

2 - Le mariage

10) On prend $N = 5$ et $M = 4$

24	25	26	27	28	29				
18	8	19	9	20	10	21	11	22	23
12	4	13	5	14	6	15	7	16	17
6	0	7	1	8	2	9	3	10	11
0	1	2	3	4	5				

11) On considère la division euclidienne de s par $N+1$: $s = (N+1)j' + i'$, $0 \leq i' \leq N$.

De plus, $0 \leq s \leq (N+1)(M+1) + 1$ donc $0 \leq j' \leq M$.

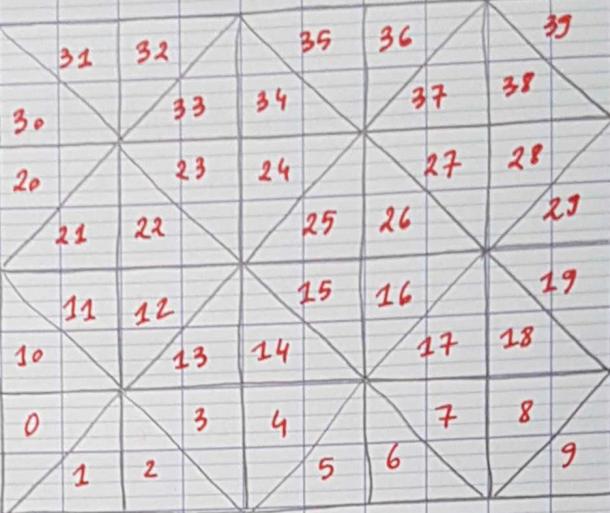
On a montré qu'il existe un unique couple (i', j') tel que $0 \leq i' \leq N$, $0 \leq j' \leq M$ et $s = s_{i', j'}$.

12) On considère la division euclidienne de k par $N-1$: $k = (N-1)q + r$, $0 \leq r \leq N-2$.

De plus, $0 \leq k \leq (N-1)(M-1) - 1$ donc $0 \leq q \leq M-2$.

On pose $j = q + 1$ et $i = r + 1$. On a montré qu'il existe un unique couple (i', j') tel que $1 \leq i' \leq N-1$, $1 \leq j' \leq M-1$ et $k = k_{i', j'}$.

13) On reprend l'exemple de la question 10):



21) Supposons que f est affine, montrons que
 $g(\vec{x}) = f(\vec{x}) - f(0)$ est linéaire. Soient $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$
et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On remarque :

$$\alpha \vec{x} + \beta \vec{y} = \alpha \vec{x} + (1-\alpha) \frac{\beta}{(1-\alpha)} \vec{y} = \alpha \vec{x} + (1-\alpha) \vec{z}$$

où $\vec{z} = \gamma \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } g(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}) &= f(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}) - f(0) \\ &= f(\alpha \vec{x} + (1-\alpha) \vec{z}) - f(0) \\ &= \alpha f(\vec{x}) + (1-\alpha) f(\vec{z}) - \alpha f(0) - \\ &\quad (1-\alpha) f(0) \\ &= \alpha g(\vec{x}) + (1-\alpha) g(\vec{y}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or, } (1-\alpha) g(\vec{z}) &= (1-\alpha) g(\gamma \vec{y}) \\ &= (1-\alpha) (f(\gamma \vec{y}) - f(0)) \\ &= (1-\alpha) (f(\gamma \vec{y}) + (1-\gamma) 0 - f(0)) \\ &= (1-\alpha) (\gamma f(\vec{y}) + (1-\gamma) f(0) - f(0)) \\ &= (1-\alpha) (\gamma g(\vec{y})) \\ &= \beta g(\vec{y}) \end{aligned}$$

$$\text{D'où } g(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}) = \alpha g(\vec{x}) + \beta g(\vec{y}).$$

Supposons que f est linéaire, montrons que f

et affine. Soient $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(\alpha \vec{x} + (1-\alpha) \vec{y}) &= f(\alpha \vec{x} + (1-\alpha) \vec{y}) + f(0) - f(0) \\ &= g(\alpha \vec{x} + (1-\alpha) \vec{y}) + f(0) \\ &= \alpha g(\vec{x}) + (1-\alpha) g(\vec{y}) + f(0) \\ &= \alpha(f(\vec{x}) - f(0)) + (1-\alpha)(f(\vec{y}) - f(0)) + f(0) \\ &= \alpha f(\vec{x}) + (1-\alpha) f(\vec{y}) \end{aligned}$$

22) Supposons que f est affine, montrons qu'elle est alors de la forme demandée. D'après 21) $(x, y) \mapsto f(x, y) - f(0, 0)$ est linéaire donc $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $f(x, y) - f(0, 0) = \alpha x + \beta y$.
D'où $f(x, y) = \alpha x + \beta y + f(0, 0)$
 $= \alpha x + \beta y + \gamma$, $\gamma = f(0, 0) \in \mathbb{R}$.

