

1

Corrigé du partie de PQ

1.

$$\text{On a } \hat{H}_0^{(1)} |+\rangle = \hbar\omega_0 |+\rangle$$

$$\hat{H}_0^{(1)} |-\rangle = 0 \quad (\text{énergie nulle})$$

On peut évidemment déduire l'énergie des énergies, en prenant $\hat{H}_0^{(1)} = \frac{\hbar}{2}\omega_0 \hat{J}_z^2$ par exemple

$$\text{On a } \hat{H}_0^{(2)} |m\rangle = m\hbar\omega_c |m\rangle,$$

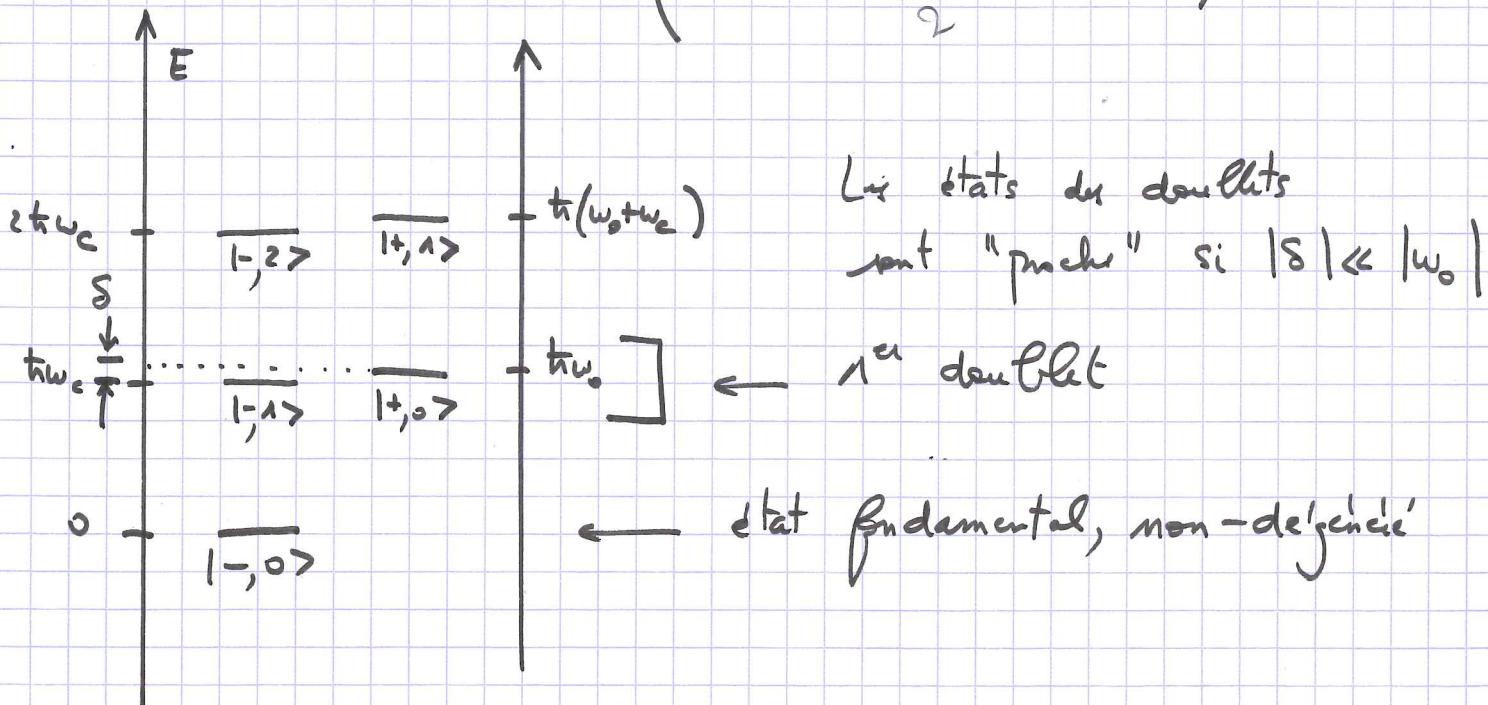
toujours à une constante près

(d'ailleurs, vous venez un peu plus tard que pour un oscillateur harmonique, on prend généralement

