## МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО–ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

для поступающих на второй курс

**1.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}\,.$$

**2.** Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость несобственный интеграл при всевозможных значениях вещественного параметра $\alpha$

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha + \operatorname{arctg} x}\,dx\,.$$

**3.** Исследовать на сходимость числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{\operatorname{sh}\frac{1}{n}}{\sin\frac{1}{n}}\right)\,.$$

**4.** Функцию

$$f(x,y) = x\ln\left(1+|y|\right)$$

исследовать на дифференцируемость в точке $(0,0)$.

**5.** Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}\,, & \frac{3}{2} \\ \\ \frac{3}{2}\,, & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

найти симметричную положительно определенную матрицу $B$, такую, что

$$B^2 = A\,.$$

## МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО–ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

для поступающих на второй курс

**1.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to+0}\left(x\left(e^{1/x}-1\right)\right)^{x+\sin x}\ .$$

**2.** Исследовать на сходимость несобственный интеграл при всевозможных значениях вещественного параметра $\alpha$

$$\int\limits_1^{+\infty}\left(\frac{x^3+x}{x-1}\right)^{\alpha}dx\,.$$

**3.** Исследовать на сходимость и равномерную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n+x^n}$$

на множестве $E=[0,+\infty)$.

**4.** Функцию

$$f(x,y)=x\,\mathrm{sh}\,|y|$$

исследовать на дифференцируемость в точке $(0,0)$.

**5.** Самосопряженное преобразование двумерного евклидова пространства в ортонормированном базисе $e_1$, $e_2$ имеет матрицу

$$A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

Найти ортонормированный базис, в котором матрица этого преобразования имеет диагональный вид.

## МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО–ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

для поступающих на второй курс

**1.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to+0}\left(2\operatorname{ch}\frac{1}{x}\right)^{x+\operatorname{sh}x}.$$

**2.** Исследовать на сходимость несобственный интеграл при всевозможных значениях вещественного параметра $\alpha$

$$\int\limits_0^1 \frac{\left(x-x^2\right)^\alpha}{\ln^{1/3}(1+x)}\,dx\,.$$

**3.** Исследовать на сходимость и равномерную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^n}$$

на множестве $E=[0,1)$.

**4.** Функцию

$$f(x,y)=y\sin|x|$$

исследовать на дифференцируемость в точке $(0,0)$.

**5.** Самосопряженное преобразование двумерного евклидова пространства в ортонормированном базисе $e_1$, $e_2$ имеет матрицу

$$A=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 5\end{pmatrix}$$

Найти ортонормированный базис, в котором матрица этого преобразования имеет диагональный вид.

## МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО–ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

для поступающих на второй курс

**1.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right).$$

**2.** Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость при всех значениях параметра $\alpha\in\mathbb{R}$ несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} x^\alpha \sin\left(x^2\right)\,dx\,.$$

**3.** Исследовать на поточечную и равномерную сходимость функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln\left(k+x^k\right)}{k^3+kx}$$

на множествах $x\in(0,1)$ и $x\in(1,+\infty)$.

**4.** В двумерном вещественном евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ базис $e=\{\,e_1\,,\,e_2\,\}$ имеет матрицу Грама $\mathit{\Gamma}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$, подпространство $M=\mathrm{Lin}\{e_1+e_2\}$. Найти базис в ортогональном дополнении $M^\perp$ и матрицу преобразования ортогонального проектирования на $M$ в базисе $e$.

**5.** В двумерном вещественном евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ с ортонормированным базисом $e=\{\,e_1\,,\,e_2\,\}$ самосопряженное преобразование имеет матрицу $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$. Найти матрицу перехода к ортонормированному базису в $\mathcal{E}$, в котором это преобразование имеет диагональный вид. Найти этот диагональный вид.

# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО–ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА
### для поступающих в магистратуру

**1.** Составить уравнение плоскости, параллельной плоскости $x+2y-3z+1=$ $=0$ и равноотстоящей от точек $A(0;1;0)$ и $B(2;1;4)$. Система координат ортогональная.

**2.** При всех возможных значениях $\lambda$ найти решения системы

$$\begin{cases} 2x-y-5z &= 3, \\ -x+2y+z &= \lambda, \\ -x+y+2z &= 3. \end{cases}$$

**3.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\ln x}\,.$$

**4.** Найти условный экстремум функции $z=2x-8y+7$ относительно уравнения связи $x^2+2y^2=1$.

**5.** Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}(x+2)^n\,.$$

**6.** Вычислить объём заданной области

$$\Omega = \left\{ (x,y) \;\middle|\; x>0;\ \ y>0;\ \ 1<x^2+y^2<3;\ \ 0<z<\frac{2x+3y}{x^2+y^2} \right\}.$$

**7.** Найти площадь части поверхности параболоида $z=x^2+y^2$, расположенной в первом квадранте и внутри цилиндра $x^2+y^2=1$.

**8.** Разложить функцию $f(x)=\pi-|x|$, $x\in[-\pi,\pi]$, в ряд Фурье по тригонометрической системе с периодом $2\pi$. Выяснить, является ли ряд равномерно сходящимся. Ответ обосновать.

**9.** Найти все действительные решения уравнения

$$y''-4y=8e^{2x}\,.$$

**10.** Монету бросают пять раз. Найти вероятность того, что “герб” выпадет не более двух раз.

# Ответы к задачам для поступающих на второй курс

**1.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right).$$

Ответ: 1.

**2.** Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость при всех значениях параметра $\alpha\in\mathbb{R}$ несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} x^\alpha \sin\left(x^2\right)\,dx\,.$$

Ответ: $\alpha\in\begin{cases} (-\infty,-3] & \text{– расходится,}\\ (-3,-1) & \text{– сходится абсолютно,}\\ [-1,1) & \text{– сходится условно,}\\ [1,+\infty) & \text{– расходится.}\end{cases}$

**3.** Исследовать на поточечную и равномерную сходимость функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\ln\left(k+x^k\right)}{k^3+kx}$$

на множествах $x\in(0,1)$ и $x\in(1,+\infty)$.

Ответ: сходится равномерно на $(0,1)$ и $(1,+\infty)$.

**4.** В двумерном вещественном евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ базис $e=\{\,e_1\,,\,e_2\,\}$ имеет матрицу Грама $\mathit{\Gamma}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$, подпространство $M=\mathrm{Lin}\{e_1+e_2\}$. Найти базис в ортогональном дополнении $M^\perp$ и матрицу преобразования ортогонального проектирования на $M$ в базисе $e$.

Ответ: $M^\perp=\mathrm{Lin}\{3e_1-2e_2\},\quad P_M\overset{e}{\leftrightarrow}\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2&3\\2&3\end{pmatrix}.$

**5.** В двумерном вещественном евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ с ортонормированным базисом $e = \{ e_1 , e_2 \}$ самосопряженное преобразование имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу перехода к ортонормированному базису в $\mathcal{E}$, в котором это преобразование имеет диагональный вид. Найти этот диагональный вид.

Ответ: $S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

# Задачи для поступающих на второй курс для переводников и восстанавливающихся

**1.** Вычислить предел функции одного вещественного переменного в точке.

**2.** Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость при всех значениях параметра несобственный интеграл.

**3.** Исследовать на поточечную и равномерную сходимость функциональный ряд на заданном множестве.

**4.** В конечномерном вещественном евклидовом пространстве с заданным базисом найти базис в ортогональном дополнении заданного подпространства и преобразование ортогонального проектирования на заданное подпространство.

**5.** Найти матрицу перехода к ортонормированному базису конечномерного евклидова пространства, в котором заданное самосопряженное линейное преобразование имеет диагональный вид.

На решение этих задач отводится два астрономических часа.

## МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО–ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

для поступающих на второй курс

**1.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right).$$

**2.** Исследовать на сходимость при всех значениях параметра $\alpha\neq 0$ несобственный интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{|\ln x|^\alpha}{1-x^\alpha}\,dx\,.$$

**3.** Исследовать на поточечную и равномерную сходимость функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^x}{k+x^k}$$

на множествах $x\in(1,2)$, $x\in(2,3)$ и $x\in(3,+\infty)$.

