FMI, Mate-Info, Anul III
Programare logică

Recapitulare

(S1.1)
Fie următoarea funcţie:
$f_1 : P(\{1,2,3\}) \to P(\{1,2,3\}), f_1(Y) = Y \cup \{1\}$
Indicati punctele fixe ale acesteia si cel mai mic punct fix.

Demonstraţie: Se observă că punctele fixe ale lui f_1 sunt submulţimile Y ale lui $\{1,2,3\}$ care îl conţin pe 1 (dacă $1 \notin Y$, atunci $f_1(Y) = Y \cup \{1\}$ si $Y \neq Y \cup \{1\}$). Deci punctele fixe ale lui f_1 sunt $\{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}$. Evident, cel mai mic punct fix este $\{1\}$.

$\square$

(S1.2) Fie S o mulţime de clauze definite propoziţionale. Fie A mulţimea variabilelor propoziţionale $p_1, p_2, ...$ care apar în S, şi $Baza = \{p_i \mid p_i \in S\}$ mulţimea clauzelor unitate din S. Definim funcţia $f_S : P(A) \to P(A)$ prin:
$f_S(Y) = Y \cup Baza \cup \{a \in A \mid (\bigwedge_{1\leq i\leq n} s_i \to a) \in S, s_1, ..., s_n \in Y\}$
Să se arate că f_S este monotonă.

Demonstraţie:

Fie $Y_1 \subseteq A$ si $Y_2 \subseteq A$ cu proprietatea că $Y_1 \subseteq Y_2$. Având în vedere definiţia monotonicităţii, avem de arătat că $f_S(Y_1) \subseteq f_S(Y_2)$. Fie următoarele mulţimi:
$Z_1 = \{a \in A \mid (\bigwedge_{1\leq i\leq n} s_i \to a) \in S, s_1 \in Y_1, ..., s_n \in Y_1\}$
$Z_2 = \{a \in A \mid (\bigwedge_{1\leq i\leq n} s_i \to a) \in S, s_1 \in Y_2, ..., s_n \in Y_2\}$
Deci:
$f_S(Y_1) = Y_1 \cup Baza \cup Z_1$
$f_S(Y_2) = Y_2 \cup Baza \cup Z_2$
Acum, deoarece $Y_1 \subseteq Y_2$, mai avem de arătat că $Z_1 \subseteq Z_2$. Fie $a \in Z_1$. Atunci există $(\bigwedge_{1\leq i\leq n} s_i \to a) \in S$ şi $s_1, ..., s_n \in Y_1$. Deci $s_1, ..., s_n \in Y_2$, de unde rezultă că $a \in Z_2$.

$\square$

(S1.3) Calculaţi cel mai mic punct fix pentru funcţia f_S pentru următoarea mulţime de clauze propoziţionale:
$S = \{x_1 \wedge x_2 \to x_3, x_4 \wedge x_2 \to x_5, x_2, x_6, x_6 \to x_1\}$

Demonstraţie:

Aşa cum putem vedea, $A = \{x_1, ..., x_6\}$, $Baza = \{x_2, x_6\}$. Deoarece f_S este continuă, aplicând Teorema Knaster-Tarski vom afla cel mai mic punct fix:
$f_S(\emptyset) = \{x_2, x_6\}$
$f_S(\{x_2, x_6\}) = \{x_2, x_6, x_1\}$
$f_S(\{x_2, x_6, x_1\}) = \{x_2, x_6, x_1, x_3\}$
$f_S(\{x_2, x_6, x_1, x_3\}) = \{x_2, x_6, x_1, x_3\}$
Deci cel mai mic punct fix este $\{x_1, x_2, x_3, x_6\}$.

$\square$

(S1.4) Aplicaţi algoritmul de unificare pentru a găsi un unificator pentru termenii:

Demonstraţie:

V. cursul 4, începând cu slide-ul 36 (83 din 112).

$\square$

(S1.5) Fie un limbaj de ordinul I cu următoarele proprietăţi: $\mathbf{R} = \{P, R, Q\}$, cu $ari(P) = 1$, $ari(R) = ari(Q) = 2$. Aduceţi următoarea formulă la forma ei prenex corespunzătoare:
$\varphi = \forall x, \exists y(R(x, y) \rightarrow R(y, x)) \rightarrow \exists x R(x, x)$.

