矩阵论 **Winter 2017**

Lecture 9: Kronecker 积与线性矩阵方程

Lecturer: Zhitao Liu *Scribes: Yusu Pan*

9.1 矩阵的 Kronecker 积

定义 9.1.1. *(Kronecker 积)*

$$A \otimes B \tag{9.1}$$

- Kronecker 积不满足交换律

定理 9.1.1. *(Kronecker 积的基本性质)*

定理 9.1.2.

定理 9.1.3. *(Kronecker 积的特征值, 行列式, 迹)*

定理 9.1.4. *(Kronecker 积的秩)*

$$rank(A \otimes B) = rank(A)rank(B) \tag{9.2}$$

排列矩阵 左乘为行交换, 右乘为列交换.

定理 9.1.5. 设 A,B 分别为 $m \times m$ 和 $n \times n$ 的矩阵, 则存在一个 mn 阶排列矩阵 P 使得

$$P^T(A \otimes B)P = B \otimes A \tag{9.3}$$

Kronecker 积的幂

$$A^{[k]} = A \otimes A \cdots \otimes A \tag{9.4}$$

定理 9.1.6.

$$(AB)^{[k]} = A^{[k]}B^{[k]} \tag{9.5}$$

9.2 矩阵的拉直与线性矩阵方程

9.2.1 矩阵的拉直

定义 9.2.1. *(矩阵 A 的列拉直 (列展开))*

矩阵 A 的行拉直 (行展开)

定理 9.2.1.

$$vec(ABC) = (C^T \otimes A)vec(B) \tag{9.6}$$

推论 9.2.1.

9.2.2 线性矩阵方程

线性矩阵方程

$$A_1XB_1 + A_2XB_2 + \cdots + A_pXB_p = C \tag{9.7}$$

定理 9.2.2.

$$Gx = vec(C) \tag{9.8}$$

推论 9.2.2. 矩阵方程有解的充要条件是, 有唯一解的充要条件是非奇异.

9.3 线性方程 $AXB = C$ 与矩阵最佳逼近问题

9.3.1 矩阵方程 $AXB = C$

定理 9.3.1.

9.3.2 带约束的矩阵最佳逼近问题

带约束的矩阵最佳逼近问题

定理 9.3.2. 设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{p\times q}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{m\times q}$, 则 $\tilde{X} = (\tilde{x_{ij}} \in \mathbb{C}^{n\times p})$ 在 S_X 上存在唯一的最佳逼近, 并且

$$\hat{X} = A^{+}CB^{+} + \tilde{X} - A^{+}A\tilde{X}BB^{+} \tag{9.9}$$

9.4 *

9.5 *