

Mécanique quantique – L3 FIP

Pierre-François Cohadon – Tristan Villain – Qinhan Wang

Corrigé du TD 1 Expériences d'interférences

1 Expérience d'interférences avec des atomes

1. L'expérience a été réalisée avec des atomes ^4He pour plusieurs raisons (certaines moins faciles à deviner que d'autres) :
 - **faible masse** (ce qui augmente la **longueur d'onde de de Broglie** des atomes, et facilite l'observation des interférences)
 - **atome inerte chimiquement** (puisque'il est dans la dernière colonne de la classification périodique), ce qui évite qu'il n'endommage les structures utilisées pour diffracter le faisceau et pour réaliser les fentes d'Young
 - l'atome possède un **état métastable** (un état électronique excité, noté He^* , caractérisé par une durée de vie de plusieurs milliers de secondes, l'infini à l'échelle de cette expérience!), ce qui en facilite la détection (car en percutant le détecteur, l'atome y dépose ses 20 eV d'énergie interne)
 - on savait déjà en réaliser des sources (jets atomiques) relativement intenses
2. La longueur d'onde de de Broglie λ_{dB} est donnée par $\lambda_{\text{dB}} = h/mv$, donc pour des atomes thermiques pour lesquels la **vitesse quadratique moyenne** v_{qm} est donnée par $\frac{1}{2}mv_{\text{qm}}^2 \simeq \frac{3}{2}k_{\text{B}}T$ (théorème d'**équipartition de l'énergie** à 3 dimensions), on obtient :

$$\lambda_{\text{dB}} \simeq \frac{h}{\sqrt{3mk_{\text{B}}T}} \simeq 0,75 \times 10^{-10} \text{ m}, \quad (1)$$

soit 0,75 Å pour une température de la source $T = 295 \text{ K}$.

Insistons sur le fait qu'il s'agit d'un **ordre de grandeur** : la distribution des vitesses dans un jet est différente de celle dans une enceinte (sans surprise, les molécules les plus rapides sont celles qui ont le plus de chances de sortir de l'enceinte et elles sont donc surreprésentées dans le jet).

3. La fente d'entrée garantit un **éclairage cohérent** des deux fentes. En effet, l'**angle de diffraction** est $\theta \simeq \lambda_{\text{dB}}/s_1 \simeq 5 \times 10^{-5} \text{ rad}$, si bien que le jet diffracté a au niveau des fentes une taille typique $\theta L \simeq 30 \mu\text{m} \gg d$.
4. Si on ne tient compte que de l'effet d'interférence entre les deux fentes, on s'attend à une **figure d'interférences à deux ondes** de la forme :

$$I(x) = \frac{I_0}{2} (1 + \cos \phi), \quad (2)$$

où $\phi = 2\pi\delta/\lambda_{\text{dB}}$ est le **déphasage entre les deux chemins** (atomiques, ici, mais c'est exactement la même chose que la différence de chemin optique habituelle) .

Cette différence δ entre les deux chemins arrivant au point $M(x, y)$ de l'écran (ou de son équivalent ici, la fente de détection) se calcule simplement :

$$\delta = S_2M - S_1M \quad (3)$$

$$\delta = \sqrt{L'^2 + (x + d/2)^2 + (y - y_0)^2} - \sqrt{L'^2 + (x - d/2)^2 + (y - y_0)^2} \quad (4)$$

où y_0 est la coordonnée (a priori non nulle) des 2 trous dans la direction perpendiculaire à la figure. On fait alors un développement limité dans la limite $L' \gg |x|, |y| \dots$:

$$\delta = L' \left(\left(1 + \left(\frac{x + d/2}{L'} \right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{L'} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \left(1 + \left(\frac{x - d/2}{L'} \right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{L'} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$\delta \simeq L' \left(1 + \frac{(x + d/2)^2}{2L'^2} + \frac{(y - y_0)^2}{2L'^2} - 1 - \frac{(x - d/2)^2}{2L'^2} - \frac{(y - y_0)^2}{2L'^2} \right) \quad (5)$$

$$\delta \simeq \frac{dx}{L'}. \quad (6)$$

On trouve donc finalement la figure d'interférences :

$$I(x) = \frac{I_0}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi dx}{\lambda_{dB} L'} \right), \quad (7)$$

avec un **interfrange** $\Lambda = L' \lambda_{dB} / d$.

