科学与工程计算方法 **Winter 2017**

Lecture 4: 插值和拟合

Lecturer: Zhitao Liu *Scribes: Yusu Pan*

4.1 引言

定义 4.1.1. *(插值多项式)*

$$L_n(x_i) = y_i \tag{4.1}$$

- 插值区间, 插值节点, 插值点, 被插函数, 插值函数插值条件

定理 4.1.1. *(插值多项式 $L_n(x)$ 的唯一性)*

例 4.1.1.
- 线性模型, 非线性模型
- 最小二乘法, 均方误差
- 离散数据拟合问题

4.2 插值

4.2.1 拉格朗日插值法

- 拉格朗日插值基函数

$$l_k^{(n)}(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} \tag{4.2}$$

- 拉格朗日插值基函数的两个性质
- 拉格朗日插值公式

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k^{(n)}(x) \tag{4.3}$$

例 4.2.1. *(求拉格朗日基函数与插值多项式)*

4.2.2 插值的余项

定理 4.2.1. *(插值多项式的余项/插值的截断误差或方法误差)*

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x) \tag{4.4}$$

推论 4.2.1. *(线性插值余项的上界)*

$$|R_1(x)| \le \frac{M_2}{8}(b-a)^2 M_2 = \max_{a\le x\le b}|f''(x)| \tag{4.5}$$

例 4.2.2. *(线性插值求近似, 证明有效数字)*

4.2.3 均差和牛顿插值法

- n 阶均差 (或差商)

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] \equiv \frac{f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}] - f[x_1, x_2, \ldots, x_n]}{x_0 - x_n} \tag{4.6}$$

- 牛顿插值公式

$$N_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots + f[x_0, x_1, lcdots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) \tag{4.7}$$

例 4.2.3. *(用牛顿插值公式求 2 次插值多项式)*

4.3 分段低次插值

4.3.1 龙格现象和分段线性插值

例 4.3.1. *龙格现象: $L(x)$ 的截断误差在区间两端非常大*

定义 4.3.1. *(分段线性插值多项式)*

$$I_h(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x) \tag{4.8}$$

$$I_h(x) = f(x_i) \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + f(x_{i+1}) \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}, x \in [x_i, x_{i+1}] \tag{4.9}$$

- 划分, 边界点, 内节点

定理 4.3.1. *(分段线性插值的一致收敛性)*

4.3.2 分段埃尔米特三次插值

定理 4.3.2. *(Hermite 三次插值)*

$$H(x) = y_0 \alpha_0(x) + y_1 \alpha_1(x) + m_0 \beta_0(x) + m_1 \beta_1(x) \tag{4.10}$$

定义 4.3.2. *(分段 Hermite 三次插值多项式)*

$$H_h(x) = y_i \alpha_i(x) + y_{i+1} \alpha_{i+1}(x) + m_i \beta_i(x) + m_{i+1} \beta_{i+1}(x), x \in [x_i, x_{i+1}] \tag{4.11}$$

- 满足边界条件以及内节点处的衔接条件
- $H_h(x)$ 一致收敛于 $f(x)$, $H_h'(x)$ 一致收敛于 $f'(x)$.

4.4 三次样条插值

4.4.1 样条插值的背景和定义

定义 4.4.1. *(m 次样条插值与 m 次样条插值多项式)*

4.4.2 三次样条插值的定解条件

$$s(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i, x \in [x_i, x_{i+1}] \tag{4.12}$$

应满足

- 插值和函数连续条件 $2n$ 个
- $n-1$ 个内节点处的一阶导数连续条件

$$s'(x_i - 0) = s'(x_i + 0) \tag{4.13}$$

- $n-1$ 个内节点处的二阶导数连续条件

$$s''(x_i - 0) = s''(x_i + 0) \tag{4.14}$$

为了定解, 通常需附加以下三种边界条件

- 固支条件: 已知两端点的一阶导数值

$$s'(x_0) = f'(x_0), s'(x_n) = f'(x_n) \tag{4.15}$$

- 自然边界条件: 已知两端点的二阶导数值

$$s''(x_0) = f''(x_0), s''(x_n) = f''(x_n) \tag{4.16}$$

- 周期条件

$$s'(x_0 + 0) = s'(x_n - 0), s''(x_0 + 0) = s''(x_n - 0) \tag{4.17}$$

例 4.4.1. *(待定系数法求解自然边界条件下的三次样条多项式)*

4.4.3 三弯矩算法

三弯矩方程

$$\begin{aligned} &\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i, i = 1, 2, \ldots, n-1 \\ &h_i = x_{i+1} - x_i \\ &M(x) = s''(x) \qquad \begin{cases} \mu_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i}, \lambda_i = 1 - \mu \\ d_i = 6f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}] \end{cases} \end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\tag{4.19}$$

算法 4.4.1.

- 计算参数

$$\begin{aligned} &h_i = x_{i+1} - x_i \\ &f[x_i, x_{i+1}] = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} \\ &\begin{cases} \mu_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i}, \lambda_i = 1 - \mu \\ f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i-1},x_i] - f[x_i,x_{i+1}]}{x_{i-1} - x_{x+1}} \\ d_i = 6f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}] \end{cases} \end{aligned} \tag{4.20}$$

- 设置与边界条件有关的参数
  - $d_0 = \frac{6}{h_0}(f[x_0, x_1] - f'(x_0)), d_n = \frac{6}{h_{n-1}}(f'(x_n) - f[x_{n-1}, x_n])$
  - $M_0 = f''(x_0), M_n = f''(x_n)$
  - $\mu_n = \frac{h_{n-1}}{h_0+h_{n-1}}, \lambda_n = 1 - \mu_n, \tilde{d_n} = \frac{6}{h_0+h_{n-1}}(f[x_0, x_1] - f[x_{n-1}, x_n])$
- 求解与边界条件对应的三弯矩方程, 得到弯矩值 $\{M_i\}_{i=0}^n$
- 把 $\{M_i\}_{i=0}^n$ 代入, 得到三次样条插值多项式.

