Corrigé du partiel 1

Exercice 1 (6 points)

Via les transformations $C_1 \longleftarrow C_1 + C_2 + C_3$ puis $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$, on a $P_A(X) = (X-2)^2(4-X)$.
Donc P_A est scindé dans $\mathbb{R}$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{2, 4\}$ avec $m(2) = 2$ et $m(4) = 1$.
$m(4) = 1$ donc $\dim(E_4) = 1$.

$$\begin{aligned} E_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x - 3y + 2z = 0 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Ainsi la dimension de E_2 coïncide avec la multiplicité de la valeur propre 2 donc A est diagonalisable.

$$\begin{aligned} E_4 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \left| \begin{array}{l} -x - 3y + 2z = 0 \\ -x + y - 2z = 0 \\ -x + 3y - 4z = 0 \end{array} \right. \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

D'où $D = P^{-1}AP$ avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Via les transformations $C_1 \longleftarrow C_1 + C_2 + C_3$ puis $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$, on a

$$P_B(X) = (1 - X)(-4 - X)(2 - X)$$

Donc P_B est scindé dans $\mathbb{R}$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(B) = \{1, -4, 2\}$ avec $m(1) = m(-4) = m(2) = 1$ donc B est diagonalisable.

$$\begin{aligned} E_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \left| \begin{array}{l} -x + 2y - z = 0 \\ 3x - 3y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{array} \right. \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{-4} &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \left| \begin{array}{l} 4x + 2y - z = 0 \\ 3x + 2y = 0 \\ -2x + 2y + 5z = 0 \end{array} \right. \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \left| \begin{array}{l} -2x + 2y - z = 0 \\ 3x - 4y = 0 \end{array} \right. \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

D'où $D = P^{-1}BP$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 (4 points)

En développant par rapport à la troisième colonne, on a immédiatement $P_A(X) = (1 - X)(2 - X)(a^2 + 1 - X)$ donc P_A est scindé dans $\mathbb{R}$.

- Si $a \notin \{0, 1, -1\}$, A possède trois valeurs propres 1, 2 et $a^2 + 1$ d'ordre de multiplicité égal à 1 donc A est diagonalisable.
- Si $a = 0$, $P_A(X) = (1 - X)^2(2 - X)$.

$$\begin{aligned} E_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } y = 0 \right\} \\ &= \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

La dimension de E_1 coïncide donc avec la multiplicité de la valeur propre 1 donc A est diagonalisable.

- Si $a = 1$, $P_A(X) = (1 - X)(2 - X)^2$.

$$\begin{aligned} E_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \left| \begin{array}{l} -x + y = 0 \\ -2y = 0 \end{array} \right. \right\} \\ &= \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

La dimension de E_2 est différente de la multiplicité de la valeur propre 2 donc A n'est pas diagonalisable.

- Si $a = -1$, $P_A(X) = (1 - X)(2 - X)^2$.

$$\begin{aligned} E_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \left| \begin{array}{l} -x + y = 0 \\ 2x = 0 \end{array} \right. \right\} \\ &= \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

La dimension de E_2 est différente de la multiplicité de la valeur propre 2 donc A n'est pas diagonalisable.

Exercice 3 (4 points)

1. Soient $\mathscr{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$ et $\mathscr{B}' = (1)$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}$.

   Alors $\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}$.

2. Soit $\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de E.

   Alors $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 (4 points)

Notons $\mathscr{B}'' = (e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q)$ la concaténation de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.

Montrons que $\mathscr{B}''$ est libre.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q) \in \mathbb{R}^{p+q}$ tel que

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p + \mu_1 f_1 + \dots + \mu_q f_q = 0$$

Alors
$$\underbrace{\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p}_{\in F} = \underbrace{-(\underbrace{\mu_1 f_1 + \dots + \mu_q f_q}_{\in G})}_{\in G \text{ car } G \text{ est vectoriel}}$$

donc $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p \in F \cap G$. Or F et G étant supplémentaires dans E, $F \cap G = \{0\}$.

Donc $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p = 0$ d'où $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) = (0, \dots, 0)$ car $\mathscr{B}$ est libre.

De même, $\mu_1 f_1 + \dots + \mu_q f_q \in F \cap G = \{0\}$ d'où $(\mu_1, \dots, \mu_q) = (0, \dots, 0)$ via la liberté de $\mathscr{B}'$.

Finalement $(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q) = (0, \dots 0)$ donc $\mathscr{B}''$ est libre.

Montrons que $\mathscr{B}''$ engendre E.

Soit $x \in E$. Comme $E = F + G$, il existe $(y, z) \in F \times G$ tel que $x = y + z$. Comme $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ engendre respectivement F et G, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ et $(\mu_1, \dots, \mu_q) \in \mathbb{R}^q$ tel que

$$x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p + \mu_1 f_1 + \dots + \mu_q f_q$$

donc $x \in \mathrm{Vect}(\mathscr{B}'')$ et $\mathscr{B}''$ engendre E.

Finalement $\mathscr{B}''$ est bel et bien une base de E.

Exercice 5 (3 points)

Notons Δ le déterminant à calculer.

Via $C_1 \longleftarrow C_1 + \dots + C_n$, on a $\Delta = \begin{vmatrix} n-1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ n-1 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ n-1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Puis via $L_n \longleftarrow L_n - L_{n-1}$; $L_{n-1} \longleftarrow L_{n-1} - L_{n-2}$; … ; $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$, on obtient :

$$\Delta = \begin{vmatrix} n-1 & 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = n-1$$