On trouve donc des **franges rectilignes** (puisqu'elles ne dépendent que de x), avec un interfrange Λ . On peut donc augmenter la luminosité des franges en passant de trous en $(\pm d/2, y_0)$ à des fentes, ce qui revient à sommer des doublets de points en différents y_0 .

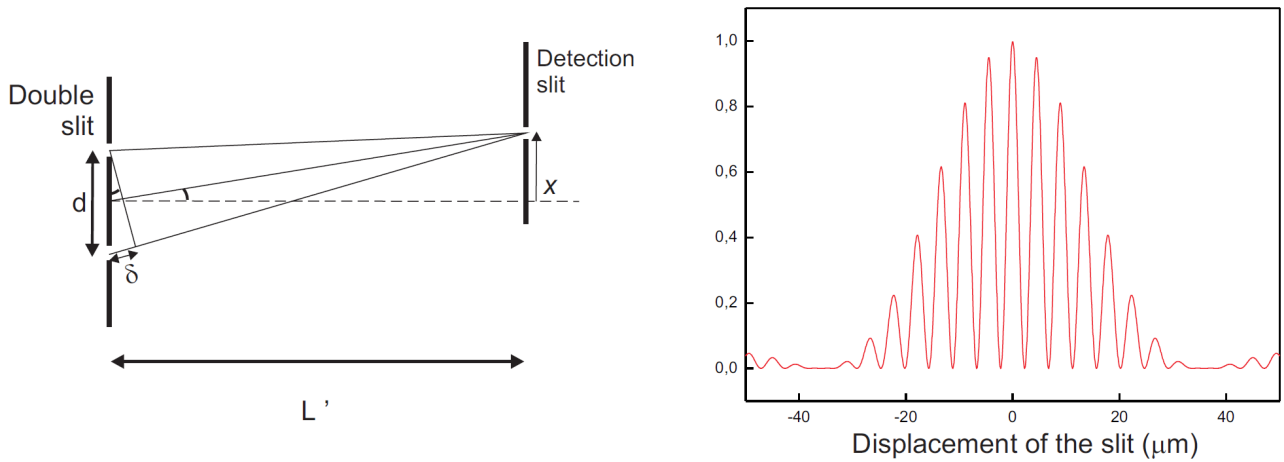


FIGURE 1 – Gauche : notations et principe du calcul de la figure d'interférences des deux fentes d'Young. Droite : figure d'interférences attendue pour les paramètres de l'expérience, avec $\lambda_{dB} = 0,56 \text{ \AA}$.

La valeur de l'interfrange **mesurée** sur l'énoncé (courbe *a* de la figure 2) correspond à une longueur de 2,7 cm pour 5 interfranges, alors que le repère de 10 μm correspond à 1,2 cm.

On en déduit un interfrange $\Lambda = (2,7 \times 10)/(5 \times 1,2) = 4,5 \mu\text{m}$.

L'article mentionne effectivement une valeur de $4,5 \pm 0,6 \mu\text{m}$.

Cette valeur correspond à une longueur d'onde $\lambda_{\text{dB}} = 0,56 \text{ \AA}$, en bon accord avec l'ordre de grandeur calculé plus haut (avec les limites déjà évoquées). On trouve sans surprise une valeur inférieure à celle estimée, correspondant à l'excès d'atomes plus rapides.

Pour $T = 83 \text{ K}$, on trouve respectivement 8,4 μm d'interfrange et une longueur d'onde de 1,03 \AA , en excellent accord avec la dépendance attendue en $1/\sqrt{T}$ (voir l'éq. 1).