Supposons que f est de la forme demandée, montrons qu'elle est alors affine. On remarque que $f(0, 0) = \gamma$. Donc $f(x, y) - f(0, 0) = \alpha x + \beta y$. Ainsi $(x, y) \mapsto f(x, y) - f(0, 0)$ est linéaire.
D'après 21) f est affine.

$$23) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^2 \pi_j \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix} \text{ et } \sum_{j=0}^2 \pi_j = 1.$$

Cela revient au système à 3 équations, 3 inconnues suivant :

$$\begin{cases} \pi_0 x_0 + \pi_1 x_1 + \pi_2 x_2 = x \\ \pi_0 y_0 + \pi_1 y_1 + \pi_2 y_2 = y \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

où les π_i , $i \in \{0, 1, 2\}$ sont les inconnues. On peut réécrire le système sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \pi = B$$

Il suffit de montrer que A est inversible pour montrer que le système possède une unique solution. Or, on sait que T n'est pas aplati donc $\det A \neq 0$.

24) On détermine l'inverse de A . On note $d = \det A = x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_1 - (x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_1)$
Donc, en calculant $A^{-1}B$, on a:

$$\pi_0: (x, y) \mapsto \frac{1}{d}((y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + (x_1y_2 - x_2y_1))$$

$$\pi_1: (x, y) \mapsto \frac{1}{d}((y_2 - y_0)x + (x_0 - x_2)y + (x_2y_0 - x_0y_2))$$

$$\pi_2: (x, y) \mapsto \frac{1}{d}((y_0 - y_1)x + (x_1 - x_0)y + (x_0y_1 - x_1y_0))$$

En utilisant 22), on a que les fonctions π_i , $i \in \{0, 1, 2\}$ sont affines.

25) En utilisant 24), on obtient:

$$\pi_j(x_i, y_i) = 0 \text{ pour } i \neq j.$$

26) On sait que f est affine de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} donc d'après 22) f est de la forme $f(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

$$\text{Donc, } f(x, y) = \alpha \left(\sum_{i=0}^2 \pi_i x_i \right) + \beta \left(\sum_{i=0}^2 \pi_i y_i \right) + \gamma$$

$$= \sum_{i=0}^2 \pi_i (\alpha x_i + \beta y_i) + \sum_{i=0}^2 \pi_i \gamma$$

$$= \sum_{i=0}^2 \pi_i (\alpha x_i + \beta y_i + \gamma)$$

$$= \sum_{i=0}^2 \pi_i f(x_i, y_i)$$

Ainsi, si $x_i \in [0, 2]$, $f(x_i, y_i) = 0$, on a $f(x, y) = 0$.

27) En utilisant 24) avec les coordonnées (\hat{x}_0, \hat{y}_0) , (\hat{x}_1, \hat{y}_1) et (\hat{x}_2, \hat{y}_2) . On a :

$$\hat{x}_0(x, y) = 1 - x - y$$

$$\hat{x}_1(x, y) = x$$

$$\hat{x}_2(x, y) = y$$

28) On a que F_T est affine donc d'après 21), $\tilde{F}_T(x, y) = F_T(x, y) - F_T(0, 0)$ est linéaire. Donc, il existe une matrice C à coefficients réels telle que : $\tilde{F}_T(x, y) = C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Déterminons C :

$$\tilde{F}_T(\hat{x}_1, \hat{y}_1) = F_T(1, 0) - F_T(0, 0) = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{F}_T(\hat{x}_2, \hat{y}_2) = F_T(0, 1) - F_T(0, 0) = \begin{pmatrix} x_2 - x_0 \\ y_2 - y_0 \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_0 \\ y_2 - y_0 \end{pmatrix}$$

D'où : $\begin{cases} a = x_1 - x_0 \\ b = x_2 - x_0 \\ c = y_1 - y_0 \\ d = y_2 - y_0 \end{cases} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{pmatrix}$

D'où $F_T(x, y) = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

29) Pour montrer que F_T est inversible, on donne son inverse :

$$F_T^{-1}(x, y) = C^{-1} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right).$$

