FMI, Info, Anul II, 2018-2019
Programare logică

Seminar 1
Recapitulare logica propoziţională

$\boxed{\textbf{Teorie pentru S1.1:}}$ Amintim tabelele de adevăr pentru conectorii propoziţionali:

p	$\neg \mathbf{p}$
0	1
1	0

p	q	$\mathbf{p} \to \mathbf{q}$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

p	q	$\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Putem să arătăm că o formulă φ este tautologie (validă, universal adevărată) folosind **metoda tabelului de adevăr**. Dacă $v_1, \ldots, v_n$ sunt variabilele propoziţionale care apar în φ, atunci cele 2^n evaluări posibile (i.e, o evaluarea este o funcţie $e : \{v_1, \ldots, v_n\} \to \{0, 1\}$) $e_1, \ldots, e_{2^n}$ pot fi scrise într-un tabel:

v_1	v_2	$\ldots$	v_n	φ
$e_1(v_1)$	$e_1(v_2)$	$\ldots$	$e_1(v_n)$	$f_{e_1}(\varphi)$
$e_2(v_1)$	$e_2(v_2)$	$\ldots$	$e_2(v_n)$	$f_{e_2}(\varphi)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$e_{2^n}(v_1)$	$e_{2^n}(v_2)$	$\ldots$	$e_{2^n}(v_n)$	$f_{2^n}(\varphi)$

Dacă pe coloana lui φ obţinem doar valoarea 1, atunci φ este tautologie.

$\boxed{\textbf{Teorie pentru S1.2:}}$ **Axiomele** calculului propoziţional sunt următoarele:

(A1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

(A2) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$

(A3) $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$

unde φ, ψ şi χ sunt formule. În plus, avem următoarea **regulă de deducţie**:

$$\text{MP } (\textit{modus ponens}) \ \frac{\varphi, \ \varphi \to \psi}{\psi}$$

O Γ**-demonstraţie** este o secvenţă de formule φ_1, …, φ_n astfel încât, pentru fiecare $i \in \{1, \ldots, n\}$, una din următoarele condiţii este satisfăcută:

- φ_i este axiomă sau $\varphi_i \in \Gamma$,
- φ_i se obţine din formulele anterioare prin MP.

O formulă φ este Γ**-teoremă** dacă există o Γ-demonstraţie φ_1, …, φ_n astfel încât $\varphi_n = \varphi$. Notăm prin $\Gamma \vdash \varphi$ faptul că φ este Γ-teoremă.

Teorema 1 (Teorema deducţiei)**.** *$\Gamma \vdash \varphi \to \psi \;\Leftrightarrow\; \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.*

Teorie pentru S1.3: Amintim următoarele definiţii:

- Un **literal** este o variabilă sau negaţia unei variabile.
- O **formă normală disjunctivă (FND)** este o disjuncţie de conjuncţii de literali
$$(l_1 \wedge \ldots \wedge l_n) \vee \ldots \vee (l'_1 \wedge \ldots \wedge l'_m).$$
- O **formă normală conjunctivă (FNC)** este o conjuncţie de disjuncţii de literali
$$(l_1 \vee \ldots \vee l_n) \wedge \ldots \wedge (l'_1 \vee \ldots \vee l'_m).$$

Pentru orice formulă φ există θ_1 în FND şi θ_2 în FNC echivalente cu φ.

Metoda transformărilor sintactice succesive. Putem aduce o formulă în FND şi/sau în FNC folosind următoarele transformări:

- înlocuirea implicaţiilor şi echivalenţelor
$$\begin{array}{lcl} \varphi \to \psi & \sim & \neg\varphi \vee \psi \\ \varphi \leftrightarrow \psi & \sim & (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi) \end{array}$$
- regulile De Morgan
$$\begin{array}{lcl} \neg(\varphi \vee \psi) & \sim & \neg\varphi \wedge \neg\psi \\ \neg(\varphi \wedge \psi) & \sim & \neg\varphi \vee \neg\psi \end{array}$$
- principiului dublei negaţii
$$\neg\neg\psi \quad \sim \quad \psi$$
- distributivitatea
$$\begin{array}{lcl} \varphi \vee (\psi \wedge \chi) & \sim & (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi) \\ (\psi \wedge \chi) \vee \varphi & \sim & (\psi \vee \varphi) \wedge (\chi \vee \varphi) \end{array}$$
- absorbţia
$$\begin{array}{lcl} \varphi \wedge (\varphi \vee \psi) & \sim & \varphi \\ \varphi \vee (\varphi \wedge \psi) & \sim & \varphi \end{array}$$

