Département Electronique Electrotechnique Automatique

Equipe Automatique Traitement du Signal

Première année - UE STI - STI 1.2 Traitement du Signal

TD 7 : Filtres générateurs et Signaux aléatoires

Exercice 1 : Filtre générateur et méthode de Yule-Walker déterministe

On considère un signal discret $y^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k \delta_{kT_s}$, de période d'échantillonnage $T_s = 0.1$ sec, avec $y_k = 0$ pour $k < 0$, solution de l'équation de récurrence :

$$y_k = 2e^{-aT_s} \cos(\omega_0 T_s) y_{k-1} - e^{-2aT_s} y_{k-2} + b x_k \tag{1}$$

avec $x_0 = 1$ et $x_k = 0$ pour $k \neq 0$, $a = 0.1$, $b = 1$ et $\omega_0 = 0.6$ rad/s.

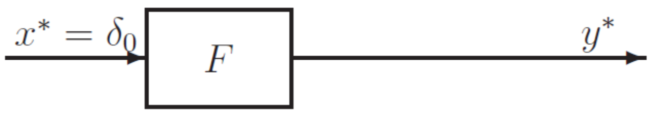

Figure 1: Notion de filtre générateur en déterministe

1. Lancer le script `Matlab` `td7exo1.m`, disponible sur le serveur pédagogique, et vérifier que y^* est obtenu par échantillonnage du signal analogique défini par :

   $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \frac{b}{\sin(\omega_0 T_s)} e^{-at} \sin(\omega_0 (t + T_s)) \Gamma(t)$$

   échantillonné à la période $T_s = 0.1$ sec.

2. Donner l'expression de la fonction de transfert $F(z)$ du système de convolution discret défini par l'équation de récurrence (1).

3. Compléter le fichier `Matlab` `td7exo1.m` pour représenter le module de la réponse fréquentielle de la fonction de transfert F et le comparer à la TFD du vecteur $\{y_k\}_{k \in \{0, \cdots, N-1\}}$. Que constatez-vous? Justifiez.

4. Quelles caractéristiques de la solution $\{y_k\}_{k \in \{0, \cdots, N-1\}}$ de l'équation de récurrence (1) (représentée à la question 1) retrouve-t-on sur la réponse fréquentielle de F ?

Supposons maintenant que l'on mesure $\{y_k\}_{k\in\{0,\cdots,N-1\}}$ sans connaître ni l'équation de récurrence dont il est solution ni la fonction de transfert F. La modélisation mathématique consiste à représenter $\{y_k\}_{k\in\{0,\cdots,N-1\}}$ comme la réponse impulsionnelle d'un filtre générateur dont la fonction de transfert discrète est de la forme :

$$F(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_{n_a} z^{-n_a}}$$

ce qui correspond à l'équation de récurrence :

$$y_k = -a_1 y_{k-1} - \cdots - a_{n_a} y_{k-n_a} + b_0 x_k. \tag{2}$$

L'identification d'un tel modèle consiste à déterminer la valeur des coefficients a_i de ce filtre à partir des échantillons $\{y_k\}_{k\in\{0,\ldots,(N-1)\}}$ et $\{x_k\}_{k\in\{0,\ldots,(N-1)\}}$. L'ordre n_a est fixé par l'utilisateur.

Les coefficients a_i sont obtenus en résolvant le système de n_a équations linéaires à n_a inconnues :

$$\Gamma \underline{a} = \underline{\gamma}$$

avec

$$\Gamma = \begin{bmatrix}
R_y(0) & R_y(1) & R_y(2) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & R_y(n_a-1) \\
R_y(1) & R_y(0) & R_y(1) & R_y(2) & \cdots & \cdots & \cdots & R_y(n_a-2) \\
R_y(2) & R_y(1) & R_y(0) & R_y(1) & R_y(2) & \cdots & \cdots & R_y(n_a-3) \\
R_y(3) & R_y(2) & R_y(1) & R_y(0) & R_y(1) & \cdots & \cdots & R_y(n_a-4) \\
R_y(4) & R_y(3) & R_y(2) & R_y(1) & R_y(0) & R_y(1) & \cdots & R_y(n_a-5) \\
\cdots & \cdots & \cdots & R_y(2) & R_y(1) & R_y(0) & \cdots & \cdots \\
R_y(n_a-2) & R_y(n_a-3) & R_y(n_a-4) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & R_y(1) \\
R_y(n_a-1) & R_y(n_a-2) & R_y(n_a-3) & \cdots & R_y(2) & \cdots & \cdots & R_y(0)
\end{bmatrix}$$

et

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n_a} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \underline{\gamma} = - \begin{bmatrix} R_y(1) \\ R_y(2) \\ \vdots \\ \vdots \\ R_y(n_a-3) \\ R_y(n_a-2) \\ R_y(n_a-1) \\ R_y(n_a) \end{bmatrix}$$

où $R_y(i)$ sont les échantillons de la fonction d'autocorrélation de $\{y_k\}_{k\in\{0,\ldots,(N-1)\}}$. La fonction `Matlab` `aryule` calcule les coefficients a_i solution de cette équation et permet ainsi de déterminer la fonction de transfert F du filtre générateur associé aux échantillons $\{y_k\}_{k\in\{0,\ldots,(N-1)\}}$.

