

Mécanique quantique – L3 FIP

Correction du TD 5 - Oscillations de Rabi quantiques

1 Etats propres du système

1. A l'exception de l'état $|f, 0\rangle$, d'énergie nulle, tous les niveaux sont doublement dégénérés : pour $n \geq 1$, les états $|f, n\rangle$ et $|e, n - 1\rangle$ sont tous les deux d'énergie $n\hbar\omega_0$.
2. \hat{H}_c n'a d'élément de matrice qu'à l'intérieur d'un niveau de \hat{H}_0 .
La matrice représentant \hat{H}_c dans le $n^{\text{ème}}$ niveau excité s'écrit dans la base $\{|f, n\rangle, |e, n - 1\rangle\}$:

$$\hat{H}_c = \frac{\hbar\Omega_0}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{n} \\ \sqrt{n} & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

3. Les états propres de \hat{H} sont alors immédiatement :
 (a) $|n, +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e, n - 1\rangle + |f, n\rangle)$, d'énergie $E_{n+} = n\hbar\omega_0 + \frac{\hbar\Omega_0}{2}\sqrt{n}$
 (b) $|n, -\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e, n - 1\rangle - |f, n\rangle)$, d'énergie $E_{n-} = n\hbar\omega_0 - \frac{\hbar\Omega_0}{2}\sqrt{n}$.

Dans la limite $\Omega_0 \ll \omega_0$ (et pour de petites valeurs de n , $n \leq 10$ dans la suite), le spectre présente donc un état fondamental $|f, 0\rangle$ et une série de doublets (paires de niveaux très proches en énergie) $\{|n, +\rangle, |n, -\rangle\}$.

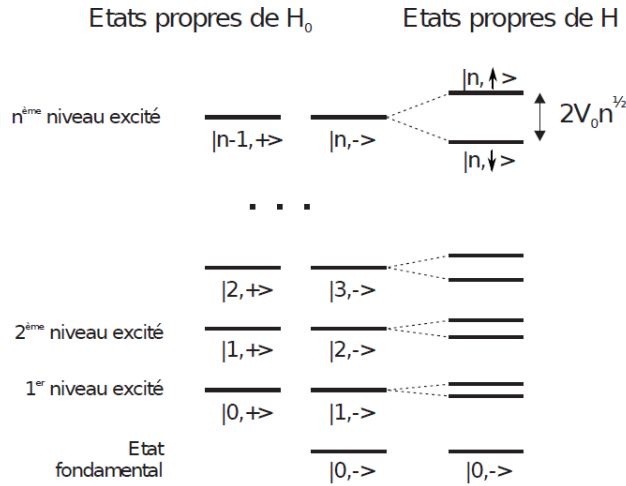


FIGURE 1 – Diagramme des niveaux d'énergie de \hat{H}_0 et $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_c$. La dégénérescence à l'intérieur de chaque niveau de \hat{H}_0 est levée par le couplage \hat{H}_c . Les notations sont différentes par rapport à l'énoncé, j'ai bien noté...

2 Oscillation de Rabi

4. On a une oscillation de Rabi :

$$|\psi(t=0)\rangle = |e, n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|n+1, +\rangle + |n+1, -\rangle) \quad (2)$$

$$\longrightarrow |\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|n+1, +\rangle e^{-i((n+1)\omega_0 + \Omega_0\sqrt{n+1}/2)t} + |n+1, -\rangle e^{-i((n+1)\omega_0 - \Omega_0\sqrt{n+1}/2)t} \right) \quad (3)$$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{e^{-i(n+1)\omega_0 t}}{2} \left((|e, n\rangle + |f, n+1\rangle) e^{-i\Omega_0\sqrt{n+1}t/2} + (|e, n\rangle - |f, n+1\rangle) e^{i\Omega_0\sqrt{n+1}t/2} \right) \quad (4)$$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{e^{-i(n+1)\omega_0 t}}{2} \left(|e, n\rangle \left(e^{-i\Omega_0\sqrt{n+1}t/2} + e^{i\dots} \right) + |f, n+1\rangle \left(e^{-i\dots} - e^{i\dots} \right) \right) \quad (5)$$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i(n+1)\omega_0 t} \left(\cos\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) |e, n\rangle - i \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) |f, n+1\rangle \right) \quad (6)$$

$$\text{avec } \Omega_n = \Omega_0\sqrt{n+1}. \quad (7)$$

À part le préfacteur de phase (sans effet sur les prédictions physiques), on retrouve l'oscillation de Rabi habituelle. La probabilité de transition dans l'état $|f\rangle$ est donc :

$$P_{ef}(t) = |\langle f, n+1 | \psi(t) \rangle|^2 = \sin^2\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) = \frac{1 - \cos \Omega_n t}{2}. \quad (8)$$

5. Le basculement du système à deux niveaux se fait donc à une pulsation $\Omega_n = \Omega_0\sqrt{n+1}$.

3 Oscillations de Rabi multiples

6. Les coefficients $|c_n|^2$ représentent la probabilité $\mathcal{P}(n)$ pour le système d'être initialement dans l'état $|e, n\rangle$.

