به نام خدا

امیر فاضل کوزه‌گر کالجی

۹۹۳۱۰۵۹۹

تمرین تحویلی سری دوم

۱) الف) نادرست. زیرا بلوک هایی که در هم ضرب می شوند، متناسب نیستند.

ب) درست. میدانیم اگر A^2 وارون پذیر باشد، A نیز وارون پذیر است. همچنین هر دو تعداد برابری pivot element دارند. و وقتی وارون پذیری صدق می کند که n عدد pivot داشته باشیم که اینگونه نیست.

ت) درست. وقتی A را به ماتریس همانی کاهش میدهیم، یعنی A، وارون پذیر است. پس ستون های آن از هم مستقل خطی اند و به همین دلیل می توانند پایه ای برای R^n باشند.

ج) نادرست، مثال: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

چ) نادرست، مثال: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$ و $BA = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

ه) نادرست ، فضای پوچ $A_{m\times n}$ زیرفضایی از R^n می باشد.

۲) الف)

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&4&4\\3&7&10\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&4&7\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{bmatrix}=U$$

$$, L=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&2&1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A=LU=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&4&4\\3&7&10\end{bmatrix}$$

ب)

$$b=\begin{bmatrix}3\\10\\20\end{bmatrix}\rightarrow LUx=b\ ,\ Ux=y\rightarrow Ly=b$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&2&1\end{bmatrix}y=\begin{bmatrix}3\\10\\20\end{bmatrix}\Rightarrow y=\begin{bmatrix}3\\4\\3\end{bmatrix}$$

$$Ux=y\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&2\\0&0&3\end{bmatrix}x=\begin{bmatrix}3\\4\\3\end{bmatrix}\Rightarrow x=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

۳)

$$B(I-AB)=(I-BA)B$$

$$B=(I-BA)B(I-AB)^{-1}$$

$$\Rightarrow BA=(I-BA)B(I-AB)^{-1}A$$

$$\Rightarrow I-BA=I-(I-BA)B(I-AB)^{-1}A$$

$$\Rightarrow (I-BA)+(I-BA)B(I-AB)^{-1}A=I$$

$$\Rightarrow (I-BA)\times(I+B(I-AB)^{-1}A)=I$$

$$\Rightarrow (I-BA)^{-1}=(I+B(I-AB)^{-1}A)$$

Subject:

Date:

ج) الف)

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۲ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۲ & ۱ & c \\ ۳ & ۰ & ۲ & ۲ \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ & ۳ \\ ۰ & -۶ & -۷ & -۱۲ \\ ۰ & -۲ & -۳ & c-۶ \\ ۰ & -۶ & -۴ & -۷ \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ & ۳ \\ ۰ & -۶ & -۷ & -۱۲ \\ ۰ & ۰ & \frac{-۲}{۳} & c-۲ \\ ۰ & ۰ & ۳ & ۵ \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ & ۳ \\ ۰ & -۶ & -۷ & -۱۲ \\ ۰ & ۰ & -۲/۳ & c-۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \frac{۹}{۲}(c-۲)+۵ \end{bmatrix}$$

$$\frac{۹}{۲}(c-۲)+۵ \neq ۰$$

$$c-۲ \neq \frac{-۵\times ۲}{۹}$$

$$c \neq \frac{-۱۰}{۹}+\frac{۱۸}{۹}$$

$$c \neq \frac{۸}{۹}$$

ب)

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} ۱ & ۲ & ۲ & ۳ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۴ & ۲ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۲ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۰ & ۲ & ۲ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} ۱ & ۲ & ۲ & ۳ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۶ & -۷ & -۱۲ & -۴ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۲ & -۳ & -۵ & -۲ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۶ & -۴ & -۷ & -۳ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} ۱ & ۲ & ۲ & ۳ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۷/۶ & ۲ & \frac{۲}{۳} & \frac{-۱}{۶} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{-۲}{۳} & -۱ & \frac{۲}{۳} & \frac{-۱}{۳} & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ & ۵ & -۱ & -۱ & ۰ & ۱ \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} ۱ & ۲ & ۲ & ۳ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۷/۶ & ۲ & \frac{۲}{۳} & \frac{-۱}{۶} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & \frac{۳}{۲} & ۱ & \frac{۱}{۲} & \frac{-۳}{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۴ & -۵ & ۹ & ۲ \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & -۲ & -۲ & ۴ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & \frac{-۱}{۲} & \frac{-۱}{۲} \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۷ & ۸ & -۱۵ & -۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & -۴ & -۵ & ۹ & ۲ \end{array}\right]$$

A^{-1}

Subject:

Date:

۵) الف) $m=5 \,,\, n=3$

ب) $rank=1$ یا $nullity=2$

۶) الف) خیر، زیرا شامل بردار صفر نمی‌شود.

