Application en Ingénierie et Programmation Numérique

"Rendu I - Méthodes Directes"

VILLEDIEU Maxance et BESQUEUT Corentin

1 octobre 2023

Table des matières

Chapitre I

Résolution de systèmes linéaires par des Méthodes Directes : Méthode de Gauss

Dans le cadre de ce premier TP, nous devions implémenter l'algorithme du *Pivot de Gauss* en utilisant le langage de programmation C.
Afin de rendre ce document plus compréhensible et lisible, nous estimons que la présence de nos codes sources en clair est nécessaire.

I.1 Détail de l'algorithme

Soient deux matrices $A \in \mathcal{M}_{m,m}$ et $b \in \mathcal{M}_{m,1}$.
L'algorithme de Gauss se décrit ainsi :

Pour $k = 1, \ldots, n-1$ Faire :

Pour $i = k+1, \ldots, n$ Faire :

$$\alpha_i^{(k)} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$$

Pour $j = k, \ldots, n$ Faire :

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \alpha_i^{(k)} a_{kj}^{(k)}$$

FIN Pour j

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \alpha_i^{(k)} b_k^{(k)}$$

FIN Pour i

FIN Pour k

Une fois la matrice échelonnée par cet algorithme, on appliquera la formule suivante pour trouver les solutions du système :

$$x_n = \frac{b_n}{a_{m,m}}$$

et

$$\forall i = n-1, \ldots, 1,\ x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1+i}^{n} a_{ij} x_j \right)$$

La complexité temporelle de cet algorithme est cubique soit $O(n^3)$ avec une complexité exacte de $\frac{2n^3}{3}$.
Pour l'implémentation de cet algorithme, nous allons présenter deux façons de le conceptualiser avec une comparaison algorithmique des deux programmes.

I.2 Le pivot de Gauss en pratique

I.2.1 De manière générale

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,m}$ et $B \in \mathcal{M}_{m,1}$ et x la matrice des inconnues.
Considérons alors le système suivant $Ax = b$.
Ce système peut être représenté sous la forme d'une matrice augmentée M tel que :

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1m} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mm} & b_m \end{array} \right)$$

Après exécution du pivot de Gauss, M devient

$$M = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1m} & b_1^{'} \\ 0 & 1 & a_{23}^{'} & \ldots & a_{2m}^{'} & b_2^{'} \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & \vdots & b_3^{'} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & b_m^{'} \end{array} \right)$$

Une fois que tous les pivots sont placés, il suffira de reconstituer le système et de le remonter afin de déterminer les inconnues comme suit :

Soit $A^{'} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{'} & a_{13}^{'} & \ldots & a_{1m}^{'} \\ 0 & 1 & a_{23}^{'} & \ldots & a_{2m}^{'} \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} b_1^{'} \\ b_2^{'} \\ b_3^{'} \\ \vdots \\ b_m^{'} \end{pmatrix}$

alors pour $A^{'}x = b$ on a donc $x_n = \frac{b_n}{a_{m,m}}$ et $x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1+i}^{n} a_{ij} x_j \right), \forall i = n-1, \ldots, 1.$

Nous remarquerons que l'implémentation du pivot de Gauss ne nécessitera pas de mettre nos pivots à 1

I.2.2 Exercice

Résoudre le système linéaire suivant : x + y + 2z = 3
x + 2y + z = 1
2x + y + z = 0 On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

puis la matrice augmentée $\begin{pmatrix} A & \vert & B \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

Commençons par échelonner la matrice augmentée à l'aide du pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 - L_1 \to L_2]{-(L_3 + 2L_1) \to L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{L_3 - L_2}{4} \to L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Maintenant que notre matrice augmentée est échelonnée, nous pouvons déterminer les inconnues du système par substitution (en partant du bas) :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[L_1 - 2L_3 \to L_1]{L_2 + L_3 \to L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 - L_2 \to L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Nous avons maintenant $A = I_3$ et donc nous pouvons remplacer dans le système $AX = B$, A par I_3, ce qui nous donne :

$$AX = B \iff I_3 X = B \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Nous avons alors notre couple solution du système, qui est :

x = -1
y = 0
z = 2

I.3 Implémentation de l'algorithme de Gauss en passant par le système d'équations linéaires

Dans cette partie, vous trouverez quelques commentaires sur mon implémentation de l'élimination de Gauss, ainsi que le code de l'algorithme décrit en I.1. Il est à noter que cette première implémentation ne recourt pas à l'utilisation de la matrice augmentée. En effet, le programme fonctionne directement avec le système d'équations linéaires $Ax = B$. Vous trouverez également le code de la fonction qui, a un système matriciel échelonné, retourne un vecteur solution du système.

