Introduction to quantum mechanics I

Tristan Villain – Pierre-François Cohadon – Qinhan Wang

Séance de tutorat du 20 novembre 2024

TD de tutorat 6 : position et impulsion en mécanique quantique

---

1 Opérateurs position et impulsion

On considère l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{C})$ des fonctions de carré sommable à valeurs dans $\mathbb{C}$, muni du produit scalaire :

$$\langle f|g\rangle = \int dx f(x)\bar{g}(x) \tag{1}$$

Cet espace admet une base dite "position". Ses éléments sont dénotés $|x\rangle$ et satisfont :

$$\langle x|x'\rangle = \delta(x - x') \tag{2}$$

$$\langle x|f\rangle = f(x) \tag{3}$$

Il admet également une base dite "impulsion", donnée par la transformée de Fourier de la base position. Ses éléments sont denotés $|p\rangle$ et satisfont :

$$\langle x|p\rangle = \frac{e^{ipx/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \tag{4}$$

$$\langle p|p'\rangle = \delta(p - p') \tag{5}$$

On rappelle également l'identité de fermeture d'une base continue :

$$\int dx\, |x\rangle \langle x| = \mathbb{1} = \int dp\, |p\rangle \langle p| \tag{6}$$

On définit également des observables position et impulsion, qu'on note respectivement $\hat{X}$ et $\hat{P}$. Les bases définis ci-haut sont des bases d'états propres pour ces observables. On écrit :

$$\hat{X}\, |x\rangle = x\, |x\rangle\, ,\ \hat{P}\, |p\rangle = p\, |p\rangle \tag{7}$$

1. Calculer dans la base position l'action des opérateurs position et impulsion , i.e. $\langle x|\, \hat{X}\, |\psi\rangle$, et $\langle x|\, \hat{P}\, |\psi\rangle$.
2. Calculer dans la base impulsion l'action des opérateurs impulsion et position, i.e. $\langle p|\, \hat{P}\, |\psi\rangle$ et $\langle p|\, \hat{X}\, |\psi\rangle$.
3. Montrer que les opérateurs position $\hat{X}$ et impulsion $\hat{P}$ sont hermitiens. En conclure si ce sont des observables.

4. Utiliser l'expression obtenue à la question précédente pour calculer le commutateur $[\hat{X}, \hat{P}]$.

On introduit un opérateur translation, $\hat{T}(a) := e^{-ia\hat{P}/\hbar}$.

4. Montrer que $\hat{T}(a)\,|x\rangle$ est un état propre de $\hat{X}$ de valeur propre $x + a$.
5. Peut-on en déduire que $\hat{T}(a)\,|x\rangle = |x + a\rangle$?
6. Calculer $\langle x + a|\psi\rangle$ en utilisant un opérateur translation. Comparer au développement en série de $\psi(x + a)$.
7. En déduire que $\hat{T}(a)\,|x\rangle = |x + a\rangle$.

2 Opérateur impulsion

On rappelle que $[\hat{X}, \hat{P}] = \mathrm{i}\hbar$

1. Montrer que $[\hat{P}, \hat{X}^n] = -\mathrm{i}n\hbar\hat{X}^{n-1}$ pour tout entier $n \geq 1$.
2. Montrer que pour toute fonction f différentiable de $\hat{X}$, $[\hat{P}, f(\hat{X})] = -\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(\hat{X})$.
3. Montrer que $\langle x|\,\hat{P}\,|x'\rangle = -\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta(x - x')$.

3 Paquet d'onde gaussien

Exercice 6.4 du cours.
On suppose que notre système $|\psi\rangle$ a une distribution gaussienne en impulsion, centrée en p_0 avec une largeur σ :

$$\tilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{\pi^{1/2}\sigma}}e^{-(p-p_0)^2/(2\sigma^2)}$$

.

1. Écrire l'état du système dans l'espace des positions, c'est-à-dire dans la base des positions $|x\rangle$.
2. Calculer les valeurs moyennes $\langle\hat{X}\rangle$ et $\langle\hat{P}\rangle$ pour la position et l'impulsion du système.
3. Calculer les variances de la position et impulsion du système $(\Delta\hat{X})^2 = \langle(\hat{X} - \langle\hat{X}\rangle)^2\rangle$ et $(\Delta\hat{P})^2 = \langle(\hat{P} - \langle\hat{P}\rangle)^2\rangle$.
4. En conclure que la fonction d'onde gaussienne sature l'inégalité d'Heisenberg (aussi appelée relation d'incertitude d'Heisenberg) :

$$\Delta\hat{X}\Delta\hat{P} \geqslant \frac{\hbar}{2},$$

   c'est-à-dire qu'il y a égalité pour cette inéquation. Relier cela à l'inégalité d'Heisenberg vu plus tôt dans le cours, et au fait que $\hat{X}$ et $\hat{P}$ ne commutent pas.