

Application en Ingénierie et Programmation Numérique

"Rendu I - Méthodes Directes"

VILLEDIEU Maxance et BESQUEUT Corentin

1 octobre 2023

Table des matières

Chapitre I

Résolution de systèmes linéaires par des Méthodes Directes : Méthode de Gauss

Dans le cadre de ce premier TP, nous devons implémenter l'algorithme du *Pivot de Gauss* en utilisant le langage de programmation C.

Afin de rendre ce document plus compréhensible et lisible, nous estimons que la présence de nos codes sources en clair est nécessaire.

I.1 Détail de l'algorithme

Soient deux matrices $A \in \mathcal{M}_{m,m}$ et $b \in \mathcal{M}_{m,1}$.
L'algorithme de Gauss se décrit ainsi :

```
Pour  $k = 1, \dots, n - 1$  Faire :  
    Pour  $i = k + 1, \dots, n$  Faire :  
        
$$\alpha_i^{(k)} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$$
  
        Pour  $j = k, \dots, n$  Faire :  
            
$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \alpha_i^{(k)} a_{kj}^{(k)}$$
  
        FIN Pour  $j$   
        
$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \alpha_i^{(k)} b_k^{(k)}$$
  
    FIN Pour  $i$   
FIN Pour  $k$ 
```

Une fois la matrice échelonnée par cet algorithme, on appliquera la formule suivante pour trouver les solutions du système :

$x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}}$
 et

$$\forall i = n-1, \dots, 1, x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1+i}^n a_{ij} x_j \right)$$

La complexité temporelle de cet algorithme est cubique soit $O(n^3)$ avec une complexité exacte de $\frac{2n^3}{3}$. Pour l'implémentation de cet algorithme, nous allons présenter deux façons de le conceptualiser avec une comparaison algorithmique des deux programmes.

I.2 Le pivot de Gauss en pratique

I.2.1 De manière générale

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,m}$ et $B \in \mathcal{M}_{m,1}$ et x la matrice des inconnues.
 Considérons alors le système suivant $Ax = b$.
 Ce système peut être représenté sous la forme d'une matrice augmentée M tel que :

$$M = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & \dots & a_{1m} & & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} & & b_m \end{array} \right)$$

Après exécution du pivot de Gauss, M devient

$$M = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} & b'_1 \\ 0 & 1 & a'_{23} & \dots & a'_{2m} & b'_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \vdots & b'_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & b'_m \end{array} \right)$$

Une fois que tous les pivots sont placés, il suffira de reconstituer le système et de le remonter afin de déterminer les inconnues comme suit :

$$\text{Soit } A' = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & a'_{12} & a'_{13} & \dots & a'_{1m} \\ 0 & 1 & a'_{23} & \dots & a'_{2m} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{array} \right) \text{ et } b = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ \vdots \\ b'_m \end{pmatrix}$$

alors pour $A'x = b$ on a donc $x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}}$ et $x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1+i}^n a_{ij} x_j \right), \forall i = n-1, \dots, 1$.

Nous remarquerons que l'implémentation du pivot de Gauss ne nécessitera pas de mettre nos pivots à
1

I.2.2 Exercice

Résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

puis la matrice augmentée $(A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$

Commençons par échelonner la matrice augmentée à l'aide du pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{-(L_3+2L_1) \rightarrow L_3 \\ L_2-L_1 \rightarrow L_2}]{L_2-L_1 \rightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{L_3-L_2}{4} \rightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Maintenant que notre matrice augmentée est échelonnée, nous pouvons déterminer les inconnues du système par substitution (en partant du bas) :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{L_2+L_3 \rightarrow L_2 \\ L_1-2L_3 \rightarrow L_1}]{L_2+L_3 \rightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1-L_2 \rightarrow L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Nous avons maintenant $A = I_3$ et donc nous pouvons remplacer dans le système $AX = B$, A par I_3 , ce qui nous donne :

$$AX = B \iff I_3X = B \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Nous avons alors notre couple solution du système, qui est :

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases} \quad (\text{I.2})$$

I.3 Implémentation de l'algorithme de Gauss en passant par le système d'équations linéaires

Dans cette partie, vous trouverez quelques commentaires sur mon implémentation de l'élimination de Gauss, ainsi que le code de l'algorithme décrit en ?? . Il est à noter que cette première implémentation ne recourt pas à l'utilisation de la matrice augmentée. En effet, le programme fonctionne directement avec le système d'équations linéaires $Ax = B$. Vous trouverez également le code de la fonction qui, à un système matriciel échelonné, retourne un vecteur solution du système.

I.3.1 Commentaires fonctionnels

Fonctions usuelles de manipulation de matrices

Ce code implémente diverses fonctions pour travailler avec des matrices à coefficients en nombre flottants.

- La fonction ***createMatrix*** alloue dynamiquement de la mémoire pour créer une matrice de nombres flottants avec un nombre spécifié de lignes et de colonnes.
- La fonction ***printMatrix*** affiche les éléments d'une matrice de nombres flottants.
- La fonction ***freeMatrix*** libère la mémoire allouée pour une matrice de nombres flottants.
- La fonction ***completeMatrix*** permet à l'utilisateur de saisir des valeurs pour remplir les éléments d'une matrice de nombres flottants.
- La fonction ***generateB*** génère un vecteur colonne B en fonction de la somme des éléments de chaque ligne de la matrice A .

Fonctions résolvant notre système linéaire $Ax = B$ à l'aide de l'algorithme de Gauss

Dans le cadre de notre résolution de systèmes d'équations linéaires, deux fonctions jouent un rôle clef dans ce code : la fonction ***gauss*** et la fonction ***resolution***.

