

Curs 2

Cuprins

- 1 Logica propozițională PL (recap.)
- 2 Deducția naturală DN
- 3 Corectitudinea și completitudinea DN

Logica propozițională PL (recap.)

Logica propozițională PL

- O **propoziție** este un enunț care poate fi **adevărat** (1) sau **fals** (0).
- Propozițiile sunt notate simbolic ($\varphi, \psi, \chi, \dots$) și sunt combinate cu ajutorul conectorilor logici ($\neg, \rightarrow, \vee, \wedge, \leftrightarrow$).

Logica propozițională PL

- O **propoziție** este un enunț care poate fi **adevărat** (1) sau **fals** (0).
- Propozițiile sunt notate simbolic ($\varphi, \psi, \chi, \dots$) și sunt combinate cu ajutorul conectorilor logici ($\neg, \rightarrow, \vee, \wedge, \leftrightarrow$).

Exemplu

Fie φ propoziția:

$$(\text{stark} \wedge \neg \text{dead}) \rightarrow (\text{sansa} \vee \text{arya} \vee \text{bran})$$

Logica propozițională PL

- O **propoziție** este un enunț care poate fi **adevărat** (1) sau **fals** (0).
- Propozițiile sunt notate simbolic ($\varphi, \psi, \chi, \dots$) și sunt combinate cu ajutorul conectorilor logici ($\neg, \rightarrow, \vee, \wedge, \leftrightarrow$).

Exemplu

Fie φ propoziția:

$$(\text{stark} \wedge \neg \text{dead}) \rightarrow (\text{sansa} \vee \text{arya} \vee \text{bran})$$

Cine este $\neg\varphi$?

Logica propozițională PL

- O **propoziție** este un enunț care poate fi **adevărat** (1) sau **fals** (0).
- Propozițiile sunt notate simbolic ($\varphi, \psi, \chi, \dots$) și sunt combinate cu ajutorul conectorilor logici ($\neg, \rightarrow, \vee, \wedge, \leftrightarrow$).

Exemplu

Fie φ propoziția:

$$(\text{stark} \wedge \neg \text{dead}) \rightarrow (\text{sansa} \vee \text{arya} \vee \text{bran})$$

Cine este $\neg\varphi$? Propoziția $\neg\varphi$ este:

$$\text{stark} \wedge \neg \text{dead} \wedge \neg \text{sansa} \wedge \neg \text{arya} \wedge \neg \text{bran}$$

Limbajul și formulele PL

□ Limbajul PL

- variabile propoziționale: $Var = \{p, q, v, \dots\}$
- conectori logici: \neg (unar), \rightarrow , \wedge , \vee , \leftrightarrow (binari)

□ Formulele PL

$var ::= p \mid q \mid v \mid \dots$

$form ::= var \mid (\neg form) \mid form \wedge form \mid form \vee form$
 $\mid form \rightarrow form \mid form \leftrightarrow form$

Limbajul și formulele PL

□ Limbajul PL

- variabile propoziționale: $Var = \{p, q, v, \dots\}$
- conectori logici: \neg (unar), \rightarrow , \wedge , \vee , \leftrightarrow (binari)

□ Formulele PL

$$\begin{aligned} var &::= p \mid q \mid v \mid \dots \\ form &::= var \mid (\neg form) \mid form \wedge form \mid form \vee form \\ &\quad \mid form \rightarrow form \mid form \leftrightarrow form \end{aligned}$$

Exemplu

- **Nu sunt formule:** $v_1 \neg \rightarrow (v_2)$, $\neg v_1 v_2$
- **Sunt formule:** $((v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow (\neg v_1))$, $(\neg(v_1 \rightarrow v_2))$

Limbajul și formulele PL

□ Limbajul PL

- variabile propoziționale: $Var = \{p, q, v, \dots\}$
- conectori logici: \neg (unar), \rightarrow , \wedge , \vee , \leftrightarrow (binari)

□ Formulele PL

$$\begin{aligned} var &::= p \mid q \mid v \mid \dots \\ form &::= var \mid (\neg form) \mid form \wedge form \mid form \vee form \\ &\quad \mid form \rightarrow form \mid form \leftrightarrow form \end{aligned}$$

Exemplu

- **Nu sunt formule:** $v_1 \neg \rightarrow (v_2)$, $\neg v_1 v_2$
- **Sunt formule:** $((v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow (\neg v_1))$, $(\neg(v_1 \rightarrow v_2))$
- Notăm cu *Form* mulțimea formulelor.

Limbajul și formulele PL

□ Limbajul PL

- variabile propoziționale: $Var = \{p, q, v, \dots\}$
- conectori logici: \neg (unar), \rightarrow , \wedge , \vee , \leftrightarrow (binari)

□ Formulele PL

$$\begin{aligned} var &::= p \mid q \mid v \mid \dots \\ form &::= var \mid (\neg form) \mid form \wedge form \mid form \vee form \\ &\quad \mid form \rightarrow form \mid form \leftrightarrow form \end{aligned}$$

- Conectorii sunt împărțiți în conectori **de bază** și conectori **derivați** (în funcție de formalism).
- Legături între conectori:

$$\begin{aligned} \varphi \vee \psi &::= \neg \varphi \rightarrow \psi \\ \varphi \wedge \psi &::= \neg(\varphi \rightarrow \neg \psi) \\ \varphi \leftrightarrow \psi &::= (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi) \end{aligned}$$

Sintaxa și semantica

Un sistem logic are două componente:

- Sintaxa

- Semantica

Sintaxa și semantica

Un sistem logic are două componente:

□ Sintaxa

- noțiuni sintactice: demonstrație, teoremă
- notăm prin $\vdash \varphi$ faptul că φ este teoremă
- notăm prin $\Gamma \vdash \varphi$ faptul că formula φ este demonstrabilă din mulțimea de formule Γ

□ Semantica

Sintaxa și semantica

Un sistem logic are două componente:

□ Sintaxa

- noțiuni sintactice: demonstrație, teoremă
- notăm prin $\vdash \varphi$ faptul că φ este teoremă
- notăm prin $\Gamma \vdash \varphi$ faptul că formula φ este demonstrabilă din mulțimea de formule Γ

□ Semantica

- noțiuni semantice: adevăr, model, tautologie (formulă universal adevărată)
- notăm prin $\models \varphi$ faptul că φ este tautologie
- notăm prin $\Gamma \models \varphi$ faptul că formula φ este adevărată atunci când toate formulele din mulțimea Γ sunt adevărate

Exemplu

Formalizați următorul raționament:

If winter is coming and Ned is not alive then Robb is lord of Winterfell. Winter is coming. Rob is not lord of Winterfell. Then Ned is alive.

Logica propozițională

Exemplu

Formalizați următorul raționament:

If winter is coming and Ned is not alive then Robb is lord of Winterfell. Winter is coming. Rob is not lord of Winterfell. Then Ned is alive.

O posibilă formalizare este următoarea:

p = winter is coming

q = Ned is alive

r = Robb is lord of Winterfel

Logica propozițională

Exemplu

Formalizați următorul raționament:

If winter is coming and Ned is not alive then Robb is lord of Winterfell. Winter is coming. Rob is not lord of Winterfell. Then Ned is alive.

O posibilă formalizare este următoarea:

p = winter is coming

q = Ned is alive

r = Robb is lord of Winterfel

$\{(p \wedge \neg q) \rightarrow r, p, \neg r\} \models q$

- Mulțimea valorilor de adevăr este $\{0, 1\}$ pe care considerăm următoarele operații:

x	$\neg x$
0	1
1	0

$$x \vee y := \max\{x, y\}$$

x	y	$x \rightarrow y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$x \wedge y := \min\{x, y\}$$

Semantica PL

- o funcție $e : Var \rightarrow \{0, 1\}$ se numește **evaluare** (**interpretare**)
- pentru orice evaluare $e : Var \rightarrow \{0, 1\}$ există o unică funcție $e^+ : Form \rightarrow \{0, 1\}$ care verifică următoarele proprietăți:
 - $e^+(v) = e(v)$
 - $e^+(\neg\varphi) = \neg e^+(\varphi)$
 - $e^+(\varphi \rightarrow \psi) = e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\psi)$
 - $e^+(\varphi \wedge \psi) = e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)$
 - $e^+(\varphi \vee \psi) = e^+(\varphi) \vee e^+(\psi)$

oricare ar fi $v \in Var$ și $\varphi, \psi \in Form$.

Semantica PL

- o funcție $e : Var \rightarrow \{0, 1\}$ se numește **evaluare** (**interpretare**)
- pentru orice evaluare $e : Var \rightarrow \{0, 1\}$ există o unică funcție $e^+ : Form \rightarrow \{0, 1\}$ care verifică următoarele proprietăți:
 - $e^+(v) = e(v)$
 - $e^+(\neg\varphi) = \neg e^+(\varphi)$
 - $e^+(\varphi \rightarrow \psi) = e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\psi)$
 - $e^+(\varphi \wedge \psi) = e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)$
 - $e^+(\varphi \vee \psi) = e^+(\varphi) \vee e^+(\psi)$

oricare ar fi $v \in Var$ și $\varphi, \psi \in Form$.

