1. Préliminaires

1) $$u_*(x,y) = \frac{(a-x)\,u_g(y) + (a+x)\,u_d(y)}{2a}$$

u_* satisfait (2) :

$$u_*(x, \pm b) = \frac{(a-x)\,\overbrace{u_g(\pm b)}^{=0} + (a+x)\,\overbrace{u_d(\pm b)}^{=0}}{2a} = 0$$

u_* satisfait (3) :

$$u_*(-a, y) = \frac{\overbrace{(a-(-a))}^{=2a}\,u_g(y) + \overbrace{(a+(-a))}^{=0}\,u_d(y)}{2a} = \frac{2a\,u_g(y)}{2a} = u_g(y)$$

$$u_*(a,y) = \frac{\overbrace{(a-a)}^{=0}\,u_g(y) + \overbrace{(a+a)}^{=2a}\,u_d(y)}{2a} = \frac{2a\,u_d(y)}{2a} = u_d(y)$$

De plus u_* est de classe C^2 car somme de produit de fonctions de classe C^2.

2) $w = u - u_*$

u et u_* respectent les conditions (2) et (3) donc sont égales au bord.
Donc w est nul au bord.
De plus u et u_* sont de classe C^2 donc w est aussi de classe C^2.
Donc $w \in V$.

$$\forall v \in V \qquad G = \int_\Omega \varepsilon \nabla w \cdot \nabla v + \gamma \frac{\partial w}{\partial x} v + \lambda w v \, dx\,dy$$

$$G = \int_\Omega \varepsilon \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\,dx\,dy + \int_\Omega \varepsilon \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\,dx\,dy + \int_\Omega \gamma \frac{\partial w}{\partial x} v + \lambda w v\,dx\,dy$$

$$G = \int_{-b}^{b}\left(\int_{-a}^{a} \varepsilon \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\,dx\right)dy + \int_{-a}^{a}\left(\int_{-b}^{b} \varepsilon \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\,dy\right)dx + \int_\Omega \gamma \frac{\partial w}{\partial x} v + \lambda w v\,dx\,dy$$

$$G = \int_{-b}^{b} \left(\underbrace{\left[\varepsilon \frac{\partial w}{\partial x} v \right]_{-a}^{a}}_{=0 \text{ car } v \text{ nul au bord}} - \int_{-a}^{a} \varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} v \, dx \right) dy + \int_{-a}^{a} \left(\underbrace{\left[\varepsilon \frac{\partial w}{\partial y} v \right]_{-b}^{b}}_{=0 \text{ car } v \text{ nul au bord.}} - \int_{-b}^{b} \varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} v \, dy \right) dx$$

$$+ \int_{\Omega} \gamma \frac{\partial w}{\partial x} v + \lambda w v \, dx dy$$

$$G = \int_{-b}^{b} \int_{-a}^{a} -\varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} v \, dx dy + \int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} -\varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} v \, dy dx + \int_{\Omega} \gamma \frac{\partial w}{\partial x} v + \lambda w v \, dx dy$$

$$G = \int_{\Omega} -\varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} v - \varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} v + \gamma \frac{\partial w}{\partial x} v + \lambda w v \, dx dy$$

$$G = \int_{\Omega} \left(-\varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial w}{\partial x} + \lambda w \right) v \, dx dy$$

$w = u - u_*$ Or $-\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \gamma \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda u = 0$

Donc $G = \int_{\Omega} \left(\varepsilon \frac{\partial^2 u_*}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 u_*}{\partial y^2} - \gamma \frac{\partial u_*}{\partial x} - \lambda u_* \right) v \, dx dy$

En posant $\boxed{f_h = \varepsilon \frac{\partial^2 u_*}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 u_*}{\partial y^2} - \gamma \frac{\partial u_*}{\partial x} - \lambda u_*}$

On obtient $G = \int_{\Omega} f_h v \, dx dy$.

