École Centrale Lyon

Théorie des probabilités et introduction aux processus stochastiques
BE
Rapport

Chaine de Markov

Élèves :
Corentin Triboulet
Florian Beller

Enseignant :
Marie Christophette Blanchet

17 mars 2023

1 Modélisation d'un péage par chaine de Markov

1.1 Question 1

1.1.1 (a)

$$X_{n+1} = X_n + A_n + 1_{X_n>0 \cup (X_n=0 \cap A_n=1)} D_n \tag{1}$$

1.1.2 (b)

$$P(X_{n+1} = i | X_n = i) = i + A_n + 1_{X_n>0 \cup (X_n=0 \cap A_n=1)} D_n \tag{2}$$

Or les A_n et D_n sont indépendantes et identiquement distribuées et indépendantes de X_0, donc la chaine est homogène.

1.1.3 (c)

Matrice de passage de la chaine P

$$\begin{bmatrix} 1-p(1-q) & p(1-q) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ (1-p)q & 1-p-q-2pq & (1-q)p & \dots & \dots & 0 \\ 0 & (1-p)q & 1-p-q-2pq & (1-q)p & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \tag{3}$$

On vérifie bien que la somme des termes d'une ligne fait 1.

1.2 Question 2

La chaine est irréductible car il existe un chemin fermé passant par chaque état. Alors il existe au plus une mesure stationnaire. Soit $\pi = (\pi_0, \pi_1, ..., \pi_N)$, la probabilité invariante alors $\pi = \pi P$.

$$\begin{cases} \pi_0 = [1-p(1-q)]\pi_0 + [(1-p)q]\pi_1 \\ \pi_1 = [p(1-q)]\pi_0 + [1-p-q+2pq]\pi_1 + [(1-p)q]\pi_2 \\ \vdots \\ \pi_n = [p(1-q)]\pi_{n-1} + [1-p-q+2pq]\pi_n + [(1-p)q]\pi_{n-1} \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \pi_0 = \frac{q(1-p)}{p(1-q)}\pi_1 \\ \pi_1 = \frac{q(1-p)}{p(1-q)}\pi_2 \\ \vdots \\ \pi_n = \frac{q(1-p)}{p(1-q)}\pi_{n-1} \end{cases} \tag{5}$$

Ainsi par récurrence, on obtient $\pi_n = k^n \pi_0$ avec $k = \frac{q(1-p)}{p(1-q)}$. Or $\Sigma_{n=0}^{+\infty} \pi_n = 1$ soit $\Sigma_{n=0}^{+\infty} k^n \pi_0 = 1$ d'où $\pi_0 \frac{1}{k-1} = 1$.

Enfin $\pi_0 = 1 - k$ alors $\pi_n = (1-k)k^n$
Or pour la convergence de la somme, il faut que $|k| < 1$ soit $|(1-q)p < |(1-p)q|$ d'où $q > p$.

1.3 Question 3

Cas q>p

On a existence et unicité de la probabilité invariante. De plus, on est appériodique car $p^1(i,i) > 0$ alors elle converge la probabilité invariante.

Cas q=p

Nous avons essayé de faire correspondre l'histogramme avec une loi du χ^2 en vain. Il faudrait faire l'étude pour d'autres lois usuelles. Sûrement avec une loi qui a une valeur non nulle en 0.

Cas q<p

On a $\frac{1}{n}\Sigma_{k=1}^{n}(A_k - D_k)$ tend vers $E[A_1 - D_1]$ p.s. par la faible des grands nombres. Dans notre cas,$E[A_1 - D_1] = p - q > 0$.

Ainsi $\Sigma_{k=1}^{n}(A_k - D_k)$ tend vers $n(p-q)$ qui tend vers $+\infty$ p.s. Comme $X_n = X_0 + \Sigma_{k=1}^{n}(A_k - D_k)$ alors tend vers $+\infty$ p.s.

1.4 Question 4

Tous les états sont identiques car la chaine est irréductible.

Cas q>p

On a des états récurrents positifs par existence d'une probabilité invariante.

Cas q=p

On remarque qu'on se place dans le cas de la marche aléatoire sur N. On a donc des états récurrents nuls.

Cas q<p

Les états sont transients en analogie avec la marche aléatoire sur Z.