- La fonction ***gauss*** joue un rôle important dans la préparation de la résolution de notre système d'équations linéaires. En effectuant l'élimination de Gauss sur la matrice A , elle la transforme en une matrice triangulaire supérieure. Cela signifie que les éléments sous la diagonale principale de la matrice deviennent tous des zéros, simplifiant ainsi la résolution du système. De plus, la fonction met également à jour la matrice B en conséquence, garantissant que notre système $Ax = B$ reste équilibré.
- La fonction ***resolution***, quant à elle, prend en charge la résolution effective du système linéaire une fois que la matrice A a été triangulée par la fonction ***gauss***. Elle utilise la méthode de substitution pour calculer la solution et stocke le résultat dans le vecteur X . Cette étape finale permet d'obtenir les valeurs des variables inconnues du système, fournissant ainsi la solution recherchée pour le problème initial.

En combinant ces deux fonctions avec celles sus-citées en ?? , le code réalise un processus complet de résolution de systèmes d'équations linéaires de manière efficace et précise (aux erreurs d'arrondies près).

I.3.2 Code source

Puisque nous sommes contraints de minimiser la présence de code dans ce rapport, nous ne présenterons pas ici les fonctions usuelles de manipulations de matrices suivantes : ***createMatrix***, ***printMatrix***, ***freeMatrix***, ***completeMatrix***, ***generateB***.

0	/*
1	*PERFORM GAUSSIAN ELIMINATION ON A $Ax=B$ MATRIX SYSTEM OF LINEAR EQUATIONS

```

2  /*
3
4  void gauss(float** matA, float** matb, int size){
5      for(int k=0; k<size-1; k++){
6          for(int i=k+1; i<size; i++){
7              float alpha=matA[i][k]/matA[k][k];
8              for(int j=k; j<size; j++){
9                  matA[i][j]=matA[i][j]-alpha*matA[k][j];
10             }
11             matb[i][0]=matb[i][0]-alpha*matb[k][0];
12         }
13     }
14 }
15
16 /*
17 *SOLVE A MATRIX SYSTEM OF LINEAR EQUATIONS USING BACKWARD SUBSTITUTION
18 */
19 void resolution(float** matA, float** matb, float** matx, int size){
20     matx[size-1][0]=matb[size-1][0]/matA[size-1][size-1];
21     for (int i=size-2; i>=0; i--){
22         float sum=0;
23         for(int j=i+1; j<size; j++){
24             sum+=matA[i][j]*matx[j][0];
25         }
26         matx[i][0]=(1/matA[i][i])*(matb[i][0]-sum);
27     }
28 }

```

I.3.3 Interactions Utilisateur/Console

Entrées utilisateur

En premier lieu dans notre programme, nous avons besoin de spécifier le système $Ax = B$ à l'ordinateur. Pour ce faire, nous allons dans l'ordre :

1. Allouer une matrice A en mémoire. Cette matrice verra sa taille définie par la première entrée utilisateur du programme (nous demanderons consécutivement le nombre de lignes, puis le nombre de colonnes de la matrice).
2. Définir les coefficients de la matrice A . Il s'agira de la deuxième entrée utilisateur de notre programme.
Par définition de notre fonction *completeMatrix*, nous remplirons la matrice dans l'ordre suivant :
 $a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,n}$, puis $a_{2,1}, \dots, a_{2,n}$, jusque $a_{n,1}, \dots, a_{n,n}$
3. Allouer une matrice B en mémoire. À noter que la taille de B est définie automatiquement en fonction de la taille de A . Nous avons $A \in \mathcal{M}_{n,p} \Rightarrow B \in \mathcal{M}_{n,1}$.
4. Définir les coefficients de la matrice B . Chaque coefficient prendra la valeur de la somme des éléments de la ligne respective de la matrice A .
Nous avons donc :
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}, \forall i \in \{1, n\}, b_{i,1} = \sum_{j=1}^p a_{i,j}$.
5. Allouer une matrice X en mémoire. Cette matrice aura la même taille que la matrice B . Ces coefficients ne seront pas définis pour le moment.

En guise d'exemple, le système matriciel $AX = B$ suivant :

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 7 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (\text{I.3})$$

est représenté par l'entrée utilisateur :

Listing I.1 – User Input

```

0 Row count of matrix A : 3
1
2 Column count of matrix A : 3
3
4             FILL IN THE VALUE OF MATRIX A
5
6 Value for a_1,1: 3
7 Value for a_1,2: 0
8 Value for a_1,3: 4
9 Value for a_2,1: 7
10 Value for a_2,2: 4
11 Value for a_2,3: 2
12 Value for a_3,1: -1
13 Value for a_3,2: 1
14 Value for a_3,3: 2

```

Une fois toutes les matrices initialisées et complétées, nous pouvons attaquer la résolution du système par la triangularisation du système. Ceci fait, nous résolverons le système obtenu pour obtenir notre vecteur X solution.

