\frac{1}{2}$ selon un axe)
    (c) la constance des résultats obtenus par un vote majoritaire sur 7 mesures, où on assigne à l'atome l'état mesuré sur la majorité des 7 mesures précédentes (donc sur au moins 4 des 7 mesures précédentes). On pourra par exemple en illustrer le principe en calculant la probabilité qu'un vote sur le résultat de 3 mesures successives donne un faux résultat. Le vote sur 7 mesures est évidemment encore plus efficace.
    (d) la présence de quelques sauts (changements persistants du résultat de la mesure, vers le haut ou vers le bas). A quoi peuvent-ils êtres dus, sachant que la cavité est à 0,8 K et que la fréquence de la transition atomique est d'environ 50 GHz ?
14. Proposer un moyen d'estimer la température à partir de la courbe **b**.
15. Que se passe-t-il si on ne se limite pas a priori à 0 ou 1 photon ?

Bibliographie :

Sébastien Gleyzes... & Serge Haroche, *Quantum jumps of light recording the birth and death of a photon in a cavity*, Nature **446**, 297 (2007).

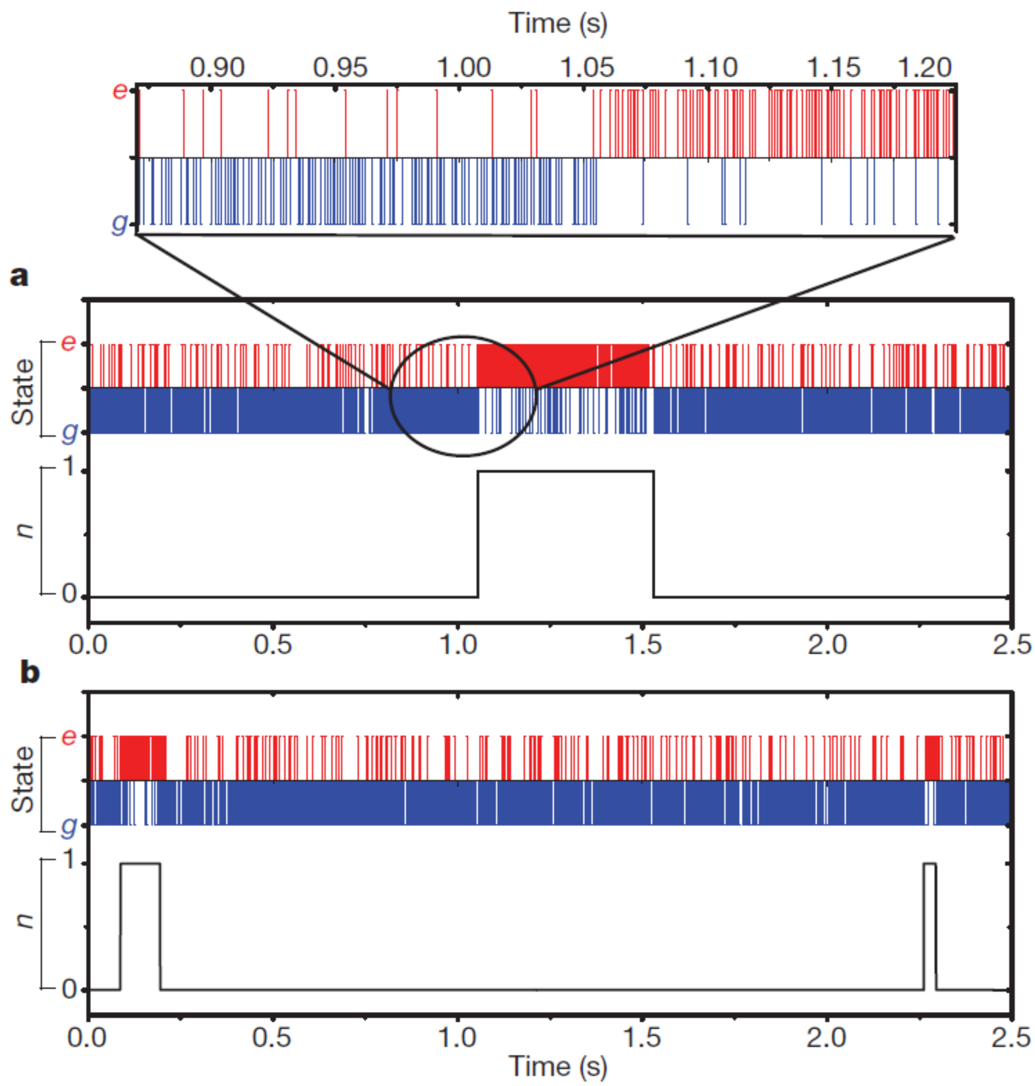

FIGURE 2 – **Résultats de l'expérience de l'équipe de Serge Haroche**. Les détections atomiques sont signalées par les traits bleus pour l'état fondamental $|-\rangle$ (ici noté $|g\rangle$ pour *ground state*) et par les traits rouges pour l'état excité $|+\rangle$ (ici noté $|e\rangle$ pour *excited state*). Le bas de chaque figure représente le résultat (en termes de nombre de photons dans la cavité) d'un vote majoritaire sur 7 mesures successives, qui permet de se débarrasser des fluctuations rapides du signal.