4) Soient w_1 et w_2 deux solutions de (4).

$$\left.\begin{array}{l} \forall v \in V \quad a_h(w_1, v) = \ell_h(v) \\ \qquad\quad\; a_h(w_2, v) = \ell_h(v) \end{array}\right\} \Rightarrow a_h(w_1, v) = a_h(w_2, v)$$

$$\Rightarrow a_h(w_1, v) - a_h(w_2, v) = 0$$

a_h est bilinéaire donc $a_h(w_1 - w_2, v) = 0 \qquad \forall v \in V$

$w_1 - w_2 \in V$ donc $a_h(w_1 - w_2, w_1 - w_2) = 0$

On montre que $\forall w \in V \quad \int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x} w \, dx\, dy = 0$

$$\int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x} w \, dx\, dy = \int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a} w \frac{\partial w}{\partial x} \, dx\, dy = \int_{-b}^{b} \Big(\underbrace{[w^2]_{-a}^{a}}_{=0 \text{ car } w \text{ nul au bord.}} - \int_{-a}^{a} \frac{\partial w}{\partial x} w \, dx \Big) dy$$

$$\int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x} w \, dx\, dy = \int_{-b}^{b} -\int_{-a}^{a} w \frac{\partial w}{\partial x} w \, dx\, dy = -\int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x} w \, dx\, dy$$

$$\Rightarrow 2\int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x} w \, dx\, dy = 0 \Leftrightarrow \int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x} w \, dx\, dy = 0.$$

$$\Rightarrow a_h(w, w) = \int_\Omega \varepsilon \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \varepsilon \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \lambda w^2 \, dx\, dy$$

$$\Rightarrow a_h(w_1 - w_2, w_1 - w_2) = \int_\Omega \underbrace{\varepsilon \left(\frac{\partial (w_1 - w_2)}{\partial x}\right)^2 + \varepsilon \left(\frac{\partial (w_1 - w_2)}{\partial y}\right)^2 + \lambda (w_1 - w_2)^2}_{\geq 0} \, dx\, dy$$

Or $a_h(w_1 - w_2, w_1 - w_2) = 0$ Donc $w_1 - w_2 = 0$

Donc $w_1 = w_2$, ce qui prouve que (4) a au plus une solution.

5) u_η est de classe C^2 sur le fermé $\overline{\Omega}$. u_η admet donc un minimum sur $\overline{\Omega}$.

Si ce minimum est atteint sur le bord, alors il est positif car u_η est positif au bord. Donc $u_\eta \geqslant 0$ sur $\overline{\Omega}$ donc sur Ω aussi.

Sinon, ce minimum est atteint en un point $p \in \Omega$.

Alors $\dfrac{\partial^2 u_\eta}{\partial x^2}(p) \geqslant 0$, $\dfrac{\partial^2 u_\eta}{\partial y^2}(p) \geqslant 0$, $\dfrac{\partial u_\eta}{\partial x} = 0$

On
$$\underbrace{-\underbrace{\varepsilon}_{>0}\underbrace{\frac{\partial^2 u_\eta}{\partial x^2}(p)}_{\geqslant 0} - \underbrace{\varepsilon}_{>0}\underbrace{\frac{\partial^2 u_\eta}{\partial y^2}(p)}_{\geqslant 0}}_{\leqslant 0} + \gamma \underbrace{\frac{\partial u_\eta}{\partial x}(p)}_{=0} + \underbrace{\lambda}_{>0} u_\eta(p) = 0$$

Donc $u_\eta(p) \geqslant 0 \implies u_\eta \geqslant 0$ sur Ω.

6) a) $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) + u(x,y) = 0 \implies u$ de la forme $f(y)\,e^{-x}$

$u(-1,y) = u_g(y) \iff f(y)\,e^{1} = u_g(y) \implies f(y) = \dfrac{u_g(y)}{e}$

Donc il n'y a qu'une seule solution : $u_0(x,y) = \dfrac{u_g(y)}{e}\, e^{-x}$

b) $u_d(y) = u_0(1,y) = \dfrac{u_g(y)}{e}\, e^{-1} = \dfrac{u_g(y)}{e^2}$

Le problème (1)-(2)-(3) admet une solution dans ce cas si $u_d(y) = \dfrac{u_g(y)}{e^2}$.

7) $-\varepsilon \frac{\partial^2 u_h}{\partial x^2}(x,y) - \varepsilon \frac{\partial^2 u_h}{\partial y^2}(x,y) + \gamma \frac{\partial u_h}{\partial x}(x,y) + \lambda u_h(x,y) = 0$

$u_h(x,y) = U(x) \sin(\pi y)$

$\Rightarrow -\varepsilon U''(x) \sin(\pi y) + \varepsilon \pi^2 U(x) \sin(\pi y) + \gamma U'(x) \sin(\pi y) + \lambda U(x) \sin(\pi y) = 0$