30) On détermine la jacobienne de F_T :

$$B_T = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{pmatrix}$$

$$32) \det B_T = (x_2 - x_0)(y_2 - y_0) - (x_1 - x_0)(y_1 - y_0)$$

Déterminons l'aire de T que l'on note A_T :

$$A_T = \frac{1}{2} (x_0(y_1 - y_2) + x_1(y_2 - y_0) + x_2(y_0 - y_1))$$

$$= \frac{1}{2} (x_0 y_1 - x_0 y_2 + x_1 y_2 - x_1 y_0 + x_2 y_0 - x_2 y_1)$$

$$= \frac{1}{2} ((x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (x_2 - x_0)(y_1 - y_0))$$

$$= \frac{1}{2} \det B_T$$

33) Soit $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$, on note : $(\hat{x}, \hat{y}) = F_T^{-1}(\bar{x}, \bar{y})$
On a $(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_{i=0}^2 \lambda_i (\hat{x}_i, \hat{y}_i)$

$$\begin{aligned} \text{Donc, comme } F_T \text{ est affine et que } \sum_{i=0}^2 \lambda_i = 1, \\ \text{on a : } (\bar{x}, \bar{y}) &= F_T(\hat{x}, \hat{y}) \\ &= \sum_{i=0}^2 \lambda_i (\hat{x}, \hat{y}) F_T(\hat{x}_i, \hat{y}_i) \\ &= \sum_{i=0}^2 \lambda_i (\hat{x}, \hat{y}) (x_i, y_i) \end{aligned}$$

Donc les $\lambda_i (\hat{x}, \hat{y})$ respectent le système vu en 23). On en déduit que $\lambda_i \in \{0, 1\}$
 $\lambda_i (\hat{x}, \hat{y}) = \lambda_i (\bar{x}, \bar{y})$

Ainsi, $\hat{\pi}_i(x, y) = \hat{\pi}_i(F_T^{-1}(x, y))$ où $\hat{\pi}_i = \hat{\pi}_i \circ F_T^{-1}$, $\forall i \in \{0, 1\}$

34) On obtient: $\nabla \hat{\pi}_i = {}^t(B_T^{-1}) \cdot \nabla \hat{\pi}_i$, $\forall i \in \{0, 1\}$.

$\nabla \hat{\pi}_i$ est constant.

$$35) \bullet \int_T \nabla \hat{\pi}_k \nabla \hat{\pi}_j dx dy = {}^t(\nabla \hat{\pi}_k \nabla \hat{\pi}_j) \int_T dx dy =$$

$$= \nabla \hat{\pi}_k \nabla \hat{\pi}_j A_T = \frac{1}{2} {}^t(B_T^{-1}) \nabla \hat{\pi}_k (B_T^{-1}) \nabla \hat{\pi}_j \det(B_T)$$

$$\bullet \int_T \frac{\partial \hat{\pi}_k}{\partial x} \hat{\pi}_j dx dy = \int_T \frac{\partial \hat{\pi}_k}{\partial x} (F_T(x, y)) \hat{\pi}_j(F_T(x, y))$$

$$| \det B_T | dx dy = \int_T \frac{\partial \hat{\pi}_k}{\partial \hat{x}} (\hat{x}, \hat{y}) \hat{\pi}_j(\hat{x}, \hat{y})$$

$$| \det(B_T) | d\hat{x} d\hat{y} = (1, 0) \nabla \hat{\pi}_k | \det(B_T) | \int_T \hat{\pi}_j d\hat{x} d\hat{y}$$

$$\bullet \int_T \hat{\pi}_k \hat{\pi}_j dx dy = \int_T \hat{\pi}_k(F_T(x, y)) \hat{\pi}_j(F_T(x, y))$$

$$dx dy = | \det(B_T) | \int_T \hat{\pi}_k \hat{\pi}_j d\hat{x} d\hat{y}$$

36) Avec $j = 0$:

$$\int_T \hat{\pi}_j d\hat{x} d\hat{y} = \int_T \hat{\pi}_0 d\hat{x} d\hat{y}$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-\hat{x}} 1 - \hat{x} - \hat{y} d\hat{y} d\hat{x}$$

$$= \int_0^1 \left[\hat{y} (1 - \hat{x}) - \frac{1}{2} \hat{y}^2 \right]_0^{1-\hat{x}} d\hat{x}$$

$$= \int_0^1 (1 - \hat{x})^2 - \frac{1}{2} (1 - \hat{x})^2 d\hat{x}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} \hat{x}^3 - \hat{x}^2 + \hat{x} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{6}$$

En appliquant le même procédé pour $j=1$ et $j=2$, on trouve $\int_T \hat{x}_j dx dy = \frac{1}{6}$ pour tout $j \in [0, 2]$

Et $\int_T \hat{x}_k \hat{x}_j dx dy = \begin{cases} \frac{1}{24} & \text{si } k+j \\ \frac{1}{12} & \text{sinon} \end{cases}$

3 - Le problème discret

38) On remarque que les éléments de V_h sont caractérisés par leurs valeurs aux nœuds intérieurs. On a donc que I_h est un isomorphisme. D'où claim $V_h = I$.

