PROJETO 4 - Introdução à Física Computacional - 2025-2
MOVIMENTO OSCILATÓRIO
Prof. F. C. Alcaraz
Data de entrega 09/11/2025 (domingo)

Consideremos o pêndulo da figura abaixo, onde uma massa m é suspensa por uma haste de comprimento l e massa desprezível. Sendo θ o ângulo em relação à vertical. A equação de Newton para a componente tangencial do movimento nos dá:

$$ma_\theta = ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\ \text{sen}\theta, \tag{0.1}$$

e consequentemente temos a equação diferencial

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\ \text{sen}\theta. \tag{0.2}$$

Caso as oscilações sejam pequenas, $\text{sen}\theta \approx \theta$, obtemos a aproximação harmônica do problema:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta, \tag{0.3}$$

cuja solução é dada por

$$\theta = \theta_0\ \text{sen}(\omega_0 t + \phi), \ \ \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \tag{0.4}$$

sendo θ_0 e ϕ constantes que fixam o movimento. Consideremos $g = 9.8$ m/s, l=9.8 m, $m =$ 1 Kg.

TAREFA A: Faremos um programa que resolva numericamente o pêndulo dentro da aproximação harmônica (0.3). Uma possível discretização de (0.3) seria o método de Euler, isto é:

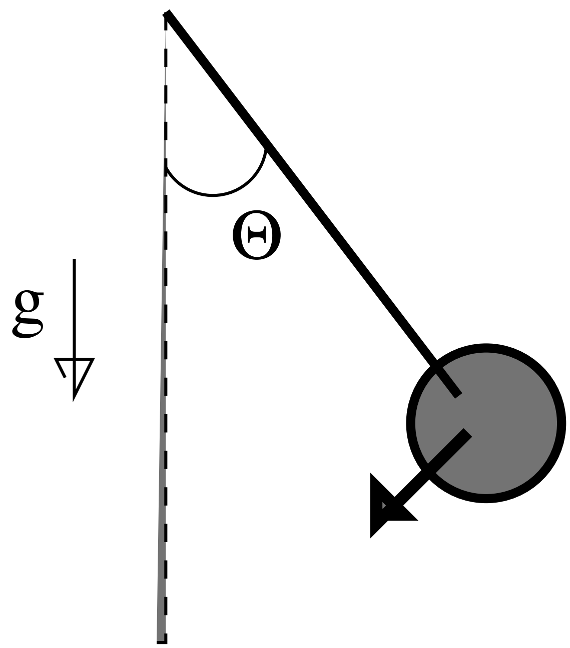
$$\begin{aligned}\frac{d\omega}{dt} &= -\frac{g}{l}\theta \ \ \rightarrow \ \ \omega_{i+1} = \omega_i - \frac{g}{l}\theta_i\Delta t \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega \ \ \rightarrow \ \ \theta_{i+1} = \theta_i + \omega_i\Delta t, \qquad t = i\Delta t.\end{aligned} \tag{0.5}$$

Faça um programa que calcule $\theta(t)$ usando as equações acima. Faça sempre $0 \leq \theta \leq 2\pi$, isto é, quando θ ultrapassar 2π faça $\theta \rightarrow \theta - 2\pi$, ou se ficar negativo $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$, em suma $\theta = \theta \pmod{2\pi}$. Neste programa faça também o cálculo de $E(t)$, sendo E a energia total do sistema.

Você notará que a solução está incorreta (não corresponde a (0.4)), e que o sistema estará aumentado a sua energia. Isto nos diz que a discretização escolhida (0.5) não é adequada. Mostre graficamente seus resultados.

Uma ligeira modificação no método de Euler concertará este problema. Ao invés de (0.5) consideremos:

$$\begin{aligned}\omega_{i+1} &= \omega_i - \frac{g}{l}\theta_i\Delta t, \\ \theta_{i+1} &= \theta_i + \omega_{i+1}\Delta t, \ \ t = i\Delta t,\end{aligned} \tag{0.6}$$



que são as equações do método de Euler-Cromer. Repita o programa anterior com estas novas equações e mostre graficamente a ausência das "doenças" antes apontadas.

Consideremos agora o pêndulo com oscilações de ângulo arbitrário e que esteja sujeito a efeitos dissipativos e sob a ação de forças externas oscilatórias. Neste caso teremos:

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l}\ \mathrm{sen}\theta - \gamma\frac{d\theta}{dt} + F_o\ \mathrm{sen}(\Omega t), \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega, \tag{0.7}$$

sendo γ o termo que dá a escala resistiva, F_0 proporcional à amplitude da força externa e Ω a frequência de oscilação da força externa.