Exemplu

Dacă $e(p) = 0$ și $e(q) = 1$ atunci

$$e^+(p \vee (p \rightarrow q)) = e^+(p) \vee e^+(p \rightarrow q) = e(p) \vee (e(p) \rightarrow e(q)) = 1$$

Semantica PL

Considerăm $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \text{Form}$.

Semantica PL

Considerăm $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \text{Form}$.

- O evaluare $e : \text{Var} \rightarrow \{0, 1\}$ este **model** al formulei φ dacă $e^+(\varphi) = 1$. Evaluarea e este **model** al lui Γ dacă $e^+(\Gamma) = \{1\}$, i.e. $e^+(\gamma) = 1$ oricare $\gamma \in \Gamma$.

Semantica PL

Considerăm $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \text{Form}$.

- O evaluare $e : \text{Var} \rightarrow \{0, 1\}$ este **model** al formulei φ dacă $e^+(\varphi) = 1$. Evaluarea e este **model** al lui Γ dacă $e^+(\Gamma) = \{1\}$, i.e. $e^+(\gamma) = 1$ oricare $\gamma \in \Gamma$.
- O formulă φ este **satisfiabilă** dacă are un model. O mulțime Γ de formule este **satisfiabilă** dacă are un model.

Semantica PL

Considerăm $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \text{Form}$.

- O evaluare $e : \text{Var} \rightarrow \{0, 1\}$ este **model** al formulei φ dacă $e^+(\varphi) = 1$. Evaluarea e este **model** al lui Γ dacă $e^+(\Gamma) = \{1\}$, i.e. $e^+(\gamma) = 1$ oricare $\gamma \in \Gamma$.
- O formulă φ este **satisfiabilă** dacă are un model. O mulțime Γ de formule este **satisfiabilă** dacă are un model.
- O formulă φ este **tautologie** (**validă**, **universal adevărată**) dacă $e^+(\varphi) = 1$ pentru orice evaluare $e : \text{Var} \rightarrow \{0, 1\}$.
Notăm prin $\models \varphi$ faptul că φ este o tautologie.

Semantica PL

Considerăm $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \text{Form}$.

- O evaluare $e : \text{Var} \rightarrow \{0, 1\}$ este **model** al formulei φ dacă $e^+(\varphi) = 1$. Evaluarea e este **model** al lui Γ dacă $e^+(\Gamma) = \{1\}$, i.e. $e^+(\gamma) = 1$ oricare $\gamma \in \Gamma$.
- O formulă φ este **satisfiabilă** dacă are un model. O mulțime Γ de formule este **satisfiabilă** dacă are un model.
- O formulă φ este **tautologie** (**validă**, **universal adevărată**) dacă $e^+(\varphi) = 1$ pentru orice evaluare $e : \text{Var} \rightarrow \{0, 1\}$.
Notăm prin $\models \varphi$ faptul că φ este o tautologie.
- O formulă φ este **Γ -tautologie** (**consecință semantică a lui Γ**) dacă orice model al lui Γ este și model pentru φ , i.e. $e^+(\Gamma) = \{1\}$ implică $e^+(\varphi) = 1$ pentru orice evaluare $e : \text{Var} \rightarrow \{0, 1\}$.
Notăm prin $\Gamma \models \varphi$ faptul că φ este o Γ -tautologie.

Semantica PL

Cum verificăm că o formulă este tautologie: $\models \varphi$?

- Fie v_1, \dots, v_n variabilele care apar în φ .
- Cele 2^n evaluări posibile e_1, \dots, e_{2^n} pot fi scrise într-un tabel:

Semantica PL

Cum verificăm că o formulă este tautologie: $\models \varphi$?

- Fie v_1, \dots, v_n variabilele care apar în φ .
- Cele 2^n evaluări posibile e_1, \dots, e_{2^n} pot fi scrise într-un tabel:

v_1	v_2	\dots	v_n	φ
$e_1(v_1)$	$e_1(v_2)$	\dots	$e_1(v_n)$	$e_1^+(\varphi)$
$e_2(v_1)$	$e_2(v_2)$	\dots	$e_2(v_n)$	$e_2^+(\varphi)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$e_{2^n}(v_1)$	$e_{2^n}(v_2)$	\dots	$e_{2^n}(v_n)$	$e_{2^n}^+(\varphi)$

Fiecare evaluare corespunde unei linii din tabel!

Semantica PL

Cum verificăm că o formulă este tautologie: $\models \varphi$?

- Fie v_1, \dots, v_n variabilele care apar în φ .
- Cele 2^n evaluări posibile e_1, \dots, e_{2^n} pot fi scrise într-un tabel:

v_1	v_2	\dots	v_n	φ
$e_1(v_1)$	$e_1(v_2)$	\dots	$e_1(v_n)$	$e_1^+(\varphi)$
$e_2(v_1)$	$e_2(v_2)$	\dots	$e_2(v_n)$	$e_2^+(\varphi)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$e_{2^n}(v_1)$	$e_{2^n}(v_2)$	\dots	$e_{2^n}(v_n)$	$e_{2^n}^+(\varphi)$

Fiecare evaluare corespunde unei linii din tabel!

- $\models \varphi$ dacă și numai dacă $e_1^+(\varphi) = \dots = e_{2^n}^+(\varphi) = 1$

Verificarea problemei consecinței logice

- În principiu, putem verifica problema consecinței logice construind un **tabel de adevăr**, cu câte o linie pentru fiecare interpretare posibilă.

Verificarea problemei consecinței logice

- În principiu, putem verifica problema consecinței logice construind un **tabel de adevăr**, cu câte o linie pentru fiecare interpretare posibilă.
- În cazul în care formula conține n variabile, tabelul de adevăr are 2^n rânduri. Această metodă este atât de costisitoare computațional (**timp exponențial**).

Verificarea problemei consecinței logice

- În principiu, putem verifica problema consecinței logice construind un **tabel de adevăr**, cu câte o linie pentru fiecare interpretare posibilă.
- În cazul în care formula conține n variabile, tabelul de adevăr are 2^n rânduri. Această metodă este atât de costisitoare computațional (**timp exponențial**).

Este posibil să decidem problema consecinței logice în cazul propozițional printr-un algoritm care să funcționeze în timp polinomial?

Verificarea problemei consecinței logice

- În principiu, putem verifica problema consecinței logice construind un **tabel de adevăr**, cu câte o linie pentru fiecare interpretare posibilă.
- În cazul în care formula conține n variabile, tabelul de adevăr are 2^n rânduri. Această metodă este atât de costisitoare computațional (**timp exponențial**).
- **Problemă deschisă de un milion de dolari:**

Este posibil să decidem problema consecinței logice în cazul propozițional printr-un algoritm care să funcționeze în timp polinomial?

Echivalent, este adevărată $P = NP$?

(Institutul de Matematica Clay – Millennium Prize Problems)

Verificarea problemei consecinței logice

- În principiu, putem verifica problema consecinței logice construind un **tabel de adevăr**, cu câte o linie pentru fiecare interpretare posibilă.
- În cazul în care formula conține n variabile, tabelul de adevăr are 2^n rânduri. Această metodă este atât de costisitoare computațional (**timp exponențial**).
- **Problemă deschisă de un milion de dolari:**

Este posibil să decidem problema consecinței logice în cazul propozițional printr-un algoritm care să funcționeze în timp polinomial?

Echivalent, este adevărată $P = NP$?

(Institutul de Matematica Clay – Millennium Prize Problems)

- **SAT** este problema satisfiabilității în calculul propozițional clasic. **SAT-solverele** sunt bazate pe metode sintactice.

Sisteme deductive pentru calculul propozițional clasic:

- Sistemul Hilbert
- Rezoluție
- Deducția naturală
- Calculul cu secvenți

Sistemul Hilbert

□ Oricare ar fi $\varphi, \psi, \chi \in Form$ următoarele formule sunt **axiome**:

(A1) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

(A2) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$

(A3) $(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$.

□ Regula de deducție este **modus ponens**: $\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi} \text{MP}$

Sistemul Hilbert

- Oricare ar fi $\varphi, \psi, \chi \in \text{Form}$ următoarele formule sunt **axiome**:

(A1) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

(A2) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$

(A3) $(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$.

- Regula de deducție este **modus ponens**: $\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi} \text{MP}$

- O **demonstrație** pentru φ este o secvență de formule $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ astfel încât $\gamma_n = \varphi$ și, pentru fiecare $i \in \{1, \dots, n\}$, una din următoarele condiții este satisfăcută:

- γ_i este axiomă,

- γ_i se obține din formulele anterioare prin MP:
există $j, k < i$ astfel încât $\gamma_j = \gamma_k \rightarrow \gamma_i$

Sistemul Hilbert

- Oricare ar fi $\varphi, \psi, \chi \in \text{Form}$ următoarele formule sunt **axiome**:

(A1) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

(A2) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$

(A3) $(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$.

- Regula de deducție este **modus ponens**:
$$\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi} \text{MP}$$

- O **demonstrație** pentru φ este o secvență de formule $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ astfel încât $\gamma_n = \varphi$ și, pentru fiecare $i \in \{1, \dots, n\}$, una din următoarele condiții este satisfăcută:

- γ_i este axiomă,

- γ_i se obține din formulele anterioare prin MP:
există $j, k < i$ astfel încât $\gamma_j = \gamma_k \rightarrow \gamma_i$

- O formulă φ este **teoremă** dacă are o demonstrație.
Notăm prin $\vdash \varphi$ faptul că φ este teoremă.