Metoda funcţiei booleene asociate unei formule. Fie φ o formulă, $v_1, \ldots, v_n$ variabilele care apar în φ şi $e_1, \ldots, e_{2^n}$ evaluările posibile. Tabelul asociat lui φ defineşte funcţia booleană $F_\varphi : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$:

v_1	v_2	$\ldots$	v_n	φ
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$e_k(v_1)$	$e_k(v_2)$	$\ldots$	$e_k(v_n)$	$f_{e_k}(\varphi)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$F_\varphi(x_1, \ldots, x_n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$e_k(v_1)$	$e_k(v_2)$	$\ldots$	$e_k(v_n)$	$f_{e_k}(\varphi)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Dacă luăm disjuncţia cazurilor în care avem 1 în tabelul de adevăr al funcţiei booleene obţinem o formulă în FND.

Teorie pentru S1.4: O **clauză** este o mulţime finită de literali, i.e $C = \{L_1, \ldots, L_n\}$ unde $L_1, \ldots, L_n$ sunt literali. O clauză $C = \{L_1, \ldots, L_n\}$ este satisfiabilă dacă $L_1 \vee \ldots \vee L_n$ este satisfiabilă. **Clauza vidă** $\square = \{\}$ nu este satisfiabilă. O mulţime de clauze $\mathcal{S} = \{C_1, \ldots, C_m\}$ este satisfiabilă dacă există o evaluare $e : Var \to \{0,1\}$ astfel încât $e(C_i) = 1$ oricare $i \in \{1, \ldots, m\}$.

$$\begin{aligned} \text{clauză} &= \text{disjuncţie de literali} \\ \text{mulţime de clauze} &= \text{FNC} \end{aligned}$$

Regula rezoluţiei:

$$Rez \ \frac{C_1 \cup \{p\}, C_2 \cup \{\neg p\}}{C_1 \cup C_2}$$

unde $\{p, \neg p\} \cap C_1 = \emptyset$ şi $\{p, \neg p\} \cap C_2 = \emptyset$.

Fie $\mathcal{S}$ o mulţime de clauze. O *derivare prin rezoluţie* din $\mathcal{S}$ este o secvenţă finită de clauze astfel încât fiecare clauză este din $\mathcal{S}$ sau rezultă din clauze anterioare prin rezoluţie. Dacă există o derivare prin rezoluţie care se termină cu $\square$, atunci mulţimea iniţială de clauze este nesatisfiabilă.

(S1.1) Arătaţi că următoarea formulă în logica propoziţională este o tautologie:

$$(v_1 \vee v_2 \to v_3) \leftrightarrow (v_1 \to v_3) \wedge (v_2 \to v_3)$$

Demonstraţie: Ne vom folosi de următoarele notaţii:

(i) $A := v_1 \vee v_2 \to v_3$

(ii) $B := (v_1 \to v_3) \wedge (v_2 \to v_3)$

Construim tabelul de valori de adevăr:

v_1	v_2	v_3	$v_1 \vee v_2$	$(v_1 \vee v_2) \to v_3$	$v_1 \to v_3$	$v_2 \to v_3$	$(v_1 \to v_3) \wedge (v_2 \to v_3)$	$A \leftrightarrow B$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1

$\square$

(S1.2) Fie φ şi ψ formule în logica propoziţională. Să se arate sintactic că

$$\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \psi).$$

Demonstraţie:

Avem următoarea demonstraţie:

(1)	$\{\varphi, \neg\varphi\}$	$\vdash \neg\varphi \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$	(A1)
(2)	$\{\varphi, \neg\varphi\}$	$\vdash \neg\varphi$	(ipoteză)
(3)	$\{\varphi, \neg\varphi\}$	$\vdash \neg\psi \to \neg\varphi$	(1), (2), MP
(4)	$\{\varphi, \neg\varphi\}$	$\vdash (\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$	(A3)
(5)	$\{\varphi, \neg\varphi\}$	$\vdash \varphi \to \psi$	(3), (4), MP
(6)	$\{\varphi, \neg\varphi\}$	$\vdash \varphi$	(ipoteză)
(7)	$\{\varphi, \neg\varphi\}$	$\vdash \psi$	(5), (6), MP
(8)	$\{\varphi\}$	$\vdash \neg\varphi \to \psi$	(7) Teorema Deducţiei
(9)		$\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$	(8) Teorema Deducţiei

