科学与工程计算方法 **Winter 2017**

Lecture 7: 非线性方程和方程组的解法

Lecturer: Zhitao Liu *Scribes: Yusu Pan*

7.1 引言

7.1.1 问题的背景和内容摘要

- 一元非线性方程 $f(x) = 0$
- 多元非线性方程组 $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, i = 1, 2, \ldots, n$

7.1.2 一元方程的搜索法

- 有根区间, 根的隔离区间
- 搜索法
- m 重根, m 为奇数时, $f(x)$ 在点 x^* 处变号; m 为偶数时不变号

例 7.1.1. *(使用搜索法寻找长度为 0.2 的根的隔离区间)*

7.2 误差的基本概念

7.2.1 基本迭代法及其收敛性

一元方程的基本迭代法

- 基本迭代法/不动点迭代法, 单步法的一种

$$f(x) = 0 \rightarrow x = \varphi(x) \rightarrow x_{k+1} = \varphi(x_k) \tag{7.1}$$

- 迭代函数 $\varphi(x_k)$, 不动点 x^*

定理 7.2.1. *(迭代法的基本收敛性定理/全局性收敛定理)*

- 映内性

$$a \leq \varphi(x) \leq b, \forall x \in [a, b] \tag{7.2}$$

- 压缩性

$$|\varphi'(x)| \leq L < 1, \forall x \in [a, b] \tag{7.3}$$

- 适定性
- 迭代终止准则

$$\frac{|x_k - x_{k-1}|}{|x_k| + 1} < \epsilon \tag{7.4}$$

例 7.2.1. *(讨论迭代法的收敛性)*

7.2.2 局部收敛性和收敛阶

定义 7.2.1. *(局部收敛)*

定理 7.2.2. *(局部收敛性定理/充分条件)*

$$|\varphi'(x)| < 1 \tag{7.5}$$

定义 7.2.2. *(收敛阶)*

$$\begin{gathered}\lim_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k^p} = c \\ e_k = x_k - x^*\end{gathered} \tag{7.6}$$

- p 阶收敛
- $p = 1$, 线性收敛
- $p > 1$, 超线性收敛
- $p = 2$, 二次收敛/平方收敛

引理 7.2.1. *(线性收敛)*

$$0 < |\varphi'(x)| < 1 \tag{7.7}$$

例 7.2.2. *(线性收敛速度很慢)*

定理 7.2.3. *(整数阶超线性收敛/p 阶收敛)*

$$\begin{aligned}\varphi^{(l)}(x^*) = 0, l = 1, 2, \ldots, p-1 \\ \varphi^{(p)}(x^*) \neq 0\end{aligned} \tag{7.8}$$

例 7.2.3. *(平方收敛比线性收敛快得多)*

7.2.3 收敛性的改善

Steffensen 迭代法

$$\begin{aligned}y_k &= \varphi(x_k) \\ z_k &= \varphi(y_k) \\ x_{k+1} &= x_k - \frac{(y_k - x_k)^2}{z_k - 2y_k + x_k}\end{aligned} \tag{7.9}$$

例 7.2.4. *(将迭代函数改造为 Steffensen 迭代法)*

定理 7.2.4.
- 只要 $\varphi'(x) \neq 1$, 不管原迭代法是否收敛, 由其构成的 *Stefensen* 方法至少平方收敛
- 若原迭代法的收敛阶已经大于等于 *2*, 则可不必使用 *Stefensen* 迭代法

例 7.2.5. *(用发散的迭代函数构造 Steffensen 迭代法)*

7.3 一元方程牛顿迭代法

7.3.1 牛顿迭代法及其收敛性

牛顿迭代法

牛顿迭代法/切线法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{7.10}$$

例 7.3.1. *(用牛顿迭代法求解)*

定理 7.3.1. *(牛顿法至少二次收敛)*

例 7.3.2. *(对于某些非线性方程, 牛顿法具有全局收敛性)*

7.3.2 重根时的牛顿迭代改善

- 方法 1 (构造 $\mu(x)$ 使得 x^* 为 $\mu(x)$ 的单根)

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \frac{f(x)}{f'(x)} \\ x_{k+1} &= x_k - \frac{\mu(x_k)}{\mu'(x_k)} \end{aligned} \tag{7.11}$$

- 方法 2

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) = x_k - m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{7.12}$$

- 方法 1 需要求函数的二阶导数, 并且当所求根为单根时, 不能改善本来已经二次收敛的牛顿法; 方法 2 需要已知根的重数 m, 不实用.
- 对于实际问题, 往往事先并不知道所求根是否是重根, 需要通过试算来判断, 如当牛顿法收敛很慢时通常为重根.

7.3.3 离散牛顿法/割线法

当不想每步都计算导数, 或者函数不可导时, 用割线的斜率来代替牛顿法中的切线的斜率, 即将导数换为 x_k 与 x_{k-1} 的差分公式

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k) \tag{7.13}$$

- 需要两个初始值 x_0 和 x_1, 应尽量取在方程 $f(x) = 0$ 的根 x^* 附近.

例 7.3.3. *(用离散牛顿法求解)*

7.4 非线性方程的解法

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 \\ x &= [x_1, \ldots, x_n]^T \\ F(x) &= [f_1(x), \ldots, f_n(x)]^T \end{aligned} \tag{7.14}$$

7.4.1 不动点迭代法

- 不动点迭代法

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \tag{7.15}$$

- Jacobi 矩阵

定义 7.4.1. *(映内, 压缩, 压缩系数 L)*

定理 7.4.1. *(Brouwer 不动点存在定理)*

定理 7.4.2. *(压缩映射原理)*

定义 7.4.2. *(局部收敛)*

定理 7.4.3. *(局部收敛的充分条件)*

定理 7.4.4. *(局部收敛的另一个充分条件)*

引理 7.4.1.
- *若 $\Phi'(x)$ 存在, 且 $\|\Phi'(x^*)\| < 1$, 则迭代法在 x^* 处局部收敛*
- *若有 x^* 的邻域 SD, $\Phi'(x)$ 存在, 且 $\|\Phi'(x)\| < 1$, 则迭代法在 x^* 处局部收敛*

7.4.2 牛顿迭代法

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - F'(x^{(k)})^{-1}F(x^{(k)}) \tag{7.16}$$

- 牛顿方程
- 阻尼牛顿法: $F'(x^*)$ 奇异或病态时可用, 阻尼因子, 阻尼项

7.4.3 牛顿点迭代法

用迭代法求解非线性方程组, 特别是非线性方程组时, 初始值的选取至关重要, 初值不仅影响迭代是否收敛, 而且当方程多解时, 不同的初值可能收敛到不同的解.

牛顿迭代函数

7.4.4 拟牛顿法