Januar 2024

MODELLIERUNG VON KOPFRECHEN-STRATEGIEN MITTELS UML

Bachelorarbeit

EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt bzw. die wörtlich oder sinngemäß entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Abstract

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Integration von Unified Modeling Language (UML) in den Mathematikunterricht, insbesondere im Kontext des Kopfrechnens. Die Einleitung gibt einen Überblick über die Definition von Kopfrechnen, seine zeitliche Relevanz sowie die Merkmale eines effektiven Kopfrechners. Des Weiteren wird der Bezug zum Lehrplan Mathematik und zur Digitalen Grundbildung beleuchtet. Im zweiten Abschnitt wird UML eingeführt, wobei die Grundbausteine, Mechanismen und verschiedene Diagrammtypen, wie das Aktivitäts- und Klassendiagramm, beleuchtet werden. Der dritte Abschnitt widmet sich einer Analyse von Kopfrechenstrategien, einschließlich solcher für die Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und Überschlagsrechnung. Die Strategien werden in UML-Diagrammen abgebildet, um ihre Struktur und Zusammenhänge visuell darzustellen. Im letzten Kapitel werden die Grenzen der Arbeit aufgezeigt. Es wird unter anderem darauf hingewiesen, dass die Themen Kopfrechnen und UML-Diagramme lediglich miteinander in Verbindung gebracht wurden. Die Arbeit gibt daher keine Anleitung dazu, wie die Integration der UML-Modellierung im Unterricht effektiv umgesetzt werden kann.

Abstract

The paper deals with the integration of Unified Modelling Language (UML) in mathematics education, especially in the context of mental arithmetic. The introduction provides an overview of the definition of mental arithmetic, its temporal relevance and the characteristics of an effective mental calculator. Furthermore, the connection to the mathematics curriculum and digital literacy is highlighted. In the second section, UML is introduced, covering its basic elements, mechanisms, and various diagram types such as the activity and class diagram. The third section focuses on an analysis of mental arithmetic strategies, including those for addition, subtraction, multiplication, division, and estimation. The strategies are depicted in UML diagrams to visually represent their structure and relationships. In the final chapter, the limitations of the work are outlined. It is noted, among other things, that the topics of mental arithmetic and UML diagrams were merely associated with each other. The work therefore does not provide any instructions on how the integration of UML modelling can be effectively implemented in the classroom.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung und Begriffserarbeitung

Oftmals wird wahrgenommen, dass die mathematischen Fähigkeiten und somit die Kopfrechenfähigkeiten der Jugendlichen stark abgenommen haben. Tatsächlich lässt sich diese Vermutung jedoch nicht so einfach bestätigen. (Schmidt-Thieme & Weigand, 2015, S. 471) Nichtsdestotrotz ist das Kopfrechnen heutzutage noch wichtig, vor allem in unserem Computerzeitalter. Denn mithilfe von Kopfrechenübungen kann festgestellt werden, ob die Schülerinnen und Schüler über ein gesichertes Zahlen- und Operationsverständnis verfügen. Daher beschäftigt sich diese Arbeit damit, wie die Kopfrechenfähigkeiten von Schülerinnen und Schülern in der Sekundarstufe 1 durch visuelle Darstellung von Kopfrechenstrategien gefördert werden können. Dabei stützt sich die Arbeit auf bereits bestehende empirische Studien über die Arithmetikfähigkeiten von Lernenden ab der Primarstufe. Die Arbeit gliedert sich in vier Kapitel. Zunächst werden alle zu diesem Thema wichtigen Begriffe erarbeitet und abgegrenzt. Es werden alle wichtigen Diagrammtypen für diese Arbeit behandelt. Danach werden die wichtigsten Kopfrechenstrategien vorgestellt und visuell in Diagrammen dargestellt. Im Schlussteil wird eine kurze Zusammenfassung gegeben, die Grenzen dieser Arbeit noch einmal klar aufgezeigt und mögliche Erweiterungen genannt.

1.1. Was ist Kopfrechnen

Es gibt im Grunde drei verschiedene Formen des Rechnens: das Kopfrechnen, halbschriftliche und schriftliche Rechnen. Beim schriftlichen Rechnen wird nicht mit Zahlen gerechnet, sondern mit den einzelnen Ziffern der Zahlen. Dabei stützt man sich auf fest vorgegebene Rechenverfahren. Beim halbschriftlichen Verfahren löst man sich von den Rechenalgorithmen. Es werden Rechenschritte oder Zwischenergebnisse notiert und mit den Zahlen gerechnet, indem man sie geschickt zerlegt oder andere, später beschriebene Strategien verwendet. Daher ist ein gefestigtes Zahlenverständnis wie das Stellenwertsystem unabdingbar. Beim Kopfrechnen, oder auch mündliches Rechnen genannt, macht man dies auch, jedoch fallen die Notationen weg. Vom Kopfrechnen spricht man also immer dann, wenn zum Erlangen eines Ergebnisses keine Notationen gemacht wurden. Dabei werden Kopfrechenstrategien (siehe Kapitel 3) gebraucht, insbesondere dann, wenn die Rechnungen komplexer werden. (Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner, 2018, S. 42) Laut Rechtsteiner (2021) wird zuerst ein automatisiertes Faktenwissen benötigt, bevor solche Strategien genutzt werden können. Das heißt, dass das kleine Einmaleins und Eins plus Eins Grundlagen für das Kopfrechnen darstellen. (Rechtsteiner, 2021, S. 2) Howard führt weiterhin an, dass die Entscheidung, ab wann der Einsatz eines Taschenrechners sinnvoll ist und wann nicht, eine weitere und nicht unwichtige Kompetenz beim Kopfrechnen darstellt. (Howard, 2008, S. 5) Dies führt uns zu den Fragen, ob das Kopfrechnen noch zeitgemäß ist und warum das Kopfrechnen noch immer unterrichtet werden sollte.

1.2. Warum Kopfrechnen noch immer zeitaktuell ist

Nach Schulz und Wartha ist es nicht mehr aktuell, dass Rechnungen wie zum Beispiel 823 – 576 schnell und sicher im Kopf berechnet werden. Das Üben von Rechnen im Mathematikunterricht soll also nicht darauf abzielen, dass aus den Schülerinnen und Schülern menschliche Taschenrechner gemacht werden. Vielmehr soll es das Ziel sein, mithilfe des Rechnens Grundvorstellungen auszubauen und zu vernetzen. Mit den Grundvorstellungen von Zahlen und der Subtraktion können Aufgaben wie 732 – 282 = 650 schnell als fehlerhaft identifiziert werden, ohne sie explizit ausgerechnet zu haben. Dazu wird eine Art "Zahlengefühl" benötigt, welches dabei hilft, logische Schlussfolgerungen zu ziehen, wodurch man schnell identifizieren kann, dass 700 minus knapp 300 nicht 650 ergeben kann. Um ein derartiges "Zahlgefühl" aufzubauen, ist es unverzichtbar, dass regelmäßig mit Zahlen gearbeitet wird (Schulz & Wartha, 2021, S. 73). Rechtsteiner verweist außerdem darauf, dass der Zahlenblick geschult werden soll. Zahlenblick meint, dass Zusammenhänge zwischen Zahlen in einer Aufgabe und zwischen Aufgaben erkannt werden. Das Wissen über diese Zusammenhänge kann dann in weiterer Folge beim Lösen der Aufgaben genutzt werden. Um den Zahlenblick zu schärfen, muss den Schülerinnen und Schülern vorerst abgewöhnt werden, gedankenlos eine Aufgabe, ohne die nähere Betrachtung der Zahl- oder Aufgabenmerkmale, zu lösen. Dabei stellen Übungen zum Sortieren und Strukturieren von Zahlen, Termen oder Aufgaben eine adäquate Möglichkeit dar, um den Zahlenblick zu schulen. (Rechtsteiner, 2020, S. 33).