**4.** В трёхмерном вещественном евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ с ортонормированным базисом $e=\{\,e_1\,,\,e_2\,,\,e_3\,\}$ задано подпространство

$$M=\mathrm{Lin}\{\,e_1-e_2\,,\,e_2+e_3\,\}.$$

Найти базис в ортогональном дополнении $M^\perp$ и общий вид линейного преобразования пространства $\mathcal{E}$, ядро которого совпадает с $M^\perp$.

**5.** В двумерном вещественном евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ с ортонормированным базисом $e=\{\,e_1\,,\,e_2\,\}$ самосопряженное преобразование $\mathcal{A}$ имеет матрицу $A=\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix}$. Найти матрицу перехода к ортонормированному базису в $\mathcal{E}$, в котором матрица преобразования $\mathcal{A}$ имеет диагональный вид, вычислить матрицу преобразования $\mathcal{A}$ в этом базисе.

# Ответы к задачам для поступающих на второй курс

**1.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right).$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

**2.** Исследовать на сходимость при всех значениях параметра $\alpha \neq 0$ несобственный интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{|\ln x|^\alpha}{1-x^\alpha}\,dx\,.$$

Ответ: $\alpha > 0$ — сходится, $\alpha < 0$ — расходится.

**3.** Исследовать на поточечную и равномерную сходимость функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^x}{k+x^k}$$

на множествах $x \in (1,2)$, $x \in (2,3)$ и $x \in (3,+\infty)$.

Ответ: при $x \in (1,2)$ и $x \in (3,+\infty)$ сходится неравномерно, при $x \in (2,3)$ сходится равномерно.

**4.** В трёхмерном вещественном евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ с ортонормированным базисом $e = \{\,e_1\,,\,e_2\,,\,e_3\,\}$ задано подпространство

$$M = \mathrm{Lin}\{\,e_1 - e_2\,,\,e_2 + e_3\,\}.$$

Найти базис в ортогональном дополнении $M^\perp$ и общий вид линейного преобразования пространства $\mathcal{E}$, ядро которого совпадает с $M^\perp$.

Ответ: $M^\perp = \mathrm{Lin}\{e_1 + e_2 - e_3\}$, $\mathcal{A}(xe_1 + ye_2 + ze_3) = (x-y)a + (y+z)b$ для любых линейно независимых векторов $a, b \in \mathcal{E}$.

**5.** В двумерном вещественном евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ с ортонормированным базисом $e = \{ e_1\,,\, e_2 \}$ самосопряженное преобразование $\mathcal{A}$ имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу перехода к ортонормированному базису в $\mathcal{E}$, в котором матрица преобразования $\mathcal{A}$ имеет диагональный вид, вычислить матрицу преобразования $\mathcal{A}$ в этом базисе.

Ответ: $S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

**6.** Функцию $f(x,y) = |x|y$ исследовать на дифференцируемость в $\mathbb{R}^2$.

**7.** Для задачи на условный экстремум функции $f(x,y) = 2x + y$ при условии $x^2 - y^2 = 1$ найти стационарные точки функции Лагранжа и проверить в них достаточные условия локального условного экстремума второго порядка.

**8.** Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_G x\,dx\,dy,$$

где область $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{rcl} x \; + y & > & 1, \\ x^2 + y & < & 1 \end{array} \right\}$.

**9.** Решить задачу Коши

$$y''(x) = y(x)\,y'(x), \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = \frac{1}{2}.$$

**10.** Найти преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-|x|}$.

# Ответы к задачам для поступающих в магистратуру

**1.** Вычислить предел
$$\lim_{x\to 0}\frac{2\ln(\cos x)+x\sin x}{\sqrt[3]{1+x^4}-\sqrt{1-x^4}}\,.$$

Ответ: $-\frac{2}{5}$.

**2.** Исследовать на сходимость при всех значениях параметра $\alpha \neq 0$ несобственный интеграл
$$\int\limits_0^1 \left(-\frac{x}{\ln x}\right)^{\alpha}\,dx\,.$$

Ответ: сходится при $0<|\alpha|<1$ и расходится при $|\alpha|\geq 1$.

**3.** Исследовать на поточечную и равномерную сходимость функциональный ряд
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x+\sqrt{k}}{x+k^2}$$
на множествах $x\in(0,1)$, $x\in(1,+\infty)$.

Ответ: сходится равномерно на $(0,1)$ и сходится поточечно неравномерно на $(1,+\infty)$.

**4.** Пусть $\mathcal{L}$ — линейное пространство вещественных многочленов степени не выше первой. Пусть $\mathcal{A}$ — линейное преобразование пространства $\mathcal{L}$ вида
$$(\mathcal{A}x)(t)=x(0)t+x(1)\quad \forall\, x\in\mathcal{L},\quad \forall\, t\in\mathbb{R}.$$

Найти обратное преобразование $\mathcal{A}^{-1}$.

Ответ: $\left(\mathcal{A}^{-1}y\right)(t)=\Big(y(1)-y(0)\Big)(1-t)+y(0)t$.

**5.** Для каждого $k\in\overline{1,2,3}$ обозначим через $\mathcal{E}_k$ базис в пространстве решений линейной однородной системы
$$\begin{cases} \phantom{2}x_1+2x_2-x_3 &= 0,\\ 2x_1-x_2+2x_3 &= 0,\end{cases}$$
состоящий из столбцов фундаментальной матрицы решений этой системы со свободной переменной $x_k$. Найти $\mathcal{E}_k$ для каждого $k\in\overline{1,2,3}$ и найти матрицы перехода от $\mathcal{E}_1$ к $\mathcal{E}_2$ и от $\mathcal{E}_2$ к $\mathcal{E}_3$.

Ответ: $\mathcal{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{4}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$, $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1\left(-\frac{3}{4}\right)$, $\mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_2\left(\frac{4}{5}\right)$.

**6.** Функцию $f(x,y) = |x|y$ исследовать на дифференцируемость в $\mathbb{R}^2$.

Ответ: не дифференцируема в точках $(0,y)$ при всех $y \neq 0$ и дифференцируема в остальных точках $\mathbb{R}^2$.

**7.** Для задачи на условный экстремум функции $f(x,y) = 2x + y$ при условии $x^2 - y^2 = 1$ найти стационарные точки функции Лагранжа и проверить в них достаточные условия локального условного экстремума второго порядка.

Ответ: для функции Лагранжа $L(x,y,\lambda) = 2x + y + \lambda(x^2 - y^2 - 1)$ стационарные точки: $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ — удовлетворяет достаточному условию строгого локального условного максимума, $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ — удовлетворяют достаточному условию строгого локального условного минимума.

**8.** Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_G x\,dx\,dy,$$

где область $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{lcl} x \;\; + y & > & 1, \\ x^2 + y & < & 1 \end{array} \right\}$.

Ответ: $\frac{1}{12}$.

**9.** Решить задачу Коши

$$y''(x) = y(x)\,y'(x), \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $y(x) = -\frac{2}{x+2}$.

**10.** Найти преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-|x|}$.

Ответ: $F[f](y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{y^2+1}$.

## МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО–ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

для поступающих на второй курс

**1.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+x)-\ln x}{\operatorname{arcctg} x}\right)^x .$$

**2.** Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость при всех значениях параметра $\alpha \neq 1$ несобственный интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{|x^\alpha - x|^\alpha}\, dx .$$

**3.** При всех значениях параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ исследовать на поточечную и равномерную сходимость функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\exp\left(2^{-n/x}\right)-1\right)^\alpha$$

на множествах $x \in (0,1)$ и $x \in (1,+\infty)$.