$$E_m = (m+1/2) \hbar\omega_c$$

Du coup, avec $\hat{H}_0 = \hat{H}_0^{(1)} \otimes \mathbb{1}_{\text{champ}} + \mathbb{1}_{\text{atome}} \otimes \hat{H}_0^{(2)}$, on trouve :

$$\hat{H}_0 |\pm, m\rangle = \left((1 \pm \frac{1}{2}) \hbar\omega_0 + m\hbar\omega_c \right) |\pm, m\rangle$$



2.

2

	-0	+0	-1	+1	-2	+2	...
-0	0						
+0							
-1							
+1							
-2							
+2							

Matrice de \hat{H}_c
(à t puis)

Matrice de \hat{H}_b
(à t puis)

Comme \hat{H}_c ne couple que des états de la base $|-, n\rangle$ et $|+, n+1\rangle$ (comme au TD 5), on ne retiendra, en écrivant \hat{H}_c dans la base propre de \hat{H}_b $|\pm, m\rangle$, avec une matrice constituée d'un carré réel et de matrices 2×2 .

La matrice est diagonale par (petits blocs)

\Rightarrow on peut le diagonaliser dans les sous-espaces E_m (avec $m \geq 1$) engendrés par $|-, n\rangle$ et $|+, n-1\rangle$, qui sont les états "puochi" de la question précédente.

3.

En tenant compte du couple \vec{f}_c , on a à diagonaliser

$$\hat{A} = \Omega \begin{pmatrix} w_0 + (m-1)w_c & \frac{\sqrt{2}\sqrt{m}}{2} \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ \frac{\sqrt{2}\sqrt{m}}{2} & \vdots & m w_c \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

En décalant l'origine des énergies à la moyenne des deux énergies

$$\left(= (m-1)w_c + \frac{w_c + w_0}{2} = mw_c + \frac{s}{2} \right),$$

on se ramène à

$$\hat{A} = \frac{\Omega}{2} \begin{pmatrix} s & \sqrt{2}\sqrt{m} \\ \sqrt{2}\sqrt{m} & -s \end{pmatrix}.$$

On peut calculer exactement les valeurs propres en calculant le polynôme caractéristique (à $\frac{1}{2}$ pér)

$$(\lambda - s)(\lambda + s) - (\sqrt{2}\sqrt{m})^2$$

$$\Rightarrow \lambda_{\pm} = \pm \sqrt{s^2 + n\sqrt{2}^2}$$

\Rightarrow au final, on trouve :

$$\text{Et si } \lambda_{\pm} = \pm s \left(1 + \frac{n\sqrt{2}^2}{s^2} \right)^{1/2}$$

$$\lambda_{\pm} = \pm s \left(1 + \frac{n\sqrt{2}^2}{2s^2} \right) \text{ avec } s \gg \sqrt{2}$$

