Partiel de Mécanique Quantique

24/11/2023 - 2 heures

On s'intéresse dans tout le problème à un système constitué d'une part d'un atome à deux niveaux (état fondamental $|-\rangle$ et état excité $|+\rangle$, séparés par une énergie $\hbar\omega_0$) et d'autre part d'un mode d'un champ électromagnétique dans une cavité, à la fréquence $\omega_c/2\pi$, avec des états $|n\rangle$ d'énergie $n\hbar\omega_c$ où $n = 0, 1, 2, \ldots$ Lorsque le champ électromagnétique dans la cavité est dans l'état $|n\rangle$, on dit qu'il y a n photons dans la cavité
On note $|\pm, n\rangle = |\pm\rangle \otimes |n\rangle$ une base des états du système complet.
On utilise pour l'atome les notations habituelles des spins $\frac{1}{2}$, notamment :

$$|\pm\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle \pm |-\rangle\right) \tag{1}$$

On note $\delta = \omega_0 - \omega_c$ la différence entre la fréquence de la transition atomique ω_0 et celle de la cavité (du champ électromagnétique) ω_c. On suppose dans la suite $\delta > 0$.

1. Ecrire l'action de l'Hamiltonien $\hat{H}_0^{(1)}$ pour l'atome seul dans la base $|\pm\rangle$, puis de l'Hamiltonien $\hat{H}_0^{(2)}$ dans la base $|n\rangle$ pour le seul champ électromagnétique dans la cavité.
   En déduire l'action du Hamiltonien "total" $\hat{H}_0$ du système composite sur la base des $|\pm, n\rangle$. Montrer que le spectre de $\hat{H}_0$ est constitué d'un état fondamental non dégénéré et d'une infinité de doublets (couples d'états *proches* en énergie). Donner l'expression des états associés à ces différents niveaux et préciser ce qu'on entend par *proches*.

Quand l'atome est dans la cavité, il y a un couplage entre l'atome et le champ électromagnétique, par un hamiltonien $\hat{H}_c$, dont les seuls éléments de matrice non-nuls sont (pour tout $n \geq 1$) :

$$\langle -, n|\hat{H}_c|+, n-1\rangle = \langle +, n-1|\hat{H}_c|-, n\rangle = \frac{\hbar\Omega}{2}\sqrt{n}, \tag{2}$$

avec $\Omega \ll \delta \ll \omega_0$.

2. En ordonnant les états de la base comme $\{|-, 0\rangle, |+, 0\rangle, |-, 1\rangle, |+, 1\rangle, |-, 2\rangle, |+, 2\rangle, \ldots\}$, esquissez la matrice (infinie) de $\hat{H}_c$, puis celle de $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_c$, dans cette base. Qu'observe-t-on ? Expliquez brièvement pourquoi la recherche des valeurs et vecteurs propres de $\hat{H}$ peut se faire dans des sous-espaces $\mathcal{E}_n$ (avec $n \geq 1$) de dimension 2.
   Donner une base de $\mathcal{E}_n$.

3. En tenant compte du couplage $\hat{H}_c$, donner les énergies propres du système (donc de $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_c$) dans la limite $\Omega \ll \delta$. **On se contentera de l'ordre non-nul le plus bas en** Ω/δ et **on approximera les états propres de** $\hat{H}$ **par ceux de** $\hat{H}_0$.
   Justifier brièvement cette approximation. On notera $E_{\pm,n}$ ces énergies.

4. Montrer que la différence d'énergie $\Delta E(n)$ entre les états $|+,n\rangle$ et $|-,n\rangle$ se met sous la forme :
$$\Delta E(n) = \hbar\omega_0 + \frac{\hbar\Omega^2}{2\delta}\left(n+\frac{1}{2}\right). \tag{3}$$

On admet qu'on peut prendre en compte la partie constante de $\Delta E(n)$ en redéfinissant l'état (un peu comme on l'a fait dans le TD sur la résonance magnétique).

On ne garde donc que le terme proportionnel à n par la suite.

