

Lecture 6: 常微分方程的数值解法

Lecturer: Zhitao Liu

Scribes: Yusu Pan

6.1 引言

- 常微分方程初值问题的一般形式

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (6.1)$$

$$y(x_0) = y_0 \quad (6.2)$$

- 两点边值问题 (第一类边界条件) 的一般形式

$$y'' = f(x, y, y') \quad (6.3)$$

$$y(a) = \alpha, y(b) = \beta \quad (6.4)$$

6.2 初值问题的数值解法

6.2.1 Euler 方法及其截断误差

6.2.1.1 Euler 公式

- 显式 Euler 公式

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad (6.5)$$

- 隐式 Euler 公式/后退 Euler 公式

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) \quad (6.6)$$

- 梯形公式

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n), f(x_{n+1}, y_{n+1})] \quad (6.7)$$

- 差分公式: 统称 Euler 公式与梯形公式
- 单步法: 由 y_n 去计算 y_{n+1}

6.2.1.2 隐式公式的计算

- 如果 $f(x, y)$ 是 y 的线性函数, 则隐式公式可以显式计算
- 如果 $f(x, y)$ 是 y 的非线性函数, 则可以用迭代法求解
- 简单迭代公式

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)})], \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (6.8)$$

- 预测-校正技术: 先用显式方法计算, 预测一个值 y_{n+1}^p , 为隐式公式提供一个好的迭代初值, 然后隐式公式迭代一次, 得到 y_{n+1}

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^p)] \end{cases} \quad (6.9)$$

- 改进 Euler 公式 (与预测-校正技术等价的显式公式)

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))] \quad (6.10)$$

例 6.2.1. (用显式 Euler 法, 隐式 Euler 法和梯形公式求解微分初值问题)

6.2.1.3 局部截断误差和方法的阶

整体截断误差 从 x_0 开始计算, 如果考虑每一步产生的误差, 直到 x_n , 则有误差 $e(n) = y(x_{n+1}) - y_n$ 。

定义 6.2.1. 单步法的局部截断误差

$$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - y(x_n) - \phi(x_n, x_{n+1}, y(x_n), y(x_{n+1}), h) \quad (6.11)$$

定义 6.2.2. 如果给定方法的局部截断误差是

$$T_{n+1} = O(h^{p+1}) \quad (6.12)$$

其中 $p \geq 1$ 为整数, 则称是 p 阶的, 或具有 p 阶精度。

定义 6.2.3. 局部截断误差主项 $g(x_n, y(x_n))h^{p+1}$

$$T_{n+1} = g(x_n, y(x_n))h^{p+1} + O(h^{p+2}) \quad (6.13)$$

显式与隐式 Euler 公式均为一阶方法。梯形公式是两者的算术平均, 其局部截断误差也是两者的算术平均, 为二阶精度。

6.2.2 Runge-Kutta 法

方法的阶越高, 方法就越精确, 这启发人们用区间上若干个点的导数 f , 将其线性组合得到平均斜率, 以提高方法的阶, 这就是 Runge-Kutta 方法的基本思想。

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h \sum_{i=1}^L \lambda_i k_i \\ k_i &= f(x_n + c_i h, y_n + c_i h \sum_{j=1}^L i - 1 a_{ij} k_j), i = 2, 3, \dots, L \end{aligned} \quad (6.14)$$

- L 级 p 阶 Runge-Kutta 方法

- 经典 R-K 方法 (4 级 4 阶)

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
 k_1 &= f(x_n, y_n) \\
 k_2 &= f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1) \\
 k_3 &= f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2) \\
 k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3)
 \end{aligned} \tag{6.15}$$

- R-K-Fehlberg 方法 (由一个 5 级 4 阶 R-K 公式和一个 6 级 5 阶 R-K 公式组成)
- 隐式 R-K 法:
 - 1 级 2 阶中心公式
 - 2 级 2 阶梯形公式
 - 2 级 4 阶 R-K 公式

例 6.2.2. (用一阶显式 Euler 公式, 改进 Euler 公式和经典 R-K 公式计算微分方程初值问题)

6.2.3 单步法的稳定性

- 单步法的统一形式, 增量函数 $\psi(x_n, y_n, h)$

$$y_{n+1} = y(n) + h\psi(x_n, y_n, h) \tag{6.16}$$

- 条件稳定, 无条件稳定 (如梯形公式)

定义 6.2.4. (方法收敛的定义)

定理 6.2.1. (Lipschitz 条件的定义)

引理 6.2.1. 满足 Lipschitz 条件, 初值精确, 则显式 Euler 法, 改进 Euler 法和 R-K 方法是收敛的.

引理 6.2.2. 一个方法的整体截断误差比局部截断误差低一阶, 所以常常通过求出局部截断误差 w

定义 6.2.5. (绝对稳定, 绝对稳定区域, 绝对稳定区间)

$$y_{n+1} = E(\lambda h)y_n \tag{6.17}$$

例 6.2.3. (经典 R-K 法绝对稳定区间 $-2.785 \leq \lambda h \leq 0$ 求步长 h)

6.2.4 线性多步法

线性多步法 利用前面已经算出的 $r+1$ 个值, 计算 y_{n+1} . 构造如下的线性多项式, 使其具有 p 阶精度

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= \alpha_0 y_n + \alpha_1 y_{n-1} + \cdots + \alpha_r y_{n-r} + h(\beta_{-1} f_{n+1} + \beta_0 f_n + \cdots + \beta_r f_{n-r}) \\
 &= \sum_{k=0}^r \alpha_k y_{n-k} + h \sum_{k=-1}^r \beta_k f_{n-k}
 \end{aligned} \tag{6.18}$$

记住推导方法, 得到以下公式

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^r \alpha_k = 1 \\ \sum_{k=1}^r (-k)^j \alpha_k + j \sum_{k=-1}^r (-k)^{j-1} \beta_k = 1, \quad j = 1, 2, \dots, p \end{cases} \quad (6.19)$$

通过同阶的单步法从 y_0 迭代计算, 为线性多步法提供所需的一系列初值 y_1, y_2, \dots, y_r .

