TD de tutorat 10 : théorie des perturbations

Exercice 1 : spins 1/2 couplés et effet Zeeman perturbatif

1. $H = A \vec{\hat{S}}_1 \cdot \vec{\hat{S}}_2$

On choisit la base z pour le proton et l'électron, et la base du système {proton + électron} et :
$|++\rangle$, $|+-\rangle$, $|-+\rangle$, $|--\rangle$, où le 1er vecteur correspond au spin du proton, et le deuxième à celui de l'électron.

Les vecteurs propre de H sont :

$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle - |-+\rangle\right) = |\varphi^0_{00}\rangle$$

$$|1,-1\rangle = |--\rangle = |\varphi^0_{1-1}\rangle$$

$$|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle + |-+\rangle\right) = |\varphi^0_{10}\rangle$$

$$|1,1\rangle = |++\rangle = |\varphi^0_{11}\rangle$$

et les énergies propres sont :

$$|\varphi^0_{00}\rangle = |0,0\rangle \longrightarrow E^0_{00} = -\frac{3}{4} A \hbar^2$$

$$|\varphi^0_{1-1}\rangle = |1,-1\rangle \longrightarrow E^0_{1-1} = \frac{1}{4} A \hbar^2$$

$$|\varphi^0_{10}\rangle = |1,0\rangle \longrightarrow E^0_{10} = \frac{1}{4} A \hbar^2$$

$$|\varphi^0_{11}\rangle = |1,1\rangle \longrightarrow E^0_{11} = \frac{1}{4} A \hbar^2$$

2. $H_1 = -\gamma_p \vec{B}\cdot\vec{S_1} - \gamma_e \vec{B}\cdot\vec{S_2}$

$= -\gamma_p B \hat{S}_{1z} - \gamma_e B \hat{S}_{2z} = -\omega_p \hat{S}_{1z}\otimes \mathbb{1} + \omega_e \mathbb{1}\otimes \hat{S}_{2z}$

avec $\omega_p = \gamma_e B > 0 \qquad \omega_e = -\gamma_e B > 0$

$H = H_0 + H_1 = A \vec{\hat{S}_1}\cdot\vec{\hat{S}_2} - \omega_p \hat{S}_{1z}\otimes\mathbb{1} + \omega_e \mathbb{1}\otimes\hat{S}_{2z}$

avec les paramètres du développement perturbatifs

$\omega_p, \omega_e \ll A\hbar$, i.e. $B \ll \frac{A\hbar}{\gamma_e}$ car $\gamma_e \gg \gamma_p$

3. La théorie des perturbations dépend de si l'état est dégénéré ou non.
Ici E_{00}^0 est non-dégénéré, donc, au 1er ordre :

$E_{00}^1 = \langle \varphi_{00}^0 | H_1 | \varphi_{00}^0 \rangle$

$= \langle 0,0 | H_1 | 0,0 \rangle$

$= \frac{1}{2}\Big((\langle +-| - \langle -+|)\big(-\omega_p S_{1z}\otimes\mathbb{1} + \omega_e \mathbb{1}\otimes S_{2z}\big)(|+-\rangle - |-+\rangle)\Big)$

$= \frac{1}{2}\Big((\langle +-| - \langle -+|)\big(-\omega_p \frac{\hbar}{2}|+-\rangle - \omega_p\frac{\hbar}{2}|-+\rangle - \omega_e\frac{\hbar}{2}|+-\rangle - \omega_e\frac{\hbar}{2}|-+\rangle\big)\Big)$

$= \frac{\hbar}{4}\big(-\omega_p - \omega_e - (-\omega_p - \omega_e)\big) = 0$

4. $|\varphi_{00}\rangle = |\varphi_{00}^0\rangle + |\varphi_{00}^1\rangle + |\varphi_{00}^2\rangle + \dots$

avec "$|\varphi_{00}^2\rangle \ll |\varphi_{00}^1\rangle \ll |\varphi_{00}^0\rangle$"

$|\varphi_{00}^1\rangle = -\sum_{m\neq 00} \sum_j |\varphi_{m,j}^0\rangle \frac{\langle \varphi_{m,j}^0 | H_1 | \varphi_{00}^0\rangle}{E_{m,j}^0 - E_n^0}$