5. On peut citer comme facteurs qui limitent la **visibilité des interférences** :
 - **largeur de la fente source**, qui induit une distribution des vitesses transverses
 - **largeur finie des fentes**, qui module la figure d'interférence par un terme de la forme $\text{sinc}^2(\pi s_2 x / \lambda_{\text{dB}} L')$ (on en a tenu compte pour tracer la courbe de la figure 1).
Pour les paramètres de l'expérience, on peut s'attendre à voir une dizaine de franges avec un bon contraste sur l'ensemble de la figure d'interférences.
 - **distribution des vitesses** et donc des longueurs d'onde : c'est l'équivalent d'une expérience d'interférences en lumière (légèrement) polychromatique !
 - éventuellement, la **largeur de la fente de détection** (qui pourrait entraîner un moyennage spatial de la figure) ; mais ici, elle est nettement plus petite que l'interfrange (1 μm contre 5 à 8 μm), donc cet effet joue peu.
6. Si on réalisait l'expérience avec un **jet issu d'une enceinte thermalisée** (un "four"), on aurait une **dispersion des vitesses** Δv du même ordre que la vitesse moyenne \bar{v} , ce qui limiterait drastiquement le contraste. On réalise en fait une détente supersonique du gaz d'hélium (vous n'êtes pas censés savoir ce que c'est !, c'est pour information), qui permet d'obtenir un rapport $\bar{v}/\Delta v \simeq 15$ à 20.

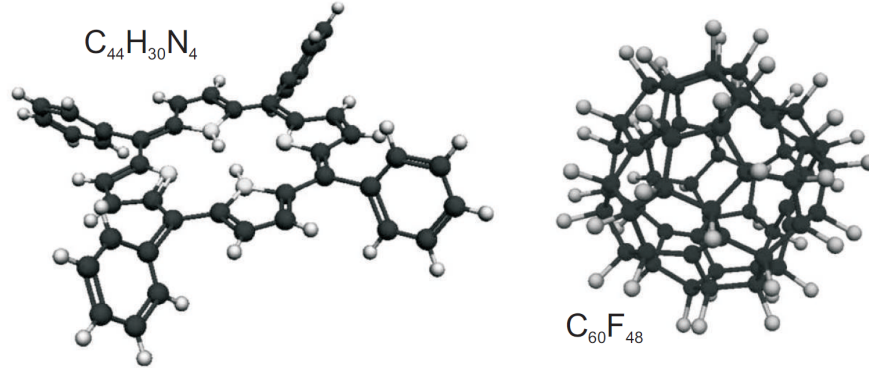


FIGURE 2 – Molécules complexes utilisées dans des expériences d'interférométrie : tetraphenylporphyrine (TPP) $C_{44}H_{30}N_4$ et fluorofullérène $C_{60}F_{48}$.

7. On peut songer à plusieurs difficultés :

- la masse étant (beaucoup) plus élevée, la longueur d'onde λ_{dB} sera très petite (de l'ordre de quelques pm) : il faudra donc utiliser des **structures diffractantes encore plus petites** (dans l'article cité, des fentes d'un demi μm de large, espacées d'1 μm)
- se pose éventuellement le problème de réaliser la sélection de vitesses (dans l'expérience, on sélectionne une classe de vitesses en interposant des fentes de sélection le long de la parabole de chute libre des molécules correspondant à une certaine vitesse)
- les molécules étant beaucoup plus grosses, elles seront beaucoup plus sensibles à toutes sortes d'effets, par exemple celui des collisions dans le vide résiduel de l'interféromètre (on peut en effet considérer une collision comme un processus de mesure, qui donne la possibilité de distinguer les deux chemins)