ب) بله، زیرا هم شامل بردار صفر است و هم نسبت به جمع برداری و ضرب اسکالر بسته است.

ج) بله، شامل شدن بردار صفر

$10x + 9y - 5z = 0$

$u=(x_1,y_1,z_1) \,,\, v=(x_2,y_2,z_2)$

$u+v = 10(x_1+x_2) + 9(y_1+y_2) - 5(z_1+z_2) = 0$

$\Rightarrow \in H$

$\Rightarrow u \in H \,,\, v \in H$

$\Rightarrow cu \in H$

د) بله، زیرا هم شامل بردار صفر است و هم نسبت به جمع برداری و ضرب اسکالر بسته است.

۷) الف)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 8 \\ 2 & -2 & -2 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ب)

$$Ax=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1/3 & \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_1 = \frac{-1}{3} x_3 \frac{-1}{3} x_4$

$x_2 = \frac{-4}{3} x_3 + \frac{x_4}{3}$

$\left.\begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right]$ متغیر آزاد

$$X = x_3 \begin{bmatrix} -1/3 \\ -4/3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -8/3 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Null space پایه‌های

Subject:
Date:

ج)
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 1 & 8 & 12 \\ 2 & -2 & -2 & 4 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & -6 & -8 & 2 & -9 \\ 0 & -6 & -8 & 2 & -9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & -6 & -8 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

سازگار است پس در فضای ستونی A قرار دارد.

د) خیر زیرا باید $A\vec{q} = 0$ شود اما q باید یک بردار ۴ عنصری باشد که اینطور نیست.

۸) الف)

$$Bu = 0 \rightarrow \text{nontrivial}$$

$$ABu = 0 \Rightarrow A \times Bu = 0$$

$$\Rightarrow (AB)u = 0 \Rightarrow \text{nontrivial solution}$$

ب)

$$C^{-1}(A+u)B^{-1} = I \Rightarrow A + u = CB$$

$$u = CB - A$$

۲)

ج)
$$\operatorname{trc}(AB) = (AB)_{11} + (AB)_{22} + (AB)_{33} + \dots + (AB)_{nn}$$

$$= a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1}$$

$$+ a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \dots + a_{2n}b_{n2}$$

$$\vdots$$

$$+ \underbrace{a_{n1}b_{1n}}_{\substack{\text{ستون اول } A \\ \text{سطر اول } B}} + \dots \dots + \underbrace{a_{nn}b_{nn}}_{\substack{\text{ستون } n\text{ام } A \\ \text{سطر } n\text{ام } B}} = \operatorname{trc}(BA)$$

Subject:
Date:

(8) $tr(AA^T) = (row_1 A) \times (row_1 A) + \dots + (row_n A)\dfrac{(row_n A)}{col_n A^T}$

$= (a_{11})^2 + (a_{12})^2 + \dots + (a_{1n})^2$

$+$

$\vdots$

$+ (a_{n1})^2 + \dots + (a_{nn})^2 = 0$

تمامی جملات صفر هستند. $\Leftarrow$

(9) فرض: $A+B=P \Rightarrow B=P-A$

$\Rightarrow A(A+B)^{-1}B = AP^{-1}(P-A) = AP^{-1}P - AP^{-1}A = A - AP^{-1}A$ (1)

$B(A+B)^{-1}A = (P-A)P^{-1}A = PP^{-1}A - AP^{-1}A = A - AP^{-1}A$ (2)

(1) $=$ (2) $\Rightarrow$ تساوی برقرار باشد.

(10)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & -7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(11) فرض می‌کنیم x برداری از R^n باشد، در صورتی که $Ax=0$ ، x باید بردار صفر باشد.

برای اینکه $Ax=0$ جواب بدیهی داشته باشد، نباید متغیر آزاد داشته باشیم پس تعداد ستون‌ها نباید بیشتر از سطرها شود یعنی $m \geq n$. حال برای هر عضو b از R^m داریم:

$b = I_m b = (AD)b = A(Db)$

می‌توان گفت $Ax=b$ جواب دارد و باید به ازای هر b دلخواه جواب داشته باشد. پس باید سطر و ستون‌ها به شکلی باشد که به ازای هر b دلخواه، $Ax=b$ جواب داشته باشد. پس باید تعداد سطرها بیشتر از ستون‌ها نشود: $n \geq m$

Subject:
Date:

از $n \leq m$ و $m \leq n$ نتیجه می‌گیریم $n = m$.

حال داریم:

$(CA)D = I_n D = D$

$C(AD) = C I_m = C$

$C(AD) = (CA)D$

$\Rightarrow C = D$