Taller de Geometría Diferencial semana 4

Juan Sebastián Gaitán

6 de agosto de 2018

Ejercicio 3.1

Para $r, a, b \in \mathbb{R}^+$ considere las helices parametrizadas en $\mathbb{R}^3$ por:

$$\gamma_1 : r \mapsto (r \cdot \cos(at), r \cdot \sin(at), b \cdot (at)),$$
$$\gamma_2 : r \mapsto (r \cdot \cos(-at), r \cdot \sin(-at), b \cdot (at)).$$

Calcule sus curvaturas κ_1, κ_2 y las torsiones τ_1, τ_2 respectivamente. Encuentre un movimiento euclidiano $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\gamma_2 = \Phi \circ \gamma_2$. ¿$\Phi$ conserva orientación?

Demostración. $\square$

Ejercicio 3.3

Demuestre que la curva $\gamma : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^3$ con

$$\gamma : t \mapsto (2\cos^2 t - 3, \sin t - 8, 3\sin^2 t + 4)$$

es regular. Determine si la imagen de γ está contenida en:

1. una linea recta en $\mathbb{R}^3$ o no.
2. un plano en $\mathbb{R}^3$ o no.

Demostración. Note que las curvas parametrizadas por γ_1 y γ_2 son círculos y por lo tanto las curvaturas son $\frac{1}{r}$ y $\frac{-1}{r}$ respectivamente. Además, el movimiento rígido está dado por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Ejercicio 3.5

Sea $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ un a C^2-curva regular en $\mathbb{R}^3$. con curvatura no nula. Entonces la torsion satisface:

$$\tau(t) = \frac{\det[\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)]}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|^2}$$

Demostración. Tome $\alpha = \gamma \circ \tau$ una reparametrización de γ con $\alpha : (0, L(\gamma)) \to \mathbb{R}^2$ por longitud de arco, $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ y $\tau : (0, L(\gamma)) \to (a, b)$ como habíamos probado para curvas con parametrización natural que $\kappa(s)_\alpha =< \dot{T}(s), N(s) >$ y tome $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

$$\begin{aligned}
T &= \dot{\alpha} \\
T &= (\gamma \circ \tau)'(s) \\
T &= \gamma'(\tau(s) \cdot \tau'(s)) \\
T &= (x'(\tau(s)), y'(\tau(s))\tau'(s)) \\
T(s) &= (\tau'(s)x'(\tau(s))), (\tau'(s)y'(\tau(s))) \\
\dot{T}(s) &= [\tau''(s)x'(\tau(s)) + \tau^2(s)x''(\tau(s))\tau'(s), \tau''(s)y'(\tau(s)) + \tau'(s)y''(\tau(s))\tau'(s)] \\
&= [\tau''(s)x'(\tau(s)) + (\tau'(s))^2 x''(\tau(s)), \tau''(s)y'(\tau(s)) + (\tau'(s))^2 y''(\tau(s))]
\end{aligned}$$

Además, note que:

$$N(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(\tau(s)) \cdot \tau'(s) \\ y'(\tau(s)) \cdot \tau'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y'(\tau(s)) \cdot \tau'(s) \\ x'(\tau(s)) \cdot \tau'(s) \end{pmatrix}.$$

Y por lo tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\kappa(s) &= \langle \dot{T}(s), N(s) \rangle \\
&= -y'(\tau(s))x'(\tau(s))\tau'(s)\tau''(s) - y'(\tau(s))\tau'(s)^3 x''(\tau(s)) + \\
&\quad y'(\tau(s))x'(\tau(s))\tau'(s)\tau''(s) + x'(\tau(s))\tau'(s)^3 y''(\tau(s)) \\
&= [\tau'(s)]^3 [x'(\tau(s))y''(\tau(s)) - x'(\tau(s))x''(\tau(s))]
\end{aligned}$$

y como $\tau'(s) = \frac{1}{\sigma'(\tau(s))} = \frac{1}{|\gamma'(t)|}$, entonces:

$$\begin{aligned}
\kappa(s) &= \frac{1}{|\gamma'(t)|^3}[x'(\tau(s))y''(\tau(s)) - x'(\tau(s))x''(\tau(s))] \\
&= \frac{1}{|\gamma'(t)|^3} \det \begin{pmatrix} x'(\tau(s)) & x''(\tau(s)) \\ y'(\tau(s)) & y''(\tau(s)) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{|\gamma'(t)|^3} \det \begin{pmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$\square$

