دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دانشکده مهندسی کامپیوتر

جبر خطی کاربردی

متین توکلی - حسین زارع‌دار

بهار ۱۳۹۹

فصل ۱

مقدمه

به طور معمول توی این درس (و خیلی از درس‌های دیگه) چیزی که گفته میشه، یه مشت فرموله که حفظ می‌شیم و وقتی یک ترم میگذره، دیگه چیز زیادی ازش یادمون نمیاد!

ولی ما سعی کردیم توی این اسلایدها، تمرکزمون بیشتر روی شهود قضیه باشه. باور کنین ما هم از حفظ کردن فرمول متنفر ایم!

موارد رو توی صفحه بعد به صورت فهرست آوردیم.

فهرست

بردارها

بنیادی‌ترین مفهومی که توی جبر وجود داره، مفهوم برداره. خب بردار چیه؟

از یه دیدگاه، بردار صرفا یک لیست از داده‌هاست که ترتیب توش مهمه.

مثل چندتایی مرتب!

و رسم بر اینه که به شکل لیست عمودی نشونش بدیم. مثلا:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

بردارها

اما از دیدگاه دیگه‌ای میشه بردار رو تعریف کرد. اونم دید هندسی‌اش.

بردار، میشه یک **پیکان (Arrow)** توی فضا، از مبدا مختصات به یک نقطه خاص.

یه پیکان با دوتا چیز به طور منحصر به فرد مشخص میشه، یکی **اندازه** و دیگری **جهت**.

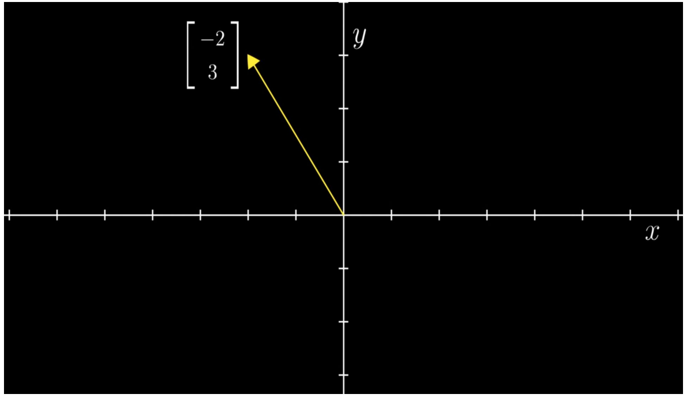
فقط حواسمون باشه که این فضا لزوما دوبعدی و سه‌بعدی نیست و بستگی به بردارمون داره.

(البته یه دیدگاه ریاضیاتی و انتزاعی هم برای مفهوم بردار وجود داره که توی فصل ۴ بهش پرداخته میشه.)

بردارها در فضای R ^ 2

خب فعلا برای سادگی کار، میخوایم تمرکزمون رو بذاریم روی بردارهای فضای R ^ 2.

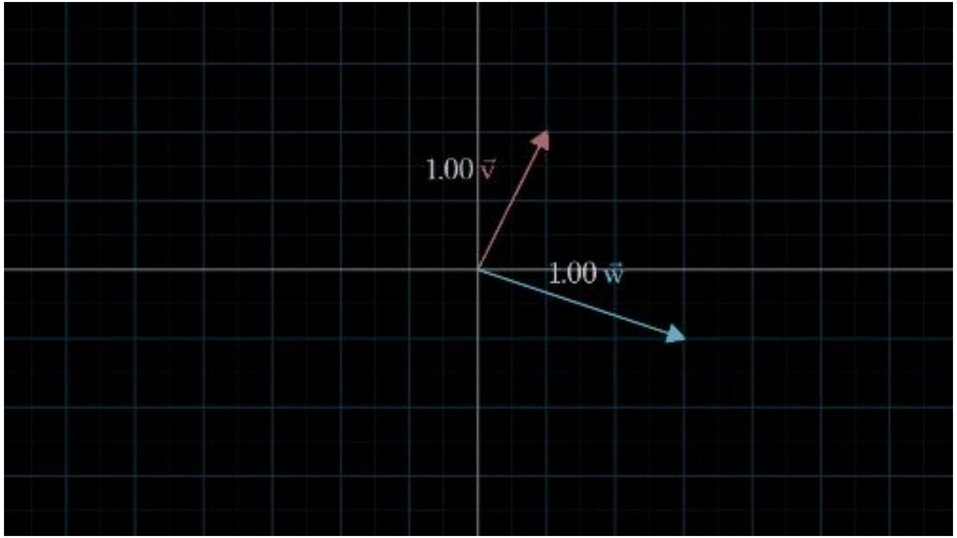
برای اینکه یه بردار دو بعدی رو به صورت منحصر به فرد مشخص کنیم، نیاز به یه سیستم مختصات‌دهی داریم. ساده‌ترین‌اش مختصات کارتزین عه که فاصله‌ی نوک پیکان از محورهای x و y، یه بردار رو به صورت منحصر به فرد معین می‌کنه.



جمع، ضرب اسکالر، ترکیب‌خطی

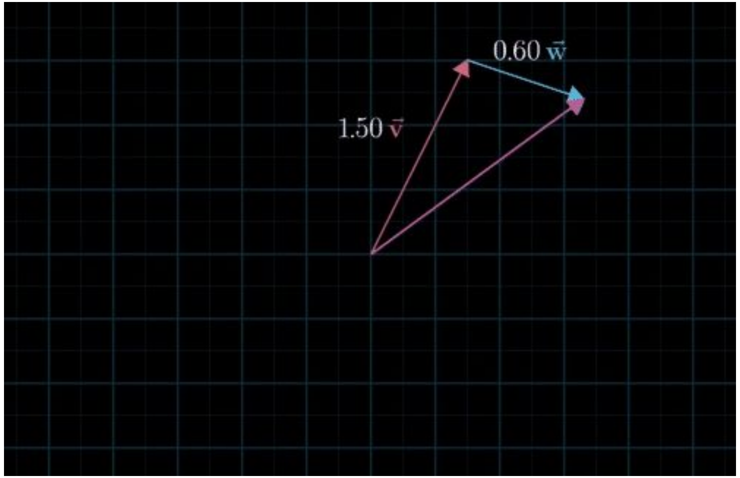
جمع و ضرب اسکالر بردارها که نکته خاصی نداره!

ترکیب‌خطی هم به این معنیه که یک ضریبی از دوتا بردار رو با هم جمع کنیم:



اسپن بردارها

یکی از سوالاتی که باهاش روبه‌رو میشیم، اینه که با ترکیب خطی دو یا چند بردار، چه بردارهایی رو می‌تونیم بسازیم؟ مثلا با گذاشتن ضرایب مختلف پشت دو بردار v و w توی شکل پایین، مشخصه که میشه کل بردارهای موجود تو فضای $R \wedge 2$ رو ساخت:



مجموعه تمام بردارهایی که می‌تونیم از این طریق بسازیم، میشه **اسپن(span)** بردارها.

استقلال و وابستگی خطی بردارها

حالا که با بردارها آشنا شدیم، میخوایم مفاهیمی مثل **استقلال خطی** و **وابستگی خطی** رو تعریف کنیم.

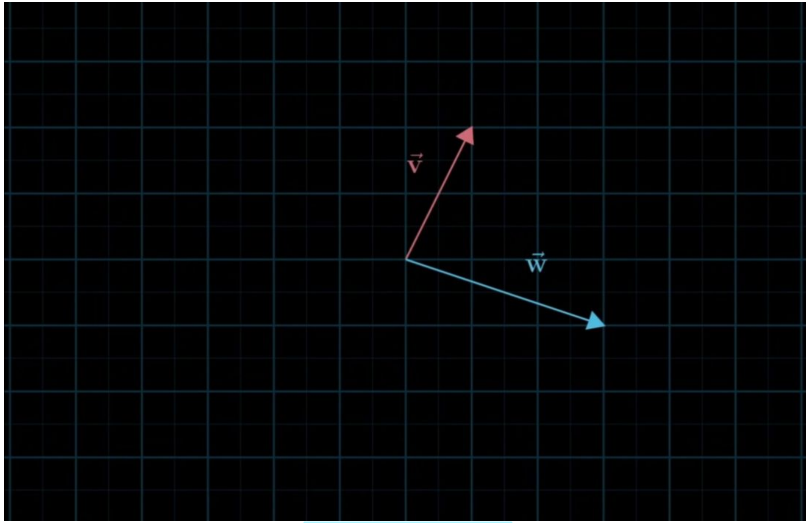
فرض کنید یک مجموعه بردار داریم.

اگه توی این مجموعه بردار، ما یک دونه بردار پیدا کنیم که بشه بر اساس ترکیب‌خطی اونای دیگه بنویسیمش، اون مجموعه میشه **وابسته‌خطی** (یعنی چی؟! یعنی یک بردار، بود و نبودش تفاوتی ایجاد نکنه برامون؛ یعنی به اسپن این مجموعه، چیز جدیدی اضافه نکنه.)

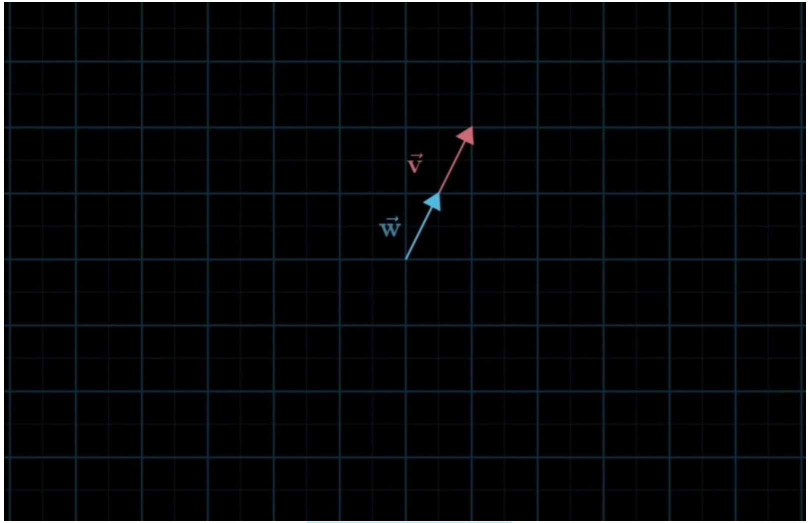
اگه چنین برداری نداشتیم، اون مجموعه میشه **مستقل خطی**.