$\square$

(S1.3) Fie $\varphi := (p \leftrightarrow \neg q) \rightarrow p$ o formulă în logica propoziţională. Să se aducă φ la cele două forme normale, folosind, pe rând:

(i) metoda transformărilor sintactice succesive,

(ii) metoda funcţiei booleene corespunzătoare formulei φ.

Demonstraţie:

(i) Avem următoarele echivalenţe:

$$\begin{aligned}
(p \leftrightarrow \neg q) \rightarrow p &\sim ((p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg q \rightarrow p)) \rightarrow p && \text{(înlocuirea echivalenţelor)}\\
&\sim \neg((\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg\neg q \vee p)) \vee p && \text{(înlocuirea implicaţiei)}\\
&\sim \neg((\neg p \vee \neg q) \wedge (q \vee p)) \vee p && \text{(dubla negaţie)}\\
&\sim (\neg(\neg p \vee \neg q) \vee \neg(p \vee q)) \vee p && \text{(de Morgan)}\\
&\sim ((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \vee p && \text{(de Morgan şi dubla negaţie)}\\
&\sim (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee p && \text{(asociativitatea)}
\end{aligned}$$

Se observă că ultima formulă este în FND. Mai departe, avem echivalenţele:

$$\begin{aligned}
(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee p &\sim p \vee (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) && \text{(comutativitatea disjuncţiei)}\\
&\sim p \vee (\neg p \wedge \neg q) && \text{(absorbţia)}\\
&\sim (p \vee \neg p) \wedge (p \vee \neg q) && \text{(distributivitatea)}
\end{aligned}$$

Se observă că ultima formulă este în FNC. De asemenea, aceasta este echivalentă cu

$$p \vee \neg q,$$

care este şi în FND, şi în FNC.

(ii) Alcătuim tabelul de valori de adevăr al funcţiei asociate $F_\varphi : \{0,1\}^3 \rightarrow \{0,1\}$, precum şi al funcţiei $\neg \circ F_\varphi$.

x_0	x_1	$\neg x_1$	$x_0 \leftrightarrow \neg x_1$	$F_\varphi(x_0,x_1) := (x_0 \leftrightarrow \neg x_1) \rightarrow x_0)$	$\neg F_\varphi(x_0,x_1)$
1	1	0	0	1	0
1	0	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0

Uitându-ne la liniile cu 1 pe coloana valorilor lui F_φ, obţinem că o FND a lui φ este

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q).$$

Mai departe, uitându-ne la liniile cu 1 pe coloana valorilor lui $\mathbf{\neg} \circ F_\varphi = F_{\neg\varphi}$, obţine că $\neg p \wedge q$ este o FND a lui $\neg\varphi$. Apoi, obţinem că $p \vee \neg q$ este o FNC a lui $\neg\neg\varphi$, şi deci a lui φ. (notă: aşa cum am văzut mai sus, aceasta este şi o formă normală disjunctivă!)

$\square$

(S1.4) Să se arate folosind rezoluţia că umătoarea formulă este nesatisfiabilă:

$$\varphi := (\neg v_1 \vee \neg v_2) \wedge ((v_3 \to \neg v_2) \vee v_1) \wedge (v_1 \to v_2) \wedge (v_2 \wedge v_3)$$

Demonstraţie:
Înlocuind implicaţiile obţinem următoarea formulă echivalentă cu φ:

$$\varphi \sim (\neg v_1 \vee \neg v_2) \wedge (\neg v_3 \vee \neg v_2 \vee v_1) \wedge (v_2 \vee \neg v_1) \wedge v_2 \wedge v_3.$$

Observăm că aceasta este în FNC. Forma clauzală a acestei formule este:

$$\mathcal{S} = \{\{\neg v_1, \neg v_2\}, \{\neg v_3, \neg v_2, v_1\}, \{v_2, \neg v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}\}$$

