Interpolation et approximation

17 octobre 2023

Les méthodes d'interpolation et d'approximation ont pour objectif de retrouver l'équation mathématique d'une courbe traversant une liste de points mesurés.
On traitera dans ce résumé uniquement le cas de **l'espace plan** (dimension 2) et **des fonctions polynomiales**.

1 Interpolation

1.1 Introduction

D'une manière générale l'interpolation nécessite de se poser les questions suivantes :

1. Quel type de fonction souhaite-t-on obtenir ?
2. Existe-t-il une fonction vérifiant les hypothèses d'interpolation ?
3. Comment calculer cette fonction ?
4. Existe-t-il une méthode générique et efficace en termes de précision et de temps de calcul ?

Dans ce qui suit :

1. La fonction recherchée est une fonction polynomiale.
   Définition : Un polynôme P_n de degré n est une fonction de la variable réelle x de la forme :
   $$P_n(x) = a_n x^n + a_{(n-1)} x^{(n-1)} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$
   Chaque coefficient $a_i, i = 0, \ldots, n$ est un réel lié au degré i.
2. Le théorème dit d'*unisolvance* permet de montrer que la fonction polynôme vérifie les hypothèses d'interpolation :
   Théorème :
   Etant donné un ensemble de N points $(x_i, y_i), i = 1, \ldots, N$, il existe un unique polynôme $P_{(N-1)}$ de degré maximum $N-1$ qui passe par tous ces points.
3. Pour calculer le polynôme $P_{N-1}(x) = a_{(N-1)} x^{(N-1)} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, posons $\forall i \in \{1, \ldots, N\}$, $P_{N-1}(x_i) = y_i$, on obtient le système d'équations linéaires suivant :
   $$\begin{bmatrix} x_1^{(N-1)} & x_1^{(N-2)} & \ldots & x_1 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_N^{(N-1)} & x_N^{(N-2)} & \ldots & x_N & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{(N-1)} \\ a_{(N-2)} \\ \ldots \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_N \end{bmatrix}$$

4. Le système précédent peut alors être résolu par les différentes méthodes de résolution des systèmes d'équations linéaires vues dans le chapitre I. Cependant, il existe d'autres algorithmes spécifiques à l'interpolation.

1.2 Interpolation de Lagrange

L'idée suivante est à la base des différentes méthodes d'interpolation polynômiale. Le polynôme $P_{(N-1)}$ est exprimé sous la forme

$$P_{(N-1)}(x) = \sum_{i=0}^{(N-1)} y_i l_i(x) \tag{1}$$

où la fonction cardinale $l_i(x)$ est définie par :

$$l_i(x) = \Pi_{j=0,j\neq i}^{(N-1)} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

On peut remarquer que $l_i(x_j)$ vaut 0 pour $j \neq i$ et 1 sinon. La fonction $l_i(x)$ est le produit de $N-1$ polynômes de degré 1, c'est donc un polynôme de degré $N-1$.

La méthode de Lagrange consiste à construire le polynôme de degré $N-1$ d'un ensemble de N points par l'expression (1). Le coût d'écriture de la forme de Lagrange est de $2N(N+1)$ opérations auquelles il faut ajouter $N(2N+3)$ opérations pour l'évaluation. le schéma de Hörner utilisé dans la méthode suivante donne une évaluation moins coûteuse.

Exemple

i	0	1	2
x_i	1	2	4
y_i	2	5	2

On recherche $P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ car 3 points sont donnés.

$P_{(2)}(x) = \sum_{i=0}^{(2)} y_i l_i(x)$:

$$l_0(x) = \Pi_{j=1,j\neq 0}^{(n-1)} \frac{x - x_j}{x_0 - x_j} = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \times \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \frac{x-2}{1-2} \times \frac{x-4}{1-4} = -(x-2) \times -\frac{x-4}{3}$$

$$l_1(x) = \Pi_{j=0,j\neq 1}^{(n-1)} \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \times \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x-1}{2-1} \times \frac{x-4}{2-4} = (x-1) \times -\frac{x-4}{2}$$

$$l_2(x) = \Pi_{j=0,j\neq 2}^{(n+1)} \frac{x - x_j}{x_2 - x_j} = \frac{x - x_0}{4 - x_0} \times \frac{x - x_1}{4 - x_1} = \frac{x-1}{4-1} \times \frac{x-2}{4-2} = \frac{x-1}{3} \times \frac{x-2}{2}$$

$$P_{(2)}(x) = -2 \times (x-2) \times -\frac{x-4}{3} + 5 \times (x-1) \times -\frac{x-4}{2} + 2 \times \frac{x-1}{3} \times \frac{x-2}{2}$$

On obtient $P_{(2)}(x) = \frac{-3x^2+15x-8}{2}$.

