Subject: ۹۹۳۱۰۹۹
Date:

امیرفاضل کوهنه برکالی

بنام خدا

سری اول تمرینات جبرخطی کاربردی

۱) الف) نادرست. می توان از فرم نردبانی یک ماتریس به تعداد زیادی داشت ولی فرم نردبانی کاهش یافته یکتا می باشد.

مثال نقض:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 12 & 6 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} \to \cdots$$

ب) نادرست. راه حل:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -3 & 2 & 14 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \\ 0 & -5 & -10 & -20 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{50}{7} & -\frac{150}{7} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 1 ,\quad x_2 = -2 ,\quad x_3 = 3$$

برای هر x جواب داریم پس شرط سازگار بودن صادق است.

پ) نادرست. اگر Pivot در ستون b و سطر آخر باشد، دستگاه ناسازگار است. شرط سازگاری این است که ماتریس ضرایب در هر سطر یک Pivot داشته باشد.

ت) شرط وابسته خطی بودن، داشتن جوابی غیر از جواب trivial است. همانطور که میدانیم وکتور صفر زیرمجموعه هر مجموعه جوابی می باشد. اگر مجموعه جواب بیش از یک عضو داشته باشد، گزاره ذکر شده درست می باشد.

ث) ستون های ماتریس A درصورتی مستقل خطی اند که $Ax=0$ تنها دارای جواب trivial باشد: حال بردارهای داده شده را اگر ستون های یک ماتریس بگیریم و ماتریس افزوده تشکیل دهیم، داریم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \sim \text{trivial solution}$$

ج) همانند بخش «ث» با تشکیل دادن ماتریس افزوده و ساده کردن آن داریم:

نادرست

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 & 0 \\ 2 & 5 & 6 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 0 \\ -5 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 & 0 \\ 0 & -3 & -12 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 0 \\ -5 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 & 0 \\ 0 & -3 & -12 & 0 \\ 0 & -7 & -20 & 0 \\ -5 & -3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 & 0 \\ 0 & -3 & -12 & 0 \\ 0 & -7 & -20 & 0 \\ 0 & 23 & 44 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 & 0 \\ 0 & -3 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 23 & 44 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 & 0 \\ 0 & -3 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -48 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 9 & 0 \\ 0 & -3 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

خواهیم داشت $\Rightarrow X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$

trivial solution $\Rightarrow$ linear independant

چ) نادرست. فرض: $S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ و $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$S_1 \neq S_2 \qquad span(S_1) = span(S_2)$

خ)

$$c_1(v_1 + v_2) + c_2(v_2 + v_3) + \dots + c_n(v_n + 1) = 0$$

$$\Rightarrow (c_1 + c_n) v_1 + (c_1 + c_2) v_2 + \dots + (c_{n-1} + c_n) v_n = 0$$

$c_1 = -c_2 = c_3 \ldots$ ضرایب $\Rightarrow$ 0 =

د)

ذ) درست. $v_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_i$ ، v_n را به صورت تعریف می‌کنیم

نتیجه: $v_1, v_2, \ldots, v_n$ مستقل خطی اند. (برای مستقل خطی بودن)

داریم:

$v_2, \ldots, v_n$ linear independant $\Rightarrow \sum_{i=2}^{n} \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=2}^{n-1} (\lambda_i + \lambda_n) v_i + \lambda_n v_1 = 0$

Date:

۲

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ -4 & 9 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ -4 & -9 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = -2 + 5x_3 \\ x_2 = 1 - 2x_3 \\ x_3 = x_3 \end{array}\right) \quad X = \begin{bmatrix} -2 + 5x_3 \\ 1 - 2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ x_3 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = P + tv$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array}\right) \quad X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

۳

$$\begin{cases} x_1 + hx_2 = 2 \\ 4x_1 + 8x_2 = k \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & h & 2 \\ 4 & 8 & k \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & h & 2 \\ 0 & 8-4h & 8-k \end{bmatrix}$$

الف) اگر $8-4h=0$ ولی $8-k\neq 0$ آنگاه جواب نداریم $\Leftarrow$ $\quad k \neq 8$ و $h=2$

