Mécanique quantique – L3

Pierre-François Cohadon - Tristan Villain - Qinhan Wang

TD 12 : Perturbations stationnaires

Oscillateurs harmoniques couplés

On considère deux particules de même masse m soumises au même potentiel harmonique 1D de pulsation ω. Le Hamiltonien du système des 2 particules s'écrit :

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}_1^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}_1^2 + \frac{\hat{p}_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}_2^2$$

1. Rappeler l'expression des opérateurs création $\hat{a}_i^\dagger$ et annihilation $\hat{a}_i$ associés à la particule i $(i = 1, 2)$. Donner l'expression de $\hat{H}_0$ en fonction de ces opérateurs.
2. Quelles sont les niveaux d'énergie du système des 2 particules ? Préciser le degré de dégénérescence de chacun de ces niveaux. Préciser également l'expression des vecteurs propres associés à ces énergies en fonction des vecteurs propres des hamiltoniens des particules isolées.

On tient maintenant compte d'**un terme d'interaction entre les 2 oscillateurs** que l'on suppose de la forme :

$$\hat{W} = gm\omega^2\hat{x}_1\hat{x}_2 \quad \text{avec} \quad |g| \leq 1.$$

Dans un premier temps, on traite ce terme en **perturbation** de $\hat{H}_0$.

3. Exprimer $\hat{W}$ en fonction des opérateurs $\hat{a}_i^\dagger$ et $\hat{a}_i$.
4. Montrer que la correction à l'énergie du niveau fondamental s'écrit, au second ordre en perturbation :
$$\Delta E_0^{(2)} = -\frac{1}{8}g^2\hbar\omega.$$
Commenter le signe de $\Delta E_0^{(2)}$.
5. Montrer que le premier niveau excité du système non-perturbé donne naissance à 2 niveaux d'énergie dont les énergies sont, au premier ordre en perturbation :
$$E_{1,\pm}^{(1)} = 2\hbar\omega\left(1 \pm \frac{g}{4}\right).$$
On ne cherchera pas à déterminer les états correspondants.
6. Montrer que le deuxième niveau excité donne quant à lui naissance à 3 niveaux dont les énergies sont, au premier ordre en perturbation :
$$E_{2,0}^{(1)} = 3\hbar\omega \quad \text{et} \quad E_{2,\pm}^{(1)} = 3\hbar\omega\left(1 \pm \frac{g}{3}\right).$$

On procède maintenant à un **traitement exact** du terme de couplage. Pour cela, on introduit les opérateurs :

$$\hat{x}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{x}_1 + \hat{x}_2\right) \quad \text{et} \quad \hat{x}_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{x}_1 - \hat{x}_2\right)$$

7. Exprimer le hamiltonien $\hat{H}_0 + \hat{W}$ du système en fonction de $\hat{x}_+$ et $\hat{x}_-$ et des opérateurs impulsion associés $\hat{p}_+$ et $\hat{p}_-$.
8. En déduire les énergies exactes du système des 2 oscillateurs couplés et comparer les résultats exacts à ceux du traitement en perturbation.
9. Discuter l'analogie de la méthode employée pour la résolution exacte avec le traitement classique usuel. Comment appelle-t-on $\hat{x}_+$ et $\hat{x}_-$? Préciser les similitudes et les différences entre les traitements classique et quantique.

Formulaire :

- Sous l'action d'une perturbation stationnaire $\hat{W}$, l'énergie d'un niveau non dégénéré (état non perturbé $|n\rangle$, énergie E_n) s'écrit au second ordre en perturbation :

$$E_n^{(2)} = E_n + \langle n|\hat{W}|n\rangle + \sum_{n' \neq n} \frac{|\langle n'|\hat{W}|n\rangle|^2}{E_n - E_{n'}}$$

  où les $|n'\rangle$ sont les autres états non perturbés du système (d'énergie $E_{n'}$).

- Matrices de Pauli :

$$\widehat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \widehat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \widehat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$