39) On remarque que l'élément w_k , $k \in [0, I-1]$ valent 1 au nœud intérieur k et 0 ailleurs. On peut donc écrire tout élément $v \in V_h$ comme une combinaison linéaire de w_k , $k \in [0, I-1]$. Par ailleurs, on voit aisément que la famille $(w_k)_{k \in [0, I-1]}$ est libre. Elle forme donc une base de V_h .

40) a) On a $w_k|_T = 0$
 b) On a $w_k|_T = \chi^T_{\epsilon \{0, 1, 2\}}$
 c) On a $w_k = \chi^T_{i \in \{0, 1, 2\}}$ donc $\nabla w_k = \nabla \chi^T = {}^t B_T^{-1} \cdot \nabla \chi$
 Donc $\nabla w_k \nabla w_j = {}^t B_T^{-1} \nabla \chi^T \cdot {}^t B_T^{-1} \nabla \chi_j$.

41) On cherche $w_\eta^h \in V_h$ tel que $\forall v_h \in V_h$ $a_\eta(w_\eta^h, v_h) = l_\eta(v_h)$. Or, on connaît une base de V_h (question 39)). Donc $w_\eta^h = \sum \alpha_l w_l$ où $\alpha_l \in \mathbb{R}$, $\forall l \in [0, I-1]$.

Alors, déterminer w_η^h revient à déterminer $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{I-1})$ tel que $\sum_{l=0}^{I-1} \alpha_l a(w_l, w_k) = l_\eta(w_k)$ pour tout $k \in [0, I-1]$. Matriciellement :

$$\begin{pmatrix} a_\eta(w_0, w_0) & \cdots & a_\eta(w_{I-1}, w_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_\eta(w_0, w_{I-1}) & \cdots & a_\eta(w_{I-1}, w_{I-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_{I-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_\eta(w_0) \\ \vdots \\ l_\eta(w_{I-1}) \end{pmatrix}$$

$$A_\eta \quad U = B_\eta$$

45) a) Pour $d=0$: $(x, y) \mapsto 1$

$$\cdot \int_T h(\hat{x}, \hat{y}) d\hat{x} d\hat{y} = \int_T d\hat{x} d\hat{y} = A_T = \frac{1}{2} -$$

$$\cdot \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Pour $d=1$: $\begin{cases} (x, y) \mapsto x \\ (x, y) \mapsto y \end{cases}$

$$\cdot \int_T h(\hat{x}, \hat{y}) d\hat{x} d\hat{y} = \int_T \hat{x} d\hat{x} d\hat{y} = \int_0^1 \int_0^{1-\hat{x}} \hat{x} dy d\hat{x}$$

$$= \int_0^1 [\hat{y} \hat{x}]_0^{1-\hat{x}} d\hat{x} = \int_0^1 (1-\hat{x}) \hat{x} d\hat{x} = \left[\frac{1}{2} \hat{x}^2 - \frac{1}{3} \hat{x}^3 \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

$$\cdot \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times 0 + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Le raisonnement est identique pour $(x, y) \mapsto y$.

Pour $d=2$: $\begin{cases} (x, y) \mapsto x^2 \\ (x, y) \mapsto y^2 \\ (x, y) \mapsto xy \end{cases}$

$$\cdot \int_T h(\hat{x}, \hat{y}) d\hat{x} d\hat{y} = \int_T x^2 d\hat{x} d\hat{y} = \int_T \hat{y} d\hat{x} d\hat{y} =$$

$$= \frac{1}{12}$$

$$\cdot \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{12}.$$

$$\cdot \int_T h(\hat{x}, \hat{y}) d\hat{x} d\hat{y} = \int_T xy d\hat{x} d\hat{y} = \frac{1}{24}$$

$$\cdot \frac{1}{6} \times 0 + \frac{1}{6} \times 0 + \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24}.$$

Pour $d=3$: $(x, y) \mapsto x^3$

$$\begin{aligned} & \cdot \int_T h(\hat{x}, \hat{y}) d\hat{x} d\hat{y} = \int_T \hat{x}^3 d\hat{x} d\hat{y} = \frac{1}{20} \\ & \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

Donc la formule est vraie jusqu'à $d=2$.