استقلال و وابستگی خطی بردارها

یک مجموعه شامل دو بردار دو بعدی، چنین حالت‌هایی می‌تونه داشته باشه:



مستقل خطی



وابسته خطی

فضای R ∧ 2 بر حسب بردارهای یکه

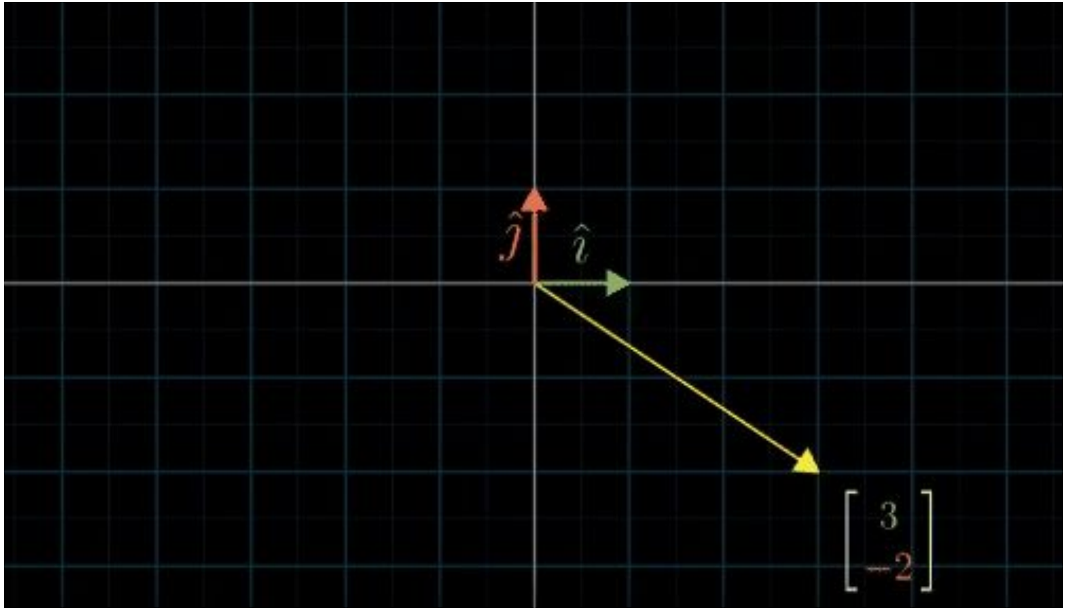
می‌دونیم که توی فضای R ∧ 2، بردارهای یکه(بردار به طول 1) i و j رو داریم.

i، بردار یکه در جهت مثبت محور x هاست و j هم بردار یکه در جهت مثبت محور y هاست.

واضحه که مجموعه این دو تا بردار، مستقل‌خطی ان.

همچنین، هر برداری توی فضای R ∧ 2 رو میشه به صورت ترکیب‌خطی این دو تا بردار نوشت.

فضای R ^ 2 بر حسب بردارهای یکه



و جلوتر می‌بینیم که این شیوه‌ی نوشتن بردار، چه کمکی می‌کنه بهمون...

پایه

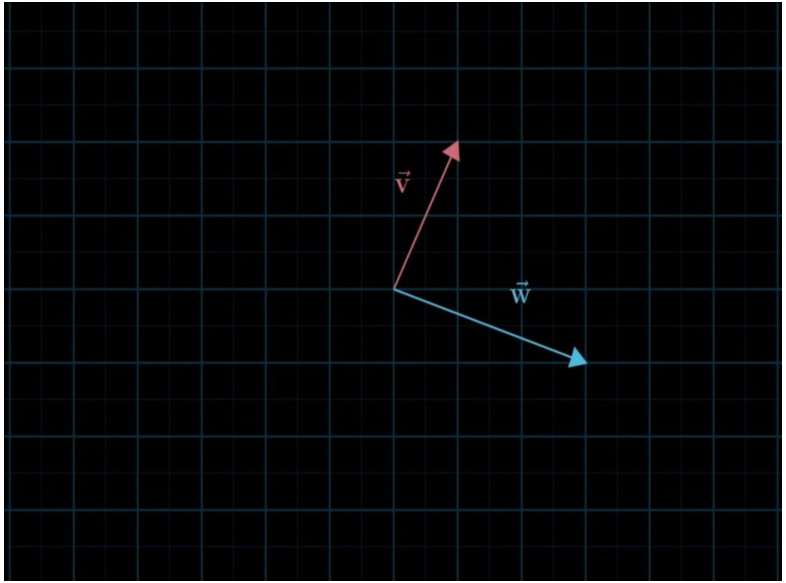
یک مفهوم دیگه رو میخوایم مطرح کنیم به نام پایه.

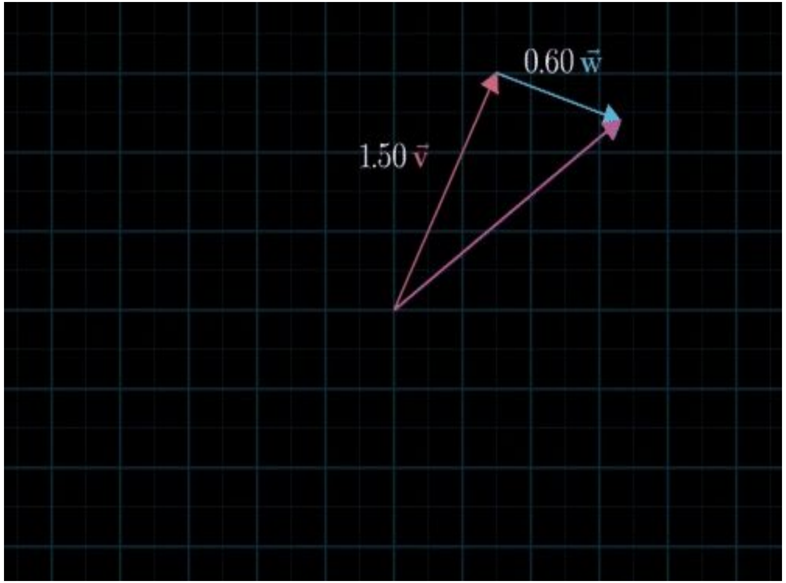
پایه (basis)، یک مجموعه بردار مستقل خطی هس که با ترکیب خطی‌شون، میشه تمام بردارهای فضا رو ساخت! یعنی اسپن‌شون میشه کل فضا!

مثلا بردارهای یکه i و j، می‌تونن هر بردار فضای $R \wedge 2$ رو بسازن. پس یک پایه برای $R \wedge 2$ هستن.

پایه

لزومی نداره بردارهای پایه عمود به هم باشن. مثل v و w شکل پایین:





تبدیل‌ها

حالا که از فضا گفتیم، یکم می‌خواهیم در مورد تغییر دادن این فضا به کمک **تبدیل‌ها** صحبت کنیم.

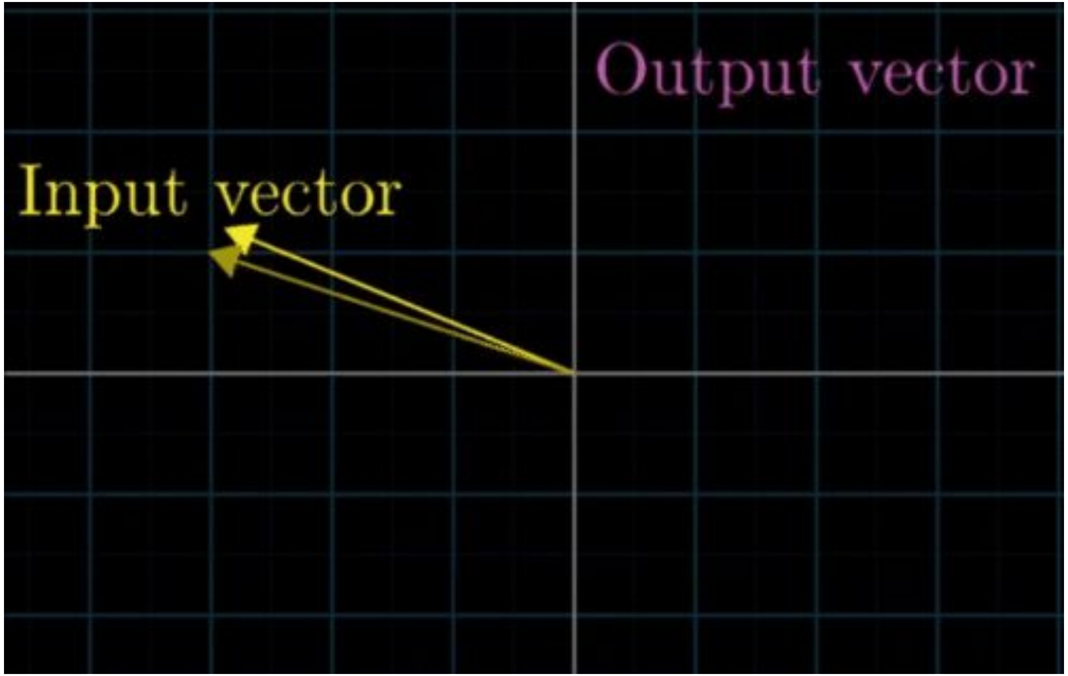
تبدیل چیزی جز یه تابع نیست. قراره یه ورودی بگیره، تغییری ایجاد کنه و یه خروجی تولید کنه. حالا توی جبر، این ورودی-خروجی‌ها بردار ان و بجای تابع بهش میگیم تبدیل.

به طور کلی، تبدیل T، یک بردار توی فضای R ∧ n میگیره و یک بردار دیگه توی فضای R ∧ m رو بهمون تحویل میده. اینطوری:

$$T : R^n \to R^m$$

البته، ما در ادامه تمرکزمون رو صرفا میذاریم روی تبدیل‌هایی که از فضای دو بعدی به فضای دو بعدی هستن.

