
Exo 1. Maitriser le cours

- 1) Soit $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ et $B = \{b_1, b_2, b_3\}$. Calculez le résultat des expressions suivantes.
- $\text{dom}(\{a_1 \mapsto a_2, a_1 \mapsto a_3, a_3 \mapsto a_2\}) = \{a_1, a_3\}$
 - $\{a_1\} \triangleleft \{a_1 \mapsto a_2, a_1 \mapsto a_3, a_3 \mapsto a_2\} \triangleright \{a_2\} = \{a_1 \mapsto a_2\}$
 - $\{a_1 \mapsto a_2, a_1 \mapsto a_3, a_3 \mapsto a_2\} <+ \{a_1 \mapsto a_1\} = \{a_1 \mapsto a_1, a_3 \mapsto a_2\}$
---- $<+$ désigne l'opération de surcharge
- 2) Soit $A = \{0, 1, 2\}$ et $B = \{a, b, c\}$ et $r = \{(0, a), (0, b), (1, c)\}$. Evaluer les expressions suivantes
- $\{0\} \triangleleft r = \{(0, a), (0, b)\}$
 - $\{1\} \triangleleft r = \{(0, a), (0, b)\}$
 - $r <+ \{(0, c)\} = \{(0, c), (0, c)\}$
 - $r ; r^{-1} = \{(0, 0), (1, 1)\}$
- 3) Calculez les expressions suivantes; donner la forme la plus simple.
- $[\text{ANY } x \text{ WHERE } x : 1..2 \text{ then } y := y - x \text{ END}] y > 0$ ----- $x : E$ signifie $x \in E$
$$\Leftrightarrow \forall x. (x \in 1..2 \Rightarrow y - x > 0)$$
$$\Leftrightarrow y - 1 > 0 \wedge y - 2 > 0$$
$$\Leftrightarrow y > 2$$
 - $[\text{CHOICE } x := x-2 \text{ OR } x := x+2 \text{ END}] x > 2$
$$\Leftrightarrow x - 2 > 2 \wedge x + 2 > 2$$
$$\Leftrightarrow x > 4$$
 - $[\text{SELECT } x \geq 0 \text{ THEN } x := x-2 \text{ WHEN } x \leq 1 \text{ THEN } x := x+2 \text{ END}] x > 4$
$$\Leftrightarrow (x \geq 0 \Rightarrow x - 2 > 4) \wedge (x \leq 1 \Rightarrow x + 2 > 4)$$
$$\Leftrightarrow (x \geq 0 \Rightarrow x > 6) \wedge (x \leq 1 \Rightarrow x > 2)$$
$$\Leftrightarrow (x < 0 \vee x > 6) \wedge (x > 1 \vee x > 2)$$
$$\Leftrightarrow (x < 0 \wedge x > 1) \vee (x < 0 \wedge x > 2) \vee (x > 6 \wedge x > 1) \vee (x > 6 \wedge x > 2)$$
$$\Leftrightarrow x > 6$$

- 4) Dites si les opérations suivantes préservent l'invariant $x:1..3$ (qui signifie x est un entier qui appartient à l'intervalle $[1, 3]$).

Si une opération n'a pas de précondition, utilisez TRUE comme précondition.

- $\text{op1} = \text{CHOICE } x := 0 \text{ OR } x := 1 \text{ END};$
Solution: FAUX

Il faut prouver

$x \in 1..3 \Rightarrow [\text{CHOICE } x := 0 \text{ OR } x := 1 \text{ END}] (x \in 1..3)$

Supposons $x \in 1..3$ et calculons $[\text{CHOICE } x := 0 \text{ OR } x := 1 \text{ END}](x \in 1..3)$

$$\begin{aligned} & [\text{CHOICE } x := 0 \text{ OR } x := 1 \text{ END}](x \in 1..3) \\ \Leftrightarrow & [x := 0](x \in 1..3) \& [x := 1](x \in 1..3) \\ \Leftrightarrow & 0 \in 1..3 \& 1 \in 1..3 \\ \Leftrightarrow & \text{Faux} \end{aligned}$$

L'invariant n'est donc pas préservé.

- b. $\text{op2} = \text{PRE } x = 0 \text{ THEN ANY } y \text{ WHERE } y : 2..4 \text{ THEN } x := y \text{ END END};$

Solution: VRAI

Il faut montrer

$$x \in 1..3 \& x = 0 \Rightarrow [\text{ANY } y \text{ WHERE } y : 2..4 \text{ THEN } x := y \text{ END}](x \in 1..3)$$

Puisque $x \in 1..3 \& x = 0 \Leftrightarrow \text{faux}$, alors l'implication est vraie.

- c. $\text{op3} = \text{SELECT } x : 1..2 \text{ THEN } x := x - 1$
WHEN $x : 2..3 \text{ THEN } x := x + 1$
END;

Solution: FAUX

Il faut montrer

$$x \in 1..3$$

\Rightarrow

$$[\text{SELECT } x : 1..2 \text{ THEN } x := x - 1 \text{ WHEN } x : 2..3 \text{ THEN } x := x + 1 \text{ END}](x \in 1..3)$$

Supposons $x \in 1..3$ et calculons

$$\begin{aligned} & [\text{SELECT } x : 1..2 \text{ THEN } x := x - 1 \text{ WHEN } x : 2..3 \text{ THEN } x := x + 1 \text{ END}](x \in 1..3) \\ \Leftrightarrow & x : 1..2 \Rightarrow [x := x - 1](x \in 1..3) \\ \& \\ \& x : 2..3 \Rightarrow [x := x + 1](x \in 1..3) \\ \Leftrightarrow & x : 1..2 \Rightarrow (x - 1 \in 1..3) \\ \& \\ \& x : 2..3 \Rightarrow (x + 1 \in 1..3) \end{aligned}$$

Considérant l'hypothèse $x \in 1..3$, cette formule n'est pas satisfaite pour $x=1$ et pour $x=3$. L'invariant n'est donc pas préservé.