2018008531 송연주

Homework #2

- **Read Chapter 1, Numerical Recipes in C, and summerize**

함수의 prototype과 함께 선언이나 정의를 볼 수 있다면 컴파일러는 주어진 함수 호출이 정확한 argument type으로 이루어졌는지 확인할 수 있다. 함수의 선언은 그 함수를 호출할 routine에게 함수를 소개하는 역할을 한다. 함수를 호출할 때는 argument와 return value의 개수와 type을 알아야한다. 만약 C 프로그램이 여러 개의 소스 파일로 이루어져 있다면 컴파일러는 각 function의 consistency를 additional assistance없이는 확인할 수 없다. 컴파일러가 function의 consistency를 확인할 수 있게 하기 위해서 모든 external function은 헤더파일(`.h`)에 single prototype declaration이 되어있어야 한다. 그리고 함수의 정의가 되어있는 소스 파일은 헤더파일을 include해서 컴파일러가 함수 선언에 사용된 prototype과 함수의 정의가 일치하는지 확인할 수 있어야 한다. 또한 그 함수를 호출하는 모든 소스 파일은 헤더파일을 제대로 include해야 한다. 추가적으로 함수를 호출하는 routine이 함수의 prototype 선언을 내부적으로 가지고 있을 수도 있다.

C는 기본적으로 'zero-origin' 혹은 'zero-offset'을 사용한다. 이것은 Pascal로부터 비곳된 것이며`a[M]`을 선언하였을 때 이것은 `a[0..M-1]`을 의미한다. 하지만 보통 많은 알고리즘은 1부터 M까지의 범위를 가지고 있으므로 새로운 포인터를 사용해 이 문제를 해결할 수 있다.

```
float b[4], *bb;
bb = b - 1;
```

`bb[1..4]`는 `b[0..3]`을 의미하게 된다. 이것을 *unit-offset* vector라고 한다. 두 방법은 상황에 맞게 선택하여 모두 사용할 수 있다.

어떤 배열이 float value `a[i][j]`를 참조하고 `i`가 5, `j`가 9라면 machine code는 '`a`의 주소에 `9*i`를 곱하고 `j`를 더하라'고 할 것이다. 즉, 이 연산을 하기 위해서는 상수 9를 알아야 하고 연산을 위해 정수의 곱셈을 수행해야 한다. 반면, `float **aa`를 선언하고 이것이 `a[i][j]`를 가리킨다면 machine code는 '`aa`의 주소에 `i`를 더해 생긴 새로운 주소에 `j`만큼 더하라'고 할 것이다. 즉, 이 계산에는 `a[][]`의 size가 필요없고 정수의 곱셈 또한 사용되지 않는다. 따라서 이 방법은 좀 더 빠르다. 하지만 pointer를 저장하기 위한 공간이 필요하고 array를 선언할 때 pointer를 초기화해야하는 것에 불편함이 있다. 이 방법을 *pointer to array of pointers*라고 한다.

```
float a[13][9], **aa;
int i;
aa = (float **) malloc((unsigned) 13*sizeof(float*));
for(i=0; i<=12; i++) aa[i] = a[i];  //a[i] is a pointer to a[i][0]
```

위의 방법을 사용하면 **배열의 physical size를 몰라도** `aa[i][j]`의 방법을 통해 element를 address할 수 있다.

DATE NO

2018008531 송연주

#3.6

relative error $= \dfrac{x-\tilde{x}}{\tilde{x}}$

① $e^{-x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots$ 이므로 $e^{-5} = 1 - 5 + \dfrac{5^2}{2!} - \dfrac{5^3}{3!} + \dfrac{5^4}{4!} - \dfrac{5^5}{5!} + \cdots + \underset{\substack{\uparrow \\ 20 \text{ terms}}}{\dfrac{5^{20}}{20!}}$

$= 6.74554 \times 10^{-3}$

② $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x} = \dfrac{1}{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots}$ 이므로 $e^{-5} = \dfrac{1}{1 + 5 + \frac{5^2}{2} + \frac{5^3}{3!} + \frac{5^4}{4!} + \cdots + \frac{5^{20}}{20!}}$

$= 6.737948 \times 10^{-3}$

true value 가 6.737947×10^{-3} 이므로

① 의 relative error는 $\left| \dfrac{6.737947 \times 10^{-3} - 6.74554 \times 10^{-3}}{6.737947 \times 10^{-3}} \right| = 1.1 \times 10^{-4}$

② 의 relative error는 $\left| \dfrac{6.737947 \times 10^{-3} - 6.737948 \times 10^{-3}}{6.737947 \times 10^{-3}} \right| = 1.48 \times 10^{-7}$

#3.7

$f(x) = \dfrac{1}{1 - 3x^2}$. $f'(x) = \dfrac{6x}{(1 - 3x^2)^2}$

$f'(0.577) = \dfrac{6(0.577)}{(1 - 3(0.577)^2)^2} = \dfrac{3.462}{(1 - 3 \times 0.332929)^2} \fallingdotseq 2352911$

① 3-digit arithmetic with chopping

$f'(0.577) \fallingdotseq \dfrac{3.46}{(1 - 3 \times 0.332)^2} = \dfrac{3.46}{(0.004)^2} = 216250$

relative error $= \dfrac{2352911 - 216250}{2352911} \approx 90.8\%$

② 4-digit arithmetic with chopping

$f'(0.577) \fallingdotseq \dfrac{3.462}{(1 - 3 \times 0.3329)^2} = \dfrac{3.462}{(1 - 0.9987)^2} \fallingdotseq 2048521$

relative error $= \dfrac{2352911 - 2048521}{2352911} \approx 12.9\%$

DATE NO

#4.2

$\varepsilon_s = 0.5 \times 10^{-2} = 0.005$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots \sim$