On suppose que l'atome traverse la cavité en un temps t_{int} avec initialement, lorsque l'atome entre dans la cavité, la cavité et l'atome dans l'état :

$$|\psi(t=0)\rangle = |+\rangle_x \otimes |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+,n\rangle + |-,n\rangle\right), \quad n = 0,1,2,\ldots. \tag{4}$$

5. Montrer qu'après un temps d'interaction t_{int}, l'état de l'atome peut se mettre sous la forme :
$$|\psi(t_{\text{int}})\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + \mathrm{e}^{in\phi_0}|-\rangle\right). \tag{5}$$
Donner l'expression de ϕ_0.
6. Évaluer la valeur de δ nécessaire pour avoir $\phi_0 = \pi$. La fréquence de couplage est $\Omega/2\pi = 50\,\text{kHz}$, la cavité fait $w_0 = 6\,\text{mm}$ de large et on prend une vitesse des atomes de l'ordre de $100\,\text{m.s}^{-1}$. On gardera cette valeur de ϕ_0 dans toute la suite.
7. Quel est dans ce cas l'état atomique à la sortie de la cavité si $n=0$? si $n=1$?

On réalise maintenant la même séquence, avec l'atome et la cavité initialement dans l'état :

$$|\psi(t=0)\rangle = |+\rangle_x \otimes (c_0|0\rangle + c_1|1\rangle) \qquad \left(\text{avec } |c_0|^2 + |c_1|^2 = 1\right). \tag{6}$$

8. L'état du système avant le passage dans la cavité est-il intriqué ou factorisé ? Qu'en est-il après le passage dans la cavité ?
9. Montrer que la mesure de la composante $\hat{\sigma}_x$ permet de mesurer le nombre n de photons.
10. Quels résultats peut-on obtenir, avec quelle probabilité ? Quel est l'état du système après la mesure ?
11. Quel est le résultat d'une mesure effectuée ensuite ? Cette expérience se rapproche-t-elle plutôt de l'expérience de Stern et Gerlach ou de l'expérience sur l'effet Zénon ?
12. Quelle étape supplémentaire faut-il effectuer avant la détection pour effectuer une mesure similaire si on ne peut mesurer que $\hat{\sigma}_z$? (question plus difficile)

13. Commenter les courbes expérimentales, notamment :
    (a) la succession de résultats similaires pour la mesure de l'état atomique, seulement perturbée par certains résultats discordants (qui représentent environ 10% des résultats)
    (b) la possible origine de ces résultats discordants (on pourra faire comme s'il s'agissait d'une mesure de composante d'un spin $\frac{1}{2}$)
    (c) la constance des résultats obtenus par un vote majoritaire sur 7 mesures, où on assigne à l'atome l'état mesuré sur la majorité des 7 mesures précédentes (donc sur au moins 4 des 7 mesures précédentes). On pourra par exemple en illustrer le principe en calculant la probabilité qu'un vote sur le résultat de 3 mesures successives donne un faux résultat. Le vote sur 7 mesures est évidemment encore plus efficace.
    (d) la présence de quelques sauts (changements persistants du résultat de la mesure, vers le haut ou vers le bas). A quoi peuvent-ils êtres dus, sachant que la cavité est à 0,8 K et que la fréquence de la transition atomique est d'environ 50 GHz ? (question hors barême, qui fait appel à des connaissances en dehors de la physique quantique)

	Symbole	Valeur	Unité
Constante de Planck	h	$6{,}62.10^{-34}$	J.s
Constante de Boltzmann	k_{B}	$1{,}38.10^{-23}$	J/K

On réalise enfin la même séquence, avec l'atome et la cavité initialement dans l'état :

$$|\psi(t=0)\rangle = |+\rangle_x \otimes \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n|n\rangle\right) \qquad \left(\text{avec } \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = 1\right) . \tag{7}$$

14. Quel renseignement fournit alors cette expérience sur l'état du champ ?
15. Quelle est la probabilité de mesurer l'atome dans l'état $|+\rangle$?
16. Quel est alors l'état du champ immédiatement après la mesure ?

Bibliographie :

Sébastien Gleyzes... & Serge Haroche, *Quantum jumps of light recording the birth and death of a photon in a cavity*, Nature **446**, 297 (2007).