$\Leftrightarrow \sin(\pi y)\left(-\varepsilon U''(x) + \varepsilon \pi^2 U(x) + \gamma U'(x) + \lambda U(x)\right) = 0$

$\Rightarrow -\varepsilon U''(x) + \gamma U'(x) + (\varepsilon \pi^2 + \lambda) U(x) = 0$

$\Leftrightarrow -U''(x) + \frac{\gamma}{\varepsilon} U'(x) + \left(\pi^2 + \frac{\lambda}{\varepsilon}\right) U(x) = 0$

On pose $A = \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\varepsilon} - \sqrt{\frac{\gamma^2}{\varepsilon^2} + 4\pi^2 + 4\frac{\lambda}{\varepsilon}}\right)$

et $B = \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{\gamma^2}{\varepsilon^2} + 4\pi^2 + 4\frac{\lambda}{\varepsilon}}\right)$

$\Rightarrow U(x) = C_1 e^{Ax} + C_2 e^{Bx}$ avec C_1 et C_2 des constantes.

$u_h(-1,y) = \sin(\pi y) = U(-1) \sin(\pi y) \Rightarrow U(-1) = 1$

$u_h(1,y) = 0 = U(1) \sin(\pi y) \Rightarrow U(1) = 0$

$U(1) = 0 \Leftrightarrow C_1 e^{A} + C_2 e^{B} = 0 \Leftrightarrow C_1 e^{A} = -C_2 e^{B}$

$\Leftrightarrow C_1 = -C_2 e^{B-A}$

$U(-1) = 1 \Leftrightarrow C_1 e^{-A} + C_2 e^{-B} = 1$

$\Leftrightarrow -C_2 e^{B-A} e^{-A} + C_2 e^{-B} = 1 \Leftrightarrow C_2 \left(-e^{B-2A} + e^{-B}\right) = 1$

$\Leftrightarrow C_2 = \frac{1}{e^{-B} - e^{B-2A}}$

$$C_1 = -C_2 e^{B-A} = \frac{-e^{B-A}}{e^{-B} - e^{B-2A}} = \frac{1}{-e^{A-2B} + e^{-A}}$$

$$C_1 = \frac{1}{e^{-A} - e^{A-2B}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\varepsilon} - \sqrt{\frac{\gamma^2}{\varepsilon^2} + 4\pi^2 + 4\frac{\lambda}{\varepsilon}}\right) \\ B &= \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{\gamma^2}{\varepsilon^2} + 4\pi^2 + 4\frac{\lambda}{\varepsilon}}\right) \\ C_1 &= \frac{1}{e^{-A} - e^{A-2B}} \\ C_2 &= \frac{1}{e^{-B} - e^{B-2A}} \\ U(x) &= C_1 e^{Ax} + C_2 e^{Bx} \\ u_\eta^P(x,y) &= \left(C_1 e^{Ax} + C_2 e^{Bx}\right) \sin(\pi y) \end{aligned}}$$

8) Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$,
$\Phi : U \to V$ un C^1-difféomorphisme
et f une application de V dans $\mathbb{R}$.

Si U et V sont bornés et si f et $(f \circ \Phi) \times |\det J_\Phi|$ sont Riemann-intégrables, alors

$$\int_V f = \int_U (f \circ \Phi) \times |\det J_\Phi|$$

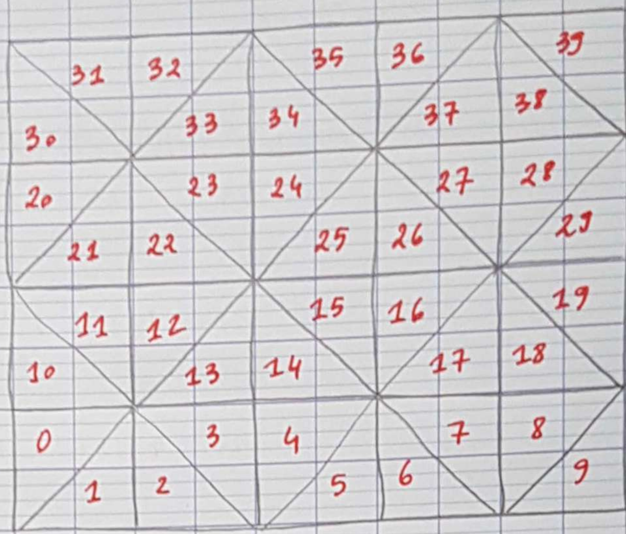
2. Le maillage

10) On prend $N = 5$ et $M = 4$

12) On considère la division euclidienne de s par $N+1$: $s = (N+1)j + i$, $0 \leq i \leq N$.
De plus, $0 \leq s < (N+1)(M+1)+1$ donc $0 \leq j \leq M$.
On a montré qu'il existe un unique couple $(i;j)$ tel que $0 \leq i \leq N$, $0 \leq j \leq M$ et $s = s_{i;j}$.

