

# Taller de Geometría Diferencial semana 4

Juan Sebastián Gaitán

6 de agosto de 2018

## Ejercicio 3.1

Para  $r, a, b \in \mathbb{R}^+$  considere las helices parametrizadas en  $\mathbb{R}^3$  por:

$$\begin{aligned}\gamma_1 : r &\mapsto (r \cdot \cos(at), r \cdot \sin(at), b \cdot (at)), \\ \gamma_2 : r &\mapsto (r \cdot \cos(-at), r \cdot \sin(-at), b \cdot (at)).\end{aligned}$$

Calcule sus curvaturas  $\kappa_1, \kappa_2$  y las torsiones  $\tau_1, \tau_2$  respectivamente. Encuentre un movimiento euclidiano  $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $\gamma_2 = \Phi \circ \gamma_1$ . ¿ $\Phi$  conserva orientación?

*Demostración.*

□

## Ejercicio 3.3

Demuestre que la curva  $\gamma : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}^3$  con

$$\gamma : t \mapsto (2 \cos^2 t - 3, \sin t - 8, 3 \sin^2 t + 4)$$

es regular. Determine si la imagen de  $\gamma$  está contenida en:

1. una línea recta en  $\mathbb{R}^3$  o no.
2. un plano en  $\mathbb{R}^3$  o no.

*Demostración.* Note que las curvas parametrizadas por  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  son círculos y por lo tanto las curvaturas son  $\frac{1}{r}$  y  $\frac{-1}{r}$  respectivamente. Además, el movimiento rígido está dado por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

### Ejercicio 3.5

Sea  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una  $C^2$ -curva regular en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura no nula. Entonces la torsión satisface:

$$\tau(t) = \frac{\det[\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)]}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|^2}$$

*Demostración.* Tome  $\alpha = \gamma \circ \tau$  una reparametrización de  $\gamma$  con  $\alpha : (0, L(\gamma)) \rightarrow \mathbb{R}^2$  por longitud de arco,  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  y  $\tau : (0, L(\gamma)) \rightarrow (a, b)$  como habíamos probado para curvas con parametrización natural que  $\kappa(s)_\alpha = \langle \dot{T}(s), N(s) \rangle$  y tome  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ .

$$\begin{aligned} T &= \dot{\alpha} \\ T &= (\gamma \circ \tau)'(s) \\ T &= \gamma'(\tau(s)) \cdot \tau'(s) \\ T &= (x'(\tau(s)), y'(\tau(s))\tau'(s)) \\ T(s) &= (\tau'(s)x'(\tau(s)), (\tau'(s)y'(\tau(s))) \\ \dot{T}(s) &= [\tau''(s)x'(\tau(s)) + \tau'^2(s)x''(\tau(s))\tau'(s), \tau''(s)y'(\tau(s)) + \tau'(s)y''(\tau(s))\tau'(s)] \\ &= [\tau''(s)x'(\tau(s)) + (\tau'(s))^2x''(\tau(s)), \tau''(s)y'(\tau(s)) + (\tau'(s))^2y''(\tau(s))] \end{aligned}$$

Además, note que:

$$N(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(\tau(s)) \cdot \tau'(s) \\ y'(\tau(s)) \cdot \tau'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y'(\tau(s)) \cdot \tau'(s) \\ x'(\tau(s)) \cdot \tau'(s) \end{pmatrix}.$$

Y por lo tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned} \kappa(s) &= \langle \dot{T}(s), N(s) \rangle \\ &= -y'(\tau(s))x'(\tau(s))\tau'(s)\tau''(s) - y'(\tau(s))\tau'(s)^3x''(\tau(s)) + \\ &\quad y'(\tau(s))x'(\tau(s))\tau'(s)\tau''(s) + x'(\tau(s))\tau'(s)^3y''(\tau(s)) \\ &= [\tau'(s)]^3[x'(\tau(s))y''(\tau(s)) - x'(\tau(s))x''(\tau(s))] \end{aligned}$$

y como  $\tau'(s) = \frac{1}{\sigma'(\tau(s))} = \frac{1}{|\gamma'(t)|}$ , entonces:

$$\begin{aligned} \kappa(s) &= \frac{1}{|\gamma'(t)|^3} [x'(\tau(s))y''(\tau(s)) - x'(\tau(s))x''(\tau(s))] \\ &= \frac{1}{|\gamma'(t)|^3} \det \begin{pmatrix} x'(\tau(s)) & x''(\tau(s)) \\ y'(\tau(s)) & y''(\tau(s)) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{|\gamma'(t)|^3} \det \begin{pmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

## Ejercicio 2.7

Sea  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  una  $C^2$ -curva regular cerrada en  $\mathbb{R}^3$  con parametrización natural. busque una demostración del teorema de Fenchel:

$$L(\dot{\gamma}) \int_0^P \kappa(s) ds \geq 2\pi$$

*Demostración.* Como la curva es regular es posible escoger una parametrización por longitud de arco tal que  $\dot{\gamma}(0) = (1, 0)$  (Esto es posible por ser una curva cerrada). Por el teorema de Hopf Umlaufsatz:

$$(\theta(b) - \theta(a)) = 2\pi$$

Donde  $\theta(t) = \int_0^t \kappa(u) du$ . Como la curva se recorre completa en el intervalo  $(0, L)$  es posible tomar  $b = L$  y  $a = 0$  luego:

$$\theta(L) - \theta(0) = 2\pi$$

Como  $\dot{\gamma}(0) = (1, 0)$ , entonces  $\theta(0) = 0$ , luego:

$$\theta(L) = 2\pi$$

Y por lo tanto

$$\int_0^L \kappa(u) du = 2\pi.$$

□