Mécanique quantique – L3

Pierre-François Cohadon -Tristan Villain - Qinhan Wang

TD 11 : Etats cohérents de l'oscillateur harmonique

On cherche à construire des états quantiques de l'oscillateur harmonique dont l'évolution temporelle est semblable à celle de l'oscillateur classique correspondant.

On notera m la masse et $\omega_0/2\pi$ la fréquence de résonance de l'oscillateur harmonique.
Les opérateurs annihilation $\hat{a}$ et création $\hat{a}^\dagger$ associés sont définis par :

$$\begin{aligned}\hat{a} &= \sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}}\hat{x} + i\frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega_0}}\hat{p} \\ \hat{a}^\dagger &= \sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}}\hat{x} - i\frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega_0}}\hat{p}.\end{aligned}$$

1 Retour sur la dynamique classique

1. Écrire l'équation classique du mouvement sur x et la résoudre pour les conditions initiales $(x(0) = A, \dot{x}(0) = 0)$. Quelle est l'impulsion p correspondante ?
2. Décrire le mouvement dans l'*espace des phases* à l'aide de la quantité $x + ip/m\omega_0$.
3. Comment peut-on exciter cet oscillateur à $t = 0$?

2 Opérateur translation

On va s'appuyer sur l'approche classique pour créer un état excité à partir de l'analogue quantique de l'état de repos de l'oscillateur, qui est l'état fondamental $|n = 0\rangle$.

Pour tout réel x_0, on définit l'**opérateur de translation** $\hat{T}_{x_0}$ par son action sur la base $\{|x\rangle, x \in \mathbb{R}\}$ des vecteurs propres de l'opérateur position $\hat{x}$:

$$\hat{T}_{x_0}|x\rangle = |x + x_0\rangle .$$

4. Montrer que $\hat{T}_{x_0}$ est un opérateur unitaire, c'est-à-dire que $\hat{T}^\dagger_{x_0}\hat{T}_{x_0} = \mathbb{I}$, où $\mathbb{I}$ est l'identité.
5. Soit $|\psi\rangle$ un état de l'espace de Hilbert. Montrer que $\langle x|\hat{T}_{x_0}|\psi\rangle = \psi(x - x_0)$.
6. En admettant que le développement de Taylor de ψ autour de x converge en tout point de $\mathbb{R}$, exprimer $\psi(x - x_0)$ en fonction de $\psi(x)$ et de ses dérivées successives $\psi^{(n)}(x)$.
7. Rappeler l'effet de l'opérateur impulsion $\hat{p}$ sur $|\psi\rangle$ dans la base $\{|x\rangle\}$ puis montrer :

$$\langle x|\left(\frac{i}{\hbar}\hat{p}\right)^n|\psi\rangle = \psi^{(n)}(x). \tag{1}$$

8. En déduire que l'opérateur translation peut s'écrire :

$$\hat{T}_{x_0} = \mathrm{e}^{-\frac{ix_0\hat{p}}{\hbar}}. \tag{2}$$

On peut définir de la même façon un **opérateur de translation sur les impulsions** :

$$\hat{F}_{p_0} = \mathrm{e}^{\frac{ip_0\hat{x}}{\hbar}}.$$

9. On va étudier l'effet de ces opérateurs sur l'état fondamental $|0\rangle$.
   On pose :
   $$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_0\sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}} + ip_0\frac{1}{\sqrt{m\omega_0\hbar}}\right).$$
   Montrer que :
   $$\hat{F}_{p_0}\hat{T}_{x_0} = \mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger}\mathrm{e}^{-\alpha^*\hat{a}}\mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}\mathrm{e}^{\left(\alpha^2-\alpha^{*2}\right)/4}. \tag{3}$$

On définit alors **l'état cohérent** $|\alpha\rangle$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ par $|\alpha\rangle = \hat{F}_{p_0}\hat{T}_{x_0}|0\rangle$.

10. Montrer alors :
    $$|\alpha\rangle = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle. \tag{4}$$
    Qu'obtiendrait-on si on calculait à la place $\hat{T}_{x_0}\hat{F}_{p_0}|0\rangle$?

3 Propriétés des états cohérents

L'oscillateur est préparé initialement dans l'état $|\Psi(t=0)\rangle = |\alpha\rangle$.

11. Montrer que $|\alpha\rangle$ est état propre de $\hat{a}$ pour la valeur propre α.
12. Calculer les valeurs moyennes de $\hat{x}$ et de $\hat{p}$ et les variances associées $\Delta\hat{x}^2$ et $\Delta\hat{p}^2$.
13. Calculer la valeur moyenne de $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ et la variance associée.
14. Montrer que l'état $|\Psi(t)\rangle$ reste un état cohérent, caractérisé par un $\alpha(t)$ que l'on précisera.
15. Ecrire les fonctions d'onde $\Psi_\alpha(x,t)$ et $\overline{\Psi}_\alpha(p,t)$ associées.
16. Représenter finalement l'évolution temporelle de l'état du système dans l'espace des phases, la comparer à la dynamique classique de l'oscillateur et conclure.

Formulaire mathématique :

L'exponentielle d'un opérateur est définie par sa série entière :

$$\mathrm{e}^{\hat{A}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\hat{A}^n}{n!}.$$

On utilisera aussi la propriété suivante, valable pour deux opérateurs qui commutent avec leur commutateur :

$$\mathrm{e}^{\hat{A}}\mathrm{e}^{\hat{B}} = \mathrm{e}^{\hat{A}+\hat{B}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}.$$