به نام خدا

امیر فاضل کوزه‌گر کالجی

۹۹۳۱۰۹۹

تمرین تحویلی سری سوم درس جبر خطی

---

۱) ساده شده ماتریس A به صورت $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ می‌باشد که یک ماتریس بالا مثلثی است پس دترمینان آن ضرب اعضای قطر اصلی آن می‌باشد:

$$\det A = 2 \times 1 \times -1 = -2$$

۲) الف)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & -8 & -9 \\ -1 & -7 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & -16 & -5 \\ 0 & -11 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & -16 & -5 \\ 0 & 0 & \frac{87}{16} \end{bmatrix}$$

$$\det A = 1 \times -16 \times \frac{87}{16} = -87 \neq 0$$

چون دترمینان A مخالف ۰ است یعنی invertible می‌باشد پس ستون‌های آن از هم مستقل خطی اند.

ب) $\text{Volume} = |\det A| = 87$

ج) $V = |\det A| \cdot \{V(B)\} = |\det A|\,|\det B| = 87 \times 7 = 609$

۳) الف) ستون سوم ماتریس A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} C_{31} \\ C_{32} \\ C_{33} \end{bmatrix}$$

$$C_{31} = + \begin{vmatrix} -5 & -7 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -30 - (-35) = +5$$

$$C_{32} = - \begin{vmatrix} -1 & -7 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -1 \times (-6 - (-14)) = -8 \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \\ 5 \end{bmatrix} \times \frac{1}{\det A}$$

$$C_{33} = + \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -5 - (-10) = 5$$

$$\det A = 1 \Rightarrow \text{result} = \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ب) فرض کنیم e_j، j امین ستون از ماتریس همانی باشد و x، j امین ستون از A^{-1} داریم:

$$Ax = e_j$$

i امین درایه‌ی x برابر است با (i,j) امین عنصر A^{-1}، طبق قانون کرامر داریم:

$$\{(i,j) \text{ امین عنصر } A^{-1}\} = x_i = \frac{\det A_i(e_j)}{\det A}$$

براساس cofactor بسط میدانیم:

$$\det A_i(e_j) = (-1)^{i+j} \det A_{ji} = C_{ji}$$

پس (i,j) امین درایه‌ی A^{-1} برابر است با $\frac{C_{ji}}{\det A}$، داریم:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Scanned by CamScanner

۴) ~~بازنویسی~~ باید برای بدست آوردن دترمینان، ماتریس را ساده سازی کنیم. با کم کردن $\frac{5}{9}$ سطر سوم از سطر هفتم به یک سطر تماما صفر می رسیم که نشان می دهد دترمینان برابر ۰ است.

۵) الف)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} , \quad A^T = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & \cdots \\ b_{21} & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \\ b_{n1} & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

$$\det A = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \cdots + a_{1n}C_{1n}$$

$$\det A^T = b_{11}C'_{11} + b_{21}C'_{21} + \cdots + b_{n1}C'_{n1}$$

$a_{11} = b_{11}$
$a_{12} = b_{21}$
$\vdots$
$a_{1n} = b_{n1}$

و $C'_{ij} = C_{ji}$ $\Rightarrow \det A = \det A^T$

ب) اگر A وارون پذیر نباشد AB نیز نمی باشد و $\det A = 0$ و $\det AB = 0$

اگر A وارون پذیر باشد معادل I است. داریم:

$$A = E_p E_{p-1} \cdots E_1 \cdot I_n = E_p E_{p-1} \cdots E_1$$

$$\Rightarrow |AB| = |E_p E_{p-1} \cdots E_1 B| = |E_p|\,|E_{p-1} \cdots E_1 B| = \cdots$$

$$= |E_p| \cdots |E_1|\,|B| = |E_p \cdots E_1|\,|B|$$

$$= |A|\,|B|$$

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(BA)$$

ج)

$$\det(PAP^{-1}) = \det(P)\det(A)\det(P^{-1})$$

$$= \det(P)\det(P^{-1})\det(A)$$

$$= \det(PP^{-1})\det(A)$$

$$= \det(I)\det(A)$$

$$= 1 \times \det A$$

د)

$$U^T U = I$$

$$\det(U^T U) = \det(I)$$

$$\det(U^T)\det(U) = \det(I)$$

$$\xrightarrow{\det(U^T) = \det(U)} \det(U)^2 = 1$$

$$\det(U) = \pm 1$$

ه) خیر، اگر A ماتریس صفر باشد، $\det(A^4) = \det(A) = 0$ اما معکوس پذیر نیست.