Sistemul Hilbert

Fie $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \text{Form}$.

- O **demonstrație** din ipotezele Γ (sau Γ -demonstrație) pentru φ este o secvență de formule $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ astfel încât $\gamma_n = \varphi$ și, pentru fiecare $i \in \{1, \dots, n\}$, una din următoarele condiții este satisfăcută:
 - γ_i este axiomă,
 - $\gamma_i \in \Gamma$
 - γ_i se obține din formulele anterioare prin MP:
există $j, k < i$ astfel încât $\gamma_j = \gamma_k \rightarrow \gamma_i$
- O formulă φ este **Γ -teoremă** dacă are o Γ -demonstrație.
Notăm prin $\Gamma \vdash \varphi$ faptul că φ este o Γ -teoremă

Sistemul Hilbert

Teorema deducției TD (Herbrand, 1930)

Fie $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \text{Form}$. Atunci

$\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ dacă și numai dacă $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$

Sistemul Hilbert

Teorema deducției TD (Herbrand, 1930)

Fie $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \text{Form}$. Atunci

$$\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ dacă și numai dacă } \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$$

Exemplu

Arătați că $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$

Sistemul Hilbert

Teorema deducției TD (Herbrand, 1930)

Fie $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \text{Form}$. Atunci

$$\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ dacă și numai dacă } \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$$

Exemplu

Arătați că $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$

(1) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \varphi$ (ipoteza)

Sistemul Hilbert

Teorema deducției TD (Herbrand, 1930)

Fie $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \text{Form}$. Atunci

$$\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ dacă și numai dacă } \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$$

Exemplu

Arătați că $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$

- (1) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \varphi$ (ipoteza)
- (2) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \varphi \rightarrow \psi$ (ipoteza)

Sistemul Hilbert

Teorema deducției TD (Herbrand, 1930)

Fie $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \text{Form}$. Atunci

$$\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ dacă și numai dacă } \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$$

Exemplu

Arătați că $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$

- (1) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \varphi$ (ipoteza)
- (2) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \varphi \rightarrow \psi$ (ipoteza)
- (3) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \psi$ (1),(2), MP

Sistemul Hilbert

Teorema deducției TD (Herbrand, 1930)

Fie $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \text{Form}$. Atunci

$$\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ dacă și numai dacă } \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$$

Exemplu

Arătați că $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$

- (1) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \varphi$ (ipoteza)
- (2) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \varphi \rightarrow \psi$ (ipoteza)
- (3) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \psi$ (1),(2), MP
- (4) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \psi \rightarrow \chi$ (ipoteza)

Sistemul Hilbert

Teorema deducției TD (Herbrand, 1930)

Fie $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \text{Form}$. Atunci

$$\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ dacă și numai dacă } \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$$

Exemplu

Arătați că $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$

- (1) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \varphi$ (ipoteza)
- (2) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \varphi \rightarrow \psi$ (ipoteza)
- (3) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \psi$ (1),(2), MP
- (4) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \psi \rightarrow \chi$ (ipoteza)
- (5) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \chi$ (3),(4), MP

Sistemul Hilbert

Teorema deducției TD (Herbrand, 1930)

Fie $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \text{Form}$. Atunci

$\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ dacă și numai dacă $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$

Exemplu

Arătați că $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$

- (1) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \varphi$ (ipoteza)
- (2) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \varphi \rightarrow \psi$ (ipoteza)
- (3) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \psi$ (1),(2), MP
- (4) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \psi \rightarrow \chi$ (ipoteza)
- (5) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \chi$ (3),(4), MP
- (6) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi\} \vdash \varphi \rightarrow \chi$ TD

Sistemul Hilbert

Teorema deducției TD (Herbrand, 1930)

Fie $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \text{Form}$. Atunci

$\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ dacă și numai dacă $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$

Exemplu

Arătați că $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$

- (1) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \varphi$ (ipoteza)
- (2) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \varphi \rightarrow \psi$ (ipoteza)
- (3) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \psi$ (1),(2), MP
- (4) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \psi \rightarrow \chi$ (ipoteza)
- (5) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \chi$ (3),(4), MP
- (6) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi\} \vdash \varphi \rightarrow \chi$ TD
- (7) $\{\varphi \rightarrow \psi\} \vdash (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$ TD

Sistemul Hilbert

Teorema deducției TD (Herbrand, 1930)

Fie $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \text{Form}$. Atunci

$$\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ dacă și numai dacă } \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$$

Exemplu

Arătați că $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$

- (1) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \varphi$ (ipoteza)
- (2) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \varphi \rightarrow \psi$ (ipoteza)
- (3) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \psi$ (1),(2), MP
- (4) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \psi \rightarrow \chi$ (ipoteza)
- (5) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \chi$ (3),(4), MP
- (6) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi\} \vdash \varphi \rightarrow \chi$ TD
- (7) $\{\varphi \rightarrow \psi\} \vdash (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$ TD
- (8) $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$ TD

Sistemul Hilbert

□ Oricare ar fi $\varphi, \psi, \chi \in \text{Form}$ următoarele formule sunt **axiome**:

(A1) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

(A2) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$

(A3) $(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi).$

□ Regula de deducție este **modus ponens**: $\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi} \text{MP}$

Teorema de completitudine

Γ -teoremele și Γ -tautologiile coincid, i.e.

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ dacă și numai dacă } \Gamma \models \varphi$$

oricare are fi $\Gamma \cup \{\varphi\} \in \text{Form}$.

În particular, $\vdash \varphi$ dacă și numai dacă $\models \varphi$.

(\Rightarrow) **Corectitudine**

(\Leftarrow) **Completitudine**

Reguli de deducție pentru PL

O regula de deducție are forma

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi_1, \dots, \Gamma_n \vdash \varphi_n}{\Gamma \vdash \varphi}$$

A demonstra o regulă de deducție derivată revine la a deduce concluzia $\Gamma \vdash \varphi$ din premisele $\Gamma_1 \vdash \varphi_1, \dots, \Gamma_n \vdash \varphi_n$.

Reguli de deducție pentru PL

O **regula de deducție** are forma

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi_1, \dots, \Gamma_n \vdash \varphi_n}{\Gamma \vdash \varphi}$$

A demonstra o regulă de deducție derivată revine la a deduce **concluzia** $\Gamma \vdash \varphi$ din **premisele** $\Gamma_1 \vdash \varphi_1, \dots, \Gamma_n \vdash \varphi_n$.

Exemplu

Folosind teorema deducției se demonstrează regula:

$$\frac{\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi}$$

Deducția naturală DN

Deducția naturală¹ pe scurt

- În **deducția naturală** deducem (demonstrăm) formule din alte formule folosind **reguli de deducție**.

¹M. Huth, M. Ryan, Logic in Computer Science: Modelling and Reasoning about Systems, Cambridge University Press New York, 2004.

Deducția naturală¹ pe scurt

- În **deducția naturală** deducem (demonstrăm) formule din alte formule folosind **reguli de deducție**.
- Numim **secvent** o expresie de forma

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$$

Formulele $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ se numesc **premise**, iar ψ se numește **concluzie**.

¹M. Huth, M. Ryan, Logic in Computer Science: Modelling and Reasoning about Systems, Cambridge University Press New York, 2004.

Deducția naturală¹ pe scurt

- În **deducția naturală** deducem (demonstrăm) formule din alte formule folosind **reguli de deducție**.
- Numim **secvent** o expresie de forma

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$$

Formulele $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ se numesc **premise**, iar ψ se numește **concluzie**.

- Un secvent este **valid** dacă există o demonstrație folosind regulile de deducție.

¹M. Huth, M. Ryan, Logic in Computer Science: Modelling and Reasoning about Systems, Cambridge University Press New York, 2004.

Deducția naturală¹ pe scurt

- În **deducția naturală** deducem (demonstrăm) formule din alte formule folosind **reguli de deducție**.
- Numim **secvent** o expresie de forma

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$$

Formulele $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ se numesc **premise**, iar ψ se numește **concluzie**.

- Un secvent este **valid** dacă există o demonstrație folosind regulile de deducție.
- O **teoremă** este o formulă ψ astfel încât $\vdash \psi$ (adică ψ poate fi demonstrată din mulțimea vidă de ipoteze).

¹M. Huth, M. Ryan, Logic in Computer Science: Modelling and Reasoning about Systems, Cambridge University Press New York, 2004.

Deducția naturală¹ pe scurt

- În **deducția naturală** deducem (demonstrăm) formule din alte formule folosind **reguli de deducție**.
- Numim **secvent** o expresie de forma

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$$

Formulele $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ se numesc **premise**, iar ψ se numește **concluzie**.

- Un secvent este **valid** dacă există o demonstrație folosind regulile de deducție.
- O **teoremă** este o formulă ψ astfel încât $\vdash \psi$ (adică ψ poate fi demonstrată din mulțimea vidă de ipoteze).
- Pentru fiecare conector logic vom avea reguli de introducere și reguli de eliminare.

¹M. Huth, M. Ryan, Logic in Computer Science: Modelling and Reasoning about Systems, Cambridge University Press New York, 2004.

