Mécanique quantique – L3 FIP

Corrigé du TD 11

Etats cohérents de l'oscillateur harmonique

---

1 Retour sur la dynamique classique

1. L'équation classique du mouvement se résout simplement :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -m\omega_0^2 x & (1)\\ \Longrightarrow x(t) &= A\cos\omega_0 t & (2)\\ \text{et } p(t) &= -m\omega_0 A\sin\omega_0 t, & (3) \end{aligned}$$

avec les conditions initiales données.

2. L'évolution du système peut alors être décrite par le nombre complexe z :

$$z(t) = x(t) + ip(t)/(m\omega_0) = A\mathrm{e}^{-i\omega_0 t}. \quad (4)$$

Le système se déplace dans **l'espace des phases** sur un cercle de rayon A, à la fréquence ω_0 et dans le sens des aiguilles d'une montre. On retrouve bien entendu les lois d'évolutions (2) et (3) en projetant ce point sur les axes horizontal et vertical.

3. **On peut au choix** :
   — **écarter le système de sa position d'équilibre et le lâcher sans vitesse initiale**. C'est souvent ce que l'on fait pour un pendule ou un ressort, et c'est la situation ennvisagée à la question 1.
   — **donner une impulsion initiale** : $x(0) = 0$ et $p(0) \neq 0$
   — **faire les 2** (par exemple, en écartant une balançoire de sa position d'équilibre **et** en donnant une impulsion initiale).

   Notons qu'on peut aussi existen un tel oscillateur en le soumettant à une force d'excitation sinusoïdale (qui sera d'autant plus efficace que sa fréquence sera proche de celle de la résonance $\omega_0/2\pi$ de l'oscillateur).

2 Opérateur translation

4. Pour tout $x, y \in \mathbf{R}^2$, on a $\langle y|x\rangle = \delta(x-y)$, où δ est la distribution de Dirac. Comme $\langle y|\hat{T}_{x_0}^\dagger = \langle y + x_0|$ (par définition d'un opérateur adjoint), on a :

$$\langle y|\hat{T}_{x_0}^\dagger \hat{T}_{x_0}|x\rangle = \langle y + x_0|x + x_0\rangle = \delta(x-y). \quad (5)$$

Puisque ceci est vrai pour tout x, y, $\hat{T}_{x_0}^\dagger \hat{T}_{x_0}$ conserve le produit scalaire, donc il s'agit de l'opérateur identité $\mathbb{I}$.

5. D'après la question précédente, on vérifie facilement que $\hat{T}_{x_0}^\dagger = \hat{T}_{x_0}^{-1} = \hat{T}_{-x_0}$ (l'inverse d'une translation d'une quantité x_0 est une translation de $-x_0$). On en déduit que :

$$\langle x|\,\hat{T}_{x_0} = \left(\hat{T}_{x_0}^\dagger\,|x\rangle\right)^\dagger = \left(\hat{T}_{-x_0}\,|x\rangle\right)^\dagger = |x-x_0\rangle^\dagger = \langle x-x_0|\,. \tag{6}$$

On en déduit :

$$\langle x|\,\hat{T}_{x_0}\,|\psi\rangle = \langle x-x_0|\psi\rangle = \psi(x-x_0). \tag{7}$$

6. Par application de la formule de la série de Taylor autour de x, on trouve :

$$\psi(x-x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x_0)^n}{n!}\psi^{(n)}(x), \tag{8}$$

en utilisant la convention $\psi^{(0)}(x) = \psi(x)$.

7. On a $\langle x|\hat{p}|\psi\rangle = -i\hbar\psi'(x)$, d'où $\langle x|\,\frac{i}{\hbar}\hat{p}\,|\psi\rangle = \psi'(x)$, et par applications successives de l'opérateur $\frac{i}{\hbar}\hat{p}$:

$$\langle x|\left(\frac{i}{\hbar}\hat{p}\right)^n|\psi\rangle = \psi^{(n)}(x). \tag{9}$$

8. On évalue la quantité $\langle x|\,\hat{T}_{x_0}\,|\psi\rangle$. D'une part,

$$\langle x|\,\hat{T}_{x_0}\,|\psi\rangle = \langle x-x_0|\psi\rangle = \psi(x-x_0).$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
\psi(x-x_0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x_0)^n}{n!}\psi^{(n)}(x)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x_0)^n}{n!}\langle x|\left(\frac{i}{\hbar}\hat{p}\right)^n|\psi\rangle\\
&= \langle x|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\frac{ix_0\hat{p}}{\hbar})^n}{n!}|\psi\rangle\\
&= \langle x|\,\mathrm{e}^{-\frac{ix_0\hat{p}}{\hbar}}\,|\psi\rangle\,.
\end{aligned}$$

Comme l'égalité tient pour tout x et pour tout ψ, on en déduit que les termes entre $\langle x|$ et $|\psi\rangle$ sont égaux, c'est-à-dire $\hat{T}_{x_0} = \mathrm{e}^{-\frac{ix_0\hat{p}}{\hbar}}$.

