.1 Méthode de Gauss-Seidel

.1.1 Introduction à la méthode de Gauss-Seidel

La méthode de Gauss-Seidel est une méthode itérative pour résoudre les systèmes linéaires de la forme $Ax = b$, où A est une matrice carrée d'ordre n et x, b sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. C'est une méthode qui génère une suite qui converge vers la solution de ce système lorsque celle-ci en a une et lorsque les conditions de convergence suivantes sont satisfaites (quels que soient le vecteur b et le point initial x^0) :

— Si la matrice A est symétrique définie positive,

— Si la matrice A est à diagonale strictement dominante.

.1.2 Mise en place des matrices pour la méthode de Gauss-Seidel

Soit $Ax = b$ le système linéaire à résoudre, où $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ et $b \in \mathcal{M}_{n,1}$. On cherche $x \in \mathcal{M}_{n,1}$ solution du système. Dans un premier temps, on va écrire A sous la forme $A = D - E - F$ où D est une matrice diagonale, E est une matrice triangulaire inférieure, et F est une matrice triangulaire supérieure.
On peut alors écrire :

$$Ax = b \tag{1}$$
$$\Leftrightarrow (D - E - F)x = b \tag{2}$$
$$\Leftrightarrow Dx = b - (E + F)x \tag{3}$$
$$\Leftrightarrow x = D^{-1}[b - (E + F)x] \tag{4}$$

On définit ensuite une suite de vecteurs (x^k) en choisissant un vecteur x^0 et par la formule de récurrence :

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}x_j^k\right) \tag{5}$$

.1.3 Algorithme

$x^{(0)} = x_0 \in \mathcal{M}_{n,1}$

.1.4 Résolution manuelle

.1.5 Implémentation

.1.6 Exemples d'exécution