Appliquée ici : $|\varphi_{00}^1\rangle = - \sum_{m \neq 00} |\varphi_m^0\rangle \dfrac{\langle \varphi_m^0 | H_1 | \varphi_{00}^0\rangle}{E_m^0 - E_{00}^0}$

avec $m \in \{(1,0)\,;\,(1,-1)\,;\,(1,1)\}$

$*\ \langle \varphi_{1-1}^0 | H_1 | \varphi_{00}^0 \rangle = \langle 1,-1 | H_1 | 0,0\rangle$

$= \dfrac{\hbar}{2\sqrt{2}} \langle --| \left(-\omega_p |+-\rangle - \omega_p |-+\rangle - \omega_e |+-\rangle - \omega_e |-+\rangle \right)$

$= 0$ car $\langle --|+-\rangle = \langle -|+\rangle . \langle -|-\rangle = 0$

$\langle --|-+\rangle = \langle -|-\rangle . \langle -|+\rangle = 0$

$*\ \langle \varphi_{11}^0 | H_1 | \varphi_{00}^0 \rangle = \langle 1,1 | H_1 | 0,0 \rangle = 0$ pour les mêmes raisons

$*\ \langle \varphi_{10}^0 | H_1 | \varphi_{00}^0 \rangle = \langle 1,0 | H_1 | 0,0 \rangle$

$= \dfrac{\hbar}{4} \left(\langle +-| + \langle -+| \right) \left(-\omega_p |+-\rangle - \omega_p |-+\rangle - \omega_e |+-\rangle - \omega_e |-+\rangle \right)$

$= \dfrac{\hbar}{4} \left(-\omega_p - \omega_e - \omega_p - \omega_e \right) = -\dfrac{\hbar}{2}(\omega_p + \omega_e)$

donc $|\varphi_{00}^1\rangle = - |\varphi_{10}^0\rangle \dfrac{\left(-\frac{\hbar}{2}(\omega_p+\omega_e)\right)}{\left(\frac{A\hbar^2}{4} - \left(-\frac{3A\hbar^2}{4}\right)\right)}$

$= \dfrac{\hbar(\omega_p + \omega_e)}{2A\hbar^2} |\varphi_{10}^0\rangle = \dfrac{\omega_p + \omega_e}{2A\hbar} |\varphi_{10}^0\rangle$

5. Dans le cas dégénéré, la méthode est différente :

il faut appliquer H_1 dans le sous-espace de la valeur propre dégénérée. Les corrections $E^1_{m,j}$ sont les énergies de ce hamiltonien dans ce sous-espace, que l'on obtient en diagonalisant H_1 dans ce sous-espace. Les vecteurs propres associés sont les états propres non perturbés $|\varphi_n^0\rangle$. Pour obtenir $|\varphi_n^1\rangle$, il faudrait itérer le processus, et obtenir les corrections d'ordre 2 $E^2_{m,j}$ (mais c'est plus compliqué).

Il faut calculer H_1 dans ce sous-espace :

$$H_1 = \begin{pmatrix} \langle 1,0|H_1|1,0\rangle & \langle 1,0|H_1|1,-1\rangle & \langle 1,0|H_1|1,1\rangle \\ \langle 1,-1|H_1|1,0\rangle & \langle 1,-1|H_1|1,-1\rangle & \langle 1,-1|H_1|1,1\rangle \\ \langle 1,1|H_1|1,0\rangle & \langle 1,1|H_1|1,-1\rangle & \langle 1,1|H_1|1,1\rangle \end{pmatrix}$$

* $H_1|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\omega_p S_{1z}\otimes \mathbb{1} + \omega_e \mathbb{1}\otimes S_{2z}\right)(|+-\rangle + |-+\rangle)$ ..

$$= \frac{\hbar}{2\sqrt{2}}\left(-\omega_p|+-\rangle + \omega_p|-+\rangle - \omega_e|+-\rangle + \omega_e|-+\rangle\right)$$

$$= \frac{-\hbar}{2\sqrt{2}}\left(\omega_p(|+-\rangle - |-+\rangle) + \omega_e(|+-\rangle - |-+\rangle)\right)$$

$$= -\frac{\hbar}{2}(\omega_p + \omega_e)|0,0\rangle$$

donc $H_1|1,0\rangle = 0$ dans ce sous-espace propre

* $H_1|1,-1\rangle = \left(-\omega_p S_{1z}\otimes \mathbb{1} + \omega_e \mathbb{1}\otimes S_{2z}\right)|--\rangle$

$$= \left(\frac{\hbar}{2}\omega_p|--\rangle - \frac{\hbar}{2}\omega_e|--\rangle\right) = \frac{\hbar}{2}(\omega_p - \omega_e)|--\rangle = -\frac{\hbar}{2}(\omega_e - \omega_p)|--\rangle$$

