

Curs 6

Logica de ordinul I - sintaxa

Limbaj de ordinul I \mathcal{L}

- unic determinat de $\tau = (\mathbf{R}, \mathbf{F}, \mathbf{C}, \text{ari})$

Termenii lui \mathcal{L} , notați $\text{Trm}_{\mathcal{L}}$, sunt definiți inductiv astfel:

- orice variabilă este un termen;
- orice simbol de constantă este un termen;
- dacă $f \in \mathbf{F}$, $\text{ar}(f) = n$ și t_1, \dots, t_n sunt termeni, atunci $f(t_1, \dots, t_n)$ este termen.

Formulele atomice ale lui \mathcal{L} sunt definite astfel:

- dacă $R \in \mathbf{R}$, $\text{ar}(R) = n$ și t_1, \dots, t_n sunt termeni, atunci $R(t_1, \dots, t_n)$ este formulă atomică.

Formulele lui \mathcal{L} sunt definite astfel:

- orice formulă atomică este o formulă
- dacă φ este o formulă, atunci $\neg\varphi$ este o formulă
- dacă φ și ψ sunt formule, atunci $\varphi \vee \psi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$ sunt formule
- dacă φ este o formulă și x este o variabilă, atunci $\forall x \varphi$, $\exists x \varphi$ sunt formule

Pentru a stabili dacă o formulă este adevărată, avem nevoie de o
interpretare într-o structură!

Cuprins

- 1 Logica de ordinul I - semantica(recap.)
- 2 Variabile libere. Variabile legate. Enunțuri
- 3 Forma Skolem

Logica de ordinul I - semantica(recap.)

Structură

Definiție

O **structură** este de forma $\mathcal{A} = (A, \mathbf{F}^{\mathcal{A}}, \mathbf{R}^{\mathcal{A}}, \mathbf{C}^{\mathcal{A}})$, unde

- A este o mulțime nevidă
 - $\mathbf{F}^{\mathcal{A}} = \{f^{\mathcal{A}} \mid f \in \mathbf{F}\}$ este o mulțime de operații pe A ; dacă f are aritatea n , atunci $f^{\mathcal{A}} : A^n \rightarrow A$.
 - $\mathbf{R}^{\mathcal{A}} = \{R^{\mathcal{A}} \mid R \in \mathbf{R}\}$ este o mulțime de relații pe A ; dacă R are aritatea n , atunci $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^n$.
 - $\mathbf{C}^{\mathcal{A}} = \{c^{\mathcal{A}} \in A \mid c \in \mathbf{C}\}$.
-
- A se numește **universul** structurii \mathcal{A} .
 - $f^{\mathcal{A}}$ (respectiv $R^{\mathcal{A}}$, $c^{\mathcal{A}}$) se numește **interpretarea** lui f (respectiv R , c) în \mathcal{A} .

Exemplu

$\mathcal{L}_1 : \mathbf{R} = \{<\}, \mathbf{F} = \{s, +\}, \mathbf{C} = \{0\}$ cu $\text{ari}(s) = 1, \text{ari}(+) = \text{ari}(<) = 2$.

$\mathcal{N} = (\mathbb{N}, s^{\mathcal{N}}, +^{\mathcal{N}}, <^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}})$ unde

- $s^{\mathcal{N}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad s^{\mathcal{N}}(n) := n + 1,$
- $+^{\mathcal{N}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad +^{\mathcal{N}}(n, m) := n + m,$
- $<^{\mathcal{N}} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad <^{\mathcal{N}} = \{(n, m) \mid n < m\},$
- $0^{\mathcal{N}} := 0$

Modelarea unei lumi

Presupunem că putem descrie o lume prin:

- o mulțime de obiecte
- funcții
- relații

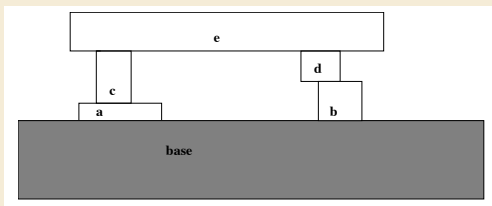
unde

- funcțiile duc obiecte în obiecte
- relațiile cu n argumente descriu proprietățile a n obiecte

Modelarea unei lumi

Exemplu

Să considerăm o lume în care avem cutii:



- Putem descrie lumea folosind obiecte

$$O = \{base, a, b, c, d, e\}.$$

- Putem descrie ce obiect se află deasupra altui obiect folosind un predicat binar *on*:

$$on = \{(e, c), (c, a), (e, d), (d, b), (a, base), (b, base)\}$$

Sursa exemplului: <https://www.inf.ed.ac.uk/teaching/courses/lp/>

Exemplu

Lumea în care avem cutii.

□ Limbajul \mathcal{L}

□ $\mathbf{R} = \{on\}$

□ $\mathbf{F} = \emptyset$

□ $\mathbf{C} = \emptyset$

□ $ari(on) = 2$

□ O structură \mathcal{A} :

□ $A = \{base, a, b, c, d, e\}$

□ $\mathbf{F}^{\mathcal{A}} = \emptyset$.

□ $\mathbf{C}^{\mathcal{A}} = \emptyset$.

□ $\mathbf{R}^{\mathcal{A}} = \{on^{\mathcal{A}}\}$, unde
 $on^{\mathcal{A}} = \{(e, c), (c, a), (e, d), (d, b), (a, base), (b, base)\} \subseteq A^2$.

Interpretare

Fie \mathcal{L} un limbaj de ordinul I și \mathcal{A} o (\mathcal{L} -)structură.

Definiție

O **interpretare a variabilelor** lui \mathcal{L} în \mathcal{A} este o funcție

$$I : V \rightarrow A.$$

Definiție

Inductiv, definim **interpretarea termenului** t în \mathcal{A} sub I ($t_I^{\mathcal{A}}$) prin:

- dacă $t = x_i \in V$, atunci $t_I^{\mathcal{A}} := I(x_i)$
- dacă $t = c \in \mathbf{C}$, atunci $t_I^{\mathcal{A}} := c^{\mathcal{A}}$
- dacă $t = f(t_1, \dots, t_n)$, atunci $t_I^{\mathcal{A}} := f^{\mathcal{A}}((t_1)_I^{\mathcal{A}}, \dots, (t_n)_I^{\mathcal{A}})$

Interpretare

Definim inductiv faptul că o formulă este adevărată în \mathcal{A} sub interpretarea I astfel:

- $\mathcal{A}, I \models P(t_1, \dots, t_n)$ dacă $P^{\mathcal{A}}((t_1)_I^{\mathcal{A}}, \dots, (t_n)_I^{\mathcal{A}})$
- $\mathcal{A}, I \models \neg\varphi$ dacă $\mathcal{A}, I \not\models \varphi$
- $\mathcal{A}, I \models \varphi \vee \psi$ dacă $\mathcal{A}, I \models \varphi$ sau $\mathcal{A}, I \models \psi$
- $\mathcal{A}, I \models \varphi \wedge \psi$ dacă $\mathcal{A}, I \models \varphi$ și $\mathcal{A}, I \models \psi$
- $\mathcal{A}, I \models \varphi \rightarrow \psi$ dacă $\mathcal{A}, I \not\models \varphi$ sau $\mathcal{A}, I \models \psi$
- $\mathcal{A}, I \models \forall x \varphi$ dacă pentru orice $a \in A$ avem $\mathcal{A}, I_{x \leftarrow a} \models \varphi$
- $\mathcal{A}, I \models \exists x \varphi$ dacă există $a \in A$ astfel încât $\mathcal{A}, I_{x \leftarrow a} \models \varphi$

unde pentru orice $a \in A$, $I_{x \leftarrow a}(y) = \begin{cases} I(y) & \text{dacă } y \neq x \\ a & \text{dacă } y = x \end{cases}$

Interpretare

- O formulă φ este adevărată într-o structură \mathcal{A} , notat $\mathcal{A} \models \varphi$, dacă este adevărată în \mathcal{A} sub orice interpretare.

