FMI, Info, Anul II, 2018-2019
Programare logică

Seminar 2
Deducţia naturală pentru calculul propoziţional

Sistemul de reguli al deducţiei naturale

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ (\wedge i) \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ (\wedge e_1) \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\ (\wedge e_2)$$

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\varphi \\ \vdots \\ \psi\end{array}}}{\varphi \to \psi}\ (\to i) \qquad \frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\ (\to e)$$

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee i_1) \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee i_2) \qquad \frac{\varphi \vee \psi \quad \boxed{\begin{array}{c}\varphi \\ \vdots \\ \chi\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c}\psi \\ \vdots \\ \chi\end{array}}}{\chi}\ (\vee e)$$

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\varphi \\ \vdots \\ \bot\end{array}}}{\neg\varphi}\ (\neg i) \qquad \frac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\ (\neg e)$$

$$\frac{\varphi}{\neg\neg\varphi}\ (\neg\neg i) \qquad \frac{\neg\neg\varphi}{\varphi}\ (\neg\neg e)$$

$$\frac{}{\varphi \vee \neg\varphi}\ \textbf{TND} \qquad \frac{\bot}{\varphi}\ (\bot e)$$

TND (*tertium non datur*) este regulă derivată.

Atenţie! La acest sistem se adaugă regula de copiere.

Regula de copiere:

- la un pas al unei demonstraţii poate fi copiată orice formulă demonstrată anterior.
- la un pas al unei demonstraţii nu pot fi copiate formule din interiorul cutiilor care sunt închise în acel moment.

Exemplu în curs sau Huth si Ryan, pg. 20

(S2.1) Demonstraţi că următorii secvenţi sunt valizi:

(1) $(p \wedge q) \wedge r, s \wedge t \vdash q \wedge s$

(2) $p, \neg\neg(q \wedge r) \vdash \neg\neg p \wedge r$

(3) $p \wedge q \to r \vdash p \to (q \to r)$

(4) $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

(5) $p \to q, p \to \neg q \vdash \neg p$

Demonstraţie: (2) Huth şi Ryan, pg 8; (3) Huth şi Ryan, pg 15;
(4) Huth şi Ryan Example 1.18, pg 19; (5) Huth şi Ryan, example 1.21, pg 22 $\square$

(S2.2) Demonstraţi că următoarele reguli pot fi derivate din regulile deducţiei naturale:

$$\frac{\varphi \to \psi \quad \neg\psi}{\neg\varphi}\ \textbf{MT} \qquad\qquad \frac{\boxed{\begin{array}{c}\neg\varphi \\ \vdots \\ \bot\end{array}}}{\varphi}\ \textbf{RAA}$$

MT =*modus tollens* RAA =*reductio ad absurdum*

Demonstraţie: Huth şi Ryan, sectiunea 1.2.2 $\square$

(S2.3) Fie $n \geq 1$ şi $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, φ formule. Demonstraţi că

dacă $\vdash \varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\cdots \to (\varphi_n \to \varphi) \cdots))$ este valid, atunci $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi$ este valid.

Demonstraţie: Huth şi Ryan, pagina 53, Step 3 $\square$

(S2.4) Ştim că *echivalenţa logică* este definită astfel: $\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$. Găsiţi reguli de introducere şi eliminare pentru $\leftrightarrow$.

Demonstraţie: Observăm că $\leftrightarrow$ este o combinaţie între $\to$ şi $\wedge$. Regulile pentru $\leftrightarrow$ se obţin combinând regulile pentru $\to$ şi $\wedge$.