TAREFA B: Adapte o programa realizado na tarefa A para o caso acima (7), usando o algorítmo de Euler-Cromer.
B1 - Considere o caso $\gamma = F_0 = 0$, onde temos apenas o pêndulo simples. Solte o pêndulo para alguns valores de θ_0 e calcule o período do movimento como função de θ_0. Compare seus resultados com o valor obtido pela integral elíptica

$$T = \sqrt{\frac{2l}{g}} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}. \tag{0.8}$$

Calcule numericamente a integral acima tomando cuidado com as singularidades em $\theta = \pm\theta_0$.

B2- Considere θ pequeno e verifique que seus resultados são dados por

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}(1+\frac{\theta_0^2}{16}), \tag{0.9}$$

assim sendo o período será independente de θ_0. Neste limite teremos oscilações harmônicas.

B3- Considere o caso $\gamma = \frac{1}{2}, F_0 = 0$. Faça o gráfico $\theta \times t$ (rad $\times$ seg). O amortecimento é crítico, subcrítico ou supercrítico? (visite o livro do Moysés Nussensveig !).

B4- Considere o caso $\gamma = 0.05, \Omega = \frac{2}{3}, \Delta t = 0.04$. Faça um gráfico conjunto de $\theta(t)$ e $\omega(t)$ para os casos $F_0 = 0$, $F_0 = 0.5$ e $F_0 = 1.2$. Discuta os três casos. Qual a frequência de oscilação do caso em que $F_0 = 0.5$? O movimento do caso em que $F_0 = 1.2$ é periódico? Justifique.

Na tarefa anterior você se deparou com o fato do pêndulo poder exibir tanto um movimento previsível (periódico) como não previsível (não periódico), pelo menos não facilmente. O segundo caso é um exemplo típico de um movimento caótico. Para se quantificar o movimento como caótico ou não devemos observar a sensitividade às condições iniciais do sistema. O sistema será previsível (não caótico) caso duas condições iniciais próximas produzam um movimento que se assemelhem exponencialmente no tempo. Em contrapartida o sistema será caótico quando as trajetórias se afastam exponencialmente.

TAREFA C: Para verificarmos a existência ou não do regime caótico vamos considerar, como antes, $\gamma = 0.05, \Omega = \frac{2}{3}, \Delta t = 0.04, F_0 = \frac{1}{2}$ e $F_0 = 1.2$. Consideramos agora o movimento de dois pêndulos soltos com velocidade nula em ângulos iniciais que difiram de $\theta_0^{(2)} - \theta_0^{(1)} = \Delta\theta_0 = 0.001$ radianos. Faça um gráfico de $\Delta\theta(t) = \theta^{(2)}(t) - \theta^{(1)}(t)$ para os casos em que $F_0 = 0.5$ e $F_0 = 1.2$. Repare que no primeiro caso as trajetórias se aproximam exponencialmente (não caótico), enquanto que no segundo caso as mesmas se afastam exponencialmente (caótico), ou seja

$$\Delta\theta(t) \approx \exp \lambda t \tag{0.10}$$

onde

$$\lambda < 0 \rightarrow \text{não caótico}, \quad \lambda > 0 \rightarrow \text{caótico}. \tag{0.11}$$

Faça os gráficos $\Delta(\theta) \times t$ com escala semi-logarítimica e estime o parâmetro λ, chamado de **expoente de Liapunov**.

Na realidade o movimento caótico não é tão imprevisível quanto nos parece à primeira vista. Ele possue certa estrutura que podemos visualizar traçando o gráfico $\omega(\theta)$.

TAREFA D: Faça os gráficos $\omega(\theta)$ para os casos $F_0 = 0.5$ e $F_0 = 1.2$, para algumas condições iniciais próximas. Compare os resultados obtidos.

Conforme você deve ter observado você não obteve no caso caótico algo tão desordenado. Existe regiões do diagrama que nunca foram visitadas.

Uma maneira mais efetiva de se visualizar a "estrutura" existente no movimento caótico é a realização de uma **secção de Poincaré**. Isto é. só graficamos $\omega(\theta)$ quando $\Omega t = n\pi$ (n inteiro).

TAREFA E: Faça o gráfico de $\omega(\theta)$ na secção de Poincaré $\Omega t = n\pi$, que no presente caso deve ser traduzido numericamente por $|t - n\pi/\Omega| < \Delta t/2$. O gráfico deve ser feito pra o caso $F_0 = 0.5$ e $F_0 = 1.2$. A Figura que você obtem é o "R.G." do movimento caótico em questão. Varie ligeiramente as condições iniciais e verifique que a figura fica inalterada, o que mostra a "universalidade" do seu caos. Na realidade a figura que você obteve não é contínua e define um fractal. O estudo de fractais e caos estará então intimamente ligado. A figura que dá o "R.G." do caos e que você obteve é chamada de "atrator estranho". Repare que no caso determinístico o atrator estranho é um ponto. ‘