Mécanique quantique – L3

Pierre-François Cohadon - Tristan Villain - Qinhan Wang

TD 2 - 02/10/2024
Effet Zénon quantique

---

1 Préliminaire : Matrices de Pauli

Dans les espaces de Hilbert à 2 dimensions, on utilise très souvent les trois matrices de Pauli, données dans la base $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ par :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On se propose d'étudier quelques-unes de leurs propriétés.

1. Expliquer pourquoi ces matrices jouent un rôle fondamental pour étudier n'importe quel système à deux niveaux.
2. Les matrices de Pauli sont-elles hermitiennes? Peuvent-elles être des observables?
3. Calculer les commutateurs $[\sigma_x, \sigma_y]$, $[\sigma_y, \sigma_z]$, $[\sigma_z, \sigma_x]$.
4. Déterminer les valeurs propres $\lambda_{\pm,i}$ et les vecteurs propres associés $|\pm_i\rangle$ de ces 3 matrices.
5. Pour un état $|\psi\rangle = \alpha|1\rangle + \beta|2\rangle$, quelle est la probabilité de mesurer l'état $|+_i\rangle$?
6. Commenter la figure 1 à la lumière de cette analyse.
7. Quelle est la différence entre un ensemble de systèmes à deux niveaux dans l'état $|+_z\rangle$ et un mélange équiprobable de systèmes dans les états $|+_x\rangle$ et $|-_x\rangle$?

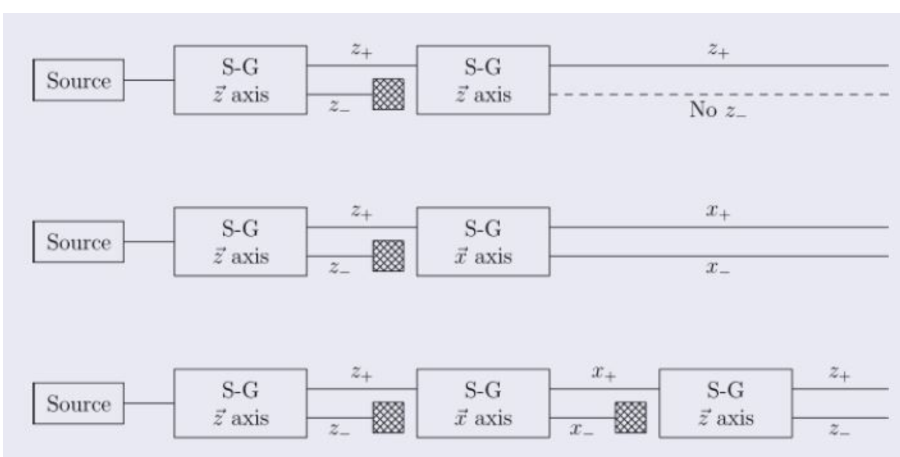

Figure 1: Expérience de Stern et Gerlach.

2 L'effet Zénon quantique

On considère dans cette partie un système à deux niveaux (espace des états à deux dimensions, engendré par $\{|1\rangle, |2\rangle\}$), évoluant selon un hamiltonien $\widehat{H}_0$:

$$\widehat{H}_0 = \hbar\Omega|1\rangle\langle 2| + \hbar\Omega^*|2\rangle\langle 1|. \tag{1}$$

On note $|\psi(t)\rangle = a(t)|1\rangle + b(t)|2\rangle$, et on suppose qu'initialement $|\psi(t=0)\rangle = |1\rangle$.

1. Pourquoi peut-on supposer que Ω est réel ?
2. En utilisant l'équation de Schrödinger $i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \widehat{H}_0|\psi(t)\rangle$, écrire les équations d'évolution couplées de $a(t)$ et $b(t)$.
3. Résoudre ces équations.
4. Retrouver l'évolution du système en utilisant les états propres de $\widehat{H}_0$.
5. Quelle est la probabilité de mesurer le système dans l'état $|2\rangle$ au temps t ?
6. Montrer qu'au bout d'un temps T donné, le système peut être détecté avec certitude dans l'état $|2\rangle$. **On notera T la plus petite des durées qui vérifie cette propriété.**

On découpe l'intervalle $[0, T]$ en n intervalles égaux. On effectue une mesure sur le système (qui le projette dans l'état $|1\rangle$ ou l'état $|2\rangle$) à la fin de chacun de ces intervalles.
On note $P(i, n)$ la probabilité de trouver le système dans l'état $|2\rangle$ après i intervalles.

7. On s'intéresse tout d'abord au cas $n = 2$. Montrer que $P(2, 2) = \frac{1}{2}$.
8. On s'intéresse maintenant au cas général. Montrer pour $0 \leq i \leq n - 1$:

$$P(i+1, n) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2n}\right) P(i, n) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)(1 - P(i, n)). \tag{2}$$

		$1 \to 2$ transition	
n	$\frac{1}{2}[1-\cos^n(\pi/n)]$	Predicted	Observed
1	1.0000	0.995	0.995
2	0.5000	0.497	0.500
4	0.3750	0.351	0.335
8	0.2346	0.201	0.194
16	0.1334	0.095	0.103
32	0.0716	0.034	0.013
64	0.0371	0.006	−0.006

Figure 2: Résultats de l'expérience d'Itano *et al.* La barre d'erreur estimée sur le taux de transition est de 2 %. Pour cette expérience, le basculement $1 \to 2$ s'effectue en $T = 256$ ms. Les séquences de mesure s'effectuent en 2,4 ms.

9. Résoudre l'équation précédente et montrer finalement :

$$P(n,n) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos^n\left(\frac{\pi}{n}\right)\right). \tag{3}$$

10. Vérifier l'accord entre ce résultat et les données expérimentales.

11. Quels effets supplémentaires peut-on songer à prendre en compte (deuxième colonne de la table) ? Cela remet-il en cause la réalité de l'effet ?

12. Montrer finalement que dans la limite $n \to \infty$:

$$P(n,n) \simeq \frac{1}{2}\left(1 - \exp\left(-\frac{\pi^2}{2n}\right)\right). \tag{4}$$

13. Conclure et justifier le nom d'*effet Zenon quantique* donné à cet effet.

Bibliographie :

W. M. Itano, D. J. Heinzen, J. J. Bollinger et D. J. Wineland, *Quantum Zeno effect*, Phys. Rev. A **41**, 2295 (1990).