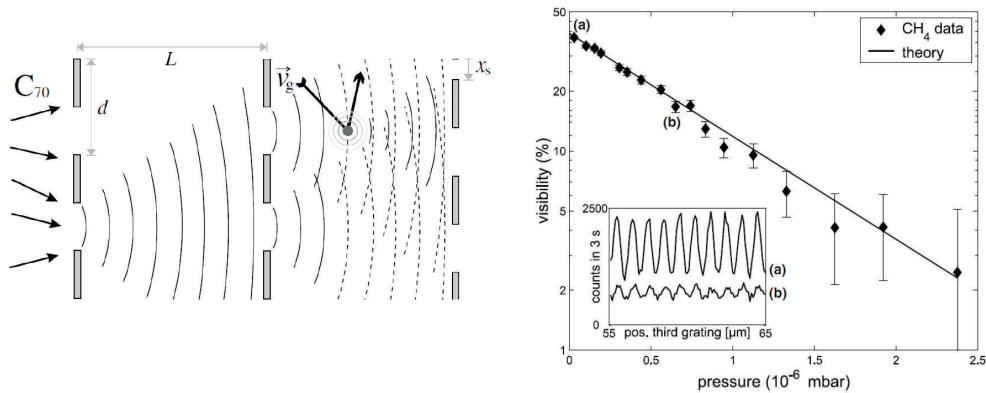


FIGURE 3 – Effet des collisions sur le contraste des interférences. Gauche : Schéma de l'interféromètre utilisé (en champ proche, différent de celui discuté dans le TD) avec des molécules de fullérènes C_{70} . Le troisième réseau sert de détecteur. Les collisions avec les molécules de gaz localisent la fonction d'onde des molécules et réduisent la visibilité des interférences observées. Droite : Résultats expérimentaux. La ligne pleine correspond à la prévision théorique. L'insert présente deux exemples de figures observées à 0,05 et $0,6 \times 10^{-6}$ mbar. Référence : K. Hornberger *et al.*, Phys. Rev. Lett. **90**, 160401 (2003).

Quelques remarques pour finir...

L'expérience décrite a eu les honneurs de la première page de *Physical Review Letters* (enfin, la première page du n°21, ce qui correspond à la page 2689 du volume 66...), juste avant une expérience concurrente dont l'article a été soumis trois jours après...

VOLUME 66	27 MAY 1991	NUMBER 21
<p>Young's Double-Slit Experiment with Atoms: A Simple Atom Interferometer</p> <p>O. Carnal and J. Mlynek <i>Fakultät für Physik, Universität Konstanz, D-7750 Konstanz, Germany</i> (Received 4 March 1991)</p>		
<p>An Interferometer for Atoms</p> <p>David W. Keith, Christopher R. Ekstrom, Quentin A. Turchette, and David E. Pritchard <i>Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts 02139</i> (Received 7 March 1991)</p>		

FIGURE 4 – Entêtes des deux articles d'interférométrie atomique publiés à la suite dans *Phys. Rev. Lett.* (pages 2689 et 2693) en mai 1991.

A noter dès le premier paragraphe du second article :

"There have been several recent proposals for the realization of an atom interferometer, and a number of experiments have demonstrated interference of atoms. In addition to the work reported here, several groups have demonstrated **interference fringes**.³ We report the demonstration of **the first interferometer for atoms** in the sense that it uses amplitude division to separate the beams in momentum and distinctly separates the beams in space.⁴"

Pour ceux qui n'auraient pas bien compris la distinction entre cette expérience et celle de Mlynek (la référence 3, celle où on démontre "des franges", pas "un interféromètre"), la référence 4 (qui est en fait l'article lui-même, qui s'autocite) enfonce le clou :

"Devices such as the one presented here in which wave fronts are divided (using either wave-front or amplitude division), spatially separated, and purposefully recombined (e.g., using reflection or refraction) are **universally** (n'ayons pas peur des mots) referred to as interferometers. When all these conditions are not met, there is a division of opinion. In particular (et au hasard...), **Young's experiment** (comprendre "Mlynek's experiment") is not generally classed as an interferometer [e.g., M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics* (Pergamon, New York, 1980), 6th ed., Chap. VII] (avec la référence qui tue pour finir : un jour ou l'autre, vous consulterez cette bible de l'optique).

