Mécanique quantique – L3

Pierre-François Cohadon - Tristan Villain - Qinhan Wang

TD 4 - 17/10/2024

Franges de Ramsey

Questions préliminaires

On considère un système à deux niveaux dont les vecteurs $|a\rangle$ et $|b\rangle$ forment une base de l'espace des états. L'évolution du système est décrite par le hamiltonien :

$$\widehat{H} = \frac{\hbar\delta}{2}\left(-|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|\right) + \frac{\hbar\Omega}{2}\left(|a\rangle\langle b| + |b\rangle\langle a|\right), \tag{1}$$

où δ et Ω sont deux paramètres réels.

1. Écrire les éléments de matrice de $\widehat{H}$ dans la base $\{|a\rangle, |b\rangle\}$.
2. Calculer les valeurs propres $E_\pm$ de $\widehat{H}$ en fonction de $\widetilde{\Omega} = \sqrt{\Omega^2 + \delta^2}$.
3. Montrer que l'opérateur d'évolution $\widehat{U}(t, t')$ ne dépend que de $\tau = t - t'$.
4. Calculer ses éléments de matrice dans la base $\{|a\rangle, |b\rangle\}$. Dans la suite on notera $\widehat{U}_0(\delta, \Omega, \tau)$ l'opérateur d'évolution associé au hamiltonien (1).

Franges de Ramsey dans une fontaine atomique

Dans une fontaine atomique, on fait interagir un jet vertical d'atomes en vol libre avec des photons piégés dans une cavité. Les atomes sont envoyés vers le haut avec une vitesse initiale v_0, traversent une première fois la cavité en un temps τ, évoluent ensuite en vol libre pendant un temps T avant de traverser la cavité une seconde fois (Fig. 1).

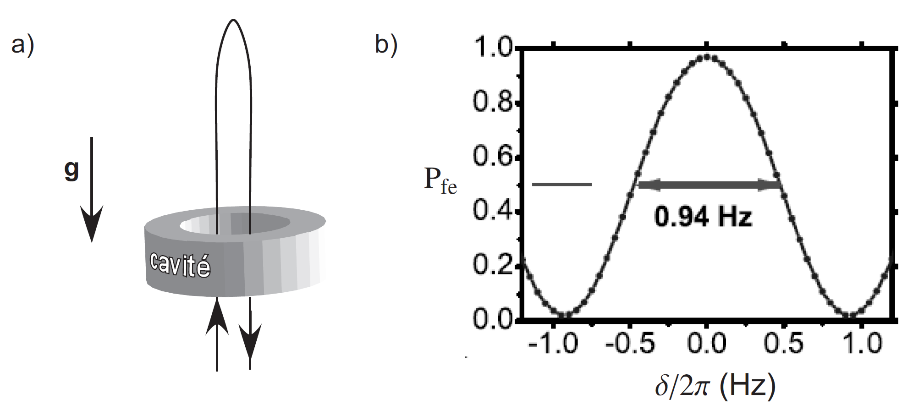


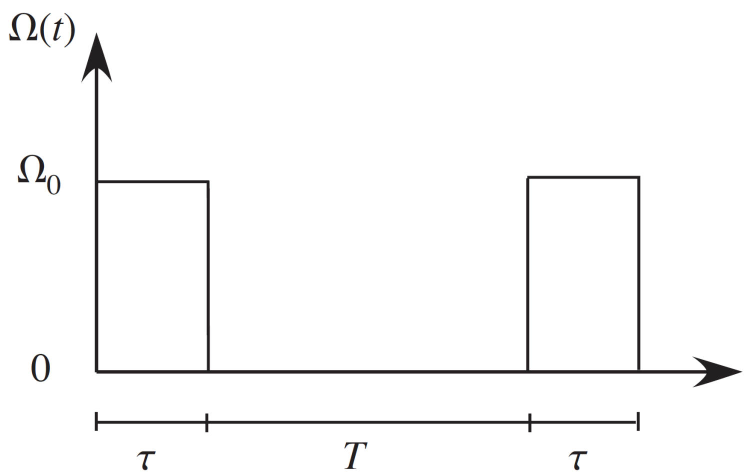
Figure 1: a) Trajectoire des atomes dans une fontaine atomique. τ désigne le temps passé dans la cavité à l'aller et au retour et T le temps de vol libre entre les deux passages. b) Franges de Ramsey obtenues sur la fontaine atomique de césium de l'Observatoire de Paris.

Dans ce qui suit, on ne considèrera que deux niveaux atomiques f et e (pour fondamental et excité) séparés d'une énergie $E_a = \hbar\omega_a$. On notera ω la pulsation des photons de la cavité et on notera $\delta = \omega_a - \omega$.
Enfin, on suppose que l'espace des états du système atome+cavité est engendré par les vecteurs $|\alpha, N\rangle$, où $\alpha \in \{\mathrm{e}, \mathrm{f}\}$ et $N \in \mathbb{N}$ correspondent respectivement à l'état de l'atome et au nombre de photons dans la cavité.

5. A $t = 0$, on prépare le système dans l'état $|\mathrm{f}, N\rangle$. En considérant les processus possibles d'émission et d'absorption de photons par l'atome, montrer que l'évolution du vecteur d'état se fait dans le sous espace $\mathcal{E}_N$ engendré par $|a\rangle = |\mathrm{f}, N\rangle$ et $|b\rangle = |\mathrm{e}, N-1\rangle$.

6. Montrer que par un choix judicieux de l'origine des énergies, les états $|a\rangle$ et $|b\rangle$ ont des énergies $-\hbar\delta/2$ et $\hbar\delta/2$.

On admet que la restriction à l'espace $\mathcal{E}_N$ du hamiltonien du système atome+cavité peut s'écrire sous la forme (1) avec Ω dépendant du temps selon l'évolution ci-dessous :



7. Justifier physiquement cette forme de hamiltonien.

8. Montrer que l'opérateur d'évolution entre $t = 0$ et $t = T + 2\tau$ s'écrit :

$$\widehat{U}(T + 2\tau) = \widehat{U}_0(\delta, \Omega_0, \tau)\widehat{U}_0(\delta, 0, T)\widehat{U}_0(\delta, \Omega_0, \tau),$$

où $\widehat{U}_0$ est l'opérateur d'évolution calculé à la question préliminaire.

9. On choisit les paramètres du systèmes de façon à avoir $\delta \ll \Omega_0$ et $\Omega_0\tau = \pi/2$. Déduire des questions précédentes que la probabilité P_{fe} de trouver le système dans l'état $|e, N-1\rangle$ à l'instant $t = T + 2\tau$ s'écrit $P_{\mathrm{fe}} \sim \cos^2(\delta T/2)$.

10. Calculer la vitesse v_0 des atomes dans la cavité (on supposera $T \gg \tau$) à partir des résultats présentés sur la figure 1b.