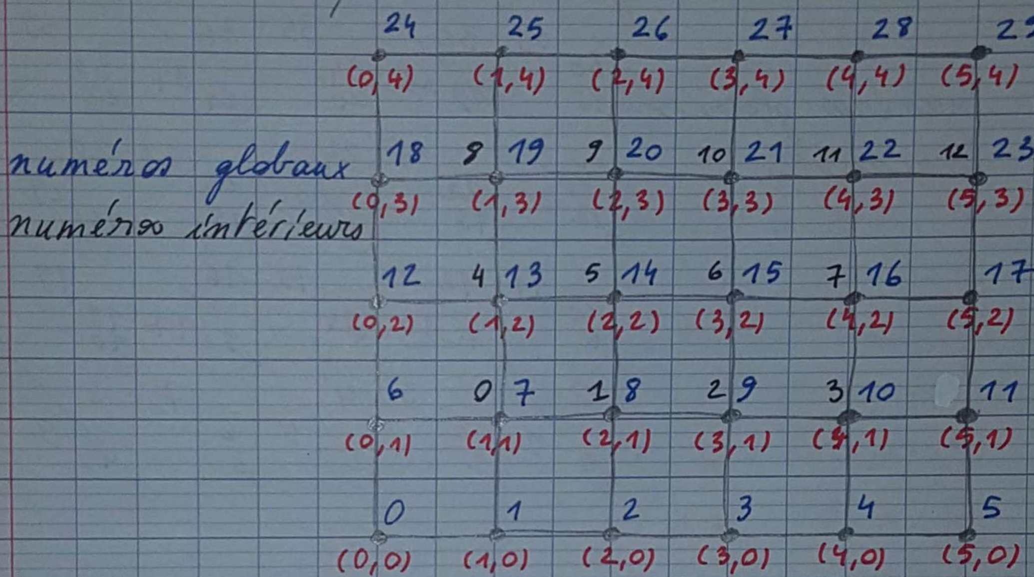
2. Le maillage :

10. On prend $N = 5$ et $M = 4$:



12. On considère la division euclidienne de s par $N+1$: $s = (N+1)j + i$

$$0 \leq i \leq N$$

De plus, $0 \leq s < (N+1)(M+1)+1$ donc nécessairement $0 \leq j \leq M$. On a montré qu'il existe un unique couple (i,j) tel que $0 \leq i \leq N$, $0 \leq j \leq M$ et $s = s_{i,j}$.

15. On considère la division euclidienne de k par $N-1$: $k = (N-1)q + r$

$$0 \leq r \leq N-2$$

De plus, $0 \leq k < (N-1)(M-1) - 1$ donc nécessairement $0 \leq q \leq M-2$. On pose $i = r+1$ et $j = q+1$. On a montré qu'il existe un unique couple (i,j) tel que $1 \leq i \leq N-1$, $0 \leq j \leq M-1$ et $k = k_{i,j}$.

19. On reprend l'exemple de la question 10 :

numéros globaux

triangles.

21. Supposons que f est affine, montrons que $g(\vec{x}) = f(\vec{x}) - f(0)$ est linéaire.
Soient $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On remarque :

$$\alpha \vec{x} + \beta \vec{y} = \alpha \vec{x} + (1-\alpha)\frac{\beta}{(1-\alpha)}\vec{y} = \alpha \vec{x} + (1-\alpha)\vec{z}$$

où $\vec{z} = \underbrace{\frac{\beta}{(1-\alpha)}}_{=\gamma}\vec{y} \in \mathbb{R}^n$

Ainsi :

$$\begin{aligned} g(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) &= f(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) - f(0) \\ &= f(\alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{z}) - f(0) \\ &= \alpha f(\vec{x}) + (1-\alpha) f(\vec{z}) - f(0) \\ &= \alpha f(\vec{x}) + (1-\alpha) f(\vec{z}) - \alpha f(0) \end{aligned}$$

$$- (1-\alpha) f(0)$$

$$= \alpha g(\vec{x}) + (1-\alpha) g(\vec{z})$$

On $(1-\alpha) g(\vec{z}) = (1-\alpha)\, g(\gamma \vec{y})$

$$= (1-\alpha)\big(f(\gamma\vec{y}) - f(0)\big)$$

$$= (1-\alpha)\left(f(\gamma\vec{y} + (1-\gamma)0) - f(0)\right)$$
$$= (1-\alpha)\left(\gamma f(\vec{y}) + (1-\gamma) f(0) - f(0)\right)$$
$$= (1-\alpha)\left(\gamma f(\vec{y}) - \gamma f(0)\right)$$
$$= (1-\alpha)\left(\gamma g(\vec{y})\right)$$
$$= \beta g(\vec{y}).$$

Donc :

$$g(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha g(\vec{x}) + \beta g(\vec{y})$$

Supposons que g est linéaire, montrons que f est affine : Soient $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f(\alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{y}) = f(\alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{y}) - f(0) + f(0)$$
$$= g(\alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{y}) + f(0)$$
$$= \alpha g(\vec{x}) + (1-\alpha) g(\vec{y}) + f(0)$$
$$= \alpha f(\vec{x}) - \alpha f(0) + (1-\alpha) f(\vec{y}) -$$
$$(1-\alpha) f(0) + f(0)$$
$$= \alpha f(\vec{x}) + (1-\alpha) f(\vec{y}).$$

22. Supposons que f est affine, montrons qu'elle est de la forme demandée. D'après la question 21 $(x,y) \longrightarrow f(x,y) - f(0,0)$ est linéaire donc $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x,y) - f(0,0) = \alpha x + \beta y$$

D'où $f(x,y) = \alpha x + \beta y + f(0,0)$
$$= \alpha x + \beta y + \gamma$$

où $\gamma = f(0,0) \in \mathbb{R}$.