Affichage Console

Dès lors le système $AX = B$ connu par l'ordinateur, ce dernier peut retrouver les valeurs de la matrice X . Voici l'affichage produit par notre programme en console :

Listing I.2 – Console Display of the Gauss elimination for the AX

```

0             A matrix
1
2 3.000000    0.000000    4.000000
3 7.000000    4.000000    2.000000
4 -1.000000    1.000000    2.000000
5
6             B matrix
7
8 7.000000
9 13.000000
10 2.000000
11
12             TRIANGULARIZATION
13             A Matrix
14
15 3.000000    0.000000    4.000000
16 0.000000    4.000000    -7.333333
17 0.000000    0.000000    5.166667
18
19             B Matrix
20
21 7.000000
22 -3.333332

```



```

23 5.166667
24
25          SOLVING
26          SOLUTION VECTOR X
27
28 1.000000
29 1.000000
30 1.000000

```

Il est à repérer que le programme affiche dans cet ordre :

- La **Matrice** A
 - La **Matrice** B
 - La **Matrice** A une fois triangulée supérieure
 - La **Matrice** B une fois mise à jour en conséquence pour que le système reste équilibré
 - La **Matrice** X solution du système
- Remarque : le temps d'exécution de ce programme a été de 0.000237 secondes

I.3.4 Exemples d'exécution

Soient les matrices suivantes données dans le TP :

$$A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -6 \\ -4 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & -9 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & -4 \\ -7 & -3 & 8 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -6 \\ -4 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & -9 \end{pmatrix}$$

On obtient respectivement les résultats suivants :

Listing I.3 – $A_2X = B$ results

```

0          A matrix
1
2 -3.000000    3.000000   -6.000000
3 -4.000000    7.000000    8.000000
4  5.000000    7.000000   -9.000000
5
6          B matrix
7
8 -6.000000
9 11.000000
10 3.000000
11
12          TRIANGULARIZATION
13          A Matrix
14
15 -3.000000    3.000000   -6.000000
16  0.000000    3.000000   16.000000
17  0.000000    0.000000  -83.000000
18
19          B Matrix
20
21 -6.000000
22 19.000000
23 -83.000000
24
25          SOLVING
26          SOLUTION VECTOR X
27
28 1.000000
29 1.000000
30 1.000000

```

```

31
32 Temps d'execution : 0.000250 secondes

```

Listing I.4 – $A_4X = B$ results

```

0      A matrix
1
2  7.000000    6.000000    9.000000
3  4.000000    5.000000   -4.000000
4 -7.000000   -3.000000    8.000000
5
6      B matrix
7
8  22.000000
9  5.000000
10 -2.000000
11
12      TRIANGULARIZATION
13      A Matrix
14
15  7.000000    6.000000    9.000000
16  0.000000    1.571428   -9.142858
17  0.000000    0.000000   34.454552
18
19      B Matrix
20
21  22.000000
22 -7.571429
23 34.454548
24
25      SOLVING
26      SOLUTION VECTOR X
27
28  1.000001
29  0.999999
30  1.000000
31
32 Temps d'execution : 0.000231 secondes

```

Listing I.5 – $A_6X = B$ results

```

0      A matrix
1
2 -3.000000    3.000000   -6.000000
3 -4.000000    7.000000    8.000000
4  5.000000    7.000000   -9.000000
5
6      B matrix
7
8 -6.000000
9 11.000000
10 3.000000
11
12      TRIANGULARIZATION
13      A Matrix
14
15 -3.000000    3.000000   -6.000000
16  0.000000    3.000000   16.000000
17  0.000000    0.000000  -83.000000
18
19      B Matrix
20
21 -6.000000
22 19.000000

```

```
23  -83.000000
24
25      SOLVING
26      SOLUTION VECTOR X
27
28  1.000000
29  1.000000
30  1.000000
31
32  Temps d'exécution : 0.000246 secondes
```

Nous remarquerons que sur le calcul de A_4 , nous tombons sur des valeurs extrêmement proches de 1. Ceci est provoqué à cause des erreurs d'arrondis provoquées par l'encodage des nombres flottants.

I.4 Pivot de Gauss avec matrice augmentée

I.4.1 Code source

Voici le code source de mon implémentation du pivot de Gauss via le passage par la matrice augmentée.

C'est-à-dire que dans mon implémentation, on fera usage de la concaténation des matrices.

```

0  /*
1  * BUILD AUGMENTED MATRIX
2  */
3  float **AugmentedMatrix(float **M1, float **M2, int m, int n) {
4      float **A = allocate(m, m + 1);
5      for (int i = 0; i < m; i++) {
6          for (int j = 0; j < n + 1; j++) {
7              (j != n) ? (A[i][j] = M1[i][j]) : (A[i][j] = M2[i][0]);
8          }
9      }
10     return A;
11 }
12 /*
13 * PERFORM GAUSS ALGORITHM ONLY ON AUGMENTED MATRIX
14 */
15 void gauss(float **A, int m, int p) {
16     if (m != p) {
17         puts("La matrice doit etre carree !");
18         return;
19     }
20     for (int k = 0; k <= m - 1; k++) {
21         for (int i = k + 1; i < m; i++) {
22             float pivot = A[i][k] / A[k][k];
23             for (int j = k; j <= m; j++) {
24                 A[i][j] = A[i][j] - pivot * A[k][j];
25             }
26         }
27     }
28 }
29 /*
30 * DETERMINE ALL UNKNOWN VARIABLES
31 */
32 float *findSolutions(float **A, int m) {
33     float *S = calloc(m, sizeof *S);
34     S[m - 1] = A[m - 1][m] / A[m - 1][m - 1];
35     for (int i = m - 1; i >= 0; i--) {
36         S[i] = A[i][m];
37         for (int j = i + 1; j < m; j++) {
38             S[i] -= A[i][j] * S[j];
39         }
40         S[i] = S[i] / A[i][i];
41     }
42     return S;
43 }
```

I.4.2 Commentaires du code

Mon implémentation utilise strictement l'algorithme de Gauss rappelé précédemment avec seulement quelques changements d'indices puisque au lieu de travailler sur une matrice carrée et un vecteur colonne, mon programme utilise une matrice augmentée ayant m lignes et $m + 1$ colonnes, $m \in \mathbb{N}^*$.