15) On considère la division euclidienne de k par $N-1$: $k = (N-1)q + r$, $0 \leq r \leq N-2$.
De plus, $0 \leq k < (N-1)(M-1)-1$ donc $0 \leq q \leq M-2$.
On pose $j = q+1$ et $i = r+1$. On a montré qu'il existe un unique couple $(i;j)$ tel que $1 \leq i \leq N-1$, $1 \leq j \leq M-1$ et $k = k_{i;j}$.

19) On reprend l'exemple de la question 10) :



21) Supposons que f est affine, montrons que $g(\vec{x}) = f(\vec{x}) - f(0)$ est linéaire. Soient $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On remarque :

$$\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} = \alpha\vec{x} + (1-\alpha)\frac{\beta}{(1-\alpha)}\vec{y} = \alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{z}$$

où $\vec{z} = \gamma\vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

Ainsi,
$$\begin{aligned} g(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) &= f(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) - f(0) \\ &= f(\alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{z}) - f(0) \\ &= \alpha f(\vec{x}) + (1-\alpha) f(\vec{z}) - \alpha f(0) - (1-\alpha) f(0) \\ &= \alpha g(\vec{x}) + (1-\alpha) g(\vec{z}) \end{aligned}$$

Or,
$$\begin{aligned} (1-\alpha) g(\vec{z}) &= (1-\alpha) g(\gamma\vec{y}) \\ &= (1-\alpha)\left(f(\gamma\vec{y}) - f(0)\right) \\ &= (1-\alpha)\left(f(\gamma\vec{y} + (1-\gamma)0) - f(0)\right) \\ &= (1-\alpha)\left(\gamma f(\vec{y}) + (1-\gamma) f(0) - f(0)\right) \\ &= (1-\alpha)\left(\gamma g(\vec{y})\right) \\ &= \beta g(\vec{y}) \end{aligned}$$

D'où $g(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha g(\vec{x}) + \beta g(\vec{y})$.

Supposons que g est linéaire, montrons que f

est affine. Soient $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(\alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{y}) &= f(\alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{y}) + f(0) - f(0) \\ &= g(\alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{y}) + f(0) \\ &= \alpha g(\vec{x}) + (1-\alpha) g(\vec{y}) + f(0) \\ &= \alpha(f(\vec{x}) - f(0)) + (1-\alpha)(f(y) - f(0)) + f(0) \\ &= \alpha f(\vec{x}) + (1-\alpha) f(\vec{y}) \end{aligned}$$

22) Supposons que f est affine, montrons qu'elle est alors de la forme demandée. D'après 21) $(x,y) \mapsto f(x,y) - f(0,0)$ est linéaire donc $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $f(x,y) - f(0,0) = \alpha x + \beta y$.

D'où $f(x,y) = \alpha x + \beta y + f(0,0)$

$= \alpha x + \beta y + \gamma, \quad \gamma = f(0,0) \in \mathbb{R}$.

Supposons que f est de la forme demandée, montrons qu'elle est alors affine. On remarque que $f(0,0) = \gamma$. Donc $f(x,y) - f(0,0) = \alpha x + \beta y$.
Ainsi $(x,y) \mapsto f(x,y) - f(0,0)$ est linéaire.
D'après 21) f est affine.

23) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^{2} \lambda_j \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix}$ et $\sum_{j=0}^{2} \lambda_j = 1$.

Cela revient au système à 3 équations, 3 inconnues suivant:

$$\begin{cases} \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = x \\ \lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_0 = y \\ \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

où les λ_i, $i \in [\![0, 2]\!]$ sont les inconnues. On peut réécrire le système sous forme matricielle:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}}_{\lambda} = \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ 3 \end{pmatrix}}_{B}$$

Il suffit de montrer que A est inversible pour montrer que le système possède une unique solution. Or, on sait que T n'est pas applati donc $\det A \neq 0$.