## Ответы к задачам для поступающих на второй курс

**1.** Вычислить предел
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+x)-\ln x}{\operatorname{arcctg} x}\right)^x.$$

**Ответ:** $\exp\left(-\frac{1}{2}\right)$.

**2.** Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость при всех значениях параметра $\alpha \neq 1$ несобственный интеграл
$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{|x^\alpha - x|^\alpha}\, dx\,.$$

**Ответ:** сходится условно при $\alpha \in (0,1)$ и расходится при остальных $\alpha$.

**3.** При всех значениях параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ исследовать на поточечную и равномерную сходимость функциональный ряд
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\exp\left(2^{-n/x}\right)-1\right)^\alpha$$
на множествах $x \in (0,1)$ и $x \in (1,+\infty)$.

**Ответ:** сходится поточечно при $\alpha > 0$ и всех $x > 0$, расходится поточечно при всех $\alpha \leq 0$ и $x > 0$. При $\alpha > 0$ сходится равномерно на множестве $x \in (0,1)$ и не сходится равномерно на множестве $x \in (1,+\infty)$.

**МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО–ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ**

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих на второй курс

**1.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{\sin x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{ch} x-\cos x}}.$$

**2.** Исследовать на сходимость при всех значениях параметра $\alpha$ несобственный интеграл

$$\int\limits_0^1\left(\frac{x^2}{\sin\pi x}\right)^{\alpha}dx\,.$$

**3.** Исследовать на поточечную и равномерную сходимость функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt{k^2+x^k}-k\right)$$

на множествах $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ и $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$.

**4.** При всех значениях параметра $\alpha>0$ исследовать функцию

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{|x+y|^{\alpha}}{|x|+|y|}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

на непрерывность и дифференцируемость в точке $(0,0)$.

**5.** В евклидовом пространстве $\mathcal{P}_1$, состоящем из всех вещественных многочленов степени не выше первой, скалярное произведение задано формулой

$$(p,q)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-t}p(t)q(t)\,dt\quad\forall\,p,q\in\mathcal{P}_1.$$

Найти в $\mathcal{P}_1$ ортогональную проекцию многочлена $p(t)\equiv 1$ на линейную оболочку многочлена $q(t)\equiv t$.

Ответы для поступающих на второй курс

**1.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{\sin x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{ch} x-\cos x}}.$$

Ответ: $\exp\left(\frac{1}{3}\right)$.

**2.** Исследовать на сходимость при всех значениях параметра $\alpha$ несобственный интеграл

$$\int\limits_0^1 \left(\frac{x^2}{\sin \pi x}\right)^{\alpha} dx\,.$$

Ответ: сходится при $|\alpha| < 1$ и расходится при остальных $\alpha$.

**3.** Исследовать на поточечную и равномерную сходимость функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt{k^2+x^k}-k\right)$$

на множествах $x \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$ и $x \in \left(\frac{1}{2},1\right)$.

Ответ: сходится равномерно при $x \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$ и неравномерно при $x \in \left(\frac{1}{2},1\right)$.

**4.** При всех значениях параметра $\alpha > 0$ исследовать функцию

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|x+y|^{\alpha}}{|x|+|y|}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

на непрерывность и дифференцируемость в точке $(0,0)$.

Ответ: разрывна при $0 < \alpha \leq 1$, непрерывна и недифференцируема при $1 < \alpha \leq 2$, дифференцируема при $2 < \alpha$.

**5.** В евклидовом пространстве $\mathcal{P}_1$, состоящем из всех вещественных многочленов степени не выше первой, скалярное произведение задано формулой

$$(p,q) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t} p(t)q(t)\,dt \quad \forall\, p,q \in \mathcal{P}_1.$$

Найти в $\mathcal{P}_1$ ортогональную проекцию многочлена $p(t) \equiv 1$ на линейную оболочку многочлена $q(t) \equiv t$.

Ответ: ортогональная проекция $r(t) \equiv \frac{t}{2}$.

## МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО–ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

для восстанавливающихся на второй курс

**1.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\operatorname{arcctg}x-1}{\sqrt{\cos\frac{1}{x}}-1}\,.$$

**2.** Вычислить неопределённый интеграл

$$\int\frac{(x+1)}{(x^2+1)^{3/2}}\,dx\,.$$

**3.** Линейное пространство $L$ является линейной оболочкой функций $\sin x$ и $\cos x$. Линейное преобразование $A\colon L\to L$ таково, что

$$A(\sin x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right),\quad A(\cos x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right).$$

Найти собственные числа и собственные векторы линейного преобразования $A$.

**4.** Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$\int\limits_0^1\frac{dx}{(1-x)^{\alpha}|\ln x|^{1/\alpha}}$$

при всех значениях параметра $\alpha\neq0$.

**5.** Исследовать на сходимость и равномерную сходимость функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+x^{2n}}$$

на множествах $x\in(1,2)$ и $x\in(2,+\infty)$.

# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО–ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

для переводящихся на второй курс

**1.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\sin\frac{1}{x}-1}{\sqrt{\cos\frac{1}{x}}-1}\,.$$

**2.** Вычислить неопределённый интеграл

$$\int \frac{(x^3+2x)}{\left(x^2+1\right)^{3/2}}\,dx\,.$$

**3.** Линейное пространство $L$ является линейной оболочкой функций $\sin x$ и $\cos x$. Линейное преобразование $A\colon L\to L$ таково, что

$$A(\sin x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right),\quad A(\cos x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right).$$

Найти собственные числа и собственные векторы линейного преобразования $A$.

**4.** Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha\,dx}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

при всех значениях параметра $\alpha$.

**5.** Исследовать на сходимость и равномерную сходимость функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2x^2}\,\ln\left(1+\sqrt{\frac{x}{n}}\right)$$

на множествах $x\in(0,1)$ и $x\in(1,+\infty)$.

Ответы для восстанавливающихся на второй курс

**1.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x \operatorname{arcctg} x - 1}{\sqrt{\cos\frac{1}{x}} - 1}\,.$$

Ответ: $\frac{4}{3}$, $\left(\operatorname{arcctg} x = \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + O\left(\frac{1}{x^5}\right) \text{ при } x \to +\infty\right)$.

**2.** Вычислить неопределённый интеграл

$$\int \frac{(x+1)}{\left(x^2+1\right)^{3/2}}\,dx\,.$$

Ответ: $\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} + C$.

**3.** Линейное пространство $L$ является линейной оболочкой функций $\sin x$ и $\cos x$. Линейное преобразование $A\colon L \to L$ таково, что

$$A(\sin x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right), \quad A(\cos x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

Найти собственные числа и собственные векторы линейного преобразования $A$.

Ответ: $A(\sin x + \cos x) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(\sin x + \cos x)$, $\quad A(\sin x - \cos x) = \frac{1-\sqrt{3}}{2}(\sin x - \cos x)$.

**4.** Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{\alpha}|\ln x|^{1/\alpha}}$$

при всех значениях параметра $\alpha \neq 0$.

Ответ: $\alpha < 0$ сходится, $\alpha > 0$ расходится.

**5.** Исследовать на сходимость и равномерную сходимость функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n + x^{2n}}$$

на множествах $x \in (1,2)$ и $x \in (2,+\infty)$.

Ответ: $x \in (1,2)$ сходится неравномерно, $x \in (2,+\infty)$ сходится равномерно.

# Ответы для переводящихся на второй курс

**1.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\sin\frac{1}{x} - 1}{\sqrt{\cos\frac{1}{x}} - 1}.$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

**2.** Вычислить неопределённый интеграл

$$\int \frac{(x^3 + 2x)}{\left(x^2+1\right)^{3/2}}\, dx\,.$$

Ответ: $\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} + C$.

**3.** Линейное пространство $L$ является линейной оболочкой функций $\sin x$ и $\cos x$. Линейное преобразование $A\colon L \to L$ таково, что

$$A(\sin x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right), \quad A(\cos x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

Найти собственные числа и собственные векторы линейного преобразования $A$.

Ответ: $A(\sin x + \cos x) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(\sin x + \cos x)$, $\quad A(\sin x - \cos x) = \frac{1-\sqrt{3}}{2}(\sin x - \cos x)$.