Détail des fonctions non conventionnelles :

Comme mentionné précédemment, je ne détaillerai pas les fonctions `gauss()` et `findSolutions()` puisque ces fonctions permettent seulement d'une part d'implémenter l'algorithme de Gauss et d'autre part à "remonter" la matrice échelonnée afin de récupérer les valeurs des inconnus.

-float **AugmentedMatrix(float **M1, float **M2, int m, int n) : cette fonction permet de créer une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,m+1}$ à partir de la concaténation de $M1 \in \mathcal{M}_{mm}$ et $M2 \in \mathcal{M}_{m,1}$. Soient a_{ij} les coefficients peuplant A , b_{ij} les coefficients peuplant $M1$ et c_{i0} les coefficients peuplant $M2$.

On obtient alors $a_{ij} = b_{ij} \forall i \in \mathbb{N}_m, \forall j \in \mathbb{N}_m$ et $a_{ij} = c_{i0}$ si $j = m + 1$.

Cette fonction renvoie alors A , la matrice de flottants créée dynamiquement.

Les fonctions *fillM()*, *printMatrix()*, *freeAll()* et *multiplication()* et *allocate()* sont quatre fonctions utilitaires qui permettent respectivement : de remplir une matrice, d'afficher convenablement une matrice, de libérer les matrices en mémoires, de définir la multiplication matricielle et enfin d'allouer de la mémoire pour déclarer les matrices (avec quelques légères sécurités permettant d'être sûr que les matrices sont bieninstanciées convenablement).

I.4.3 Inputs / Outputs

Mon programme demande d'abord 4 entiers m, p, n, q qui correspondent aux dimensions de la première matrice $A \in \mathcal{M}_{mp}$ et de la seconde matrice $X \in \mathcal{M}_{nq}$. Le but étant de résoudre le système $AX = b$, nous initialiserons X à 1. Ce choix de valeur permettra de contrôler la validité du programme, ainsi à la fin de ce dernier, si $\forall x_i \neq 1, \forall i \in \mathbb{N}_n$, on pourra affirmer que le programme est faux.

Sur les $m \times p$ prochaines lignes, le programme demande les coefficients de A .

Sur les $n \times q$ prochaines lignes, le programme demandera les coefficients du vecteur colonne X , que l'utilisateur initialisera à 1.

On peut alors automatiser les entrées en utilisant des fichiers.

Ainsi les matrices : $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 7 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

sont représentés par ce fichier d'entrées :

Listing I.6 – input.txt

```
0 3 3
1 3 1
2 3 0 4
3 7 4 2
4 -1 1 2
5 1 1 1
```

Pour ce qui est des résultats produits par mon programme, une fois injecté dans un fichier texte, une output "type" ressemble à ceci.

Listing I.7 – Gauss elimination with M and X matrix

```
0 PRINTING MATRIX FROM: 0x556d938672c0 LOCATION :
1 3.000000 0.000000 4.000000
2 7.000000 4.000000 2.000000
3 -1.000000 1.000000 2.000000
4 PRINTING MATRIX FROM: 0x556d93867340 LOCATION :
5 1.000000
6 1.000000
7 1.000000
8 PRINTING MATRIX FROM: 0x556d938673c0 LOCATION :
9 7.000000
10 13.000000
11 2.000000
12 PRINTING MATRIX FROM: 0x556d93867440 LOCATION :
13 3.000000 0.000000 4.000000 7.000000
14 0.000000 4.000000 -7.333333 -3.333332
15 0.000000 0.000000 5.166667 5.166667
16 SOLUTIONS
17 x0 = 1.000000
```

```

18 | x1 = 1.000000
19 | x2 = 1.000000
20 | RUNTIME: 0.000002 seconds

```

On remarquera que le programme affiche dans cet ordre :

- **La Matrice A**
- **La Matrice X**
- **La Matrice B trouvée avec les valeur de X**
- **La Matrice augmentée en triangle supérieur**
- **Les solutions**
- **Un timer permettant de contrôler le temps d'exécution approximatif de mon programme**

I.4.4 Exemples d'exécutions

$$\text{Soient } A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -6 \\ -4 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & -9 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & -4 \\ -7 & -3 & 8 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -6 \\ -4 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & -9 \end{pmatrix}$$

On obtient respectivement ces résultats :

Listing I.8 – Matrix 2 results

```

0 | PRINTING MATRIX FROM: 0x55f604fb32c0 LOCATION :
1 | -3.000000 3.000000 -6.000000
2 | -4.000000 7.000000 8.000000
3 | 5.000000 7.000000 -9.000000
4 | PRINTING MATRIX FROM: 0x55f604fb3340 LOCATION :
5 | 1.000000
6 | 1.000000
7 | 1.000000
8 | PRINTING MATRIX FROM: 0x55f604fb33c0 LOCATION :
9 | -6.000000
10 | 11.000000
11 | 3.000000
12 | PRINTING MATRIX FROM: 0x55f604fb3440 LOCATION :
13 | -3.000000 3.000000 -6.000000 -6.000000
14 | 0.000000 3.000000 16.000000 19.000000
15 | 0.000000 0.000000 -83.000000 -83.000000
16 | SOLUTIONS
17 | x0 = 1.000000
18 | x1 = 1.000000
19 | x2 = 1.000000
20 | RUNTIME: 0.000002 seconds