Demonstraţie:

$$\begin{aligned}
\varphi \ &\vDash\!\dashv \ \forall x \exists y(R(x, y) \rightarrow R(y, x)) \rightarrow \exists z R(z, z)(\text{redenumire variabile}) \\
&\vDash\!\dashv \ \neg\forall x \exists y(\neg R(x, y) \vee R(y, x)) \vee \exists z R(z, z) \\
&\vDash\!\dashv \ \exists x \forall y(R(x, y) \wedge \neg R(y, x)) \vee \exists z R(z, z) \\
&\vDash\!\dashv \ \exists z(\exists x \forall y(R(x, y) \wedge \neg R(y, x)) \vee R(z, z)) \\
&\vDash\!\dashv \ \exists z \exists x(\forall y(R(x, y) \wedge \neg R(y, x))) \vee R(z, z)) \\
&\vDash\!\dashv \ \exists z \exists x \forall y((R(x, y) \wedge \neg R(y, x)) \vee (R(z, z)))
\end{aligned}$$

$\square$

(S1.6) Fie un limbaj de ordinul I cu $\mathbf{C} = \{b\}$ si $\mathbf{R} = \{P, R, Q\}$, cu $ari(P) = 1$ si $ari(R) = ari(Q) = 2$. Găsiţi forma Skolem pentru următoarea formulă prenex:
$\varphi = \forall x \exists y \forall z \exists w(R(x, y) \wedge (R(y, z) \rightarrow (R(z, w) \wedge R(w, w))))$

Demonstraţie:

$\varphi_1 = \forall x \forall z \exists w (R(x, f(x)) \wedge (R(f(x), z) \rightarrow (R(z, w) \wedge R(w, w)))), (y \mapsto f(x))$
$\varphi_2 = \forall x \forall z (R(x, f(x)) \wedge (R(f(x), z) \rightarrow (R(z, g(x, z)) \wedge R(g(x, z), g(x, z))))), (w \mapsto g(x, z))$

□

(S1.7) Fie un limbaj de ordinul I cu $\mathbf{F} = \{f, g\}$, $ari(f) = 2$, $ari(g) = 1$, $\mathbf{C} = \{b, c\}$ şi următoarea formulă:
$\varphi = \forall x \forall y P(c, f(x, b), g(y))$
Construiţi universul şi expansiunea Herbrand pentru formula φ.

Demonstraţie:

Universul Herbrand al formulei φ:
$T(\varphi) = \{b, c, g(b), g(c), g(g(b)), g(g(c)), ..., f(b, c), f(b, g(b)), f(b, g(c)), f(g(c), b), f(g(c), g(c)), ...\}$
Expansiunea Herbrand a formulei φ:
$H(\varphi) = \{P(c, f(b, b), g(b)), P(c, f(b, b), g(c)), P(c, f(c, b), g(b)), P(c, f(g(b), b), g(g(g(b)))), ...\}$

□

(S1.8)
Folosind algoritmul Davis-Putnam, cercetaţi dacă următoarea mulţime de clauze din calculul propoziţional este satisfiabilă:

$$\mathcal{C} = \{\{v_0\}, \{\neg v_0, v_1\}, \{\neg v_1, v_2, v_3\}, \{\neg v_3, v_4\}, \{\neg v_4\}, \{\neg v_2\}\}$$

Demonstraţie:

Pasul 1.
Alegem variabila v_0 şi selectăm $\mathcal{C}_0^{v_0} := \{\{v_0\}\}$, $\mathcal{C}_0^{\neg v_0} = \{\{\neg v_0, v_1\}\}$.
Mulţimea rezolvenţilor posibili este $\mathcal{R}_0 := \{\{v_1\}\}$.
Se elimină clauzele în care apare v_0, adăugăm rezolvenţii şi obţinem:

$$\mathcal{C}_1 := \{\{\neg v_1, v_2, v_3\}, \{\neg v_3, v_4\}, \{\neg v_4\}, \{\neg v_2\}, \{v_1\}\}$$

Pasul 2.
Alegem variabila v_1 şi selectăm $\mathcal{C}_1^{v_1} := \{\{v_1\}\}$ şi $\mathcal{C}_1^{\neg v_1} := \{\{\neg v_1, v_2, v_3\}\}$.
Mulţimea rezolvenţilor posibili este $\mathcal{R}_1 := \{\{v_2, v_3\}\}$.
Se elimină clauzele în care apare v_1, adăugăm rezolvenţii şi obţinem:
$\mathcal{C}_2 := \{\{\neg v_3, v_4\}, \{\neg v_4\}, \{\neg v_2\}, \{v_2, v_3\}\}$.
Pasul 3.
Alegem variabila v_2 şi selectăm $\mathcal{C}_2^{v_2} := \{\{v_2, v_3\}\}$, $\mathcal{C}_2^{\neg v_2} := \{\{\neg v_2\}\}$.
Mulţimea rezolvenţilor posibili este $\mathcal{R}_2 := \{\{v_3\}\}$.
Se elimină clauzele în care apare v_2, adăugăm rezolvenţii şi obţinem: $\mathcal{C}_3 := \{\{\neg v_3, v_4\}, \{\neg v_4\}, \{v_3\}\}$.
Pasul 4.