I.3.1 Commentaires fonctionnels

Fonctions usuelles de manipulation de matrices

Ce code implémente diverses fonctions pour travailler avec des matrices à coefficients en nombre flottants.

— La fonction ***createMatrix*** alloue dynamiquement de la mémoire pour créer une matrice de nombres flottants avec un nombre spécifié de lignes et de colonnes.
— La fonction ***printMatrix*** affiche les éléments d'une matrice de nombres flottants.
— La fonction ***freeMatrix*** libère la mémoire allouée pour une matrice de nombres flottants.
— La fonction ***completeMatrix*** permet à l'utilisateur de saisir des valeurs pour remplir les éléments d'une matrice de nombres flottants.
— La fonction ***generateB*** génère un vecteur colonne B en fonction de la somme des éléments de chaque ligne de la matrice A.

Fonctions résolvant notre système linéaire $Ax = B$ à l'aide de l'algorithme de Gauss

Dans le cadre de notre résolution de systèmes d'équations linéaires, deux fonctions jouent un rôle clef dans ce code : la fonction ***gauss*** et la fonction ***resolution***.

— La fonction ***gauss*** joue un rôle important dans la préparation de la résolution de notre système d'équations linéaires. En effectuant l'élimination de Gauss sur la matrice A, elle la transforme en une matrice triangulaire supérieure. Cela signifie que les éléments sous la diagonale principale de la matrice deviennent tous des zéros, simplifiant ainsi la résolution du système. De plus, la fonction met également à jour la matrice B en conséquence, garantissant que notre système $Ax = B$ reste équilibré.

— La fonction ***resolution***, quant à elle, prend en charge la résolution effective du système linéaire une fois que la matrice A a été triangulée par la fonction **gauss**. Elle utilise la méthode de substitution pour calculer la solution et stocke le résultat dans le vecteur X. Cette étape finale permet d'obtenir les valeurs des variables inconnues du système, fournissant ainsi la solution recherchée pour le problème initial.

En combinant ces deux fonctions avec celles sus-citées en I.3.1, le code réalise un processus complet de résolution de systèmes d'équations linéaires de manière efficace et précise (aux erreurs d'arrondies près).

I.3.2 Code source

Puisque nous sommes contraints de minimiser la présence de code dans ce rapport, nous ne présenterons pas ici les fonctions usuelles de manipulations de matrices suivantes : ***createMatrix***, ***printMatrix***, ***freeMatrix***, ***completeMatrix***, ***generateB***.

```c
/*
*PERFORM GAUSSIAN ELIMINATION ON A Ax=B MATRIX SYSTEM OF LINEAR EQUATIONS
*/

void gauss(float** matA, float** matb, int size){
	for(int k=0; k<size-1; k++){
		for(int i=k+1; i<size; i++){
			float alpha=matA[i][k]/matA[k][k];
			for(int j=k; j<size; j++){
				matA[i][j]=matA[i][j]-alpha*matA[k][j];
			}
			matb[i][0]=matb[i][0]-alpha*matb[k][0];
		}
	}
}

/*
*SOLVE A MATRIX SYSTEM OF LINEAR EQUATIONS USING BACKWARD SUBSTITUTION
*/
void resolution(float** matA, float** matb, float** matx, int size){
	matx[size-1][0]=matb[size-1][0]/matA[size-1][size-1];
	for (int i=size-2; i>=0; i--){
		float sum=0;
		for(int j=i+1; j<size; j++){
			sum+=matA[i][j]*matx[j][0];
		}
		matx[i][0]=(1/matA[i][i])*(matb[i][0]-sum);
	}
}
```

I.3.3 Interactions Utilisateur/Console

Entrées utilisateur

En premier lieu dans notre programme, nous avons besoin de spécifier le système $Ax = B$ à l'ordinateur. Pour ce faire, nous allons dans l'ordre :