```

Listing I.9 – Matrix 4 results

```

0 | PRINTING MATRIX FROM: 0x55f7afd662c0 LOCATION :
1 | 7.000000 6.000000 9.000000
2 | 4.000000 5.000000 -4.000000
3 | -7.000000 -3.000000 8.000000
4 | PRINTING MATRIX FROM: 0x55f7afd66340 LOCATION :
5 | 1.000000
6 | 1.000000
7 | 1.000000
8 | PRINTING MATRIX FROM: 0x55f7afd663c0 LOCATION :
9 | 22.000000
10 | 5.000000
11 | -2.000000
12 | PRINTING MATRIX FROM: 0x55f7afd66440 LOCATION :
13 | 7.000000 6.000000 9.000000 22.000000
14 | 0.000000 1.571428 -9.142858 -7.571429
15 | 0.000000 0.000000 34.454552 34.454548

```

```

16 SOLUTIONS
17 x0 = 1.000001
18 x1 = 0.999999
19 x2 = 1.000000
20 RUNTIME: 0.000002 seconds

```

Listing I.10 – Matrix 6 results

```

0 PRINTING MATRIX FROM: 0x557fdaa552c0 LOCATION :
1 3.000000 -1.000000 0.000000
2 0.000000 3.000000 -1.000000
3 0.000000 -2.000000 3.000000
4 PRINTING MATRIX FROM: 0x557fdaa55340 LOCATION :
5 1.000000
6 1.000000
7 1.000000
8 PRINTING MATRIX FROM: 0x557fdaa553c0 LOCATION :
9 2.000000
10 2.000000
11 1.000000
12 PRINTING MATRIX FROM: 0x557fdaa55440 LOCATION :
13 3.000000 -1.000000 0.000000 2.000000
14 0.000000 3.000000 -1.000000 2.000000
15 0.000000 0.000000 2.333333 2.333333
16 SOLUTIONS
17 x0 = 1.000000
18 x1 = 1.000000
19 x2 = 1.000000
20 RUNTIME: 0.000002 seconds

```

On apercevra que sur le calcul de A_4 , on obtient sur des valeurs extrêmement proches de 1. Ceci est provoqué par des erreurs d'arrondis issus par l'encodage des nombres flottants.

Nous remarquerons que l'implémentation utilisant la matrice augmentée est sensiblement meilleure en terme d'efficacité. En effet, le temps d'exécution est multiplié par 100 sur la première implémentation.

Chapitre II

Résolution de systèmes linéaires par des Méthodes Itératives

report [french]babel [T1]fontenc [utf8]inputenc mathtools amssymb hyperref float amsthm listings
geometry setspace graphicx fancyhdr subcaption cleveref

Définition

hmargin=3cm,vmargin=2.5cm

II.1 Méthode de Gauss-Seidel

II.1.1 Introduction à la méthode de Gauss-Seidel

La méthode de Gauss-Seidel est une méthode itérative pour résoudre les systèmes linéaires de la forme $Ax = b$, où A est une matrice carrée d'ordre n et x, b sont des vecteurs de \mathbb{R}^n . C'est une méthode qui génère une suite qui converge vers la solution de ce système lorsque celle-ci en a une et lorsque les conditions de convergence suivantes sont satisfaites (quels que soient le vecteur b et le point initial x^0) :

- Si la matrice A est symétrique définie positive,
- Si la matrice A est à diagonale strictement dominante.

II.1.2 Mise en place des matrices pour la méthode de Gauss-Seidel

Soit $Ax = b$ le système linéaire à résoudre, où $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ et $b \in \mathcal{M}_{n,1}$. On cherche $x \in \mathcal{M}_{n,1}$ solution du système. Dans un premier temps, on va écrire A sous la forme $A = D - E - F$ où D est une matrice diagonale, E est une matrice triangulaire inférieure, et F est une matrice triangulaire supérieure.

On peut alors écrire :

$$Ax = b \quad (\text{II.1})$$

$$\Leftrightarrow (D - E - F)x = b \quad (\text{II.2})$$

$$\Leftrightarrow Dx = b - (E + F)x \quad (\text{II.3})$$

$$\Leftrightarrow x = D^{-1}[b - (E + F)x] \quad (\text{II.4})$$

On définit ensuite une suite de vecteurs (x^k) en choisissant un vecteur x^0 et par la formule de récurrence :

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{i,i}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{i,j} x_j^k \right) \quad (\text{II.5})$$

II.1.3 Algorithme

Pour résoudre un système $Ax = b$, avec $A \in \mathcal{M}_n$ et $b \in \mathcal{M}_{n,1}$, on s'appuie sur l'algorithme suivant en posant :

- un vecteur initial $x^{(0)}$ choisi au préalable,
- l'erreur à l'itération $k=0$ calculée par $\varepsilon^{(0)} = \|Ax^{(0)} - b\|$,
- une variable k qui sera notre compteur d'itération.

0	$x^{(0)} = x_0 \in \mathcal{M}_{n,1}$
1	$\varepsilon^{(0)} = \varepsilon$ (erreur)
2	$k = 0$
3	Tant Que $(\varepsilon^{(k)} > \varepsilon)$ faire :
4	Pour $i = 1$ à n :
5	$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{i,i}} \left[b_i - \left(\sum_{j=i+1}^n a_{i,j} x_j^{(k)} + \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j^{(k+1)} \right) \right]$ pour $i = 1, \dots, n$
6	$\varepsilon^{(k+1)} = \ Ax^{(k+1)} - b\ $
7	$k = k + 1$
8	Fin Tant Que

II.1.4 Résolution manuelle

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

Calculons le vecteur $x^{(1)}$ (vecteur x trouvé après 1 itération de l'algorithme) solution du système $Ax = b$,

en prenant comme point initial $x^{(0)} = (0, 0, 0)$:

Résolution par le calcul itératif

Dans cette sous-partie, nous résolverons le système de la même manière que le fait l'algorithme sus-cité.