**4.** Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^\alpha\, dx}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

при всех значениях параметра $\alpha$.

Ответ: $-\frac{3}{4} < \alpha < -\frac{1}{2}$ сходится, при остальных $\alpha$ расходится.

**5.** Исследовать на сходимость и равномерную сходимость функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2x^2}\,\ln\left(1+\sqrt{\frac{x}{n}}\right)$$

на множествах $x \in (0,1)$ и $x \in (1,+\infty)$.

Ответ: $x \in (0,1)$ сходится неравномерно, $x \in (1,+\infty)$ сходится равномерно.

## МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО–ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

## для поступающих на второй курс

**1.** Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{3+\cos x}-1\right)^{\frac{1}{x\sin x}}.$$

**2.** Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty}\sqrt{\frac{1+x^\alpha}{x+x^4}}\,dx.$$

при всех значениях параметра $\alpha\in\mathbb{R}$.

**3.** Исследовать на сходимость и равномерную сходимость функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\left(x^n+n\right)}{x^n+n}$$

на множествах $x\in(1,2)$, $x\in(2,+\infty)$.

**4.** Найти расстояние от параболоида $z=x^2+y^2$ до прямой $x=y=z+2$. Система координат декартова прямоугольная.

**5.** В ортонормированном базисе $e=\{\,e_1,\,e_2\,\}$ евклидова пространства $E$ квадратичная форма $K$ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 3\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти ортонормированный базис в $E$, в котором $K$ имеет диагональный вид. Указать этот диагональный вид $K$.

# Ответы для поступающих на второй курс

**1.** Вычислить предел
$$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{3+\cos x}-1\right)^{\frac{1}{x\sin x}}.$$
Ответ: $\exp\left(-\frac{1}{8}\right)$.

**2.** Исследовать на сходимость несобственный интеграл
$$\int_0^{+\infty}\sqrt{\frac{1+x^\alpha}{x+x^4}}\,dx.$$
при всех значениях параметра $\alpha\in\mathbb{R}$.

Ответ: сходится при $\alpha\in(-1,2)$, расходится при остальных $\alpha$.

**3.** Исследовать на сходимость и равномерную сходимость функциональный ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\left(x^n+n\right)}{x^n+n}$$
на множествах $x\in(1,2)$, $x\in(2,+\infty)$.

Ответ: сходится при всех $x>1$; неравномерно при $x\in(1,2)$; равномерно при $x\in(2,+\infty)$.

**4.** Найти расстояние от параболоида $z=x^2+y^2$ до прямой $x=y=z+2$. Система координат декартова прямоугольная.

Ответ: $\frac{5\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$.

Решение: Пусть $(x,y,z)$ — точка параболоида, ближайшая к прямой. Тогда внешняя нормаль к параболоиду $(2x,2y,-1)$ ортогональна направляющему вектору прямой $(1,1,1)$, т. е. $x+y=\frac{1}{2}$. Существует $t>0$, такое, что $(x,y,z)+t(2x,2y,-1)$ — точка прямой, ближайшая к параболоиду. Отсюда $x(1+2t)=y(1+2t)=z-t+2$. Так как $t>0$, то $x=y=\frac{1}{2}-x$, т. е. $x=y=\frac{1}{4}$, $z=\frac{1}{8}$, и $\frac{1}{4}+\frac{t}{2}=\frac{1}{8}-t+2$, т. е. $t=\frac{5}{4}$. Тогда искомое расстояние $d=|t(2x,2y,-1)|=\frac{5}{4}\sqrt{\frac{1}{2}+1}=\frac{5\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$.

**5.** В ортонормированном базисе $e=\{e_1,\,e_2\}$ евклидова пространства $E$ квадратичная форма $K$ имеет матрицу
$$\begin{pmatrix}1 & 3\sqrt{2}\\ 3\sqrt{2} & 4\end{pmatrix}.$$
Найти ортонормированный базис в $E$, в котором $K$ имеет диагональный вид. Указать этот диагональный вид $K$.

Ответ: $e_1'=\frac{e_1+\sqrt{2}e_2}{\sqrt{3}}$, $\quad e_2'=\frac{\sqrt{2}e_1-e_2}{\sqrt{3}}$, $\quad\begin{pmatrix}7 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$.

**МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО–ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ**

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих на второй курс

**1.(5)** Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\Big(\cos x+\sin\big(x^2\big)\Big)^{\frac{x}{\operatorname{sh}x-\operatorname{tg}x}}.$$

**2.(5)** Вычислить наибольшую кривизну кривой

$$\Gamma=\Big\{\ x(t)=t,\ y(t)=e^t,\ z(t)=t\quad\Big|\quad t\in\mathbb{R}\ \Big\}.$$

**3.(5)** Исследовать на сходимость и равномерную сходимость функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt[k]{x}\exp(-kx)$$

на множествах $x\in(0,1)$ и $x\in(1,+\infty)$.

**4.** Вещественное евклидово пространство $E$ является линейной оболочкой функций $f(x)=e^x$ и $g(x)=xe^x$ со скалярным произведением

$$(u,v)=\int\limits_{-\infty}^{0}u(x)v(x)\,dx\qquad\forall\,u,v\in E.$$

**а)(4)** Доказать, что функции $f$ и $g$ образуют базис в $E$, и вычислить матрицу Грама базиса $\{f,\,g\}$;

**б)(2)** Вычислить в базисе $\{f,\,g\}$ матрицу преобразования ортогонального проектирования из $E$ на линейную оболочку функции $h=f+g$;

**в)(2)** Найти расстояния от функций $f$ и $g$ до линейной оболочки функции $h=f+g$.

Пусть $A\colon E\to E$ — линейное преобразование вида

$$(Au)(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}u(t)\,dt,\quad\forall\,u\in E,\quad\forall\,x\in\mathbb{R}.$$

**г)(2)** Вычислить в базисе $\{f,\,g\}$ матрицу преобразования $A$;

**д)(3)** Вычислить в базисе $\{f,\,g\}$ матрицу сопряжённого преобразования $A^*$;

**е)(4)** Найти в $E$ ортогональный базис из собственных векторов самосопряжённого преобразования $A^*A$.

# Ответы для поступающих на второй курс

**1.(5)** Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\Big(\cos x+\sin\big(x^2\big)\Big)^{\frac{x}{\operatorname{sh}x-\operatorname{tg}x}}.$$

**Ответ:** $e^{-3}$.

**Решение:** $\Big(\cos x+\sin\big(x^2\big)\Big)^{\frac{x}{\operatorname{sh}x-\operatorname{tg}x}}=\Big(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\Big)^{\frac{1}{\left(-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)}}=\exp\left(\frac{\frac{1}{2}+o(1)}{-\frac{1}{6}+o(1)}\right).$

**Инструкция:** по два очка за верное разложение основания и степени.

**2.(5)** Вычислить наибольшую кривизну кривой

$$\Gamma=\left\{\ x(t)=t,\ y(t)=e^t,\ z(t)=t\quad\Big|\quad t\in\mathbb{R}\ \right\}.$$

**Ответ:** $k(t)=\dfrac{\sqrt{2}\,e^t}{(2+e^{2t})^{\frac{3}{2}}}\ ,\quad k_{\max}=k(0)=\dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}.$

**Решение:** $\quad\vec{r}(t)=\Big(x(t),y(t),z(t)\Big),\quad t\in\mathbb{R}\,,$

$$k(t)=|\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)|\Big/|\vec{r}\,'(t)|^3=\left|(-e^t,0,e^t)\right|\Big/\left|(1,e^t,1)\right|^3=\frac{\sqrt{2}\,e^t}{(2+e^{2t}))^{\frac{3}{2}}}.$$

Пусть $a=e^t>0,\quad f(a)=\frac{\sqrt{2}\,a}{(2+a^2)^{\frac{3}{2}}},\quad f'(a)=\frac{2\sqrt{2}\left(1-a^2\right)}{(2+a^2)^{\frac{5}{2}}},\quad \max\limits_{a>0}f(a)=f(1)=\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}.$

**Инструкция:** два очка за $k(t)$, три очка за исследование на максимум.

**3.(5)** Исследовать на сходимость и равномерную сходимость функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt[k]{x}\exp(-kx)$$

на множествах $x\in(0,1)$ и $x\in(1,+\infty)$.