* $H_1|1,1\rangle = \left(-\omega_p S_{1z}\otimes \mathbb{1} + \omega_e \mathbb{1}\otimes S_{2z}\right)|++\rangle$

$$= -\frac{\hbar}{2}\omega_p|++\rangle + \frac{\hbar}{2}\omega_e|++\rangle = \frac{\hbar}{2}(\omega_e - \omega_p)|++\rangle$$

donc $H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{2}(\omega_e-\omega_p) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\hbar}{2}(\omega_e-\omega_p) \end{pmatrix}$

donc $E_{10}^1 = 0$

$E_{1-1}^1 = -\frac{\hbar}{2}(\omega_e-\omega_p) < 0$

$E_{11}^1 = \frac{\hbar}{2}(\omega_e-\omega_p) > 0$

- Dans le cas dégénéré, lorsqu'on calcule les corrections de l'énergie à l'ordre 1, on n'a que les états propres à l'ordre 0. En effet, en reprenant le développement perturbatif, à l'ordre 1 on obtient l'équation

$$E_{n,i}^1 \langle \varphi_{m_j}^0 | \varphi_{n_i}^0 \rangle = \langle \varphi_{m_j}^0 | H_1 | \varphi_{n_i}^0 \rangle + (E_m^0 - E_n^0) \langle \varphi_{m_j}^0 | \varphi_{n_i}^1 \rangle$$

  - dans le cas non-dégénéré, le dernier terme est $\neq 0$, et on peut multiplier par $\sum_{m \neq n} \sum_j |\varphi_{m,j}^0\rangle$ et diviser par $E_m^0 - E_n^0$ pour trouver $|\varphi_{n_i}^1\rangle$

  - dans le cas dégénéré, ce terme est nul, et pour avoir $|\varphi_{n,i}^1\rangle$ (au 1er ordre), il faut aller au 2ème ordre en énergies ($E_{n,i}^2$) ; c'est-à-dire le deuxième ordre de la perturbation.

- Les états propres $|\varphi_{n,i}^0\rangle$, sont les états propres de H_1, dans le sous-espace propre de $E_{10}^0 = E_{1-1}^0 = E_{11}^0$.

Ici, le hamiltonien est diagonal, donc :

les états propres sont

$$|\varphi_1^0\rangle = |1,0\rangle = |\varphi_{10}^0\rangle$$

$$|\varphi_2^0\rangle = |1,-1\rangle = |\varphi_{1-1}^0\rangle$$

$$|\varphi_3^0\rangle = |1,1\rangle = |\varphi_{11}^0\rangle$$

6. Au deuxième ordre, pour le cas non-dégénéré :

$$E_{00}^2 = \langle \varphi_{00}^0 | H_1 | \varphi_{00}^1 \rangle = -\sum_{m\neq n} \sum_j \frac{|\langle \varphi_{m_j}^0 | H_1 | \varphi_n^0\rangle|^2}{E_m^0 - E_n^0}$$

$$= -\sum_{m\neq n} \frac{|\langle \varphi_m^0 | H_1 | \varphi_{00}^0\rangle|^2}{E_m^0 - E_{00}^0} \qquad \text{avec } m \in \{(1,0);(1,-1);(1,1)\}$$

$$\text{or } H_1|\varphi_{00}^0\rangle = \frac{\hbar}{2\sqrt{2}}\left(-\omega_p|+-\rangle - \omega_p|-+\rangle - \omega_e|+-\rangle - \omega_e|-+\rangle\right)$$

$$= -\frac{\hbar}{2}(\omega_p+\omega_e)|1,0\rangle$$

$$\text{donc} \quad E_{00}^2 = -\frac{|\langle \varphi_{10}^0 | H_1 | \varphi_{00}^0\rangle|^2}{E_{10}^0 - E_{00}^0} = -\frac{|\frac{\hbar}{2}(\omega_p+\omega_e)|^2}{\frac{A\hbar^2}{4} - \left(-\frac{3A\hbar^2}{4}\right)}$$

$$= -\frac{(\omega_p+\omega_e)^2}{4A}$$

7. Pour résoudre de façon exacte $H = H_0 + H_1$, on calcule H dans la base $\{|0,0\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle, |1,1\rangle\}$ puis on le diagonalise.