Spunem că \mathcal{A} este model al lui φ .

- O formulă φ este adevărată în logica de ordinul I, notat $\models \varphi$, dacă este adevărată în orice structură.

Model

Exemplu

Fie limbajul \mathcal{L} cu $\mathbf{F} = \{s\}$, $\mathbf{R} = \{P\}$, $\mathbf{C} = \{0\}$ cu $\text{ari}(s) = \text{ari}(P) = 1$.

Fie structura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, s^{\mathcal{N}}, P^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}})$ unde $0^{\mathcal{N}} := 1$ și

- $s^{\mathcal{N}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $s^{\mathcal{N}}(n) := n^2$
- $P^{\mathcal{N}} \subset \mathbb{N}$, $P^{\mathcal{N}} = \{n \mid n \text{ este impar} \}$

Demonstrați că $\mathcal{N} \models \forall x (P(x) \rightarrow P(s(x)))$.

Fie $I : V \rightarrow \mathbb{N}$ o interpretare. Observăm că $\mathcal{N}, I \models P(x)$ dacă $P^{\mathcal{N}}(I(x))$, adică $\mathcal{N}, I \models P(x)$ dacă $I(x)$ este impar.

$\mathcal{N}, I \models \forall x (P(x) \rightarrow P(s(x)))$ dacă

$\mathcal{N}, I_{x \leftarrow n} \models P(x) \rightarrow P(s(x))$ oricare $n \in \mathbb{N}$

$\mathcal{N}, I_{x \leftarrow n} \not\models P(x)$ sau $\mathcal{N}, I_{x \leftarrow n} \models P(s(x))$ oricare $n \in \mathbb{N}$

$I_{x \leftarrow n}(x)$ nu este impar sau $I_{x \leftarrow n}(s(x))$ este impar oricare $n \in \mathbb{N}$
 n este par sau n^2 este impar oricare $n \in \mathbb{N}$

ceea ce este întodeauna adevărat.

Logica de ordinul I - semantică

O **structură** este de forma $\mathcal{A} = (A, \mathbf{F}^{\mathcal{A}}, \mathbf{R}^{\mathcal{A}}, \mathbf{C}^{\mathcal{A}})$, unde

- A este o mulțime nevidă
- $\mathbf{F}^{\mathcal{A}} = \{f^{\mathcal{A}} \mid f \in \mathbf{F}\}$ este o mulțime de operații pe A ; dacă f are aritatea n , atunci $f^{\mathcal{A}} : A^n \rightarrow A$.
- $\mathbf{R}^{\mathcal{A}} = \{R^{\mathcal{A}} \mid R \in \mathbf{R}\}$ este o mulțime de relații pe A ; dacă R are aritatea n , atunci $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^n$.
- $\mathbf{C}^{\mathcal{A}} = \{c^{\mathcal{A}} \in A \mid c \in \mathbf{C}\}$.

O **interpretare a variabilelor** lui \mathcal{L} în \mathcal{A} (**\mathcal{A} -interpretare**) este o funcție $I : V \rightarrow A$.

Inductiv, definim **interpretarea termenului** t în \mathcal{A} sub I notat $t_I^{\mathcal{A}}$.

Inductiv, definim când o **formulă este adevărată în \mathcal{A} în interpretarea I** notat $\mathcal{A}, I \models \varphi$.

În acest caz spunem că (\mathcal{A}, I) este **model** pentru φ .

O formulă φ este **adevărată într-o structură \mathcal{A}** , notat $\mathcal{A} \models \varphi$, dacă este adevărată în \mathcal{A} sub orice interpretare. Spunem că \mathcal{A} este **model** al lui φ .