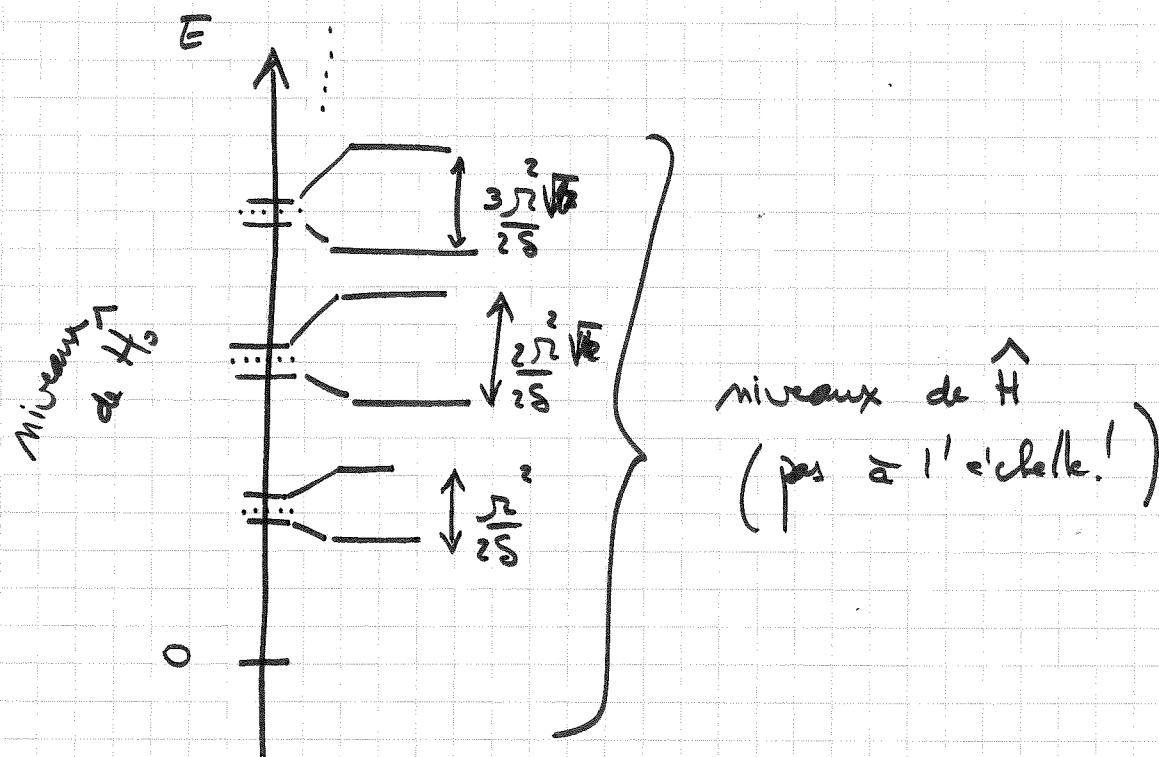
Les énergies sont donc (en rejetant l'énergie moyenne des 2 états) :

$$E_{m\pm,n} = m\omega_c + \frac{\delta}{2} \pm \left(\delta + m \frac{\omega^2}{2\delta} \right)$$

$$E_{m\pm,n} = m\omega_c + \frac{\delta}{2}(1 \pm 1) \pm m \frac{\omega^2}{4\delta}$$

valeurs propres
de \hat{H}_0
(on les retrouve
évidemment pour $\Omega = 0$)

effet du couplage :
les niveaux se
repoussent



Contrairement au cas dégénéré ($\delta=0$, vu au TD5) :

- la levée de dégénérence est quadratique en Ω
(et pas linéaire)

- on va voir aussi que les états propres sont très f

Recherche des états propres

$$\begin{pmatrix} \delta & \sqrt{\epsilon}m \\ \sqrt{\epsilon}m & -\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \left(\delta + \frac{m\epsilon^2}{2\delta} \right) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{\delta a} + \sqrt{\epsilon}m b = \cancel{\delta a} + \frac{m\epsilon^2}{2\delta} b \\ \sqrt{\epsilon}m a - \cancel{\delta b} = \left(\delta + \frac{m\epsilon^2}{2\delta} \right) a \end{cases}$$

$$\Rightarrow b = \frac{m\epsilon^2}{2\delta} \frac{1}{\sqrt{\epsilon}m} a = \frac{\sqrt{\epsilon}m}{2\delta} a \quad \text{(les 2 équations sont équivalentes)}$$

$$\Rightarrow \text{état propre } |+,m\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{\epsilon}m}{2\delta} \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{comme suggéré par l'énoncé}$$

$$\text{On a une autre } |-,m\rangle \hat{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On verra plus tard dans le cours (fin du S1 ou au S2) la justification de cette approximation