24) On détermine l'inverse de A. On note
$d = \det A = x_0 y_1 + x_2 y_0 + x_1 y_2 - (x_2 y_1 + x_1 y_0 + x_0 y_2)$
Donc, en calculant $A^{-1}B$, on a :

$$\lambda_0 : (x,y) \mapsto \frac{1}{d}\left((y_1 - y_2)x + (x_2 - y_1)y + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\right)$$

$$\lambda_1 : (x,y) \mapsto \frac{1}{d}\left((y_2 - y_0)x + (x_0 - x_2)y + (x_2 y_0 - x_0 y_2)\right)$$

$$\lambda_2 : (x,y) \mapsto \frac{1}{d}\left((y_0 - y_1)x + (x_1 - x_0)y + (x_0 y_1 - x_1 y_0)\right)$$

En utilisant 22), on a que les fonctions λ_i, $i \in [\![0,2]\!]$ sont affines.

25) En utilisant 24), on obtient :
$\lambda_j(x_i, y_i) = 0$ pour $i \neq j$.

26) On sait que f est affine de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ donc d'après 22) f est de la forme $f(x,y) = \alpha x + \beta y + \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
Donc, $f(x,y) = \alpha\left(\sum_{i=0}^{2} \lambda_i x_i\right) + \beta\left(\sum_{i=0}^{2} \lambda_i y_i\right) + \gamma$

$$= \sum_{i=0}^{2} \lambda_i (\alpha x_i + \beta y_i) + \sum_{i=0}^{2} \lambda_i \gamma$$

$$= \sum_{i=0}^{2} \lambda_i (\alpha x_i + \beta y_i + \gamma)$$

$$= \sum_{i=0}^{2} \lambda_i f(x_i, y_i)$$

Ainsi, si $\forall i \in [\![0,2]\!]$, $f(x_i', y_i') = 0$, on a $f(x,y) = 0$.

27) En utilisant 24) avec les coordonnées $(\hat{x}_0, \hat{y}_0)$ $(\hat{x}_1, \hat{y}_1)$ et $(\hat{x}_2, \hat{y}_2)$. On a :

$$\hat{\lambda}_0 (x,y) = 1 - x - y$$
$$\hat{\lambda}_1 (x,y) = x$$
$$\hat{\lambda}_2 (x,y) = y$$

28) On a que F_T est affine donc d'après 21), $\tilde{F}_T(x,y) = F_T(x,y) - F_T(0,0)$ est linéaire.
Donc, il existe une matrice C à coefficients réels telle que : $\tilde{F}_T(x,y) = C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
Déterminons C :

$$\tilde{F}_T(\hat{x}_1, \hat{y}_1) = F_T(1,0) - F_T(0,0) = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{F}_T(\hat{x}_2, \hat{y}_2) = F_T(0,1) - F_T(0,0) = \begin{pmatrix} x_2 - x_0 \\ y_2 - y_0 \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_0 \\ y_2 - y_0 \end{pmatrix}$$

D'où : $\begin{cases} a = x_1 - x_0 \\ b = x_2 - x_0 \\ c = y_1 - y_0 \\ d = y_2 - y_0 \end{cases} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{pmatrix}$

D'où $F_T(x,y) = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

29) Pour montrer que F_T est inversible, on donne son inverse :

$$F_T^{-1}(x,y) = C^{-1}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right).$$

30) On détermine la jacobienne de F_T :

$$B_T = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{pmatrix}$$

32) $\det B_T = (x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (x_2 - x_0)(y_1 - y_0)$

Déterminons l'aire de T que l'on note A_T :

$$A_T = \frac{1}{2}\left(x_0(y_1 - y_2) + x_1(y_2 - y_0) + x_2(y_0 - y_1)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(x_0 y_1 - x_0 y_2 + x_1 y_2 - x_1 y_0 + x_2 y_0 - x_2 y_1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left((x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (x_2 - x_0)(y_1 - y_0)\right)$$

$$= \frac{1}{2} \det B_T$$

33) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on note : $(\hat{x},\hat{y}) = F_T^{-1}(x,y)$

On a $(\hat{x},\hat{y}) = \sum_{i=0}^{2} \hat{\lambda}_i (\hat{x}_i, \hat{y}_i)$

Donc, comme F_T est affine et que $\sum_{i=0}^{2} \lambda_i = 1$,

on a : $(x,y) = F_T(\hat{x},\hat{y})$

$$= \sum_{i=0}^{2} \hat{\lambda}_i(\hat{x},\hat{y})\, F_T(\hat{x}_i, \hat{y}_i)$$

$$= \sum_{i=0}^{2} \hat{\lambda}_i(\hat{x},\hat{y})\,(x_i, y_i)$$

Donc les $\hat{\lambda}_i(\hat{x},\hat{y})$ respectent le système vu en 23). On en déduit que $\forall i \in [\![0,2]\!]$