1. Allouer une matrice A en mémoire. Cette matrice verra sa taille définie par la première entrée utilisateur du programme (nous demanderons consécutivement le nombre de lignes, puis le nombre de colonnes de la matrice).
2. Définir les coefficients de la matrice A. Il s'agira de la deuxième entrée utilisateur de notre programme.
   Par définition de notre fonction ***completeMatrix***, nous remplirons la matrice dans l'ordre suivant :
   $a_{1,1}, a_{1,2}, ..., a_{1,n},$ puis $a_{2,1}, ...a_{2,n},$ jusque $a_{n,1}, ..., a_{n,n}$
3. Allouer une matrice B en mémoire. À noter que la taille de B est définie automatiquement en fonction de la taille de A. Nous avons $A \in \mathcal{M}_{n,p} \Rightarrow B \in \mathcal{M}_{n,1}$.
4. Définir les coefficients de la matrice B. Chaque coefficient prendra la valeur de la somme des éléments de la ligne respective de la matrice A.
   Nous avons donc :
   Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}, \forall i \in \{1, n\}, b_{i,1} = \sum_{j=1}^{p} a_{i,p}$.
5. Allouer une matrice X en mémoire. Cette matrice aura la même taille que la matrice B. Ces coefficients ne seront pas définis pour le moment.

En guise d'exemple, le système matriciel $AX = B$ suivant :

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 7 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{I.1}$$

est représenté par l'entrée utilisateur :

Listing I.1 – User Input

```
Row count of matrix A : 3

Column count of matrix A : 3

                    FILL IN THE VALUE OF MATRIX A

Value for a_1,1:   3
Value for a_1,2:   0
Value for a_1,3:   4
Value for a_2,1:   7
Value for a_2,2:   4
Value for a_2,3:   2
Value for a_3,1:   -1
Value for a_3,2:   1
Value for a_3,3:   2
```

Une fois toutes les matrices initialisées et complétées, nous pouvons attaquer la résolution du système par la triangularisation du système. Ceci fait, nous résolverons le système obtenu pour obtenir notre vecteur X solution.

Affichage Console

Dès lors le système $AX = B$ connu par l'ordinateur, ce dernier peut retrouver les valeurs de la matrice X. Voici l'affichage produit par notre programme en console :

Listing I.2 – Console Display of the Gauss elimination for the AX

```
                    A matrix

3.000000    0.000000    4.000000
7.000000    4.000000    2.000000
-1.000000    1.000000    2.000000

                    B matrix

7.000000
13.000000
2.000000

                    TRIANGULARIZATION
                    A Matrix

3.000000    0.000000    4.000000
0.000000    4.000000    -7.333333
0.000000    0.000000    5.166667

                    B Matrix

7.000000
-3.333332
```

```
5.166667

                SOLVING
                SOLUTION VECTOR X

1.000000
1.000000
1.000000
```

Il est à repérer que le programme affiche dans cet ordre :

- La **Matrice** A
- La **Matrice** B
- La **Matrice** A une fois triangulée supérieure
- La **Matrice** B une fois mise à jour en conséquence pour que le système reste équilibré
- La **Matrice** X solution du système

Remarque : le temps d'exécution de ce programme a été de 0.000237 secondes

I.3.4 Exemples d'exécution

Soient les matrices suivantes données dans le TP :

$$A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -6 \\ -4 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & -9 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & -4 \\ -7 & -3 & 8 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -6 \\ -4 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & -9 \end{pmatrix}$$

On obtient respectivement les résultats suivants :

Listing I.3 – $A_2X = B$ results

```
                A matrix

-3.000000   3.000000   -6.000000
-4.000000   7.000000   8.000000
5.000000   7.000000   -9.000000

                B matrix

-6.000000
11.000000
3.000000

                TRIANGULARIZATION
                A Matrix

-3.000000   3.000000   -6.000000
0.000000   3.000000   16.000000
0.000000   0.000000   -83.000000

                B Matrix

-6.000000
19.000000
-83.000000

                SOLVING
                SOLUTION VECTOR X

1.000000
1.000000
1.000000
```

```

Temps d'execution : 0.000250 secondes
```