1.3 Interpolation de Newton

Le polynôme d'interpolation peut s'écrire :

$$P_{(N-1)}(x) = b_0 + b_1(x-x_1) + b_2(x-x_1)(x-x_2) + \cdots + b_{(N-1)}(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{(N-1)})$$

On recherche les coefficients $b_0, b_1, \ldots$ tels que $P_{(N-1)}(x_i) = y_i, \forall i = 1, \ldots, N$
Si on remplace x par x_i, on obtient le système linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} y_1 & = & P_{(N-1)}(x_1) & = & b_0 \\ y_2 & = & P_{(N-1)}(x_2) & = & b_0 + (x_2 - x_1)b_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \\ y_N & = & P_{(N-1)}(x_N) & = & b_0 + (x_N - x_1)b_1 + \cdots + (x_N - x_1)(x_N - x_2)\ldots(x_N - x_{(N-1)})b_{(N-1)} \end{array}\right. \quad (2)$$

On peut remarquer que la matrice du système est triangulaire inférieure et qu'il peut être résolu par substitution connaissant les N points (x_i, y_i). Cependant la résolution par l'utilisation des *différences divisées* est plus rapide.

Définition : Différences divisées.

1. La différence divisée de premier degré est $\nabla y_i = \frac{y_i - y_1}{x_i - x_1}, \forall i = 2, \ldots, N$.
2. La différence divisée de second degré est $\nabla^2 y_i = \frac{\nabla y_i - \nabla y_2}{x_i - x_2}, \forall i = 3, \ldots, N$.
3. La différence divisée de degré k est : $\nabla^k y_i = \frac{\nabla^{(k-1)} y_i - \nabla^{(k-1)} y_k}{x_i - x_k}, i = k+1, \ldots, N$

On obtient tous les coefficients du polynôme par les formules suivantes déterminées par récurrence à partir du système 2 :
$b_0 = y_1$,
$b_1 = \nabla y_2$
$b_2 = \nabla^2 y_3$.
$\ldots$
$b_i = \nabla^i y_{(i+1)}, i = 3, \ldots, N-1$

Le polynôme P_{N-1} est alors obtenu de la manière suivante :
$P_0(x) = b_{N-1}$
$P_1(x) = b_{N-2} + (x - x_{N-1})P_0(x)$
$P_2(x) = b_{N-3} + (x - x_{N-2})P_1(x)$
$\ldots\ldots$
$P_{N-1}(x) = b_0 + (x - x_1)P_{N-2}(x)$

Le tableau des différences divisées comprend $\frac{N(N+1)}{2}$ éléments, chacun nécessite 2 différences et 1 division. L'écriture comprend alors $\frac{3N(N+1)}{2}$ opérations ce qui est le $\frac{3}{4}$ du nombre obtenu pour la forme de Lagrange.

Le coût de l'évaluation de newton est de $3N << N(2N+3)$ coût de Lagrange.

Exemple

i	0	1	2
x_i	1	2	4
y_i	2	5	2

On recherche $P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ car 3 points sont donnés.
$\nabla y_1 = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} = \frac{3}{1} = 3$; $\nabla y_2 = \frac{y_2-y_0}{x_2-x_0} = \frac{0}{3} = 0$
$\nabla^2 y_2 = \frac{\nabla y_2 - \nabla y_1}{x_2-x_1} = \frac{-3}{2}$
Construction de la table des différences divisées :

x	y	∇	∇^2
1	$2(= b_0)$		
		$3(= b_1)$	
2	5		
			$-\frac{3}{2}(= b_2)$
		0	
4	2		

$P_0(x) = b_2 = -\frac{3}{2}$
$P_1(x) = b_1 + (x - x_1)P_0(x) = 3 + (x-2)(-\frac{3}{2})$
$P_2(x) = b_0 + (x - x_0)P_1(x) = 2 + (x-1)(3 + (x-2)(-\frac{3}{2}))$

et $P_{(2)}(x) = \frac{-3x^2+15x-8}{2}$

1.4 Interpolation de Neville

1.4.1 Principe de la méthode :

Etant donnés N points (x_i, y_i), il s'agit d'exprimer le polynôme $P_{N-1}[x_1, x_2, \ldots, x_N]$ sur les points $\{1, 2, \ldots, N\}$ en fonction des polynômes $P_{N-2}[x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}]$ et $P_{N-2}[x_2, x_3, \ldots, x_N]$ sur l'ensemble de points $\{1, 2, \ldots, N-1\}$ et $\{2, 3, \ldots, N\}$

On utilise la formule de Lagrange partant des polynômes d'interpolation $P_0[x_i]$ de degré 0 pour chaque point i. La courbe associée à chacun de ces polynômes passe par le point (x_i, y_i) i.e. $\forall x, P_0[x_i](x) = y_i$.