Introducerea $(\leftrightarrow i)$: pentru a introduce $\varphi \leftrightarrow \psi$ trebuie să introducem $\varphi \to \psi$ şi $\psi \to \varphi$, apoi să introducem $\wedge$; în consecinţă regula va arăta aşa

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \psi\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c}\psi\\ \vdots\\ \varphi\end{array}}}{\varphi \leftrightarrow \psi}\ (\leftrightarrow i)$$

Eliminarea $(\leftrightarrow i)$: pentru a elimina $\varphi \leftrightarrow \psi$ trebuie să eliminăm $\wedge$ apoi să eliminăm o $\to$; vom avea două variante:

$$\frac{\varphi \leftrightarrow \psi \quad \psi}{\varphi}\ (\leftrightarrow e_1) \qquad \frac{\varphi \leftrightarrow \psi \quad \varphi}{\psi}\ (\leftrightarrow e_2)$$

$\square$

Teorie pentru S2.5 şi S2.6:

Fie $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Form$. O formulă φ este $\Gamma-$*tautologie (*consecinţă semantică a lui Γ) dacă orice model al lui Γ este şi model pentru φ, i.e. $e^+(\Gamma) = \{1\}$ implică $e^+(\varphi) = 1$ pentru orice evaluare $e : Var \to \{0, 1\}$. Notăm prin $\Gamma \vDash \varphi$ faptul că φ este o Γ-tautologie.

(S2.5) Fie $n \geq 1$ şi $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, φ formule. Demonstraţi că

$$\text{dacă } \varphi_1, \ldots, \varphi_n \vDash \varphi \text{ atunci } \vDash \varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\cdots \to (\varphi_n \to \varphi) \cdots)).$$

Demonstraţie: Se demonstrează prin prin inducţie după $n \geq 1$ sau direct. □

(S2.6)

(1) Arătaţi că regula $(\vee i_1)$ este corectă, adică

$$\Gamma \vDash \varphi \text{ implică } \Gamma \vDash \varphi \vee \psi \text{ pentru orice } \Gamma \subseteq Form.$$

(2) Arătaţi că regula $(\neg i)$ este corectă, adică

$$\Gamma \vDash \varphi \to \bot \text{ implică } \Gamma \vDash \neg\varphi \text{ pentru orice } \Gamma \subseteq Form.$$

Demonstraţie: (1) uşor

(2) Fie $e : Var \to \{0, 1\}$ evaluare astfel încât $e^+(\Gamma) = \{1\}$. Din ipoteza $\Gamma \vDash \varphi \to \bot$ obţiem $e^+(\varphi \to \bot) = 1$, adică $e^+(\varphi) \to 0 = 1$. Rezultă $e^+(\varphi) = 0$, deci $e^+(\neg\varphi) = 1$. □

(S2.7) Formalizaţi şi demonstraţi folosind deducţia naturală faptul că din ipotezele (i1)-(i5) deducem (c):

(i1) *Toţi scriitorii care înţeleg natura umană sunt înţelepţi.*
(i2) *Un scriitor care este poet adevărat poate trezi sentimente puternice.*
(i3) *Shakespeare este scriitorul care a scris "Hamlet".*
(i4) *Un scriitor care trezeşte sentimente puternice înţelege natura umană.*
(i5) *Numai un poet adevărat putea scrie "Hamlet".*

(c) Shakespeare este înţelept.

Traducere după S. Burris, Logic for Mathemetics and Computer Science, Prentice Hall 1998. Exerciţiu din Lewis Carroll, Symbolic Logic and The Game of Logic, 1897/87. Forma originală:

All writers, who understand the human nature, are clever.

No writer is a true poet unless he can stir the heart of men.
Shakespeare wrote "Hamlet".
No writer who does not understand human nature can stir the heart of men.
None but a true poet could have written "Hamlet".
Therefore Shakespeare is clever.

Demonstraţie: Formalizarea:

$Writer \wedge HumanNat \rightarrow Clever$
$Writer \rightarrow (Poet \rightarrow Heart)$
$Shakespeare \rightarrow Writer \wedge Hamlet$
$Writer \wedge Heart \rightarrow HumanNat$
$Hamlet \rightarrow Poet$
$Shakespeare$
Vrem să demonstrăm $Clever$ $\square$