O formulă φ este **adevărată în logica de ordinul I**, notat $\models \varphi$, dacă este adevărată în orice structură. O formulă φ este **validă** dacă $\models \varphi$.

O formulă φ este **satisfiabilă** dacă există o structură \mathcal{A} și o \mathcal{A} -interpretare I astfel încât $\mathcal{A}, I \models \varphi$.

Consecință logică

Definiție

O formulă φ este o **consecință logică** a formulelor $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, notat

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \varphi,$$

dacă pentru orice structură \mathcal{A}

dacă $\mathcal{A} \models \varphi_1$ și ... și $\mathcal{A} \models \varphi_n$, atunci $\mathcal{A} \models \varphi$

Problemă semidecidabilă!

Nu există algoritm care să decidă mereu dacă o formulă este sau nu consecință logică a altei formule în logica de ordinul I!

Formule echivalente

□ Fie φ și ψ două formule. Notăm prin

$$\varphi \models \psi$$

faptul că $\models \varphi \leftrightarrow \psi$, adică φ și ψ au aceleași modele.

Exemplu

Dacă P este un simbol de relație de aritate 1 și x și y sunt variabile distincte, atunci

$$\forall x P(x) \models \forall y P(y) \quad \text{și} \quad P(x) \models P(y)$$

Validitate și satisfiabilitate

Propoziție

Dacă φ este o formulă atunci

φ este validă dacă și numai dacă $\neg\varphi$ nu este satisfiabilă.

Demonstrație

Exercițiu!

Vom arăta că pentru a verifica validitatea/satisfiabilitatea este suficient să ne uităm la o singură structură.

Variabile libere. Variabile legate. Enunțuri

Apariții libere sau legate

Fie φ o formulă și $Var(\varphi)$ mulțimea variabilelor care apar în φ .

- Orice apariție a unei variabile x într-o formulă $\forall x \varphi$ sau $\exists x \varphi$ se numește **legată**. Celelalte apariții se numesc **libere**.

Exemplu

Fie limbajul \mathcal{L}_r cu un singur simbol de relație R de aritate 2.

Fie următoarea formulă

$$\forall y (\forall y (R(y, x) \vee R(y, z)) \rightarrow \forall x R(x, y))$$

- Prima apariție a lui x este liberă,
- dar a doua apariție a lui x este legată de apariția lui $\forall x$.
- Primele două apariții ale lui y sunt legate de a doua apariție a lui $\forall y$,
- iar a treia apariție a lui y este legată de prima apariție a lui $\forall y$.
- z este liberă.

Forma rectificată

- O formulă φ este în **formă rectificată** dacă:
 - 1 nici o variabilă nu apare și liberă și legată
 - 2 cuantificatori distincți leagă variabile distincte
- Pentru orice formulă φ există o formulă φ^r în formă rectificată astfel încât $\varphi \models \varphi^r$.
- Intuitiv, forma rectificată a unei formule se obține prin redenumirea variabilelor astfel încât să nu apară conflicte.

Exemplu

$$\forall x P(x) \wedge \exists x \forall y R(x, y) \wedge S(x) \models \forall x P(x) \wedge \exists x_1 \forall y R(x_1, y) \wedge S(x_2)$$

În continuare vom presupune că
toate formulele sunt în formă rectificată.

Variabile libere. Variabile legate. Enunțuri

Fie φ o formulă și $Var(\varphi)$ mulțimea variabilelor care apar în φ .