Pour obtenir le vecteur $x^{(1)}$ (obtenu à l'itération $k = 1$), il nous faut obtenir $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}$ par la formule suivante :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{i,i}} \left[b_i - \left(\sum_{j=i+1}^n a_{i,j} x_j^{(k)} + \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j^{(k+1)} \right) \right] \text{ pour } i = 1, \dots, 3$$

Pour $i = 1$:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{a_{1,1}} \left[b_1 - \left(\sum_{j=2}^3 a_{1,j} x_j^{(0)} + \sum_{j=1}^0 a_{1,j} x_j^{(1)} \right) \right] \quad (\text{II.6})$$

$$= \frac{1}{1} \left[2 - \left(a_{1,2} x_2^{(0)} + a_{1,3} x_3^{(0)} + 0 \right) \right] \quad (\text{II.7})$$

$$= 2 - 2 \times 0 - 3 \times 0 = 2 \quad (\text{II.8})$$

Pour $i = 2$:

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{a_{2,2}} \left[b_2 - \left(\sum_{j=3}^3 a_{2,j} x_j^{(0)} + \sum_{j=1}^1 a_{2,j} x_j^{(1)} \right) \right] \quad (\text{II.9})$$

$$= \frac{1}{3} \left[2 - \left(a_{2,3} x_3^{(0)} + a_{2,1} x_1^{(1)} \right) \right] \quad (\text{II.10})$$

$$= \frac{1}{3} \left(2 - 3 \times 0 - 1 \times 2 \right) \quad (\text{II.11})$$

$$= \frac{1}{3} \times 0 = 0 \quad (\text{II.12})$$

Pour $i = 3$:

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{a_{3,3}} \left[b_3 - \left(\sum_{j=4}^3 a_{3,j} x_j^{(0)} + \sum_{j=1}^2 a_{3,j} x_j^{(1)} \right) \right] \quad (\text{II.13})$$

$$= \frac{1}{8} \left[8 - \left(0 + a_{3,1} x_1^{(1)} + a_{3,2} x_2^{(1)} \right) \right] \quad (\text{II.14})$$

$$= \frac{1}{8} \left(8 - 3 \times 2 - 7 \times 0 \right) \quad (\text{II.15})$$

$$= \frac{1}{8} \times 2 = \frac{1}{4} \quad (\text{II.16})$$

Conclusion :

Nous avons $x_1^{(1)} = 2$, $x_2^{(1)} = 0$, $x_3^{(1)} = \frac{1}{4}$. Et donc, $x^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

Résolution par le calcul matriciel

Dans la section ??, nous avons vu que l'on pouvait décomposer la matrice A par une matrice diagonale D , une matrice triangulaire inférieure E , et une matrice triangulaire supérieure F . Ceci fait, nous pouvons obtenir le vecteur x par la formule suivante :

$$x^{(k+1)} = D^{-1} [b - (E + F)x^{(k)}]$$

Nous avons alors :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}}_D - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_E - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -3 & -7 & 0 \end{pmatrix}}_F$$

Nous obtenons alors :

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -3 & -7 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad (\text{II.17})$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \quad (\text{II.18})$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{II.19})$$

Remarque : Au fur et à mesure des itérations, le vecteur x donné par le calcul itératif effectué dans la partie ?? se rapproche de la solution donnée par le précédent calcul. Il est alors normal que le vecteur trouvé au bout de la première itération soit différent du vecteur trouvé ci-dessus.

II.1.5 Implémentation

Commentaires fonctionnels

Note : L'implémentation qui suit utilise exactement les mêmes fonctions usuelles de manipulation de matrice que l'implémentation de l'algorithme de Gauss décrit dans la section ?. De plus, dans cette implémentation, nous définirons une variable k qui sera notre compteur d'itération et qui permettra l'arrêt de notre code si la suite ne converge pas. Enfin, notre variable erreur ε sera mise à jour à chaque itération de la manière suivante :

$$\varepsilon^{(k)} = p^{(k)} = \text{Max}_{i=1,\dots,n} |\bar{x}_i - \tilde{x}_i^k|$$

Nous détaillerons dans cette section uniquement les fonctions dites "non-usuelles" qui vont nous servir pour l'implémentation de l'algorithme de Gauss-Seidel. Il s'agit ici de la fonction de mise à jour de notre variable erreur et de la fonction implémentant l'algorithme de Gauss-Seidel.

Fonction *majEpsilon* :

La fonction **majEpsilon** permet de mettre à jour la variable d'erreur ε lors de l'exécution de notre algorithme. Grâce au vecteur $x^{(k)}$ qui représente la solution actuelle de notre système d'équations, la fonction calcule la différence absolue entre chaque élément $x_i^{(k)}$ et 1. Cela permet de mesurer à quel point les valeurs actuelles se rapprochent de 1, qui est notre valeur cible pour les solutions convergentes. La fonction conserve le maximum de ces différences absolues en tant que mesure d'erreur afin de mettre à jour notre variable ε . Cela permet de contrôler la précision de l'algorithme et de décider quand il a convergé de manière satisfaisante vers la solution recherchée. La fonction **majEpsilon** joue donc un rôle dans la détermination du critère d'arrêt de l'algorithme. Voici son implémentation en C :

```

0 float majEpsilon(float** matXk, int row){
1     float maxforEps=0;
2     for(int i=0; i<row; i++){
3         float soustr=fabs(1-matXk[i][0]);
4         printf("%f\n", matXk[i][0]);
5         if (soustr>maxforEps){
6             maxforEps=soustr;
7         }
8     }
9     return maxforEps;
10 }
```

