

Mécanique quantique – L3 FIP

Corrigé du TD 12

Perturbations stationnaires

Oscillateurs harmoniques couplés

1. Les opérateurs création \hat{a}_i^\dagger et annihilation \hat{a}_i ont pour expression :

$$\hat{a}_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \hat{X}_i + i \sqrt{\frac{1}{m\hbar\omega}} \hat{P}_i \right) \quad \hat{a}_i^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \hat{X}_i - i \sqrt{\frac{1}{m\hbar\omega}} \hat{P}_i \right)$$

et le hamiltonien \hat{H}_0 s'écrit :

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + 1 \right).$$

2. Les énergies sont de la forme : $E_N = (N + 1) \hbar\omega$ où $N = n_1 + n_2 \in \mathbb{N}$.

La dégénérescence de chaque niveau N est donnée par le nombre de couples (n_1, n_2) possibles. Ici, on peut choisir n_1 entre 0 et N , ce qui fixe n_2 , donc la dégénérescence du niveau E_N est $g_N = N + 1$.

États propres associés à E_N : $|n_1\rangle \otimes |N - n_1\rangle$ où $n_1 \in \mathbb{N}$ et $0 \leq n_1 \leq N$

On tient maintenant compte d'un terme d'interaction entre les 2 oscillateurs :

$$\hat{W} = gm\omega^2 \hat{X}_1 \hat{X}_2 \quad \text{avec} \quad |g| \leq 1.$$

Dans un premier temps, **on traite ce terme en perturbation** de \hat{H}_0 .

3. On écrit les \hat{X}_i en fonction des $\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger \dots$:

$$\hat{X}_i = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\hat{a}_i + \hat{a}_i^\dagger \right) \Rightarrow \hat{W} = \frac{1}{2} g \hbar\omega \left(\hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_2 \hat{a}_1^\dagger + \hat{a}_1 \hat{a}_2 + \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \right)$$

L'opérateur \hat{W} va donc connecter des états de E_N entre eux (termes $\hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger$ et $\hat{a}_2 \hat{a}_1^\dagger$, qui conservent $N = n_1 + n_2$), mais aussi les coupler à des états de E_{N-2} (terme $\hat{a}_1 \hat{a}_2$) et E_{N+2} (terme $\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger$).

D'après ce qu'on a vu en cours, on sait que les premiers termes vont jouer un rôle pour les sous-espaces dégénérés, alors que les seconds seront à prendre en compte pour la correction d'énergie au second ordre d'un état initialement non-dégénéré.

4. L'état $|N = 0\rangle$ est non-dégénéré. La correction au premier ordre est nulle :

$$\Delta E_0^{(1)} = 0,$$

puisque \hat{W} n'a pas d'élément diagonal.

En appliquant la formule générale au second ordre, le seul terme qui intervient dans le calcul est le terme en $\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger$ (les autres termes appliqués à $|N = 0\rangle$ donnent 0) et la correction à l'énergie du niveau fondamental s'écrit :

$$\Delta E_0^{(2)} = \left(\frac{1}{2} g \hbar \omega \right)^2 \left(\frac{1}{-2\hbar \omega} \right) = -\frac{1}{8} g^2 \hbar \omega$$

On a nécessairement $\Delta E_0^{(2)} < 0$ pour le niveau fondamental puisque tous les états auxquels l'état $|N = 0\rangle$ est couplé (en pratique, un seul état) sont plus hauts en énergie, et que donc tous le repoussent vers le bas.

5. Les seuls termes qui interviennent dans le calcul de la restriction de la perturbation au sous-espace propre associé à E_1 sont les termes en $\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2$ et en $\hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger$.