(cadre général quand on a un hamiltonien "petit" devant un autre, qui est alors traité comme une perturbation)

Les états propres ont donc inchangé, par rapport au cas $\epsilon=0$ où ils ont les combinaisons \pm symétriques des états de départ ($+S_z$, car on a toujours $S_z \gg \delta (=0)!$)

4.

On a obtenu

$$\Delta E(m) = \hbar \omega_0 + \frac{(m+1) r^2}{q \epsilon} - \left(-\frac{m r^2}{q \epsilon} \right)$$

car $|+m\rangle$
est passé vers haut
dans E_{m+1}
(avec facteur $(m+1)$)

car $| -m \rangle$
est passé vers le bas
dans E_m
(... m)

$$\Delta E(m) = \hbar \omega_0 + \frac{r^2}{2 \epsilon} \left(m + \frac{1}{2} \right)$$

On voit qu'en présence du champ électromagnétique,
la fréquence de la transition atomique $|+\rangle \leftrightarrow |-\rangle$
est décalée

× par un facteur proportionnel à m
(donc à l'intensité de la lumière)

× par un facteur non-nul si $m=0$

C'est le Lamb-shift (déplacement de Lamb,
du nom du physicien (Prix Nobel 1955) qui a découvert
ce effet avec Rutherford (pas Rutherford!)
et l'a annoncé à la Conférence de Shelter Island

A cause du couplage avec le champ e-m quantifié
(m en l'absence de photons), les niveaux sont décalés

→ $2s_{1/2}$ et $2p_{3/2}$ sont décalés de ~ 1 GHz

6.

A noter que si la lumière est polarisée
(par exemple un faisceau gaussien),
alors on a l'intensité $I(\vec{r})$

\rightarrow ce d閿lage en énergie (sur le bas pour le niveau fondamental pour $S < 0$)
peut jouer le rôle d'une énergie potentielle

On peut ainsi réaliser des puits de potentiel

pour piéger des atomes

cf TD sur atomes de Cs dans pièges harmoniques

On ne garde que le tiers en M pour la suite

* La préſence de photons dans le centre
peut donc  d閿

d閿ile donc la fréquence de transition atomique.

On va donc utiliser la m ethode des franges

de Ramsey (dont on a vu au TD 4 qu'elle était

très sensible aux variations des fréquences atomiques)

pour mettre en évidence ce d閿lage

de fréquence, et donc, in fine,

mesurer le néo de photons n .

5.

Comme au TD 4, on utilise une première zone de Ramsey pour préparer l'atome dans l'état

$$|\Psi_{\text{at}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |e\rangle + |g\rangle \}$$

On suppose que le centre est dans l'état $|n\rangle$

$$\Rightarrow |\Psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle + |-\rangle) \otimes |n\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |+,n\rangle + |-,n\rangle \}$$

Il ne se passe rien tant que l'atome est en dehors de la cavité

Quand l'atome est dans la cavité, les énergies des 2 états sont dépendantes de

$$\Delta E(n) = \cancel{\hbar \omega_s} + \frac{\hbar \omega^2}{2\delta} (n + \frac{1}{2})$$

\Rightarrow la superposition évolue donc pour devenir à t_{int}

$$|\Psi(t_{\text{int}})\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |+,n\rangle e^{-\frac{iE_1 t_{\text{int}}}{\hbar}} + |-,n\rangle e^{-\frac{iE_2 t_{\text{int}}}{\hbar}} \}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{iE_1 t_{\text{int}}}{\hbar}} \{ |+,n\rangle + e^{i \Delta E(n) t_{\text{int}} / \hbar} |-,n\rangle \}$$

de la forme demandée avec $\phi_0 = \frac{\hbar \omega^2 t_{\text{int}}}{2\delta}$

6.

