FONDAMENTI DI TEORIA DEGLI INSIEMI

Realizzate da Coraline Milani

Un insieme è un concetto primitivo, va benissimo dire che è una semplice "collezione di elementi" senza specificare né cosa sia un elemento né cosa sia effettivamente un insieme, così da ottenere una definizione molto astratta e generale su cui possiamo lavorare per costruire operatori e assiomi. In classe normalmente un'assioma viene visto semplicemente come un teorema "buttato lì" che è vero e basta, però la matematica è una costruzione intelletuale e c'è un motivo per cui qualcosa viene considerato vero e qualcosa no, tenetelo bene a mente, questo modo di pensare vi aiuterà a capire meglio la logica della teoria degli insiemi e al tempo stesso comprendere almeno concettualmente cos'è una teoria assiomatica e perché e come viene costruita.
Una volta che abbiamo chiarito che un insieme è una collezione di elementi formalizziamo un concetto, quello di appartenenza, tramite il simbolo $\in$, scriveremo quindi la preposizione "un elemento a appertiene ad un insieme K" con la seguente notazione $a \in K$. Una volta introdotta questa notazione possiamo costruire i nostri operatori tra insiemi sfruttando il linguaggio formale della logica del primo ordine.

- L'*unione* tra due insiemi A e B è un insieme che contiente tutti gli elementi di A e tutti quelli di B. $x \in A \cup B \iff x \in A \vee x \in B$.
- L'*intersezione* tra due insiemi A e B è un insieme che contiene gli elementi comuni tra A e B. $x \in A \cap B \iff x \in A \wedge x \in B$.
- Due insiemi A e B sono uguali quando hanno gli stessi elementi.
  $A = B \iff x \in A \implies x \in B$.
- Un *sottoinsieme* è una parte di un insieme.
  $x \in A \subseteq B \iff x \in A \implies x \in B$.
- Denotiamo un *insieme vuoto* con il simbolo $\emptyset$.
- Possiamo definire un insieme tramite un predicato, stando attenti però al paradosso di Russel, quindi in poche parole definiamo un sottoinsieme tramite un predicato. $A = \{a \in B : P(a)\}$. Questo perché altrimenti verrebbe fuori un antinomia in certi casi, per esempio come dice il Paradosso di Russel potremo creare un insieme che contiene tutti gli insiemi che non contengono se stessi... L'insieme conterebbe se stesso oppure no? Se la risposta è no, allora la preposizione sarebbe falsa perché non contiene tutti gli insiemi che contengono se stessi, mentre se è sì la preposizione è comunque falsa perché conterebbe se stesso... Già.

Possiamo poi definire ulteriori concetti quali l'intersezione arbitraria e l'unione di una famiglia di insiemi considerando un insieme (eventualmente infinito) che come elementi ha degli insiemi. Per esempio $A = \{\{1,2\}, B\}$. Definiamo le due operazioni in questo modo:

- L'*intersezione arbitraria* di una famiglia di insiemi $\mathcal{Y}$ è un insieme che contiene tutti gli elementi in comune tra gli insiemi contenuti nella famiglia, quindi non dobbiamo considerare gli insiemi vuoti perché questa operazione abbia senso (per questo arbitraria nel nome).

$$x \in \bigcap \mathcal{Y} \iff \forall A \neq \emptyset \in \mathcal{Y} : x \in A$$

- L'*unione* di una famiglia di insiemi $\mathcal{Y}$ è un insieme che contiene tutti gli elementi della famiglia di insiemi, cioè l'unione tra tutti gli insiemi appartenenti alla famiglia.

$$x \in \bigcup \mathcal{Y} \iff \exists A \in \mathcal{Y} : x \in A$$

Attenzione a non confondere un insieme elemento con un sottoinsieme! Morale della favola un insieme che contiene il vuoto non è vuoto.

Relazioni

Intanto aggiungiamo il concetto di insieme ordinato, chiamato coppia o tupla (se ha più di due elementi).

$$(a, b, c, ..., d) = (a', b', c', ..., d') \iff a = a' \land b = b' \land c = c' \land ... \land d = d'$$

Poi ci inventiamo la moltiplicazione tra insiemi, chiamata prodotto cartesiano, come l'insieme di tutte le coppie che hanno come primo elemento un elemento del primo fattore e come secondo elemento un elemento del secondo fattore.

$$A \cdot B = \{(a, b) : a \in A \land b \in B\}$$

Una relazione binaria è quindi un sottoinsieme del prodotto cartesiano tra due insiemi. Possiamo generalizzare il concetto a relazione n-aria semplicemente considerando un prodotto cartesiano tra più insiemi (quindi un insieme di tuple con elementi ordinati secondo l'ordine dei fattori). $(a, b) \in R$ significa che a è in relazione con b tramite R e si scrive così aRb.