1.3. Merkmale eines guten Kopfrechners

Howard (2008) behauptet, dass alle Schülerinnen und Schüler das Kopfrechnen gelernt haben. Allerdings sind viele aus der Übung gekommen, da sie sich auf den Taschenrechner verlassen haben. Vielen fehlt die Übung, um wieder sicher Kopfrechnen zu können. Um die Schülerinnen und Schüler dabei zu unterstützen, können ihnen eine Reihe von Methoden vorgestellt werden, mit denen das Kopfrechnen um einiges leichter gelingt. Denn beim Kopfrechnen gilt: Wer Aufgaben vereinfacht, der gelangt schneller und sicherer zu einem Ergebnis. Zudem kann man anhand von Kopfrechnen herausfinden, ob man mit Zahlen gut umgehen kann und die Konzepte dahinter verstanden hat. Allerdings muss nicht jede Rechnung im Kopf gelöst werden. Zum erfolgreichen Kopfrechnen gehört auch dazu, Entscheidungen zu treffen, welche Aufgaben sich vereinfachen lassen und somit im Kopf zu bewältigen sind und welche nicht. (Howard, 2008, S. 4) Doch ab wann gilt man nun als guter Kopfrechner? Einen Richtwert, ob Schülerinnen und Schüler in der Sekundarstufe 1 gut im Kopfrechnen sind oder nicht, gibt Tiehl wie folgt an. Additionen und Subtraktionen sollen im Zahlenraum von 1 bis 100 sicher durchgeführt werden können. Werden die Zahlen größer, sollte mit den Schülerinnen und Schülern reflektiert werden, ob diese Aufgaben noch im Kopf zu lösen sind. Dabei sollte eine Multiplikation mit einem zweiteiligen und einstelligen Faktor ohne größere Schwierigkeiten durchführbar sein, wobei zusätzlich auch das große Einmaleins beherrscht werden sollte. Ähnlich soll bei der Division eine zweistellige Zahl durch eine einstellige Zahl geteilt werden können. Sind es besonders vorteilhafte Zahlen, können die einzelnen Zahlen in den verschiedenen Rechnungsarten größer sein. Was als besonders vorteilhaft gilt, wird im Kapitel 3 behandelt (Tiehl, 2015, S. 5). Diese Richtlinie deckt sich teilweise mit den Anforderungen im Lehrplan der Volksschule. Wie für das Kopfrechnen mittels der Lehrpläne der Volksschule, der Mittelschule und der AHS-Unterstufe argumentieren werden kann, wird im nächsten Kapitel erläutert.

1.4. Bezug zum Lehrplan Mathematik

In den Kompetenzbeschreibungen zum Lehrstoff ist in den verschiedenen Lehrplänen folgendes aufgelistet: Im Lehrplan der Volksschule wird das Kopfrechnen (im Text „mündliches Rechnen“ genannt) in der zweiten Schulstufe dezidiert genannt. Es heißt, dass die Schülerinnen und Schüler im Zahlenraum 100 mündlich addieren und multiplizieren können sollen. In der dritten Schulstufe der Volksschule wird das additive und multiplikative halbschriftliche Rechnen im Zahlenraum 1000 verlangt. Ab der vierten Schulstufe wird nur mehr das schriftliche Rechnen thematisiert. Es zieht sich jedoch durch alle Schulstufen hinweg durch, dass Ergebnisse durch Überschlagsrechnungen evaluiert werden sollen (BMBWF, Lehrplan der Volksschule, 2023, S. 74). Es fällt auf, dass die Lernenden laut Lehrplan nicht mehr im Kopf subtrahieren und dividieren müssen. Im Lehrplan der Mittelschule wird im Bereich Zahlen und Maße nicht mehr auf die Art des Rechnens eingegangen. Es wird nur beschrieben, in welchem Zahlenraum die Schülerinnen und Schüler Rechenoperationen idealerweise durchführen können sollten (BMBWF, Lehrplan der Mittelschule, 2023, S. 55). Auch im Lehrplan der AHS Unterstufe wird nicht weiter darauf eingegangen, wie die Rechenoperationen durchgeführt werden sollen. Beide Lehrpläne geben jedoch vor, dass Ergebnisse mittels einer Überschlagsrechnung evaluiert werden sollen (BMBWF, Lehrplan der allgemeinbildenden höheren Schule, 2023, S. 76).

Im vierten Teil der Lehrpläne werden die übergreifenden Themen behandelt, welche durch das Kopfrechnen besser abgehandelt werden können. Beim vierten Unterpunkt „informatische Bildung“ kann die Verwendung von technischen Hilfsmitteln wie zum Beispiel Taschenrechnern kritisch hinterfragt werden. Beim dreizehnten Unterpunkt „Wirtschafts-, Finanz- und Verbraucher/innenbildung“ wird behauptet, dass die Lernenden bei wirtschaftlichen Prozessen kompetent und mündig mitwirken können sollen. Dabei ist das Kopfrechnen beispielsweise dafür wichtig, um einen Einkaufsbetrag schnell und sicher überschlagen zu können. Somit kann ein Fehler bei der Kassa schneller bemerkt und berichtigt werden (BMBWF, 2023, S. 6, S. 7, S. 9).

In der Bildungs- und Lehraufgabe der Mathematik in der Volksschule wird angegeben, dass die Schülerinnen und Schülern ein tragfähiges Zahl- und Operationsverständnis aufbauen sollten. Wie im Kapitel 1.2 bereits beschrieben, hilft Kopfrechnen, dieses Verständnis zu festigen und auszubauen (BMBWF, Lehrplan der Volksschule, 2023, S. 71). In den Lehrplänen der Mittelschule und der AHS Unterstufe besteht die Bildungs- und Lehraufgabe der Mathematik darin, dass Schülerinnen und Schüler grundlegende Fertigkeiten beim Umgang mit Zahlen und deren Operationen haben. Dazu zählt unter anderem das Kopfrechnen. Zusätzlich wird im Rahmen der didaktischen Prinzipien angeführt, dass eine Balance zwischen der Nutzung von technischen Hilfsmitteln und der Ausbildung kognitiver Fertigkeiten gefunden werden soll (BMBWF, 2023, S. 55, S. 73).

1.5. Bezug zum Lehrplan Digitale Grundbildung

Die Digitale Grundbildung umfasst die drei Bereiche Medienbildung, informatische Bildung und Gestaltungskompetenz. In der informatischen Bildung ist das sogenannte „Computational Thinking“, auch als problemorientiertes informatisches Denken bekannt, einschließlich der Modellierung enthalten. Weiters wird in den Kompetenzbeschreibungen angeführt, dass die Schülerinnen und Schüler einerseits in der Lage sein sollen, Elemente des „Computional Thinkings“ zu verstehen und einzusetzen. Andererseits sollen sie befähigt werden, Inhalte in verschiedenen Darstellungsformen zu präsentieren und diese zu reflektieren. (BMBWF, Lehrplan der Mittelschule, 2023, S. 55)

1.6. Aktueller Stand der Kopfrechenfähigkeiten bei Schülerinnen und Schüler am Anfang und Ende der Sekundarstufe 1

Ob die Menschen vor der Nutzung des Taschenrechners bessere Kopfrechenleistungen zeigten, kann man so nicht beantworten, da es keine Studien oder Tests aus dieser Zeit gibt und durch die Verbreitung von Taschenrechnern nur sehr schwer ein Kontrollgruppen-Design möglich ist (Schmidt-Thieme & Weigand, 2015, S. 471). Eine 2017 veröffentlichte Studie hat die Kopfrechenfähigkeiten von Sekundarstufenschülerinnen und -schülern getestet und ist auf folgendes Ergebnis gekommen: Entgegen der verbreiteten Meinung, dass Lernende mit der Einführung des Taschenrechners die Kopfrechenfähigkeiten beträchtlich verloren hätten, kann die Studie nicht belegen. Im Gegenteil, denn die Schülerinnen und Schüler der siebten Schulstufe konnten über alle Schularten hinweg mehr Aufgaben richtig im Kopf lösen, als jene der fünften Schulstufe. Weiters konnte festgestellt werden, dass den Kindern das Addieren am leichtesten gefallen ist und das Dividieren am schwersten (Wehrle, 2017). Hattie befasste sich mit einigen Studien zum Einsatz des Taschenrechners und kam zu dem Schluss, dass Taschenrechner nur einen geringen, aber positiven Effekt auf die Fähigkeiten der Lernenden in der Mathematik hat (Hattie, 2013, S. 173).