On veut $\phi_0 = \pi$

$$\Rightarrow \frac{\omega^2 t_{int}}{2\delta} = \pi$$

$$\Rightarrow \frac{\delta}{\omega} = \frac{\omega}{2\pi} t_{int} \approx \frac{\omega}{2\pi} \frac{W_0}{G}$$

avec $\left\{ \begin{array}{l} \omega/2\pi = 50 \text{ kHz} \\ W_0/G \approx 6 \text{ mm}/100 \text{ ms}^{-1} = 60 \mu\text{s} \end{array} \right.$

On trouve $\frac{\delta}{\omega} \approx 5 \cdot 10^4 \times 60 \cdot 10^{-6}$

$\frac{\delta}{\omega} \approx 3$ On trouve donc un déseccord d'environ 150 kHz

et on a (à peu près) $\delta \gg \omega$
comme on l'a supposé

7. Si $m=0 \rightarrow$ on retrouve $|\psi(t_{int})\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+,m\rangle + |-,m\rangle)$
donc l'atome est toujours dans l'état $|+\rangle_x$

Si $m=1 \rightarrow$ il y a un déphase de π , l'atome est dans $|-\rangle_x$

8.

$$|\Psi(t=0)\rangle = |+\rangle_z \otimes (c_0|0\rangle + c_1|1\rangle)$$

Cet état est factorisé : les 2 systèmes ont des états bien définis

Par l'incertitude de l'équation de Schrödinger :

$$|\Psi(t=\text{int})\rangle = c_0|+\rangle_z|0\rangle + c_1|-\rangle_z|1\rangle$$

$$\neq |\Psi_{\text{tot}}\rangle \otimes |\Psi_{\text{éph}}\rangle$$

L'état est donc maintenant intrigant

a. / 10.

Si on mesure \hat{N}_x , on va trouver ~~$|+\rangle_z$~~ +

avec la probabilité $|c_0|^2$

et le système sera projecté dans $|+\rangle_z|0\rangle$

(en appliquant le projecteur $|+\rangle_z|0\rangle\langle+|c_0\rangle + |+\rangle_z|1\rangle\langle+|c_1\rangle$ à l'état $|\Psi(\text{int})\rangle$)

ou - avec la probabilité $|c_1|^2$

... $|-\rangle_z|1\rangle$

La mesure du \hat{N}_x permet donc de mesurer le nombre de photons

(tant qu'il n'y a que 0 ou 1 photon, puisqu'en n'a que deux résultats possibles)

M.

Si on effectue une nouvelle mesure de \hat{J}_x ,

Comme le système a été préparé dans

$$|+\rangle_x |0\rangle \text{ ou } |-\rangle_x |1\rangle,$$

on va retrouver le même résultat à chaque fois

Comme on mesure une observable qui est une constante du mouvement (\Leftrightarrow qui commute avec \hat{H}_0), on a tout le temps le même résultat

→ c'est l'équivalent de l'expérience de Stern-Gerlach où on mesure tout le temps la même observable

S et G	Observable	Haussle
\hat{S}_z	mesurée	\hat{N} (nb de photons)
$ +\rangle$ et $ -\rangle$	réalités et let	$ 0\rangle$ et $ 1\rangle$
\hat{J}_x $ +\rangle_1$ et $ -\rangle_2$	observable qui est à la norme désignation \uparrow et \downarrow	

C'est différent sur l'expérience sur l'effet Zehnhan où on mesure une observable qui ne commute pas avec \hat{H}_0 .

12.

