AFGL – TD 1

ENSEMBLES ET RELATIONS

1 Ensemble des parties et produit cartésien

Soit $S = \{a, b\}$ et $T = \{1, 2\}$

Q1.1 *Calculer* $\mathbb{P}(\mathbb{P}(S))$

$\mathbb{P}(S) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

Pour illustrer la deuxième partie, on peut remplacer $\emptyset$ par A, $\{a\}$ par B, $\{b\}$ par C et $\{a, b\}$ par D. On doit obtenir $2^4 = 16$ éléments.

$\mathbb{P}(\mathbb{P}(S)) = \{$

$\emptyset$,	($\emptyset$)
$\{\emptyset\}$,	($\{A\}$)
$\{\{a\}\}$,	($\{B\}$)
$\{\{b\}\}$,	($\{C\}$)
$\{\{a, b\}\}$,	($\{D\}$)
$\{\emptyset, \{a\}\}$,	($\{A, B\}$)
$\{\emptyset, \{b\}\}$,	($\{A, C\}$)
$\{\emptyset, \{a, b\}\}$,	($\{A, D\}$)
$\{\{a\}, \{b\}\}$,	($\{B, C\}$)
$\{\{a\}, \{a, b\}\}$,	($\{B, D\}$)
$\{\{b\}, \{a, b\}\}$,	($\{C, D\}$)
$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}$,	($\{A, B, C\}$)
$\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$,	($\{A, B, D\}$)
$\{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}\}$,	($\{A, C, D\}$)
$\{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$,	($\{B, C, D\}$)
$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$	($\{A, B, C, D\}$)

$\}$

Q1.2 *Décrire* $\mathbb{P}(S \times T)$

Rappels :

- $A \times B = \{a \mapsto b \mid a \in A \wedge b \in B\}$, où $a \mapsto b$ est une paire ordonnée (aussi noté (a, b) ou $<a, b>$)
- $\mathbb{P}(A) = \{E \mid E \subseteq A\}$

Description en compréhension de $\mathbb{P}(S \times T)$:
$\mathbb{P}(S \times T) = \{E \mid E \subseteq \{x \mapsto y \mid x \in S \wedge y \in T\}\}$

Description en extension de $S \times T$:
$S \times T = \{a \mapsto 1, a \mapsto 2, b \mapsto 1, b \mapsto 2\}$

Description en extension de $\mathbb{P}(S \times T)$:
$\mathbb{P}(S \times T) = \{$

$\emptyset$,
$\{a \mapsto 1\}$,
$\{a \mapsto 2\}$,
$\{b \mapsto 1\}$,
$\{b \mapsto 2\}$,
$\{a \mapsto 1, a \mapsto 2\}$,
$\{a \mapsto 1, b \mapsto 1\}$,
$\{a \mapsto 1, b \mapsto 2\}$,
$\{a \mapsto 2, b \mapsto 1\}$,
$\{a \mapsto 2, b \mapsto 2\}$,
$\{b \mapsto 1, b \mapsto 2\}$,
$\{a \mapsto 1, a \mapsto 2, b \mapsto 1\}$,
$\{a \mapsto 1, a \mapsto 2, b \mapsto 2\}$,
$\{a \mapsto 1, b \mapsto 1, b \mapsto 2\}$,
$\{a \mapsto 2, b \mapsto 1, b \mapsto 2\}$,
$\{a \mapsto 1, a \mapsto 2, b \mapsto 1, b \mapsto 2\}$
$\}$

2 Compréhension et extension

Pour chaque ensemble suivant (décrit en compréhension), fournir une description en extension puis, si la relation décrite est une fonction l'exprimer en utilisant une λ notation.

Q2.1 $A = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \wedge x < 5 \wedge x + y = 3\}$

$A = \{(0,3),(1,2),(2,1),(3,0)\} = \{0 \mapsto 3, 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 0\}$

Rappel : une fonction est une relation pour laquelle chaque élément du domaine possède au plus une image.

Ici A est bien une fonction.

