

# Matemática Discreta

— FAKE EXAM 2024–2025 —

EN TODOS LOS PROBLEMAS SE PUEDEN UTILIZAR LOS RESULTADOS VISTOS EN TEORÍA SIN TENER QUE DEMOSTRARLOS NUEVAMENTE, EXCEPTO SI SE PIDE.

## Problem 1

2.5 puntos

Sean  $A, B$  conjuntos. La diferencia simétrica entre  $A$  y  $B$  se define como el conjunto

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B).$$

Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas. Si lo son, demuéstrelas, si no, muestre un contraejemplo.

- (a) Sean  $A, B$  conjuntos. Entonces

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A).$$

- (b) Sean  $A, B, C$  conjuntos. Entonces

$$(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C).$$

## Problem 2

2.5 puntos

La sucesión de Fibonacci es el conjunto de números  $F = \{f_1, f_2, f_3, \dots\}$  definido recursivamente por:

PASO BASE:  $f_1 = f_2 = 1$

PASO RECURSIVO:  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$  para  $n \geq 3$ .

Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas. Si lo son, demuéstrelas, si no, muestre un contraejemplo.

- (a) Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , se tiene que

$$f_n \leq 2^n.$$

- (b) Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , se tiene que

$$f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_n^2 = f_n f_{n+1}.$$

## Problem 3

2.5 puntos

Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas. Si lo son, demuéstrelas, si no, muestre un contraejemplo.

En lo que sigue,  $G$  es un grafo con  $n$  nodos,  $a$  aristas y  $p$  componentes conexas.

- (a) Si  $a = n - 1$ , entonces  $G$  es un árbol.  
(b) Si  $G$  es un bosque, entonces  $a = n - p$ .  
(c) Si  $a = n - p$ , entonces  $G$  es un bosque.

## Problem 4

2.5 puntos

(Nota: En este problema no se necesita calcular el resultado. Se puede dejar indicado como, por ejemplo,  $23! + \frac{45!}{12!}$ )

- (a) Marta se ganó un premio en una pizzería. El premio consiste en 30 trozos de pizza, de los cuales 10 son de pizza vegana, 10 son de pizza vegetariana (y no vegana) y 10 son de pizza con carne. Marta decidió ir con sus amigos Laia, Iván, Paula y Pau. Marta es vegana, Laia es vegetariana (y no vegana) y los demás comen carne. ¿De cuántas formas puede repartir los 30 trozos entre las 5 personas? (Nota: No es importante si una persona come más que otra.)  
(b) Alex tiene 15 pares de zapatos diferentes en una caja. ¿De cuántas maneras puede coger 10 zapatos de la caja sin haber seleccionado ningún par? (Nota: 15 pares de zapatos son 30 zapatos.)