$\cos\frac{\pi}{3} = 1$ 일 때 true percentage error $\varepsilon = \left|\frac{0.5-1}{0.5}\right| = 1$

① $\cos\frac{\pi}{3} = 1 - \frac{(\frac{\pi}{3})^2}{2} \fallingdotseq 0.4516$일 때 true percentage error $\varepsilon = \left|\frac{0.5-0.4516}{0.5}\right|$

$\fallingdotseq 0.0968$

approximate percentage error $\varepsilon_a = \left|\frac{0.4516-1}{0.4516}\right| \fallingdotseq 1.2143$

$|\varepsilon_a| > 0.005$

② $\cos\frac{\pi}{3} = 1 - \frac{(\frac{\pi}{3})^2}{2} + \frac{(\frac{\pi}{3})^4}{4!} \approx 0.5018$ 일 때

true percentage error $\varepsilon = \left|\frac{0.5-0.5018}{0.5}\right| = 0.0036$

approximate percentage error $\varepsilon_a = \left|\frac{0.5018-0.4516}{0.5018}\right| \fallingdotseq 0.10003$

$|\varepsilon_a| > 0.005$

③ $\cos\frac{\pi}{3} = 1 - \frac{(\frac{\pi}{3})^2}{2} + \frac{(\frac{\pi}{3})^4}{4!} - \frac{(\frac{\pi}{3})^6}{6!} \approx 0.4999$

true percentage error $\varepsilon = \left|\frac{0.5-0.4999}{0.5}\right| = 0.0002$

approximate percentage error $\varepsilon_a = \left|\frac{0.4999-0.5018}{0.4999}\right| \approx 0.0038$

$|\varepsilon_a| < 0.005$ 이므로 여기까지 계산한다.

$\therefore \cos\frac{\pi}{3} = 1 - \frac{(\frac{\pi}{3})^2}{2} + \frac{(\frac{\pi}{3})^4}{4!} - \frac{(\frac{\pi}{3})^6}{6!} \approx 0.4999$

#4.5

Taylor series expansion $f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x_i)}{3!}h^3 + \cdots$

base point가 $x_i = 1$, $x_{i+1} = 3$. $h = x_{i+1} - x_i = 3 - 1 = 2$

zero order approximation

$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)h$, $f'(x) = 75x^2 - 12x + 7$, $f'(1) = 75 - 12 + 7 = 70$

$f(3) \approx f(1) + f'(1)h = f(1) + f'(1)\cdot(2) = -62 + 70\cdot 2 = -62 + 140 = 78$

$\varepsilon = \left|\frac{\text{true value} - \text{approximate value}}{\text{true value}}\right| = \left|\frac{554-78}{554}\right| \approx 0.8592$

Second order approximation. $f'(x) = 75x^2 - 12x + 7$. $f''(x) = 150x - 12$

$f''(1) = 138$.

$f(3) \approx f(1) + f'(1)h + \frac{f''(1)}{2!}h^2 = f(1) + f'(1)\cdot 2 + \frac{f''(1)}{2!}\cdot 2^2 = 354$

$\varepsilon = \left|\frac{554-354}{554}\right| \approx 0.3610$

third order approximation. $f'''(x) = 150$.

$f(3) \approx f(1) + f'(1)h + \frac{f''(1)}{2!}h^2 + \frac{f'''(1)}{3!}h^3 = f(1) + f'(1)\cdot 2 + f''(1)\cdot 2^2 + f'''(1)\cdot 2^3 = 554$

$\varepsilon = \left|\frac{554-554}{554}\right| = 0$.

$\therefore$ third order approximation 이 정확한 결과이다.

DATE NO

#4.12

$$\frac{\partial v}{\partial c} = \frac{cgte^{\frac{ct}{m}} - gm(1-e^{-\frac{ct}{m}})}{c^2} = \frac{(12.5)(9.8)(6)(e^{\frac{-12.5\times 6}{50}}) - (9.8)(50)(1-e^{\frac{-12.5\cdot 6}{50}})}{(12.5)^2}$$

$$= -1.3866$$

$$\frac{\partial v}{\partial m} = (1-e^{\frac{-ct}{m}})\left(\frac{g}{c}\right) + \left(\frac{gm}{c}\right)(e^{-\frac{ct}{m}})\left(\frac{-ct}{m^2}\right) = (0.223)\left(\frac{9.8(6)}{50}\right) + \left(\frac{9.8}{12.5}\right)(1-0.223)$$

$$= 0.871468$$

$$\Delta v(\bar{c}) = \left|\frac{\partial v}{\partial c}\right|(\Delta\bar{c}) + \left|\frac{\partial v}{\partial m}\right|(\Delta\bar{m}) = |-1.3866|(1.5) + |0.871467|(2)$$

$$= 3.822834$$

$c = 12.5$

$$v(12.5) = \frac{(9.8)50}{12.5}\left(1-e^{\frac{-12.5(6)}{50}}\right) = 30.4534$$

$$v = 30.453 \pm 3.8228$$

따라서 v는 34.2758과 26.6302 사이에 있다.