Introduction to quantum mechanics I

Tristan Villain – Pierre-François Cohadon – Qinhan Wang

Séance de tutorat du 8 janvier 2025

TD de tutorat 9 : oscillateur harmonique quantique

---

1 Oscillateur harmonique quantique et parité

Soit $\widehat{H}$ le hamiltonien d'un oscillateur harmonique 1D de pulsation ω.

1. Rappeler l'expression de $\widehat{H}$ en fonction des opérateurs création et annihilation $\widehat{a}^\dagger$ et $\widehat{a}$. Quel est le spectre de $\widehat{H}$ (on notera E_n l'énergie du n-ème état $|n\rangle$) ?
2. Rappeler l'expression de l'observable $\widehat{X}$ en fonction des opérateurs création et annihilation. Calculer $[\widehat{X}, \widehat{a}^\dagger]$ et en déduire $[\widehat{X}^k, \widehat{a}^\dagger]$ (on notera $X_0 = \sqrt{\hbar/m\omega}$).

Dans la suite du TD, on cherche à calculer $\langle \widehat{X}^k \rangle_0$, où la valeur moyenne est prise dans l'état fondamental $|n = 0\rangle$.

3. On rappelle que l'état fondamental de $\widehat{H}$ possède une fonction d'onde paire. En déduire $\widehat{\Pi}|0\rangle$, où $\widehat{\Pi}$ est l'opérateur parité.
4. Calculer l'opérateur $\widehat{\Pi}^\dagger \widehat{X} \widehat{\Pi}$.
5. Calculer $\langle \widehat{\Pi}^\dagger \widehat{X}^k \widehat{\Pi} \rangle_0$ de deux façons différentes et en déduire $\langle \widehat{X}^k \rangle_0$ pour k impair.
6. Rappeler la valeur de $\widehat{a}|n\rangle$ et $\widehat{a}^\dagger|n\rangle$. En déduire $\widehat{a}|0\rangle$ et $\widehat{a}^\dagger|0\rangle$ et $\langle 0|\widehat{a}^\dagger$ et $\langle 0|\widehat{a}$. Montrer que l'on a la relation de récurrence

$$\langle \widehat{X}^{k+1} \rangle_0 = k \frac{X_0^2}{2} \langle \widehat{X}^{k-1} \rangle_0.$$

7. En déduire l'expression de $\langle \widehat{X}^k \rangle_0$ pour k pair.

On s'intéresse maintenant à la parité d'un état $|n\rangle$.

8. Calculer $\widehat{\Pi}^\dagger \widehat{a}^\dagger \widehat{\Pi}$ et en déduire $\widehat{\Pi} \widehat{a}^\dagger \widehat{\Pi}^\dagger$
9. En déduire que l'état $|n\rangle$ est de parité bien définie que l'on précisera.
10. Un état cohérent $|\alpha\rangle$ a-t-il une parité bien définie ?