- Variabilele **libere** ale unei formule φ sunt variabilele care nu sunt cuantificate.
- Mulțimea $FV(\varphi)$ a variabilelor libere ale unei formule φ poate fi definită prin inducție după formule:

$$FV(\varphi) = Var(\varphi), \quad \text{dacă } \varphi \text{ este formulă atomică}$$

$$FV(\neg\varphi) = FV(\varphi)$$

$$FV(\varphi \circ \psi) = FV(\varphi) \cup FV(\psi), \quad \text{dacă } \circ \in \{\rightarrow, \vee, \wedge\}$$

$$FV(\forall x \varphi) = FV(\varphi) - \{x\}$$

$$FV(\exists x \varphi) = FV(\varphi) - \{x\}$$

- O variabilă $v \in Var(\varphi)$ care nu este liberă se numește **legată** în φ .
- Un **enunț** este o formulă fără variabile libere.
- Pentru orice structură \mathcal{A} și orice enunț φ , o \mathcal{A} -interpretare I nu joacă niciun rol în a determina dacă $\mathcal{A}, I \models \varphi$.

Variabile libere. Variabile legate. Enunțuri

Exemplu

Fie limbajul \mathcal{L}_r cu un singur simbol de relație R de aritate 2.
Care din următoarele formule sunt enunțuri?

- 1 $\forall x \forall y R(x, y)$ - enunț
- 2 $\forall x \forall y (R(x, y) \vee R(x, z))$
- 3 $\forall x \forall y (R(x, y) \vee \forall z R(x, z))$ - enunț
- 4 $\forall x R(x, y)$

Enunțuri

Fie φ o formulă și $FV(\varphi) = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Propozitie

Pentru orice structură \mathcal{A} avem

$$\mathcal{A} \models \varphi \text{ dacă și numai dacă } \mathcal{A} \models \forall x_1 \dots \forall x_n \varphi.$$

Demonstrație

Exercițiu!

A verifica validitatea unei formule revine la
a verifica validitatea enunțului asociat.

Substituții

- Substituțiile înlocuiesc variabilele **libere** cu termeni.
- O substituție aplicată unui termen întoarce un alt termen.
- Ce se întâmplă când aplicăm o substituție unei formule?

- Fie φ formula $P(z, z) \wedge \exists y (\neg P(x, y))$
- $\{x \leftarrow y\}\varphi$ este $P(z, z) \wedge \exists y (\neg P(y, y))$

Atenție! substituțiile afectează satisfiabilitatea formulei.

- Fie φ o formulă și t_1, \dots, t_n termeni care nu conțin variabile din φ .
Notăm $\varphi[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n]$ formula obținută din φ substituind toate aparițiile libere ale lui x_1, \dots, x_n cu t_1, \dots, t_n .

$$\varphi[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n] = \{x_1 \leftarrow t_1, \dots, x_n \leftarrow t_n\}\varphi$$

Forma prenex

O **formulă prenex** este o formulă de forma

$$Q_1x_1 Q_2x_2 \dots Q_nx_n \varphi$$

unde $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ pentru orice $i \in \{1, \dots, n\}$, x_1, \dots, x_n sunt variabile distincte și φ **nu conține cuantificatori**.

Exemplu

Fie R este un simbol de relație de aritate 2. Formula

$$\forall x \exists y \forall z ((R(x, y) \vee \neg R(x, z)) \wedge R(x, x))$$

este în formă prenex.

Cum calculăm forma prenex?

- Se înlocuiesc \rightarrow și \leftrightarrow :

$$\varphi \rightarrow \psi \quad \models \quad \neg\varphi \vee \psi$$

$$\varphi \leftrightarrow \psi \quad \models \quad (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi)$$