تبدیل ~ تابع

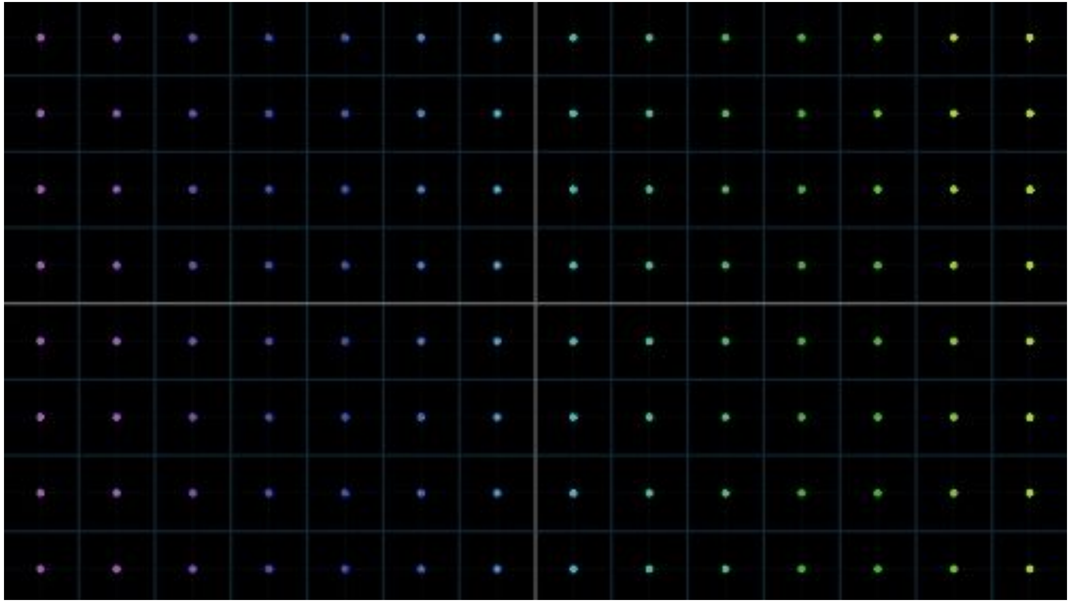


نکته

گاهی اوقات می‌خوایم به صورت شهودی‌تر ببینیم که یه تبدیل با **مجموعه‌ای از بردارها** چیکار میکنه:

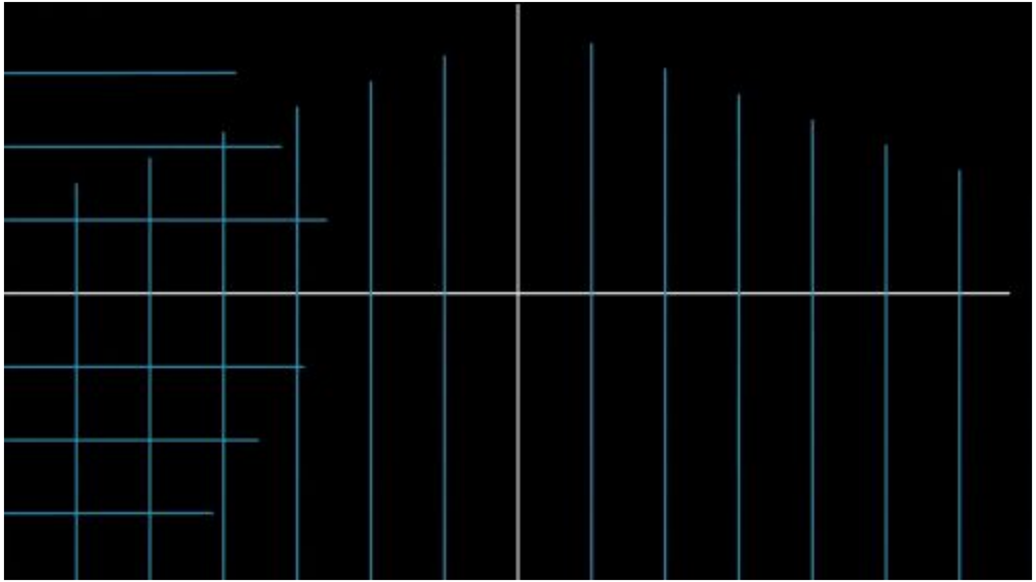
نکته(ادامه)

واسه همین، شاید بهتر باشه بجای نمایش پیکان، فقط نوک پیکان رو به صورت نماینده‌ای از اون بردار نشون بدیم. اونوقت یه چنین چیزی خواهیم دید:



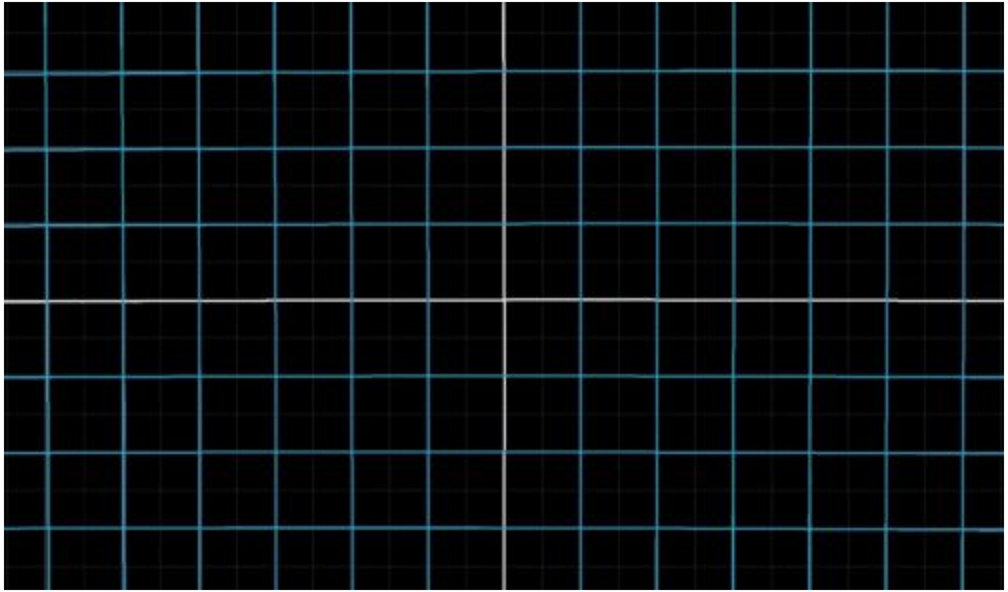
نکته(ادامه)

و حتی در ادامه‌ی این شیوه‌ی نمایش، می‌تونیم خطوط رو به عنوان مجموعه‌ای از بردارها که نوکشون روی اون خطه در نظر بگیریم:



نکته(ادامه)

با این شیوه‌ی نمایش، خیلی بهتر می‌تونیم ببینیم که یه تبدیل، دقیقا داره چه بلایی سر تک‌تک بردارهای موجود در فضا میاره. مثلا:



تبدیل‌خطی

یه دسته‌ای از تبدیل‌ها رو ما خیلی کارشون داریم: **تبدیل‌خطی**

یک تبدیل، زمانی تبدیل‌خطی محسوب میشه که:

1. $T(u + v) = T(u) + T(v)$
2. $T(au) = aT(u)$

که خب هزار دفعه دیدیم این تعریف رو و حفظ اش کردیم و توی اثبات‌ها به دردمون خورده. ولی فعلا بیخیال این تعریف شید!

بریم که یه تعریف **شهودی‌تر** بگیم ازش...

تبدیل خطی

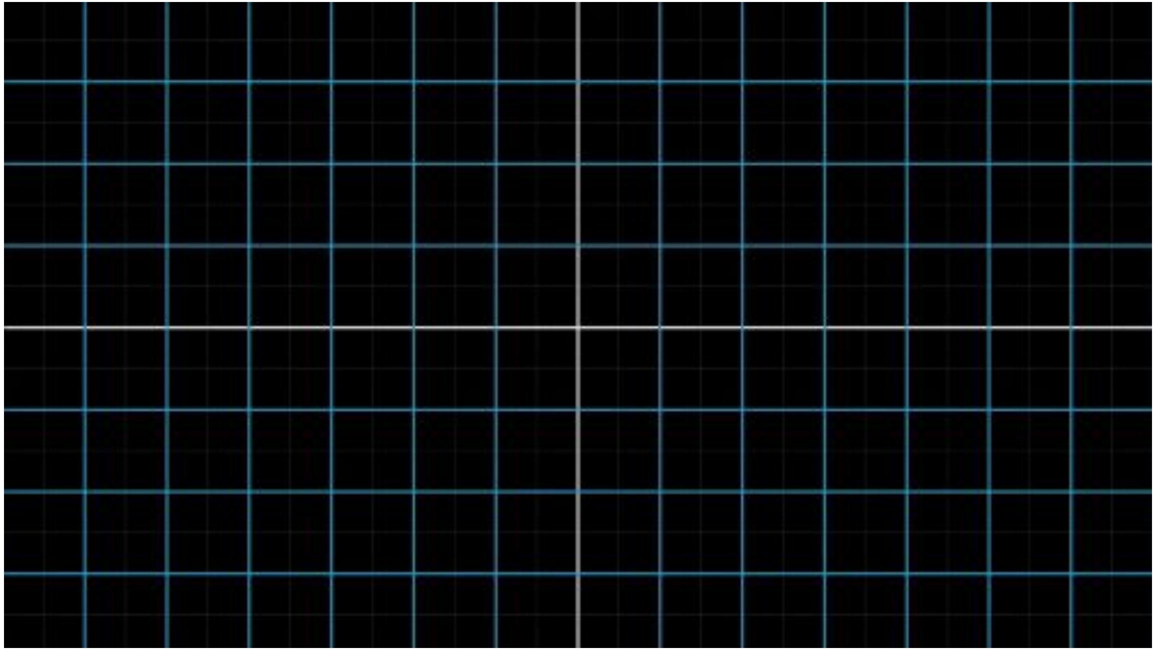
یک تبدیل، زمانی تبدیل‌خطی محسوب میشه که:

1. خطوط موازی با فاصله‌ی برابر توی فضای اولیه، باید توی فضای خروجی هم، همچنان خط باقی مونده باشن (یعنی خم نشده باشن) و فاصله‌هاشون همچنان برابر باشه.
2. مبدا مختصات، باید سرجای خودش بمونه.

بریم یه چندتا مثال ببینیم...

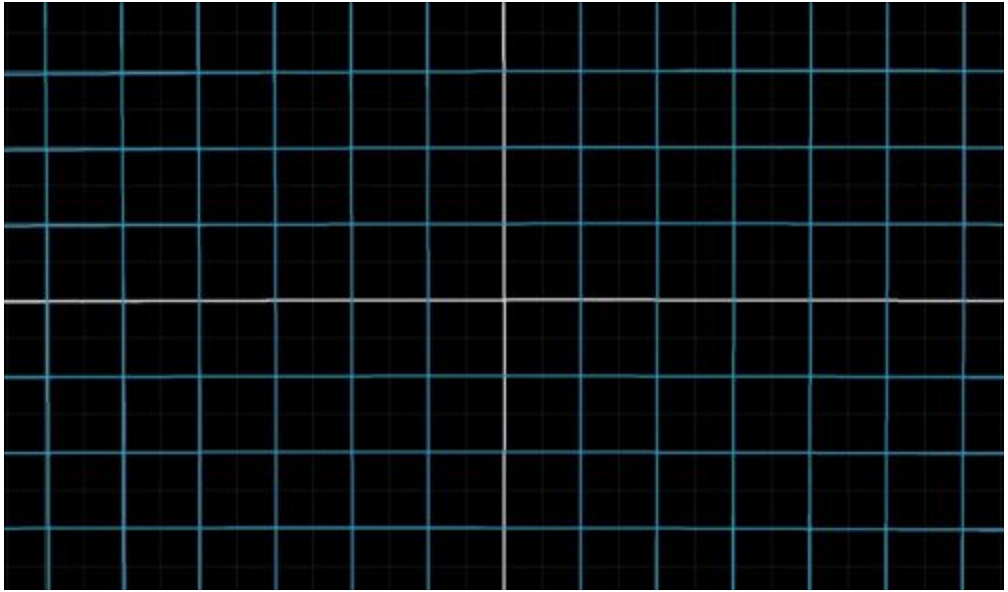
مثال از تبدیل‌خطی

اگر دقت کنید، تبدیل پایین، هر دوتا ویژگی رو داره:



