Mécanique quantique – L3 FIP

Correction du TD 4 - Franges de Ramsey

Questions préliminaires :

1. Il suffit de calculer les différents éléments $\langle a, b|\hat{H}|a, b\rangle$. On obtient :

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \langle a|\hat{H}|a\rangle & \langle a|\hat{H}|b\rangle \\ \langle b|\hat{H}|a\rangle & \langle b|\hat{H}|b\rangle \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} -\delta & \Omega \\ \Omega & \delta \end{pmatrix}.$$

2. Le plus simple ici est de calculer les racines du polynôme caractéristique de la matrice :

$$\chi(X) = X^2 - X\mathrm{Tr}\ \hat{H} + \det\ \hat{H} = X^2 - \frac{\hbar^2}{4}\left(\delta^2 + \Omega^2\right).$$

   On obtient donc les racines $E_\pm = \pm\frac{\hbar\tilde{\Omega}}{2}$.

3. L'opérateur d'évolution $\hat{U}(t, t')$ peut se calculer simplement ici, car **le hamiltonien ne dépend pas du temps**. On obtient :

$$\hat{U}(t, t') = e^{-i\hat{H}(t-t')/\hbar} = e^{-i\hat{H}\tau/\hbar}.$$

   L'**invariance par translation dans le temps du hamiltonien** apparaît dans l'opérateur d'évolution sous la forme d'une dépendance en $\tau = t - t'$.

4. On peut envisager plusieurs méthodes pour calculer $\hat{U}(t, t')$.

Méthode 1 :
Comme dans le TD 3, l'opérateur d'évolution peut se calculer explicitement très simplement en utilisant les matrices de Pauli. Le hamiltonien se réécrit :

$$\begin{aligned} \hat{H} &= -\frac{\hbar\delta}{2}\hat{\sigma}_z + \frac{\hbar\Omega}{2}\hat{\sigma}_x \\ &= \frac{\hbar\tilde{\Omega}}{2}\,\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\mathbf{u}, \end{aligned}$$

avec le vecteur unitaire $\mathbf{u} = (\frac{\Omega}{\tilde{\Omega}}, 0, -\frac{\delta}{\tilde{\Omega}})$. Il vient donc pour opérateur d'évolution :

$$\begin{aligned} \hat{U}(\delta, \Omega, \tau) &= e^{-i\frac{\tilde{\Omega}\tau}{2}\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\mathbf{u}} \\ &= \cos\frac{\tilde{\Omega}\tau}{2}\mathbb{I} - i\sin\frac{\tilde{\Omega}\tau}{2}\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\mathbf{u}. \end{aligned}$$

Exprimé dans la base $\{|a\rangle, |b\rangle\}$, l'opérateur d'évolution s'écrit donc enfin :

$$\hat{U}(\delta, \Omega, \tau) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\tilde{\Omega}\tau}{2} + i\frac{\delta}{\tilde{\Omega}}\sin\frac{\tilde{\Omega}\tau}{2} & -i\frac{\Omega}{\tilde{\Omega}}\sin\frac{\tilde{\Omega}\tau}{2} \\ -i\frac{\Omega}{\tilde{\Omega}}\sin\frac{\tilde{\Omega}\tau}{2} & \cos\frac{\tilde{\Omega}\tau}{2} - i\frac{\delta}{\tilde{\Omega}}\sin\frac{\tilde{\Omega}\tau}{2} \end{pmatrix}.$$

Méthode 2 :
On peut envisager de calculer $\hat{U}(t,t')$ en passant dans la base propre de $\hat{H}$, mais dans le cas où δ est non-nul (qui nous intéresse ici), les matrices de passage sont un peu pénibles à écrire.

Méthode 3 (proche dans le principe de la précédente, mais plus facile à implémenter) :
On peut remarquer que $\hat{H}^2 = (\frac{\hbar\tilde{\Omega}}{2})^2\mathbb{I}$ (c'est évident dans la base propre), et développer en séries entières comme dans la méthode 1. En sommant à nouveau les puissances paires et impaires séparément, on retrouve le résultat de la méthode 1.

Fontaine atomique :

5. L'atome est dans l'état fondamental f au départ, tandis que la cavité contient N photons (état $|a\rangle = |f,N\rangle$). L'atome ne peut donc pas émettre de photon (pas de désexcitation possible), mais peut en absorber un et passer ainsi dans l'état $|b\rangle = |e, N-1\rangle$.

   Depuis cet état, il n'est pas possible d'absorber à nouveau un photon (pas d'autre état excité accessible), mais en revanche l'émission d'un photon est possible pour redescendre dans l'état $|a\rangle$.