Supposons que f est de la forme demandée, montrons qu'elle est affine.
Remarquons : $f(0,0) = \gamma$.
Donc $f(x,y) - f(0,0) = \alpha x + \beta y$

Ainsi $(x,y) \mapsto f(x,y) - f(0,0)$ est linéaire. D'après 21 f est affine.

23. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^{2} \lambda_j \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix}$ et $\sum_{j=0}^{2} \lambda_j = 1$

Revient au système à 3 équations, 3 inconnues suivant :

$$\begin{cases} \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = x \\ \lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = y \\ \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

où les λ_i, $i \in [\![0,2]\!]$ sont les inconnues.
Sous forme matricielle, on a :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}}_{\lambda} = \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}}_{B}$$

Il suffit de montrer que A est inversible pour montrer que le système possède une unique solution. Or, on sait que T n'est pas applati donc $\det A \neq 0$.

24. On détermine l'inverse de A :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} y_1 - y_2 & x_2 - x_1 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ y_2 - y_0 & x_0 - x_2 & x_2 y_0 - x_0 y_2 \\ y_0 - y_1 & x_1 - x_0 & x_0 y_1 - x_1 y_0 \end{pmatrix}$$

Donc :

$\lambda_0 : (x,y) \mapsto (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + (x_1 y_2 - x_2 y_1)$

$\lambda_1 : (x,y) \mapsto (y_2 - y_0)x + (x_0 - x_2)y + (x_2 y_0 - x_0 y_2)$

$\lambda_2 : (x,y) \mapsto (y_0 - y_1)x + (x_1 - x_0)y + (x_0 y_1 - x_1 y_0)$

En utilisant la question 22, on a que les fonctions $(x,y) \mapsto \lambda_i(x,y)$, $i \in [\![0,2]\!]$ sont affines car de la forme demandée.

25. En utilisant la question 24, on obtient :

$\lambda_j(x_i, y_i) = 0$ pour $i \neq j$.

Et :

$\lambda_0(x_0, y_0) = (y_1 - y_2)x_0 + (x_2 - x_1)y_0 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)$

$\lambda_1(x_1, y_1) = (y_2 - y_0)x_1 + (x_0 - x_2)y_1 + (x_2 y_0 - x_0 y_2)$

$\lambda_2(x_2, y_2) = (y_0 - y_1)x_2 + (x_1 - x_0)y_2 + (x_0 y_1 - x_1 y_0)$

26. On sait que f est affine $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ donc d'après la question 22 f est de la forme $f(x,y) = \alpha x + \beta y + \gamma$ où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

Donc :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \alpha\left(\sum_{i=0}^{2} \lambda_i x_i\right) + \beta\left(\sum_{i=0}^{2} \lambda_i y_i\right) + \gamma \\ &= \sum_{i=0}^{2} \lambda_i(\alpha x_i + \beta y_i) + \sum_{i=0}^{2} \lambda_i \\ &= \sum_{i=0}^{2} \lambda_i(\alpha x_i + \beta y_i + 1) \\ &= \sum_{i=0}^{2} \lambda_i f(x_i, y_i) \end{aligned}$$

Ainsi si $\forall i \in [\![0,2]\!]$ $f(x_i, y_i) = 0$, on a $f(x,y) = \sum_{i=0}^{2} \lambda_i \times 0 = 0$.

27. En utilisant la question 24 avec les coordonnées $(\hat{x}_0, \hat{y}_0)$, $(\hat{x}_1, \hat{y}_1)$ et $(\hat{x}_2, \hat{y}_2)$

On a :

$\hat{\lambda}_0(x,y) = 1 - x - y$

$\hat{\lambda}_1(x,y) = x$

$\hat{\lambda}_2(x,y) = y$

28. On a que F_T est affine donc d'après la question 21. $\tilde{F}_T(x,y) = F_T(x,y) - F_T(0,0)$ est linéaire.

Donc il existe une matrice C à coefficients réels telle que :

$$\tilde{F}_T(x,y) = C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Déterminons C :

$$\tilde{F}_T(\hat{x}_1, \hat{y}_1) = F_T(1,0) - F_T(0,0) = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{F}_T(\hat{x}_2, \hat{y}_2) = F_T(0,1) - F_T(0,0) = \begin{pmatrix} x_2 - x_0 \\ y_2 - y_0 \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_0 \\ y_2 - y_0 \end{pmatrix}$$

D'où :