Listing I.4 – $A_4X = B$ results

```
                A matrix

7.000000   6.000000   9.000000
4.000000   5.000000   -4.000000
-7.000000   -3.000000   8.000000

                B matrix

22.000000
5.000000
-2.000000

                TRIANGULARIZATION
                A Matrix

7.000000   6.000000   9.000000
0.000000   1.571428   -9.142858
0.000000   0.000000   34.454552

                B Matrix

22.000000
-7.571429
34.454548

                SOLVING
                SOLUTION VECTOR X

1.000001
0.999999
1.000000

Temps d'execution : 0.000231 secondes
```

Listing I.5 – $A_6X = B$ results

```
                A matrix

-3.000000   3.000000   -6.000000
-4.000000   7.000000   8.000000
5.000000   7.000000   -9.000000

                B matrix

-6.000000
11.000000
3.000000

                TRIANGULARIZATION
                A Matrix

-3.000000   3.000000   -6.000000
0.000000   3.000000   16.000000
0.000000   0.000000   -83.000000

                B Matrix

-6.000000
19.000000
```

```
-83.000000

                    SOLVING
                    SOLUTION VECTOR X

1.000000
1.000000
1.000000

Temps d'execution : 0.000246 secondes
```

Nous remarquerons que sur le calcul de A_4, nous tombons sur des valeurs extrêmement proches de 1. Ceci est provoqué à cause des erreurs d'arrondis provoquées par l'encodage des nombres flottants.

I.4 Pivot de Gauss avec matrice augmentée

I.4.1 Code source

Voici le code source de mon implémentation du pivot de Gauss via le passage par la matrice augmentée.
C'est-à-dire que dans mon implémentation, on fera usage de la concaténation des matrices.

```
/*
 * BUILD AUGMENTED MATRIX
 */
float **AugmentedMatrix(float **M1, float **M2, int m, int n) {
  float **A = allocate(m, m + 1);
  for (int i = 0; i < m; i++) {
    for (int j = 0; j < n + 1; j++) {
      (j != n) ? (A[i][j] = M1[i][j]) : (A[i][j] = M2[i][0]);
    }
  }
  return A;
}
/*
 * PERFORM GAUSS ALGORITHM ONLY ON AUGMENTED MATRIX
 */
void gauss(float **A, int m, int p) {
  if (m != p) {
    puts("La matrice doit etre carree !");
    return;
  }
  for (int k = 0; k <= m - 1; k++) {
    for (int i = k + 1; i < m; i++) {
      float pivot = A[i][k] / A[k][k];
      for (int j = k; j <= m; j++) {
        A[i][j] = A[i][j] - pivot * A[k][j];
      }
    }
  }
}
/*
 * DETERMINE ALL UNKNOWNS VARIABLES
 */
float *findSolutions(float **A, int m) {
  float *S = calloc(m, sizeof *S);
  S[m - 1] = A[m - 1][m] / A[m - 1][m - 1];
  for (int i = m - 1; i >= 0; i--) {
    S[i] = A[i][m];
    for (int j = i + 1; j < m; j++) {
      S[i] -= A[i][j] * S[j];
    }
    S[i] = S[i] / A[i][i];
  }
  return S;
}
```

I.4.2 Commentaires du code

Mon implémentation utilise strictement l'algorithme de Gauss rappelé précédemment avec seulement quelques changements d'indices puisque au lieu de travailler sur une matrice carrée et un vecteur colonne, mon programme utilise une matrice augmentée ayant m lignes et $m+1$ colonnes, $m \in \mathbb{N}^*$.
Détail des fonctions non conventionnelles :
Comme mentionné précédemment, je ne détaillerai pas les fonctions gauss() et findSolutions() puisque ces fonctions permettent seulement d'une part d'implémenter l'algorithme de Gauss et d'autre part à "remonter" la matrice échelonnée afin de récupérer les valeurs des inconnus.

-float **AugmentedMatrix(float **M1, float **M2, int m, int n) : cette fonction permet de créer une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,m+1}$ à partir de la concaténation de $M1 \in \mathcal{M}_{mm}$ et $M2 \in \mathcal{M}_{m,1}$.
Soient a_{ij} les coefficients peuplant A, b_{ij} les coefficients peuplant $M1$ et c_{i0} les coefficients peuplant $M2$.
On obtient alors $a_{ij} = b_{ij} \forall i \in \mathbb{N}_m, \forall j \in \mathbb{N}_m$ et $a_{ij} = c_{i0}$ si $j = m + 1$.
Cette fonction renvoie alors A, la matrice de flottants créée dynamiquement.
Les fonctions *fillM()*, *printMatrix()*, *freeAll()* et *multiplication()* et *allocate()* sont quatre fonctions utilitaires qui permettent respectivement : de remplir une matrice, d'afficher convenablement une matrice, de libérer les matrices en mémoires, de définir la multiplication matricielle et enfin d'allouer de la mémoire pour déclarer les matrices (avec quelques légères sécurités permettant d'être sûr que les matrices sont bien instanciées convenablement).