۶) برای به دست آوردن دترمینان باید ساده کنیم ماتریس را و در گام اول باید عناصر زیر a_{11} را صفر کنیم. در این عملیات عناصر زیر a_{11} می‌توانند شامل یکی از مقادیر ۰ یا ۲ یا ۲- شوند. که هر سه بر ۲ بخش‌پذیرند. به همین روش عملیات کاهش ردیفی را ادامه می‌دهیم تا یک ماتریس بالامثلثی بسازیم. در نهایت به ماتریسی خواهیم رسید که عناصر قطر اصلی آن غیر از a_{11} بر ۲ بخش‌پذیرند که می‌شوند $n-1$ عنصر. پس می‌توان گفت $\det = 2^{n-1} \times a_{11}$ پس دترمینان بر 2^{n-1} بخش‌پذیر است.

۷) با انجام عملیات row interchange می‌توان ماتریس را به حالت $\begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$ درآورد اما طبق theorem ۳، دترمینان [illegible] شده پس داریم:

$$\det = -|D||C|$$

۸)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_B = xb_1 + yb_2 \xrightarrow{T} T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_B\right) = T(xb_1 + yb_2) = xT(b_1) + yT(b_2)$$

$$x(3c_1 - 2c_2 + 5c_3) + y(4c_1 + 7c_2 - c_3)$$

$$\Rightarrow T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_B\right) = (3x + 4y)c_1 + (-2x + 7y)c_2 + (5x - y)c_3$$

$$= \begin{bmatrix} 3x + 4y \\ -2x + 7y \\ 5x - y \end{bmatrix}_C \Rightarrow M = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 7 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Scanned by CamScanner

Date:

۹

$$a\underbrace{\begin{bmatrix} ۲ \\ ۲ \\ -۱ \\ ۳ \end{bmatrix}}_{u} + b\underbrace{\begin{bmatrix} -۴ \\ ۵ \\ -۴ \\ ۱ \end{bmatrix}}_{v} + c\underbrace{\begin{bmatrix} ۱۰ \\ -۸ \\ ۷ \\ ۱ \end{bmatrix}}_{w}$$

$$\begin{bmatrix} ۲ & -۴ & ۱۰ \\ ۲ & ۵ & -۸ \\ -۱ & -۴ & ۷ \\ ۳ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۵ \\ ۰ & +۹ & -۱۸ \\ ۰ & -۶ & ۱۲ \\ ۰ & ۷ & -۱۴ \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۵ \\ ۰ & ۱ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

ستون پایوت

$B = \{u, v\}$

۱۰

فرض خلف حکم : $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ ← وابسته خطی

$\Rightarrow c_1v_1 + \dots + c_mv_m = 0 \longrightarrow$ non-trivial solution

$\Rightarrow T(c_1v_1 + \dots + c_mv_m) = T(0)$

$\Rightarrow c_1T(v_1) + \dots + c_mT(v_m) = 0$

$\Rightarrow \{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_m)\}$ ← وابسته خطی ①

نتیجه به دست آمده مخالف فرض ما است پس حکم ثابت می شود

۱۱ الف)

$\{u_1, u_2, \dots, u_p\}, p > k \Rightarrow \{[u_1]_B, [u_2]_B, \dots, [u_p]_B\}$ ← چون اعضای بیشتری از k دارد ← وابسته اند $\Rightarrow c_1[u_1]_B + \dots + c_p[u_p]_B = 0$ has non-trivial solution.

$\Rightarrow [c_1u_1 + \dots + c_pu_p]_B = 0$

$c_1u_1 + \dots + c_pu_p = 0 \longrightarrow$ وابسته خطی ← has non-trivial solution

B پایه است. فرض کنیم B_1 نیز پایه باشد. B_1 باید مستقل خطی باشد پس حداقل k بردار دارد. از آنجایی که B پایه و مستقل خطی است، می توان گفت B_1 حداقل k عضو دارد. پس در نتیجه B_1 دقیقا k عضو خواهد داشت.

ب) $n = ۳, m = ۵, \text{rank} = 1, \text{nullity} = ۲$

Scanned by CamScanner