Fonction *gaussSeidel* :

La fonction **gaussSeidel** implémente l'algorithme de Gauss-Seidel tel que décrit précédemment dans la section ?. Par la programmation itérative, notre algorithme mettra à jour les solutions actuelles jusqu'à ce que l'erreur minimale définie soit atteinte ou que le nombre maximal d'itérations soit atteint. Voici son implémentation en C :

```

0  float** gaussSeidel(float **matA, float **matB, float **matXk, int row, int column,
1  int nbIterMax)
2  {
3  //CREATING OUR SOLUTION VECTOR AT ITERATION k
4  float **matXk1=createMatrix(row, 1);
5
6  //INITIALIZING OUR ERROR VARIABLE AND ITERATION COUNTER
7  float epsilon=majEpsilon(matXk, row);
8  int iter=0;
9
10 while ((epsilon>=pow(10,-6)) && (iter<nbIterMax)){
11     for(int i=0; i<row ; i++){
12         float sumF=0;
13         float sumE=0;
14
15         //CALCULATION OF F
16         for(int j=i+1; j<row ; j++){
17             sumF+=matA[i][j]*matXk[j][0];
18         }
19
20         //CALCULATION OF E
21         for(int j=0; j<i ; j++){
22             sumE+=matA[i][j]*matXk1[j][0];
23         }
24
25         //CALCULATION OF ELEMENT  $X_i^{(k)}$ 
26         matXk1[i][0]=(matB[i][0]-sumF-sumE)/matA[i][i];
27
28     }
29
30     //UPDATING OUR SOLUTION VECTOR
31     for(int k=0; k<row ; k++){
32         matXk[k][0]=matXk1[k][0];
33     }
34
35     //UPDATING OUR ERROR VARIABLE AND ITERATION COUNTER
36     epsilon=majEpsilon(matXk, row);
37     iter+=1;
38 }
39
40 //RETURN THE SOLUTION VECTOR
41 return matXk;
42 }

```

II.1.6 Exemples d'exécution

Soient les matrices A données dans le TP et dans l'annexe du document (section ??). En résolvant le système $Ax = b$ en question, nous obtenons respectivement les résultats suivants :

Listing II.1 – $A_1X = B$ results

```

0  A matrix
1  3.000000  0.000000  4.000000
2  7.000000  4.000000  2.000000
3  -1.000000  1.000000  2.000000
4  B matrix
5  7.000000
6  13.000000
7  2.000000
8  SOLVING
9  SOLUTION VECTOR X
10 -nan

```

```

11  -nan
12  -nan
13  Temps d'exécution : 0.000515 secondes

```

Listing II.2 – $A_2X = B$ results

```

0      A matrix
1  -3.000000  3.000000  -6.000000
2  -4.000000  7.000000  8.000000
3  5.000000  7.000000  -9.000000
4      B matrix
5  -6.000000
6  11.000000
7  3.000000
8
9      SOLVING
10     SOLUTION VECTOR X
11  -nan
12  -nan
13  -nan
13  Temps d'exécution : 0.000419 secondes

```

Listing II.3 – $A_3X = B$ results

```

0      A matrix
1  4.000000  1.000000  1.000000
2  2.000000 -9.000000  0.000000
3  0.000000 -8.000000  6.000000
4      B matrix
5  6.000000
6 -7.000000
7 -2.000000
8
9      SOLVING
10     SOLUTION VECTOR X
11  1.000000
12  1.000000
13  1.000000
13  Temps d'exécution : 0.000399 secondes

```

Listing II.4 – $A_4X = B$ results

```

0      A matrix
1  7.000000  6.000000  9.000000
2  4.000000  5.000000 -4.000000
3 -7.000000 -3.000000  8.000000
4      B matrix
5  22.000000
6  5.000000
7 -2.000000
8
9      SOLVING
10     SOLUTION VECTOR X
11  1.000000
12  0.999999
13  1.000000
13  Temps d'exécution : 0.000408 secondes

```

Listing II.5 – $A_5X = B$ results

```

0      A matrix
1  1.000000  0.500000  0.250000
2  0.500000  1.000000  0.000000
3  0.250000  0.000000  1.000000
4      B matrix
5  1.750000
6  1.500000

```

```

7 1.250000
8
9 SOLVING
10 SOLUTION VECTOR X
11 1.000001
12 1.000000
13 1.000000
13 Temps d'exécution : 0.000431 secondes

```

Listing II.6 – $A_6X = B$ results

```

0 A matrix
1 1.000000 0.500000 0.250000 0.125000 0.062500 0.031250
2 0.500000 1.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000
3 0.250000 0.000000 1.000000 0.000000 0.000000 0.000000
4 0.125000 0.000000 0.000000 1.000000 0.000000 0.000000
5 0.062500 0.000000 0.000000 0.000000 1.000000 0.000000
6 0.031250 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 1.000000
7 B matrix
8 1.968750
9 1.500000
10 1.250000
11 1.125000
12 1.062500
13 1.031250
14 SOLVING
15 SOLUTION VECTOR X
16 1.000001
17 1.000000
18 1.000000
19 1.000000
20 1.000000
21 1.000000
22 Temps d'exécution : 0.000467 secondes