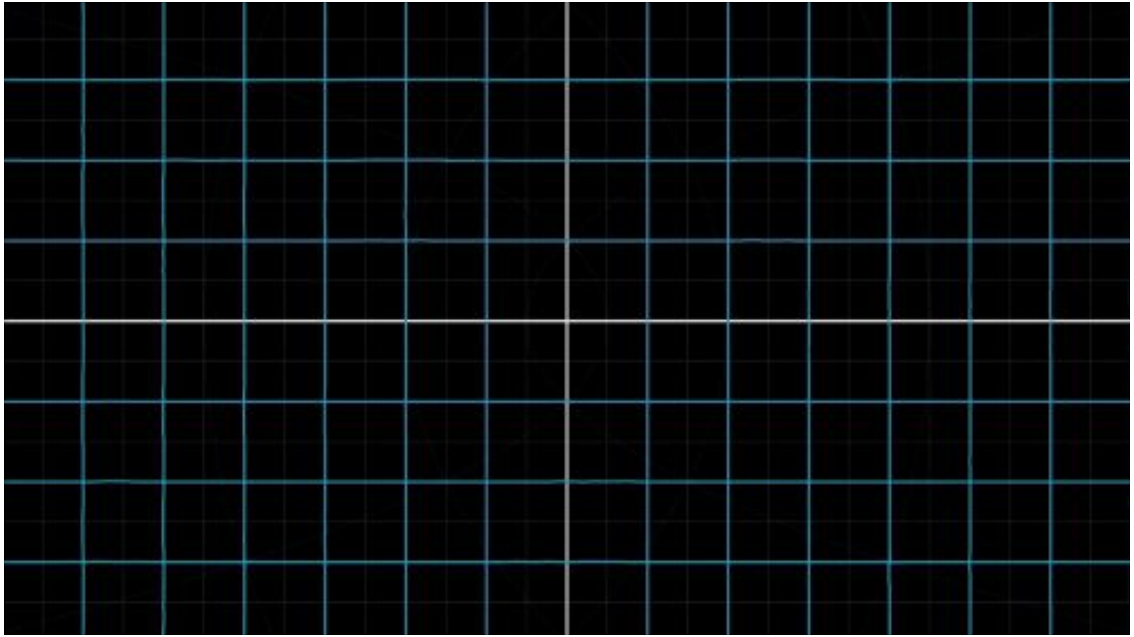
مثال از تبدیل غیرخطی

اما، تبدیل پایین، با اینکه مبدا رو سر جاش نگه میداره، ولی خطوط رو صاف و موازی نگه نمیداره و در نتیجه یه تبدیل خطی نیست:



مثال از تبدیل غیرخطی

این یکی دیگه هیچ کدوم از ویژگی‌ها رو نداره:



یه نکته

پس از یه دیدی، به خاطر همین صاف نگه داشتن خط‌هاست که به این دسته از تبدیل‌ها میگیم **تبدیل خطی!**

خاص بودن تبدیل‌خطی

به خاطر ویژگی‌هایی که تبدیل خطی داره، یه سری اتفاقات خوب می‌افته.

فرض کنیم یه بردار داریم، بدین شکل:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

و قبلا گفتیم که میشه اینطوری نوشتش:

$$x * i + y * j$$

پس:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y * \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

خاص بودن تبدیل‌خطی

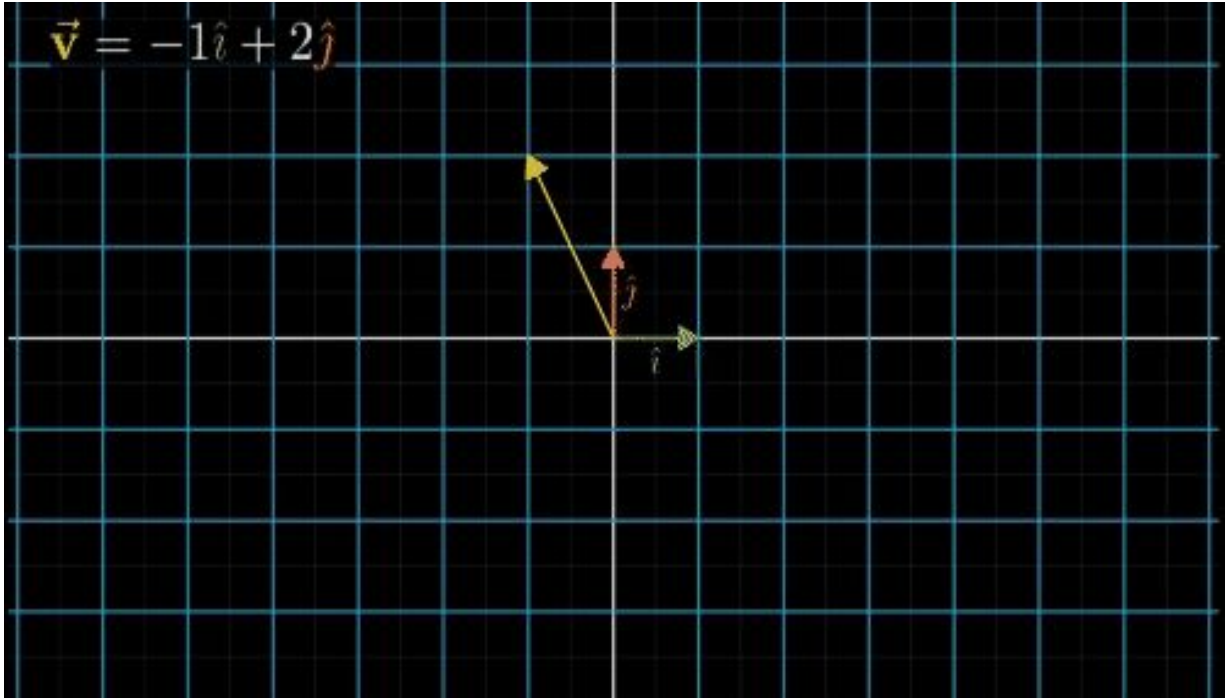
در نتیجه:

$$T(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = T(x * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y * \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = x * T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) + y * T(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix})$$

یعنی خروجی تبدیل خطی رو میشه براساس تبدیل‌یافته‌ی i و تبدیل‌یافته‌ی j نوشت، و با همون ضرایب x و y. یعنی این دوتا بردار جدید میشن پایه‌ی جدیدی برای فضامون.

یه مثال رو توی صفحه‌ی بعد ببینید...

خاص بودن تبدیل‌خطی



خاص بودن تبدیل‌خطی

چیزی که گفتیم به این معنیه که، برای اینکه یه تبدیل‌خطی رو به صورت منحصر به فردی ذخیره‌اش کنیم، کافیه که تبدیل‌یافته‌ی بردارهای پایه رو فقط نگه داریم!

که توی اینجا میشه ۴ تا عدد صرفا!

خاص بودن تبدیل‌خطی

خوبی دیگه‌ی این کار اینه که، میشه توی ذهن تصور کرد که تبدیل داره چیکار میکنه.

بیایم این تبدیل رو در نظر بگیریم:

$$T(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x + 3y \\ -2x \end{bmatrix}$$

فهمیدن اینکه با جمع کردن x و 3y و قرار دادنش به عنوان x بردار جدید، و گذاشتن 2x- به عنوان y بردار جدید، چه بلایی سر بردارهای ورودی میاد سخته! پس بریم کاری که گفتیم رو انجام بدیم...

خاص بودن تبدیل‌خطی

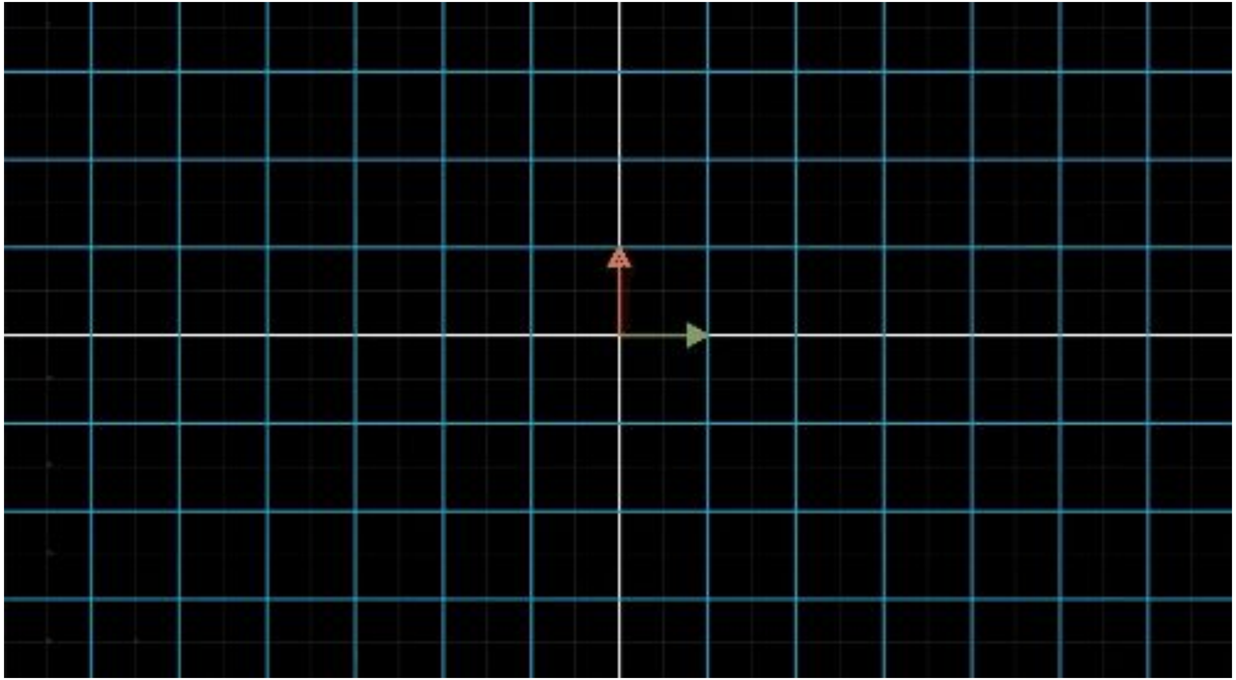
حالا تمرکزمون رو فقط بذاریم روی تبدیل‌یافته‌ی i و j:

$$T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad T(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

اگه جایی که i و j با این تبدیل بهش رفتن رو توی ذهنمون متصور بشیم و به عنوان پایه‌های جدید فضامون بهش نگاه کنیم، می‌تونیم حدودی بفهمیم که چه بلایی داره سر تمام بردارهای فضا می‌افته. (مثلا توی این چون i و j هر دوتاشون حدود ۹۰ درجه ساعت‌گرد چرخیدن و یکم هم بزرگ شدن، درنتیجه میشه حدس زد که این تبدیل باید بردارها رو scale کنه و بزرگترشون کنه و حدود ۹۰ درجه‌ای هم ساعت‌گرد بچرخوندشون!)