Rappel : $\lambda x.(x \in S \wedge P \mid E)$ est une fonction qui relie une entrée x à une expression E (en général $E(x)$) tel que le prédicat P soit vérifié : $\lambda x.(x \in S \wedge P \mid E) = \{x \mapsto y \mid x, y \in S \times T \wedge P \wedge y = E\}$, avec $\forall x.(x \in S \wedge P \Rightarrow E \in T)$.

$A = \lambda x.(x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 3 \mid 3 - x)$

Q2.2 $B = \lambda x.(x \in \mathbb{N} \wedge x < 11 \wedge x \equiv 0\,(mod\,2) \mid x \div 2)$

Description en extension :
$B = \{0 \mapsto 0, 2 \mapsto 1, 4 \mapsto 2, 6 \mapsto 3, 8 \mapsto 4, 10 \mapsto 5\}$

Description en compréhension :
$B = \{x \mapsto y \mid x, y \in N \times \{0, 1, ..., 5\} \wedge x = 2y\}$

Q2.3 *Une fonction C qui associe n avec* $1 + 2^n$

$C = \{0 \mapsto 2, 1 \mapsto 3, 2 \mapsto 5, 3 \mapsto 9, 4 \mapsto 17, 5 \mapsto 33, ...\}$

$C = \lambda x.(1 + 2^x)$ ou, pour préciser le domaine, $C = \lambda x.(x \in \mathbb{N} \mid 1 + 2^x)$

Q2.4 *Une fonction D qui associe un ensemble non vide d'entiers naturels avec son plus petit membre*

$D = \{\{0\} \mapsto 0, \{1\} \mapsto 1, \{0,1\} \mapsto 0, \ldots\}$

$D = \lambda x.(x \in \mathbb{P}(\mathbb{N}) - \emptyset \mid \min(x))$

$D = \lambda x.(x \in \mathbb{P}(\mathbb{N}) - \emptyset \mid a, a \in x \land \forall b \in x, b \geq a)$
Note : la deuxième partie de l'expression n'est pas valide en Lambda-calcul.

3 Composition de relations

Soit la relation $R = \{0 \mapsto 2, 1 \mapsto 0, 2 \mapsto 1\}$

Q3.1 *Calculer* R^2, R^3, R^4 *et* R^*

Rappel : Soient $R_1 \in t \leftrightarrow u$ et $R_2 \in u \leftrightarrow v$

$R_1; R_2 = R_2 \circ R_1 = \{x, z \mid x, z \in t \times v \land \exists y.(y \in u \land (x \mapsto y) \in R_1 \land (y \mapsto z) \in R_2)\}$

$R^2 = \{0 \mapsto 1, 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 0\}$

$R^3 = \{0 \mapsto 0, 1 \mapsto 1, 2 \mapsto 2\} = \mathrm{Id}(\{1,2,3\})$

$R^4 = R \circ R^3 = R \circ Id = R$

Fermeture transitive : $R^+ = \cup_{i \in \mathbb{N}^*} R^i$

Note : r est une relation transitive si $a \mapsto b \in r \land b \mapsto c \in r \Rightarrow a \mapsto c \in r$

$R^+ = \{0 \mapsto 0, 0 \mapsto 1, 0 \mapsto 2, 1 \mapsto 0, 1 \mapsto 1, 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 0, 2 \mapsto 1, 2 \mapsto 2\}$

Fermeture réflexive transitive : $R^* = \cup_{i \in \mathbb{N}} R^i = R^+ \cup R^0$, où R^0 est la relation identité $R^0 = \mathrm{Id}(\{0,1,2\})$.

ici, $R^* = R^+$ car $\mathrm{Id}(\{0,1,2\}) \subseteq R^+$.

4 Restriction

Soient les relations :

- $R_1 = \{2 \mapsto 1, 2 \mapsto 8, 3 \mapsto 9, 4 \mapsto 7, 4 \mapsto 9\}$
- $R_2 = \{3 \mapsto 3, 5 \mapsto 4\}$

et les ensembles $E = \{1,2,3\}$ et $F = \{5,7,9\}$.