Relazioni d'equivalenza

Una relazione d'equivalenza è una relazione A su A, significa che è un sottoinsieme del prodotto cartesiano tra due insiemi uguali. Inoltre in questo tipo di relazioni vale la proprietà transitiva, riflessiva e simmetrica.

- $R \subseteq A \cdot A$.
- Simmetrica $aRb \iff bRa$.
- Riflessiva aRa.
- Transitiva $aRb \land bRc \iff aRc$.

Poi possiamo definire le *classi di equivalenza* cioè degli insiemi che contengono tutti gli elementi in relazione d'equivalenza tra loro, lo faremo prendendo un elemento qualsiasi in cui vige la relazione di equivalenza e considerando tutti gli elementi che sono in relazione d'equivalenza con quell'elemento.

$$[x]_R = \{a \in A : aRx\}$$

Il quoziente tra l'insieme di partenza ed una relazione sarà l'insieme di tutte le classi di equivalenza.

$$A - R = \{[x]_R : x \in A\}$$

Questa è una partizione di A, cioè un insieme di sottoinsiemi di A che non si sovrappongono.

Funzioni

Una funzione $f : A \to B$ è una relazione univoca e definita in tutto il dominio. Possiamo vederla come un sottoinsieme del prodotto cartesiano tra due insiemi A e B, $f \subseteq A \cdot B$ tale che ogni elemento $a \in A$ appertanga a tutte le coppie del sottoinsieme e per ogni elemento $a \in A$ esista uno ed uno solo elemento $b \in B$ in relazione con a.

$$f : A \to B = \{(a, b) \in A \cdot B : a \in A : \exists! b \in B : a \text{ in relazione con } b\}$$

Aggiungiamo inoltre alcune utili notazioni e definizioni:

- La scrittura $f(x) = y$ indica che l'elemento (variabile o punti) x del dominio è in relazione tramite f a l'elemento (valore) y del codominio.
- l'*immagine di una funzione* f è l'insieme degli elementi del codominio in relazione tramite f agli elementi del dominio. Se abbiamo una $f : X \to Y$ scriveremo l'immagine come $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$. Possiamo inoltre aggiungere un altro tipo di scrittura per definire l'immagine di un sottoinsieme del dominio $A \subseteq X$, $f(A) = \{f(a) \in a \in A\}$.

Una funzione si dice essere:

- <u>Iniettiva</u> quando non ci sono due diversi elementi del dominio accoppiati ad uno stesso elemento del codominio. $h : X \to Y$ è iniettiva se $\forall x_1, x_2 \in X \; h(x_1) \neq h(x_2)$.
- <u>Surgettiva</u> quando tutti gli elementi del dominio sono in relazioni con tutti gli elementi del codominio, cioè quando l'immagine del dominio è l'intero codominio. $g : X \to Y$ è surgettiva se $f(X) = Y$.
- <u>Birgettiva</u> quando è sia surgettiva che iniettiva.

Rappresentazione di una funzione

Esistono tanti modi di rappresentare una funzione, dal più semplice e concettuale tramite i diagrammi di Eulero-Venn al più "utile" tramite un piano cartesiano. Il grafico di una funzione a livello concettuale è la funzione stessa, ma nella pratica conviene dividerli visto é molto spesso lavoraremo con funzioni a variabile numerica, che descrivono il grafico o una sua approssimazione tramite un'equazione.

Cardinalità

La cardinalità è il "numero" degli elementi presenti in un insieme, per esempio un insieme $\{a, b, c, d\}$ ha una cardinalità uguale a 4, in formula scritto come $\text{card}(\{a, b, c, d\}) = 4$. Per non usare il concetto di numero e definire la cardinalità in modo più generico possiamo usare le funzioni così da confrontare la cardinalità degli insiemi tra di loro. Se l'applicazione $f : A \to B$ è una funzione iniettiva avremo che $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$. Se infatti ricordate la definizione di funzione saprete che ogni elemento del dominio dev'essere in relazione univoca con un elemento del codominio e se iniettiva due elementi del dominio differenti non possono essere in relazione con uno stesso elemento del codominio, quindi solamente se l'insieme B ha un numero di elementi maggiore od uguale ad A è possibile creare la nostra applicazione f iniettiva. Come diretta conseguenza di questa osservazione possiamo aggiungere che se la nostra funzione f è surgettiva abbiamo che $\text{card}(A) \geq \text{card}(B)$ e se birgettiva abbiamo che A e B hanno lo stesso numero di elementi, $\text{card}(A) = \text{card}(B)$.

