

Taller de Geometría Diferencial semana 4

Juan Sebastián Gaitán

6 de agosto de 2018

Ejercicio .1

Para $r, a, b \in \mathbb{R}^+$ considere las helices parametrizadas en \mathbb{R}^3 por:

$$\begin{aligned}\gamma_1 : r &\mapsto (r \cdot \cos(at), r \cdot \sin(at), b \cdot (at)), \\ \gamma_2 : r &\mapsto (r \cdot \cos(-at), r \cdot \sin(-at), b \cdot (at)).\end{aligned}$$

Calcule sus curvaturas κ_1, κ_2 y las torsiones τ_1, τ_2 respectivamente. Encuentre un movimiento euclidiano $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\gamma_2 = \Phi \circ \gamma_1$. ¿ Φ conserva orientación?

Demostración.

□

Ejercicio 3.3

Demuestre que la curva $\gamma : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ con

$$\gamma : t \mapsto (2 \cos^2 t - 3, \sin t - 8, 3 \sin^2 t + 4)$$

es regular. Determine si la imagen de γ está contenida en:

1. una línea recta en \mathbb{R}^3 o no.
2. un plano en \mathbb{R}^3 o no.

$$\gamma_1 = r(\cos(at), \sin(at)), \text{ y } \gamma_2(t) = r(\cos(-at), \sin(-at))$$

Calcule las curvaturas κ_1 y κ_2 correspondientes a γ_1 y γ_2 y encuentre un movimiento rígido $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\gamma_2 = \Phi \circ \gamma_1$

Demostración. Note que las curvas parametrizadas por γ_1 y γ_2 son círculos y por lo tanto las curvaturas son $\frac{1}{r}$ y $\frac{-1}{r}$ respectivamente. Además, el movimiento rígido está dado por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

Ejercicio 2.5

Demuestre la formula para la curvatura para una curva regular con parametrización arbitraria:

$$\kappa(t) = \frac{\det[\gamma'(t), \gamma''(t)]}{|\gamma'(t)|^3}$$

Demostración. Tome $\alpha = \gamma \circ \tau$ una reparametrización de γ con $\alpha : (0, L(\gamma)) \rightarrow \mathbb{R}^2$ por longitud de arco, $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $\tau : (0, L(\gamma)) \rightarrow (a, b)$ como habíamos probado para curvas con parametrización natural que $\kappa(s)_\alpha = \langle \dot{T}(s), N(s) \rangle$ y tome $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

$$\begin{aligned} T &= \dot{\alpha} \\ T &= (\gamma \circ \tau)'(s) \\ T &= \gamma'(\tau(s)) \cdot \tau'(s) \\ T &= (x'(\tau(s)), y'(\tau(s))\tau'(s)) \\ T(s) &= (\tau'(s)x'(\tau(s)), (\tau'(s)y'(\tau(s))) \\ \dot{T}(s) &= [\tau''(s)x'(\tau(s)) + \tau'^2(s)x''(\tau(s))\tau'(s), \tau''(s)y'(\tau(s)) + \tau'(s)y''(\tau(s))\tau'(s)] \\ &= [\tau''(s)x'(\tau(s)) + (\tau'(s))^2x''(\tau(s)), \tau''(s)y'(\tau(s)) + (\tau'(s))^2y''(\tau(s))] \end{aligned}$$

Además, note que:

$$N(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(\tau(s)) \cdot \tau'(s) \\ y'(\tau(s)) \cdot \tau'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y'(\tau(s)) \cdot \tau'(s) \\ x'(\tau(s)) \cdot \tau'(s) \end{pmatrix}.$$

Y por lo tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned} \kappa(s) &= \langle \dot{T}(s), N(s) \rangle \\ &= -y'(\tau(s))x'(\tau(s))\tau'(s)\tau''(s) - y'(\tau(s))\tau'(s)^3x''(\tau(s)) + \\ &\quad y'(\tau(s))x'(\tau(s))\tau'(s)\tau''(s) + x'(\tau(s))\tau'(s)^3y''(\tau(s)) \\ &= [\tau'(s)]^3[x'(\tau(s))y''(\tau(s)) - x'(\tau(s))x''(\tau(s))] \end{aligned}$$

y como $\tau'(s) = \frac{1}{\sigma'(\tau(s))} = \frac{1}{|\gamma'(t)|}$, entonces:

$$\begin{aligned} \kappa(s) &= \frac{1}{|\gamma'(t)|^3} [x'(\tau(s))y''(\tau(s)) - x'(\tau(s))x''(\tau(s))] \\ &= \frac{1}{|\gamma'(t)|^3} \det \begin{pmatrix} x'(\tau(s)) & x''(\tau(s)) \\ y'(\tau(s)) & y''(\tau(s)) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{|\gamma'(t)|^3} \det \begin{pmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Lema: Teorema de Hopf Umlaufsatz

Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva simple cerrada en el plano y orientada positivamente, entonces el índice de rotación de γ es 1 donde el índice de rotación se define: $\frac{1}{2\pi}(\theta(b) - \theta(a))$ y $\theta(t) = \int_{t_0}^t k(u)du + \theta_0$ donde $\dot{\gamma}(a) = (\cos(\theta_0), \sin(\theta_0))$.

Demostración. Denotemos $C = \gamma[a, b]$ y sea $p \in C$ tal que la recta tangente a C en p (denotada L) esta totalmente contenida a un lado de C y para alguna parametrización por longitud de arco γ , sea $\gamma(a) = p$. Considere el triángulo

$$T = (t_1, t_2) | a \leq t_1 \leq t_2 \leq b$$

y definida la función $\psi : T \rightarrow S^1$ como sigue:

$$\psi(t_1, t_2) = \begin{cases} \gamma'(t_1) & \text{si } t_1 = t_2 \\ \frac{\gamma(t_2) - \gamma(t_1)}{|\gamma(t_2) - \gamma(t_1)|} & \text{si } t_1 \neq t_2, t_1, t_2 \neq a, b \\ -\gamma'(a) & \text{si } t_1, t_2 = a, b \end{cases}$$

Para la mayoría de elementos en el dominio $\psi(t_1, t_2)$ es el vector unitario apuntando de $\gamma(t_1)$ a $\gamma(t_2)$, y esta definición asegura que ψ sea continua.

Sea α_0 una parametrización para el segmento de (a, a) a (b, b) con $\alpha_1 : [0, 1] \rightarrow T$ una parametrización para el segmento de (a, a) a (a, b) y luego el segmento de (a, b) a (b, b) y $\alpha_s : [0, 1] \rightarrow T$.

Una extensión con $s \in [0, 1]$ que se expresa como una familia continua de funciones, esto es, si se considera la función $\beta : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow T$ tal que $\beta(s, t) = \alpha_s(t)$, y β es continua.

Para todo $s \in [0, 1]$, sea $D(s)$ el grado de $\psi \circ \alpha_s : [0, 1] \rightarrow S^1$ por el lema 2.4 de la página 63 del Tapp, D es continua en $[0, 1]$ y como toma valores enteros entonces D es constante. $D(0)$ por definición es el grado del vector tangente unitario a γ .

Veamos que $D(1) = 1$. Como α_1 primero recorre el segmento (a, a) a (a, b) , $\psi \circ \alpha_1$ recorre la mitad de S^1 y cuando α_1 recorre de (a, b) a (b, b) , $\psi \circ \alpha_1$ recorre la otra mitad de S^1 . Luego $D(1) = 1 = D(0)$.

Note que por la definición de grado en la página 63 del Tapp, $D(0)$ es el índice de rotación de γ .

□

Ejercicio 2.7

Sea $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva simple cerrada en el plano positivamente orientada, de tipo C^2 parametrizada por longitud de arco. Muestre que si el periodo de γ es $L \in \mathbb{R}^+$ entonces la curvatura total satisface

$$\int_0^L k(s)ds = 2\pi.$$

Demostración. Como la curva es regular es posible escoger una parametrización por longitud de arco tal que $\dot{\gamma}(0) = (1, 0)$ (Esto es posible por ser una curva cerrada). Por el teorema de Hopf Umlaufsatz:

$$(\theta(b) - \theta(a)) = 2\pi$$

Donde $\theta(t) = \int_0^t k(u)du$. Como la curva se recorre completa en el intervalo $(0, L)$ es posible tomar $b = L$ y $a = 0$ luego:

$$\theta(L) - \theta(0) = 2\pi$$

Como $\dot{\gamma}(0) = (1, 0)$, entonces $\theta(0) = 0$, luego:

$$\theta(L) = 2\pi$$

Y por lo tanto

$$\int_0^L k(u)du = 2\pi.$$

□