Acum, să observăm că avem o derivare a clauzei vide $\square$ din $\mathcal{S}$:

$$\begin{array}{rll}
C_1 & := \{\neg v_1, \neg v_2\} & \\
C_2 & := \{\neg v_3, \neg v_2, v_1\} & \\
C_3 & := \{v_2, \neg v_1\} & \\
C_4 & := \{v_2\} & \\
C_5 & := \{v_3\} & \\
C_6 & := \{\neg v_2, \neg v_3\} & \text{(rezolvent al } C_1,\ C_2) \\
C_7 & := \{\neg v_1, \neg v_3\} & \text{(rezolvent al } C_3,\ C_6) \\
C_8 & := \{\neg v_1\} & \text{(rezolvent al } C_5,\ C_7) \\
C_9 & := \{\neg v_3, v_1\} & \text{(rezolvent al } C_2,\ C_4) \\
C_{10} & := \{v_1\} & \text{(rezolvent al } C_5,\ C_9) \\
C_{11} & := \{\square\} & \text{(rezolvent al } C_8,\ C_9)
\end{array}$$

Astfel, $\mathcal{S}$ este nesatisfiabilă, deci φ este nesatisfiabilă.

$\square$

(S1.5) Fie L un limbaj pentru logica propoziţională, cu un vocabular alcătuit din următoarea mulţime de variabile propoziţionale $V = \{v_0, v_1, ..., v_n\}$. Să se găsească mulţimea modelelor următoarei formule propoziţionale:

$$\gamma := (v_0 \wedge \bigvee_{1\leq i\leq n} v_i) \leftrightarrow \bigvee_{1\leq i\leq n} (v_0 \wedge v_i)$$

Demonstraţie: Notăm $\varphi := v_0 \wedge \bigvee_{1\leq i\leq n} v_i$ şi $\psi := \bigvee_{1\leq i\leq n}(v_0 \wedge v_i)$. Fie $e : V \to \{0, 1\}$. Acum, să observăm că $e(\varphi) = 1$ ddacă $e(v_0) = 1$ şi există $i \in \{1, ..., n\}$ astfel încât $e(v_i) = 1$. Acelaşi lucru se demonstrează pentru ψ. În concluzie, φ şi ψ au aceleaşi modele, deci γ este o tautologie. Ca urmare, $Mod(\gamma) = \{e \mid e : V \to \{0, 1\}\}$. □

(S1.6) Există două triburi pe insula Tufa - Tu şi Fa. Membrii tribului Tu spun întotdeauna adevărul, iar membrii tribului Fa mint întotdeauna. Un călător întâlneşte trei băştinaşi - A, B, şi C. Fiecare dintre ei face o declaraţie călătorului:

- A spune: "B şi C spun adevărul dacă şi numai dacă C spune adevărul",
- B spune: "dacă A şi C spun adevărul atunci este fals faptul că A spune adevărul când B şi C spun adevărul",
- C spune: "B minte dacă şi numai dacă A sau B spun adevărul".

Puteţi determina din ce trib fac parte A, B şi C?

Demonstraţie: Cele trei restricţii de formulează în calculul propoziţional astfel:

φ este $A \leftrightarrow ((B \leftrightarrow C) \leftrightarrow C$
ψ este $B \leftrightarrow ((A \wedge C) \to \neg((B \wedge C) \to A)$
χ este $C \leftrightarrow ((\neg B) \leftrightarrow (A \vee B))$

Astfel, valoarea de adevăr a lui A coincide cu valoarea de adevăr a ceea ce spune. Ipotezele jocului spun ca, pentru valorile lui A, B, C corespunzătoare triburilor lor, formulele φ, ψ şi χ sunt adevărate. Se face tabelul de adevăr pentru A, B, C, φ, χ, ψ şi se observă că există o singură linie în care φ, ψ şi χ au toate valoarea 1, şi anume cea în cu $v(A) = 1, v(B) = 1, v(C) = 0$. Deoarece există o singură linie cu această proprietate, putem şti cu siguranţcine minte şi cine spune adevărul.
S. Burris, Logic for Mathematics and Computer Science, Prentice Hall 1998, Example 2.7.12
□