

---

## Exo 1. Maitriser le cours

1) Soit  $A = \{a1, a2, a3\}$  et  $B = \{b1, b2, b3\}$ . Calculez le résultat des expressions suivantes.

- a.  $\text{dom}(\{a1 \mapsto a2, a1 \mapsto a3, a3 \mapsto a2\}) = \{a1, a3\}$
- b.  $\{a1\} \triangleleft \{a1 \mapsto a2, a1 \mapsto a3, a3 \mapsto a2\} \triangleright \{a2\} = \{a1 \mapsto a2\}$
- c.  $\{a1 \mapsto a2, a1 \mapsto a3, a3 \mapsto a2\} <+ \{a1 \mapsto a1\} = \{a1 \mapsto a1, a3 \mapsto a2\}$

----  $<+$  désigne l'opération de surcharge

2) Soit  $A = \{0, 1, 2\}$  et  $B = \{a, b, c\}$  et  $r = \{(0, a), (0, b), (1, c)\}$ . Evaluer les expressions suivantes

- a.  $\{0\} \triangleleft r = \{(0, a), (0, b)\}$
- b.  $\{1\} \triangleleft r = \{(0, a), (0, b)\}$
- c.  $r <+ \{(0, c)\} = \{(0, c), (0, c)\}$
- d.  $r ; r^{-1} = \{(0, 0), (1, 1)\}$

3) Calculez les expressions suivantes; donner la forme la plus simple.

- a.  $[\text{ANY } x \text{ WHERE } x : 1..2 \text{ then } y := y - x \text{ END}] y > 0$  -----  $x : E$  signifie  $x \in E$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \forall x. (x \in 1..2 \Rightarrow y - x > 0) \\ &\Leftrightarrow y - 1 > 0 \wedge y - 2 > 0 \\ &\Leftrightarrow y > 2 \end{aligned}$$

- b.  $[\text{CHOICE } x := x-2 \text{ OR } x := x+2 \text{ END}] x > 2$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow x - 2 > 2 \wedge x + 2 > 2 \\ &\Leftrightarrow x > 4 \end{aligned}$$

- c.  $[\text{SELECT } x \geq 0 \text{ THEN } x := x-2 \text{ WHEN } x \leq 1 \text{ THEN } x := x+2 \text{ END}] x > 4$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (x \geq 0 \Rightarrow x - 2 > 4) \wedge (x \leq 1 \Rightarrow x + 2 > 4) \\ &\Leftrightarrow (x \geq 0 \Rightarrow x > 6) \wedge (x \leq 1 \Rightarrow x > 2) \\ &\Leftrightarrow (x < 0 \vee x > 6) \wedge (x > 1 \vee x > 2) \\ &\Leftrightarrow (x < 0 \wedge x > 1) \vee (x < 0 \wedge x > 2) \vee (x > 6 \wedge x > 1) \vee (x > 6 \wedge x > 2) \\ &\Leftrightarrow x > 6 \end{aligned}$$

4) Dites si les opérations suivantes préservent l'invariant  $x:1..3$  (qui signifie  $x$  est un entier qui appartient à l'intervalle  $[1, 3]$ ).

Si une opération n'a pas de précondition, utilisez TRUE comme précondition.

- a.  $\text{op1} = \text{CHOICE } x := 0 \text{ OR } x := 1 \text{ END};$

Solution: **FAUX**

Il faut prouver

$$x \in 1..3 \Rightarrow [\text{CHOICE } x := 0 \text{ OR } x := 1 \text{ END}] (x \in 1..3)$$

Supposons  $x \in 1..3$  et calculons  $[\text{CHOICE } x := 0 \text{ OR } x := 1 \text{ END}](x \in 1..3)$

$\Leftrightarrow [\text{CHOICE } x := 0 \text{ OR } x := 1 \text{ END}](x \in 1..3)$   
 $\Leftrightarrow [x := 0](x \in 1..3) \& [x := 1](x \in 1..3)$   
 $\Leftrightarrow 0 \in 1..3 \& 1 \in 1..3$   
 $\Leftrightarrow \text{Faux}$   
 L'invariant n'est donc pas préservé.

b.  $\text{op2} = \text{PRE } x = 0 \text{ THEN ANY } y \text{ WHERE } y : 2..4 \text{ THEN } x := y \text{ END END};$

**Solution: VRAI**

Il faut montrer

$x \in 1..3 \& x = 0 \Rightarrow [\text{ANY } y \text{ WHERE } y : 2..4 \text{ THEN } x := y \text{ END}](x \in 1..3)$

Puisque  $x \in 1..3 \& x = 0 \Leftrightarrow \text{faux}$ , alors l'implication est vraie.

c.  $\text{op3} = \text{SELECT } x : 1..2 \text{ THEN } x := x - 1$   
 $\text{WHEN } x : 2..3 \text{ THEN } x := x + 1$   
 $\text{END};$

**Solution: FAUX**

Il faut montrer

$x \in 1..3$   
 $\Rightarrow$   
 $[\text{SELECT } x : 1..2 \text{ THEN } x := x - 1$   
 $\text{WHEN } x : 2..3 \text{ THEN } x := x + 1 \text{ END}](x \in 1..3)$

Supposons  $x \in 1..3$  et calculons

$[\text{SELECT } x : 1..2 \text{ THEN } x := x - 1$   
 $\text{WHEN } x : 2..3 \text{ THEN } x := x + 1 \text{ END}](x \in 1..3)$   
 $\Leftrightarrow$   
 $x : 1..2 \Rightarrow [x := x - 1](x \in 1..3)$   
 $\&$   
 $x : 2..3 \Rightarrow [x := x + 1](x \in 1..3)$   
 $\Leftrightarrow$   
 $x : 1..2 \Rightarrow (x - 1 \in 1..3)$   
 $\&$   
 $x : 2..3 \Rightarrow (x + 1 \in 1..3)$

Considérant l'hypothèse  $x \in 1..3$ , cette formule n'est pas satisfaite pour  $x=1$  et pour  $x=3$ . L'invariant n'est donc pas préservé.