9. L'opérateur $\hat{F}_{p_0}\hat{T}_{x_0} = \mathrm{e}^{\frac{ip_0\hat{x}}{\hbar}}\mathrm{e}^{-\frac{ix_0\hat{p}}{\hbar}}$ peut se calculer en utilisant la formule proposée avec :

$$\hat{A} = ip_0\hat{x}/\hbar \;\text{ et } \hat{B} = -ix_0\hat{p}/\hbar \Longrightarrow [\hat{A},\hat{B}] = \frac{p_0x_0}{\hbar^2}[\hat{x},\hat{p}] = \frac{ix_0p_0}{\hbar}. \tag{10}$$

On trouve facilement :

$$\hat{F}_{p_0}\hat{T}_{x_0} = \mathrm{e}^{\frac{ip_0x_0}{2\hbar}}\,\mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}(p_0\hat{x}-x_0\hat{p})} \tag{11}$$

L'opérateur dans l'exponentielle se met sous la forme :

$$\begin{aligned}
\frac{i}{\hbar}(...) &= \frac{i}{\hbar}\left(p_0\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}(\hat{a}+\hat{a}^\dagger) + ix_0\sqrt{\frac{\hbar m\omega_0}{2}}(\hat{a}-\hat{a}^\dagger)\right) && (12)\\
&= \hat{a}\left(-x_0\sqrt{\frac{\hbar m\omega_0}{2}} + ip_0\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}\right) + \hat{a}^\dagger\left(x_0\sqrt{\frac{\hbar m\omega_0}{2}} + ip_0\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}\right) && (13)\\
&= -\alpha^*\hat{a} + \alpha\hat{a}^\dagger. && (14)
\end{aligned}$$

On trouve donc :

$$\hat{F}_{p_0}\hat{T}_{x_0} = \mathrm{e}^{ip_0x_0/2\hbar}\mathrm{e}^{-\alpha^*\hat{a}+\alpha\hat{a}^\dagger}, \tag{15}$$

qui se transforme de nouveau avec :

$$\begin{aligned}
\hat{A} = \alpha\hat{a}^\dagger \ \text{ et } \hat{B} = -\alpha^*\hat{a} \ &\Longrightarrow \ [\hat{A},\hat{B}] = -|\alpha|^2[\hat{a}^\dagger,\hat{a}] = |\alpha|^2 && (16)\\
\hat{F}_{p_0}\hat{T}_{x_0} &= \mathrm{e}^{ip_0x_0/2\hbar}\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger}\mathrm{e}^{-\alpha^*\hat{a}}\mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}. && (17)
\end{aligned}$$

On trouve bien la formule demandée puisque le terme de phase se met sous la forme proposée :

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha^2-\alpha^{*2}}{4} &= \left(\frac{\alpha-\alpha^*}{2}\right)\left(\frac{\alpha+\alpha^*}{2}\right) && (18)\\
&= ip_0\frac{1}{\sqrt{2m\omega_0\hbar}}x_0\sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}} && (19)\\
&= \frac{ix_0p_0}{2\hbar}. && (20)
\end{aligned}$$

10. On a donc :

$$\begin{aligned}
\hat{F}_{p_0}\hat{T}_{x_0}|0\rangle &= \mathrm{e}^{ip_0x_0/2\hbar}\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger}\mathrm{e}^{-\alpha^*\hat{a}}\mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}|0\rangle && (21)\\
&= \mathrm{e}^{ip_0x_0/2\hbar}\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger}\mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}|0\rangle, && (22)
\end{aligned}$$

puisque toutes les puissances non nulles de l'opérateur $\hat{a}$ appliquées à $|0\rangle$ donnent le ket nul. On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger}\mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}|0\rangle &= \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha\hat{a}^\dagger)^n}{n!}\right)|0\rangle && (23)\\
&= \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n\sqrt{n!}|n\rangle}{n!}\right) && (24)\\
&= \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n|n\rangle}{\sqrt{n!}}\right) && (25)\\
&= |\alpha\rangle. && (26)
\end{aligned}$$

L'état fondamental translaté de x_0 et p_0 est donc l'**état cohérent** $|\alpha\rangle$ tel qu'il est défini dans l'énoncé.

