Subject: ۹۹۳۱۰۹۹

Date:

به نام خدا

امیرحامد کوره‌پز بالای

۱) الف) درست. اگر λ مقدار ویژه برای A باشد یعنی $\det(A-\lambda I)$ برابر با صفر است و از آنجایی که $-\lambda I$ فقط روی قطر اصلی A اثرگذار است. می‌توان گفت span سطر $A-\lambda I$ مانند span $A^T-\lambda I$ می‌باشد.

ب) A با B مشابه است پس می‌توان گفت $P^{-1}AP=B \Rightarrow A=PBP^{-1}$

A هم قطری‌شدنی است یعنی $R^{-1}AR=D$

$$\underbrace{R^{-1}\times P}_{S}B\underbrace{P^{-1}\times R}_{S^{-1}}=D$$

$$\Rightarrow SBS^{-1}=D$$

B قطری‌شدنی است.

ت) $P^{-1}AP=B \Rightarrow A=PBP^{-1}$

$$, R^{-1}AR=C \Rightarrow \underbrace{R^{-1}P}_{Q}B\underbrace{P^{-1}R}_{Q^{-1}}=C$$

$$QBQ^{-1}=C$$

ث) A, A^{-1}

$$P^{-1}AP=B \Rightarrow \det(P^{-1}AP)=\det(B)$$

$$=\det(P^{-1})\det(A)\det(P)=\det(B)$$

$$\Rightarrow \det(A)=\det(B)$$

$$\xrightarrow{\det(A)\neq 0} \det(B)\neq 0 \longrightarrow \text{inevertible}$$

$$BB^{-1}=I \Rightarrow B(P^{-1}A^{-1}P)=I$$

$$B^{-1}=P^{-1}A^{-1}P$$

ج) $P^{-1}AP=B \Rightarrow A=PBP^{-1}$

$$A^2=PBP^{-1}.PBP^{-1}$$

$$A^2=PB^2P^{-1} \quad , \quad B^2=P^{-1}AP$$

چ) $\mathrm{rank}(AB)=\mathrm{rank}(B) \xrightarrow[A \text{ invertible}]{\text{if}}$ / $v\in\ker(B) \Rightarrow Bv=0$

$\Rightarrow (AB)v=A(Bv)=A0=0 \Rightarrow v\in\ker(AB)$

$, \ker(B)\subseteq\ker(AB)$

$v\in\ker(AB), (AB)v=0 \Rightarrow A(Bv)=0 \Rightarrow Bv=A^{-1}0=0$

$\Rightarrow v\in\ker(B)\ , \ker(AB)=\ker(B)$

$\Rightarrow \text{nullity}(AB)=\text{nullity}(B)$ / $\Rightarrow \mathrm{rank}(AB)=\mathrm{rank}(B)$

$\mathrm{rank}(AB)=\mathrm{rank}((AB)^t)$

$=\mathrm{rank}(B^tA^t)$

$=\mathrm{rank}(A^t)=\mathrm{rank}(A)$

A, B: similar , $\mathrm{rank}(XB)=\mathrm{rank}(B)$, $\mathrm{rank}(AX)=\mathrm{rank}(A) \Rightarrow \mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)$

NILAI

Subject:

Date:

ه)

فرض، $Ax=\lambda x \xrightarrow{\times A^{-1}} x=\lambda A^{-1}x$

$A^{-1}x=\frac{1}{\lambda}x$

خ)

$Ax=\lambda x \to A^2x=\lambda Ax=\lambda^2 x$

$\Rightarrow$ ~~فرض~~ $\underline{A^2=0} \to \lambda^2 x=0 \Rightarrow \lambda=0$

۲)

$(A-\lambda I)x=0$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{\det} (5-\lambda)((2-\lambda)^2-1)=0$

$, \det(A-\lambda I)=0$

$\lambda_1=5 \qquad (2-\lambda)^2=1 \qquad 2-\lambda=\pm1$

$\lambda_2=1, \ \lambda_3=3$

$\lambda=5 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow x_1=2x_3, \ x_2=x_3$

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ و

eigenvector

$\lambda=1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad x_1=0, \ x_2=-x_3 \quad x_3\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda=3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad x_1=0, \ x_2=x_3 \Rightarrow x_3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

۳) الف)

$F_n=F_{n-1}+F_{n-1}$

$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

ب)

$(A-\lambda I)x=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda+\lambda^2-1=0$

$, \det(A-\lambda I)=0 \qquad \Rightarrow \lambda=\frac{1\pm\sqrt5}{2}$

$\lambda=\frac{1-\sqrt5}{2} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt5}{2} & 1 \\ 1 & \frac{\sqrt5-1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \underbrace{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)}_{\alpha}x_1=-x_2 \Rightarrow x_2\begin{bmatrix} -\frac{1}{\alpha} \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda=\underbrace{\frac{1+\sqrt5}{2}}_{\alpha} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt5}{2} & 1 \\ 1 & -\left(\frac{\sqrt5+1}{2}\right) \end{bmatrix} \Rightarrow x_2=\begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \end{bmatrix}$

Subject:

Date:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{-\alpha} & \alpha \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1/\alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \Rightarrow A = PDP^{-1}$$ (ب