- Se aplică următoarele echivalențe:

$$\neg\exists x \neg\varphi \quad \models \quad \forall x \varphi \qquad \forall x \varphi \wedge \forall x \psi \quad \models \quad \forall x (\varphi \wedge \psi)$$

$$\neg\forall x \neg\varphi \quad \models \quad \exists x \varphi \qquad \exists x \varphi \vee \exists x \psi \quad \models \quad \exists x (\varphi \vee \psi)$$

$$\neg\exists x \varphi \quad \models \quad \forall x \neg\varphi \qquad \forall x \forall y \varphi \quad \models \quad \forall y \forall x \varphi$$

$$\neg\forall x \varphi \quad \models \quad \exists x \neg\varphi \qquad \exists x \exists y \varphi \quad \models \quad \exists y \exists x \varphi$$

$$\forall x \varphi \vee \psi \quad \models \quad \forall x (\varphi \vee \psi) \text{ dacă } x \notin FV(\psi)$$

$$\forall x \varphi \wedge \psi \quad \models \quad \forall x (\varphi \wedge \psi) \text{ dacă } x \notin FV(\psi)$$

$$\exists x \varphi \vee \psi \quad \models \quad \exists x (\varphi \vee \psi) \text{ dacă } x \notin FV(\psi)$$

$$\exists x \varphi \wedge \psi \quad \models \quad \exists x (\varphi \wedge \psi) \text{ dacă } x \notin FV(\psi)$$

Forma prenex

Exemplu

Fie R un simbol de relație de aritate 2.

$$\begin{aligned}\varphi &= \forall x \neg(\exists y R(x, y) \rightarrow \exists x R(x, y)) \\ &\models \forall x \neg(\exists v R(x, v) \rightarrow \exists z R(z, y)) \\ &\models \forall x \neg(\neg \exists v R(x, v) \vee \exists z R(z, y)) \\ &\models \forall x (\exists v R(x, v) \wedge \neg \exists z R(z, y)) \\ &\models \forall x \exists v (R(x, v) \wedge \neg \exists z R(z, y)) \\ &\models \forall x \exists v (R(x, v) \wedge \forall z \neg R(z, y)) \\ &\models \forall x \exists v \forall z (R(x, v) \wedge \neg R(z, y))\end{aligned}$$

Forma prenex

Teorema de formă prenex

Pentru orice formulă φ există o formulă φ^* în formă prenex astfel încât $\varphi \models \varphi^*$ și $FV(\varphi) = FV(\varphi^*)$.

Demonstrație

Demonstrăm prin inducție după structura formulei φ .

- φ este formulă atomică.

Atunci φ este în formă prenex, deci $\varphi^* := \varphi$.

- $\varphi = \forall x\psi$.

Conform ipotezei de inducție, există o formulă ψ^* în formă prenex astfel încât $\psi \models \psi^*$ și $FV(\psi) = FV(\psi^*)$.

Definim $\varphi^* := \forall x\psi^*$.

Forma prenex

Demonstrație (cont.)

□ $\varphi = \neg\psi$.

Conform ipotezei de inducție, există o formulă

$\psi^* = Q_1x_1 \dots Q_nx_n \psi_0$ în formă prenex astfel încât $\psi \models \psi^*$ și $FV(\psi) = FV(\psi^*)$. Notăm $\forall^c = \exists$, $\exists^c = \forall$ și definim

$$\varphi^* := Q_1^cx_1 \dots Q_n^cx_n \neg\psi_0.$$

Atunci φ^* este în formă prenex, $\varphi^* \models \neg\psi^* \models \neg\psi = \varphi$ și $FV(\varphi^*) = FV(\psi^*) = FV(\psi) = FV(\varphi)$.

Forma prenex

Demonstrație (cont.)

- $\varphi = \psi \vee \chi$ și, conform ipotezei de inducție, există formulele în formă prenex

$$\psi^* = Q_1x_1 \dots Q_nx_n\psi_0, \quad \chi^* = S_1z_1 \dots S_mz_m\chi_0$$

astfel încât $\psi \models \psi^*$, $FV(\psi) = FV(\psi^*)$, $\chi \models \chi^*$ și $FV(\chi) = FV(\chi^*)$.
Definim

$$\varphi^* := Q_1x_1 \dots Q_nx_nS_1z_1 \dots S_mz_m(\psi_0 \vee \chi_0).$$

Atunci φ^* este în formă prenex, $FV(\varphi^*) = FV(\varphi)$ și

$$\varphi^* \models \psi^* \vee \chi^* \models \psi \vee \chi = \varphi.$$

Deoarece φ a fost în formă rectificată, echivalența \models este justificată de următoarele proprietăți:

$$\forall x \varphi \vee \psi \models \forall x(\varphi \vee \psi) \text{ dacă } x \notin FV(\psi)$$

$$\exists x \varphi \vee \psi \models \exists x(\varphi \vee \psi) \text{ dacă } x \notin FV(\psi)$$