BE Markov

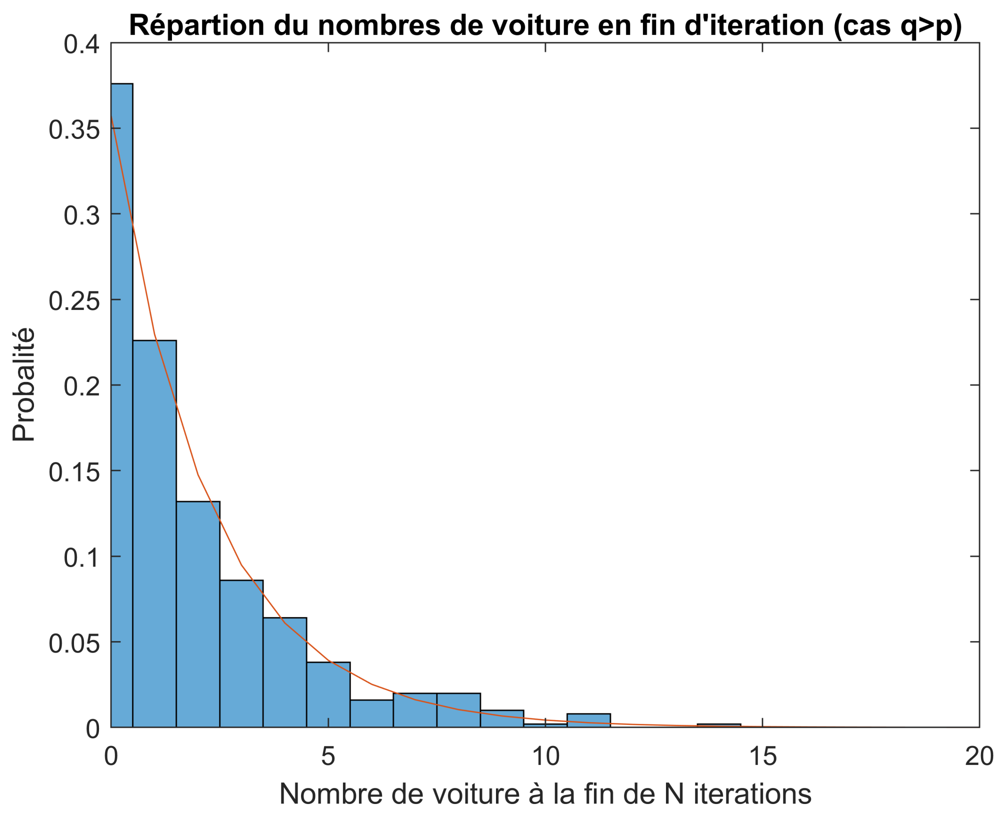
Triboulet Corentin

Florian Beller

```
clear all;
close all;
p=0.6;
q=0.7;
N=500;
N_iter=500;
res=zeros(N,1);

for i=1:N
    Xn=floor(20*rand());
    for n=1:N_iter
        An=0;
        if rand()<p
            An=1;
        end
        Xn=Xn+An;
        if Xn>0
            Dn=0;
            if rand()<q
                Dn=1;
            end
            Xn=Xn-Dn;
        end
    end
    res(i)=Xn;
end

pi=zeros(N_iter,1);
k=(1-q)*p/(1-p)/q;
pi(1)=1-k;
for i=2:N_iter;
    pi(i)=pi(i-1)*k;
end
histogram(res,Normalization='pdf')
title("Répartion du nombres de voiture en fin d'iteration (cas q>p)")
hold on
plot(0:N_iter-1,pi)
xlim([0 20])
xlabel("Nombre de voiture à la fin de N iterations")
ylabel("Probalité")
```




```
clear all;
close all;
p=0.6;
q=0.6;
N=10000;
N_iter=500;
res=zeros(N,1);
X0=25;
for i=1:N
    Xn=X0;
    for n=1:N_iter
        An=0;
        if rand()<p
            An=1;
        end
        Xn=Xn+An;
        if Xn>0
            Dn=0;
            if rand()<q
                Dn=1;
            end
            Xn=Xn-Dn;
        end
    end
    res(i)=Xn;
end
r = chi2rnd(2,100,1);
```

```
[h,p_chi] = chi2gof(r,'cdf',@(res)chi2cdf(res,2),'nparams',1);

histogram(res,Normalization='pdf')
title("Répartion du nombres de voiture en fin d'iteration (cas p=q)")
xlabel("Nombre de voiture à la fin de N iterations")
ylabel("Probalité")
hold on
x = 0:1:N_iter;
y = gampdf(x,6,4);
xlim([0 100]);
plot(x,y)
```