   L'état du système {atome, photons} est donc à tout instant une superposition de $|a\rangle$ et $|b\rangle$, et l'évolution se fait dans le sous-espace $\mathcal{E}_N$.

6. On peut calculer les énergies des deux états (photons+atomes) lorsque ceux-ci ne sont pas couplés :

$$\begin{aligned} E_a &= N\hbar\omega \\ E_b &= N\hbar\omega + \hbar\delta. \end{aligned}$$

   Si on place la référence d'énergie en $\frac{E_a+E_b}{2}$, on a $E_a = -\frac{\hbar\delta}{2}$ et $E_b = \frac{\hbar\delta}{2}$.

7. Lorsque l'atome est hors de la cavité, il n'y a aucun couplage atome/photons, les états $|a\rangle$ et $|b\rangle$ sont états propres du hamiltonien libre $\hat{H}_0 = \frac{\hbar\delta}{2}(-|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|)$, et $\Omega(t) = 0$ pour $t \in [\tau, \tau+T]$.

   Lorsque l'atome passe dans la cavité (i.e. $t \in [0,\tau]$ et $t \in [T+\tau, T+2\tau]$), il est en interaction avec les photons de la cavité, et il faut introduire le terme de couplage photons/atome, avec $\Omega(t) = \Omega_0$.

8. On calcule les opérateurs d'évolution successifs et on utilise une propriété évidente de l'opérateur d'évolution :

$$\forall\, t_2, t_1, t_0 : \quad \hat{U}(t_2,t_0) = \hat{U}(t_2,t_1)\hat{U}(t_1,t_0).$$

   On obtient donc, en faisant attention à l'ordre des opérateurs (le temps s'écoule de la droite vers la gauche) :

$$\begin{aligned} \hat{U}(T+2\tau, 0) &= \hat{U}(T+2\tau, T+\tau)\hat{U}(T+\tau,\tau)\hat{U}(\tau,0) \\ &= \hat{U}_0(\delta,\Omega_0,\tau)\hat{U}_0(\delta,0,T)\hat{U}_0(\delta,\Omega_0,\tau), \end{aligned}$$

   où $\hat{U}_0$ est l'opérateur d'évolution calculé à la question préliminaire.

9. On peut simplifier chacune des trois parties de l'opérateur d'évolution.
Hors de la cavité, $\Omega = 0, \tilde{\Omega} = \delta$ et on obtient :

$$\hat{U}_0(\delta, 0, T) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\delta T}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\delta T}{2}} \end{pmatrix}.$$

Dans la cavité, $\tilde{\Omega}\tau \simeq \Omega_0\tau = \frac{\pi}{2}$, ce qui conduit à :

$$\hat{U}_0(\delta \ll \Omega, \Omega_0, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}.$$

Le produit des trois matrices donne alors

$$\hat{U}(T + 2\tau, 0) = \begin{pmatrix} \sin\frac{\delta T}{2} & -i\cos\frac{\delta T}{2} \\ -i\cos\frac{\delta T}{2} & -\sin\frac{\delta T}{2} \end{pmatrix}.$$

Avec ces approximations, la probabilité de transition $P_{\text{fe}}(T + 2\tau)$ est alors donnée par le module carré de l'élément de matrice suivant :

$$P_{\text{fe}}(T + 2\tau) = |\langle b|\hat{U}(T + 2\tau, 0)|a\rangle|^2 = \cos^2\frac{\delta T}{2}.$$

10. L'atome passe dans la cavité **une première fois** à $t \simeq 0$ (dans l'approximation $\tau \ll T$, ce passage est instantané).
Etant en **chute libre** sous l'effet de la gravité, sa coordonnée de position verticale est donnée par :

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$$

(avec un axe vertical orienté vers le haut et une composante initiale de la vitesse $v_0 > 0$).
Après un **temps de vol** $\simeq T$, **il passe à nouveau dans la cavité** située à $z = 0$.
On obtient donc l'équation :

$$gT = 2v_0.$$

On peut aussi remarquer que c'est le temps nécessaire pour que sa composante de vitesse verticale passe de v_0 à $-v_0$ sous l'effet de la pesanteur.

La largeur de la courbe à mi-hauteur étant de $\delta/2\pi = 0{,}94$ Hz, il vient :

$$\frac{\delta T}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow T = \frac{2}{4 \times 0{,}94}\ \text{s} = 0{,}54\ \text{s},$$

ce qui correspond à une vitesse :

$$v_0 = \frac{gT}{2} = 2{,}6\ \text{m.s}^{-1}.$$