7. Par **linéarité de l'équation de Schrödinger**, en partant de l'équation (6), on obtient :

$$|\psi(t=0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |e, n\rangle \quad (9)$$

$$\longrightarrow |\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-i(n+1)\omega_0 t} \left(\cos\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) |e, n\rangle - i \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) |f, n+1\rangle \right) \quad (10)$$

La probabilité $P_{ef}(t)$ de basculer dans l'état fondamental, indépendamment de l'état k du champ, s'écrit alors :

$$P_{ef}(t) = \left| \sum_{k=0}^{\infty} |f, k\rangle \langle f, k | \psi(t) \rangle \right|^2 \quad (11)$$

$$P_{ef}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \sin^2\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right). \quad (12)$$

La transition $|e\rangle \rightarrow |f\rangle$ peut se faire **par différents chemins** (correspondant aux différents états $|n\rangle$), mais ces chemins correspondant à des **états finaux orthogonaux**, il n'y a **pas d'effets d'interférence** : P_{ef} est ainsi la somme pondérée (par la probabilité $|c_n|^2$ de chaque chemin) des différentes probabilités partielles P_{ef} calculées à la question précédente.

8. Une **analyse de Fourier** de $P_{ef}(t)$ fait apparaître des pics aux fréquences Ω_n , de hauteur $\mathcal{P}(n) = |c_n|^2$ en puissance.

En pratique, pour déterminer $P_{ef}(t)$, il faut, pour chaque valeur de t , réaliser l'expérience **un très grand nombre de fois** (pour déterminer la probabilité en faisant le rapport du nombre d'expériences où on mesuré le système dans l'état $|f\rangle$ sur le nombre total d'expériences). Ce n'est pas un signal temporel qu'on observe sur un écran d'oscilloscope !

4 Réalisation expérimentale

9. La **vitesse thermique moyenne** des atomes sortant du four (à $\simeq 500$ K) est :

$$v_{th} \simeq \sqrt{\frac{kT}{M}} \simeq \sqrt{\frac{10^{-23} \times 500}{85 \times 1,6 \times 10^{-27}}} \simeq 300 \text{ m.s}^{-1}. \quad (13)$$

Ici, les atomes interagissent avec le mode du champ électromagnétique, qui a une taille de 6 mm, donc pendant un temps de l'ordre de $20 \mu\text{s}$. Comme c'est une **distribution de vitesses**, toute une plage de vitesses est en fait présente et on peut choisir le temps d'interaction des atomes.

10. On observe **plusieurs oscillations de Rabi amorties** (essentiellement à cause des erreurs de comptage des détecteurs, plus importantes pour les atomes les plus lents, plus rares et qui donnent donc un flux plus faible).

Pour un temps d'interaction de l'ordre de $10 \mu\text{s}$, l'atome, initialement dans l'état $|e\rangle$, quitte la cavité dans l'état $|f\rangle$ (pour $P_{ef} = 1$) après y avoir déposé un photon.

On en déduit :

$$\Omega_0/2\pi \simeq 50 \text{ kHz}, \quad (14)$$

qui est bien négligeable devant la fréquence du mode micro-ondes $\omega_0/2\pi \simeq 50 \text{ GHz}$.

Pour un temps d'interaction plus long, l'atome a le temps de continuer l'oscillation de Rabi et peut réabsorber le photon et quitter la cavité dans le même état qu'à son entrée (et sans avoir modifié non plus l'état du mode de la cavité). Pour des temps d'interaction encore plus longs (avec un choix d'atomes plus lents), cette oscillation peut même s'effectuer plusieurs fois.

11. Les oscillations se font **à plusieurs fréquences**, résultant en une alternance de **brouillages** et de **renaissances** du signal (pas très spectaculaires, en raison de l'amortissement). Les pulsations Ω_n varient en $\sqrt{n+1}$ comme attendu (tirets sur les courbes (a)...).

12. On peut comparer les résultats obtenus sur les $\mathcal{P}(n) = |c_n|^2$ à ceux attendus

$$\mathcal{P}(n) = e^{-|\alpha|^2} |\alpha|^{2n} / n! \quad (15)$$

pour la loi proposée (dont on verra plus tard dans le cours d'où elle vient).

	$\alpha = 0.63$	Mesuré (β)	$\alpha = 0.92$	Mesuré (γ)	$\alpha = 1.33$	Mesuré (δ)
$p(0)$	0.67	0.69	0.43	0.42	0.17	0.2
$p(1)$	0.26	0.28	0.36	0.35	0.30	0.27
$p(2)$	0.05	0.03	0.15	0.15	0.27	0.25
$p(3)$	$\leq 10^{-2}$	0	0.04	0.05	0.15	0.13
$p(4)$	$\leq 10^{-3}$	0	0.01	0.02	0.07	0.1
$p(5)$	$\leq 10^{-4}$	0	0	0	0.025	0.06

L'accord est très bon. On verra plus tard une version améliorée de cette expérience, avec des états du champ avec $n \simeq 20$.

Bibliographie :

M. Brune *et al.*, Quantum Rabi Oscillations : A Direct Test of Field Quantization in a Cavity, Phys. Rev. Lett. **76**, 1800 (1996).