تو صفحه‌ی بعد میبینیم که حدسمون درسته...

خاص بودن تبدیل‌خطی



اینکه بتونیم تو ذهنمون تصور کنیم که یه تبدیل‌خطی چیکار می‌کنه، جلوتر خیلی به کارمون میاد!

خاص بودن تبدیل‌خطی

این مدل توصیف تبدیل‌خطی به قدری رایجه که ریاضی‌دان‌ها، اومدن اینطوری این بردارها رو کنار هم قرار دادن و حاصل شدش...

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

عه، ماتریس!

بله ماتریس چیزی نیست به جز یک تعدادی بردار که کنار هم گذاشتیمشون.

چیزی که نمی‌دونستیم چیه؟! اینه که **هر ماتریس، نماینده یک تبدیل خطیه!**

با این نکته خیلی کار داریم...

پس هر وقت ماتریس ۲ در ۲ دیدین، باید به این توجه کنید که چیزی جز یه تبدیل خطی نیست که اطلاعات مورد نیاز اش (یعنی اینکه i و j رو کجا میبره) توی ستون‌هاش قرار گرفته.

ماتریس

خب ماتریس رو به ما تو دبیرستان هم گفتن!

جمع دو تا ماتریس، ضرب ماتریس توی بردار، ضرب دو تا ماتریس توی هم، محاسبه دترمینان ماتریس، محاسبه وارون ماتریس و . . .

ولی واسه خیلی از اینا، چیزی که بهمون گفتن، فراتر از یه مشت فرمول نبوده!

اما حالا که فهمیدیم ماتریس در واقع نماینده‌ی تبدیل‌خطی عه، خیلی از چیزا رو میشه واقعا فهمید و صرفا حفظش نکرد.

ببینیم. . .

جمع ماتریس‌ها

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & g \\ f & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & c+g \\ b+f & d+h \end{bmatrix}$$

خب جمع ماتریس نکته خاصی نداره :)

ضرب ماتریس در بردار

حاصل ضرب ماتریس در بردار، یک برداره:

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a*f+c*g \\ b*f+d*g \end{bmatrix}$$

یکم عجیب شد، نه؟ صرفا یک فرمول گفتن بهمون که حفظ کنیم!

اما اینکه چرا این دوتا موجود رو باید اینطوری تو هم ضرب کنیم، از دل تبدیل‌خطی اومده بیرون! ماتریس نماینده‌ی تبدیل‌خطیه. پس ما می‌خوایم یک عملیاتی به نام ضرب ماتریس در بردار تعریف کنیم که حاصلش بشه اعمال تبدیل روی یک بردار! پس...

ضرب ماتریس در بردار

فرض کنیم این بردارمونه:

$$\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$$

و این هم ماتریس تبدیل‌مون:

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

خروجی این تبدیل به این شکل باید حساب بشه:

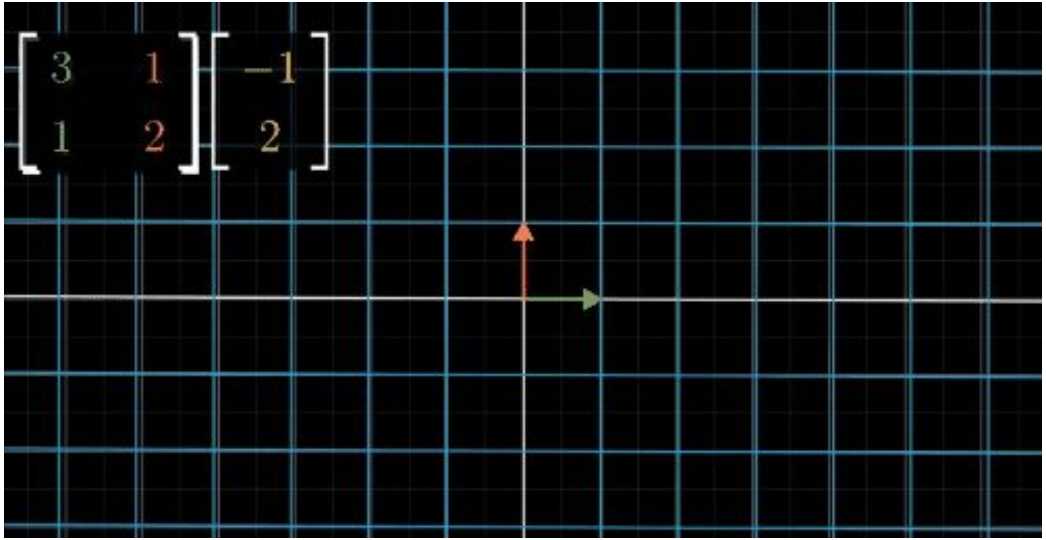
$$input\ vector : \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = f * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + g * \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow output\ vector : f * \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + g * \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a * f \\ b * f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c * g \\ d * g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a * f + c * g \\ b * f + d * g \end{bmatrix}$$

پس ضرب ماتریس در بردار باید جوری تعریف بشه که اون بردار خروجی رو به ما بده!

ضرب ماتریس در بردار

مثلا:



واسه همین حاصل ضرب میشه:

$$(-1 * \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}) + (2 * \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ضرب ماتریس در ماتریس

حاصل ضرب ماتریس در ماتریس، یک ماتریس دیگه است:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a*e+b*g & a*f+b*h \\ c*e+d*g & c*f+d*h \end{bmatrix}$$

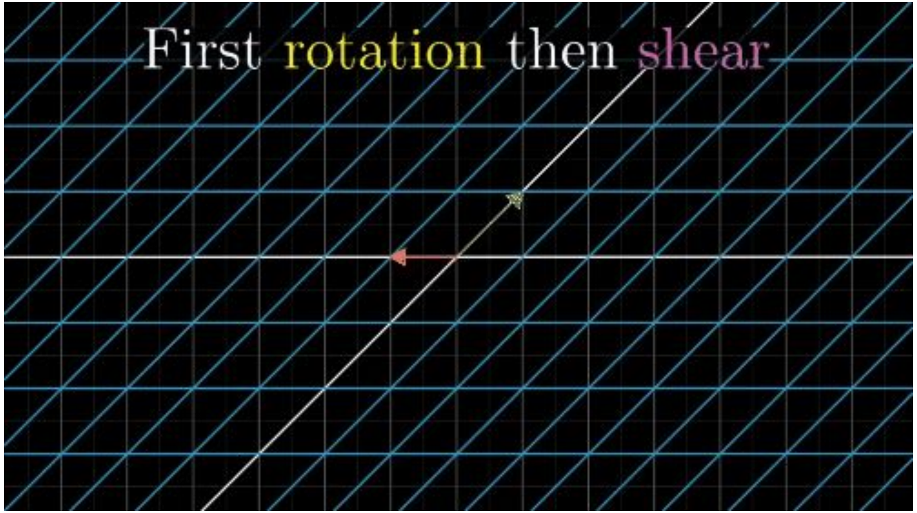
و باز هم یک فرمول عجیب که گفتن حفظ باشیم :|

ورق بزن!

ضرب ماتریس در ماتریس

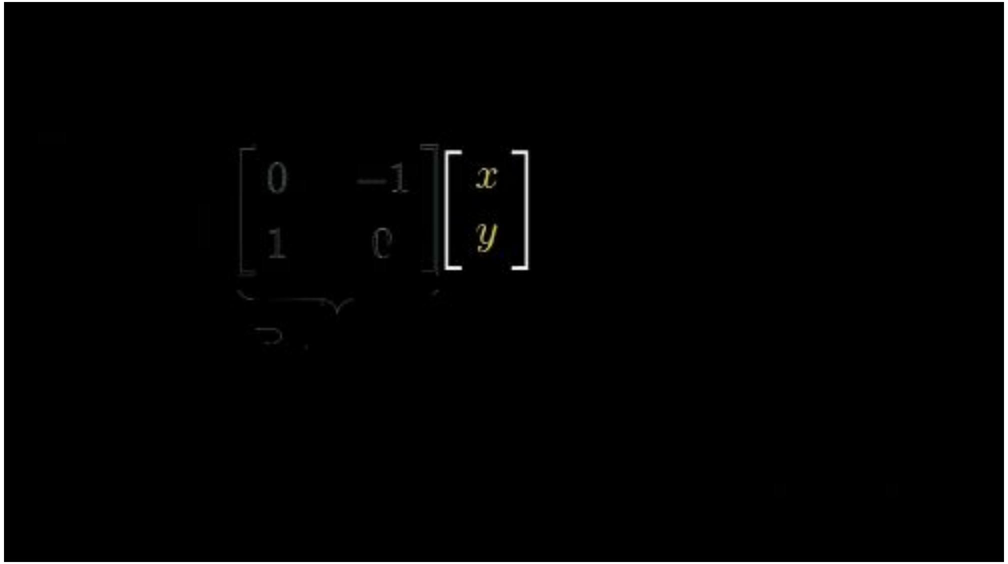
ضرب ماتریس در ماتریس هم از دل تبدیل خطی بودن اش میاد بیرون.

ما وقتی دو (یا چندتا) تبدیل‌خطی پشت سر هم انجام میدیم، تاثیر کلی اش همچنان به شکل **یدونه** تبدیل‌خطی دیده میشه، مثلا:



ضرب ماتریس در ماتریس

حالا ما به دنبال راه‌حلی می‌گردیم که بتونیم اون **یدونه** تبدیل‌خطی که نماینده دو یا چندتا تبدیله رو پیدا کنیم.
به زبون ماتریسی اش یعنی:



ضرب ماتریس در ماتریس

حالا باید چیکار کنیم؟ به این نکته دقت کنیم که ما از تبدیل‌خطی جامع‌مون، فقط و فقط به تبدیل‌یافته‌ی i و تبدیل‌یافته‌ی j اش نیاز داریم تا بتونیم بشناسیم اش.

خب پس با i شروع کنیم و دنبال‌اش کنیم...

ضرب ماتریس در ماتریس

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}^{M_2}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}^{M_1} = \begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix}$$

Where does $\hat{\imath}$ go?

ضرب ماتریس در ماتریس

و بعد j:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}^{M_2}\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}^{M_1}=\begin{bmatrix} 2 & ? \\ 1 & ? \end{bmatrix}$$

ضرب ماتریس در ماتریس

حالا که این دوتا رو بدست آوریم، دیگه اون تبدیل جامع معلوم شده و به صورت یک ماتریس داریم اش.