Forma Skolem

Forma Skolem

Fie \mathcal{L} un limbaj de ordinul.

Skolemizarea este o procedură prin care se elimină cuantificatorii existențiali din formule de ordinul întâi în formă normală prenex, prin introducerea de noi simboluri de funcții/constante, numite **simboluri de funcții/constante Skolem**.

În continuare φ este un enunț în formă prenex:

$$\varphi = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \theta,$$

unde $n \in \mathbb{N}$, $Q_1, \dots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$, x_1, \dots, x_n sunt variabile distincte două câte două și θ este formulă liberă de cuantificatori.

Vom asocia lui φ un **enunț universal** φ^{sk} într-un limbaj extins $\mathcal{L}^{sk}(\varphi)$.

□ Un enunț se numește **universal** dacă conține doar cuantificatori universali.

Forma Skolem

Fie φ enunț în formă prenex. Definim φ^{sk} și $\mathcal{L}^{sk}(\varphi)$ astfel:

- dacă φ este liberă de cuantificatori, atunci $\varphi^{sk} = \varphi$ și $\mathcal{L}^{sk}(\varphi) = \mathcal{L}$,
- dacă φ este universală, atunci $\varphi^{sk} = \varphi$ și $\mathcal{L}^{sk}(\varphi) = \mathcal{L}$,
- dacă $\varphi = \exists x \psi$ atunci **introducem un nou simbol de constantă c** și considerăm $\varphi^1 = \psi[x/c]$, $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L} \cup \{c\}$.
- dacă $\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_k \exists x \psi$ atunci **introducem un nou simbol de funcție f** de aritate k și considerăm $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L} \cup \{f\}$,

$$\varphi^1 = \forall x_1 \dots \forall x_k \psi[x/f(x_1 \dots x_k)]$$

În ambele cazuri, φ^1 are cu un cuantificator existențial mai puțin decât φ . Dacă φ^1 este liberă de cuantificatori sau universală, atunci $\varphi^{sk} = \varphi^1$. Dacă φ^1 nu este universală, atunci formăm $\varphi^2, \varphi^3, \dots$, până ajungem la o formulă universală și aceasta este φ^{sk} .

Definiție

φ^{sk} este o **formă Skolem** a lui φ .

Forma Skolem

Exemplu

Fie P un simbol de relație de aritate 1 și $\varphi = \exists x P(x)$.

Atunci

$$\varphi^1 = (P(x))[x/c] = P(c),$$

unde c este un nou simbol de constantă. Deoarece φ^1 este un enunț liber de cuantificatori, rezultă că $\varphi^{sk} = \varphi^1 = P(c)$.

Exemplu

Fie R un simbol de relație de aritate 3 și $\varphi = \exists x \forall y \forall z R(x, y, z)$. Atunci

$$\varphi^1 = (\forall y \forall z R(x, y, z))[x/c] = \forall y \forall z R(c, y, z),$$

unde c este un nou simbol de constantă. Deoarece φ^1 este un enunț universal, rezultă că $\varphi^{sk} = \varphi^1 = \forall y \forall z R(c, y, z)$.

Exemplu

Fie P un simbol de relație de aritate 2 și $\varphi = \forall y \exists z P(y, z)$. Atunci

$$\varphi^1 = (\forall y P(y, z))[z/f(y)] = \forall y P(y, f(y))$$

unde f este un simbol nou de funcție unară. Deoarece φ^1 este un enunț universal, rezultă că $\varphi^{sk} = \varphi^1 = \forall y P(y, f(y))$.