On a déjà calculé précédemment les éléments de matrice :

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{3A\hbar^2}{4} & -\frac{\hbar}{2}(\omega_p+\omega_e) & 0 & 0 \\ -\frac{\hbar}{2}(\omega_p+\omega_e) & \frac{A\hbar^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A\hbar^2}{4}-\frac{\hbar^2}{2}(\omega_e+\omega_p) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{A\hbar^2}{2}+\frac{\hbar}{2}(\omega_e+\omega_p) \end{pmatrix}$$

Il suffit de diagonalisé la 1ère sous-matrice 2x2 :

$$\det(M-\lambda \mathbb{1}) = \left(-\frac{3A\hbar^2}{4}-\lambda\right)\left(\frac{A\hbar^2}{4}-\lambda\right)-\left(\frac{\hbar}{2}(\omega_p+\omega_e)\right)^2$$

$$= \lambda^2 - \lambda\left(-\frac{3A\hbar^2}{4}+\frac{A\hbar^2}{4}\right) - \frac{3}{16}(A\hbar)^2 - \left(\frac{\hbar}{2}(\omega_p+\omega_e)\right)^2$$

$$= \lambda^2 + \frac{\lambda A\hbar^2}{2} - 3\left(\frac{A\hbar^2}{4}\right)^2 - \left(\frac{\hbar}{2}(\omega_p+\omega_e)\right)^2 = 0$$

$$\Delta = \left(\frac{A\hbar}{2}\right)^2 + 4\times 3\left(\frac{A\hbar^2}{4}\right)^2 + 4\,\frac{\hbar^2}{4}(\omega_p+\omega_e)^2$$

$$= (A\hbar^2)^2 + \hbar^2(\omega_p+\omega_e)^2$$

Les solutions sont :

$$E_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{A\hbar^2}{4} - \sqrt{\left(\frac{A\hbar^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\hbar}{2}(\omega_p+\omega_e)\right)^2}$$

$$E_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{A\hbar^2}{4} + \sqrt{\left(\frac{A\hbar^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\hbar}{2}(\omega_p+\omega_e)\right)^2}$$

et $E_3 = \frac{A\hbar^2}{4} - \frac{\hbar}{2}(\omega_p + \omega_e)$

$$E_4 = \frac{A\hbar^2}{4} + \frac{\hbar}{2}(\omega_p + \omega_e)$$

. Au calcul perturbatif, on a trouvé :

$$E_{00} = -\frac{3A\hbar^2}{4} - \frac{(\omega_p + \omega_e)^2}{4A} + o(\lambda^2)$$

$$E_{10} = \frac{A\hbar^2}{4} + o(\lambda)$$

$$E_{1-1} = \frac{A\hbar^2}{4} - \frac{\hbar}{2}(\omega_e - \omega_p) + o(\lambda)$$

$$E_{11} = \frac{A\hbar^2}{4} + \frac{\hbar}{2}(\omega_e + \omega_p) + o(\lambda)$$

avec $\lambda = \frac{A\hbar}{\gamma_e B}$

. Or le calcul exact, en faisant un développement limité, donne :

$$E_1 = -\frac{A\hbar^2}{4} - \frac{A\hbar^2}{2}\left(1 + \frac{(\omega_p + \omega_e)^2}{2(A\hbar^2)^2}\right) = -\frac{3A\hbar^2}{4} - \frac{(\omega_p + \omega_e)^2}{4A}$$

$$E_2 = -\frac{A\hbar^2}{4} + \frac{A\hbar^2}{2}\left(1 + \frac{(\omega_p + \omega_e)^2}{2(A\hbar^2)^2}\right) = \frac{A\hbar^2}{4} + \frac{(\omega_p + \omega_e)^2}{4A}$$

$$= \frac{A\hbar^2}{4} \quad \text{au 1er ordre}$$

$\Rightarrow$ on retrouve bien les mêmes expressions !