اگه دوباره نگاهی بندازید به دوتا صفحه‌ی قبل، می‌بینید که چجوری ضرب دوتا ماتریس انجام میشه. در واقع اونطوری که به ما یاد دادن و حفظ شدیم (سطر اول در ستون اول و الی آخر)، نیستتش. بلکه راه درستتش و با توجه تبدیل بودن ماتریسه! با دنبال کردن ستون‌ها!

ضرب ماتریس در ماتریس

پس ضرب ماتریس، در واقع به این صورت انجام میشه:

$$\overbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}^{M_2}\overbrace{\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}}^{M_1}=\begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix}$$

کاربرد ماتریس

ممکنه بپرسی چرا با این فرم ماتریس، خودمون رو گیج می کنیم؟!

چرا این تعاریف رو آوردیم توی کار برای چیزی که راحت میشد محاسبه اش رو انجام داد.

جواب اینه که:

یکی از خوبی های نمایش تبدیل خطی توی ماتریس، اینه که وقتی بخوایم یک تبدیل خطی داشته باشیم که کار چند تا تبدیل خطی رو برامون انجام بده، کافیه که ماتریس ها رو، از راست به چپ توی هم ضرب کنیم.

توی اسلاید بعد، یک نمونه اش رو آوردیم :)

کاربرد ماتریس(ادامه)

مثلا فرض کن یک بازوی ربات داری و میخوای اول 90 درجه پادساعتگرد بچرخه؛ بعد اندازه بازو دو برابر بشه.(فرض کن که رباتت این توانایی ها رو داره)

می تونی این دو تا رو مستقل از هم انجام بدی...یا می تونی تبدیل **خطی** ناشی از ترکیب این دو تا رو بنویسی و با **نصف محاسبات**، اون حرکت لازم رو انجام بدی.(تازه! اینطوری طبیعی تر هم به نظر میاد.)

حالا چجوری تبدیل خطی ترکیبی رو به دست میاری؟! درسته! از طریق ضرب دو تا ماتریس متناظر با دوران 90 درجه پادساعتگرد و دو برابر شدن طول که یک ماتریس رو بهت میده. در ادامه آوردیمش:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

کاربرد جبرخطی

حالا که بحث کاربرد شدش، یکم کلی‌تر، در مورد کاربردهای جبرخطی بگیم.

یکی از حوزه‌هایی که جبرخطی خیلی توش به کار میره، **گرافیک کامپیوتری** عه.

اینکه چطوری یه تصویر، روی یک صفحه‌ی نمایش نشون داده بشه، چطوری تصاویر بزرگ و کوچک بشن یا بچرخن، همه‌اش نیاز به دانش جبرخطی داره.

و خب شاید نمایش دادن تصاویر دوبعدی توی صفحه‌ی نمایش دوبعدی اونقد کار عجیبی نباشه. ولی اینکه چطور یه انیمیشن یا گیم سه‌بعدی رو میشه توی صفحه‌نمایش دوبعدی نشونش داد، چجوری بافت‌ها (textures)، تابش نور، سایه اجسام و... رندر میشن، یه بخشی بزرگی‌اش مرتبط با دانش جبرخطی عه!

کاربرد جبرخطی

و حتما در خلال فصل‌های بعد، در مورد کاربرد جبرخطی توی حوزه‌های دیگه، از جمله **هوش مصنوعی** خواهیم پرداخت...

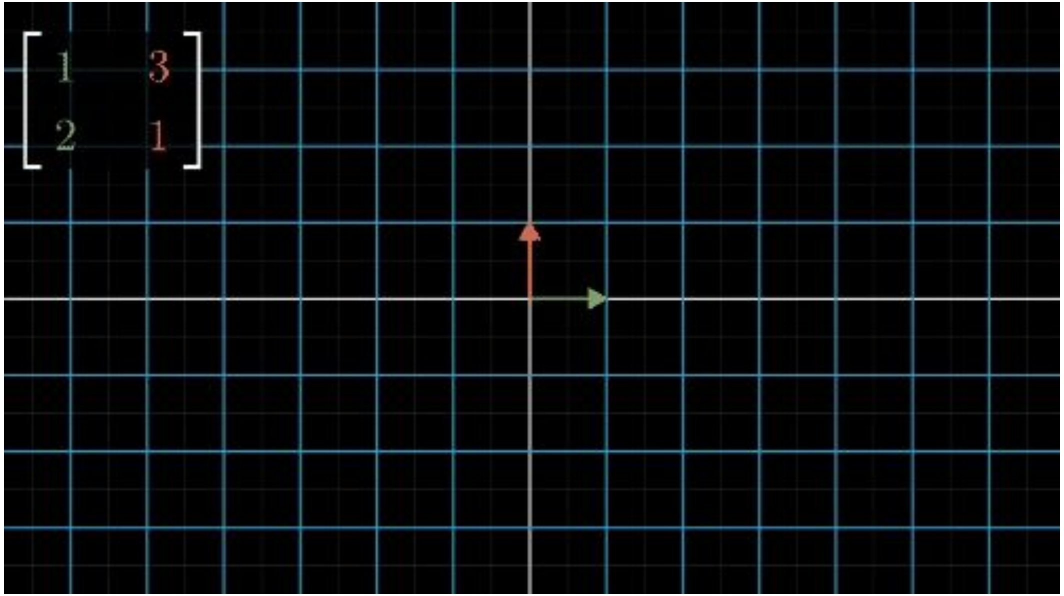
یه نکته در مورد تبدیل‌خطی

یه تقسیم‌بندی‌ای هم میشه کرد تبدیلات‌خطی از $R \wedge 2$ به $R \wedge 2$ رو. بر این اساس که تبدیل‌یافته‌ی i و تبدیل‌یافته‌ی j (که میشن ستون‌های ماتریس تبدیل مون) از لحاظ استقلال خطی چجوری ان؟

توی اسلاید های بعد ببینیم. . .

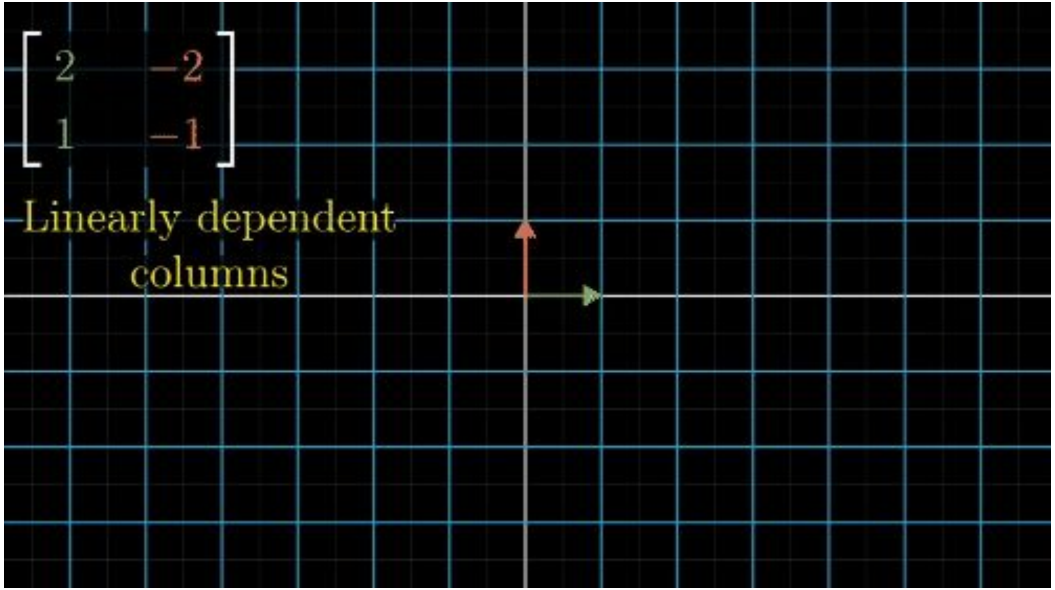
یه نکته در مورد تبدیل‌خطی

۱- مستقل‌خطی: در این صورت، همچنان بردارهای خروجی می‌تونن هرکجای فضا باشن.



یه نکته در مورد تبدیل‌خطی

۲- وابسته‌خطی: در این صورت، بردارهای خروجی، جمع میشن روی یه خط



دستگاه معادلات خطی

با دستگاه معادلات خطی از دبیرستان آشناییم.

مثلا دستگاه روبرو رو در نظر بگیرین:

$$
\begin{aligned}
&2x + 5y + 3z = -3 \\
&8z + 4x = 0 \\
&3y + x = 2
\end{aligned}
$$

میخواهیم جواب این دستگاه رو پیدا کنیم.

دستگاه معادلات خطی

اول یکمی مرتبش می‌کنیم.

$$\begin{aligned} 2x + 5y + 3z &= -3 \\ 4x + 0y + 8z &= 0 \\ 1x + 3y + 0z &= 2 \end{aligned}$$

اگه نحوه‌ی ضرب ماتریس توی بردار رو به یادمون بیاریم، می‌بینیم که میشه این دستگاه رو به صورت یک معادله ماتریسی به فرم $\mathrm{Ax} = \mathrm{v}$ نوشت؛ یعنی:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & 8 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

دستگاه معادلات خطی

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & 8 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

خب حالا این معادله رو میشه از دید تبدیل‌خطی بهش نگاه کرد.