**Ответ:** сходится неравномерно на $(0,1)$ и сходится равномерно на $(1,+\infty)$.

**Решение:** $u_k(x)=\sqrt[k]{x}\exp(-kx)$, $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{u_k(x)}=e^{-x}<1$, $\forall\,x>0$, поэтому ряд сходится при $x>0$ по признаку Коши. Для $x_k=\frac{1}{2k}\in(0,1)$, $k\in\mathbb{N}$, имеем $u_k(x_k)\to\frac{1}{\sqrt{e}}$ при $k\to\infty$. Следовательно, $u_k(x)\not\rightrightarrows 0$ при $x\in(0,1)$, $k\to\infty$, т. е. ряд не сходится равномерно на $(0,1)$. $u_k'(x)=\frac{\sqrt[k]{x}e^{-kx}}{kx}(1-k^2x)<0$ при $x>1$. Тогда $\sup\limits_{x>1}u_k(x)=u_k(1)=e^{-k}$ — член сходящегося ряда. Поэтому ряд сходится равномерно на $(1,+\infty)$ по признаку Вейерштрасса.

**Инструкция:** одно очко за поточечную сходимость и по два очка за исследование равномерной сходимости на каждом множестве.

**4.** Вещественное евклидово пространство $E$ является линейной оболочкой функций $f(x) = e^x$ и $g(x) = xe^x$ со скалярным произведением

$$(u, v) = \int\limits_{-\infty}^{0} u(x)v(x)\,dx \qquad \forall\, u, v \in E.$$

**а)(4)** Доказать, что функции $f$ и $g$ образуют базис в $E$, и вычислить матрицу Грама базиса $\{f,\, g\}$;

**Ответ:** $\Gamma = \begin{pmatrix} (f,f) & (f,g) \\ (f,g) & (g,g) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

**Инструкция:** два очка за доказательство базисности и два очка за матрицу Грама.

**б)(2)** Вычислить в базисе $\{f,\, g\}$ матрицу преобразования ортогонального проектирования из $E$ на линейную оболочку функции $h = f + g$;

**Ответ:** Пусть $P$ — ортопроектор на $\mathrm{Lin}(h)$. Тогда получаем:

$$P(f) = \tfrac{(f,h)}{|h|^2}\, h = \tfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}\, h = h = f + g, \quad P(g) = \tfrac{(g,h)}{|h|^2}\, h = \tfrac{-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}\, h = 0.$$

Поэтому матрица $P$ в базисе $\{f,\, g\}$ равна $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**в)(2)** Найти расстояния от функций $f$ и $g$ до линейной оболочки функции $h = f + g$.

**Ответ:** $\begin{aligned} \rho\Big(f, \mathrm{Lin}(h)\Big) &= |f - P(f)| = |f - f - g| = |g| = \tfrac{1}{2}, \\ \rho\Big(g, \mathrm{Lin}(h)\Big) &= |g - P(g)| = |g - 0| = |g| = \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$

Пусть $A\colon E \to E$ — линейное преобразование вида

$$(Au)(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} u(t)\,dt, \quad \forall\, u \in E, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

**г)(2)** Вычислить в базисе $\{f,\, g\}$ матрицу преобразования $A$;

**Ответ:** $Af = f$, $Ag = g - f$, матрица $A$ равна $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**д)(3)** Вычислить в базисе $\{f,\, g\}$ матрицу сопряжённого преобразования $A^*$;

**Ответ:** Матрица $A^*$ равна

$$M^* = \Gamma^{-1} A^{\mathrm{T}} \Gamma = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

**e)(4)** Найти в $E$ ортогональный базис из собственных векторов самосопряжённого преобразования $A^*A$.

**Ответ:** Матрица $A^*A$ равна $M^*M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$. Характеристическое уравнение $(-1-\lambda)(7-\lambda)+8 = \lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0$ имеет корни $3 \pm 2\sqrt{2}$, которым соответствуют собственные векторы $\{f, g\}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \pm \sqrt{2} \end{pmatrix} = f + (2 \pm \sqrt{2})g$. Ортогональный базис из собственных векторов $A^*A$ имеет вид

$$\Big\{ f + (2+\sqrt{2})g \, , \; f + (2-\sqrt{2})g \Big\} \, .$$

**Инструкция:** одно очко за матрицу $A^*A$, одно очко за собственные числа, и по одному очку за каждый собственный вектор.

# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ
## для поступающих на второй курс

**1.(5)** Вычислить предел
$$\lim_{x\to+\infty} \log_{(x\,\mathrm{arcctg}\,x)} \big(\,\mathrm{th}(\ln x)\big)$$

**2.** Числовая последовательность $x_n$ задана следующим образом:
$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = \frac{2}{x_n} + 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

**а)(2)** Доказать, что последовательность $x_n$ сходится.

**б)(2)** Найти число $a$ — предел последовательности $x_n$, и для любого числа $\varepsilon > 0$ указать номер $N(\varepsilon)$, такой, что для всех $n > N(\varepsilon)$ выполнено $|x_n - a| < \varepsilon$.

**в)(2)** Исследовать сходимость числового ряда
$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - a|\,.$$

**3.** Пусть матрица Грама векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеет вид $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

**а)(2)** Найти длину вектора $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$.

**б)(2)** Найти длину вектора $\vec{a} + \vec{b} + \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$.

**в)(2)** Найти все векторы $\vec{c}$, удовлетворяющие уравнению
$$(\vec{a}, \vec{c})\,\vec{a} + \left(\vec{b}, \vec{c}\right)\vec{b} = \vec{c}.$$

**4.(5)** Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость при всех значеиях параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ несобственный интеграл
$$\int\limits_2^{+\infty} \frac{x \sin\left(x^{\alpha}\right)}{\ln x}\, dx.$$

**5.** Пусть функции $g_1(x) = e^x$ и $g_2(x) = e^{-x}$, где $x \in \mathbb{R}$. В линейном пространстве $L$ — вещественной линейной оболочке функций $g_1$ и $g_2$, скалярное произведение задано билинейной формой
$$(f, h) = f(0)h(0) + f'(0)h'(0) \quad \forall\, f, h \in L.$$
Пусть линейное преобразование $A\colon L \to L$ имеет вид
$$(Af)(x) = \int\limits_{-x}^{x} f(t)\, dt \quad \forall\, f \in L, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

**а)(2)** Найти базис в подпространствах $\mathrm{Ker}\, A$, $\mathrm{Im}\, A$, $(\mathrm{Ker}\, A)^{\perp}$, $(\mathrm{Im}\, A)^{\perp}$.

**б)(3)** Найти матрицы преобразования $A$ и сопряжённого преобразования $A^*$ в базисе $\{g_1, g_2\}$.

**в)(3)** Найти ортонормированный базис из собственных функций самосопряжённого линейного преобразования $A^*A$, и указать матрицу этого преобразования в найденном базисе.

# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

### для поступающих на четвёртый курс

**1.(6)** Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=2} \left( z \sin \frac{1}{z-1} \right) dz.$$

Контур интегрирования ориентирован против часовой стрелки.