Q4.1 *Calculer* $E \lhd R_1$

Rappel : restriction de domaine de r $(r \in A \leftrightarrow B)$
$E \lhd r = \{a \mapsto b \mid a \mapsto b \in r \land a \in E\}$

$E \lhd R_1 = \{2 \mapsto 1, 2 \mapsto 8, 3 \mapsto 9\}$

Q4.2 *Calculer* $E ⩤ R_1$

Rappel : anti-restriction de domaine de r $(r \in A \leftrightarrow B)$
$E ⩤ r = (A - E) \lhd r = r - E \lhd r$

$E ⩤ R_1 = \{4 \mapsto 7, 4 \mapsto 9\}$

Q4.3 *Calculer* $R_1 \rhd F$

Rappel : restriction de codomaine de r $(r \in A \leftrightarrow B)$
$r \rhd E = \{a \mapsto b \mid a \mapsto b \in r \wedge b \in E\}$

$R_1 \rhd F = \{3 \mapsto 9, 4 \mapsto 7, 4 \mapsto 9\}$

Q4.4 *Calculer* $R_1 ⩥ F$

Rappel : anti-restriction de codomaine de r $(r \in A \leftrightarrow B)$
$r ⩥ E = r \rhd (B - E) = r - r \rhd E$

$R_1 ⩥ F = \{2 \mapsto 1, 2 \mapsto 8\}$

Q4.5 *Calculer* $R_1 \Leftarrow\!\!+ R_2$ *(surcharge)*

Rappel : $r \Leftarrow\!\!+ s = (\mathrm{dom}(s) ⩤ r) \cup s$

Intuitivement, on surcharge s par r sur les éléments qu'il lui manque de son domaine.

$R_1 = \{2 \mapsto 1, 2 \mapsto 8, 3 \mapsto 3, 4 \mapsto 7, 4 \mapsto 9, 5 \mapsto 4\}$

5 Modélisation d'un parking

Soient quatre ensembles ABONNES, BADGES, CLIENTS et PLACES, et trois fonctions ABONNEMENTS, RESERVATIONS et STATIONNEMENTS.

Pour chacune des spécifications ci-dessous, donner sa représentation formelle.

Q5.1 *Les abonnés sont des clients particuliers.*

ABONNES $\subseteq$ CLIENTS

Q5.2 *Chaque badge appartient à un unique abonné et chaque abonné possède au moins un badge.*

Rappel :

- Injection (symbole $\rightarrowtail$) : chaque image possède au plus un antécédent
- Surjection (symbole $\twoheadrightarrow$) : chaque image possède au plus un antécédent
- Bijection : injection et surjection
- Chaque fonction peut être totale (symbole $\rightarrow$) si son domaine est égal à l'ensemble de départ, ou partielle dans tous les cas (symbole $\nrightarrow$)

ABONNEMENTS $\in$ BADGES $\rightarrow$ ABONNES

- fonction : chaque badge est associé à au plus un abonné
- fonction totale (symbole $\rightarrow$) : chaque badge est associé à exactement un abonné
- la surjection impose que chaque image possède un antécédent

- ABONNEMENTS est bien une fonction car chaque badge est associé à au plus un abonné.
- ABONNEMENTS est totale car chaque badge est associé à un abonné.
- ABONNEMENTS n'est pas une injection car un abonné peut avoir plusieurs badges.

- ABONNEMENTS est une surjection car chaque abonné possède au moins un badge.

ABONNEMENTS $\in$ BADGES $\twoheadrightarrow$ ABONNES (surjection totale)

Q5.3 *Les abonnées possèdent des places réservées nominatives.*

RESERVATIONS $\in$ PLACES $\rightarrow$ ABONNES

- RESERVATIONS est bien une fonction car chaque place est réservée par au plus un abonné.
- RESERVATIONS n'est pas totale car toutes les places ne sont pas réservées.
- RESERVATIONS n'est pas une injection car un abonné peut avoir plusieurs places réservées.
- RESERVATIONS est une surjection car chaque abonné possède une place.

ABONNEMENTS $\in$ PLACES $\twoheadrightarrow$ ABONNES (surjection partielle)

Q5.4 *Les clients stationnent sur des places.*

STATIONNEMENTS $\in$ PLACES $\rightarrow$ CLIENTS

- STATIONNEMENTS est bien une fonction car chaque place est occupée par au plus un client.
- STATIONNEMENTS n'est pas totale car toutes les places ne sont pas occupées.
- STATIONNEMENTS n'est pas une injection car un client peut occuper plusieurs places.
- STATIONNEMENTS n'est pas une surjection car chaque client n'occupe pas nécessairement une place.