2. Was ist UML und wie kann sie im Mathematikunterricht Einzug halten?

UML ist die Abkürzung für „Unified Modeling Language". UML stellt eine grafische Sprache dar, mit welcher Visualisierungen, Spezifikationen, Konstruktionen und Dokumentationen angefertigt werden können. Die UML wird vor allem in der Softwareentwicklung angewandt. Kurz gesagt wird UML hauptsächlich dafür verwendet, die Anforderungen an Softwareprojekten zu modellieren (Booch, Rumbaugh & Jacobson, 2006, S. 15). Die Modellierung ist im Mathematikunterricht fest verankert und ist in der Mathematikdidaktik eine viel diskutierte Kompetenz. Drei Grundkompetenzen im Mathematikunterricht sind Modellieren, Anwenden und Sachrechnen. Bei Anwendungsaufgaben wird oft versucht, passende Realitätsbezüge im Hinblick auf mathematische Inhalte zu finden. Dabei besteht jedoch die Gefahr, dass lediglich eine inhaltlich verhüllte Textaufgabe entwickelt wird. Geht man jedoch von einer realen Problemstellung aus und versucht diese mit Hilfe der Mathematik zu lösen, so steht die Modellierung im Vordergrund. Bei Sachaufgaben wiederum sollen beide Herangehensweisen inkludiert werden, wobei der Modellierungsaspekt vorrangig sein sollte. Dies wird in Abbildung 1 kompakt veranschaulicht: (Greefrath, 2018)

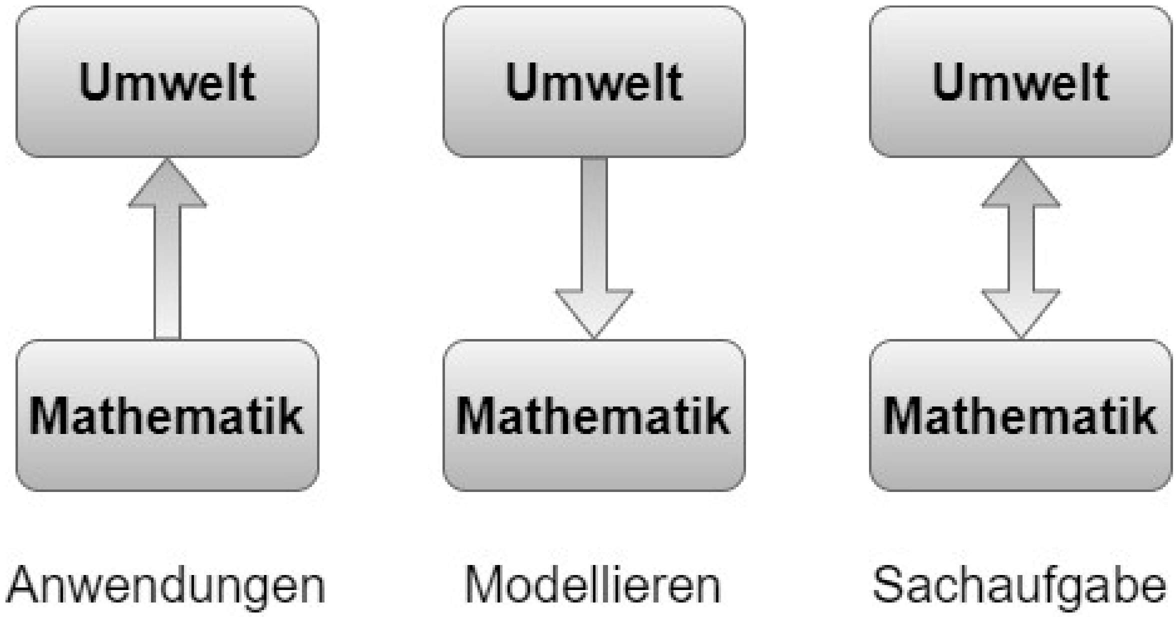

Abbildung 1: Sichtweisen auf Umwelt und Mathematik
Quelle: In Anlehnung an Greefrath, 2018, S34

Ein Sachverhalt, welcher zuerst mühevoll über mehrere Sätze hinweg erklärt wurde, kann nun auf einen Blick erfasst werden. Abbildung 1 stellt jedoch noch kein UML-Diagramm dar. Was eine Grafik zu einem UML-Diagramm macht, wird in diesem Kapitel geklärt.

UML hat, so wie jede andere Sprache, ein Vokabular und Regeln, wie die einzelnen „Wörter" des Vokabulars zusammengefügt werden dürfen. Was Sinn macht, da jede Person, welche die UML versteht, alle Diagramme weitestgehend richtig und ohne Missverständnisse lesen kann. Um UML zu erlernen, sind drei wesentliche Elemente erforderlich:

- die Grundbausteine von UML,
- Regeln, welche angeben, wie die Grundbausteine miteinander verknüpft werden können, und
- gemeinsame Mechanismen, welche für die gesamte Sprache gelten.

(Booch, Rumbaugh & Jacobson, 2006, S. 37 ff) Die Regeln für ein Diagramm werden beim jeweiligen Diagrammtyp angeführt.

2.1. Grundbausteine von UML

In diesem Unterkapitel werden nur jene Bausteine besprochen, welche im späteren Verlauf relevant sind.

Ein **Rechteck** in einem **Klassendiagramm** beschreibt immer eine Klasse. Eine Klasse ist eine Beschreibung einer Menge mit einer Gemeinsamkeit, die für das System relevant ist. In unserem Fall werden die Klassen die verschiedenen Rechenstrategien sein. Eine Klasse besteht in unserem Fall aus einem eindeutigen Namen und Eigenschaften.

Die **Generalisierung** beschreibt einen Zusammenhang zwischen zwei Klassen und wird durch einen Pfeil mit unausgefüllten Pfeilkopf dargestellt. Gibt es eine allgemeinere Klasse und eine speziellere, so werden diese beiden Klassen mit dem Pfeil verbunden, wobei der Pfeilkopf auf die allgemeinere Klasse zeigt. Ein Beispiel dafür ist, dass die Katze (spezielle Klasse) ein Säugetier (allgemeine Klasse) ist. Das Diagramm würde also wie folgt aussehen (Abb. 2):

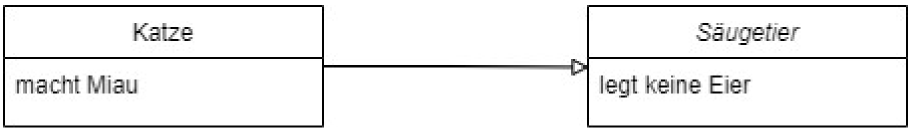

Abbildung 2: Beispiel Generalisierung

Ein **Rechteck** in einem **Aktivitätsdiagramm** wird auch Aktivitätsknoten genannt. Mit dem Rechteck wird somit eine Handlung beschrieben, welche sich innerhalb des Rechtecks befindet.

Eine **Raute** in einem **Aktivitätsdiagramm** steht für eine Entscheidung. Innerhalb der Raute steht eine Bedingung, welche eintritt oder nicht. Von einer Raute zweigen mehrere Pfeile ab und es wird ein Pfad entsprechend der Bedingung gewählt.

Ein **Punkt** in einem **Aktivitätsdiagramm** markiert den Anfang und das Ende des Diagramms. Der Punkt kann dabei beschriftet sein. Die Beschriftung beschreibt Anfangswerte, mit welchen im Diagramm gearbeitet wird, und Endwerte. (Booch, Rumbaugh & Jacobson, 2006)

2.2. Mechanismen in UML

Es greifen im Grunde 4 Mechanismen: die Spezifikation, Zusätze, übliche Aufteilung und Erweiterungsmechanismen.

Spezifikation meint, dass hinter jedem Symbol in einem UML-Diagramm eine Vielzahl an Informationen steckt. Bei einer Raute in einem Aktivitätsdiagramm stecken beispielsweise die Informationen, dass eine Entscheidung getroffen werden muss, welche den Pfad in alternative Pfade aufspaltet und die Bedingung für die Entscheidung.

Die Elemente in UML haben meist eine bestimmte Form. Diese sind grundsätzlich einfache Symbole, um die Gestaltung der Diagramme zu erleichtern. Manchmal reichen die Symbole jedoch nicht aus, um weitere Informationen abzubilden. Es besteht jedoch die Möglichkeit, jene Symbole mit **Zusätzen** zu erweitern.

Da die UML für die Softwareentwicklung konzipiert wurde, gibt es eine spezielle **Aufteilung** dafür, wie ein Softwaresystem abgebildet wird.

Da es nicht möglich ist, alle Prozesse, welche für die Softwareentwicklung wichtig sind, in einer abgeschlossenen Sprache zu beschreiben, ist die UML keine abgeschlossene Sprache. Das heißt, dass sie um eigene **Erweiterungen** angereichert werden kann. (Booch, Rumbaugh & Jacobson, 2006, S. 42)

2.3. Diagrammtypen

Hat man gelernt, mit diesen Hauptelementen umzugehen, so bietet UML nun eine Vielzahl an Diagrammtypen. Es wird dabei zwischen Strukturdiagrammen und Verhaltensdiagrammen unterschieden. Strukturdiagramme beschäftigen sich hauptsächlich mit einem System sowie dessen Aufteilung auf Komponenten, welche eine Gliederung eines Systems angeben. Verhaltensdiagramme stellen Situationen dar, in denen dynamische Handlungen erfolgen. (Booch, Rumbaugh, & Jacobson, 2006) In Folge werden nun zwei wichtige Diagrammtypen behandelt, welche später für die Modellierung der Kopfrechenstrategien relevant sind.