Alegem variabila v_3 şi selectăm $\mathcal{C}_3^{v_3} := \{\{v_3\}\}$, $\mathcal{C}_3^{\neg v_3} := \{\{\neg v_3, v_4\}\}$.
Mulţimea rezolvenţilor posibili este $\mathcal{R}_3 := \{\{v_4\}\}$.
Se elimină clauzele în care apare v_3, adăugăm rezolvenţii şi obţinem: $\mathcal{C}_4 := \{\{\neg v_4\}, \{v_4\}\}$.
Pasul 5.
Alegem variabila v_4 şi selectăm $\mathcal{C}_4^{v_4} := \{\{v_4\}\}$, $\mathcal{C}_4^{\neg v_4} := \{\{\neg v_4\}\}$.
Mulţimea rezolvenţilor posibili este $\mathcal{R}_4 := \{\square\}$.
Se elimină clauzele în care apare v_4, adăugăm rezolvenţii şi obţinem: $\mathcal{C}_5 := \{\square\}$.
Deoarece $\mathcal{C}_5 = \{\square\}$, obţinem că mulţimea de clauze $\mathcal{C}$ nu este satisfiabilă.

$\square$

(S1.9)
Fie următoarea mulţime de clauze în logica de ordinul I:

$$\mathcal{C} = \{\, \{\neg P(f(a)), Q(y)\},\ \{P(y)\},\ \{\neg Q(b)\}\,\}$$

Arătaţi că $\mathcal{C}$ nu este satisfiabilă prin următoarele metode:
(1) Găsind o submulţime finită nesatisfiabilă a lui $\mathcal{H}(\mathcal{C})$,
(2) Găsind o derivare pentru $\square$ folosind rezoluţia pe clauze închise.

Demonstraţie:

(1) Mulţimea instanţelor închise ale clauzelor din $\mathcal{C}$ este:
$\mathcal{H}(\mathcal{C}) = \{\{\neg Q(b)\}, \{\neg P(f(a)), Q(a)\}, \{\neg P(f(a)), Q(b)\}, \{P(a)\}, \{P(b)\}, \{P(f(a))\}, \cdots\}$
Următoarea submulţime a lui $\mathcal{H}(\mathcal{C})$ este nesatisfiabilă:
$\{\{\neg P(f(a)), Q(b)\}, \{P(f(a))\}, \{\neg Q(b)\}\}$
Nesatisfiabilitatea acestei mulţimi se demonstrează construind tabelul de adevăr corespunzător acesteia (v. cursul 7, slide-ul 23) şi observând că formula $(\neg P(f(a)) \vee Q(b)) \wedge P(f(a)) \wedge \neg Q(b)$ este falsă indiferent ce valori de adevăr atribuim atomilor $P(f(a))$ şi $Q(b)$.
(2) Avem următoarea derivare a lui $\square$ din mulţimea de clauze:
$\{\neg P(f(a)), Q(b)\}$
$\{P(f(a))\}$
$\{Q(b)\}$
$\{\neg Q(b)\}$
$\square$

$\square$

(S1.10) Găsiţi doi rezolvenţi pentru următoarele clauze:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{P(x), P(g(y)), Q(x)\} \\ C_2 &= \{\neg P(x), R(f(x), a)\} \end{aligned}$$

unde P, Q, R sunt simboluri de relaţii, a este o constantă, x, y sunt variabile.

Demonstraţie: Se redenumeste $C_2' = \{\neg P(z), R(f(z), a)\}$

Rezolvent 1: $L_1 = \{P(x)\}$, $L_2 = \{\neg P(z)\}$, substituţie $\theta = \{z \leftarrow x\}$,
rezolvent $C = \{P(g(y)), Q(x), R(f(x), a)\}$

Rezolvent 2: $L_1 = \{P(x), P(g(y))\}$, $L_2 = \{\neg P(z)\}$, substituţie $\theta = \{z \leftarrow g(y), x \leftarrow g(y)\}$,
rezolvent $C = \{Q(g(y)), R(f(g(y)), a)\}$

□