**2.(6)** Решить задачу Коши

$$(x+y)\,\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + y\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ y > 0,$$

$$u\,(x,1) = x^2 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

**3.(6)** Найти минимум функционала

$$J(y) = \int\limits_1^2 x \exp\Big(y'(x)\Big)\, dx$$

на множестве

$$M = \left\{\ y \in C^2[1,2] :\ y(1) = y(2) = 0\ \right\}.$$

**4.(6)** Пусть $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$ — ряд Фурье функции

$$f(x) = \cos\left(\frac{x^{m+1}}{\pi^m}\right), \quad x \in [-\pi, \pi],$$

где $m$ — фиксированное натуральное число. Найти все значения параметра $\alpha > 0$, при которых сходится числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{\alpha}.$$

**5.(6)** Пусть функция $\varphi\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$. Найти необходимые и достаточные условия на функцию $\varphi$, при которых следующая смешанная задача

$$\begin{cases} u''_{tt} = u''_{xx}, & t > 0, \quad x > 0, \\ u|_{t=0} = 0, & x > 0, \\ u'_t|_{t=0} = 0, & x > 0, \\ u|_{x=0} = \varphi(t), & t > 0, \end{cases}$$

имеет классическое решение. Найти это классическое решение.

# ОТВЕТЫ

## для поступающих на второй курс

**1.(5)** Вычислить предел

$$\lim_{x\to+\infty}\log_{(x\,\mathrm{arcctg}\,x)}\big(\mathrm{th}(\ln x)\big)$$

**Ответ:** 6.

**Решение:** При $x>1$ имеем:

$$\mathrm{th}(\ln x)=\frac{x-\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}}=1-\frac{2}{x^2}+O\left(\frac{1}{x^4}\right),$$

$$x\,\mathrm{arcctg}\,x=x\int\limits_x^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=x\int\limits_x^{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^4}+O\left(\frac{1}{t^6}\right)\right)dt=$$

$$=x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+O\left(\frac{1}{x^5}\right)\right)=1-\frac{1}{3x^2}+O\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

$$\log_{(x\,\mathrm{arcctg}\,x)}\big(\mathrm{th}(\ln x)\big)=\frac{\ln\left(1-\frac{2}{x^2}+O\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)}{\ln\left(1-\frac{1}{3x^2}+O\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)}=\frac{-\frac{2}{x^2}+O\left(\frac{1}{x^4}\right)}{-\frac{1}{3x^2}+O\left(\frac{1}{x^4}\right)}\xrightarrow{(x\to+\infty)}\frac{-2}{-\frac{1}{3}}=6.$$

**Инструкция:** По два очка за верное разложение аргумента и основания логарифма.

**2.** Числовая последовательность $x_n$ задана следующим образом:

$$x_1=1,\qquad x_{n+1}=\frac{2}{x_n}+1\quad\forall\,n\in\mathbb{N}.$$

**а)(2)** Доказать, что последовательность $x_n$ сходится.

**б)(2)** Найти число $a$ — предел последовательности $x_n$, и для любого числа $\varepsilon>0$ указать номер $N(\varepsilon)$, такой, что для всех $n>N(\varepsilon)$ выполнено $|x_n-a|<\varepsilon$.

**в)(2)** Исследовать сходимость числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n-a|\,.$$

**Ответ:** $a=2,\quad N(\varepsilon)>1+\log_{3/5}\varepsilon,\quad$ ряд сходится.

**Решение:** Для любого $n$ имеем неравенство $x_n\ge 1$. Формальный предельный переход в рекурентной формуле для $x_n$ приводит к уравнению $a=\frac{2}{a}+1$, которое имеет решения $a=2$ и $a=-1$. Значение $a=-1$ не подходит, т. к. неравенство $x_n\ge 1$ влечёт $a\ge 1$. Но без доказательства факта сходимости $x_n$ переход к пределу в рекурентном соотношении не является обоснованным.

Покажем, что $x_n$ сходится. Неравенство $x_n\ge 1$ влечёт $x_{n+1}\le 2+1=3$. Тогда при $n\ge 2$ справедлива оценка $x_{n+1}\ge\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3}$. Отсюда при $n\ge 2$ получаем:

$$x_{n+1}-2=\frac{2}{x_n}-1=\frac{2-x_n}{x_n}\quad\Longrightarrow\quad|x_{n+1}-2|=\frac{|x_n-2|}{x_n}\le\frac{3}{5}\,|x_n-2|.$$

Так как $x_2 = 3$, то для любого $n \geq 2$ имеем:

$$|x_n - 2| \leq \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} |x_2 - 2| = \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}.$$

Таким образом, $a = 2$, и $|x_n - 2| < \varepsilon$, если $n > N(\varepsilon) > 1 + \log_{3/5} \varepsilon$.

Наконец,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - 2| \leq 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}.$$

**Инструкция:** Предел найден без доказательства сходимости последовательности и оценки номера $N(\varepsilon)$ — одно очко.

**3.** Пусть матрица Грама векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеет вид $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

**а)(2)** Найти длину вектора $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$.

**б)(2)** Найти длину вектора $\vec{a} + \vec{b} + \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$.

**в)(2)** Найти все векторы $\vec{c}$, удовлетворяющие уравнению

$$(\vec{a}, \vec{c})\, \vec{a} + \left(\vec{b}, \vec{c}\right) \vec{b} = \vec{c}.$$

**Ответ:** а) $\sqrt{3}$, б) 3, в) $\vec{c} = \alpha \left(\vec{a} - \vec{b}\right) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

**Решение:** По определению матрицы Грама векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеем $(\vec{a}, \vec{a}) = 2$, $\left(\vec{b}, \vec{b}\right) = 2$, $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 1$. Пусть $\varphi$ — угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Тогда $\cos\varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{1}{2}$, и $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Поэтому длина вектора $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ равна $|\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \sin\varphi = \sqrt{3}$. Так как векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ ортогональны, то длина их суммы $\vec{s}$ равна $\sqrt{\left|\vec{a} + \vec{b}\right|^2 + 3}$, где $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|^2 = (\vec{a}, \vec{a}) + \left(\vec{b}, \vec{b}\right) + 2\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 2 + 2 + {} + 2 = 6$. Поэтому длина $\vec{s}$ равна $\sqrt{6 + 3} = 3$.

Далее, $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, где $\alpha = (\vec{a}, \vec{c}) = 2\alpha + \beta$ и $\beta = \left(\vec{b}, \vec{c}\right) = \alpha + 2\beta$. Таким образом, $\alpha + \beta = 0$. Следовательно, $\vec{c} = \alpha \left(\vec{a} - \vec{b}\right)$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}$.

**Инструкция:** Найден угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — одно очко. Найдена длина суммы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — одно очко.

**4.(5)** Исследовать на сходимость и абсолютную сходимость при всех значеиях параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ несобственный интеграл

$$\int_2^{+\infty} \frac{x \sin(x^\alpha)}{\ln x}\, dx.$$

**Ответ:** сходится абсолютно при $\alpha < -2$, сходится условно при $\alpha \geq 2$, расходится при $\alpha \in [-2, 2)$.

**Решение:** При $\alpha = 0$ интеграл, очевидно, расходится. При $\alpha < 0$ подынтегральная функция положительна в окрестности $+\infty$, $\sin(x^\alpha) \sim x^\alpha$ при $x \to +\infty$, поэтому по признаку сравнения имеем:

$$\int_2^{+\infty} \frac{x \sin(x^\alpha)}{\ln x}\, dx \overset{\text{сх.}}{\sim} \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{-1-\alpha} \ln x}.$$

Последний интеграл сходится при $(-1-\alpha) > 1$ и расходится при $(-1-\alpha) \le 1$. Следовательно, при $\alpha < -2$ интеграл сходится абсолютно, а при $\alpha \in [-2, 0)$ — расходится.