Pour $\hat{T}_{x_0}\hat{F}_{p_0}|0\rangle$, le calcul est similaire, en inversant $\hat{A}$ et $\hat{B}$ lors de la première étape. On obtient donc le même état cohérent, avec une simple phase différente :

$$\hat{T}_{x_0}\hat{F}_{p_0}|0\rangle = \mathrm{e}^{-ip_0x_0/2\hbar}|\alpha\rangle. \tag{27}$$

3 Propriétés de l'état cohérent

11. Le calcul est immédiat :

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\hat{a}|n\rangle\right) \tag{28}$$

$$= \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n\sqrt{n}}{\sqrt{n!}}|n-1\rangle\right) \tag{29}$$

$$= \alpha\mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}}|m\rangle\right), \tag{30}$$

avec une sommation sur $m = n-1$ qui commence égalemernt en 0 car le terme $\hat{a}|0\rangle = 0$. On trouve donc bien :

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \tag{31}$$

On va voir que cette propriété fondamentale de l'état cohérent (qui est d'ailleurs souvent défini comme cela, même si une telle définition a priori vient un peu de nulle part) est utilisée de façon intensive dans tous les calculs qui suivent.

12. On calcule directement :

$$\langle\hat{x}\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}\langle\alpha|a + \hat{a}|\alpha\rangle \tag{32}$$

$$\langle\hat{x}\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}\left(\alpha + \alpha^*\right) \tag{33}$$

$$\langle\hat{x}\rangle = 2\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}\mathfrak{Re}(\alpha). \tag{34}$$

Attention !
Le terme α^* est obtenu en faisant agir $\hat{a}^\dagger$ sur le bra $\langle\alpha|$, et non sur le ket $|\alpha\rangle$.
On a en effet :

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \Longrightarrow \langle\alpha|\hat{a}^\dagger = \alpha^*\langle\alpha| \tag{35}$$

$$\text{alors que } \hat{a}^\dagger|\alpha\rangle \neq \alpha^*|\alpha\rangle. \tag{36}$$

C'est pour cela que l'on range habituellement les opérateurs dans l'ordre normal : les opérateurs $\hat{a}$ à droite (pour agir sur les kets $|\alpha\rangle$) et les opérateurs $\hat{a}^\dagger$ à gauche (pour agir sur les $\langle\alpha|$).

De la même façon :

$$\langle\hat{p}\rangle = \sqrt{\frac{\hbar m\omega_0}{2}}\frac{1}{i}\langle\alpha|a - \hat{a}|\alpha\rangle \tag{37}$$

$$\langle\hat{p}\rangle = 2\sqrt{\frac{\hbar m\omega_0}{2}}\mathfrak{Im}(\alpha). \tag{38}$$

On calcule ensuite les variances :

$$\Delta\hat{x}^2 = \langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2 = \frac{\hbar}{2m\omega_0}\left(\langle\alpha|(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)^2|\alpha\rangle - (\alpha+\alpha^*)^2\right) \quad (39)$$

$$\Delta\hat{x}^2 = \frac{\hbar}{2m\omega_0}\left(\langle\alpha|\hat{a}^2+\hat{a}^{\dagger 2}+\hat{a}\hat{a}^\dagger+\hat{a}^\dagger\hat{a}|\alpha\rangle - (\alpha+\alpha^*)^2\right). \quad (40)$$

En utilisant $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$, on obtient :

$$\Delta\hat{x}^2 = \frac{\hbar}{2m\omega_0}\left(\langle\alpha|\hat{a}^2+\hat{a}^{\dagger 2}+2\hat{a}^\dagger\hat{a}+1|\alpha\rangle - (\alpha+\alpha^*)^2\right) \quad (41)$$

$$\Delta\hat{x}^2 = \frac{\hbar}{2m\omega_0}. \quad (42)$$

Et de la même façon :

$$\Delta\hat{p}^2 = \frac{\hbar m\omega_0}{2}. \quad (43)$$

Les fluctuations quantiques de position ou d'impulsion de l'état cohérent prennent la même valeur que pour $|\mathbf{0}\rangle$, ce qui est attendu puisque $|\alpha\rangle$ est initialement défini comme ce même état, seulement translaté de x_0 et p_0.

