

Lecture 7: 非线性方程和方程组的解法

Lecturer: Zhitao Liu

Scribes: Yusu Pan

7.1 引言

7.1.1 问题的背景和内容摘要

- 一元非线性方程 $f(x) = 0$
- 多元非线性方程组 $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, i = 1, 2, \dots, n$

7.1.2 一元方程的搜索法

- 有根区间, 根的隔离区间
- 搜索法
- m 重根, m 为奇数时, $f(x)$ 在点 x^* 处变号; m 为偶数时不变号

例 7.1.1. (使用搜索法寻找长度为 0.2 的根的隔离区间)

7.2 误差的基本概念

7.2.1 基本迭代法及其收敛性

一元方程的基本迭代法

- 基本迭代法/不动点迭代法, 单步法的一种

$$f(x) = 0 \rightarrow x = \varphi(x) \rightarrow x_{k+1} = \varphi(x_k) \quad (7.1)$$

- 迭代函数 $\varphi(x_k)$, 不动点 x^*

定理 7.2.1. (迭代法的基本收敛性定理/全局性收敛定理)

- 映内性

$$a \leq \varphi(x) \leq b, \forall x \in [a, b] \quad (7.2)$$

- 压缩性

$$|\varphi'(x)| \leq L < 1, \forall x \in [a, b] \quad (7.3)$$

- 适定性

- 迭代终止准则

$$\frac{|x_k - x_{k-1}|}{|x_k| + 1} < \epsilon \quad (7.4)$$

例 7.2.1. (讨论迭代法的收敛性)

7.2.2 局部收敛性和收敛阶

定义 7.2.1. (局部收敛)

定理 7.2.2. (局部收敛性定理/充分条件)

$$|\varphi'(x)| < 1 \quad (7.5)$$

定义 7.2.2. (收敛阶)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^p} = c \quad (7.6)$$

$$e_k = x_k - x^*$$

- p 阶收敛
- $p = 1$, 线性收敛
- $p > 1$, 超线性收敛
- $p = 2$, 二次收敛/平方收敛

引理 7.2.1. (线性收敛)

$$0 < |\varphi'(x)| < 1 \quad (7.7)$$

例 7.2.2. (线性收敛速度很慢)

定理 7.2.3. (整数阶超线性收敛/ p 阶收敛)

$$\varphi^{(l)}(x^*) = 0, l = 1, 2, \dots, p-1 \quad (7.8)$$

$$\varphi^{(p)}(x^*) \neq 0$$

例 7.2.3. (平方收敛比线性收敛快得多)

7.2.3 收敛性的改善

Steffensen 迭代法

$$\begin{aligned} y_k &= \varphi(x_k) \\ z_k &= \varphi(y_k) \\ x_{k+1} &= x_k - \frac{(y_k - x_k)^2}{z_k - 2y_k + x_k} \end{aligned} \quad (7.9)$$

例 7.2.4. (将迭代函数改造为 Steffensen 迭代法)

定理 7.2.4. • 只要 $\varphi'(x) \neq 1$, 不管原迭代法是否收敛, 由其构成的 Steffensen 方法至少平方收敛

- 若原迭代法的收敛阶已经大于等于 2, 则可不使用 Steffensen 迭代法

例 7.2.5. (用发散的迭代函数构造 Steffensen 迭代法)

7.3 一元方程牛顿迭代法

7.3.1 牛顿迭代法及其收敛性

牛顿迭代法

牛顿迭代法/切线法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (7.10)$$

例 7.3.1. (用牛顿迭代法求解)

定理 7.3.1. (牛顿法至少二次收敛)

例 7.3.2. (对于某些非线性方程, 牛顿法具有全局收敛性)

7.3.2 重根时的牛顿迭代改善

方法 1 (构造 $\mu(x)$ 使得 x^* 为 $\mu(x)$ 的单根)

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \frac{f(x)}{f'(x)} \\ x_{k+1} &= x_k - \frac{\mu(x_k)}{\mu'(x_k)} \end{aligned} \quad (7.11)$$

方法 2 (需要已知根的重数 m , 不实用)

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) = x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (7.12)$$

7.3.3 离散牛顿法

将导数换为 x_k 与 x_{k-1} 的差分公式

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k) \quad (7.13)$$

7.4 非线性方程的解法**7.4.1 不动点迭代法**

- 映内, 压缩
- 不动点存在定理, 压缩映射定理
- 局部收敛
- Jacobi 矩阵

7.4.2 牛顿迭代法

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - F'(x^{(k)})^{-1} F(x^{(k)}) \quad (7.14)$$

- 牛顿方程
- 阻尼牛顿法: $F'(x^*)$ 奇异或病态时可用, 阻尼因子, 阻尼项

7.4.3 牛顿点迭代法

用迭代法求解非线性方程组, 特别是非线性方程组时, 初始值的选取至关重要, 初值不仅影响迭代是否收敛, 而且当方程多解时, 不同的初值可能收敛到不同的解.

牛顿迭代函数

7.4.4 拟牛顿法