I.4.3 Inputs / Outputs

Mon programme demande d'abord 4 entiers m, p, n, q qui correspondent aux dimensions de la première matrice $A \in \mathcal{M}_{mp}$ et de la seconde matrice $X \in \mathcal{M}_{nq}$. Le but étant de résoudre le système $AX = b$, nous initialiserons X à 1. Ce choix de valeur permettra de contrôler la validité du programme, ainsi à la fin de ce dernier, si $\forall x_i \neq 1, \forall i \in \mathbb{N}_n$, on pourra affirmer que le programme est faux.
Sur les $m \times p$ prochaines lignes, le programme demande les coefficients de A.
Sur les $n \times q$ prochaines lignes, le programme demandera les coefficients du vecteur colonne X, que l'utilisateur initialisera à 1.
On peut alors automatiser les entrées en utilisant des fichiers.

Ainsi les matrices : $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 7 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

sont représentés par ce fichier d'entrées :

Listing I.6 – input.txt

```
3 3
3 1
3 0 4
7 4 2
-1 1 2
1 1 1
```

Pour ce qui est des résultats produits par mon programme, une fois injecté dans un fichier texte, une output "type" ressemble à ceci.

Listing I.7 – Gauss elimination with M and X matrix

```
PRINTING MATRIX FROM: 0x556d938672c0 LOCATION :
3.000000 0.000000 4.000000
7.000000 4.000000 2.000000
-1.000000 1.000000 2.000000
PRINTING MATRIX FROM: 0x556d93867340 LOCATION :
1.000000
1.000000
1.000000
PRINTING MATRIX FROM: 0x556d938673c0 LOCATION :
7.000000
13.000000
2.000000
PRINTING MATRIX FROM: 0x556d93867440 LOCATION :
3.000000 0.000000 4.000000 7.000000
0.000000 4.000000 -7.333333 -3.333332
0.000000 0.000000 5.166667 5.166667
SOLUTIONS
x0 = 1.000000
```

```
x1 = 1.000000
x2 = 1.000000
RUNTIME: 0.000002 seconds
```

On remarquera que le programme affiche dans cet ordre :
- La Matrice A
- La Matrice X
- La Matrice B trouvée avec les valeur de X
- La Matrice augmentée en triangle supérieur
- Les solutions
- Un timer permettant de contrôler le temps d'exécution approximatif de mon programme

I.4.4 Exemples d'exécutions

Soient $A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -6 \\ -4 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & -9 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & -4 \\ -7 & -3 & 8 \end{pmatrix}$, $A_6 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -6 \\ -4 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & -9 \end{pmatrix}$

On obtient respectivement ces résultats :

Listing I.8 – Matrix 2 results

```
PRINTING MATRIX FROM: 0x55f604fb32c0 LOCATION :
-3.000000 3.000000 -6.000000
-4.000000 7.000000 8.000000
5.000000 7.000000 -9.000000
PRINTING MATRIX FROM: 0x55f604fb3340 LOCATION :
1.000000
1.000000
1.000000
PRINTING MATRIX FROM: 0x55f604fb33c0 LOCATION :
-6.000000
11.000000
3.000000
PRINTING MATRIX FROM: 0x55f604fb3440 LOCATION :
-3.000000 3.000000 -6.000000 -6.000000
0.000000 3.000000 16.000000 19.000000
0.000000 0.000000 -83.000000 -83.000000
SOLUTIONS
x0 = 1.000000
x1 = 1.000000
x2 = 1.000000
RUNTIME: 0.000002 seconds
```

