

Lecture 5: Hermite 矩阵与正定矩阵

Lecturer: Jun Wu

Scribes: Yusu Pan

引言

标量 (1×1)	矩阵 ($n \times n$)
$a \pm b$	$A \pm B$
ab	AB
一元多项式	λ 阵
实数比大小	Hermite 矩阵比大小

Table 5.1: 标量与矩阵的对比

5.1 Hermite 矩阵与 Hermite 二次型

Hermite 矩阵 矩阵对角线上为实数, 以对角线为轴两边复共轭.

$$\mathbf{A}^H = \mathbf{A}$$

Hermite 矩阵的性质 (P2)

定理 5.1.1. 设 $\mathbf{A} = (a_{jk}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 则 \mathbf{A} 是 Hermite 矩阵的充分必要条件是对任意 $x \in \mathbb{C}^n$, $x^H \mathbf{A} x$ 是实数.(将 Hermite 矩阵与实数联系起来)

定理 5.1.2. 设 \mathbf{A} 为 n 阶 Hermite 矩阵, 则

- \mathbf{A} 的所有特征值全是实数
- \mathbf{A} 的不同特征值所对应的特征向量是互相正交的

定理 5.1.3. 设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 则 \mathbf{A} 是 Hermite 矩阵的充分必要条件是存在酉矩阵 \mathbf{U} 使得

$$\mathbf{U}^H \mathbf{A} \mathbf{U} = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \quad (5.1)$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 均为实数

定理 5.1.4. 设 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 则 \mathbf{A} 是 Hermite 矩阵的充分必要条件是存在酉矩阵 \mathbf{U} 使得

$$\mathbf{U}^H \mathbf{A} \mathbf{U} = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \quad (5.2)$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 均为实数