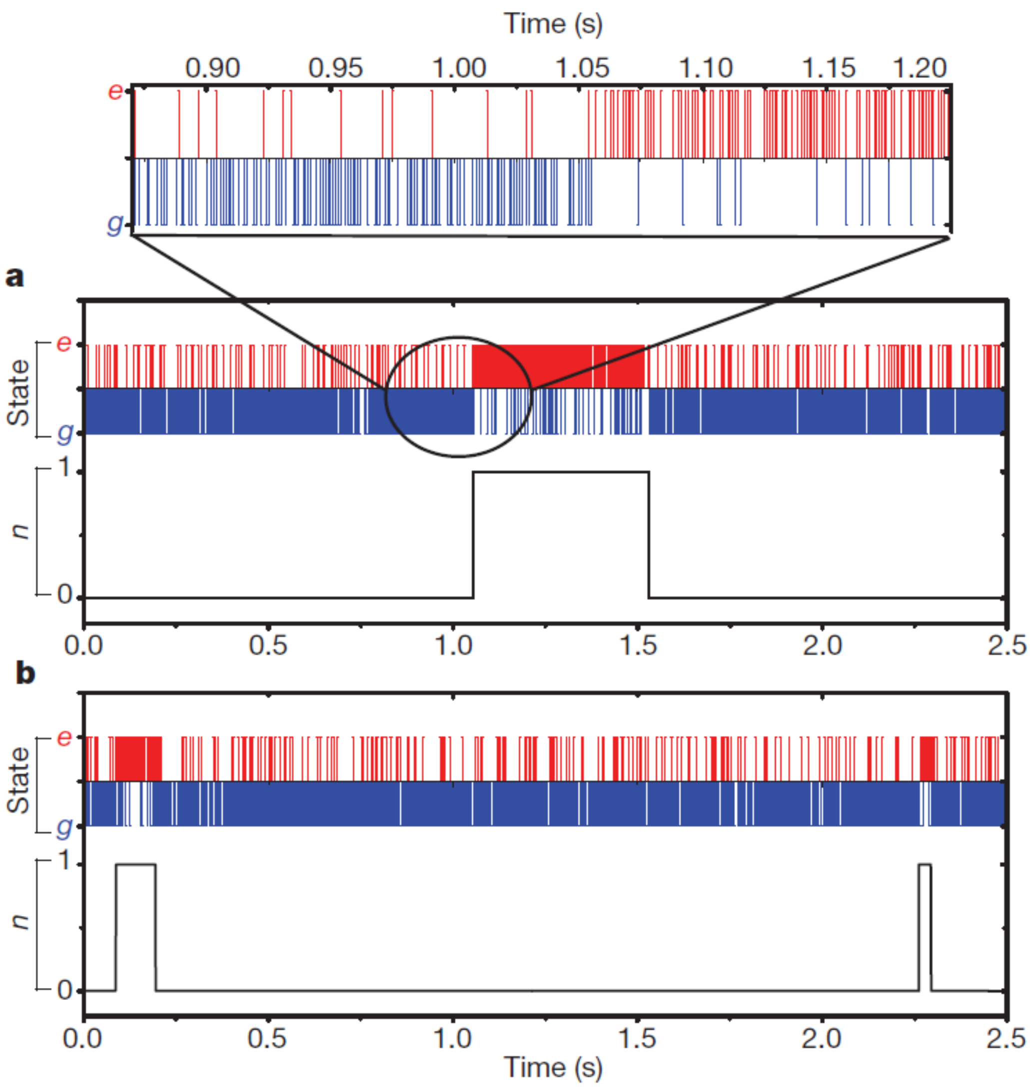

Figure 1 – Résultats de l'expérience de l'équipe de Serge Haroche. Les détections atomiques sont signalées par les traits bleus pour l'état fondamental $|-\rangle$ (ici noté $|g\rangle$ pour *ground state*) et par les traits rouges pour l'état excité $|+\rangle$ (ici noté $|e\rangle$ pour *excited state*). Le bas de chaque figure représente le résultat (en termes de nombre de photons dans la cavité) d'un vote majoritaire sur 7 mesures successives, qui permet de se débarrasser des fluctuations du signal. Ces résultats sont obtenus en mesurant $\hat{\sigma}_z$ mais on obtiendrait des résultats similaires en mesurant $\hat{\sigma}_x$.