Listing I.9 – Matrix 4 results

```
PRINTING MATRIX FROM: 0x55f7afd662c0 LOCATION :
7.000000 6.000000 9.000000
4.000000 5.000000 -4.000000
-7.000000 -3.000000 8.000000
PRINTING MATRIX FROM: 0x55f7afd66340 LOCATION :
1.000000
1.000000
1.000000
PRINTING MATRIX FROM: 0x55f7afd663c0 LOCATION :
22.000000
5.000000
-2.000000
PRINTING MATRIX FROM: 0x55f7afd66440 LOCATION :
7.000000 6.000000 9.000000 22.000000
0.000000 1.571428 -9.142858 -7.571429
0.000000 0.000000 34.454552 34.454548
```

```
SOLUTIONS
x0 = 1.000001
x1 = 0.999999
x2 = 1.000000
RUNTIME: 0.000002 seconds
```

Listing I.10 – Matrix 6 results

```
PRINTING MATRIX FROM: 0x557fdaa552c0 LOCATION :
3.000000 −1.000000 0.000000
0.000000 3.000000 −1.000000
0.000000 −2.000000 3.000000
PRINTING MATRIX FROM: 0x557fdaa55340 LOCATION :
1.000000
1.000000
1.000000
PRINTING MATRIX FROM: 0x557fdaa553c0 LOCATION :
2.000000
2.000000
1.000000
PRINTING MATRIX FROM: 0x557fdaa55440 LOCATION :
3.000000 −1.000000 0.000000 2.000000
0.000000 3.000000 −1.000000 2.000000
0.000000 0.000000 2.333333 2.333333
SOLUTIONS
x0 = 1.000000
x1 = 1.000000
x2 = 1.000000
RUNTIME: 0.000002 seconds
```

On apercevra que sur le calcul de A_4, on obtient sur des valeurs extrêmement proches de 1. Ceci est provoqué par des erreurs d'arrondis issus par l'encodage des nombres flottants.
Nous remarquerons que l'implémentation utilisant la matrice augmentée est sensiblement meilleure en terme d'efficacité. En effet, le temps d'exécution est multiplié par 100 sur la première implémentation.

Chapitre II

Résolution de systèmes linéaires par des Méthodes Itératives

report [french]babel [T1]fontenc [utf8]inputenc mathtools amssymb hyperref float amsthm listings geometry setspace graphicx fancyhdr subcaption cleveref
Définition
hmargin=3cm,vmargin=2.5cm

II.1 Méthode de Gauss-Seidel

II.1.1 Introduction à la méthode de Gauss-Seidel

La méthode de Gauss-Seidel est une méthode itérative pour résoudre les systèmes linéaires de la forme $Ax = b$, où A est une matrice carrée d'ordre n et x, b sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. C'est une méthode qui génère une suite qui converge vers la solution de ce système lorsque celle-ci en a une et lorsque les conditions de convergence suivantes sont satisfaites (quels que soient le vecteur b et le point initial x^0) :

— Si la matrice A est symétrique définie positive,
— Si la matrice A est à diagonale strictement dominante.

II.1.2 Mise en place des matrices pour la méthode de Gauss-Seidel

Soit $Ax = b$ le système linéaire à résoudre, où $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ et $b \in \mathcal{M}_{n,1}$. On cherche $x \in \mathcal{M}_{n,1}$ solution du système. Dans un premier temps, on va écrire A sous la forme $A = D - E - F$ où D est une matrice diagonale, E est une matrice triangulaire inférieure, et F est une matrice triangulaire supérieure.
On peut alors écrire :

$$Ax = b \tag{II.1}$$
$$\Leftrightarrow (D - E - F)x = b \tag{II.2}$$
$$\Leftrightarrow Dx = b - (E + F)x \tag{II.3}$$
$$\Leftrightarrow x = D^{-1}[b - (E + F)x] \tag{II.4}$$

On définit ensuite une suite de vecteurs (x^k) en choisissant un vecteur x^0 et par la formule de récurrence :

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}x_j^k\right) \tag{II.5}$$

II.1.3 Algorithme

Pour résoudre un système $Ax = b$, avec $A \in \mathcal{M}_n$ et $b \in \mathcal{M}_{n,1}$, on s'appuie sur l'algorithme suivant en posant :

- un vecteur initial $x^{(0)}$ choisi au préalable,
- l'erreur à l'itération k=0 calculée par $\varepsilon^{(0)} = \|Ax^{(0)} - b\|$,
- une variable k qui sera notre compteur d'itération.