Regulile pentru conjuncție

- Intuitiv, a demonstra $\varphi \wedge \psi$ revine la a demonstra φ și ψ . Obținem astfel regula

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} (\wedge i)$$

Eticheta $(\wedge i)$ înseamnă \wedge -introducere deoarece \wedge este introdus în concluzie.

Regulile pentru conjuncție

- Intuitiv, a demonstra $\varphi \wedge \psi$ revine la a demonstra φ și ψ . Obținem astfel regula

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} (\wedge i)$$

Eticheta $(\wedge i)$ înseamnă \wedge -introducere deoarece \wedge este introdus în concluzie.

- Regulile pentru \wedge -eliminare sunt:

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} (\wedge e_1) \quad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} (\wedge e_2)$$

Regulile pentru conjuncție

Exemplu

Demonstrați că secventul $p \wedge q, r \vdash q \wedge r$ este valid.

Regulile pentru conjuncție

Exemplu

Demonstrați că secventul $p \wedge q, r \vdash q \wedge r$ este valid.

Putem scrie demonstrația ca un **arbore**

$$\frac{\frac{p \wedge q}{q} \quad (\wedge e_2) \quad r}{q \wedge r} \quad (\wedge i)$$

Regulile pentru conjuncție

Exemplu

Demonstrați că secventul $p \wedge q, r \vdash q \wedge r$ este valid.

Putem scrie demonstrația ca un **arbore**

$$\frac{\frac{p \wedge q}{q} \text{ } (\wedge e_2) \quad r}{q \wedge r} \text{ } (\wedge i)$$

sau putem scrie demonstrația într-un **mod liniar** astfel:

1	$p \wedge q$	<i>premise</i>
2	r	<i>premise</i>

Regulile pentru conjuncție

Exemplu

Demonstrați că secventul $p \wedge q, r \vdash q \wedge r$ este valid.

Putem scrie demonstrația ca un **arbore**

$$\frac{\frac{p \wedge q}{q} \text{ } (\wedge e_2) \quad r}{q \wedge r} \text{ } (\wedge i)$$

sau putem scrie demonstrația într-un **mod liniar** astfel:

1	$p \wedge q$	<i>premise</i>
2	r	<i>premise</i>
3	q	$(\wedge e_2), 1$

Regulile pentru conjuncție

Exemplu

Demonstrați că secvențul $p \wedge q, r \vdash q \wedge r$ este valid.

Putem scrie demonstrația ca un **arbore**

$$\frac{\frac{p \wedge q}{q} \quad (\wedge e_2) \quad r}{q \wedge r} \quad (\wedge i)$$

sau putem scrie demonstrația într-un **mod liniar** astfel:

1	$p \wedge q$	<i>premise</i>
2	r	<i>premise</i>
3	q	$(\wedge e_2), 1$
4	$q \wedge r$	$(\wedge i), 3, 2$

Regulile pentru dubla negație

- Regulile $\neg\neg$ -introducere și $\neg\neg$ -eliminare sunt:

$$\frac{\neg\neg\varphi}{\varphi} (\neg\neg e) \qquad \frac{\varphi}{\neg\neg\varphi} (\neg\neg i)$$

Regulile pentru dubla negație

□ Regulile $\neg\neg$ -introducere și $\neg\neg$ -eliminare sunt:

$$\frac{\neg\neg\varphi}{\varphi} (\neg\neg e) \qquad \frac{\varphi}{\neg\neg\varphi} (\neg\neg i)$$

Example

Demonstrați că secventul $\neg\neg(q \wedge r) \vdash \neg\neg r$ este valid.

Regulile pentru dubla negație

□ Regulile $\neg\neg$ -introducere și $\neg\neg$ -eliminare sunt:

$$\frac{\neg\neg\varphi}{\varphi} (\neg\neg e) \qquad \frac{\varphi}{\neg\neg\varphi} (\neg\neg i)$$

Example

Demonstrați că secvențul $\neg\neg(q \wedge r) \vdash \neg\neg r$ este valid.

1	$\neg\neg(q \wedge r)$	<i>premise</i>
2	$q \wedge r$	$(\neg\neg e)1$
3	r	$(\wedge e_2)2$

Regulile pentru dubla negație

□ Regulile $\neg\neg$ -introducere și $\neg\neg$ -eliminare sunt:

$$\frac{\neg\neg\varphi}{\varphi} (\neg\neg e) \qquad \frac{\varphi}{\neg\neg\varphi} (\neg\neg i)$$

Example

Demonstrați că secvențul $\neg\neg(q \wedge r) \vdash \neg\neg r$ este valid.

1	$\neg\neg(q \wedge r)$	<i>premise</i>
2	$q \wedge r$	$(\neg\neg e)1$
3	r	$(\wedge e_2)2$
4	$\neg\neg r$	$(\neg\neg i)3$

Regulile pentru implicație: \rightarrow -eliminare

- Regula de \rightarrow -eliminare o știți deja:

Regulile pentru implicație: \rightarrow -eliminare

- Regula de \rightarrow -eliminare o știți deja: este *modus ponens*:

$$\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi} (\rightarrow e)$$

It takes real skill
to choke on air,
fall up stairs
and trip over
completely
nothing.



I have that skill...

Regulile pentru implicație: \rightarrow -introducere

- Intuitiv, a demonstra $\varphi \rightarrow \psi$ revine la a demonstra ψ în ipoteza φ , i.e. **presupunem temporar** φ și demonstrăm ψ .

Regulile pentru implicație: \rightarrow -introducere

- Intuitiv, a demonstra $\varphi \rightarrow \psi$ revine la a demonstra ψ în ipoteza φ , i.e. **presupunem temporar** φ și demonstrăm ψ .

Acest lucru se reprezintă astfel:

$$\frac{\begin{array}{|c|} \hline \varphi \\ \vdots \\ \psi \\ \hline \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi} (\rightarrow i)$$

Regulile pentru implicație: \rightarrow -introducere

- Intuitiv, a demonstra $\varphi \rightarrow \psi$ revine la a demonstra ψ în ipoteza φ , i.e. **presupunem temporar** φ și demonstrăm ψ .

Acest lucru se reprezintă astfel:

$$\frac{\begin{array}{|c|} \hline \varphi \\ \vdots \\ \psi \\ \hline \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi} (\rightarrow i)$$

- Cutia** (chenarul) are rostul de a marca scopul ipotezei φ : numai deducțiile din interiorul cutiei pot folosi φ .
- În momentul în care am obținut ψ , închidem cutia și deducem $\varphi \rightarrow \psi$ în afara cutiei.
- O ipoteză nu poate fi folosită în afara scopului său.

Regulile pentru implicație

Exemplu

Demonstrați teorema $\vdash (p \wedge q) \rightarrow p$

Regulile pentru implicație

Exemplu

Demonstrați teorema $\vdash (p \wedge q) \rightarrow p$

Vom considera $p \wedge q$ ca ipoteză temporară

$$\boxed{p \wedge q}$$

Regulile pentru implicație

Exemplu

Demonstrați teorema $\vdash (p \wedge q) \rightarrow p$

Vom considera $p \wedge q$ ca ipoteză temporară

$$\left| \frac{p \wedge q}{p} (\wedge e_1) \right|$$

Regulile pentru implicație

Exemplu

Demonstrați teorema $\vdash (p \wedge q) \rightarrow p$

Vom considera $p \wedge q$ ca ipoteză temporară

$$\boxed{\frac{p \wedge q}{p} (\wedge e_1)}$$

Regulile pentru implicație

Exemplu

Demonstrați teorema $\vdash (p \wedge q) \rightarrow p$

Vom considera $p \wedge q$ ca ipoteză temporară

$$\frac{\boxed{\frac{p \wedge q}{p} (\wedge e_1)}}{p \wedge q \rightarrow p} (\rightarrow i)$$

Regulile pentru implicație

Exemplu

Demonstrați teorema $\vdash (p \wedge q) \rightarrow p$

Putem scrie demonstrația într-un mod liniar în felul următor:

$$1 \quad \boxed{p \wedge q \qquad \textit{ipoteza}}$$

Regulile pentru implicație

Exemplu

Demonstrați teorema $\vdash (p \wedge q) \rightarrow p$

Putem scrie demonstrația într-un mod liniar în felul următor:

1	$p \wedge q$	<i>ipoteza</i>
2	p	$(\wedge e_1), 1$

Regulile pentru implicație

Exemplu

Demonstrați teorema $\vdash (p \wedge q) \rightarrow p$

Putem scrie demonstrația într-un mod liniar în felul următor:

1	$p \wedge q$	<i>ipoteza</i>
2	p	$(\wedge e_1), 1$
3	$p \wedge q \rightarrow p$	$(\rightarrow i), 1-2$

Regulile pentru implicație

Exemplu

Demonstrați teorema $\vdash p \rightarrow p$

Regulile pentru implicație

Exemplu

Demonstrați teorema $\vdash p \rightarrow p$

1	<table border="1"><tr><td>p</td><td><i>ipoteza</i></td></tr></table>	p	<i>ipoteza</i>
p	<i>ipoteza</i>		
2	$p \rightarrow p \quad (\rightarrow i), 1$		