2 Interférences et règle de Born

1. L'**amplitude lumineuse** est $\mathcal{E} = \mathcal{E}_A + \mathcal{E}_B$, donc l'intensité détectée au point \mathbf{r} est donnée par :

$$\begin{aligned} P_{AB}(\mathbf{r}) &= |\mathcal{E}_A(\mathbf{r}) + \mathcal{E}_B(\mathbf{r})|^2 \\ &= (|\mathcal{E}_A|^2 + |\mathcal{E}_B|^2 + 2\text{Re}(\mathcal{E}_A^* \mathcal{E}_B)) \\ &= (P_A + P_B + I_{AB}). \end{aligned}$$

On déduit de cette relation le **terme d'interférences** (c'est-à-dire la différence entre ce qui est détecté avec les deux fentes ouvertes et la somme des intensités détectées séparément avec une seule fente ouverte) : $I_{AB} = P_{AB} - P_A - P_B$.

2. Avec les trois fentes ouvertes, $P_{ABC}(\mathbf{r}) = |\mathcal{E}_A(\mathbf{r}) + \mathcal{E}_B(\mathbf{r}) + \mathcal{E}_C(\mathbf{r})|^2$ a priori.

On ajoute un terme I_{ABC} , non prévu par la mécanique quantique mais qui pourrait exister dans une théorie plus générale. On obtient alors :

$$\begin{aligned} P_{ABC}(\mathbf{r}) &= |\mathcal{E}_A(\mathbf{r}) + \mathcal{E}_B(\mathbf{r}) + \mathcal{E}_C(\mathbf{r})|^2 + I_{ABC} \\ &= (P_A + P_B + P_C) + (I_{AB} + I_{AC} + I_{BC}) + I_{ABC} \\ &= (P_{AB} + P_{AC} + P_{BC} - P_A - P_B - P_C + I_{ABC}) \\ \Rightarrow I_{ABC} &= P_{ABC} - (P_{AB} + P_{AC} + P_{BC}) + P_A + P_B + P_C. \end{aligned}$$

On va chercher à vérifier (avec la meilleure précision possible) que ce terme est bien nul, en comparant les figures d'interférences détectées pour les différentes situations.

3. Dans le cadre de la mécanique quantique, $\delta \neq 0$ et $\epsilon = I_{ABC} = 0$.

On doit donc mesurer la valeur $\kappa = 0$: tout autre résultat invaliderait la théorie quantique actuelle, la précision de la mesure du 0 permettant de mettre une borne sur les déviations à la règle de Born.

Les expériences sont réalisées avec **différentes sources lumineuses** : un laser (très atténué!, avec une puissance de $1 \mu\text{W}$, soit un flux de 5×10^{12} photons/s), le même encore plus atténué (200 fW , $\simeq 10^6$ photons/s) ou encore une source de photons uniques ($\simeq 40\,000$ photons/s).

Les résultats sont **compatibles** (aux incertitudes expérimentales près) avec la valeur $\kappa = 0$, sauf pour le faisceau laser, pour lequel on a une violation apparente de l'ordre de 0,7% : on peut donc considérer qu'on a vérifié cette théorie à cette précision-là. Une forme explicite de la violation attendue (un terme en $|\mathcal{E}|^3$ par exemple) permet de quantifier plus précisément cette violation.

4. On peut en théorie tester la règle de Born avec deux fentes : il suffit de **comparer la figure d'interférences obtenue à celle prédite**. Mais cela impliquerait de connaître parfaitement la forme des fentes (et de leurs défauts). L'intérêt d'utiliser trois fentes est justement qu'à condition d'utiliser **tout le temps les trois mêmes fentes**, on a une relation simple entre les différentes figures d'interférences (à une, à deux et à trois fentes), indépendamment de leurs défauts de fabrication.

De la même façon, pour tester un terme en $|\mathcal{E}|^3$, on aurait besoin de quatre fentes.

5. Utiliser la combinaison des trois fentes fixes et du masque (avec une, deux ou trois fentes) permet de réaliser la condition essentielle soulignée ci-dessus : **avoir tout le temps les trois mêmes fentes**. Il suffit en effet que les trois fentes fixes soient nettement plus fines que celles du masque pour que la combinaison des deux le réalise en pratique, indépendamment des défauts des différentes fentes du masque.