5. En utilisant le fichier `Matlab` `td7exo1.m`, déterminer F à partir des $\{y_k\}_{k\in\{0,\ldots,(N-1)\}}$ et vérifier qu'on obtient le bon résultat. Que se passe-t-il si l'ordre n_a choisi est inférieur ou supérieur à l'ordre exact du système ?

6. Le fichier `yk2data.mat` contient une séquence $\{y_k\}_{k\in\{0,\cdots,N-1\}}$ pour laquelle on ne connait pas la fonction de transfert F associée. Utiliser le fichier `Matlab` `td7exo1.m` pour étudier le signal dans le domaine du temps et des fréquences. Modifier le fichier pour déterminer la fonction de transfert F du filtre générateur associé à ce signal.

Exercice 2 : Notions sur les signaux aléatoires

Récupérer le fichier `Matlab` `td7exo2.m`, disponible sur le serveur pédagogique.

1. A l'aide du fichier `Matlab` `td7exo2.m`, observez le vecteur `bk` de $N = 1000$ échantillons d'une réalisation temporelle d'un signal aléatoire bruit blanc gaussien discret de moyenne nulle et de variance 1 de période d'échantillonnage T_s. Re-exécuter plusieurs fois le programme. Obtient-on toujours le même résultat ? Est-ce normal ?

2. Le fichier `Matlab` `td7exo2.m` permet d'estimer la fonction d'autocorrélation de la réalisation temporelle d'un signal aléatoire bruit blanc dont N échantillons sont stockés dans le vecteur `bk`. Il est basé sur la fonction `Matlab` `xcorr` avec l'option `biased`[1]. Interpréter ce que vous observez par rapport à l'expression théorique de la fonction d'autocorrélation d'un signal aléatoire bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance 1.

   Le fichier `Matlab` `td7exo2.m` permet de générer M réalisations temporelles de N échantillons et de faire la moyenne des fonctions d'autocorrélation de ces réalisations. Qu'observe-t-on ? Est-ce attendu ?

3. Après avoir rappeler la relation entre la densité spectrale de puissance d'un signal discret et sa fonction d'autocorrélation, compléter le fichier `Matlab` `td7exo2.m` de façon à estimer puis représenter la densité spectrale de puissance du signal dont N échantillons sont stockés dans le vecteur `bk`. Générer M réalisations temporelles de N échantillons et faire la moyenne des densités spectrales de puissance obtenues avec chacune des réalisations. Qu'observe-t-on ?

4. On considère le signal aléatoire défini comme la sortie du système de convolution de fonction de transfert F avec pour entrée un signal aléatoire bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance 1. Donner l'expression de la Densité Spectrale de Puissance $S_y(\nu)$ de ce signal en fonction de F. En utilisant le fichier `Matlab` `td7exo2.m`, vérifier expérimentalement cette relation pour

$$F(z) = \frac{1}{1 - 2e^{-aT_s}\cos(\omega_0 T_s)z^{-1} + e^{-2aT_s}z^{-2}}$$

   Modifier le fichier pour améliorer le résultat obtenu.

[1]Pour un signal discret x^*, l'autocorrélation est un signal discret de période T_s dont les échantillons $R_x(n)$ sont définies par :

$$R_x(n) = \lim_{N_{pt}\to\infty}\left(\frac{1}{2N_{pt}+1}\sum_{k=-N_{pt}}^{+N_{pt}} x_{k+n}.x_k\right).$$

Dans le cas où l'on ne dispose que de N échantillons du signal discret, une estimation, dite "biaisée", peut être obtenue par la formule suivante :

$$\begin{cases} n \geq 0 \quad \widehat{R}_x(n) = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-n-1} x_{k+n}.x_k \\ n < 0 \quad \widehat{R}_x(n) = \widehat{R}_x(-n) \end{cases} \tag{3}$$

Il est évident que de telles estimations seront d'autant plus correctes que n est faible. La fonction `xcorr` produit en sortie un vecteur de longueur $2N - 1$, qui correspond à $n \in \{-N+1, \cdots, +N-1\}$. Même si on tracera toutes les valeurs $R_x(n)$ pour $n \in \{-N+1, \cdots, +N-1\}$, on s'intéressera plus particulièrement aux valeurs autours de 0, par exemple n compris entre -50 et $+50$.

Exemple d'utilisation : `xcorr(bk, 'biased')`

Exercice 3 : Méthode de Yule-Walker déterministe pour les signaux périodiques

On considère le cas d'un signal y^*, obtenu par échantillonnage d'un signal analogique périodique de période $T_0 = n_0 T_s$ avec n_0 un nombre entier naturel.

1. La méthode de Yule-Walker est adaptée au cas de signaux correspondant à la réponse impulsionnelle d'une fonction de transfert F stable. Est-ce le cas d'un signal périodique ?

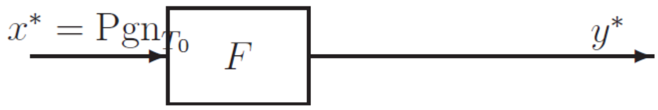

Figure 2: Notion de filtre générateur dans le cas d'un signal périodique

2. Pour contourner cette difficulté, un signal périodique y^* va être modélisé comme la réponse d'une fonction de transfert F à un peigne d'impulsions de Dirac de pas T_0 (voir figure 2). Quel est alors le lien entre le signal périodique y^* et la réponse impulsionnelle de F ? Quelle est la relation entre le spectre de y^* et la réponse fréquentielle de F ?