Lecture 8: 广义逆矩阵

Lecturer: Zhitao Liu *Scribes: Yusu Pan*

考试与作业

考试

- 题型: 选择, 填空, 大题
- 共 9 题
- 大题有证明题，主要是第六章 (注意) 与第八章
- 群环域等预备知识均在期末考试范围内
- 注意掌握课后习题的类型, 题型是一致的 (例如 e^{At} 以及 A^+ 的计算), 数字会变化
- 可以带计算器

作业

- P247Q9(1)(3)
- P247Q15(1)

8.1 广义逆矩阵的概念

Penrose 方程

$$AGA = A$$
$$GAG = G$$
$$(AG)^T = AG \quad (GA)^T = GA$$

定义 8.1.1. *(广义逆矩阵的定义)*

广义逆的种类

8.2 广义逆矩阵 A^- 与线性方程组的解

$$AGA = A$$

定理 8.2.1. *(A^- 的计算)*

Proof.

$$\begin{aligned} AGA &= AQ[\cdots]PA \\ &= P^-1[\cdots][\cdots][\cdots]Q^{-1} \\ &= P^{-1}[\cdots]Q^{-1} \\ &= A \end{aligned} \tag{8.1}$$

□

注意 A^- 并不唯一

定理 8.2.2. *(A^- 的性质)*

Proof.

$$\begin{aligned} & BGB = B \\ & G = Q^{-1}A^-P^{-1} \\ & BQ^{-1}AP^{-1}B = PAQQ^{-1}AP^{-1}PAQ = B \end{aligned} \tag{8.2}$$

□

注意 A^- 与 P^{-1} 在写法上的区别

定理 8.2.3. *(相容方程组的解)*

相容方程组 $Ax = b$ 即为有解的方程组, $rank([A|b]) = rank(A)$, 解不一定唯一.

定理 8.2.4. *(Penrose 定理/矩阵方程 $AXB = C$ 的通解)*

设 A,B,C 分别为 $m \times n$, $p \times q$, $m \times q$ 矩阵, 则矩阵方程

$$AXB = C$$

有解的充分必要条件是

$$AA^-CB^-B = C$$

并且在有解的情况下, 其通解为

$$X = A^-CB^- + Y - A^-AYBB^-$$

其中 $Y \in \mathbb{R}^{n\times p}$ 是任意的矩阵

定理 8.2.5. *(线性方程组 $Ax = b$ 的通解)*

定理 8.2.6. *($A\{1\}$ 的通式)*

8.3 极小范数广义逆 A_m^- 与线性方程组的极小范数解

$$\begin{aligned} AGA = A \\ (GA)^T = GA \end{aligned}$$

定理 8.3.1. *($G \in A\{1,4\}$ 的充要条件 1)*

定理 8.3.2. *($G \in A\{1,4\}$ 的充要条件 2)*

定理 8.3.3. *($A\{1,4\}$ 的通式 1)*

定理 8.3.4. *($A\{1,4\}$ 的通式 2)*

定理 8.3.5. *(相容方程组 $Ax = b$ 的极小范数解)*

Proof.

$$
\begin{aligned}
&Ax = b, && A \in \mathbb{R}^{m\times n} \\
&x = Gb + (I - GA)y, && AGA = A \\
&x^* = G^*b + (I - G^*A)y, && AG^*A = A, (G^*A)^T = G^*A
\end{aligned}
$$

□

定理 8.3.6. *(相容方程组 $Ax = b$ 的极小范数解的唯一性)*

8.4 最小二乘广义逆 A_l^- 与矛盾方程组的最小二乘解

$$
\begin{aligned}
&AGA = A \\
&(AG)^T = AG
\end{aligned}
$$

定理 8.4.1. *($G \in A\{1,3\}$ 的充要条件 1)*

定理 8.4.2. *($G \in A\{1,3\}$ 的充要条件 2)*

定理 8.4.3. *(最小二乘逆 1)*

定理 8.4.4. *(最小二乘逆 2)*

线性最小二乘问题 如果线性方程组 $Ax = b$ 不相容, 则它没有通常意义下的解, 残量不等于零. 求这样的解, 使它的残量范数最小.

即求在上的最佳逼近满足上式的...

定理 8.4.5. *(线性方程组 $Ax = b$ 的最小二乘解)*

定理 8.4.6. 不相容线性方程组 $Ax = b$ 的最小二乘解必为相容线性方程组 $A^TAx = A^Tb$ 的解, 反之亦然.

推论 8.4.1. *(线性方程组 $Ax = b$ 的最小二乘解的唯一性)* 当 A 为列满秩时, 不相容方程组 $Ax = b$ 的最小二乘解是唯一的.

定理 8.4.7. *(线性方程组 $Ax = b$ 的最小二乘解的通式)*

8.5 广义逆矩阵 A^+ 与线性方程组的极小最小二乘解

$$
\begin{aligned}
&AGA = A \\
&GAG = G \\
&(AG)^T = AG \\
&(GA)^T = GA
\end{aligned}
$$

定理 8.5.1. *(A^+ 的唯一性)*

定理 8.5.2. *(通过满秩分解求 A^+)* 设 A 是 $m \times n$, 其满秩分解为

$$A = BC$$

其中, 则

$$A^+ = C^T(CC^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T$$

定理 8.5.3. *(A^+ 的性质)*

定理 8.5.4. *(线性方程组 $Ax = b$ 的通解)*

定理 8.5.5. *(不相容线性方程组 $Ax = b$ 的最小二乘通解)*

定理 8.5.6. *(不相容线性方程组 $Ax = b$ 的极小最小二乘解)*