$x^{(0)} = x_0 \in \mathcal{M}_{n,1}$

$\varepsilon^{(0)} = \varepsilon$ (erreur)

$k = 0$

Tant Que ($\varepsilon^{(k)} >= \varepsilon$) faire :

    Pour $i = 1$ a n:

        $x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{i,i}}\left[b_i - \left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}x_j^{(k)} + \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}x_j^{(k+1)}\right)\right]$ pour $i = 1, ..., n$

    $\varepsilon^{(k+1)} = \|Ax^{(k+1)} - b\|$

    $k = k + 1$

Fin Tant Que

II.1.4 Résolution manuelle

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

Calculons le vecteur $x^{(1)}$ (vecteur x trouvé après 1 itération de l'algorithme) solution du système $Ax = b$, en prenant comme point initial $x^{(0)} = (0, 0, 0)$:

Résolution par le calcul itératif

Dans cette sous-partie, nous résolverons le système de la même manière que le fait l'algorithme sus-cité.
Pour obtenir le vecteur $x^{(1)}$ (obtenu à l'itération $k = 1$), il nous faut obtenir $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$,$x_3^{(1)}$ par la formule suivante :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{i,i}}\left[b_i - \left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}x_j^{(k)} + \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}x_j^{(k+1)}\right)\right] \text{ pour } i = 1, ..., 3$$

Pour $i = 1$:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{a_{1,1}}\left[b_1 - \left(\sum_{j=2}^{3} a_{1,j}x_j^{(0)} + \sum_{j=1}^{0} a_{1,j}x_j^{(1)}\right)\right] \tag{II.6}$$

$$= \frac{1}{1}\left[2 - \left(a_{1,2}x_2^{(0)} + a_{2,2}x_2^{(0)} + 0\right)\right] \tag{II.7}$$

$$= 2 - 2 \times 0 - 3 \times 0 = 2 \tag{II.8}$$

Pour $i = 2$:

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{a_{2,2}}\left[b_2 - \left(\sum_{j=3}^{3} a_{2,j}x_j^{(0)} + \sum_{j=1}^{1} a_{2,j}x_j^{(1)}\right)\right] \tag{II.9}$$

$$= \frac{1}{3}\left[2 - \left(a_{2,3}x_3^{(0)} + a_{2,1}x_1^{(1)}\right)\right] \tag{II.10}$$

$$= \frac{1}{3}\left(2 - 3 \times 0 - 1 \times 2\right) \tag{II.11}$$

$$= \frac{1}{3} \times 0 = 0 \tag{II.12}$$

Pour $i = 3$:

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{a_{3,3}}\left[b_3 - \left(\sum_{j=4}^{3} a_{3,j}x_j^{(0)} + \sum_{j=1}^{2} a_{3,j}x_j^{(1)}\right)\right] \tag{II.13}$$

$$= \frac{1}{8}\left[8 - \left(0 + a_{3,1}x_1^{(1)} + a_{3,2}x_2^{(1)}\right)\right] \tag{II.14}$$

$$= \frac{1}{8}\left(8 - 3 \times 2 - 7 \times 0\right) \tag{II.15}$$

$$= \frac{1}{8} \times 2 = \frac{1}{4} \tag{II.16}$$

Conclusion :

Nous avons $x_1^{(1)} = 2$, $x_2^{(1)} = 0$, $x_3^{(1)} = \frac{1}{4}$. Et donc, $x^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} 0$

Résolution par le calcul matriciel

Dans la section II.1.2, nous avons vu que l'on pouvait décomposer la matrice A par une matrice diagonale D, une matrice triangulaire inférieure E, et une matrice triangulaire supérieure F. Ceci fait, nous pouvons obtenir le vecteur x par la formule suivante :

$$x^{(k+1)} = D^{-1}[b - (E + F)x^{(k)}]$$

Nous avons alors :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}}_{D} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -3 & -7 & 0 \end{pmatrix}}_{F}$$

Nous obtenons alors :

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -3 & -7 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \tag{II.17}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \tag{II.18}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{II.19}$$

Remarque : Au fur et à mesure des itérations, le vecteur x donné par le calcul itératif effectué dans la partie II.1.4 se rapproche de la solution donnée par le précédent calcul. Il est alors normal que le vecteur trouvé au bout de la première itération soit différent du vecteur trouvé ci-dessus.