2.3.1. Das Aktivitätsdiagramm

Das Aktivitätsdiagramm ist eines von fünf Diagrammen in UML, um ein Verhalten zu modellieren. Das Diagramm besteht aus Punkten, Rechtecken, Rauten und den Pfeilen, um diese Elemente miteinander zu verbinden. Am Anfang eines Aktivitätendiagramms steht immer der Ausgangszustand und mögliche Eingaben. Danach folgen atomare Aktivitäten (= Aktivitäten, welche sich nicht mehr in Teilaktivitäten aufteilen lassen) und zwischen solchen Aktivitäten können Entscheidungen eintreten. Am Ende des Aktivitätsdiagramm steht ein oder mehrere Endzustände oder Ergebnisse. (Booch, Rumbaugh, & Jacobson, 2006, S. 313) In Abbildung 3 ist ein Beispiel für ein Aktivitätsdiagramm für die schriftliche Addition angeführt.

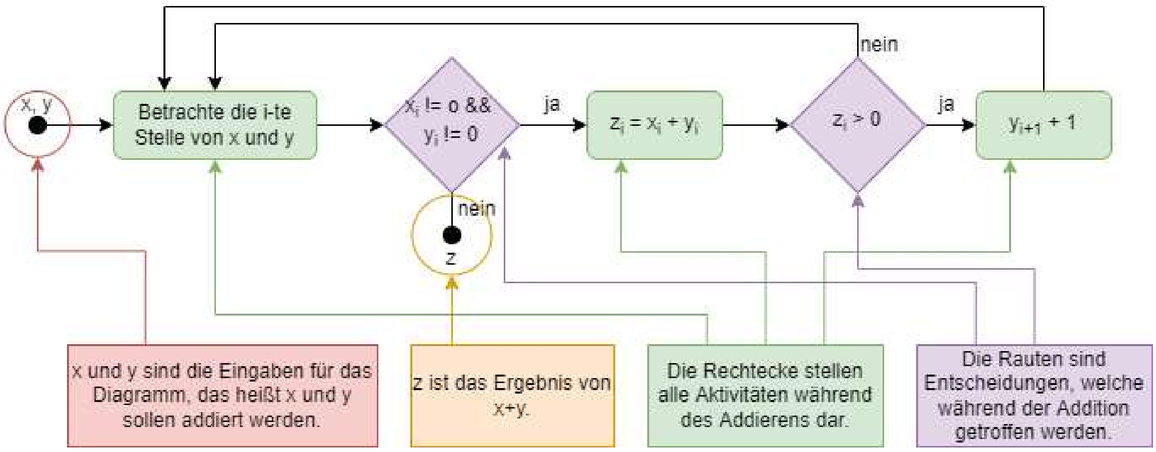

Abbildung 3: Das Aktivitätendiagramm - ein Beispiel mit Beschriftung

2.3.2. Das Klassendiagramm

Ein Klassendiagramm wird verwendet, um die Struktur eines Systems zu beschreiben. Dabei werden Klassen, Generalisationen und weitere Elemente, welche in dieser Arbeit nicht weiter angeführt werden, verwendet (Booch, Rumbaugh, & Jacobson, 2006, S 137). In Kapitel 3 werden einige Kopfrechenstrategien angeführt. Um einen Überblick über alle angeführten Strategien zu erhalten, werden diese in einem Klassendiagramm zusammengefasst.

3. Kopfrechenstrategien

Wie im ersten Kapitel bereits erwähnt, sind für das Kopfrechnen Strategien und Vereinfachungen der Schlüssel zum Erfolg. Durch geschicktes Umstellen der Zahlen oder Zerlegen können zahlreiche Aufgaben vereinfacht werden, sodass sie leichter im Kopf zu lösen sind. Ein weiterer kleiner Trick ist, sich die Rechnungen laut vorzusagen. Dabei wiederholt man die Rechnung und die einzelnen Zahlen noch einmal und prägt sich diese besser ein (Howard, 2008, S. 5). Welche Tricks nun auf die einzelnen Grundrechnungsarten zutreffen, wird im Weiteren geklärt. Davor eine kleine Zusammenfassung der Rechnungsarten mit ihren Bestandteilen:

- Addition: Summand + Summand = Summe
- Subtraktion: Minuend – Subtrahend = Differenz
- Multiplikation: Multiplikator · Multiplikand = Produkt
- Division: Dividend : Divisor = Quotient

3.1. Strategien für die Addition und die Subtraktion

Benjamin und Shermer vertreten die Meinung, dass es sich bei der Addition und Subtraktion empfiehlt, von „links nach rechts“ zu rechnen. Das heißt, dass zuerst der höchste Stellenwert zusammengerechnet wird, danach der zweithöchste und so weiter. Dies bietet mehrere Vorteile. Bei einer groben Abschätzung eines Ergebnisses ist es aussagekräftiger, wenn man feststellt, dass das Resultat etwa 1200 beträgt, anstatt dass die Einerstelle eine 8 ist. Zudem liest oder hört man Zahlen üblicherweise von links nach rechts, obwohl die deutsche Sprache bei Einer- und Zehnerstelle eine Ausnahme bildet. Das Rechnen von links nach rechts mag anfangs ungewohnt wirken, da man vom schriftlichen Rechnen eine gegenteilige Richtung gewöhnt ist. Hat man sich jedoch an die Rechenrichtung gewohnt, so gelingt das Kopfrechnen auf diese Weise um einiges leichter. (Benjamin & Shermer, 2007, S. 34) Der Rechenweg für die Berechnung von 45 + 37 oder 84 - 25 ist jeweils in Abbildung 4 dargestellt.

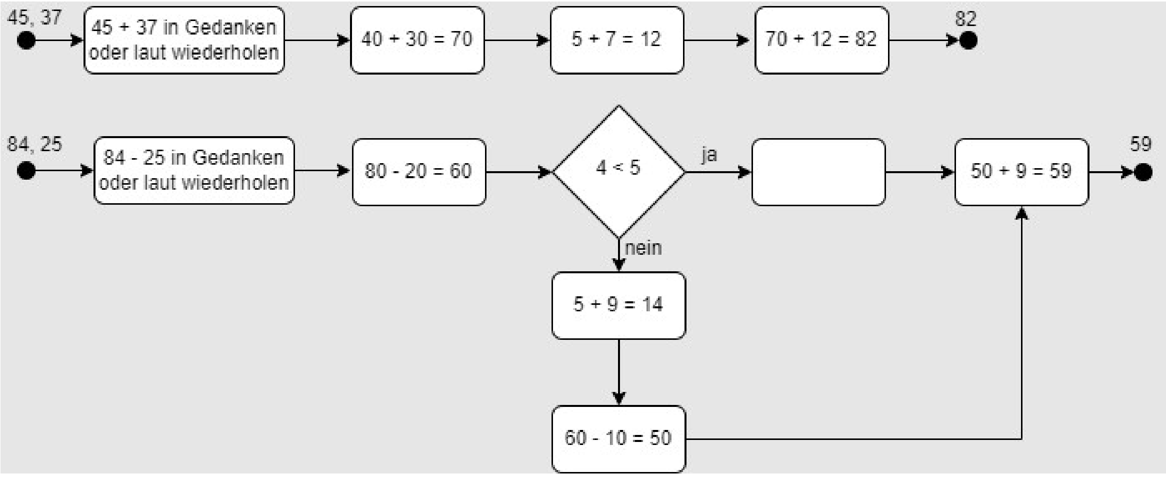

Abbildung 4: von links nach rechts addieren und subtrahieren

In Studien, welche sich mit dem Kopfrechnen beschäftigten, haben Subtraktionen eine 20% niedrigere Wahrscheinlichkeit richtig gelöst zu werden als Additionen (Schulz & Wartha, 2021, S. 72). Daher würde es sich anbieten, besonders bei der Subtraktion auf weitere Strategien zurückzugreifen. Laut Padberg gibt es bei der Addition und der Subtraktion drei Hauptstrategien:

- das schrittweise Rechnen
- das stellenweise Rechnen
- eine Mischform der beiden (Padberg, 2011, S. 106)

3.1.1. Das schrittweise Rechnen

Beim schrittweisen Rechnen wird eine Zahl passend zerlegt. Bei der Addition ist das meist der zweite Summand und bei der Subtraktion der Subtrahend. Oftmals wird die zweite Zahl in ihre Stellenwerte zerlegt. Eine mögliche Aufteilung bei der Rechnung 45 + 37 von 37 könnte 30 + 7, 7 + 30 oder 5 + 32 sein. Bei der Subtraktion bleibt der Minuend fest und wird nicht verändert. Eine mögliche Aufteilung bei der Rechnung 84 – 25 von 25 könnte 20 + 5, 5 + 20 oder 4 + 21 sein. (Padberg, 2011, S. 106) In Abbildung 5 wird das schrittweise Addieren und Subtrahieren allgemein und mit dem Zahlenbeispiel beschrieben:

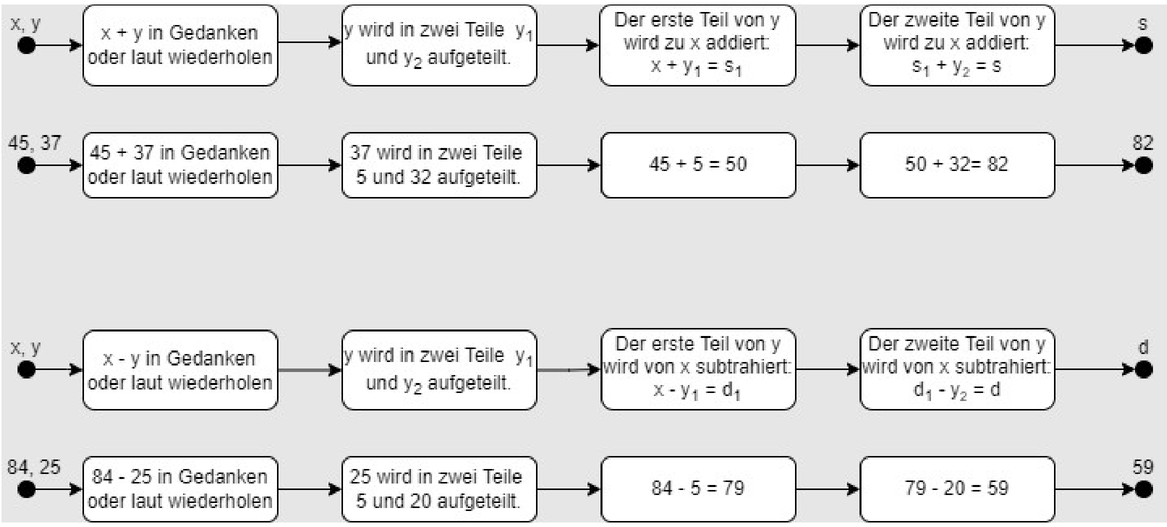

Abbildung 5: Das schrittweise Addieren und Subtrahieren

3.1.2. Das stellenweise Rechnen

Beim stellenweisen Rechnen werden beide Zahlen in ihre Zehner und Einer zerlegt und getrennt betrachtet. Diese Vorgehensweise ist ein Spezialfall des schrittweisen Rechnens und wird daher extra genannt. So kann die Rechnung 45 + 37 gelöst werden, indem zuerst 40 + 30 = 70, dann 5 + 7 = 12 und zuletzt 70 + 12 gerechnet wird. Analog wird die Aufgabe 84 – 25 gelöst, indem 80 – 20 = 60, dann 5 und wieviel ist 14 -> 9, die Zehnerstelle minus eins und zuletzt 50 + 9 = 59 gerechnet wird (Padberg, 2011, S. 106). Wiederum wird der Rechenweg für das stellenweise Addieren und Subtrahieren in Abbildung 6 allgemein und mit dem Zahlenbeispiel beschrieben.

Diese Strategie treibt Schülerinnen und Schüler schnell an ihre Grenzen, wenn die Einerstelle des Subtrahenden größer ist als die des Minuenden. Dies geht ebenso aus dem Diagramm hervor, da diese Strategie um einige Zwischenschritte erweitert und somit um einiges komplexer wird. Daher weichen Schülerinnen und Schüler oft auf eine Mischform der oben genannten Strategien aus. (Padberg, 2011, S. 120)

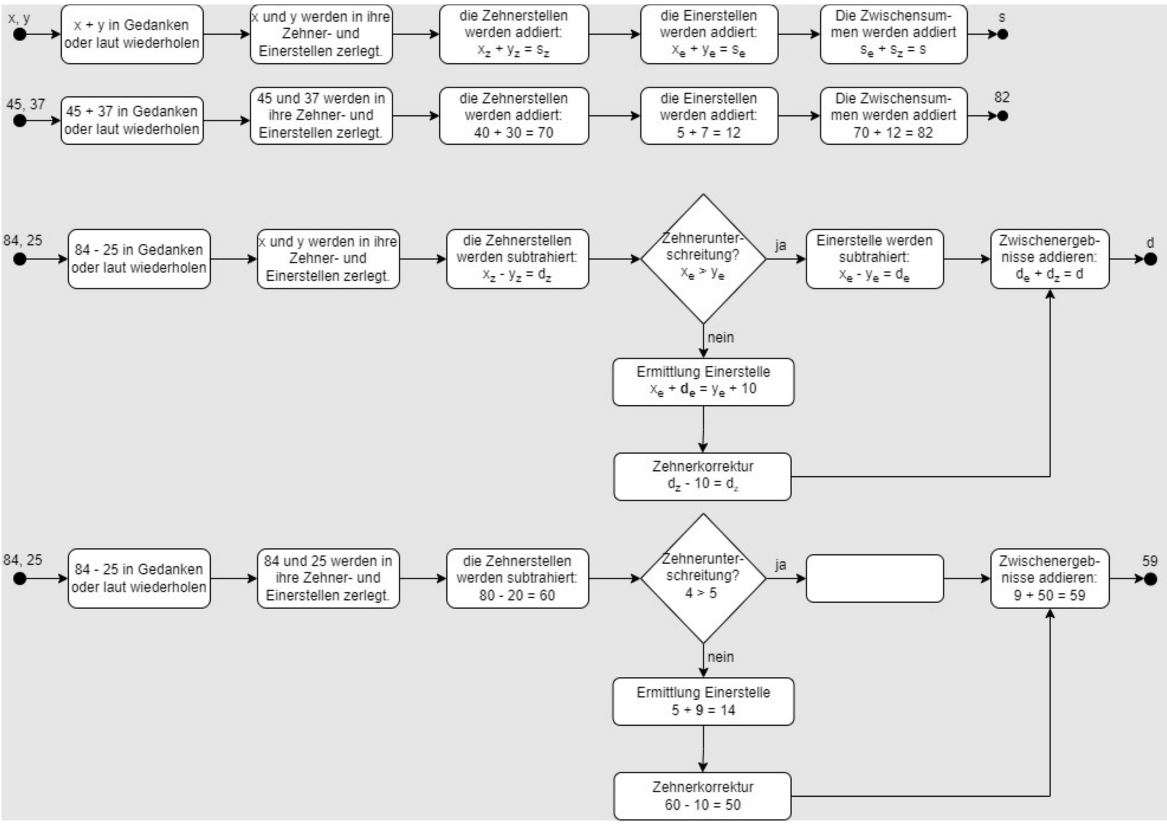

Abbildung 6: Das stellenweise Addieren und Subtrahieren

3.1.3. Die Mischform aus schrittweisem und stellenweisem Rechnen

Empirische Studien haben ergeben, dass Schülerinnen und Schüler oft nicht rein stellenweise oder schrittweise rechnen. Die beiden Rechenstrategien werden gemischt. Dies zeigt sich beispielsweise so, dass Schülerinnen und Schüler bei der Addition die Zehner zusammenrechnen, daran anschließend zu diesem Zwischenergebnis die Einerstelle des ersten Summanden addieren und dann die Einerstelle des zweiten Summanden. Die Rechnung 45 + 37 wird demnach gelöst, indem zuerst 40 + 30 = 70, danach 70 + 5 = 75 und zuletzt 75 + 7 = 82 gerechnet wird. In Abbildung 7 wird das schrittweise Addieren und Subtrahieren allgemein und mit dem Zahlenbeispiel beschrieben:

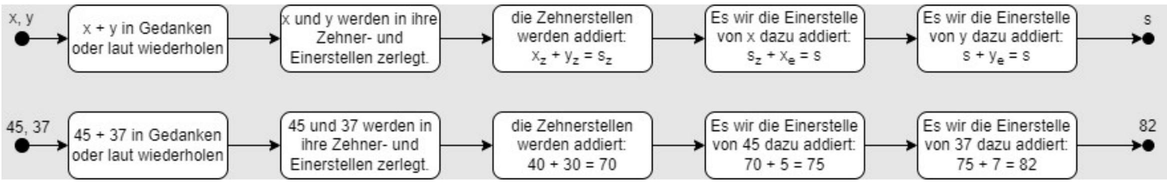

Abbildung 7: Die Mischform der Addition

Bei der Subtraktion gibt es ebenso eine gemischte Rechenstrategie. Dabei werden zuerst die Zehnerstellen subtrahiert. Danach wird zu diesem Zwischenergebnis die Einerstelle des Minuenden addiert und davon wiederum die Einerstelle des Subtrahenden subtrahiert (Padberg, 2011, S. 120). Die Rechnung 84 – 25 wird demnach gelöst, indem zuerst 80 – 20 = 60, danach 60 + 4 = 64 und zuletzt 64 – 5 = 59 gerechnet wird. In Abbildung 8 wird das schrittweise Addieren und Subtrahieren allgemein und mit dem Zahlenbeispiel beschrieben:

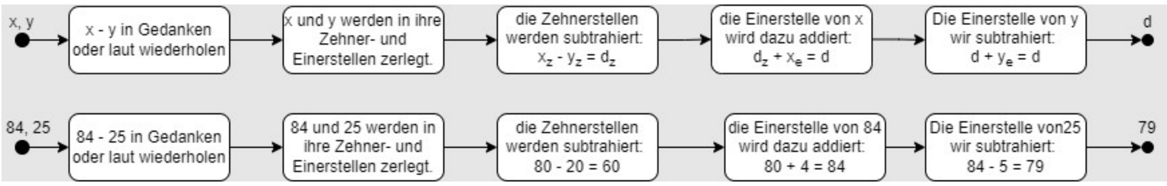

Abbildung 8: Die Mischform der Subtraktion

Padberg stellt diese Strategien gegenüber und gibt an, welche bei Schülerinnen und Schülern am ehesten zum Erfolg führt. Bei der Addition führt die Strategie „schrittweises Rechnen“ am ehesten zum Erfolg, gefolgt von „stellenweisen Rechnen“ und zum Schluss die Mischform der beiden (Padberg, 2011, S. 107). Bei der Subtraktion hat sich das „schrittweise Rechnen“ bewährt, da die anderen beiden Strategien anfällig für Operationsfehler werden, wenn eine Zehnerunterschreitung stattfindet (Padberg, 2011, S. 124). Dies lässt sich auch aus den Diagrammen ableiten. Das schrittweise Rechnen ist bei beiden Operationen die kompakteste Methode mit den wenigsten Zwischenschritten. Denn in der Mathematik gilt, dass jeder Zwischenschritt eine potentielle Fehlerquelle sein kann. Minimiert man also die Zwischenschritte, können auch Fehler verringert werden.

3.2. Strategien für die Multiplikation

Für alle Multiplikationen ist das kleine Einmaleins die wichtigste Voraussetzung. Beherrscht man dieses nicht, können auch alle weiteren Multiplikationen nicht durchgeführt werden. Hat man das kleine Einmaleins verinnerlicht, kann man sich wiederum auf weitere Strategien beim Kopfrechnen berufen. Die Hauptstrategien beschränken sich dabei auf das Rechnen von links nach rechts und das Erkennen von vorteilhaften Faktoren. (Padberg, 2011, S. 138)

3.2.1. Die Multiplikation mit einstelligen Multiplikanden

Auch hier vereinfacht das Rechnen – beginnend vom größten Stellenwert – die Berechnung des Produkts. Wenn der Multiplikator zweistellig und der Multiplikand einstellig ist, bietet es sich an, die Zehnerstelle des Multiplikators mit dem Multiplikand zu multiplizieren. Dann wird die Einerstelle mit dem Multiplikanden multipliziert und zum ersten Zwischenergebnis addiert. (Benjamin & Shermer, 2007, S. 52) In Abbildung 9 wird die Multiplikation im Kopf allgemein und mit dem Zahlenbeispiel 63 · 8 beschrieben:

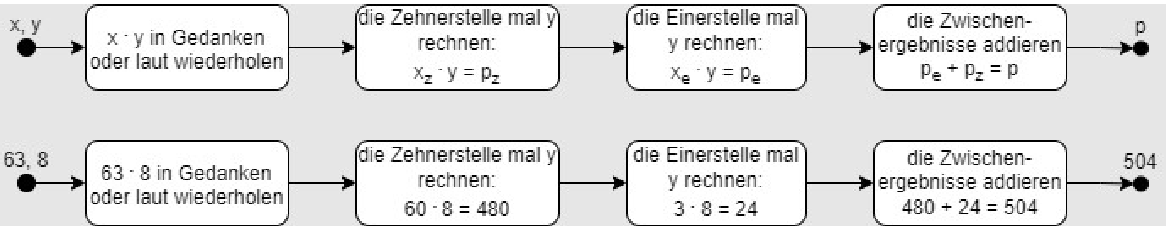

Abbildung 9: Die Multiplikation mit einstelligen Multiplikanden

Zusätzlich zu diesem Trick gibt es Multiplikationen, die besonders vorteilhaft sind.

3.2.2. Multiplikation mit vorteilhaften Multiplikanden

Howard argumentiert, dass es vorteilhaft ist, wenn eine Zahl mit fünf multipliziert werden soll, den Multiplikator durch 2 zu teilen und das Ergebnis anschließend mit 10 zu multiplizieren. Das Halbieren gelingt den meisten Menschen besonders gut. (Howard, 2008, S. 7) Der Rechenweg für die Rechnung 76 · 5 und der allgemeine Rechenweg sind in Abbildung 10 festgehalten:

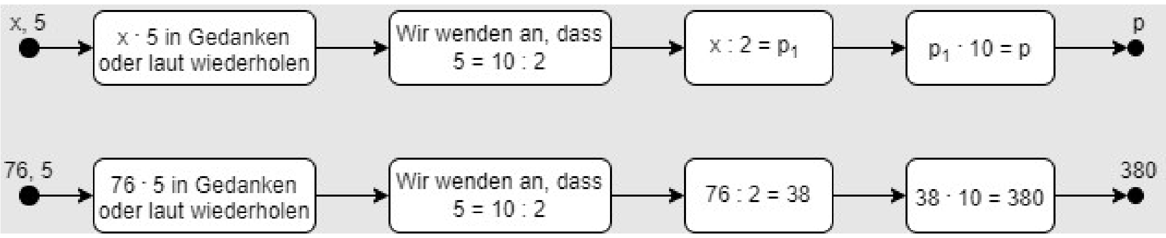

Abbildung 10: Die Multiplikation mit 5

Ein weiterer vorteilhafter Multiplikand ist die Zahl elf. Wird eine Zahl mit elf multipliziert, bietet es sich an, die Zahl mit 10 zu multiplizieren und zu diesem Zwischenergebnis noch einmal die Zahl zu addieren. (Howard, 2008, S. 8) Der Rechenweg für die Rechnung 65 · 11 und der allgemeine Rechenweg sind in Abbildung 11 festgehalten:

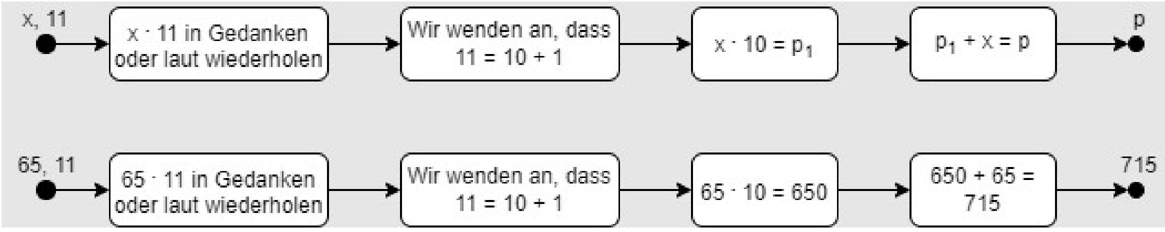

Abbildung 11: Die Multiplikation mit 11

3.3. Division mit einstelligem Divisor

Padberg konnte feststellen, dass sich bei der Division das schrittweise Rechnen als erfolgreich erweist (Padberg, 2011, S. 166). Betracht man die Rechnung 84 : 6, so ist der erste Schritt der gleiche wie beim schriftlichen Rechnen: die Stellenwertbestimmung. Bekannt ist: $10 \cdot 6 = 60 < 84 < 600 = 100 \cdot 6$. Entsprechend hat das Ergebnis zwei Stellen. Als nächstes bestimmt man das höchste Vielfache von zehn multipliziert mit 6, welches noch unter 84 liegt. In diesem Fall wäre das 10. $10 \cdot 6 = 60$, es bleiben also nur mehr 84 – 60 = 24, welche durch 6 geteilt werden muss. 24 : 6 = 4 und 10 + 4 ergibt 14, dies ist das Ergebnis (Benjamin & Shermer, 2007, S. 103). Der allgemeine Rechenweg wird in Abbildung 11 zusammengefasst:

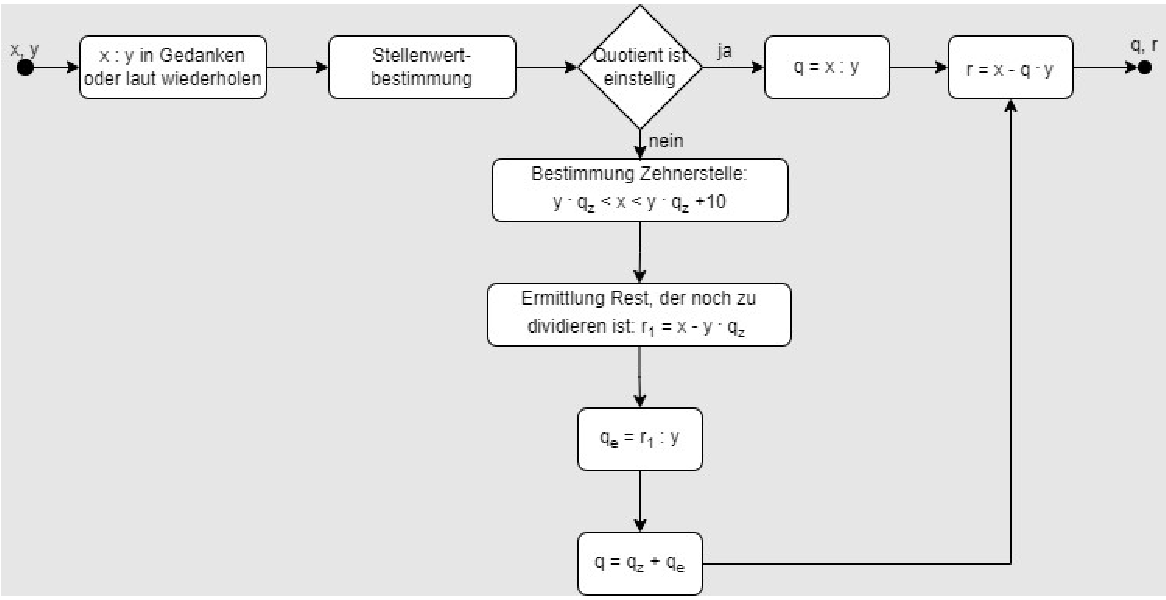

Abbildung 12: Die Division mit einstelligen Divisor

3.4. Die Überschlagsrechnung

Überschlagsrechnungen werden gewöhnlicherweise im Kopf gelöst. Zusätzlich dazu werden in allen Lehrplänen explizit Überschlagsrechnungen verlangt. Daher werden sie auch im Zuge der Kopfrechenstrategien behandelt. Weiters gewinnt die Überschlagsrechnung im Computerzeitalter an großer Bedeutung, da die Ergebnisse eines elektronisches Hilfsgerätes grob und schnell überprüft werden können (Padberg, 2011, S. 137). Dabei wird auf jede einzelne Grundrechenart eingegangen. Grundsätzlich gilt die Kompetenz, dass die Entscheidung getroffen werden muss, wie fein die Überschlagsrechnung sein muss. Im weiteren Verlauf wird erläutert, wie eine Überschlagsrechnung durchgeführt wird und wie eine Schätzung mit einem geringeren Fehler vorgenommen werden kann.

Bei der Addition rundet man allgemein die Zahlen beim höchsten Stellenwert. Hierbei können drei verschiedene Varianten verwendet werden, welche sich deutlich in ihrer Genauigkeit unterscheiden. Bei der ersten von Padberg angeführten Variante handelt es sich um die ungenaueste. Dabei werden alle Stellen bis auf den höchsten Stellenwert abgedeckt. Diese zwei Zahlen werden nun addiert und statt den abgedeckten Stellen eine Null geschrieben (Padberg, 2011, S. 232). Benjamin und Shermer stellen zwei weitere Varianten vor. Bei der zweiten Variante wird dabei, wie gewohnt, ab fünf auf- und unter 5 abgerundet. Diese grobe Schätzung kommt dem Ergebnis meist sehr nahe. Rundet man die Zahlen jedoch immer auf den zweithöchsten Stellenwert und ist die Summe größer als 10 000, so erhält man immer einen maximalen Schätzfehler von 1%. Also kommt diese Art der Überschlagsrechnung dem tatsächlichen Ergebnis sehr nahe. In welchen Situationen welche Variante geeignet ist, sollte mit den Schülerinnen und Schülern diskutiert werden (Benjamin & Shermer, 2007, S. 129). Alle möglichen Varianten sowie die Entscheidung, welche verwendet werden soll, wurden in Abbildung 13 (siehe unten) zusammengefasst.

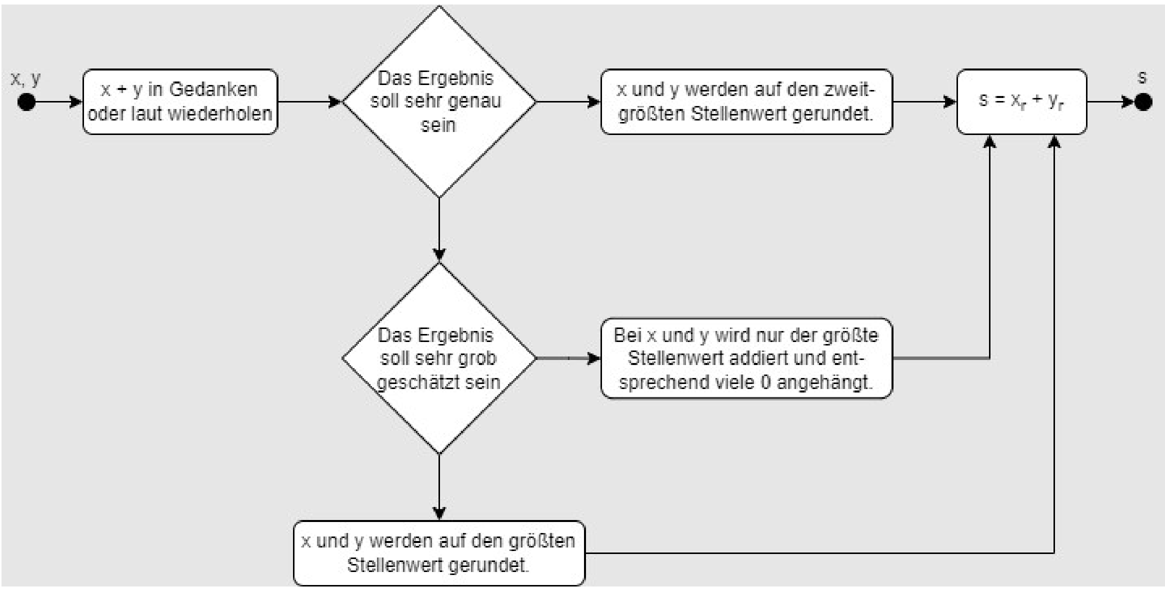

Abbildung 13: Die Überschlagsrechnung für die Addition

Werden diese Rundungsregeln bei der Subtraktion angewandt, weicht die Schätzung vom tatsächlichen Ergebnis oft stark ab. Es empfiehlt sich daher, bei der Subtraktion immer beide Zahlen in dieselbe Richtung zu runden, also entweder beide ab- oder aufzurunden. (Padberg, 2011, S. 262) Abbildung 14 zeigt die Überschlagsrechnung für die Subtraktion.

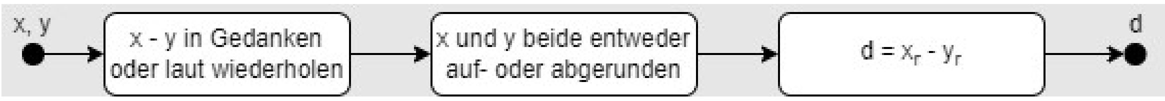

Abbildung 14: Die Überschlagsrechnung für die Subtraktion

Anders verhält es sich bei der Multiplikation. Bei dieser Grundrechnungsart kommt man zu einer relativ genauen Schätzung, wenn ein Faktor aufgerundet und der andere Faktor abgerundet wird. (Padberg, 2011, S. 284) Abbildung 15 bildet die Überschlagsrechnung für die Multiplikation ab.

Abbildung 15: Die Überschlagsrechnung für die Multiplikation

Bei der Division führt das Runden nur selten zu einem zufriedenstellenden Ergebnis. Der erste Schritt bei einer Überschlagsrechnung der Division ist die Stellenwertbestimmung. Ausgehend von der Stellenwertbestimmung ermittelt man ein naheliegendes Vielfache des Divisors des Dividenden. So können die Rechnungen 875 : 5 durch 900 : 5 und 361 : 7 durch 350 : 7 überschlagen werden. (Padberg, 2011, S. 307) Abbildung 16 bildet die Überschlagsrechnung für die Division ab.

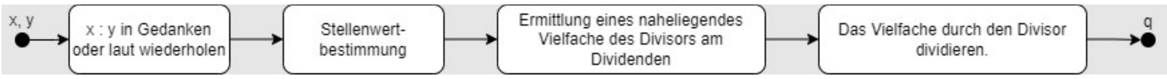

Abbildung 16: Die Überschlagsrechnung für die Division

3.5. Übersicht der Strategien

In diesem Kapitel wurden nun die wichtigsten Strategien für das Kopfrechnen und das Überschlagen von Rechnungen für Schülerinnen und Schüler in der Sekundarstufe 1 genannt und im Detail betrachtet. Um dabei den Überblick nicht zu verlieren, wurden alle Strategien in Abbildung 17 durch ein Klassendiagramm zusammengefasst.