Exercice 2 : spin 1/2 dans un champ magnétique oscillant perturbatif

1. Le hamiltonien est $\hat{H} = -\hat{\vec{m}} \cdot \vec{B_0} = -\gamma \vec{B_0} \cdot \hat{\vec{S}} = -\gamma B_0 \hat{S_z}$

$E_0 = +\gamma B_0 \frac{\hbar}{2}$ pour l'état $|-\rangle$

$E_1 = -\gamma B_0 \frac{\hbar}{2}$ pour l'état $|+\rangle$

On suppose que la particule est un électron : $\gamma < 0$

donc $E_0 < E_1$

2. $H_1 = -\gamma \vec{B_1} \cdot \hat{\vec{S}}$ avec $\vec{B_1} = B_1 \cos(\omega t) \vec{e_x} + B_1 \sin(\omega t) \vec{e_y}$

$= -\gamma B_1 (\cos(\omega t) \hat{S_x} + \sin(\omega t) \hat{S_y})$

3. En écrivant $H = H_0 + H_1$

et en développant $|\Psi(t)\rangle$ sur la base $\{|+\rangle_z, |-\rangle_z\}$ de $\mathcal{H}$,

on écrit $|\Psi(t)\rangle = c_0(t) e^{-iE_0 t/\hbar} |-\rangle + c_1(t) e^{-iE_1 t/\hbar} |+\rangle$

· De manière générale, on développe $|\Psi(t)\rangle$ sur une base propre de H_0 :

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n e^{-iE_n^0 t/\hbar} c_n(t) |\varphi_n^0\rangle$$

où $H|\varphi_n^0\rangle = E_n^0 |\varphi_n^0\rangle$

En écrivant l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = H|\Psi(t)\rangle = H_0|\Psi(t)\rangle + H_1|\Psi(t)\rangle$$

alors $\cancel{\sum_n E_n^0 c_n(t) e^{-iE_n^0 t/\hbar}|\varphi_n^0\rangle} + i\hbar \sum_n \dot{c}_n(t) e^{-iE_n t/\hbar}|\varphi_n^0\rangle$

$$= \sum_n c_n(t) e^{-iE_n^0 t/\hbar} \cancel{\underbrace{H_0|\varphi_n^0\rangle}_{=E_n^0|\varphi_n^0\rangle}} + \sum_n c_n(t) e^{-iE_n^0 t/\hbar} H_1|\varphi_n^0\rangle$$

donc $i\hbar\, \dot{c}_n(t) = \sum_m e^{-i(E_m^0 - E_n^0)t/\hbar} \langle\varphi_n^0|H_1|\varphi_m^0\rangle\, c_m(t)$

en multipliant par $\langle\varphi_n^0|$ à gauche puis par $e^{+iE_n^0 t/\hbar}$

On développe les coefficients perturbativement :

$$c_n(t) = c_n^0(t) + \lambda c_n^1(t) + \lambda^2 c_n^2(t) + \dots$$

avec H_1 qui est en λ

. Donc à l'ordre 0 en λ :

$$i\hbar\, \dot{c}_n^0(t) = 0 \qquad \Rightarrow c_n^0 = cste$$

. À l'ordre 1 :

$$i\hbar\, \dot{c}_n^1(t) = \sum_m e^{-i(E_m^0 - E_n^0)t/\hbar} \langle\varphi_n^0|H_1|\varphi_m^0\rangle\, c_m^0$$

en intégrant : $c_n^1(t) = \sum_m \frac{c_m^0}{i\hbar} \int_0^t dt'\, e^{-i(E_m^0 - E_n^0)t'/\hbar} \langle\varphi_n^0|H_1|\varphi_m^0\rangle$

. Appliqué à notre cas :

$$H_1|+\rangle = -\gamma B_1(\cos(\omega t)\, S_x|+\rangle + \sin(\omega t)\, S_y|+\rangle) = -\frac{\gamma\hbar B_1}{2}(\cos(\omega t)|-\rangle - i\sin(\omega t)|-\rangle)$$

$$= -\frac{\gamma\hbar B_1}{2} e^{-i\omega t}|-\rangle$$

$$H_1|-\rangle = -\gamma B_1(\cos(\omega t)\, S_x|-\rangle + \sin(\omega t)\, S_y|-\rangle) = -\frac{\gamma\hbar B_1}{2}(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t))|+\rangle$$