STATIONNEMENTS $\in$ PLACES $\rightarrowtail$ CLIENTS (fonction partielle)

Q5.5 *Exprimer la condition de respect des réservations.*

$\forall p \in dom(\text{STATIONNEMENTS}) \cap dom(\text{RESERVATIONS}),$
$\text{STATIONNEMENTS}(p) = \text{RESERVATIONS}(p)$

6 Relations familiales

Soient les ensembles de personnes *personne*, *homme* et *femme*, et les relations *mari* et *mère*.

Pour chacune des spécifications énoncées, donner sa représentation formelle.

Q6.1 *Toute personne est un homme ou une femme.*

personne $\subseteq$ homme $\cup$ femme

Q6.2 *Une personne ne peut être à la fois un homme et une femme.*

homme $\cap$ femme $= \emptyset$

Q6.3 *Le mari d'une femme est un homme.*

Rappel : $u \longleftrightarrow v = \mathbb{P}(u \times v)$ i.e. l'ensemble des relations entre u et v.

mari $\in$ femme $\longleftrightarrow$ homme

Q6.4 *Les femmes ont au plus un mari.*

Rappel : $u \nrightarrow v$ est l'ensemble des fonctions partielles entre u et v, i.e., les relations où chaque élément de u possède *au plus* une image dans v.

mari $\in$ femme $\nrightarrow$ homme

Q6.5 *Les hommes ne peuvent être mariés qu'à au plus une femme.*

Rappel : $u \rightarrowtail\!\!\!\!\!\nrightarrow v$ est l'ensemble des fonctions partielles injectives entre u et v, i.e., les fonctions partielles où chaque élément de v possède *au plus* un antécédent dans u.

mari $\in$ femme $\rightarrowtail\!\!\!\!\!\nrightarrow$ homme
ou
mari^{-1} $\in$ homme $\nrightarrow$ femme

Q6.6 *La mère d'une personne est une femme mariée.*

mère $\in$ personne $\longleftrightarrow$ dom(mari)
ou
ran(mère) $\subseteq$ dom(mari)

A partir des relations en ensembles précédents, donnez la définition des relations suivantes.

Q6.7 *Père*

père = mari $\circ$ mère   i.e. le mari de la mère

Q6.8 *Parent*

parent = mère $\cup$ père

Q6.9 *Enfant*

enfant = parent^{-1}

Q6.10 *Frère ou sœur*

frère_ou_sœur = (mère^{-1} $\circ$ mère) $-$ Id(personne)

7 Pays et langages

Soient les ensembles *pays*, *langue* et *UE* représentant respectivement tous les pays, toutes les langues et les pays de l'union européenne. Soit la relation $parle \in pays \longleftrightarrow langue$ associant un pays à ses langues officielles.

Donnez la définition formelle des éléments suivants :

Q7.1 *L'ensemble des pays anglophones*

$\mathrm{dom}(\mathrm{parle} \rhd \{\mathrm{anglais}\})$
ou
$\mathrm{parle}^{-1}[\{\mathrm{anglais}\}]$ i.e. l'image de l'ensemble {anglais} par la relation parle^{-1}

Q7.2 *L'ensemble des pays francophones hors UE*

$\mathrm{dom}(\mathrm{UE} \lhd\!\!\!- (\mathrm{parle} \rhd \{\mathrm{français}\}))$
ou
$\mathrm{dom}(\mathrm{parle} \lhd \{\mathrm{français}\}) - \mathrm{UE}$
ou
$\mathrm{parle}^{-1}[\{\mathrm{français}\}] - \mathrm{UE}$

Q7.3 *L'ensemble des pays possédant plus d'une langue officielle*

$\{p \mid p \in \mathrm{pays} \wedge |\mathrm{parle}[\{p\}]| > 1\}$

Q7.4 *La relation même_langue des pays partageant une même langue officielle*

$(\mathrm{parle}^{-1} \circ \mathrm{parle}) - Id(\mathrm{pays})$