Lema: Teorema de Hopf Umlaufsatz

Sea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ una curva simple cerrada en el plano y orientada positivamente, entonces el índice de totación de γ es 1 donde el índice de rotación se define: $\frac{1}{2\pi}(\theta(b) - \theta(a))$ y $\theta(t) = \int_{t_0}^{t} k(u)du + \theta_0$ donde $\dot{\gamma}(a) = (\cos(\theta_0), \sin(\theta_0))$.

Demostración. Denotemos $C = \gamma[a, b]$ y sea $p \in C$ tal que la recta tangente a C en p (denotada L) esta totalmente contenida a un lado de C y para alguna parametrización por longitud de arco γ, sea $\gamma(a) = p$. Considere el triangulo

$$T = (t_1, t_2)|a \leq t_1 \leq t_2 \leq t$$

y definida la función $\psi : T \to S^1$ como sigue:

$$\psi(t_1, t_2) = \begin{cases} \gamma'(t_1) & \text{si } t_1 = t_2 \\ \frac{\gamma(t_2)-\gamma(t_1)}{|\gamma(t_2)-\gamma(t_1)|} & \text{si } t_1 \neq t_2 y t_1, t_2 \neq a, b \\ -\gamma'(a) & \text{si } t_1, t_2 = a, b \end{cases}$$

Para la mayoría de elementos en el dominio $\psi(t_1, t_2)$ es el vector unitario apuntando de $\gamma(t_1)$ a $\gamma(t_2)$, y esta definición asegura que ψ sea continua.
Sea α_0 una parametrización para el segmento de (a, a) a (b, b) con $\alpha_1 : [0, 1] \to T$ una parametrización para el segmento de (a, a) a (a, b) y luego el segmento de (a, b) a (b, b) y $\alpha_s : [0, 1] \to T$.
Una extensión con $s \in [0, 1]$ que se expresa como una familia continua de funciones, esto es, si se considera la función $\beta : [0, 1] \times [0, 1] \to T$ tal que $\beta(s, t) = \alpha_s(t)$, y β es continua.

Para todo $s \in [0, 1]$, sea $D(s)$ el grado de $\psi \circ \alpha_s : [0, 1] \to S^1$ por el lema 2.4 de la página 63 del Tapp, D es continua en $[0, 1]$ y como toma valores enteros entonces D es constante.$D(0)$ por definición es el grado del vector tangente unitario a γ.

Veamos que $D(1) = 1$. Como α_1 primero recorre el segmento (a, a) a (a, b), $\psi \circ \alpha_1$ recorre la mitad de S^1 y cuando α_1 recorre de (a, b) a (b, b), $\psi \circ \alpha_1$ recorre la otra mitad de S^1. Luego $D(1) = 1 = D(0)$.

Note que por la definición de grado en la página 63 del Tapp, $D(0)$ es el índice de retación de γ.

□

Ejercicio 2.7

Sea $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una curva simple cerrada en el plano positivamente orientada, de tipo C^2 parametrizada por longitud de arco. Muestre que si el periodo de γ es $L \in \mathbb{R}^+$ entonces la curvatura total satisface

$$\int_0^L k(s)ds = 2\pi.$$

Demostración. Como la curva es regular es posible escoger una parametrización por longitud de arco tal que $\dot{\gamma}(0) = (1, 0)$ (Esto es posible por ser una curva cerrada). Por el teorema de Hopf Umlaufsatz:

$$(\theta(b) - \theta(a)) = 2\pi$$

Donde $\theta(t) = \int_0^t k(u)du$. Como la curva se recorre completa en el intervalo (0,L) es posible tomar $b = L$ y $a = 0$ luego:

$$\theta(L) - \theta(0) = 2\pi$$

Como $\dot{\gamma}(0) = (1, 0)$, entonces $\theta(0) = 0$, luego:

$$\theta(L) = 2\pi$$

Y por lo tanto

$$\int_0^L k(u)du = 2\pi.$$

$\square$