1.4.2 Formules

$\forall x, P_0[x_i](x) = y_i, i = 1, \ldots, N$

$\forall x, P_1[x_i, x_{i+1}](x) = \frac{(x-x_{i+1})P_0[x_i](x)+(x_i-x)P_0[x_{i+1}](x)}{x_i-x_{i+1}}, i = 1, \ldots, N-1$

$\forall x, P_k[x_i, \ldots, x_{i+k}](x) = \frac{(x-x_{i+k})P_{k-1}[x_i,\ldots,x_{i+k-1}](x)+(x_i-x)P_{k-1}[x_{i+1},\ldots,x_{i+k}](x)}{x_i-x_{i+k}}$,
$\forall k = 2, \ldots, N-1$

1.4.3 Méthode

Soient N points (x_i, y_i) :

- Poser $P_0[x_i](x) = y_i, \forall i = 1, \ldots, N$,
- Utiliser les valeurs précédentes 2 à 2 pour le calcul de $P_1[x_i, x_{i+1}], \forall i = 1, \ldots, N-1$,
- Poursuivre les calculs jusqu'à $P_{N-1}[x_1, x_2, \ldots, x_N]$

Exemple

i	0	1	2
x_i	1	2	4
y_i	2	5	2

Etape 0 :
$P_0[1](x) = 2\,;\ P_0[2](x) = 5\,;\ P_0[4](x) = 2\,;$
Etape 1 :
$P_1[x_0, x_1](x) = \frac{(x-2)\times 2+(1-x)\times 5}{1-2} = 3x - 1\,;$
$P_1[x_1, x_2](x) = \frac{(x-4)\times 5+(2-x)\times 2}{2-4} = \frac{-3}{2}x + 8\,;$
Etape 2 :
$P_2[x_0, x_1, x_2](x) = \frac{(x-4)\times(3x-1)+(1-x)\times\frac{-3}{2}x+8}{1-4}$
Finally, $P_2[x_0, x_1, x_2](x) = \frac{-3x^2+15x-8}{2}$

2 Approximation

Etant donnés n points mesurés, on cherche à déterminer une fonction $f(x)$ qui dépend des paramètres $a_j, j = 0, \ldots, m$ de sorte que la distance moyenne entre les n points et la courbe de cette fonction soit minimum.

2.1 Méthodes des moindres carrés

Définition
On appelle résidu r_i la distance qui sépare un point mesuré (x_i, y_i) du point $(x_i, f(x_i))$ sur la courbe représentative de f. Le résidu est exprimé par l'équation suivante :

$$r_i = d((y_i, f(x_i)) = |y_i - f(x_i)|$$

La distance moyenne est la somme des carrés des résidus

$$S = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 = \sum_{i=1}^{n} |y_i - f(x_i)|^2$$

Pour minimiser cette distance on utilise les dérivées partielles $\frac{\partial S}{\partial a_j}$, $\forall j = 0, \ldots, m$.

2.1.1 Cas d'une fonction polynômiale

On pose $f(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$. La somme des carrés des résidus est $S = \sum_{i=0}^{n-1} (y_i - (a_0 + a_1 x_i + \cdots + a_m x_i^m))^2$ et l'annulation de ses dérivées partielles $\frac{\partial S}{\partial a_j}, \forall j = 0, \ldots, m$ donne :

$$\sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{i=0}^{n-1} x_i^{j+k} = \sum_{i=0}^{n-1} y_i x_i^j, \forall j = 0, \ldots, m$$

On obtient de nouveau un système d'équations linéaires qu'on peut réecrire sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n-1} x_i^0 & \sum_{i=0}^{n-1} x_i^1 & \ldots & \sum_{i=0}^{n-1} x_i^m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum_{i=0}^{n-1} x_i^m & \sum_{i=0}^{n-1} x_i^{m+1} & \ldots & \sum_{i=0}^{n-1} x_i^{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \ldots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n-1} y_i x_i^0 \\ \ldots \\ \sum_{i=0}^{n-1} y_i x_i^m \end{bmatrix}$$

2.2 Cas particulier de la régression linéaire

L'approximation se fait dans ce cas par une droite représentative du polynôme de degré 1, $f(x) = a_0 + a_1 x$. Le système d'équations linéaires s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n-1} x_i^0 & \sum_{i=0}^{n-1} x_i^1 \\ \sum_{i=0}^{n-1} x_i^1 & \sum_{i=0}^{n-1} x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n-1} y_i x_i^0 \\ \sum_{i=0}^{n-1} y_i x_i^1 \end{bmatrix}$$

Sa résolution donne les coefficients du polynôme :

$$a_1 = \frac{\overline{yx} - \bar{x}\bar{y}}{\bar{x}^2 - (\bar{x})^2}$$

$$a_0 = \frac{\bar{y}\bar{x}^2 - \bar{x}\overline{yx}}{\bar{x}^2 - (\bar{x})^2}$$

où $\bar{x} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} x_i^1}{n}$, $\overline{yx} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} x_i y_i}{n}$, $\bar{y} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} y_i}{n}$;
$\bar{x}^2 = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} x_i^2}{n}$