$\hat{\lambda}_i(\hat{x},\hat{y}) = \lambda_i(x,y)$

Ainsi, $\lambda_i(x,y) = \hat{\lambda}_i(F_T^{-1}(x,y))$ D'où $\lambda_i =$
$= \hat{\lambda}_i \circ F_T^{-1}$, $\forall i \in [\![0,2]\!]$

34) On obtient : $\nabla \lambda_i = {}^t(B_T^{-1}) . \nabla \hat{\lambda}_i$, $\forall i \in$
$[\![0,2]\!]$.

35) • $\displaystyle\int_T \nabla\lambda_k \nabla\lambda_j \, dx\,dy \overset{\nabla\lambda_i \text{ est constant.}}{=} \nabla\lambda_k \nabla\lambda_j \int_T dx\,dy =$
$= \nabla\lambda_k \nabla\lambda_j A_T = \frac{1}{2} {}^t(B_T^{-1}) \nabla\hat{\lambda}_k (B_T^{-1}) \nabla\hat{\lambda}_j \det(B_T)$

• $\displaystyle\int_T \frac{\partial \lambda_k}{\partial x} \lambda_j \, dx\,dy = \int_{\hat{T}} \frac{\partial \lambda_k}{\partial x}(F_T(x,y))\, \lambda_j($
$F_T(x,y))\, |\det B_T|\, dx\,dy = \displaystyle\int_{\hat{T}} \frac{\partial \hat{\lambda}_k}{\partial \hat{x}}(\hat{x},\hat{y})\, \hat{\lambda}_j(\hat{x},\hat{y})$
$|\det(B_T)|\, d\hat{x}\,d\hat{y} = (1,0)\, \nabla\hat{\lambda}_k\, |\det(B_T)| \displaystyle\int_{\hat{T}} \hat{\lambda}_j \, d\hat{x}\,d\hat{y}$

• $\displaystyle\int_T \lambda_k \lambda_j \, dx\,dy = \int_{\hat{T}} \lambda_k(F_T(x,y))\, \lambda_j(F_T(x,y))$
$dx\,dy = |\det(B_T)| . \displaystyle\int_{\hat{T}} \hat{\lambda}_k \hat{\lambda}_j \, d\hat{x}\,d\hat{y}$

36) Avec $j = 0$:

$$\int_{\hat{T}} \hat{\lambda}_j \, d\hat{x}\,d\hat{y} = \int_{\hat{T}} \hat{\lambda}_0 \, d\hat{x}\,d\hat{y}$$
$$= \int_0^1 \int_0^{1-\hat{x}} 1 - \hat{x} - \hat{y} \, d\hat{y}\,d\hat{x}$$
$$= \int_0^1 \left[\hat{y}(1-\hat{x}) - \frac{1}{2}\hat{y}^2 \right]_0^{1-\hat{x}} d\hat{x}$$
$$= \int_0^1 (1-\hat{x})^2 - \frac{1}{2}(1-\hat{x})^2 \, d\hat{x}.$$
$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3}\hat{x}^3 - \hat{x}^2 + \hat{x} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{6}$$

En appliquant le même procédé pour $j = 1$ et $j = 2$, on trouve $\int_{\hat{T}} \hat{\lambda}_j \, d\hat{x} \, d\hat{y} = \frac{1}{6}$ pour tout $j \in [\![0, 2]\!]$

Et $\int_{\hat{T}} \hat{\lambda}_k \hat{\lambda}_j \, d\hat{x} \, d\hat{y} = \begin{cases} \frac{1}{24} & \text{si } k \neq j \\ \frac{1}{12} & \text{sinon} \end{cases}$

3 - Le problème discret

38) On remarque que les éléments de V_h sont caractérisés par leurs valeurs aux nœuds intérieurs. On a donc que I_h est un isomorphisme. D'où $\dim V_h = I$.

