ASSIGNMENT 2 – PARTE B

STRADA CORINNA NR MATR 839193

$$\max f(x) = x^3 + 2x - 2x^2 - 0.25x^4$$

1) <u>Metodo della bisezione</u>

   ITERAZIONE 0

   $x_l = a = -3$
   $x_u = b = -2$

   Si calcola il punto medio tra i due

   $x_m = c = \frac{-3-2}{2} = -\frac{5}{2}$

   Si calcola il valore delle funzioni in x_l e x_m

   $f(x_l) = f(-3) = -71{,}25$

   $f(x_m) = f\left(-\frac{5}{2}\right) = -42.8906$

   Quindi si calcola il prodotto tra $f(x_l)$ e $f(x_m)$, il quale, essendo tra due numeri negativi, sicuramente sarà maggiore di 0 e perciò si conclude che lo zero della funzione non si troverà tra x_l e x_m.

   Inoltre, si verifica che il criterio di stopping che è, sulla base del criterio definito dalla funzione implementata nello script, $|\ f(x_m)\ | <$ tol (dove tol $= e^{-12}$) non è rispettato in quanto $|\ -42.8906\ | >$ tol.

   All'iterazione successiva, si avrà che:
   $x_l = a = -\frac{5}{2}$
   $x_u = b = -2$

2) <u>Metodo di Newton</u>

ITERAZIONE 0

La soluzione di partenza scelta è $x_0 = -2$.

$f(x_0) = f(-2) = -24$

$f'(x) = 3x^2 + 2 - 4x - x^3$

$f'(x_0) = f'(-2) = 30$

Quindi, essendo $x_1 = x_0 - f(x_0) / f'(x_0)$, si ha che

$x_1 = -2 + \frac{24}{30} = -\frac{6}{5}$

A questo punto, si verifica se a questa iterazione si verifica il criterio di stopping.

In questo caso, in base al criterio definito dalla funzione per il metodo di Newton

$| f(x_1) | = | f\left(-\frac{6}{5}\right) | = |$ -7.523 $|>$ tol $(= e^{-12})$

Bisogna quindi proseguire con le iterazioni

3) <u>Metodo della secante</u>

ITERAZIONE 0

Le soluzioni di partenza scelte sono $x_0 = -3.5$ e $x_1 = +3.5$

Essendo $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}$

Si calcola che

$f(x_0) = f(-3.5) = -\frac{7161}{64}$

$f(x_1) = f(+3.5) = -\frac{777}{64}$

Quindi

$$x_2 = 3.5 - \frac{-\frac{777}{64}}{\frac{-\frac{777}{64}+\frac{7161}{64}}{3.5+3.5}} = 4.352$$

Per decidere se passare o meno all'iterazione successiva, si verifica se è rispettato o meno il criterio di stopping. In questo caso, sulla base della funzione definita per massimizzare la funzione con il metodo della secante, si concludono le iterazioni se $|x_2 - x_1| < \text{tol} \ (= e^{-12})$.

Essendo | 4.352 - 3.5 | > tol, si prosegue con l'algoritmo.

Metodo dello Steepest Descent

$$\max f(x) = 2x_1x_2 + x_2 + x_1^2 - 2x_2^2$$

ITERAZIONE 0

Il gradiente della funzione da massimizzare è pari a

$\nabla f(x) = [2x_2 - 2x_1 , 2x_1 + 1 - 4x_2]$

La soluzione di partenza scelta è $x_0 = [-10, 10]$

Quindi, $\nabla f(x_0) = [40, 61]$

Si verifica se è rispettato il criterio di stopping.

All'iterazione 0, esso è soddisfatto se $|| \nabla f(x_0) || < \text{tol} \ (= e^{-30})$.

Nel caso corrente, $|| \sqrt{40^2 + 61^2} || > \text{tol}$, di conseguenza si procede con le iterazioni.

ITERAZIONE 1

Essendo $x_1 = x_0 + \alpha_0 \, d_0$

In cui

d_0 è la direzione di ricerca, (cioè $\nabla f(x_0)$ preso con segno positivo poiché il problema che si sta cercando di risolvere è di massimizzazione)

si ha che

$x_1 = [-10, 10] + \alpha_0 [40, 61]$ = [$40\alpha_0$ -10, $61\alpha_0$+10]

A questo punto, si calcola

$f(x_1) = -962\, \alpha_0^2 - 3599\, \alpha_0 - 290$

E poi, la derivata prima di tale quantità

$f'(x_1) = -1924\alpha_0 - 3599$

Quindi, si calcola che

$\alpha_0 = -1.871$

Di conseguenza, $x_1 = [-10, 10] - 1.871\ [40, 61]$ = [-84.84 , -104.131]

A questo punto, si verifica la condizione di stopping.

$\nabla f(x_1) = [-38.582, -585.204]$

|| $\nabla f(x_1)$ || = $\sqrt{(-38.582)^2 + (-585.204)^2} >$ tol

Il criterio di stopping non è soddisfatto, perciò si continua con la successiva iterazione.

<u>Come risolvere lo stesso problema tramite metaeuristiche</u>

Osservando il grafico della funzione, si nota che essa non sembra presentare un andamento particolarmente irregolare; in altri termini, lo spazio di ricerca non sembra richiedere l'implementazione di particolari procedure di exploration per poter individuare l'ottimo globale e quindi non rimanere intrappolati in minimi locali. Quindi potrebbe essere utile concentrarsi sull'exploitation, mantenendo il noise relativamente basso.

In questo caso si potrebbe implementare l'algoritmo di Steepest Ascent Hill - Climbing, cioè il caso generale di un algortimo di Hill Climbing relativo alla ricerca dell'ottimo tramite gradiente. Non sarebbe necessario conoscere il gradiente o la sua direzione. Inoltre, si potrebbe strutturare l’algoritmo in modo da valutare ad ogni iterazione differenti soluzioni candidate a partire da un’unica, in parallelo.

Si potrebbe anche passare allo Steepest Ascent Hill-Climbing with Replacement, il quale consente ad ogni step anche soluzioni non migliorative rispetto alle precedenti.