ب) اگر $8-4h \neq 8-k$ باشد، سیستم جواب یکتا دارد $\Leftarrow$ $\quad 4h \neq k$

ج) برای داشتن بیش از یک جواب، x_2 باید متغیر آزاد شود یعنی $8-4h = 8-k = 0$ $\Leftarrow$ $\quad k=8,\ h=2$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 2 \\ 3x_1 + hx_2 = k \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & h & k \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & h-9 & k-6 \end{bmatrix}$$

الف) $h-9=0$ و $k-6\neq 0 \Rightarrow h=9,\ k\neq 6$

ب) $h-9 \neq k-6 \Rightarrow h-k \neq 3$

ج) $k-6=0,\ 8-4h=0 \Rightarrow k=6,\ h=2$

(5)

overdetermined ⇒ سطر > ستون

underdetermined ⇒ سطر < ستون

در دستگاه فرومعین سازگار، تعداد سطرها کمتر از ستون های باشد. یعنی یک سری از ستون ها دارای Pivot نخواهند بود. پس یعنی حداقل یک متغیر آزاد یافت خواهد شد. که یعنی بی شمار جواب خواهیم داشت.

یک دستگاه فرامعین میتواند سازگار باشد. مثال داریم:

$Ax = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 = b_1$, $x_2 = b_2$

(6) a) می دانیم که جواب معادله ناهمگن، انتقال یافته جواب معادله همگن متناظر می باشد. پس می توان گفت تعداد جواب های معادله ناهمگن برابر با تعداد جواب های معادله همگن نامتناظر می باشد. پس می توان گفت که $Ax=0$ یک جواب دارد. پس آن یک جواب، قطعا جواب trivial است. و این را هم میدانیم معادله $Ax=0$ که فقط جواب trivial دارد، مستقل خطی است.

b) n ستون محوری اند. یعنی تمام متغیرها basic اند. پس می توان گفت که این معادله، یک جواب یکتا دارد.

۷

۱-

$$\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ c \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$$

ماتریس A را داریم: $A = \begin{bmatrix} a & b & d \\ 0 & c & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$ برای اینکه A مستقل خطی باشد باید در هر ستون pivot داشته باشیم. پس c و f و a باید مخالف صفر باشند. e و d و b می‌توانند هر مقداری اختیار کنند.

Date:

۲.

$$\begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ c \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \\ 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس B داریم: $B = \begin{bmatrix} a & b & d \\ 1 & c & e \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، چون در هر ~~سطر~~ ستون، یک Pivot یافت می‌شود،

پس متغیرهای $f, \dots, a$ می‌تواند هر مقداری اختیار کند.

۸) الف) برهان خلف: مجموعه $\{v_1, v_2, \dots, v_{k+1}\}$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که وابسته خطی است.
پس $c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_{k+1}v_{k+1} = 0$ باید جواب غیر trivial داشته باشد. پس v_{k+1} ترکیب خطی از مجموعه $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$
است. پس در اسپن $\{v_1, \dots, v_k\}$ قرار دارد که مخالف فرض است. و مستقل خطی بودن این مجموعه
اثبات می‌شود.

ب) M به ازای b ناسازگار است یعنی جواب ندارد. پس یعنی در فرم نردبانی معادل یک سطر موجود است که ضرایب متغیرها همگی 0 هستند ولی b خلاف صفر است. حال اگر $Mx = a$ بخواهیم جواب داشته باشد، مقدار a باید 0 باشد که ~~[illegible]~~ جوابمان شامل متغیر آزاد خواهد شد که باعث می‌شود بی‌نهایت جواب داشته باشیم.