Regulile pentru implicație

Exemplu

Demonstrați teorema $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$

Regulile pentru implicație

Exemplu

Demonstrați teorema $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$

1	$p \rightarrow q$	<i>ipoteza</i>
2	$q \rightarrow r$	<i>ipoteza</i>
3	p	<i>ipoteza</i>

Regulile pentru implicație

Exemplu

Demonstrați teorema $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$

1	$p \rightarrow q$	<i>ipoteza</i>
2	$q \rightarrow r$	<i>ipoteza</i>
3	p	<i>ipoteza</i>
4	q	$(\rightarrow e), 1, 3$
5	r	$(\rightarrow e), 2, 4$

Regulile pentru implicație

Exemplu

Demonstrați teorema $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$

1	$p \rightarrow q$	<i>ipoteza</i>
2	$q \rightarrow r$	<i>ipoteza</i>
3	p	<i>ipoteza</i>
4	q	$(\rightarrow e), 1, 3$
5	r	$(\rightarrow e), 2, 4$
6	$p \rightarrow r$	$(\rightarrow i), 3-5$

Regulile pentru implicație

Exemplu

Demonstrați teorema $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$

1	$p \rightarrow q$	<i>ipoteza</i>
2	$q \rightarrow r$	<i>ipoteza</i>
3	p	<i>ipoteza</i>
4	q	$(\rightarrow e), 1, 3$
5	r	$(\rightarrow e), 2, 4$
6	$p \rightarrow r$	$(\rightarrow i), 3-5$
7	$(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$	$(\rightarrow i), 2-6$

Regulile pentru implicație

Exemplu

Demonstrați teorema $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$

1	$p \rightarrow q$	<i>ipoteza</i>
2	$q \rightarrow r$	<i>ipoteza</i>
3	p	<i>ipoteza</i>
4	q	$(\rightarrow e), 1, 3$
5	r	$(\rightarrow e), 2, 4$
6	$p \rightarrow r$	$(\rightarrow i), 3-5$
7	$(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$	$(\rightarrow i), 2-6$
8	$(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$	$(\rightarrow i), 1-7$

Regulile "cutiilor"

- O cutie marchează scopul unei ipoteze temporare, ce poate fi folosită pentru a demonstra formulele din interiorul cutiei.

Regulile "cutiilor"

- O cutie marchează scopul unei ipoteze temporare, ce poate fi folosită pentru a demonstra formulele din interiorul cutiei.
- Cutiile pot fi incluse una în alta; se pot deschide cutii noi după închiderea celor vechi.

Regulile "cutiilor"

- O cutie marchează scopul unei ipoteze temporare, ce poate fi folosită pentru a demonstra formulele din interiorul cutiei.
- Cutiile pot fi incluse una în alta; se pot deschide cutii noi după închiderea celor vechi.
- Linia care urmează după închiderea unei cutii trebuie să conțină concluzia regulii pentru care a fost utilizată cutia.

Regulile "cutiilor"

- O cutie marchează scopul unei ipoteze temporare, ce poate fi folosită pentru a demonstra formulele din interiorul cutiei.
- Cutiile pot fi incluse una în alta; se pot deschide cutii noi după închiderea celor vechi.
- Linia care urmează după închiderea unei cutii trebuie să conțină concluzia regulii pentru care a fost utilizată cutia.
- Într-un punct al unei demonstrații se pot folosi formulele care au apărut anterior, cu excepția celor din interiorul cutiilor închise.

Regula pentru "copiere"

- La un pas al unei demonstrații poate fi copiată orice formulă demonstrată anterior.
- La un pas al unei demonstrații **nu** pot fi copiate formule din interiorul cutiilor care sunt închise în acel moment.

Regula pentru "copiere"

- La un pas al unei demonstrații poate fi copiată orice formulă demonstrată anterior.
- La un pas al unei demonstrații **nu** pot fi copiate formule din interiorul cutiilor care sunt închise în acel moment.

Exemplu

Demonstrați teorema $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$

Regula pentru "copiere"

- La un pas al unei demonstrații poate fi copiată orice formulă demonstrată anterior.
- La un pas al unei demonstrații **nu** pot fi copiate formule din interiorul cutiilor care sunt închise în acel moment.

Exemplu

Demonstrați teorema $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$

1	<table><tr><td>p</td><td><i>ipoteza</i></td></tr></table>	p	<i>ipoteza</i>		
p	<i>ipoteza</i>				
2	<table><tr><td><table><tr><td>q</td><td><i>ipoteza</i></td></tr></table></td><td></td></tr></table>	<table><tr><td>q</td><td><i>ipoteza</i></td></tr></table>	q	<i>ipoteza</i>	
<table><tr><td>q</td><td><i>ipoteza</i></td></tr></table>	q	<i>ipoteza</i>			
q	<i>ipoteza</i>				

Regula pentru "copiere"

- La un pas al unei demonstrații poate fi copiată orice formulă demonstrată anterior.
- La un pas al unei demonstrații **nu** pot fi copiate formule din interiorul cutiilor care sunt închise în acel moment.

Exemplu

Demonstrați teorema $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$

1	p	<i>ipoteza</i>
2	q	<i>ipoteza</i>
3	p	<i>copiere 1</i>

Regula pentru "copiere"

- La un pas al unei demonstrații poate fi copiată orice formulă demonstrată anterior.
- La un pas al unei demonstrații **nu** pot fi copiate formule din interiorul cutiilor care sunt închise în acel moment.

Exemplu

Demonstrați teorema $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$

1	p	<i>ipoteza</i>
2	q	<i>ipoteza</i>
3	p	<i>copiere 1</i>
4	$q \rightarrow p$	$(\rightarrow i), 2-3$

Regula pentru "copiere"

- La un pas al unei demonstrații poate fi copiată orice formulă demonstrată anterior.
- La un pas al unei demonstrații **nu** pot fi copiate formule din interiorul cutiilor care sunt închise în acel moment.

Exemplu

Demonstrați teorema $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$

1	p	<i>ipoteza</i>
2	q	<i>ipoteza</i>
3	p	<i>copiere 1</i>
4	$q \rightarrow p$	$(\rightarrow i), 2-3$
5	$p \rightarrow (q \rightarrow p)$	$(\rightarrow i), 1-4$

Regulile pentru disjuncție: \vee -introducere

- Intuitiv, a demonstra $\varphi \vee \psi$ revine la a demonstra φ sau ψ . În consecință, regulile de \vee -introducere sunt

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} (\vee i_1) \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi} (\vee i_2)$$

Regulile pentru disjuncție: \vee -introducere

- Intuitiv, a demonstra $\varphi \vee \psi$ revine la a demonstra φ sau ψ . În consecință, regulile de \vee -introducere sunt

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} (\vee i_1) \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi} (\vee i_2)$$

Exemplu

Demonstrați că secventul $q \rightarrow r \vdash q \rightarrow (r \vee p)$ este valid.

Regulile pentru disjuncție: \vee -introducere

- Intuitiv, a demonstra $\varphi \vee \psi$ revine la a demonstra φ sau ψ . În consecință, regulile de \vee -introducere sunt

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} (\vee i_1) \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi} (\vee i_2)$$

Exemplu

Demonstrați că secvențul $q \rightarrow r \vdash q \rightarrow (r \vee p)$ este valid.

1	$q \rightarrow r$	<i>premișă</i>
2	q	<i>ipoteză</i>
3	r	$(\rightarrow e), 1, 2$
4	$r \vee p$	$(\vee i_1), 3$
5	$q \rightarrow (r \vee p)$	$(\rightarrow i), 2-4$

Regulile pentru disjuncție: \vee -eliminare

- Cum procedăm pentru a demonstra χ știind $\varphi \vee \psi$?

Trebuie să analizăm două cazuri:

- presupunem φ și demonstrăm χ
- presupunem ψ și demonstrăm χ

Astfel, dacă am demonstrat $\varphi \vee \psi$ putem să deducem χ deoarece cazurile de mai sus acoperă toate situațiile posibile.

Regulile pentru disjuncție: \vee -eliminare

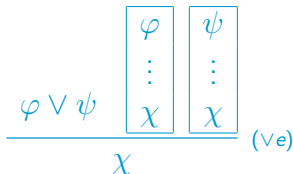
- Cum procedăm pentru a demonstra χ știind $\varphi \vee \psi$?

Trebuie să analizăm două cazuri:

- presupunem φ și demonstrăm χ
- presupunem ψ și demonstrăm χ

Astfel, dacă am demonstrat $\varphi \vee \psi$ putem să deducem χ deoarece cazurile de mai sus acoperă toate situațiile posibile.

- Regula \vee -eliminare reflectă acest argument:



Regulile pentru disjuncție

Exemplu

Demonstrați că secventul $q \rightarrow r \vdash (p \vee q) \rightarrow (p \vee r)$ este valid.

1	$q \rightarrow r$	<i>premise</i>
2	$p \vee q$	<i>ipoteza</i>
3	p	<i>ipoteza</i>
4	$p \vee r$	$(\vee i_1), 3$
5	q	<i>ipoteza</i>
6	r	$(\rightarrow e), 1, 5$
7	$p \vee r$	$(\vee i_2), 6$
8	$p \vee r$	$(\vee e), 2, 3-4, 5-7$
9	$p \vee q \rightarrow p \vee r$	$(\rightarrow i), 2-8$

Regulile pentru negație

- Pentru orice φ , formulele $\varphi \wedge \neg\varphi$ și $\neg\varphi \wedge \varphi$ se numesc **contradicții**.
O contradicție arbitrară va fi notată \perp .