Donc, dans la base $|0\rangle \otimes |1\rangle, |1\rangle \otimes |0\rangle$, la matrice à diagonaliser est :

$$\frac{1}{2} g \hbar \omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

dont les valeurs propres sont $\pm \frac{1}{2} g \hbar \omega$. On a donc :

$$E_{1,\pm}^{(1)} = 2\hbar \omega \left(1 \pm \frac{g}{4} \right).$$

6. Pour E_2 , dans la base $|2\rangle \otimes |0\rangle, |1\rangle \otimes |1\rangle, |0\rangle \otimes |2\rangle$, la matrice à diagonaliser est :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} g \hbar \omega \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ses valeurs propres sont 0 et $\pm g \hbar \omega$. Les énergies corrigées sont donc :

$$E_{2,0}^{(1)} = 3\hbar \omega \quad \text{et} \quad E_{2,\pm}^{(1)} = 3\hbar \omega \left(1 \pm \frac{g}{3} \right).$$

On procède maintenant à un traitement exact du terme de couplage.

Pour cela, on introduit les grandeurs :

$$X_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (X_1 + X_2) \quad \text{et} \quad X_- = \frac{1}{\sqrt{2}} (X_1 - X_2)$$

7. Le hamiltonien $\hat{H}_0 + \hat{W}$ du système se réécrit en fonction de \hat{X}_+ et \hat{X}_- et des opérateurs impulsion associés \hat{P}_+ et \hat{P}_- .

$$\begin{aligned} \hat{X}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X}_+ + \hat{X}_-) & \hat{X}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{X}_+ - \hat{X}_-) \\ \Rightarrow \quad \hat{H}_0 + \hat{W} &= \frac{\hat{P}_+^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 (1+g) \hat{X}_+^2 + \frac{\hat{P}_-^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 (1-g) \hat{X}_-^2 = \hat{H}_+ + \hat{H}_- \end{aligned}$$

où \hat{H}_+ et \hat{H}_- commutent.

8. Les **énergies exactes** du système des 2 oscillateurs couplés s'écrivent donc :

$$E_{n_+, n_-} = \left(n_+ + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega\sqrt{1+g} + \left(n_- + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega\sqrt{1-g} \quad \text{avec} \quad (n_+, n_-) \in \mathbb{N}^2$$

On peut les comparer avec les résultats du traitement en perturbation :

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega\sqrt{1+g} + \frac{1}{2}\hbar\omega\sqrt{1-g} = \hbar\omega \left(1 - \frac{1}{8}g^2\right) + O(g^3)$$

$$E_{1,+} = \frac{3}{2}\hbar\omega\sqrt{1+g} + \frac{1}{2}\hbar\omega\sqrt{1-g} = 2\hbar\omega \left(1 + \frac{g}{4}\right) + O(g^2)$$

$$E_{1,-} = \frac{1}{2}\hbar\omega\sqrt{1+g} + \frac{3}{2}\hbar\omega\sqrt{1-g} = 2\hbar\omega \left(1 - \frac{g}{4}\right) + O(g^2)$$

$$E_{2,0} = \frac{3}{2}\hbar\omega\sqrt{1+g} + \frac{3}{2}\hbar\omega\sqrt{1-g} = 3\hbar\omega + O(g^2)$$

$$E_{2,+} = \frac{5}{2}\hbar\omega\sqrt{1+g} + \frac{1}{2}\hbar\omega\sqrt{1-g} = 3\hbar\omega \left(1 + \frac{g}{3}\right) + O(g^2)$$

$$E_{2,-} = \frac{1}{2}\hbar\omega\sqrt{1+g} + \frac{5}{2}\hbar\omega\sqrt{1-g} = 3\hbar\omega \left(1 - \frac{g}{3}\right) + O(g^2)$$

On retrouve les résultats obtenus par le traitement en perturbation (au second ordre pour le fondamental, au premier pour les autres).

9. La méthode employée est analogue au traitement classique d'oscillateurs couplés.

On a fait apparaître **les modes normaux** du système X_+ (mouvement du centre de masse) et X_- (mouvement relatif).

Similitudes : le problème est ramené à celui de 2 oscillateurs harmoniques indépendants.

Différences : dans le cas classique, le couplage fait apparaître 2 fréquences propres. Dans la cas quantique il y a apparition d'une infinité de fréquences propres.