0.1 Résolution de systèmes linéaires par des Méthodes Directes

Dans le cadre de ce premier TP, nous devions implémenter l'algorithme du *Pivot de Gauss* en utilisant le langage de programmation C.

0.1.1 Détail de l'algorithme

Soit A une matrice $\in \mathcal{M}_{m,m}$ $m \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathcal{M}_{m,1}$.
L'algorithme de Gauss se décrit ainsi:

Pour $k = 1, \ldots, n-1$ Faire:

Pour $i = k+1, \ldots, n$ Faire:

$$\alpha_i^{(k)} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$$

Pour $j = k, \ldots, n$ Faire:

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \alpha_i^{(k)} a_{kj}^{(k)}$$

FIN Pour j

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \alpha_i^{(k)} b_k^{(k)}$$

FIN Pour i

FIN Pour k

Après cette algorithme permettant l'échelonnage de la matrice, pour trouver les solutions du système, on appliquera la formule suivante:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{m,m}}$$

et

$$\forall i = n-1, \ldots, 1,\ x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1+i}^{n} a_{ij} x_j \right)$$

La complexité temporelle de cet algorithme est cubique soit $O(n^3)$ avec une compléxité exacte de $\frac{2n^3}{3}$.
Pour l'implémentation de cet algorithme, nous allons présenter deux façons de le conceptualiser avec une comparaison algorithmique des deux programmes.

0.1.2 Exemples

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,m}$ et $B \in \mathcal{M}_{m,1}$ et x la matrice des inconnues.
Considérons alors le Système suivant $Ax = b$.
Ce système peut-être représenter sous la forme d'une matrice augmentée M tel que:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & | & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} & | & b_m \end{pmatrix}$$

Après exécution du pivot de Gauss, M devient

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} & | & b_1^{'} \\ 0 & 1 & a_{23}^{'} & \dots & a_{2m}^{'} & | & b_2^{'} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \vdots & | & b_3^{'} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & | & b_m^{'} \end{pmatrix}$$

Une fois que tout les pivots sont placés, il suffira de reconstituer le système et de le remonter afin de determiner les inconnues comme suit:

Soit $A^{'} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ 0 & 1 & a_{23}^{'} & \dots & a_{2m}^{'} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} b_1^{'} \\ b_2^{'} \\ b_3^{'} \\ \vdots \\ b_m^{'} \end{pmatrix}$

alors pour $A^{'}x = b$ on a donc $x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1+i}^{n} a_{ij} x_j \right) \forall i = n-1, \dots, 1.$

0.1.3 Implémentation du pivot de Gauss sans matrice Augmentée

0.1.4 Implementation du pivot de Gauss avec matrice Augmentée