Regulile pentru negație

- Pentru orice φ , formulele $\varphi \wedge \neg\varphi$ și $\neg\varphi \wedge \varphi$ se numesc **contradicții**.
O contradicție arbitrară va fi notată \perp .
- Faptul că dintr-o contradicție se poate deduce orice este reprezentat printr-o regulă specială:

$$\frac{\perp}{\varphi} (\perp e)$$

Regulile pentru negație

- Pentru orice φ , formulele $\varphi \wedge \neg\varphi$ și $\neg\varphi \wedge \varphi$ se numesc **contradicții**. O contradicție arbitrară va fi notată \perp .
- Faptul că dintr-o contradicție se poate deduce orice este reprezentat printr-o regulă specială:

$$\frac{\perp}{\varphi} (\perp e)$$

- Regulile de \neg -**eliminare** și \neg -**introducere** sunt:

$$\frac{\varphi \quad \neg\varphi}{\perp} (\neg e)$$

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c} \varphi \\ \vdots \\ \perp \end{array}}}{\neg\varphi} (\neg i)$$

Regulile pentru negație

Exemplu

Demonstrați că secventul $p \rightarrow \neg p \vdash \neg p$ este valid.

1	$p \rightarrow \neg p$	<i>premise</i>
2	p	<i>ipoteza</i>
3	$\neg p$	$(\rightarrow e), 1, 2$
4	\perp	$(\neg e), 2, 3$
5	$\neg p$	$(\neg i), 2-4$

Regulile DN

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} (\wedge i)$$

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c} \varphi \\ \vdots \\ \psi \end{array}}}{\varphi \rightarrow \psi} (\rightarrow i)$$

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} (\vee i_1)$$

$$\frac{\psi}{\varphi \vee \psi} (\vee i_2)$$

$$\frac{\varphi}{\neg \neg \varphi} (\neg \neg i)$$

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c} \varphi \\ \vdots \\ \perp \end{array}}}{\neg \varphi} (\neg i)$$

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} (\wedge e_1)$$

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} (\wedge e_2)$$

$$\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi} (\rightarrow e)$$

$$\frac{\varphi \vee \psi \quad \boxed{\begin{array}{c} \varphi \\ \vdots \\ \chi \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c} \psi \\ \vdots \\ \chi \end{array}}}{\chi} (\vee e)$$

$$\frac{\neg \neg \varphi}{\varphi} (\neg \neg e)$$

$$\frac{\varphi \quad \neg \varphi}{\perp} (\neg e)$$

$$\frac{\perp}{\varphi} (\perp e)$$

Reguli derivate

- Următoarele reguli pot fi derivate din regulile deducției naturale:

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi \quad \neg\psi}{\neg\varphi} \text{ MT}$$

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c} \neg\varphi \\ \vdots \\ \perp \end{array}}}{\varphi} \text{ RAA}$$

$$\frac{}{\varphi \vee \neg\varphi} \text{ TND}$$

Reguli derivate: TND

Exemplu

Regula $\frac{}{\varphi \vee \neg\varphi}$ TND este derivată în deducția naturală.

1	$\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$	<i>ipoteza</i>
2	φ	<i>ipoteza</i>
3	$\varphi \vee \neg\varphi$	$(\vee i_1), 2$
4	\perp	$(\neg e), 3, 1$
5	$\neg\varphi$	$(\neg i), 2-4$
6	$\varphi \vee \neg\varphi$	$(\vee i_2), 5$
7	\perp	$(\neg e), 6, 1$
8	$\neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$	$(\neg i), 1-7$
9	$\varphi \vee \neg\varphi$	$(\neg\neg e), 8$

Reguli derivate: TND

Exemplu

Regula $\frac{}{\varphi \vee \neg\varphi}$ TND este derivată în deducția naturală.

1	$\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$	<i>ipoteza</i>
2	φ	<i>ipoteza</i>
3	$\varphi \vee \neg\varphi$	$(\vee i_1), 2$
4	\perp	$(\neg e), 3, 1$
5	$\neg\varphi$	$(\neg i), 2-4$
6	$\varphi \vee \neg\varphi$	$(\vee i_2), 5$
7	\perp	$(\neg e), 6, 1$
8	$\neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$	$(\neg i), 1-7$
9	$\varphi \vee \neg\varphi$	$(\neg\neg e), 8$

MT și RAA sunt exerciții pentru seminar!

Corectitudinea și completitudinea DN

Corectitudinea DN

Teoremă

Deducția naturală este corectă, i.e.

dacă $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi$ este valid atunci $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \varphi$

oricare ar fi $n \geq 0$ și formulele $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi$.

Corectitudinea DN

Teoremă

Deducția naturală este corectă, i.e.

dacă $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi$ este valid atunci $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \varphi$

oricare ar fi $n \geq 0$ și formulele $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi$.

Demonstrație

Din ipoteză știm că există o demonstrație pentru φ din ipotezele $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ folosind regulile deducției naturale.

Corectitudinea DN

Teoremă

Deducția naturală este corectă, i.e.

dacă $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi$ este valid atunci $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \varphi$

oricare ar fi $n \geq 0$ și formulele $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi$.

Demonstrație

Din ipoteză știm că există o demonstrație pentru φ din ipotezele $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ folosind regulile deducției naturale.

Fie k numărul de linii dintr-o demonstrație în forma liniară.

Corectitudinea DN

Teoremă

Deducția naturală este corectă, i.e.

dacă $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi$ este valid atunci $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \varphi$

oricare ar fi $n \geq 0$ și formulele $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi$.

Demonstrație

Din ipoteză știm că există o demonstrație pentru φ din ipotezele $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ folosind regulile deducției naturale.

Fie k numărul de linii dintr-o demonstrație în forma liniară. Prin inducție după $k \geq 1$ vom arăta că

oricare ar fi $n \geq 0$ și $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi$ formule, dacă $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi$ are o demonstrație de lungime $k \geq 1$ atunci $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \varphi$,

(orice secvență care are o demonstrație de lungime k este corect).

Corectitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Atenție! Facem inducție după **lungimea demonstrației**, numărul de premise este arbitrar.

Demonstrație (cont.)

Atenție! Facem inducție după **lungimea demonstrației**, numărul de premise este arbitrar. *Cazul* $k = 1$. În acest caz demonstrația este

$$1 \quad \varphi \quad \textit{premise}$$

ceea ce înseamnă că secventul inițial este $\varphi \vdash \varphi$.

Este evident că $\varphi \models \varphi$

Demonstrație (cont.)

Cazul de inducție. Vom presupune că:

oricare ar fi $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi$, dacă $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi$ are o demonstrație de lungime $< k$ atunci $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \varphi$

și vom demonstra că proprietatea este adevărată pentru secvenți cu demonstrații de lungime k .

Corectitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Cazul de inducție. Vom presupune că:

oricare ar fi $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi$, dacă $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi$ are o demonstrație de lungime $< k$ atunci $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \varphi$

și vom demonstra că proprietatea este adevărată pentru secvenți cu demonstrații de lungime k .

Fie (R) ultima regulă care se aplică în demonstrație, adică

1	φ_1	<i>premise</i>
	\vdots	
n	φ_n	<i>premise</i>
	\vdots	
k	φ	(R)

Demonstrație (cont.)

Presupunem că ultima regulă a fost $(\wedge i)$. Aceasta înseamnă că

$$\varphi = \psi \wedge \chi$$

Demonstrație (cont.)

Presupunem că ultima regulă a fost $(\wedge i)$. Aceasta înseamnă că

$$\varphi = \psi \wedge \chi$$

1 φ_1 *premise*

⋮

n φ_n *premise*

⋮

k_1 ψ

⋮

k_2 χ

k $\psi \wedge \chi$ $(\wedge i)_{k_1, k_2}$

Demonstrație (cont.)

Presupunem că ultima regulă a fost $(\wedge i)$. Aceasta înseamnă că

$$\varphi = \psi \wedge \chi$$

1 φ_1 *premise*

\vdots

n φ_n *premise*

\vdots

k_1 ψ

\vdots

k_2 χ

k $\psi \wedge \chi$ $(\wedge i)_{k_1, k_2}$

Se observă că secvenții

$\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$ și

$\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \chi$

au demonstrații de lungime $< k$.

Corectitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Presupunem că ultima regulă a fost $(\wedge i)$. Aceasta înseamnă că

$$\varphi = \psi \wedge \chi$$

1 φ_1 *premise*

\vdots

n φ_n *premise*

\vdots

k_1 ψ

\vdots

k_2 χ

k $\psi \wedge \chi$ $(\wedge i)_{k_1, k_2}$

Se observă că secvenții

$\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$ și

$\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \chi$

au demonstrații de lungime $< k$.

Din ipoteza de inducție rezultă

$\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$ și

$\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \chi$

Corectitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Presupunem că ultima regulă a fost $(\wedge i)$. Aceasta înseamnă că

$$\varphi = \psi \wedge \chi$$

1 φ_1 *premise*

\vdots

n φ_n *premise*

\vdots

k_1 ψ

\vdots

k_2 χ

k $\psi \wedge \chi$ $(\wedge i)_{k_1, k_2}$

Se observă că secvenții

$\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$ și

$\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \chi$

au demonstrații de lungime $< k$.