Si on ne peut pas mesurer \hat{J}_x mais seulement \hat{J}_z
 (ce qui est le cas ici, où on mesure l'état atomique,
 qui correspond à $| \pm \rangle_z$),

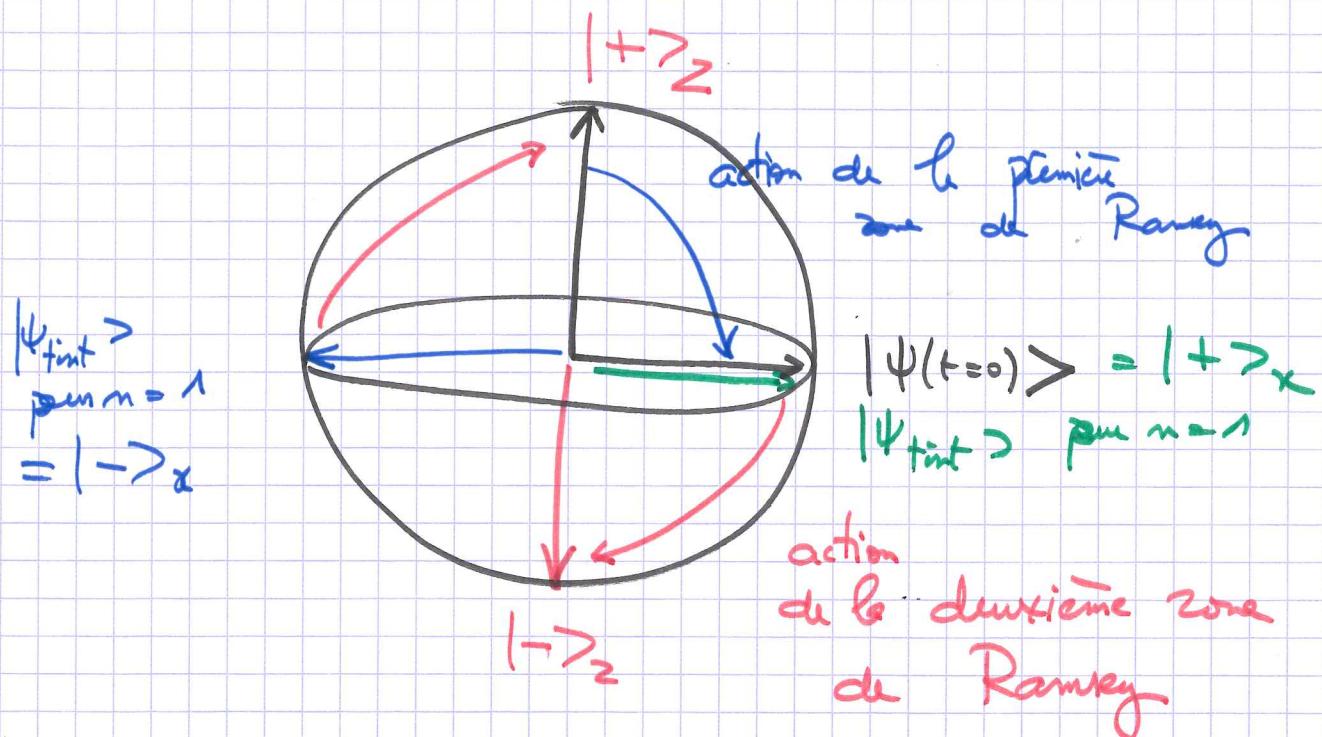
il faut (comme pour les franges de Ramsey)
 appliquer une deuxième zone de Ramsey qui va transformer

$$|g\rangle \rightarrow |e\rangle$$

$$|e\rangle \rightarrow H|g\rangle$$

$$|+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle) \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle - |g\rangle) = (-)|-\rangle_z$$

$$|-\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle - |g\rangle) \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle) = (\dots) |+\rangle_x$$



le point-clé de cette expérience,

B

c'est que l'interaction entre l'atome et le champ transfère le \hat{m} état de départ

en deux états orthogonaux $|+\rangle_z$ et $|-\rangle_z$
selon la valeur de $m (= 0 \text{ ou } 1)$

C'est alors qui permet de mesurer m sans
ambiguité en mesurant $\hat{\sigma}_x$

Si on ne sait pas mesurer que $\hat{\sigma}_x$, il faut ajouter
la 2^e zone de Ramsey
qui transmet l'information sur m
sur $|+\rangle_z$ et $|-\rangle_z$.