```

Listing II.7 – $A_7X = B$ results

```

0 A matrix
1 1.000000 0.500000 0.250000 0.125000 0.062500 0.031250 0.015625 0.007812
2 0.500000 1.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000
3 0.250000 0.000000 1.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000
4 0.125000 0.000000 0.000000 1.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000
5 0.062500 0.000000 0.000000 0.000000 1.000000 0.000000 0.000000 0.000000
6 0.031250 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 1.000000 0.000000 0.000000
7 0.015625 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 1.000000 0.000000
8 0.007812 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 0.000000 1.000000
9 B matrix
10 1.992187
11 1.500000
12 1.250000
13 1.125000
14 1.062500
15 1.031250
16 1.015625
17 1.007812
18 SOLVING
19 SOLUTION VECTOR X
20 1.000001
21 1.000000
22 1.000000
23 1.000000
24 1.000000
25 1.000000
26 1.000000
27 1.000000
28 Temps d'exécution : 0.000526 secondes

```

Listing II.8 – $A_8X = B$ results

```

0 A matrix
1 1.000000 0.500000 0.250000 0.125000 0.062500 0.031250 0.015625 0.007812 0.003906 0.001953

```

```

2   0.500000  1.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000
3   0.250000  0.000000  1.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000
4   0.125000  0.000000  0.000000  1.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000
5   0.062500  0.000000  0.000000  0.000000  1.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000
6   0.031250  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  1.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000
7   0.015625  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  1.000000  0.000000  0.000000  0.000000
8   0.007812  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  1.000000  0.000000  0.000000
9   0.003906  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  1.000000  0.000000
10  0.001953  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  1.000000
11
12      B matrix
13  1.998046
14  1.500000
15  1.250000
16  1.125000
17  1.062500
18  1.031250
19  1.015625
20  1.007812
21  1.003906
22  1.001953
23
24      SOLVING
25      SOLUTION VECTOR X
26  1.000001
27  1.000000
28  1.000000
29  1.000000
30  1.000000
31  1.000000
32  1.000000
33  1.000000
34  Temps d'exécution : 0.000572 secondes

```

Listing II.9 – $A_9X = B$ results

```

0      A matrix
1   3.000000  -1.000000  0.000000
2   -2.000000  3.000000  -1.000000
3   0.000000  -2.000000  3.000000
4      B matrix
5   2.000000
6   0.000000
7   1.000000
8
9      SOLVING
10     SOLUTION VECTOR X
11  1.000000
12  0.999999
13  1.000000
14  Temps d'exécution : 0.000424 secondes

```

Listing II.10 – $A_{10}X = B$ results

```

0      A matrix
1   3.000000  -1.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000
2   -2.000000  3.000000  -1.000000  0.000000  0.000000  0.000000
3   0.000000  -2.000000  3.000000  -1.000000  0.000000  0.000000
4   0.000000  0.000000  -2.000000  3.000000  -1.000000  0.000000
5   0.000000  0.000000  0.000000  -2.000000  3.000000  -1.000000
6   0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  -2.000000  3.000000
7      B matrix
8   2.000000
9   0.000000
10  0.000000
11  0.000000
12  0.000000
13  1.000000
14
15     SOLVING
16     SOLUTION VECTOR X
17  1.000000
18  0.999999

```

```

18 0.999999
19 0.999999
20 0.999999
21 0.999999
22 Temps d'execution : 0.000376 secondes

```

Listing II.11 – $A_11X = B$ results

```

0      A matrix
1  3.000000  -1.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000
2  -2.000000  3.000000  -1.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000
3  0.000000  -2.000000  3.000000  -1.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000
4  0.000000  0.000000  -2.000000  3.000000  -1.000000  0.000000  0.000000  0.000000
5  0.000000  0.000000  0.000000  -2.000000  3.000000  -1.000000  0.000000  0.000000
6  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  -2.000000  3.000000  -1.000000  0.000000
7  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  -2.000000  3.000000  -1.000000
8  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  -2.000000  3.000000
9      B matrix
10 2.000000
11 0.000000
12 0.000000
13 0.000000
14 0.000000
15 0.000000
16 0.000000
17 1.000000
18
19      SOLVING
20      SOLUTION VECTOR X
21
22 1.000000
23 1.000000
24 1.000000
25 0.999999
26 0.999999
27 0.999999
28 0.999999
29 0.999999
30 Temps d'execution : 0.000587 secondes

```

Listing II.12 – $A_12X = B$ results

```

0      A matrix
1  3.000000  -1.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000
2  -2.000000  3.000000  -1.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000
3  0.000000  -2.000000  3.000000  -1.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000
4  0.000000  0.000000  -2.000000  3.000000  -1.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000
5  0.000000  0.000000  0.000000  -2.000000  3.000000  -1.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000
6  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  -2.000000  3.000000  -1.000000  0.000000  0.000000  0.000000
7  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  -2.000000  3.000000  -1.000000  0.000000  0.000000
8  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  -2.000000  3.000000  -1.000000  0.000000
9  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  -2.000000  3.000000  -1.000000
10 0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  0.000000  -2.000000  3.000000
11      B matrix
12 2.000000
13 0.000000
14 0.000000
15 0.000000
16 0.000000
17 0.000000
18 0.000000
19 0.000000
20 0.000000
21 1.000000
22
23      SOLVING
24      SOLUTION VECTOR X
25
26 1.000000
27 1.000000
28 1.000000
29 0.999999
30 0.999999
31 0.999999
32 0.999999
33 1.000000
34 Temps d'execution : 0.000439 secondes

```