Taller de Geometría Diferencial semana 4

Juan Sebastián Gaitán

6 de agosto de 2018

Ejercicio 3.1

Para $r, a, b \in \mathbb{R}^+$ considere las helices parametrizadas en $\mathbb{R}^3$ por:

$$\gamma_1 : r \mapsto (r \cdot \cos(at), r \cdot \sin(at), b \cdot (at)),$$
$$\gamma_2 : r \mapsto (r \cdot \cos(-at), r \cdot \sin(-at), b \cdot (at)).$$

Calcule sus curvaturas κ_1, κ_2 y las torsiones τ_1, τ_2 respectivamente. Encuentre un movimiento euclidiano $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\gamma_2 = \Phi \circ \gamma_1$. ¿$\Phi$ conserva orientación?

Demostración. □

Ejercicio 3.3

Demuestre que la curva $\gamma : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^3$ con

$$\gamma : t \mapsto (2\cos^2 t - 3, \sin t - 8, 3\sin^2 t + 4)$$

es regular. Determine si la imagen de γ está contenida en:

1. una linea recta en $\mathbb{R}^3$ o no.
2. un plano en $\mathbb{R}^3$ o no.

Demostración. Note que las curvas parametrizadas por γ_1 y γ_2 son círculos y por lo tanto las curvaturas son $\frac{1}{r}$ y $\frac{-1}{r}$ respectivamente. Además, el movimiento rígido está dado por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

Ejercicio 3.5

Sea $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ un a C^2-curva regular en $\mathbb{R}^3$ con curvatura no nula. Entonces la torsion satisface:

$$\tau(t) = \frac{\det[\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t), \dddot{\gamma}(t)]}{|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)|^2}$$

Demostración. Considere lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\tau(s) = \langle \dot{N}(s), B(s) \rangle &= \left\langle \frac{\dddot{\gamma}(s)}{|\ddot{\gamma}(s)|}, \frac{N(s) \times T(s)}{|N(s) \times T(s)|} \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\dddot{\gamma}(s)}{|\ddot{\gamma}|}, \frac{\frac{\ddot{\gamma}(s)}{|\ddot{\gamma}|} \times \dot{\gamma}(s)}{|\frac{\ddot{\gamma}(s)}{|\ddot{\gamma}|} \times \dot{\gamma}(s)|} \right\rangle \\
&= \frac{\langle \dddot{\gamma}(s), \ddot{\gamma}(s) \times \dot{\gamma}(s) \rangle}{|\langle \dddot{\gamma}(s)| \cdot |\ddot{\gamma}(s) \times \dot{\gamma}(s)|} \\
&= \frac{\det[\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t), \dddot{\gamma}(t)]}{|\dddot{\gamma}(s)| \cdot ||\ddot{\gamma}(s)| \cdot |\dot{\gamma}(s)| \sin \frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\det[\dot{\gamma}(s), \ddot{\gamma}(s), \dddot{\gamma}(s)]}{|\dot{\gamma}(s) \times \ddot{\gamma}(s)|^2}
\end{aligned}$$

□

Lema

Sea β una curva cerrada en S^2. Si la a curva geometrica dada por β interseca todo circulo maximal de S^2, entonces la longitudde arco de β es mayor a 2π,

Demostración. Demostración en la página 80 de *Differential Geometry of Curves and Surfaces* de Kristopher Tapp. □

Ejercicio 3.7

Sea $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una C^2-curva regular cerrada en $\mathbb{R}^3$ con parametrización natural. busque una demostración del teorema de Fenchel:

$$L(\dot{\gamma}) \int_0^P \kappa(s) ds \geq 2\pi$$

Demostración. Sea $\gamma : [0, l] \to \mathbb{R}^3$ un a curva regular parametrizada por longitud de arco. Como γ tiene velocidad unitaria, su función velocidad $\mathbf{v}$, es una curva en S^2.
Vamos a usar el hecho de que γ es cerrada para demostrar que la curva geométrica que describe $\mathbf{v}$ interseca a todo circulo maximal de S^2. Para esto, sea $P \subseteq \mathbb{R}^3$ un subespacio bidimensional arbitrario tal que $G = P \cap S^2$ es un ciculo maximal. Denote por $\mathbf{n}$ el vector normal de P. Note que un punto en S^2 está en G si y solo si es ortogonal a $\mathbf{n}$. Como

$\frac{d}{dt}\langle\gamma(t),\mathbf{n}\rangle = \langle\mathbf{v}(t),\mathbf{n}\rangle$, y por el teorema fundamental del calculo, se tiene:

$$\int_0^l \langle\mathbf{v}(t),\mathbf{n}\rangle dt = \langle\gamma(l),\mathbf{n}\rangle - \langle\gamma(0),\mathbf{n}\rangle = 0$$

. Como el valor medio de $\langle\mathbf{v}(t),\mathbf{n}\rangle$, entonces, se tiene $\langle\mathbf{v}(t_0),\mathbf{n}\rangle$ para algún $t_0 \in [0,l]$ y por lo tanto, $\mathbf{v}$ interseca todo circulo maximal. Por el lema 2.17, se tiene que la longitud de arco de $\mathbf{v}$ es mayor que 2π, de dinde se tiene:

$$\int_0^l \kappa(t)dt = \int_0^l |\mathbf{v}'(t)|dt \geq \pi.$$

$\square$