1 Objectif du projet

Ce projet a pour objectif la modélisation et la résolution d'un problème d'optimisation de portefeuille multi-critère non linéaire et non convexe. Le travail est structuré en trois niveaux de complexité croissante, intégrant successivement la cardinalité, les coûts de transaction et la robustesse des estimations. Un portefeuille est une combinaison d'actifs (actions, obligations, ETF, matières premières, etc.) dans laquelle un investisseur place son capital. L'objectif est de répartir l'investissement de manière optimale afin d'obtenir un compromis entre performance et sécurité. Dans ce contexte, optimiser un portefeuille consiste à choisir la meilleure répartition des poids (les w_i, la répartition du capital de l'utilisateur sur une liste d'actif) pour atteindre plusieurs objectifs :

— obtenir un rendement attractif
— limiter le risque
— préserver la stabilité du portefeuille dans le temps
— réduire les coûts réels associés aux transactions

Ces choix sont complexes car :

— les marchés financiers sont incertains
— les actifs sont souvent corrélés entre eux
— les estimations de rendement et de risque sont imprécises et sujettes à erreur
— les contraintes pratiques limitent fortement ce qu'un investisseur peut réellement mettre en œuvre

Pourquoi introduire plusieurs objectifs ?

En gestion réelle, on ne peut pas simplement chercher à maximiser le rendement :

— le risque augmente généralement en même temps
— les coûts de transaction pénalisent les réallocations trop fréquentes ;
— un portefeuille trop diversifié ou trop concentré devient inefficace ou difficile à gérer
— les estimations de rendement et de covariance sont souvent erronées, ce qui peut conduire à des décisions dangereuses.

C'est pour cela que le projet introduit progressivement plusieurs niveaux d'objectifs et de contraintes.

Résumé des trois niveaux

Le niveau 1 correspond au modèle classique bi objectif de Markowitz. Il consiste à optimiser le compromis rendement risque sous les contraintes de base et sert d introduction à l optimisation de portefeuille.

Le niveau 2 ajoute des contraintes opérationnelles comme la cardinalité et les coûts de transaction. L optimisation devient alors plus réaliste et tient compte des limites pratiques d un portefeuille réel.

Le niveau 3 introduit la notion de robustesse afin de traiter l incertitude statistique présente dans les données financières. Une procédure de rééchantillonnage permet d évaluer la stabilité des portefeuilles et d intégrer un critère supplémentaire dans la sélection finale.

Critères de notation

- comprendre les principes fondamentaux du modèle rendement–risque ;
- être capable de formuler mathématiquement le problème d'allocation classique ;
- interpréter correctement les notions de rendement attendu, de risque et de compromis entre les deux ;
- comprendre le rôle des contraintes de base imposées au portefeuille ;
- représenter et analyser les solutions efficaces obtenues ;
- utiliser une méthode de résolution adaptée au modèle classique ;
- traiter correctement les données utilisées et justifier la construction des estimateurs ;
- vérifier la cohérence économique et statistique des portefeuilles obtenus ;
- être en mesure de justifier une allocation sélectionnée à partir des résultats obtenus ;
- expliquer de manière claire les concepts principaux lors de la soutenance ;
- faire preuve de recul sur les limites du modèle et de ses hypothèses.

3 Formalisation mathématique du problème

3.1 Fonctions objectifs

Dans l'ensemble du projet, le portefeuille est décrit par un vecteur de décision

$$\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_N)^\top,$$

où chaque composante représente la proportion du capital investi dans l'actif correspondant. L optimisation consiste à déterminer une allocation qui équilibre plusieurs objectifs potentiellement contradictoires. Les trois critères considérés sont les suivants.

Le rendement attendu, que l'on cherche à maximiser. Par convention, il est formulé comme une fonction à minimiser :

$$f_1(\mathbf{w}) = -\mathbf{w}^\top \boldsymbol{\mu},$$

où $\boldsymbol{\mu}$ désigne le vecteur des rendements moyens estimés. Ainsi, minimiser f_1 revient à maximiser le rendement global du portefeuille.