L'évolution hamiltonienne dans la 2^e zone de Ramsey

~~garantit~~ préserve l'orthogonalité entre les

2 états (car $U^\dagger U = 1$ pour l'opérateur d'évolution).

Elle transmet simplement l'information sur
une autre observable.

13.

Quand on regarde les combes expérimentales

(a) on voit qu'on a assez systématiquement les mêmes résultats lors des mesures successives, comme attendu

(b) Les 10% de résultats discordants s'expliquent par les défauts des détecteurs atomiques.

dans environ 10% des cas, on détecte $|+\rangle$ alors que l'atome est dans $|-\rangle$, et vice-versa...

En termes d'opérateurs de spin, on pourrait dire que l'appareil du Set G est mal aligné et ne mesure du coup pas $\hat{\sigma}_z$ mais $\hat{\sigma}_{\text{non } z}$

$$\text{avec } \cos^2 \frac{\theta}{2} = 90\%$$

(c) Si on fait un vote sur 3 mesures, il y a 4 cas de figures où on va mesurer + au lieu de -

+++	1 tirage sur 1000
++-	9 tirages sur 1000
+--	99 tirages sur 1000
--+	999 tirages sur 1000

donc la probabilité d'avoir un résultat faux tombe à $\approx 2\% \approx 3\%$ avec 3 mesures

Vous pouvez étudier le cas général si vous aimez les combinaisons.
La solution est dans l'article.

(d) Mais il n'y a pas que des fluctuations très courtes dues aux erreurs de mesure. Parfois, le résultat bascule $0 \leftrightarrow 1$ de façon aléatoire.

C'est dû au fait que si on ne prépare (c'est-à-dire si on prépare le calcul dans l'état à 0 photon),

on peut trouver un photon thermique créé (en absorbé ensuite) par l'environnement à température $T \neq 0$ (corps noir).

Le nbr moyen de photons à la fréquence ω_0 , et à la température T est :

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega_0}{kT}} - 1}$$

À $T = 9.8 \text{ K}$ et pour $\omega_0/2\pi \approx 50 \text{ GHz}$,

on trouve $\bar{n} \approx 0.05$

\Rightarrow en pratique : 95% 0 photon
5% 1 photon

$n > 1$ photons, probabilité négligeable

La première courbe expérimentale présente un événement très exceptionnel : un photon qui vit environ 500 ms (alors que le temps de vie moyen est 130 ms ; la probabilité d'un événement est $\leq 2\%$)

Si on mesure la fraction de temps passé dans l'état à 1 photon sur la deuxième courbe, on obtient qu'on a un segment de 5 mm (sur la feuille A4) et un autre de 1 mm, pour un total de 11,5 cm de courbe temporelle

$$\Rightarrow \text{on estime } \bar{n} \approx \frac{0,6}{11,5} \approx 5\% \text{ ça marche !}$$

(peut trop bien, on n'attend pas forcément un aussi bon accord sur un échantillonnage aussi court)

On voit aussi que les photons arrivent effectivement des temps de l'ordre de 100 ms dans la courbe

14. Le déphaseur est en fait le \bar{n} pour tous les n pairs (en incluant 0), et pour tous les n impairs
 \Rightarrow on mesure la partie des n

$$15. P = \sum_p |c_{2p+1}|^2$$

16. Et on projette sur le sous-espace compact

$$\Rightarrow |\psi\rangle = \sum_p \frac{|c_{2p+1}|^2}{\sum_l |c_{2l+1}|^2} |2p+1\rangle$$