4.4.4 例题和一致收敛性

例 4.4.2. *(用三弯矩算法求三次样条多项式)*

定理 4.4.1. *(第一, 二种条件下的三次样条插值的误差估计式)*

- $s(x)$ 一致收敛于 $f(x)$, $s'(x)$ 一致收敛于 $f'(x)$, $s''(x)$ 一致收敛于 $f''(x)$.
- $s(x)$ 收敛最快, $s'(x)$ 次之, $s''(x)$ 最慢.

4.5 正交多项式

4.5.1 连续函数空间

定义 4.5.1. *(线性相关与线性无关)*

定义 4.5.2. *(张成的子空间)*

$$S_n = span\{f_1, \dots, f_n\} \tag{4.21}$$

- 多项式空间: 由不超过 n 次多项式的全体构成的 $n+1$ 维线性空间

$$P_n = span\{1, x, x^2, \dots, x^n\} \tag{4.22}$$

- 函数值向量的内积

$$(f, g) = \sum_{i=0}^{m} \omega_i f(x_i) g(x_i), f, g \in C[a, b] \tag{4.23}$$

- 正交函数序列

4.5.2 离散点列上的正交多项式

定义 4.5.3. *(在离散点列 $\{x_i\}_{i=0}^m$ 上的带权 $\{\omega_i\}_{i=0}^m$ 的正交多项式序列 $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^n$)*

引理 4.5.1. *($\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^n$ 线性无关的条件)* $n < m$ 并且 $\{x_i\}_{i=0}^m$ 中至少有 $n-1$ 个点互异

定理 4.5.1. *(正交多项式序列)*

定理 4.5.2. *(正交多项式序列的性质)*

引理 4.5.2. *(三项递推公式)*

$$\begin{cases}\varphi_0(x)=1,\varphi_1(x)=x-a_0 \\ \varphi_{k+1}(x)=(x-a_k)\varphi_k(x)-b_k\varphi_{k-1}(x)\end{cases},k=1,2,\dots,n-1 \tag{4.24}$$

$$\begin{cases}a_k=\frac{(x\varphi_k,\varphi_k)}{(\varphi_k,\varphi_k)}, & k=1,2,\dots,n-1 \\ b_k=\frac{(\varphi_k,\varphi_k)}{(\varphi_{k-1},\varphi_{k-1})}, & k=1,2,\dots,n-1 \\ (x\varphi_k,\varphi_k)=\sum_{i=0}^m \omega_i x_i[\varphi_k(x_i)]^2\end{cases} \tag{4.25}$$

例 4.5.1. *(利用三项递推公式求正交多项式)*

4.5.3 连续区间上的正交多项式

定义 4.5.4. *(在区间 $[a,]$ 上的带权 $\rho(x)$ 的正交多项式序列 $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^n$)*

定理 4.5.3.

4.6 离散数据的曲线拟合

4.6.1 线性模型和最小二乘拟合

定义 4.6.1. *(最小二乘拟合与最小二乘问题)*

4.6.2 正规方程和解的存在唯一性

正规方程

$$\begin{bmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_0) & \cdots & (\varphi_3,\varphi_0) \\ (\varphi_0,\varphi_1) & (\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_3,\varphi_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_0,\varphi_n) & (\varphi_1,\varphi_n) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(y,\varphi_0) \\ (y,\varphi_1) \\ \vdots \\ (y,\varphi_n)\end{bmatrix} \tag{4.26}$$

最小二乘问题存在唯一解的必要条件是正规方程的系数矩阵 (Gram 矩阵) 非奇异.

定理 4.6.1. *Gram 矩阵 G 非奇异的充要条件是向量组线性无关 $\{x_i\}_{i=0}^m$*

定理 4.6.2. *(正规方程解的性质)*

定理 4.6.3. *(正规方程的解的平方误差)*

$$\delta^2=\|y-\varphi^*\|_2^2=\|y\|_2^2-(y,\varphi^*)=\|y\|_2^2-\sum_{k=0}^n\alpha_k^*(y,\varphi_k) \tag{4.27}$$

4.6.3 多项式拟合和例题

多项式拟合

$$\begin{cases}(\varphi_k,\varphi_l)=\sum_{i=0}^m\omega_i x_i^{k+l}, & k,l=1,2,\dots,n-1 \\ (y,\varphi_l)=\sum_{i=0}^m\omega_i y_i x_i^l, & l=0,1,2,\dots,n\end{cases} \tag{4.28}$$

例 4.6.1. *(用多项式拟合离散数据)*

4.6.4 正规方程的病态和正交多项式拟合

正交多项式拟合

- 求正交多项式序列 $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^n$
- 求 (φ_k, φ_l) 与 (y, φ_l), 解正规方程 $G\alpha = d$
- 由 α^* 求拟合函数

例 4.6.2. *(用正规化方法离散数据的二次多项式拟合)*