$$= -\frac{\gamma\hbar B_1}{2} e^{i\omega t}|+\rangle$$

- or, à $t=0$, le système est dans l'état fondamental $|-\rangle$, donc

$$|\Psi(0)\rangle = c_0 |-\rangle \qquad \text{avec } c_0 = 1 \text{ pour avoir un état normalisé}$$
$$= |-\rangle$$

donc $$c_n^1(t) = \frac{1}{i\hbar} \int dt' \, e^{-i(E_0' - E_n^0)t'/\hbar} \langle - | H_1 | \varphi_n^0 \rangle$$

$$c_0^1(t) = \frac{1}{i\hbar} \int dt' e^{-i(E_0 - E_0)t'/\hbar} \underbrace{\langle - | H_1 | - \rangle}_{=0}$$
$$= 0$$

$$c_1^1(t) = \frac{1}{i\hbar} \int dt' \, e^{-i(E_0 - E_1)t'/\hbar} \langle - | H_1 | + \rangle$$
$$= -\frac{\gamma B_1}{i\hbar} \frac{\hbar}{2} \int_0^t dt' \, e^{-i(E_0 - E_1)t'/\hbar} e^{-i\omega t}$$

on écrit $\omega_{01} = \dfrac{E_1 - E_0}{\hbar}$

$$c_1^1(t) = -\frac{\gamma B_1}{2i} \int_0^t dt' \, e^{i(\omega_{01} - \omega)t'}$$
$$= i \frac{\gamma B_1}{2} \left(\frac{e^{i(\omega_{01} - \omega)t} - 1}{i(\omega_{01} - \omega)} \right) = \frac{\gamma B_1}{2(\omega_{01} - \omega)} \left(e^{i(\omega_{01} - \omega)t} - 1 \right)$$

- Finalement : $|\Psi(t)\rangle = c_0(t) |-\rangle + c_1(t) |+\rangle$

$$= \left(c_0^0(t) + c_0^1(t) \right) |-\rangle + \left(c_1^0(t) + c_1^1(t) \right) |+\rangle$$

$$|\Psi(t)\rangle = |-\rangle + \frac{\gamma B_1}{2(\omega_{01} - \omega)} \left(e^{i(\omega_{01} - \omega)t} - 1 \right) |+\rangle$$

4. La probabilité que le système soit dans l'état excité $|+\rangle$ à un temps t est :

$$P_{g\to e}(t) = |\langle + | \Psi(t)\rangle|^2 = \frac{(\gamma B_1)^2}{4(\omega_{01}-\omega)^2} \left|e^{-i(\omega_{01}-\omega)t}\right|^2 \left|e^{\frac{i(\omega_{01}-\omega)t}{2}} - e^{-\frac{i(\omega_{01}-\omega)t}{2}}\right|^2$$

$$= \frac{(\gamma B_1)^2}{4(\omega_{01}-\omega)^2}\, 4 \sin^2\left(\frac{(\omega_{01}-\omega)t}{2}\right) = \frac{(\gamma B_1)^2}{(\omega_{01}-\omega)^2} \sin^2\left(\frac{(\omega_{01}-\omega)t}{2}\right)$$

- Dans le cours, on a vu que une résolution exacte de H donne :

$$P_{g\to e}(t) = \frac{\omega_1^2}{(\omega_0-\omega)^2+\omega_1^2} \sin^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right)$$

avec $\omega_1 = -\gamma B_1$, $\omega_0 = -\gamma B_0 = \frac{E_1 - E_0}{\hbar}$

et $\Omega = \sqrt{(\omega_0-\omega)^2+\omega_1^2}$

- Dans la limite $\omega_1 \ll \omega_0 - \omega$, ça donne :

$$P_{g\to e}(t) = \frac{\omega_1^2}{(\omega_0-\omega)^2} \sin^2\left(\frac{(\omega_0-\omega)t}{2}\right)$$, à l'ordre 1 en $\frac{B_1}{B_0} = \frac{\omega_1}{\omega_0}$

donc la même chose que le calcul perturbatif.

- Le calcul perturbatif est valide si $\omega_1 \ll \omega_0$ et $\omega_1 \ll \omega_{01} - \omega$:

même si $\omega_1 \ll \omega_0$, il faut que le champ oscillant soit hors de la résonance $E_1 - E_0$ entre les 2 niveaux d'énergie, car même si le champ est petit, $P_{g\to e}$ diverge quand $\omega \to \omega_{01}$, pour le calcul perturbatif et la perturbation n'est plus négligeable.