Le risque du portefeuille, mesuré par la variance quadratique

$$f_2(\mathbf{w}) = \mathbf{w}^\top \Sigma \mathbf{w},$$

où Σ est la matrice de covariance des rendements. Cette expression correspond au risque moyen–variance classique de Markowitz.

Les coûts de transaction , qui traduisent l'impact financier de la réallocation depuis une position courante $\mathbf{w}_t$. Ils sont modélisés par

$$f_3(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{N} c_{\text{prop}} \, |w_i - w_{t,i}|,$$

où c_{prop} représente le coût proportionnel unitaire appliqué à chaque variation de poids.

Exemple. Supposons que le portefeuille courant soit

$$\mathbf{w}_t = (0.5,\ 0.5,\ 0),$$

et que la nouvelle allocation visée soit

$$\mathbf{w} = (0.3,\ 0.4,\ 0.3).$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
|w_1 - w_{t,1}| &= |0.3 - 0.5| = 0.2, \\
|w_2 - w_{t,2}| &= |0.4 - 0.5| = 0.1, \\
|w_3 - w_{t,3}| &= |0.3 - 0| = 0.3,
\end{aligned}$$

ce qui signifie que l'on vend 20% de l'actif 1, 10% de l'actif 2, et que l'on entre dans l'actif 3 en en achetant 30%.

Avec un coût proportionnel $c_{\text{prop}} = 0.005$, on obtient :

$$f_3(\mathbf{w}) = 0.005\,(0.2 + 0.1 + 0.3) = 0.005 \times 0.6 = 0.003.$$

Le coût total de transaction correspond donc à 0.3% de la valeur du portefeuille.

3.2 Contraintes

Les allocations possibles doivent respecter des contraintes structurelles. Les contraintes de base garantissent l'admissibilité du portefeuille :

$$C_{\text{Base}} : \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} w_i = 1, \\ w_i \geq 0 \quad \text{pour tout } i. \end{cases}$$

Ces conditions imposent que le capital soit entièrement investi et qu'aucun poids ne soient négatif (vente à découvert).

À partir de la partie 2, des contraintes opérationnelles supplémentaires sont ajoutées pour refléter la réalité de la gestion de portefeuille :

$$C_{\text{Op}} : \left\{ \sum_{i=1}^{N} \mathbb{I}(w_i > \delta_{\text{tol}}) = K, \right.$$

Cette contrainte impose une cardinalité exacte K, c'est à dire un nombre fixe d'actifs effectivement présents dans le portefeuille, au delà d'un seuil pratique δ_{tol}.

4 Etapes du projet

Etape 1 : Modèle Classique

Le premier niveau se concentre sur l'optimisation bi-objectif classique :

$$\min_{\mathbf{w}} \{f_1(\mathbf{w}), f_2(\mathbf{w})\} \quad \text{sujet à } C_{\text{Base}}.$$

Il s'agit de représenter et analyser la frontière de Pareto correspondante.

Etape 2 : Contraintes et Coûts

Le deuxième niveau introduit un troisième objectif :

$$\min_{\mathbf{w}} \{f_1(\mathbf{w}), f_2(\mathbf{w}), f_3(\mathbf{w})\} \quad \text{sous } C_{\text{Base}} \cap C_{\text{Op}}.$$

Le travail consiste à construire un front de Pareto tridimensionnel.

Etape 3 : Démonstrateur python basé sur Streamlit

L'objectif est de développer une interface interactive permettant de visualiser les fronts de Pareto obtenus aux étapes précédentes, et de sélectionner un portefeuille représentant un compromis entre risque et coûts, sous contrainte d'un rendement minimal paramétrable par l'utilisateur.

Plus précisément, le seuil de rendement minimal $r_{\min}$ est choisi par l'utilisateur, et la sélection du portefeuille se fait sous la contrainte

$$-f_1(\mathbf{w}) = \mathbf{w}^\top \boldsymbol{\mu} \ \geq \ r_{\min}.$$

Idéalement, l'outil doit aussi fournir une description de la structure macro-économique du portefeuille à travers sa ventilation par types d'industrie, permettant ainsi d'identifier les secteurs prédominants et les concentrations sectorielles éventuelles.