Din ipoteza de inducție rezultă

$\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$ și

$\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \chi$ deci

$\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi \wedge \chi$

Corectitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Presupunem că ultima regulă a fost $(\rightarrow i)$. Aceasta înseamnă că

$$\varphi = \psi \rightarrow \chi$$

și ca în demonstrație există o cutie.

Corectitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Presupunem că ultima regulă a fost $(\rightarrow i)$. Aceasta înseamnă că

$$\varphi = \psi \rightarrow \chi$$

și ca în demonstrație există o cutie.

1 φ_1 *premișă*

\vdots

n φ_n *premișă*

\vdots

k_1 ψ *ipoteză*

\vdots

k_2 χ

k $\psi \rightarrow \chi$ $(\rightarrow i)_{k_1 - k_2}$

Corectitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Presupunem că ultima regulă a fost $(\rightarrow i)$. Aceasta înseamnă că

$$\varphi = \psi \rightarrow \chi$$

și ca în demonstrație există o cutie.

1 φ_1 *premise*

\vdots

n φ_n *premise*

\vdots

k_1 ψ *ipoteza*

\vdots

k_2 χ

k $\psi \rightarrow \chi$ $(\rightarrow i)_{k_1-k_2}$

Se observă că

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi \vdash \chi$$

are demonstrația de lungime $< k$.

Corectitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Presupunem că ultima regulă a fost $(\rightarrow i)$. Aceasta înseamnă că

$$\varphi = \psi \rightarrow \chi$$

și ca în demonstrație există o cutie.

1 φ_1 *premise*

⋮

n φ_n *premise*

⋮

k_1 ψ *ipoteza*

⋮

k_2 χ

k $\psi \rightarrow \chi$ $(\rightarrow i)_{k_1-k_2}$

Se observă că

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi \vdash \chi$$

are demonstrația de lungime $< k$.

Din ipoteza de inducție rezultă

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi \models \chi \quad (*)$$

Corectitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Putem acum să demonstrăm că $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \varphi$.

Demonstrație (cont.)

Putem acum să demonstrăm că $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \varphi$.

Fie $e: Var \rightarrow \{0, 1\}$ o evaluare astfel încât $e^+(\varphi_1) = \dots = e^+(\varphi_n) = 1$.
Vrem să arătăm că $e^+(\varphi) = 1$.

Deoarece $\varphi = \psi \rightarrow \chi$ considerăm două cazuri.

Dacă $e^+(\psi) = 0$ atunci $e^+(\varphi) = 0 \rightarrow e^+(\chi) = 1$.

Demonstrație (cont.)

Putem acum să demonstrăm că $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \varphi$.

Fie $e: Var \rightarrow \{0, 1\}$ o evaluare astfel încât $e^+(\varphi_1) = \dots = e^+(\varphi_n) = 1$.
Vrem să arătăm că $e^+(\varphi) = 1$.

Deoarece $\varphi = \psi \rightarrow \chi$ considerăm două cazuri.

Dacă $e^+(\psi) = 0$ atunci $e^+(\varphi) = 0 \rightarrow e^+(\chi) = 1$.

Dacă $e^+(\psi) = 1$ atunci e^+ este un model pentru formulele $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi$.
Din (*) rezultă ca $e^+(\chi) = 1$, deci $e^+(\varphi) = 1 \rightarrow 1 = 1$.

Corectitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Putem acum să demonstrăm că $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \varphi$.

Fie $e: Var \rightarrow \{0, 1\}$ o evaluare astfel încât $e^+(\varphi_1) = \dots = e^+(\varphi_n) = 1$.
Vrem să arătăm că $e^+(\varphi) = 1$.

Deoarece $\varphi = \psi \rightarrow \chi$ considerăm două cazuri.

Dacă $e^+(\psi) = 0$ atunci $e^+(\varphi) = 0 \rightarrow e^+(\chi) = 1$.

Dacă $e^+(\psi) = 1$ atunci e^+ este un model pentru formulele $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi$.
Din (*) rezultă ca $e^+(\chi) = 1$, deci $e^+(\varphi) = 1 \rightarrow 1 = 1$.

Am demonstrat că regula $(\rightarrow i)$ este corectă.

Corectitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Putem acum să demonstrăm că $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \models \varphi$.

Fie $e: \text{Var} \rightarrow \{0, 1\}$ o evaluare astfel încât $e^+(\varphi_1) = \dots = e^+(\varphi_n) = 1$.
Vrem să arătăm că $e^+(\varphi) = 1$.

Deoarece $\varphi = \psi \rightarrow \chi$ considerăm două cazuri.

Dacă $e^+(\psi) = 0$ atunci $e^+(\varphi) = 0 \rightarrow e^+(\chi) = 1$.

Dacă $e^+(\psi) = 1$ atunci e^+ este un model pentru formulele $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi$.
Din (*) rezultă ca $e^+(\chi) = 1$, deci $e^+(\varphi) = 1 \rightarrow 1 = 1$.

Am demonstrat că regula $(\rightarrow i)$ este corectă.

Pentru a finaliza demonstrația trebuie să arătăm că fiecare din celelalte reguli ale deducției naturale este corectă.



Notății

Pentru a demonstra ca DN este completă pentru PL facem următoarele notații:

Notatii

Pentru a demonstra ca DN este completă pentru PL facem următoarele notații:

□ Fie $e : Var \rightarrow \{0, 1\}$ evaluare. Pentru orice $v \in Var$ definim

$$v^e := \begin{cases} v & \text{dacă } e(v) = 1 \\ \neg v & \text{dacă } e(v) = 0 \end{cases}$$

□ $Var(\varphi) := \{v \in Var \mid v \text{ apare în } \varphi\}$ oricare φ formulă.

Completitudinea DN - rezultate ajutătoare

Propoziția 1

Fie φ este o formulă și $Var(\varphi) = \{v_1, \dots, v_n\}$. Pentru orice evaluare $e: Var \rightarrow \{0, 1\}$ sunt adevărate:

- $e^+(\varphi) = 1$ implică $\{v_1^e, \dots, v_n^e\} \vdash \varphi$ este valid,
- $e^+(\varphi) = 0$ implică $\{v_1^e, \dots, v_n^e\} \vdash \neg\varphi$ este valid.

Completitudinea DN - rezultate ajutătoare

Propoziția 1

Fie φ este o formulă și $Var(\varphi) = \{v_1, \dots, v_n\}$. Pentru orice evaluare $e: Var \rightarrow \{0, 1\}$ sunt adevărate:

- $e^+(\varphi) = 1$ implică $\{v_1^e, \dots, v_n^e\} \vdash \varphi$ este valid,
- $e^+(\varphi) = 0$ implică $\{v_1^e, \dots, v_n^e\} \vdash \neg\varphi$ este valid.

Propoziția 2

Oricare ar fi formulele $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi$,
dacă $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \varphi$ atunci $\models \varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow (\dots \rightarrow (\varphi_n \rightarrow \varphi) \dots))$.

Completitudinea DN - rezultate ajutătoare

Propoziția 1

Fie φ este o formulă și $Var(\varphi) = \{v_1, \dots, v_n\}$. Pentru orice evaluare $e: Var \rightarrow \{0, 1\}$ sunt adevărate:

- $e^+(\varphi) = 1$ implică $\{v_1^e, \dots, v_n^e\} \vdash \varphi$ este valid,
- $e^+(\varphi) = 0$ implică $\{v_1^e, \dots, v_n^e\} \vdash \neg\varphi$ este valid.

Propoziția 2

Oricare ar fi formulele $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi$,
dacă $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \varphi$ atunci $\models \varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow (\dots \rightarrow (\varphi_n \rightarrow \varphi) \dots))$.

Propoziția 3

Oricare ar fi formulele $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi$,
dacă $\vdash \varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow (\dots \rightarrow (\varphi_n \rightarrow \varphi) \dots))$ este valid,
atunci $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi$ este valid.

Completitudinea DN

Teoremă

Deducția naturală este completă, i.e.

dacă $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \varphi$ atunci $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi$ este valid

oricare ar fi formulele $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi$.

Completitudinea DN

Teoremă

Deducția naturală este completă, i.e.

dacă $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \varphi$ atunci $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi$ este valid

oricare ar fi formulele $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi$.

Demonstrație

Pasul 1. Dacă $\models \varphi$ atunci $\vdash \varphi$ este valid.

Completitudinea DN

Teoremă

Deducția naturală este completă, i.e.

dacă $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \varphi$ atunci $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi$ este valid

oricare ar fi formulele $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi$.

Demonstrație

Pasul 1. Dacă $\models \varphi$ atunci $\vdash \varphi$ este valid.

Pasul 2. Presupunem că $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \varphi$.

Completitudinea DN

Teoremă

Deducția naturală este completă, i.e.

dacă $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \varphi$ atunci $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi$ este valid

oricare ar fi formulele $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi$.

Demonstrație

Pasul 1. Dacă $\models \varphi$ atunci $\vdash \varphi$ este valid.

Pasul 2. Presupunem că $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \varphi$.