При $\alpha > 0$ делаем замену $x^\alpha = t$, получаем:

$$\int\limits_2^{+\infty} \frac{x \sin(x^\alpha)}{\ln x}\,dx = \int\limits_{2^\alpha}^{+\infty} \frac{t^{\frac{1}{\alpha}}\, t^{\frac{1}{\alpha}-1} \sin(t)}{\ln t}\,dt = \int\limits_{2^\alpha}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{1-\frac{2}{\alpha}}\,\ln t}\,dt.$$

При $1 - \frac{2}{\alpha} \ge 0$ интеграл сходится по признаку Дирихле, при $1 - \frac{2}{\alpha} < 0$ расходится по отрицанию критерия Коши, так как в этом случае $\frac{1}{t^{1-\frac{2}{\alpha}}\,\ln t} = \frac{t^{\frac{2}{\alpha}-1}}{\ln t} \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Итак, при $\alpha \ge 2$ интеграл сходится, а при $\alpha \in (0, 2)$ — расходится. Так как для любого $\alpha \ge 2$ имеем $0 \le 1 - \frac{2}{\alpha} < 1$, то интеграл при $\alpha \ge 2$ абсолютно расходится:

$$\int\limits_{2^\alpha}^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t^{1-\frac{2}{\alpha}}\,\ln t}\,dt \ge \int\limits_{2^\alpha}^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^{1-\frac{2}{\alpha}}\,\ln t}\,dt = \underbrace{\int\limits_{2^\alpha}^{+\infty} \frac{dt}{2t^{1-\frac{2}{\alpha}}\,\ln t}}_{\text{расходится}} - \underbrace{\int\limits_{2^\alpha}^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t^{1-\frac{2}{\alpha}}\,\ln t}\,dt}_{\text{сходится по признаку Дирихле}},$$

**Инструкция:** Верное исследование сходимости при $\alpha \le 0$ — два очка. Верное исследование сходимости при $\alpha > 0$ — три очка.

**5.** Пусть функции $g_1(x) = e^x$ и $g_2(x) = e^{-x}$, где $x \in \mathbb{R}$. В линейном пространстве $L$ — вещественной линейной оболочке функций $g_1$ и $g_2$, скалярное произведение задано билинейной формой

$$(f, h) = f(0)h(0) + f'(0)h'(0) \quad \forall\, f, h \in L.$$

Пусть линейное преобразование $A\colon L \to L$ имеет вид

$$(Af)(x) = \int\limits_{-x}^{x} f(t)\,dt \quad \forall\, f \in L, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

**а)(2)** Найти базис в подпространствах $\operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Im} A$, $(\operatorname{Ker} A)^\perp$, $(\operatorname{Im} A)^\perp$.

**б)(3)** Найти матрицы преобразования $A$ и сопряжённого преобразования $A^*$ в базисе $\{g_1, g_2\}$.

**в)(3)** Найти ортонормированный базис из собственных функций самосопряжённого линейного преобразования $A^*A$, и указать матрицу этого преобразования в найденном базисе.

**Ответ:** а) $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Im} A = \operatorname{Lin}(\operatorname{sh} x)$, $\quad (\operatorname{Ker} A)^\perp = (\operatorname{Im} A)^\perp = \operatorname{Lin}(\operatorname{ch} x)$,

б) $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad \mathcal{A}^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(Замечание: $(A^*f)(x) = f'(x) + f'(-x) \quad \forall\, f \in L$)

в) $\{\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x\}$ — ОНБ в $L$ из собственных функций $A^*A$, его матрица в этом базисе

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Решение:** $(Ag_1)(x) = 2\operatorname{sh} x$, $(Ag_2)(x) = 2\operatorname{sh} x$, поэтому $\operatorname{Im} A = \operatorname{Lin}(\operatorname{sh} x)$. Функция $f = a_1 g_1 + a_2 g_2 \in \operatorname{Ker} A$ равносильно $(Af)(x) = (2a_1 + 2a_2)\operatorname{sh} x = 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Следовательно, $a_1 + a_2 = 0$, поэтому $f = a_1(g_1 - g_2) = 2a_1 \operatorname{sh} x$ для любого $a_1 \in \mathbb{R}$. Следовательно, $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Lin}(\operatorname{sh} x)$. Таким образом, $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Im} A = \operatorname{Lin}(\operatorname{sh} x)$, и поэтому

$(\operatorname{Ker} A)^{\perp} = (\operatorname{Im} A)^{\perp} = (\operatorname{Lin}(\operatorname{sh} x))^{\perp}$. Функция $h = b_1 g_1 + b_2 g_2 \in (\operatorname{Lin}(\operatorname{sh} x))^{\perp}$ равносильно $b_1(g_1, \operatorname{sh} x) + b_2(g_2, \operatorname{sh} x) = 0$. Так как $(g_1, \operatorname{sh} x) = 1$, $(g_2, \operatorname{sh} x) = -1$, то получаем $b_1 - b_2 = 0$. Следовательно, $h = b_1(g_1 + g_2) = 2b_1 \operatorname{ch} x$ для любого $b_1 \in \mathbb{R}$. Итак, получаем, что $(\operatorname{Lin}(\operatorname{sh} x))^{\perp} = \operatorname{Lin}(\operatorname{ch} x)$, и $(\operatorname{Ker} A)^{\perp} = (\operatorname{Im} A)^{\perp} = \operatorname{Lin}(\operatorname{ch} x)$.

Далее, матрица Грама базиса $\{g_1, g_2\}$ равна $\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, матрица преобразования $A$ равна $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Поэтому матрица преобразования $A^*$ равна

$$\mathcal{A}^* = \Gamma^{-1} \mathcal{A}^{\mathrm{T}} \Gamma = \mathcal{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Матрица преобразования $A^*A$ равна $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Её собственные числа $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 4$. Собственая функция, отвечающая $\lambda_1$, равна $f_1 = a_1(g_1 - g_2)$ для $a_1 \neq 0$. При этом $(f_1, f_1) = a_1^2(2 + 2) = 4a_1^2 = 1$ при $a_1 = \frac{1}{2}$, т. е. $f_1(x) = \operatorname{sh} x$. Собственая функция, отвечающая $\lambda_2$, равна $f_1 = a_2(g_1 + g_2)$ для $a_2 \neq 0$. При этом $(f_2, f_2) = a_2^2(2 + 2) = 4a_2^2 = 1$ при $a_2 = \frac{1}{2}$, т. е. $f_2(x) = \operatorname{ch} x$. Искомый ОНБ из собственных функций преобразования $A^*A$ равен $\{\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x\}$, матрица преобразования $A^*A$ в этом базисе равна $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

**Инструкция:** Нет учёта матрицы Грама базиса $\{g_1, g_2\}$ при вычислении матрицы сопряжённого преобразования — снять одно очко.

| **ОЧКИ** | **ОЦЕНКА** |
|---|---|
| 0–2 | НЕУД. (1) |
| 3–4 | НЕУД. (2) |
| 5–7 | УДОВЛ. (3) |
| 8–10 | УДОВЛ. (4) |
| 11–14 | ХОР. (5) |
| 15–18 | ХОР. (6) |
| 19–22 | ХОР. (7) |
| 23–25 | ОТЛ. (8) |
| 26–28 | ОТЛ. (9) |
| 29–30 | ОТЛ. (10) |

# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ
## для поступающих на второй курс

**1.(6)** Вычислить частичные пределы числовой последовательности

$$x_n = n\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

**2.(6)** Вычислить предел

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\int\limits_0^x \left(t\operatorname{arctg}\tfrac{1}{t}\right)\,dt - x\right).$$

**3.** Пусть матрица Грама векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеет вид $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

**а)(2)** Найти длину вектора $\left[\vec{a},\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right]$.

**б)(4)** Найти все векторы $\vec{c}$, удовлетворяющие уравнению

$$\left[\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right] = \vec{a}+\vec{b}$$

**4.(6)** Исследовать на сходимость и равномерную сходимость функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x + n^{\frac{1}{x}}}$$

на множествах $x \in (0,1)$, $x \in (1,2)$, $x \in (2,+\infty)$.

**5.** Пусть функции $g_1(x) = xe^x$ и $g_2(x) = e^x$, где $x \in \mathbb{R}$. В евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ — вещественной линейной оболочке функций $g_1$ и $g_2$ — скалярное произведение задано билинейной формой

$$(f,h) = f(0)h(0) + f'(0)h'(0) \quad \forall\, f,h \in \mathcal{E}.$$

Пусть билинейная форма $\mathcal{B}$ имеет вид:

$$\mathcal{B}(f,h) = f(1)h(1) \quad \forall\, f,h \in \mathcal{E}.$$

**а)(4)** Найти в базисе $\{g_1, g_2\}$ матрицу самосопряжённого преобразования $\mathcal{A}$ пространства $\mathcal{E}$, для которого выполнено равенство:

$$\mathcal{B}(f,h) = (\mathcal{A}f,h) \quad \forall\, f,h \in \mathcal{E}.$$

**б)(2)** Найти ортонормированный базис из собственных функций преобразования $\mathcal{A}$ и указать матрицу $\mathcal{A}$ в найденном базисе.

