Introduction to quantum mechanics I

Tristan Villain – Pierre-François Cohadon – Qinhan Wang

Séance de tutorat du 18 décembre 2024

TD de tutorat 8 : puits de potentiel

---

1 Puit de potentiel

On considère une particule dans un puits de potentiel unidimensionnel. On modélise ce potentiel par :

$$V(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [0, L] \\ \infty \text{ sinon} \end{cases} \tag{1}$$

L'objectif de l'exercice est d'étudier les états stationnaires du système.

1. Il est généralement plus simple d'étudier un système quantique en le "plaçant dans une boîte". Pourquoi à votre avis.
2. Ecrire le Hamiltonien de la particule.
3. Argumenter que la fonction d'onde s'annule identiquement à l'extérieur du puits.
4. Ecrire l'équation de Schrödinger stationnaire.
5. Exhiber la solution générale de cette équation.
6. ($\star$) Montrer que, malgré la discontinuité du potentiel, la fonction d'onde est continue. Indice : Intégrer les équations du mouvement et borner l'intégrale du potentiel.
7. Imposer la continuité de la fonction d'onde aux extrémités du puits pour en déduire les énergies propres.
8. Écrire les fonctions d'onde associées. Imposer leur normalisabilité pour éliminer la constante restante.
9. Faire un dessin de quelques fonctions d'ondes dans le puit de potentiel.
10. Comparer les résultats des questions $7, 8, 9$ pour un puits de potentiel dans l'intervalle $[-L/2, L/2]$.
11. Argumenter qu'on peut classifier les états selon leur parité.
12. Considérer les superpositions $|\phi_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_1\rangle \pm |\phi_2\rangle)$ de l'état fondamental et du premier état excité. Dessiner les densités de probabilité résultantes et commenter.
13. Comment $|\phi_+\rangle$ évolue-t-il dans le temps ? La particule reste-t-elle localisée en une région ou oscille-t-elle entre deux positions ? Dans ce cas, quelle est la pulsation de cette oscillation ?

2 Puit de potentiel 2D

On considère une particule dans un puit de potentiel infini à deux dimensions $V_a(x) + V_b(y)$, i.e.

$$V(x, y) = \begin{cases} 0 \text{ si } (x, y) \in [0, a] \times [0, b] \\ \infty \text{ sinon} \end{cases} \tag{2}$$

1. Décrire géométriquement l'allure du potentiel vu par la particule.
2. Écrire le hamiltonien de cette particule. Montrer qu'il peut se découpler selon x et y.
3. En vous aidant de l'exercice 1, trouver sans calcul le spectre et les fonctions d'onde de la particule. Montrer qu'ils peuvent se paramétrer en fonction de deux indices entiers n_x et n_y. On notera $|n_x, n_y\rangle$ les kets propres associés.
4. Donner les degrés de dégénérescence des 3 premiers niveaux dans le cas où $a = b$. Que se passe-t-il si $a \neq b$?