39) On remarque que l'élément w_k, $k \in [\![0, I-1]\!]$ valent 1 au nœud intérieur k et 0 ailleurs. On peut donc écrire tout élément $v \in V_h$ comme une combinaison linéaire de w_k, $k \in [\![0, I-1]\!]$. Par ailleurs, on voit aisément que la famille $(w_k)_{k \in [\![0, I-1]\!]}$ est libre. Elle forme donc une base de V_h.

40) a) On a $w_{k|T} = 0$

b) On a $w_{k|T} = \lambda^T_{\in \{0,1,2\}}$

c) On a $w_k = \lambda^T_{i \in \{0,1,2\}}$ donc $\nabla w_k = \nabla \lambda^T =$
$= {}^t B_T^{-1} \cdot \nabla \hat{\lambda}$.

Donc $\nabla w_k \nabla w_j = {}^t B_T^{-1} \nabla \hat{\lambda}_e \cdot {}^t B_T^{-1} \nabla \lambda_s$.

41) On cherche $w_\eta^h \in V_h$ tel que $\forall v_h \in V_h$ $a_\eta(w_\eta^h, v_h) = l_\eta(v_h)$. Or, on connaît une base de V_h (question 39)). Donc $w_\eta^h = \sum \alpha_\ell w_\ell$ où $\alpha_\ell \in \mathbb{R}$, $\forall \ell \in [\![0, I-1]\!]$.

Ainsi, déterminer w_η^h revient à déterminer $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{I-1})$ tel que $\sum_{\ell=0}^{I-1} \alpha a(w_\ell, w_k) = l_\eta(w_k)$ pour tout $k \in [\![0, I-1]\!]$. Matriciellement :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_\eta(w_0, w_0) & \cdots & a_\eta(w_{I-1}, w_0) \\ \vdots & & \\ a_\eta(w_0, w_{I-1}) & \cdots & a_\eta(w_{I-1}, w_{I-1}) \end{pmatrix}}_{A_\eta} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_{I-1} \end{pmatrix}}_{U} = \underbrace{\begin{pmatrix} l_\eta(w_0) \\ \vdots \\ l_\eta(w_{I-1}) \end{pmatrix}}_{B_\eta}$$

45) a) Pour $d=0$: $(x,y) \mapsto 1$

- $\int_{\hat{T}} h(\hat{x},\hat{y})\,d\hat{x}\,d\hat{y} = \int_{\hat{T}} d\hat{x}\,d\hat{y} = A_{\hat{T}} = \frac{1}{2}$.

- $\frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Pour $d=1$: $\begin{cases} (x,y) \mapsto x \\ (x,y) \mapsto y \end{cases}$

- $\int_{\hat{T}} h(\hat{x},\hat{y})\,d\hat{x}\,d\hat{y} = \int_{\hat{T}} \hat{x}\,d\hat{x}\,d\hat{y} = \int_0^1 \int_0^{1-\hat{x}} \hat{x}\,d\hat{y}\,d\hat{x}$

$= \int_0^1 [\hat{y}\hat{x}]_0^{1-\hat{x}}\,d\hat{x} = \int_0^1 (1-\hat{x})\hat{x}\,d\hat{x} = [\frac{1}{2}\hat{x}^2 - \frac{1}{3}\hat{x}^3]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

- $\times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times 0 + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

Le raisonnement est identique pour $(x,y) \mapsto y$.

Pour $d=2$: $\begin{cases} (x,y) \mapsto x^2 \\ (x,y) \mapsto y^2 \\ (x,y) \mapsto xy \end{cases}$

- $\int_{\hat{T}} h(\hat{x},\hat{y})\,d\hat{x}\,d\hat{y} = \int_{\hat{T}} x^2\,d\hat{x}\,d\hat{y} = \int_{\hat{T}} \hat{y}\,d\hat{x}\,d\hat{y} =$

$= \frac{1}{12}$

- $\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}$.

- $\int_{\hat{T}} h(\hat{x},\hat{y})\,d\hat{x}\,d\hat{y} = \int_{\hat{T}} xy\,d\hat{x}\,d\hat{y} = \frac{1}{24}$

- $\frac{1}{6} \times 0 + \frac{1}{6} \times 0 + \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$.

Pour $d = 3$: $(x, y) \mapsto x^3$

- $\int_{\hat{T}} h(\hat{x}, \hat{y}) \, d\hat{x} \, d\hat{y} = \int_{\hat{T}} \hat{x}^3 \, d\hat{x} \, d\hat{y} = \frac{1}{20}$
- $\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{24}$

Donc la formule est vraie jusqu'à $d = 2$.