13. Les calculs sont immédiats :

$$\langle\hat{N}\rangle = \langle\alpha|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\alpha\rangle \quad (44)$$

$$\langle\hat{N}\rangle = |\alpha|^2 \quad (45)$$

$$\text{et} \quad \Delta\hat{N}^2 = \langle\alpha|(\hat{a}^\dagger\hat{a})^2|\alpha\rangle - |\alpha|^4 \quad (46)$$

$$\Delta\hat{N}^2 = \langle\alpha|\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}|\alpha\rangle - |\alpha|^4 \quad (47)$$

$$\Delta\hat{N}^2 = \langle\alpha|\hat{a}^\dagger(\hat{a}^\dagger\hat{a}+1)\hat{a}|\alpha\rangle - |\alpha|^4 \quad (48)$$

$$\Delta\hat{N}^2 = |\alpha|^2 = \langle\hat{N}\rangle, \quad (49)$$

ce qui est **caractéristique d'une distribution poissonienne**.

On voit également que, comme pour l'état fondamental $|0\rangle$, **les fluctuations quantiques non nulles de position, d'impulsion ou d'énergie** sont toujours liées à la valeur non nulle du commutateur $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$.

14. L'évolution temporelle est facile à obtenir puisqu'on a déjà décomposé l'état $|\alpha\rangle$ sur les états $|n\rangle$:

$$
\begin{aligned}
|\Psi(t=0)\rangle = |\alpha\rangle &= \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n|n\rangle}{\sqrt{n!}}\right) && (50)\\
\Longrightarrow |\Psi(t)\rangle &= \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n\mathrm{e}^{-i(n+\frac{1}{2})\omega_0 t}|n\rangle}{\sqrt{n!}}\right) && (51)\\
|\Psi(t)\rangle &= \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}\mathrm{e}^{-i\omega_0 t/2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n\mathrm{e}^{-in\omega_0 t}|n\rangle}{\sqrt{n!}}\right) && (52)\\
|\Psi(t)\rangle &= \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}\mathrm{e}^{-i\omega_0 t/2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha\mathrm{e}^{-in\omega_0 t})^n|n\rangle}{\sqrt{n!}}\right) && (53)\\
|\Psi(t)\rangle &= |\alpha\mathrm{e}^{-i\omega_0 t}\rangle\,\left(\neq \mathrm{e}^{-i\omega_0 t}|\alpha\rangle\ !!\right), && (54)
\end{aligned}
$$

à une phase globale près.

L'état reste donc un état cohérent, caractérisé par un nombre complexe α qui suit la même évolution temporelle (4) que l'oscillation classique.

15. Les fonctions d'ondes $\Psi_\alpha(x,t)$ et $\overline{\Psi}_\alpha(p,t)$ sont donc les mêmes gaussiennes que pour l'état fondamental, à la différence qu'elles sont centrées en $\langle\hat{x}\rangle$ et $\langle\hat{p}\rangle$:

$$
\begin{aligned}
\Psi_\alpha(x,t) &= \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega_0}{2\hbar}(x-\langle\hat{x}\rangle)^2} && (55)\\
\overline{\Psi}_\alpha(p,t) &= \left(\frac{1}{\pi\hbar m\omega_0}\right)^{1/4} e^{-\frac{(p-\langle\hat{p}\rangle)^2}{2\hbar m\omega_0}}. && (56)
\end{aligned}
$$

16. **La dynamique (quantique) d'un état cohérent est donc tout à fait analogue à celle de l'oscillateur classique correspondant**, les distributions en x et p étant centrées sur les valeurs classiques $\langle\hat{x}\rangle$ et $\langle\hat{p}\rangle$, **avec des fluctuations quantiques qui sont minimales pour vérifier l'inégalité de Heisenberg**.

L'état cohérent $|\alpha\rangle$ est donc **la meilleure description quantique que l'on puisse faire d'un oscillateur classique**. C'est par exemple ce qui est utilisé pour décrire un champ électromagnétique (quantique) créé dans une cavité par une source classique. C'est vrai pour **un champ de quelques photons**, avec $\alpha \simeq 1$, comme dans les expériences du groupe de S. Haroche (cf. par exemple le TD 5, où la loi $\mathcal{P}(n)$ utilisée correspond bien à un état cohérent), comme pour **un champ laser intense** $|\alpha| \gg 1$ (pour fixer les idées, un faisceau de 1 mW à une longueur d'onde de 1 μm correspond à environ 10^{15} photons/s) avec des fluctuations quantiques du nombre de photons $\Delta\hat{N}/\langle\hat{N}\rangle \simeq 1/\sqrt{\langle\hat{N}\rangle}$ négligeables.