(ج

$$F_n = \frac{1}{1-2\alpha}\left[\left(\left(\frac{-1}{\alpha}\right)^n - \alpha^{n+1}\right)F_1 + \left(-\left(\frac{-1}{\alpha}\right)^n - \alpha^{n-1}\right)F_0\right]$$ (د

$Av = \lambda v \qquad v = Re(v) + Im(v)$ (الف (۳

$A \rightarrow A(Re(v)) + A(Im(v)) = (a-bi)(Re(v) + Im(v))$

$A(Re(v)) = aRe(v) + bIm(v)$

$A(Im(v)) = aIm(v) - bRe(v)$

$$AP = \begin{bmatrix} A(Re(v)) & A(Im(v)) \end{bmatrix}$$ (ب

$$= \begin{bmatrix} aRe(v) + bIm(v) & aIm(v) - bRe(v) \end{bmatrix}$$

$$PC = \begin{bmatrix} Re(v) & Im(v) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \cancel{aRe(v)\ bIm(v)}$$

$$\begin{bmatrix} aRe(v) + bIm(v) & aIm(v) - bRe(v) \end{bmatrix}$$

$AP = PC$

$T(e_1) = -b_1 - b_2 + b_3$ (۱ (د

$T(e_2) = -b_2 - b_3$

$T(e_3) = b_1$

$$[T(e_1)]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [T(e_2)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad [T(e_3)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ (۲

Subject:

Date:

$$M = \left[[T(e_1)]_B \quad [T(e_2)]_B \quad [T(e_3)]_B \right]$$ ۳

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

۶

a) $\lambda = 0, 1$

$\lambda = 0 \longrightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ / $\lambda = 1 \Rightarrow \{v_2, v_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$$P = [v_1, v_2, v_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) ماتریس b یک مقدار ویژه $\lambda = 0$ و $v_1 = \begin{bmatrix} 11 \\ -4 \\ 41 \end{bmatrix}$ دارد که
فضای برداری متناظر آن ، یک بعدی است .
یعنی باقی مقادیر ویژه b ، مختلط هستند، پس ماتریس b بر اعداد حقیقی قطری شده نیست کند.

1 = ۷

$A \rightarrow$ diagonalizable $\Rightarrow \det(A - \lambda I) = 0$

$$\Rightarrow (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) = 0$$

$$\lambda^n + (-\lambda_1 - \lambda_2 - \cdots - \lambda_n)\lambda^{n-1} \cdots = 0$$

λ^{n-1} ضریب $= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda)$

$$\Rightarrow (-\lambda)^n + (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})(-\lambda)^{n-1} = 0$$

$$\Rightarrow (-1)^n \lambda^n + \operatorname{trace}(A)\, (-1)^{n-1} \lambda^{n-1} = 0 \quad \underline{\div (-1)^n}$$

$$\lambda^n - \operatorname{trace} A \; \lambda^{n-1} = 0$$

$$\Rightarrow -\operatorname{trace} A = -\lambda_1 - \lambda_2 - \cdots - \lambda_n$$

$$\Rightarrow \operatorname{trace}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

NILAI

Subject:

Date:

(۲) $Ax=\lambda x \xrightarrow{\times A} A^2x=\lambda Ax \xrightarrow{Ax=\lambda x} Ax=\lambda^2 x$

$\lambda^2=\lambda$

$\lambda=0 \text{ یا } 1$

(۸)

(1) $AV_1= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.6 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.6 \\ 0.1 \end{bmatrix} = 1\,v_1$

$AV_2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -1.5 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} v_2$ / $Av_3 = \begin{bmatrix} -0.2 \\ 0 \\ 0.2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} v_3$

(2)

(3) $|\lambda_1|>|\lambda_2|>|\lambda_3|$

$x_0 = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 \xrightarrow{c_1=1} x_0 = v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$

$\xrightarrow{\times A} Ax_0 = Av_1 + c_2Av_2 + c_3Av_3$

$Ax_0 = \lambda_1 v_1 + c_2\lambda_2 v_2 + c_3\lambda_3 v_3 \xrightarrow{\text{در حالت کلی}}$

$A^k x_0 = \lambda_1^k v_1 + c_2\lambda_2^k v_2 + c_3\lambda_3^k v_3$

$\xrightarrow{\div(\lambda_1)^k} \left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^k A^k x_0 = v_1 + c_2 \underbrace{\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k}_{A} v_2 + c_3 \underbrace{\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^k}_{B} v_3$

$\xrightarrow{A,B<1} k\to\infty:\ (\lambda_1)^{-k} A^k x_0 \to v_1 \xrightarrow{\lambda_1=1} A^k x_0 \to v_1$

$x_k \to v_1$

NILAI

Subject:

Date:

(9)

$$Ax_0 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.4 \end{bmatrix} \rightarrow \mu_0 = 0.5$$

$$Ax_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.74 \\ 0.96 \end{bmatrix} \Rightarrow \mu_1 = 0.96$$

$$Ax_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.6875 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.64375 \\ 0.975 \end{bmatrix} \Rightarrow \mu_2 = 0.975$$

$$Ax_3 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.55077 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.47885 \\ 0.923068 \end{bmatrix} \Rightarrow \mu_3 = 0.923068$$

$$Ax_4 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.5188 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4594 \\ 0.90752 \end{bmatrix} \Rightarrow \mu_4 = 0.90752$$

$$x_k \xrightarrow{\text{میل کردن}} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A\begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.45 \\ 0.9 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$