$a = x_1 - x_0$

$b = x_2 - x_0$

$c = y_1 - y_0$

$d = y_2 - y_0$

$$C = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{pmatrix}$$

D'où $F_T(x,y) = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

29. Pour montrer que F_T est inversible, on donne son inverse :

$$F_T^{-1}(x,y) = C^{-1}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right).$$

30. On détermine la jacobienne de F_T :

$$B_T = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{pmatrix}$$

32. On a $\det(B_T) = (x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (x_2 - x_0)(y_1 - y_0)$.

Déterminons l'aire de T que l'on note A_T :

$$\begin{aligned} A_T &= \frac{1}{2}\left(x_0(y_1 - y_2) + x_1(y_2 - y_0) + x_2(y_0 - y_1)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(x_0y_1 - x_0y_2 + x_1y_2 - x_1y_0 + x_2y_0 - x_2y_1\right) \\ &= \frac{1}{2}\left((x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (x_2 - x_0)(y_1 - y_0)\right) \\ &= \frac{1}{2}\det B_T \end{aligned}$$

33. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on note :

$$(\hat{x}, \hat{y}) = F_T^{-1}(x,y)$$

On a $(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_{i=0}^{2} \hat{\lambda}_i (\hat{x}_i, \hat{y}_i)$

Donc comme F_T est affine et que $\sum_{i=0}^{2} \hat{\lambda}_i = 1$, on a :

$$\begin{aligned} (x,y) &= F_T(\hat{x}, \hat{y}) \\ &= \sum_{i=0}^{2} \hat{\lambda}_i(\hat{x}, \hat{y})\, F_T(\hat{x}_i, \hat{y}_i) \\ &= \sum_{i=0}^{2} \hat{\lambda}_i(\hat{x}, \hat{y})\,(x_i, y_i) \end{aligned}$$

Donc les $\hat{\lambda}_i(\hat{x},\hat{y})$ respectent le système de la question 23. On en déduit que :

$$\forall i \in [\![0,2]\!] \quad \hat{\lambda}_i(\hat{x},\hat{y}) = \lambda_i(x,y)$$

Ainsi $\lambda_i(x,y) = \hat{\lambda}_i(F_T^{-1}(x,y))$

D'où $\lambda_i = \hat{\lambda}_i \circ F_T^{-1}$, $\forall i \in [\![0,2]\!]$

34.

35\. • $\int_T \nabla \lambda_k \nabla \lambda_j \, dx\, dy \underset{\substack{\nabla \lambda_i \text{ est un vecteur} \\ \text{constant } \forall i \in [\![0,2]\!]}}{=} \nabla \lambda_k \nabla \lambda_j \int_T dx\,dy$

$= \nabla \lambda_k \nabla \lambda_j A_T = \frac{1}{2} \nabla \lambda_k \nabla \lambda_j \det(B_T).$

• On applique un changement de variable

$\int_T \frac{\partial \lambda_k}{\partial x} \lambda_j \, dx\, dy = \int_{\hat{T}} \frac{\partial \lambda_k}{\partial \hat{x}} (F_T(x,y)) \lambda_j (F_T(x,y))$

$|\det(B_T)| \, dx\, dy$

$= \int_{\hat{T}} \frac{\partial \hat{\lambda}_k}{\partial \hat{x}} (x,y) \hat{\lambda}_j (x,y) |\det$

$(B_T)| \, dx\, dy$

$= (1,0) \nabla \hat{\lambda}_k |\det(B_T)| \int_{\hat{T}} \hat{\lambda}_j \, dx dy$

• On applique un changement de variable :

$\int_T \lambda_k \lambda_j \, dx\, dy = \int_{\hat{T}} \lambda_k (F_T(x,y)) \lambda_j (F_T(x,y))$

$|\det(B_T)| \, dx\, dy$

$= |\det(B_T)| \int_{\hat{T}} \hat{\lambda}_k \hat{\lambda}_j \, dx\, dy$

36\. Avec $j = 0$:

$\int_{\hat{T}} \lambda_j \, dx\, dy = \int_{\hat{T}} \lambda_0 \, dx\, dy$

$= \int_0^1 \int_0^{1-x} 1 - x - y \, dy\, dx$

$= \int_0^1 \left[y(1-x) - \frac{1}{2} y^2 \right]_0^{1-x}$

$$= \int_0^1 (1-x)^2 - \frac{1}{2}(1-x)^2 \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x)^2 \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} x^3 - x^2 + x \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - 1 + 1 \right)$$

$$= \frac{1}{6}.$$

En appliquant le même procédé pour $j = 1$ et $j = 2$, on trouve $\int_{\hat{T}} \hat{\lambda}_j \, dx\, dy = \frac{1}{6}$ pour tout $j \in [\![0, 2]\!]$.

Et $\int_{\hat{T}} \hat{\lambda}_k \hat{\lambda}_j \, dx\, dy = \frac{1}{12}$ pour tous $k, j \in [\![0, 2]\!]$ non tous deux nuls et

$\int_{\hat{T}} \lambda_k \lambda_j \, dx\, dy = \frac{1}{24}$ pour $k = j = 0$.