## ОТВЕТЫ

### для поступающих на второй курс

**1.(6)** Вычислить частичные пределы числовой последовательности

$$x_n = n\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

**Ответ:** $\pm\frac{\pi}{8}$.

**Решение:** $x_n = n\cos\left(\pi n + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = (-1)^n\frac{\pi}{8} + O\left(\frac{1}{n}\right)$.

**Инструкция:** Разложен аргумент косинуса — три очка.

**2.(6)** Вычислить предел

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\int\limits_0^x \left(t\,\mathrm{arctg}\,\tfrac{1}{t}\right)\,dt - x\right).$$

**Ответ:** $-\frac{\pi}{4}$.

**Решение:**

$$\int\limits_0^x \left(t\,\mathrm{arctg}\,\tfrac{1}{t}\right)\,dt = \frac{x^2}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{x} + \frac{x}{2} - \frac{\mathrm{arctg}\,x}{2} \overset{(x\to+\infty)}{=} x - \frac{\mathrm{arctg}\,x}{2} + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

**Инструкция:** Вычислен интеграл — три очка.

**3.** Пусть матрица Грама векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеет вид $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

**а)(2)** Найти длину вектора $\left[\vec{a}, \left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right]$.

**б)(4)** Найти все векторы $\vec{c}$, удовлетворяющие уравнению

$$\left[\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{c}\right] = \vec{a} + \vec{b}$$

**Ответ:** а) $\sqrt{2}$, б) $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + t\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ для любого $t \in \mathbb{R}$.

**Решение:** а) Имеем:

$$\left|\left[\vec{a}, \left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right]\right| = \left|\vec{a}\left(\vec{a}, \vec{b}\right) - b\left(\vec{a}, \vec{a}\right)\right| = \left|\vec{a} - 2\vec{b}\right| =$$

$$= \sqrt{(\vec{a}, \vec{a}) - 4\left(\vec{a}, \vec{b}\right) + 4\left(\vec{b}, \vec{b}\right)} = \sqrt{2 - 4 + 4} = \sqrt{2}.$$

б) Пусть $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + t\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$, тогда

$$\alpha\left[\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{a}\right] + \beta\left[\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{b}\right] = \vec{a} + \vec{b}, \quad \Longleftrightarrow$$

$$\alpha\left(2\vec{b} - \vec{a}\right) + \beta\left(\vec{b} - \vec{a}\right) = \vec{a} + \vec{b}, \quad \Longleftrightarrow$$

$$\vec{a}\left(-\alpha - \beta\right) + \vec{b}\left(2\alpha + \beta\right) = \vec{a} + \vec{b}.$$

Следовательно, $\alpha + \beta = 1$, $2\alpha + \beta = 1$, откуда $\alpha = 2$, $\beta = -3$. Итого, получаем

$$\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + t\left[\vec{a}, \vec{b}\right] \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

**Инструкция:** а) Понимает, чему равны длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и их скалярное произведение — одно очко. б) Вектор $\vec{c}$ разложен по базису $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right\}$ с неизвестными координатами — одно очко. Получена линейная система уравнений на эти координаты — два очка.

**4.(6)** Исследовать на сходимость и равномерную сходимость функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x + n^{\frac{1}{x}}}$$

на множествах $x \in (0, 1)$, $x \in (1, 2)$, $x \in (2, +\infty)$.

**Ответ:** сходится неравномерно на $(0, 1)$ и $(1, 2)$ и равномерно на $(2, +\infty)$.

**Решение:** При $x \in (0, 1)$ имеем $\frac{1}{x} > 1$ и поэтому

$$\frac{1}{n^x + n^{\frac{1}{x}}} < \frac{1}{n^{\frac{1}{x}}} \quad \text{— член сходящегося ряда.}$$

При $x > 1$ имеем

$$\frac{1}{n^x + n^{\frac{1}{x}}} < \frac{1}{n^x} \quad \text{— член сходящегося ряда.}$$

Следовательно, ряд сходится поточечно при $x > 0$, $x \neq 1$. Далее, при $x > 2$ имеем

$$\frac{1}{n^x + n^{\frac{1}{x}}} < \frac{1}{n^x} < \frac{1}{n^2} \quad \text{— член сходящегося ряда.}$$

Следовательно, ряд сходится равномерно при $x > 2$ по признаку Вейерштрасса. На множестве $(0, 1)$ или $(1, 2)$ имеем: для любого $n$ существует $x_n$ из соответствующего множества вблизи единицы, такой, что

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^{x_n} + k^{\frac{1}{x_n}}} \geq \frac{1}{2} \lim_{x\to 1} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^x + k^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k+k} > \frac{n}{8n} = \frac{1}{8}.$$

Следовательно, по отрицанию критерия Коши, на множествах $(0,1)$ и $(1,2)$ нет равномерной сходимости.

**Инструкция:** Доказана поточечная сходимость при $0 < x \neq 1$, — два очка. Доказана равномерная сходимость на $(2,+\infty)$ — два очка. Доказана неравномерная сходимость на $(0,1)$ и $(1,2)$ — два очка.

**5.** Пусть функции $g_1(x) = xe^x$ и $g_2(x) = e^x$, где $x \in \mathbb{R}$. В евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ — вещественной линейной оболочке функций $g_1$ и $g_2$ — скалярное произведение задано билинейной формой

$$(f,h) = f(0)h(0) + f'(0)h'(0) \quad \forall\, f,h \in \mathcal{E}.$$

Пусть билинейная форма $\mathcal{B}$ имеет вид:

$$\mathcal{B}(f,h) = f(1)h(1) \quad \forall\, f,h \in \mathcal{E}.$$

**а)(4)** Найти в базисе $\{g_1, g_2\}$ матрицу самосопряжённого преобразования $\mathcal{A}$ пространства $\mathcal{E}$, для которого выполнено равенство:

$$\mathcal{B}(f,h) = (\mathcal{A}f,h) \quad \forall\, f,h \in \mathcal{E}.$$

**б)(2)** Найти ортонормированный базис из собственных функций преобразования $\mathcal{A}$ и указать матрицу $\mathcal{A}$ в найденном базисе.

**Ответ:** а) $A = \begin{pmatrix} e^2 & e^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

б) $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = e^2$, $f_1(x) = (x-1)e^x$ и $f_2(x) = xe^x$.

**Решение:** $\mathcal{B}(g_i, g_j) = e^2$ для $i,j = 1,2$, поэтому матрица $B$ в базисе $\{g_1, g_2\}$ имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} e^2 & e^2 \\ e^2 & e^2 \end{pmatrix} = e^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица Грама базиса $\{g_1, g_2\}$ имеет вид

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Поэтому матрица преобразования $\mathcal{A}$ в базисе $\{g_1, g_2\}$ равна

$$A = \Gamma^{-1}B = e^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = e^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 & e^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Инструкция:** Пункт а) — по одному очку за $B$ и $\Gamma$. Пункт б) — по одному очку за собственные числа и нормированные собственные векторы.

| **ОЧКИ** | **ОЦЕНКА** |
|---|---|
| 0–2 | НЕУД. (1) |
| 3–4 | НЕУД. (2) |
| 5–7 | УДОВЛ. (3) |
| 8–10 | УДОВЛ. (4) |
| 11–14 | ХОР. (5) |
| 15–18 | ХОР. (6) |
| 19–22 | ХОР. (7) |
| 23–25 | ОТЛ. (8) |
| 26–28 | ОТЛ. (9) |
| 29–30 | ОТЛ. (10) |