Subject:

Date:

4 الف)

$$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c_1+c_2\\c_2\end{bmatrix} \Rightarrow c_2 = 2,\ c_1 = -1$$

$$\Rightarrow L\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right) = L\left(-\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) = -L\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) + 2L\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)$$

$$= -\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}2\\3\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\5\\2\end{bmatrix}$$

ب)

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c_1+c_2\\c_2\end{bmatrix} \Rightarrow c_1 = x-y,\ c_2 = y$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = (x-y)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$L\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = L\left((x-y)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) = (x-y)L\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) + yL\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)$$

$$= (x-y)\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}2\\3\\2\end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix}x+y\\x+2y\\2x\end{bmatrix}}$$

Scanned by CamScanner

۱۰ $T(u)$ و $T(v)$ باید مستقل خطی باشند تا تصویر P نیز یک صفحه باشد.

Rules : $T(\vec{0}) = \vec{0}$

$T(\vec{x} + \vec{y}) = T(\vec{x}) + T(\vec{y})$

$T(c\vec{x}) = c\,T(\vec{x})$

$$T : R^{۲} \longrightarrow R^{۳}$$

$$T(x,y) = (۲x - ۲y \,,\, x + ۳ \,,\, ۸y)$$

$$T\left(\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}\right) = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۳ \\ ۰ \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{pmatrix}$$ خطی نیست

$$T : R^{۳} \longrightarrow R^{۳}$$

$$T(x, y, z) = (x - y + ۲z \,,\, ۲x + y \,,\, -x - y + ۲z)$$

$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_۱ \\ a_۲ \\ a_۳ \end{bmatrix} , \vec{b} = \begin{bmatrix} b_۱ \\ b_۲ \\ b_۳ \end{bmatrix}$

$T(a+b) \overset{?}{=} T(a) + T(b)$ درست

$a + b = \begin{bmatrix} a_۱ + b_۱ \\ a_۲ + b_۲ \\ a_۳ + b_۳ \end{bmatrix}$

$$T\left(\begin{bmatrix} a_۱ + b_۱ \\ a_۲ + b_۲ \\ a_۳ + b_۳ \end{bmatrix}\right) \qquad T\left(\begin{bmatrix} a_۱ \\ a_۲ \\ a_۳ \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} b_۱ \\ b_۲ \\ b_۳ \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} \cancel{a_۱ + b_۱ - a_۲ - b_۲ + ۲a_۳} + ۲b_۳ \\ \cancel{۲a_۱ + ۲b_۱ + a_۲ + b_۲} \\ \cancel{-a_۱ - b_۱ - a_۲ - b_۲ + ۲a_۳} + ۲b_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cancel{a_۱ - a_۲ + ۲a_۳} \\ \cancel{۲a_۱ + a_۲} \\ \cancel{-a_۱ - a_۲ + ۲a_۳} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cancel{b_۱ - b_۲ + ۲b_۳} \\ \cancel{۲b_۱ + b_۲} \\ \cancel{-b_۱ - b_۲ + ۲b_۳} \end{bmatrix}$$

Subject:

Date:

$$T(c\vec{a}) \overset{?}{=} c\,T(\vec{a})$$

$$T\left(\begin{bmatrix} ca_1 \\ ca_2 \\ ca_3 \end{bmatrix}\right) \overset{?}{=} c\,T\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} ca_1 - ca_2 + 2ca_3 \\ 2ca_1 + ca_2 \\ -ca_1 - ca_2 + 2ca_3 \end{bmatrix} \overset{?}{=} c \times \begin{bmatrix} a_1 - a_2 + 2a_3 \\ 2a_1 + a_2 \\ -a_1 - a_2 + 2a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_1 - ca_2 + 2ca_3 \\ 2ca_1 + 2ca_2 \\ -ca_1 - ca_2 + 2ca_3 \end{bmatrix} \checkmark$$

خطی است

$$T : R^2 \to R^2$$

$$T(x, y) = (|x|, y)$$

$$T(\vec{0}) = \vec{0} \checkmark$$

غیرخطی

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \qquad T(\vec{a}+\vec{b}) \overset{?}{=} T(\vec{a}) + T(\vec{b})$$

$$a+b = \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{bmatrix} = \qquad \begin{bmatrix} |a_1+b_1| \\ a_2+b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |a_1| \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} |b_1| \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$|a_1 + b_1| \neq |a_1| + |b_1|$$