Din *Propoziția 2* deducem că $\models \varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow (\dots \rightarrow (\varphi_n \rightarrow \varphi) \dots))$.

Completitudinea DN

Teoremă

Deducția naturală este completă, i.e.

dacă $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \varphi$ atunci $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi$ este valid

oricare ar fi formulele $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi$.

Demonstrație

Pasul 1. Dacă $\models \varphi$ atunci $\vdash \varphi$ este valid.

Pasul 2. Presupunem că $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \varphi$.

Din *Propoziția 2* deducem că $\models \varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow (\dots \rightarrow (\varphi_n \rightarrow \varphi) \dots))$.

Aplicând *Pasul 1* obținem că $\vdash \varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow (\dots \rightarrow (\varphi_n \rightarrow \varphi) \dots))$ este valid.

Completitudinea DN

Teoremă

Deducția naturală este completă, i.e.

dacă $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \varphi$ atunci $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi$ este valid

oricare ar fi formulele $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi$.

Demonstrație

Pasul 1. Dacă $\models \varphi$ atunci $\vdash \varphi$ este valid.

Pasul 2. Presupunem că $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \varphi$.

Din *Propoziția 2* deducem că $\models \varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow (\dots \rightarrow (\varphi_n \rightarrow \varphi) \dots))$.

Aplicând *Pasul 1* obținem că $\vdash \varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow (\dots \rightarrow (\varphi_n \rightarrow \varphi) \dots))$ este valid. În consecință $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi$ este valid din *Propoziția 3*.

Completitudinea DN

Demonstrație (cont.)

În continuare demonstrăm *Pasul 1*.

Fie φ o tautologie, i.e. $\models \varphi$, astfel încât $Var(\varphi) = \{p_1, \dots, p_n\}$.

Completitudinea DN

Demonstrație (cont.)

În continuare demonstrăm *Pasul 1*.

Fie φ o tautologie, i.e. $\models \varphi$, astfel încât $Var(\varphi) = \{p_1, \dots, p_n\}$.

Oricare ar fi $e : Var \rightarrow \{0, 1\}$ știm că $e^+(\varphi) = 1$ deci, din *Propoziția 1*, rezultă că secvențul $\{p_1^e, \dots, p_n^e\} \vdash \varphi$ este valid.

Completitudinea DN

Demonstrație (cont.)

În continuare demonstrăm *Pasul 1*.

Fie φ o tautologie, i.e. $\models \varphi$, astfel încât $Var(\varphi) = \{p_1, \dots, p_n\}$.

Oricare ar fi $e : Var \rightarrow \{0, 1\}$ știm că $e^+(\varphi) = 1$ deci, din *Propoziția 1*, rezultă că secvențul $\{p_1^e, \dots, p_n^e\} \vdash \varphi$ este valid.

Deoarece există 2^n evaluări, i.e., tabelul de adevăr are 2^n linii, obținem 2^n demonstrații pentru φ , fiecare din aceste demonstrații având n premise.

Completitudinea DN

Demonstrație (cont.)

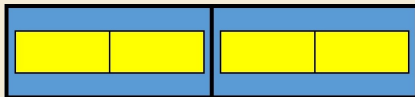
În continuare demonstrăm *Pasul 1*.

Fie φ o tautologie, i.e. $\models \varphi$, astfel încât $Var(\varphi) = \{p_1, \dots, p_n\}$.

Oricare ar fi $e : Var \rightarrow \{0, 1\}$ știm că $e^+(\varphi) = 1$ deci, din *Propoziția 1*, rezultă că secvențul $\{p_1^e, \dots, p_n^e\} \vdash \varphi$ este valid.

Deoarece există 2^n evaluări, i.e., tabelul de adevăr are 2^n linii, obținem 2^n demonstrații pentru φ , fiecare din aceste demonstrații având n premise.

Vom arăta în continuare, pe un exemplu simplu, cum se pot combina aceste 2^n demonstrații cu premise pentru a obține o demonstrație fără premise pentru φ .



Completitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Considerăm $\models \varphi$ și $n = 2$, i.e. $Var(\varphi) = \{p_1, p_2\}$.

De exemplu, puteți considera $\varphi = p_1 \wedge p_2 \rightarrow p_1$

Completitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Considerăm $\models \varphi$ și $n = 2$, i.e. $Var(\varphi) = \{p_1, p_2\}$.

De exemplu, puteți considera $\varphi = p_1 \wedge p_2 \rightarrow p_1$

Din *Propoziția 1* știm că următorii secvenți sunt valizi:

$$\begin{array}{ll} p_1, p_2 & \vdash \varphi \\ p_1, \neg p_2 & \vdash \varphi \\ \neg p_1, p_2 & \vdash \varphi \\ \neg p_1, \neg p_2 & \vdash \varphi \end{array}$$

Completitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Considerăm $\models \varphi$ și $n = 2$, i.e. $Var(\varphi) = \{p_1, p_2\}$.

De exemplu, puteți considera $\varphi = p_1 \wedge p_2 \rightarrow p_1$

Din *Propoziția 1* știm că următorii secvenți sunt valizi:

$$\begin{array}{l} p_1, p_2 \vdash \varphi \\ p_1, \neg p_2 \vdash \varphi \\ \neg p_1, p_2 \vdash \varphi \\ \neg p_1, \neg p_2 \vdash \varphi \end{array}$$

deci există demonstrațiile:

p_1	<i>ipoteza</i>
p_2	<i>ipoteza</i>
\vdots	
φ	

p_1	<i>ipoteza</i>
$\neg p_2$	<i>ipoteza</i>
\vdots	
φ	

$\neg p_1$	<i>ipoteza</i>
p_2	<i>ipoteza</i>
\vdots	
φ	

$\neg p_1$	<i>ipoteza</i>
$\neg p_2$	<i>ipoteza</i>
\vdots	
φ	

Completitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Combinăm cele patru demonstrații astfel:

Completitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Combinăm cele patru demonstrații astfel:

$$\frac{p_1 \vee \neg p_1}{\left[\begin{array}{l} p_1 \quad \textit{ipoteza} \end{array} \right]} \quad \frac{TND}{\left[\begin{array}{l} \neg p_1 \quad \textit{ipoteza} \end{array} \right]}$$

Completitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Combinăm cele patru demonstrații astfel:

$p_1 \vee \neg p_1$		TND	
p_1	<i>ipoteza</i>	$\neg p_1$	<i>ipoteza</i>
$p_2 \vee \neg p_2$	TND	$p_2 \vee \neg p_2$	TND
p_2 <i>ipoteza</i>	$\neg p_2$ <i>ipoteza</i>	p_2 <i>ipoteza</i>	$\neg p_2$ <i>ipoteza</i>

Completitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Combinăm cele patru demonstrații astfel:

$p_1 \vee \neg p_1$

p_1	<i>ipoteza</i>
$p_2 \vee \neg p_2$	<i>TND</i>
p_2 <i>ipoteza</i>	$\neg p_2$ <i>ipoteza</i>
\vdots	\vdots
φ	φ
φ	($\vee e$)

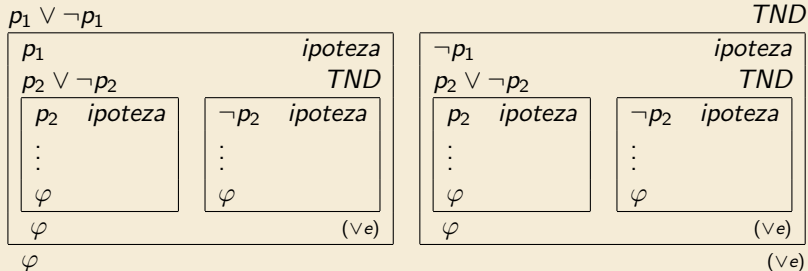
TND

$\neg p_1$	<i>ipoteza</i>
$p_2 \vee \neg p_2$	<i>TND</i>
p_2 <i>ipoteza</i>	$\neg p_2$ <i>ipoteza</i>
\vdots	\vdots
φ	φ
φ	($\vee e$)

Completitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Combinăm cele patru demonstrații astfel:

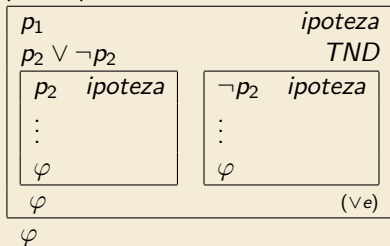


Completitudinea DN

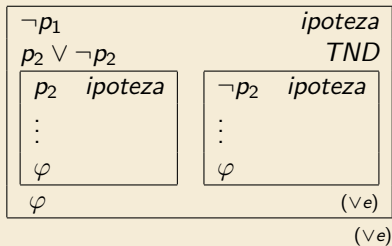
Demonstrație (cont.)

Combinăm cele patru demonstrații astfel:

$p_1 \vee \neg p_1$



TND



Am obținut o demonstrație pentru φ fără ipoteze.



Deducția naturală DN

- este un sistem deductiv corect și complet pentru logica clasică,
- stabilește reguli de deducție pentru fiecare operator logic,
- o demonstrație se construiește prin aplicarea succesivă a regulilor de deducție,
- în demonstrații putem folosi ipoteze temporare, scopul acestora fiind bine delimitat.



Pe săptămâna viitoare!