Introduction to quantum mechanics I

Tristan Villain – Pierre-François Cohadon – Qinhan Wang

Séance de tutorat du 26 septembre 2024

TD de tutorat 1 : Opérateurs

---

1 Espace de Hilbert - Opérateurs

Soit $\mathcal{H}$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel dont on note $\langle\cdot|\cdot\rangle$ le produit hermitien. On rappelle que $\langle\varphi|\psi\rangle = \overline{\langle\psi|\varphi\rangle}$
Soit $\widehat{A}$ un endomorphisme de $\mathcal{H}$. On définit $\widehat{A}^\dagger$ tel que :

$$\langle\psi|\widehat{A}^\dagger|\varphi\rangle = \overline{\langle\varphi|\widehat{A}|\psi\rangle}$$

1. Montrer que :
   (a) si $\lambda \in \mathbb{C}$, $(\lambda\widehat{A})^\dagger = \lambda^*\widehat{A}^\dagger$;
   (b) $(\widehat{A}+\widehat{B})^\dagger = \widehat{A}^\dagger + \widehat{B}^\dagger$;
   (c) $(\widehat{A}\circ\widehat{B})^\dagger = \widehat{B}^\dagger \circ \widehat{A}^\dagger$.
2. Une application $\widehat{A}$ est dite hermitienne *ssi* $\widehat{A}^\dagger = \widehat{A}$. Montrer que les éléments diagonaux et les valeurs propres d'une application hermitienne sont réelles.
3. Une application $\widehat{U}$ est dite unitaire *ssi* $\widehat{U}^\dagger = \widehat{U}^{-1}$. Montrer que les valeurs propres d'une application unitaire sont des nombres complexes de module 1.
4. Si $\widehat{A}$ est hermitienne, montrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\widehat{U} = e^{it\widehat{A}}$ est unitaire.

2 Espace de dimension finie

1. On se place dans l'espace $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$. Montrer que le polynôme caractéristique d'une matrice A s'écrit :

$$\chi(\lambda) = \det(A - \lambda\mathrm{Id}) = \lambda^2 - \mathrm{Tr}(A)\lambda + \det(A).$$

2. On note $\mathbf{u}$ le vecteur unitaire repéré par les coordonnées polaires (θ,ϕ) (θ étant l'angle de $\mathbf{u}$ avec (Oz)) et on considère $\sigma_u = \sigma_x u_x + \sigma_y u_y + \sigma_z u_z$. Donner l'expression de σ_u dans la base où σ_z est diagonale. Calculer les vecteurs propres et les valeurs propres associées.
   On donne l'expression des matrices de Pauli :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3 Quelques propriétés des fonctions d'opérateurs

Soit $\widehat{A}$ une observable, dont on note λ_α les valeurs propres (qu'on peut supposer non-dégénérées : $\alpha \neq \beta \Rightarrow \lambda_\alpha \neq \lambda_\beta$) et $|\psi_\alpha\rangle$ les états propres correspondants.
Soit f une fonction du plan complexe dans lui-même. On définit l'opérateur $f(\widehat{A})$ par son action sur les états propres :

$$f(\widehat{A})|\psi_\alpha\rangle = f(\lambda_\alpha)|\psi_\alpha\rangle$$

.

1. Montrer que :
$$f(\widehat{A}) = \sum_\alpha f(\lambda_\alpha)\widehat{P}_\alpha,$$
où $\widehat{P}_\alpha = |\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha|$ est le projecteur sur le sous-espace propre associé à λ_α.
2. À quelle condition $f(\widehat{A})$ est-elle une observable ?
3. Montrer que :
$$\widehat{P}_\alpha = \prod_{\beta\neq\alpha} \frac{\widehat{A} - \lambda_\beta}{\lambda_\alpha - \lambda_\beta}.$$

On suppose maintenant que f est développable en série entière. On a alors naturellement :

$$f(\widehat{A}) = \sum_n a_n \widehat{A}^n.$$

4. *Changement de base*
Soit $\widehat{\Pi}$ un opérateur (unitaire) de changement de base.
Montrer que $\widehat{\Pi}^\dagger f(\widehat{A})\widehat{\Pi} = f(\widehat{\Pi}^\dagger \widehat{A}\widehat{\Pi})$.
5. Soit $\widehat{R}$ un opérateur représenté dans une certaine base par la matrice :
$$\widehat{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Trouver les valeurs propres de $\widehat{R}$.
En déduire la matrice de $f(\widehat{R}) = \exp(i\theta\widehat{R})$ dans la base de départ.
Cet opérateur est-il une observable ?
6. Montrer que $[\widehat{A}, \widehat{B}\widehat{C}] = [\widehat{A}, \widehat{B}]\widehat{C} + \widehat{B}[\widehat{A}, \widehat{C}]$.
7. Soient $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ deux observables qui commutent avec $[\widehat{A}, \widehat{B}]$.
Montrer que $[\widehat{A}, f(\widehat{B})] = [\widehat{A}, \widehat{B}]f'(\widehat{B})$.

4 Inégalité de Heisenberg

1. Que dire de deux observables commutant entre elles ?

2. Soient deux observables $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ et un système dans un état $|\psi\rangle$ *quelconque*.
   Montrer que :
$$\Delta\widehat{A} \cdot \Delta\widehat{B} \geqslant \frac{1}{2}|\langle[\widehat{A}, \widehat{B}]\rangle|.$$
   Indication :
   On pourra considérer l'opérateur $\widehat{C}(\lambda) = \widehat{\delta A} + i\lambda\widehat{\delta B})$ où λ est un réel quelconque, $\widehat{\delta A} = \widehat{A} - \langle\widehat{A}\rangle$ et $\widehat{\delta B} = \widehat{B} - \langle\widehat{B}\rangle$, et calculer la norme de $\widehat{C}(\lambda)|\psi\rangle$.