Forma Skolem

Exemplu

Fie \mathcal{L} un limbaj și $P, R \in \mathbf{R}$, $f \in \mathbf{F}$, $\text{ari}(P) = \text{ari}(R) = 2$ și $\text{ari}(f) = 1$.
Determinați forma Skolem pentru:

$$\varphi := \forall y \exists z \forall u \exists v (R(y, z) \wedge P(f(u), v)).$$

$$\begin{aligned}\varphi^1 &= \forall y (\forall u \exists v (R(y, z) \wedge P(f(u), v)))[z/g(y)] \\ &= \forall y \forall u \exists v (R(y, g(y)) \wedge P(f(u), v)), \\ &\quad \text{unde } g \text{ este un nou simbol de funcție unară} \\ \varphi^2 &= \forall y \forall u (R(y, g(y)) \wedge P(f(u), v))[v/h(y, u)] \\ &= \forall y \forall u (R(y, g(y)) \wedge P(f(u), h(y, u))), \\ &\quad \text{unde } h \text{ este un nou simbol de funcție binară.}\end{aligned}$$

Deoarece φ^2 este un enunț universal, rezultă că

$$\varphi^{sk} = \varphi^2 = \forall y \forall u (R(y, g(y)) \wedge P(f(u), h(y, u))).$$

Forma Skolem

Teorema de formă Skolem

Fie φ un enunț în formă prenex.

- 1 $\models \varphi^{sk} \rightarrow \varphi$, deci $\varphi^{sk} \models \varphi$ în $\mathcal{L}^{sk}(\varphi)$.
- 2 φ este satisfiabilă dacă și numai dacă φ^{sk} este satisfiabilă.

Demonstrație [schiță]

- 1 Folosind următoarele proprietăți
$$\models \varphi(x/t) \rightarrow \exists x \varphi$$
$$\models \varphi \text{ implică } \models \forall x \varphi \text{ și}$$
$$\models \forall x (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x \varphi \rightarrow \forall x \psi)$$
putem demonstra că $\models \varphi^1 \rightarrow \varphi$, $\models \varphi^2 \rightarrow \varphi^1$, etc.
- 2 " \Leftarrow " Se aplică (1).
" \Rightarrow " **exercițiu.**



Forma Skolem

Observație

În general, φ și φ^{sk} nu sunt logic echivalente ca enunțuri în $\mathcal{L}^{sk}(\varphi)$.

Exemplu

Fie $\mathcal{L} = \{R\}$ unde R este simbol de relație de aritate 2 și $\varphi = \forall v_1 \exists v_2 R(v_1, v_2)$.

Atunci $\varphi^{sk} = \forall v_1 R(v_1, f(v_1))$ (unde f este un nou simbol de funcție unară) și $\mathcal{L}^{sk}(\varphi) = \{f, R\}$.

Fie $\mathcal{L}^{sk}(\varphi)$ -structura $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, <, f^{\mathcal{A}})$, unde $f^{\mathcal{A}}(n) = n - 1$ pentru orice $n \in \mathbb{Z}$. Atunci $\mathcal{A} \models \varphi$, deoarece pentru orice număr întreg m există un număr întreg n astfel încât $m < n$. Pe de altă parte, $\mathcal{A} \not\models \varphi^{sk}$, deoarece pentru orice $n \in \mathbb{Z}$, avem că $n \geq f^{\mathcal{A}}(n) = n - 1$. □

- Cercetarea validității poate fi redusă la cercetarea satisfiabilității.
- Cercetarea satisfiabilității unei formule poate fi redusă la cercetarea satisfiabilității unui enunț în forma Skolem.

Vom arăta că pentru a verifica validitatea/satisfiabilitatea este suficient să ne uităm la o singură structură.



Pe săptămâna viitoare!