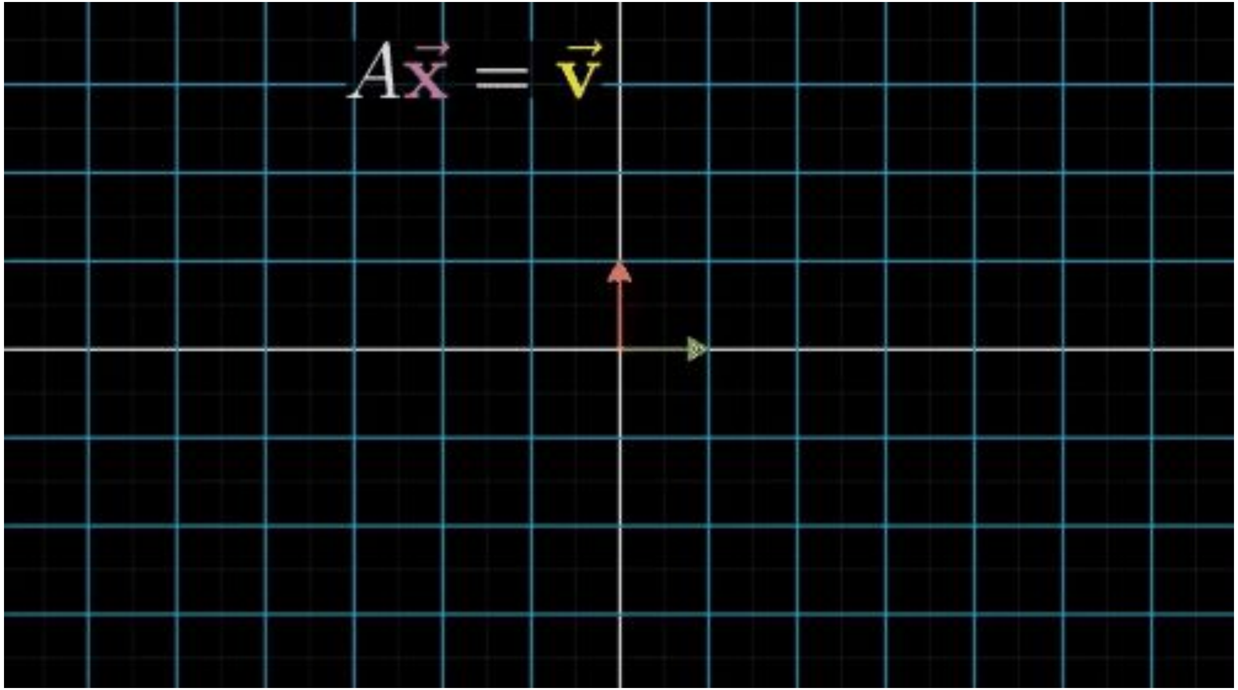
پیدا کردن جواب دستگاه معادلات خطی، به معنی پیدا کردن بردار(بردارهایی) هست که اگر ورودی ماتریس تبدیل ما قرار بگیره، خروجی میشه بردار سمت راست معادله ماتریسی.

یعنی هدف ما، پیدا کردن بردار ورودی مناسبه که خروجی مورد نظرمون رو تولید کنه.

و ممکنه چنین برداری پیدا نشه، فقط یه بردار پیدا بشه، یا اینکه بیشمار بردار پیدا بشه که این بستگی به اون تبدیل‌مون و بردار خروجی مورد نظرمون داره...

دستگاه معادلات خطی

مثلا:



حل دستگاه معادلات خطی

خب حالا می‌رسیم به حل این دستگاه:

خب ما قبلا دستگاه دو معادله دو مجهول حل کردیم. میومدیم ضریبی از یک معادله رو با اون‌یکی جمع می‌کردیم تا از شر یکی از مجهولات راحت بشیم و بتونیم اون‌یکی مجهول رو پیدا کنیم.

تعمیم این کاری که می‌کردیم، میشه همون روش کاهش ردیفی!

که البته نیازی نیست اینجا توضیح‌اش بدیم و توی کتاب هستش...

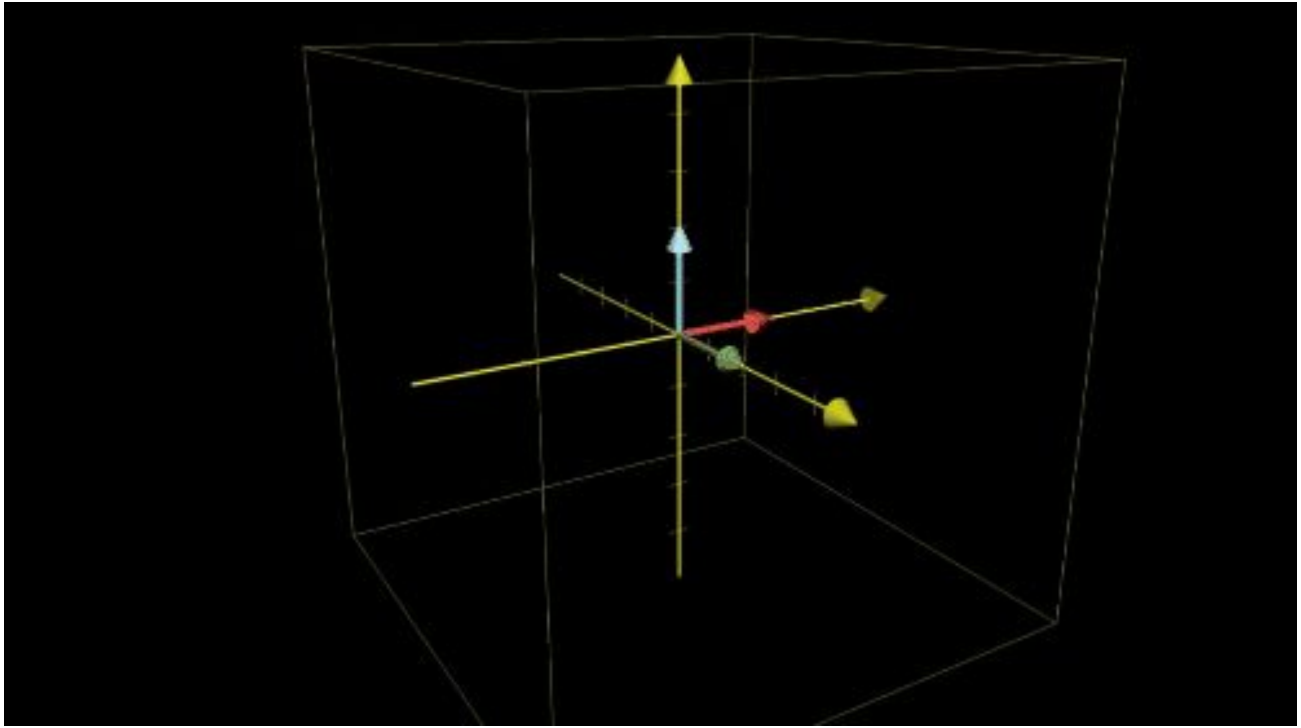
فضای سه‌بعدی

دیگه تقریبا بحثمون تموم شد...

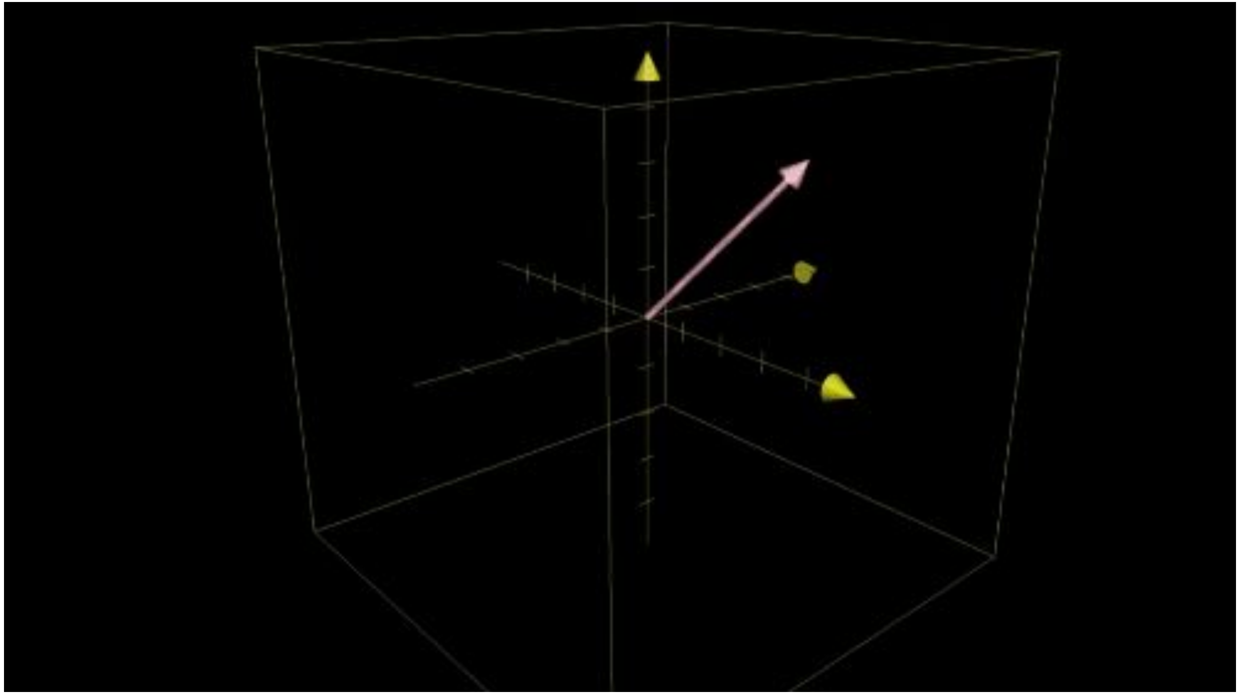
یه چیزی که باید بهش اشاره کنیم اینه که ما تا اینجا تمرکزمون رو گذاشتیم رو فضای دوبعدی، ولی تمام مفاهیمی که بیان شد (بردار، ترکیب‌خطی، اسپن، پایه، استقلال‌خطی، تبدیل‌خطی، بیان تبدیل‌خطی به صورت ماتریس از طریق یافتن تبدیل‌یافته‌های پایه‌های i و j و k، عملیات روی ماتریس‌ها و بردارها و...)، توی فضای سه‌بعدی، همچنان با همان تعاریف وجود دارن.

نیازی به بیان دوباره تعاریف نیست، اما برای اینکه شهودی نسبت بهشون داشته باشیم، صرفا چندتا گیف ازشون می‌ذاریم توی صفحه‌های بعد...