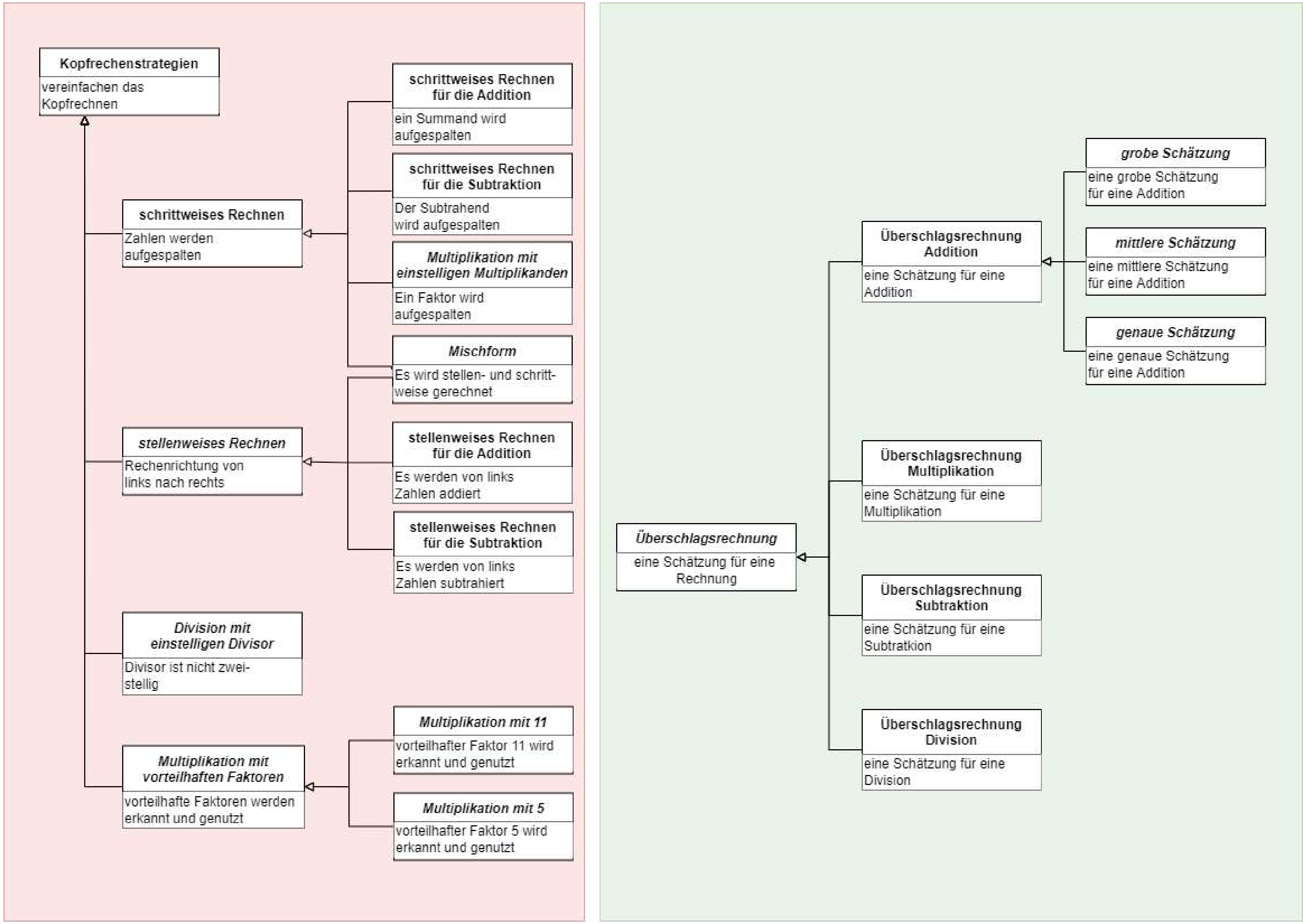

Abbildung 17: Übersicht Kopfrechenstrategien und Überschlagsrechnungen

4. Resümee und Ausblick

4.1. Zusammenfassung

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass das Kopfrechnen auch im Computerzeitalter noch relevant ist und nicht vernachlässigt werden darf. Kopfrechnen bietet für Schülerinnen und Schüler zahlreiche Vorteile. Diese Vorteile finden einerseits in der Mathematik selbst Platz, nämlich bei der Vertiefung des Verständnisses von Operationen und Zahlen sowie der Schulung des Zahlenblicks. Andererseits werden die Lernenden kompetenter im Umgang mit Technik, da sie sich über den sinnvollen Einsatz des Taschenrechners Gedanken machen. Weiters trägt die Beschäftigung mit dem Modellieren dazu bei, Kompetenzen im „Computational Thinking" aufzubauen.

4.2. Ausblick

An dieser Stelle werden die Grenzen der Arbeit aufgezeigt, denn der Umfang der Arbeit hatte signifikante Einschränkungen beim Inhalt und den Ergebnisse nach sich gezogen.

Die Arbeit weist klare Einschränkungen im Inhalt auf. Auf der einen Seite wurde die UML nur ansatzweise thematisiert. Die UML ist eine sehr umfangreiche Sprache. Das UML-Handbuch umfasst mehr als 500 Seiten und selbst darin sind nicht alle Themen zur Gänze enthalten. Auf der anderen Seite wurden nur Kopfrechenstrategien beschrieben, welche als absolute Basis gelten. Es gibt zahlreiche weitere Strategien.

Zusätzlich wurde das Thema Kopfrechenstrategien und UML lediglich in Verbindung gebracht. Die Arbeit gibt keine Anleitung dazu, wie die Integration der UML-Modellierung im Unterricht effektiv umgesetzt werden kann. Es wurde festgestellt, dass Schülerinnen und Schüler oft nicht darüber nachdenken, wie sie eine Aufgabe im Kopf am effizientesten lösen können. Die intensive Auseinandersetzung mit der Modellierung von Strategien kann dazu führen, dass Lernende gezielt über passende Kopfrechenstrategien nachdenken. Daher wäre es vermutlich interessant und bereichernd, sich weiter mit diesem Thema auseinanderzusetzen.

5. Abbildungsverzeichnis

6. Literaturverzeichnis

Benjamin, A., & Shermer, M. (2007). Mathe Magie - Verblüffende Tricks für blitzschnelles Kopfrechnen und ein phänomenales Zahlengedächtnis. Heyne.

Booch, G., Rumbaugh, J. & Jacobson, I. (2006). Das UML Handbuch. Addison-Wesley

Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung, W. u. (2. Januar 2023). Lehrplan der allgmeinbildenden höheren Schule. Österreich.

Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung, W. u. (2. Januar 2023). Lehrplan der Mittelschule. Österreich.

Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung, W. u. (2. Januar 2023). Lehrplan der Volksschule. Österreich.

Greefrath, G. (2018). Anwendungen und Modellieren im Mathematikunterricht – Didaktische Perspektiven zum Sachrechnen in der Sekundarstufe. Springer.

Hattie, J. (2013). Lernen sichtbar machen. Schneider.

Howard, W. J. (2008). Fördermaterial Mathe Kopfrechnen: Strategien, Tricks und Übungsaufgaben aus dem Alltag. Verlag an der Ruhr.

Padberg, F. (2011). Didaktik der Arithmetik: für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung. Heidelberg: Spektrum, (Hrsg.) Adademischer Verlag.

Schmidt-Thieme, B., & Weigand, H.-G. (2015). Medien. In R. Bruder, L. S.-T. Hefendehl-Hebeker, & H.-G. Weigand (Hrsg.), Handbuch der Mathematikdidaktik (S. 461-490). Springer Spektrum.

Rathgeb-Schnierer, E., & Rechtsteiner, C. (2018). Rechnen lernen und Flexibilität entwickeln. Springer.

Rechtsteiner, C. (2020). Flexibles Rechnen anregen. Grundschule Mathematik, 32-35. Rechtsteiner, C. (2021). Kopfrechnen - was ist das eigentlich? Grundschule Mathematik, S. 2-3.

Schulz, A., & Wartha, S. (2021). Zahlen und Operationen am Übergang Primar-/Sekundarstufe - Grundvorstellungen aufbauen, festigen, vernetzen. Springer.

Tiehl, O. (2015). Kopfrechnen? Ja, bitte! Mathematik differenziert, 4-7.

Wehrle, M. (2017). Kopfrechnen in der Sekundarstufe: Erste Ergebnisse einer aktuellen Studie. WTM.