Teorema di Cantor-Bernstein

Il teorema di Cantor-Bernstein ci permette di organizzare gli insiemi in base alla loro cardinalità, persino se essi hanno elementi infiniti. Afferma infatti che se esiste una funziona iniettiva $f : X \to Y$ e una iniettiva $g : Y \to X$ allora esisterà pure una funzione biiettiva $h : X \to Y$. In poche parole questo si traduce in termini di cardinalità come se $\text{card}(X) \leq \text{card}(Y)$ e $\text{card}(Y) \leq \text{card}(X)$ allora $\text{card}(X) = \text{card}(Y)$.

Dimostrazione

La dimostrazione del Teorema di Cantor-Bernstein non è affatto intuitiva, anche se con un po' di passaggi può essere facilmente compresa da chi ha preso la mano con la logica della teoria degli insiemi. In poche parole ci mettiamo a giocare un po' con le nostre due funzioni iniettive f e g per partizionare i due insiemi finché non riusciamo a mettere in corrispondenza biunivoca tutti i loro elementi, vediamo come fare.
Applichiamo f e g in modo alternato per ottenere la seguente configurazione:

$$\begin{array}{ll} f(X) = Y_1 & g(Y) = X_1 \\ g(Y_1) = X_2 & f(X_1) = Y_2 \\ f(X_2) = Y_3 & g(Y_2) = X_3 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Notiamo quindi che:

$$X \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq X_3 \; ...$$

$$Y \subseteq Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq Y_3 \; ...$$

Per una notazione migliore pongo quindi $X = X_0$ ed $Y = Y_0$, abbiamo che:

$$X_0 \sim Y_1 \sim X_2 \sim Y_3 \ ...$$

$$Y_0 \sim X_1 \sim Y_2 \sim X_3 \ ...$$

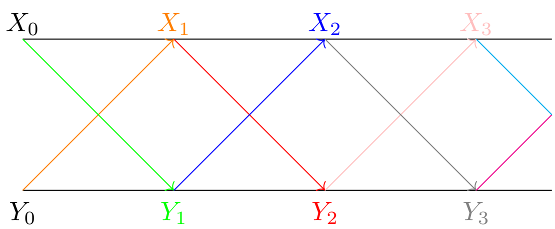
Potrebbe sembrare intuitivo mettere quindi in relazione biunivoca X_0 ed Y_0 considerando l'unione tra tutti questi "partizionamenti", ma in realtà questo non è sempre vero, i partizionamenti tra loro potrebbero avere degli elementi in comune, ergo dobbiamo ricondurci ad un caso in cui questo non è vero ed il metodo più semplice per farlo non è altro che "levarci" gli elementi in comune sfruttando la sottrazione tra insiemi. Costruiamo quindi una famiglia di insiemi contenente i nuovi partizionamenti createsi tramite l'operazione di sottrazione tra insiemi $X' = \{X_0 - X_1, X_1 - X_2, ...\}$ ed $Y' = \{Y_0 - Y_1, Y_1 - Y_2, ...\}$. Avremo per esempio che $(X_0 - X_1) \sim (Y_1 - Y_2)$ e pure $(X_1 - X_2) \sim (Y_0 - Y_1)$ e siccome non hanno elementi in comune pure l'unione sarà in relazione biunivoca, cioé $(X_0 - X_1 \cup X_1 - X_2) \sim (Y_0 - Y_1 \cup Y_1 - Y_2)$. Possiamo estendere questo concetto a tutte e due le famiglie di insiemi X' ed Y':

$$\bigcup X' \sim \bigcup Y'$$

Chiamerò l'unione di X' con tutti i suoi elementi X'' e l'unione di Y' con tutti i suoi elementi Y''. Potremo pensare in modo distratto che $X' = X_0$ ed $Y' = Y_0$, ma questo non è sempre vero, infatti per creare i due insiemi X' ed Y' ci siamo avvalsi dell'operazione di sottrazione per escludere gli elementi in comune, dobbiamo quindi ripescarli ed unirli ai nostri due insiemi X'' ed Y''. Avremo infatti che i due insiemi che contengono gli elementi in comune tra tutti i partizionamenti di X_0 e tutti quelli di Y_0 saranno un intersezione arbitraria delle due famiglie di insiemi che contengono tutti i partizionamenti costruiti alternando l'applicazione di f e di g, chiamerò questi due insiemi X''' ed Y'''. Avremo quindi che $X''' \sim Y'''$, perché $card(X) - card(X'') = card(X''') = card(Y) - card(Y'') = Y'''$, e siccome hanno tutti elementi differenti da X'' ed Y'' possiamo unirli e costruire una qualche relazione biunivoca tra di loro:

$$(X'' \cup X''') \sim (Y'' \cup Y''')$$

Questo equivale a mettere in relazione biunivoca X con Y. Abbiamo quindi dimostrato il Teorema di Cantor-Bernstein.



Una rappresentazione geometria del Teorema di Cantor-Bernstein