II.1.5 Implémentation

Commentaires fonctionnels

Note : L'implémentation qui suit utilise exactement les mêmes fonctions usuelles de manipulation de matrice que l'implémentation de l'algorithme de Gauss décrit dans la section I.3.1. De plus, dans cette implémentation, nous définirons une variable k qui sera notre compteur d'itération et qui permettra l'arrêt de notre code si la suite ne converge pas. Enfin, notre variable erreur ε sera mise à jour à chaque itération de la manière suivante :

$$\varepsilon^{(k)} = p^{(k)} = Max_{i=1,\ldots,n}|\overline{x}_i - \widetilde{x}_i^k|$$

Nous détaillerons dans cette section uniquement les fonctions dites "non-usuelles" qui vont nous servir pour l'implémentation de l'algorithme de Gauss-Seidel. Il s'agit ici de la fonction de mise à jour de notre variable erreur et de la fonction implémentant l'algorithme de Gauss-Seidel.

Fonction *majEpsilon* :

La fonction **majEpsilon** permet de mettre à jour la variable d'erreur ε lors de l'exécution de notre algorithme. Grâce au vecteur $x^{(k)}$ qui représente la solution actuelle de notre système d'équations, la fonction calcule la différence absolue entre chaque élément $x_i^{(k)}$ et 1. Cela permet de mesurer à quel point les valeurs actuelles se rapprochent de 1, qui est notre valeur cible pour les solutions convergentes. La fonction conserve le maximum de ces différences absolues en tant que mesure d'erreur afin de mettre à jour notre variable ε. Cela permet de contrôler la précision de l'algorithme et de décider quand il a convergé de manière satisfaisante vers la solution recherchée. La fonction **majEpsilon** joue donc un rôle dans la détermination du critère d'arrêt de l'algorithme. Voici son implémentation en C :

```c
float majEpsilon(float** matXk, int row){
  float maxforEps=0;
  for(int i=0; i<row; i++){
      float soustr=fabs(1-matXk[i][0]);
      printf("%f\n", matXk[i][0]);
      if (soustr>maxforEps){
          maxforEps=soustr;
      }
  }
  return maxforEps;
}
```

Fonction *gaussSeidel* :

La fonction **gaussSeidel** implémente l'algorithme de Gauss-Seidel tel que décrit précédemment dans la section II.1.3. Par la programmation itérative, notre algorithme mettra à jour les solutions actuelles jusqu'à ce que l'erreur minimale définie soit atteinte ou que le nombre maximal d'itérations soit atteint. Voici son implémentation en C :

```
 float** gaussSeidel(float **matA, float **matB, int row, int column, int nbIterMax){
  //CREATING OUR INITIAL VECTOR
  float **matXk=createMatrix(row, 1);
  for(int rowX=0; rowX<row; rowX++){
                    matXk[rowX][0]=0;
  }

  //CREATING OUR SOLUTION VECTOR AT ITERATION k
  float **matXk1=createMatrix(row, 1);

  //INITIALIZING OUR ERROR VARIABLE AND ITERATION COUNTER
  float epsilon=majEpsilon(matXk, row);;
  int iter=0;

  while ((epsilon>=pow(10,-6)) && (iter<nbIterMax)){
      for(int i=0; i<row ; i++){
          float sumF=0;
          float sumE=0;

          //CALCULATION OF F
          for(int j=i+1; j<row ; j++){
              sumF+=matA[i][j]*matXk[j][0];
          }

          //CALCULATION OF E
          for(int j=0; j<i ; j++){
              sumE+=matA[i][j]*matXk1[j][0];
          }

          //CALCULATION OF ELEMENT X_i^(k)"
          matXk1[i][0]=(matB[i][0]-sumF-sumE)/matA[i][i];

      }

      //UPDATING OUR SOLUTION VECTOR
      matXk[0][0]=matXk1[0][0];
      matXk[1][0]=matXk1[1][0];
      matXk[2][0]=matXk1[2][0];

      //UPDATING OUR ERROR VARIABLE AND ITERATION COUNTER
      epsilon=majEpsilon(matXk, row);
      iter+=1;
  }

  //RETURN THE SOLUTION VECTOR
  return matXk1;
}
```

II.1.6 Exemples d'exécution