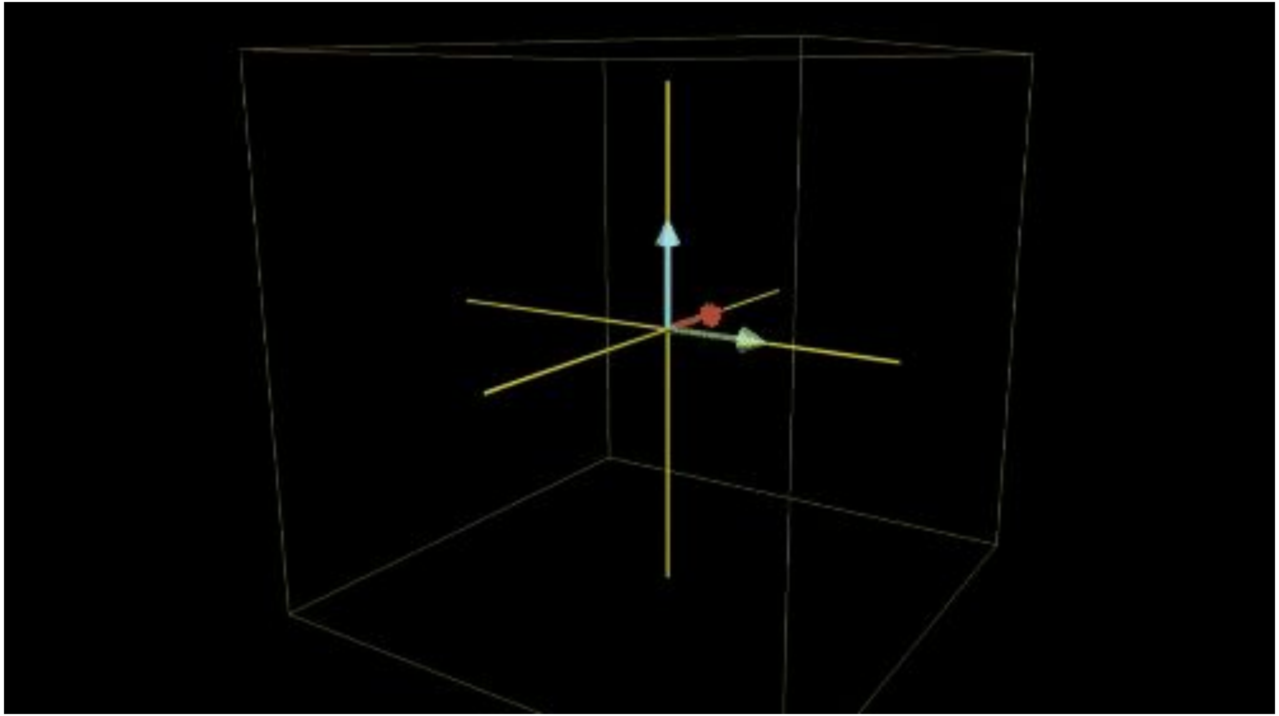
پایه‌ها



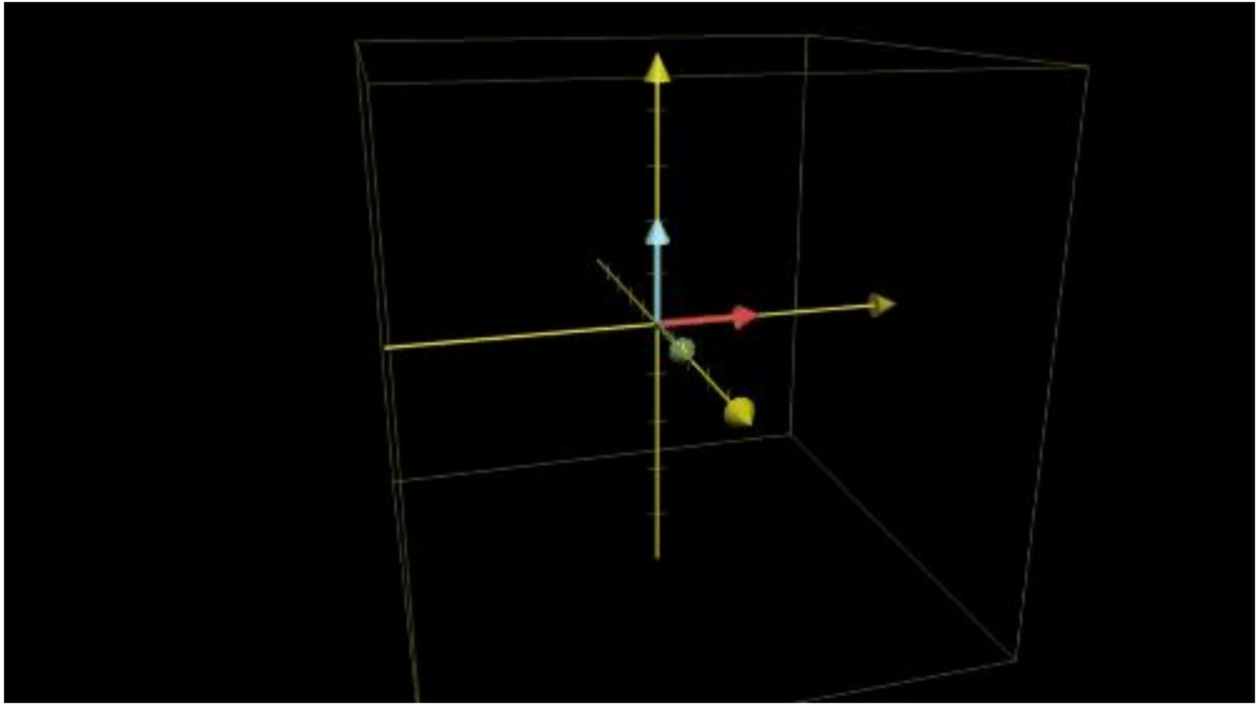
تبدیل



تبدیل خطی



بیان تبدیل‌خطی به کمک بردارهای پایه و ماتریس

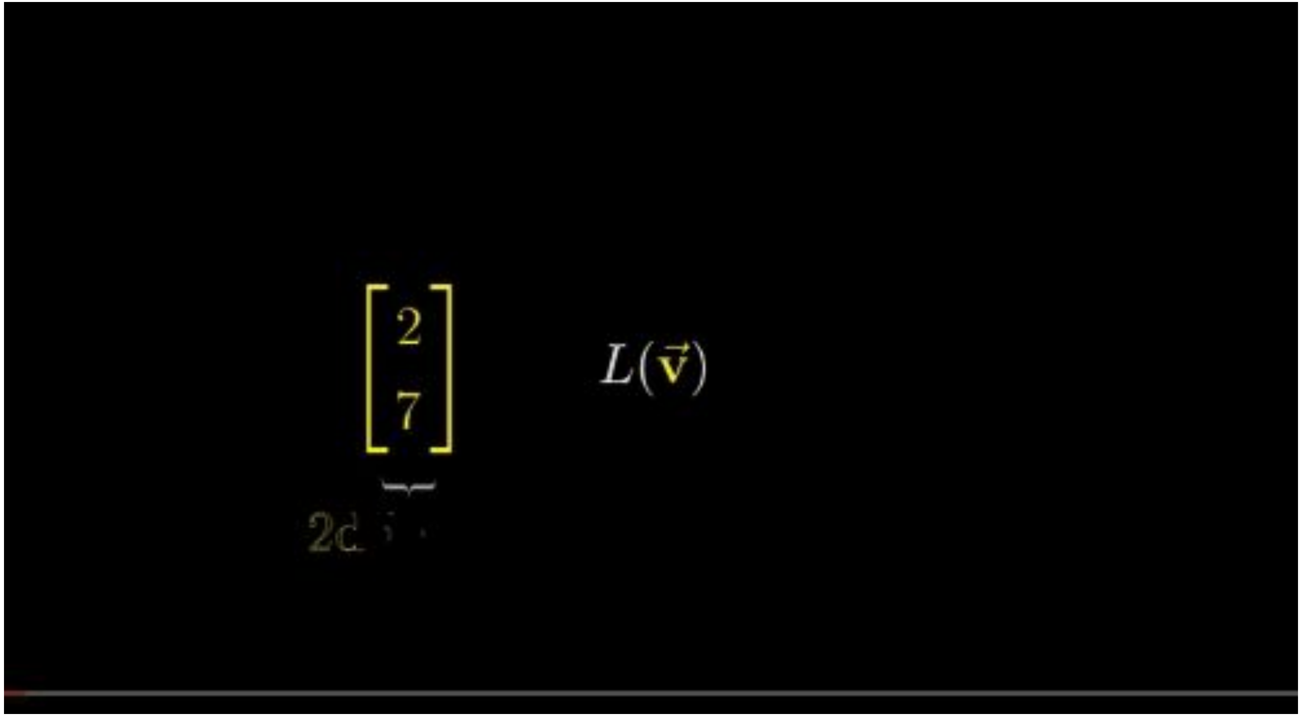


ماتریس‌های غیرمربعی

و نکته‌ی آخر اینکه، تا به اینجا تمام ماتریس‌هایی که گفتیم مربعی بودن که تعبیر تبدیل‌خطی اش میشه اینکه بُعد فضا رو تغییر نمی‌دادن.

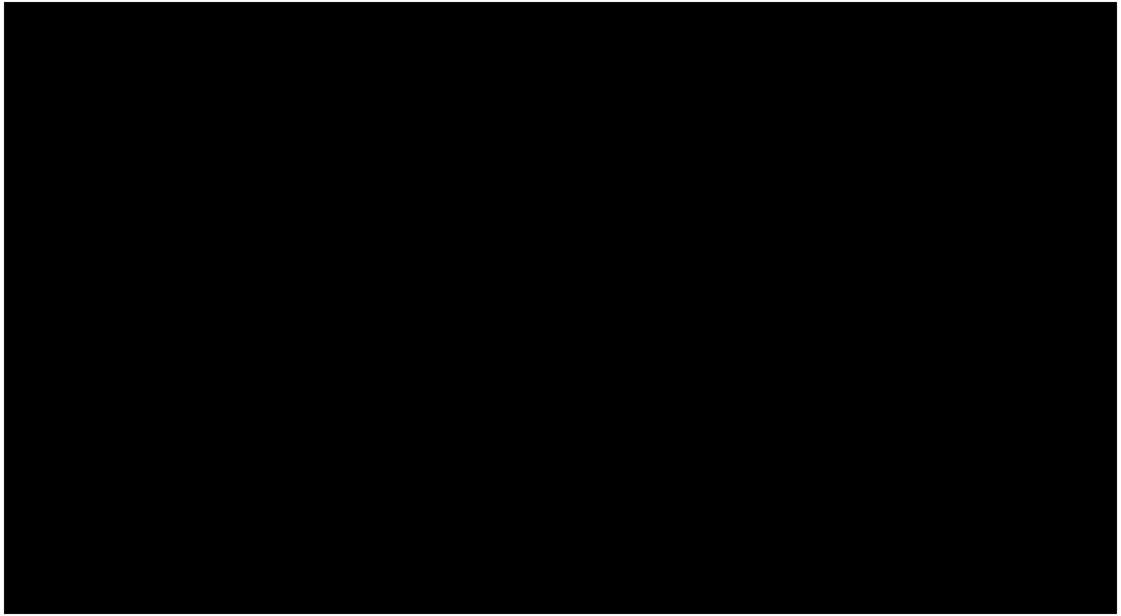
اما تبدیل‌ها می‌تونن بُعد رو هم تغییر بدن و مثلا بردار دو بعدی رو تبدیل بکنن به بردار سه‌بعدی. توی اسلاید بعد ببینید...

ماتریس‌های غیرمربعی



ماتریس‌های غیرمربعی

و فرم ماتریسی‌اش هم میشه شکل پایین که باز هم می‌بینیم چیزی که از تبدیل‌خطی نیازه، محل فرود بردارهای پایه است:



ماتریس‌های غیرمربعی

و ضرب ماتریس تو بردار، ترکیب چند تبدیل پشت سر هم از طریق ضرب ماتریس‌هاشون و سایر عملیاتی که انجام می‌دادیم هم با همون فلسفه‌ای که توضیح دادیم، پابرجاست...

و تمام!

مرسی که وقت گذاشتید خوندید این اسلایدها رو!

حتما بهمون یه فیدبکی بدید که چطور بودش و اگر نکته‌ای هست باهامون در میون بذارید!