- Adams 4 步 4 阶显式公式 ★
- Milne 4 步 4 阶显式公式 ★
- 3 步 4 阶隐式 Adams 公式
- 3 步 4 阶隐式 Hamming 公式 ★
- Simpson 隐式公式

例 6.2.4. (4 步 4 阶显式 Milne 公式, 3 步 4 阶隐式 Hamming 公式计算)

6.2.5 预测-校正技术和外推技巧

6.2.5.1 修正 Hamming 公式

1. 预测:
2. 修正:
3. 校正:
4. 修正:

6.2.5.2 Adams 预测-校正公式

1. 预测:
2. 修正:
3. 校正:
4. 修正:

例 6.2.5. (Milne-Hamming 预测-校正公式和修正 Hamming 法计算)

6.3 一阶常微分方程的数值解法

6.3.1 一阶方程组和高阶方程

- 一阶方程组可化为向量形式
- 高阶方程可降为一阶方程组

6.3.2 刚性方程 (组)

考虑线性常系数常微分方程组

$$\frac{dy}{dx} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}, x \in [a, b] \quad (6.20)$$

通解为

$$\mathbf{y}(x) = \sum_{k=1}^m c_k e^{\lambda_k x} \varphi_k + \psi(x) \quad (6.21)$$

- 瞬态解 $\sum_{k=1}^m c_k e^{\lambda_k x} \varphi_k$ 、稳态解 $\psi(x)$ 、快瞬态解 ($|Re(\lambda_k)|$ 较大的项)、慢瞬态解
- 刚性现象: 若一个解中既含快瞬态解又含慢瞬态解, 且解分量之间的数量级相差很大, 则快瞬态解严重影响数值解的稳定性和精度. 整个区间上计算均受快瞬态解的制约, 在很长的区间内必须保持小步长
- 刚性方程、刚性方程组、刚性比

$$s = \frac{\max_{1 \leq k \leq m} |Re(\lambda_k)|}{\min_{1 \leq k \leq m} |Re(\lambda_k)|} \gg 1 \quad (6.22)$$

例 6.3.1. (用隐式 Euler 法, 梯形公式, 2 级 4 阶隐式 R-K 法和 4 阶经典 R-K 法求解)

- 在非刚性阶段宁愿用小步长显式方法, 因为当问题是非线性时, 显式方法比隐式方法简单
- 在刚性阶段, 宜用高稳定的隐式方法, 因为它可以放大步长, 特别是 A 稳定的方法

6.3.3 刚性方程 (组) 的数值方法

定义 6.3.1. (A 稳定)

- 隐式 Euler 法, 梯形公式, 2 级 4 阶隐式 R-K 法均为 A 稳定
- 任何显式多步法和显式 R-K 法都不可能是 A 稳定的
- A 稳定的隐式线性多步法的阶不能超过 2, 其中具有最小误差常数的公式是梯形公式

6.4 边值问题的打靶法和差分法

线性两点边值问题

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \\ y(a) = \alpha \\ y(b) = \beta \end{cases} \quad (6.23)$$

6.4.1 打靶法

6.4.1.1 线性打靶法

用解析的思想, 将线性边值问题转化为两个初值问题, 求得两个初值问题的解, 即可得到边值问题的解的表达式.

$$\begin{cases} Ly_1 = y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = f(x), & y_1(a) = a, y_1'(a) = 0 \\ Ly_2 = y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0, & y_2(a) = 0, y_2'(a) = 1 \\ y(x) = y_1(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2(x) \end{cases} \quad (6.24)$$

6.4.1.2 非线性打靶法

对于如下的非线性边值问题

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(a) = \alpha, y'(a) = s_k \end{cases} \quad (6.25)$$

令 $z = y'$, 将上述的二阶方程化为一阶方程组

$$\begin{cases} y' = z, y(a) = \alpha \\ z' = f(x, y, z), z(a) = s_k \end{cases} \quad (6.26)$$

主要是斜率 s_k 的选取, 可以使用第七章的迭代法 (如割线法) 求得.

6.4.2 差分法

线性两点边值问题差分法

$$\begin{cases} (2h^2q_1 - 4)y_1 + (2 + hp_1)y_2 = 2h^2f_1 - (2 - hp_1)\alpha \\ (2 - hp_k)y_{k-1} + (2h^2q_k - 4)y_k + (2 + hp_k)y_{k+1} = 2h^2f_k, & k = 2, 3, \dots, n-2 \\ (2 - hp_{n-1})y_{n-2} + (2h^2q_{n-1} - 4)y_{n-1} = 2h^2f_{n-1} - (2 + hp_{n-1})\beta \end{cases} \quad (6.27)$$

例 6.4.1. (用差分法求解线性两点边值问题)

非线性两点边值问题的差分法

6.5 小结

- 对于一个常微分方程 (组), 首先判别其性态是刚性还是非刚性的. 对于非刚性问题, 用显式方法计算简单.
- 对于刚性问题, 在非刚性阶段, 宜选用小步长经典 R-K 法; 在刚性阶段, 选用梯形公式等隐式 R-K 法. 其中特别对非线性刚性问题, 常用的是 A 稳定的隐式方法.
- 在假定边值问题解存在唯一的前提下, 可以采用打靶法和差分法.