Taller de Geometría Diferencial semana 4

Juan Sebastián Gaitán

6 de agosto de 2018

Ejercicio 3.1

Para $r, a, b \in \mathbb{R}^+$ considere las helices parametrizadas en $\mathbb{R}^3$ por:

$$\gamma_1 : r \mapsto (r \cdot \cos(at), r \cdot \sin(at), b \cdot (at)),$$
$$\gamma_2 : r \mapsto (r \cdot \cos(-at), r \cdot \sin(-at), b \cdot (at)).$$

Calcule sus curvaturas κ_1, κ_2 y las torsiones τ_1, τ_2 respectivamente. Encuentre un movimiento euclidiano $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\gamma_2 = \Phi \circ \gamma_1$. ¿$\Phi$ conserva orientación?

Demostración. $\square$

Ejercicio 3.3

Demuestre que la curva $\gamma : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^3$ con

$$\gamma : t \mapsto (2\cos^2 t - 3, \sin t - 8, 3\sin^2 t + 4)$$

es regular. Determine si la imagen de γ está contenida en:

1. una linea recta en $\mathbb{R}^3$ o no.
2. un plano en $\mathbb{R}^3$ o no.

Demostración. Note que las curvas parametrizadas por γ_1 y γ_2 son círculos y por lo tanto las curvaturas son $\frac{1}{r}$ y $\frac{-1}{r}$ respectivamente. Además, el movimiento rígido está dado por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Ejercicio 3.5

Sea $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ un a C^2-curva regular en $\mathbb{R}^3$ con curvatura no nula. Entonces la torsion satisface:

$$\tau(t) = \frac{\det[\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)]}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|^2}$$

Demostración. Tome $\alpha = \gamma \circ \tau$ una reparametrización de γ con $\alpha : (0, L(\gamma)) \to \mathbb{R}^2$ por longitud de arco, $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ y $\tau : (0, L(\gamma)) \to (a, b)$ como habíamos probado para curvas con parametrización natural que $\kappa(s)_\alpha =< \dot{T}(s), N(s) >$ y tome $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

$$\begin{aligned}
T &= \dot{\alpha} \\
T &= (\gamma \circ \tau)'(s) \\
T &= \gamma'(\tau(s) \cdot \tau'(s)) \\
T &= (x'(\tau(s)), y'(\tau(s))\tau'(s)) \\
T(s) &= (\tau'(s)x'(\tau(s))), (\tau'(s)y'(\tau(s))) \\
\dot{T}(s) &= [\tau''(s)x'(\tau(s)) + \tau^2(s)x''(\tau(s))\tau'(s), \tau''(s)y'(\tau(s)) + \tau'(s)y''(\tau(s))\tau'(s)] \\
&= [\tau''(s)x'(\tau(s)) + (\tau'(s))^2 x''(\tau(s)), \tau''(s)y'(\tau(s)) + (\tau'(s))^2 y''(\tau(s))]
\end{aligned}$$

Además, note que:

$$N(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(\tau(s)) \cdot \tau'(s) \\ y'(\tau(s)) \cdot \tau'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y'(\tau(s)) \cdot \tau'(s) \\ x'(\tau(s)) \cdot \tau'(s) \end{pmatrix}.$$

Y por lo tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\kappa(s) &= \langle \dot{T}(s), N(s) \rangle \\
&= -y'(\tau(s))x'(\tau(s))\tau'(s)\tau''(s) - y'(\tau(s))\tau'(s)^3 x''(\tau(s)) + \\
&\quad y'(\tau(s))x'(\tau(s))\tau'(s)\tau''(s) + x'(\tau(s))\tau'(s)^3 y''(\tau(s)) \\
&= [\tau'(s)]^3 [x'(\tau(s))y''(\tau(s)) - x'(\tau(s))x''(\tau(s))]
\end{aligned}$$

y como $\tau'(s) = \frac{1}{\sigma'(\tau(s))} = \frac{1}{|\gamma'(t)|}$, entonces:

$$\begin{aligned}
\kappa(s) &= \frac{1}{|\gamma'(t)|^3}[x'(\tau(s))y''(\tau(s)) - x'(\tau(s))x''(\tau(s))] \\
&= \frac{1}{|\gamma'(t)|^3} \det \begin{pmatrix} x'(\tau(s)) & x''(\tau(s)) \\ y'(\tau(s)) & y''(\tau(s)) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{|\gamma'(t)|^3} \det \begin{pmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$\square$

Ejercicio 3.7

Sea $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una C^2-curva regular cerrada en $\mathbb{R}^3$ con parametrización natural. busque una demostración del teorema de Fenchel:

$$L(\dot{\gamma}) \int_0^P \kappa(s) ds \geq 2\pi$$

Demostración. Sea $\gamma : [0, l] \to \mathbb{R}^3$ un a curva regular parametrizada por longitud de arco. Como γ tiene velocidad unitaria, su función velocidad $\mathbf{v}$, es una curva en S^2.
Vamos a usar el hecho de que γ es cerrada para demostrar que la curva geométrica que describe $\mathbf{v}$ interseca a todo circulo maximal de S^2. Para esto, sea $P \subseteq \mathbb{R}^3$ un subespacio bidimensional arbitrario tal que $G = P \cap S^2$ es un ciculo maximal. Denote por $\mathbf{n}$ el vector normal de P. Note que un punto en S^2 está en G si y solo si es ortogonal a $\mathbf{n}$. Como $\frac{d}{dt}\langle \gamma(t), \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{v}(t), \mathbf{n} \rangle$, y por el teorema fundamental del calculo, se tiene:

$$\int_0^l \langle \mathbf{v}(t), \mathbf{n} \rangle dt = \langle \gamma(l), \mathbf{n} \rangle - \langle \gamma(0), \mathbf{n} \rangle = 0$$

. Como el valor medio de $\langle \mathbf{v}(t), \mathbf{n} \rangle$, entonces, se tiene $\langle \mathbf{v}(t_0), \mathbf{n} \rangle$ para algún $t_0 \in [0, l]$ y por lo tanto, $\mathbf{v}$ interseca todo circulo maximal. Por el lema 2.17, se tiene que la longitud de arco de $\mathbf{v}$ es mayor que 2π, de dinde se tiene:

$$\int_0^l \kappa(t) dt = \int_0^l |\mathbf{v}'(t)| dt \geq \pi.$$

$\square$