

Seminar 5

Forma prenex. Skolemizare. Herbrandizare

Teorie pentru S4.1:

O formulă φ este în **formă rectificată** dacă:

- (i) nici o variabilă nu apare și liberă și legată;
- (ii) cuantificatori distincți leagă variabile distincte.

Intuitiv, forma rectificată a unei formule se obține prin redenumirea variabilelor astfel încât să nu apară conflicte.

O **formulă prenex** este o formulă de forma $Q_1x_1 Q_2x_2 \dots Q_nx_n \varphi$ unde $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ pentru orice $i \in \{1, \dots, n\}$, x_1, \dots, x_n sunt variabile distincte și φ nu conține cuantificatori.

Pentru o formulă rectificată putem obține o formulă echivalentă în formă prenex astfel:

- Se înlocuiesc \rightarrow și \leftrightarrow :

$$\begin{aligned}\varphi \rightarrow \psi &\models \neg\varphi \vee \psi \\ \varphi \leftrightarrow \psi &\models (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi)\end{aligned}$$

- Se aplică următoarele echivalențe:

$$\begin{array}{ll}\neg\exists x \neg\varphi &\models \forall x \varphi & \forall x \varphi \wedge \forall x \psi &\models \forall x (\varphi \wedge \psi) \\ \neg\forall x \neg\varphi &\models \exists x \varphi & \exists x \varphi \vee \exists x \psi &\models \exists x (\varphi \vee \psi) \\ \neg\exists x \varphi &\models \forall x \neg\varphi & \forall x \forall y \varphi &\models \forall y \forall x \varphi \\ \neg\forall x \varphi &\models \exists x \neg\varphi & \exists x \exists y \varphi &\models \exists y \exists x \varphi \\ \forall x \varphi \vee \psi &\models \forall x (\varphi \vee \psi) & \text{dacă } x \notin FV(\psi) \\ \forall x \varphi \wedge \psi &\models \forall x (\varphi \wedge \psi) & \text{dacă } x \notin FV(\psi) \\ \exists x \varphi \vee \psi &\models \exists x (\varphi \vee \psi) & \text{dacă } x \notin FV(\psi) \\ \exists x \varphi \wedge \psi &\models \exists x (\varphi \wedge \psi) & \text{dacă } x \notin FV(\psi)\end{array}$$

(S5.1) Considerăm un limbaj de ordinul I cu $\mathbf{R} = \{P, R, Q\}$ cu $ari(P) = 1$ și $ari(R) = ari(Q) = 2$. Găsiți formele echivalente prenex pentru următoarele formule:

- 1) $\forall x \exists y (R(x, y) \rightarrow R(y, x)) \rightarrow \exists x R(x, x)$
- 2) $\neg P(x) \rightarrow \neg \forall y \exists x R(x, y)$
- 3) $\exists x R(x, y) \leftrightarrow \forall y Q(x, y)$

Teorie pentru S4.2:

Fie φ enunț în formă prenex. Definim φ^{sk} o **formă Skolem** a lui φ și $\mathcal{L}^{sk}(\varphi)$ astfel:

- dacă φ este liberă de cuantificatori, atunci $\varphi^{sk} = \varphi$ și $\mathcal{L}^{sk}(\varphi) = \mathcal{L}$,
- dacă φ este universală¹, atunci $\varphi^{sk} = \varphi$ și $\mathcal{L}^{sk}(\varphi) = \mathcal{L}$,
- dacă $\varphi = \exists x \psi$ atunci introducem un nou simbol de constantă c și considerăm $\varphi^1 = \psi[x/c]$, $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L} \cup \{c\}$.
- dacă $\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_k \exists x \psi$ atunci introducem un nou simbol de funcție f de aritate k și considerăm $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L} \cup \{f\}$,

$$\varphi^1 = \forall x_1 \dots \forall x_k \psi[x/f(x_1 \dots x_k)]$$

În ambele cazuri, φ^1 are cu un cuantificator existențial mai puțin decât φ . Dacă φ^1 este liberă de cuantificatori sau universală, atunci $\varphi^{sk} = \varphi^1$. Dacă φ^1 nu este universală, atunci formăm $\varphi^2, \varphi^3, \dots$, până ajungem la o formulă universală și aceasta este φ^{sk} .

(S5.2) Considerăm un limbaj de ordinul I cu $\mathbf{C} = \{b\}$ și $\mathbf{R} = \{P, R, Q\}$ cu $ari(P) = 1$ și $ari(R) = ari(Q) = 2$. Găsiți formele Skolem pentru următoarele formule în formă prenex:

- 1) $\forall x \exists y \forall z \exists w (R(x, y) \wedge (R(y, z) \rightarrow (R(z, w) \wedge R(w, w))))$
- 2) $\forall x_1 \forall y_1 \exists y_2 \exists x_2 ((\neg R(x_1, y_2) \vee Q(b, y_1)) \wedge (\neg Q(x_1, y_2) \vee R(x_2, b)))$
- 3) $\exists x_1 \forall y_1 \exists x_2 (P(y_1) \vee R(x_1, x_2))$

Teorie pentru S4.3:

Fie φ un enunț în forma Skolem, adică $\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_n \psi$.

- Definim **universul Herbrand al formulei** φ , notat $T(\varphi)$, astfel:

¹Un enunț se numește **universal** dacă conține doar cuantificatori universali.

- dacă c este o constantă care apare în φ atunci $c \in T(\varphi)$,
- dacă φ nu conține nicio constantă atunci alegem o constantă arbitrară c și considerăm că $c \in T(\varphi)$,
- dacă f este un simbol de funcție care apare în φ cu $\text{ari}(f) = n$ și $t_1, \dots, t_n \in T(\varphi)$ atunci $f(t_1, \dots, t_n) \in T(\varphi)$.

- Definim **expansiunea Herbrand** a lui φ astfel

$$\mathcal{H}(\varphi) = \{\psi[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n] \mid t_1, \dots, t_n \in T(\varphi)\}.$$
²

(S5.3) Considerăm un limbaj de ordinul I cu $\mathbf{F} = \{f, g\}$ cu $\text{ari}(f) = 2$ și $\text{ari}(g) = 1$, $\mathbf{C} = \{b, c\}$ și $\mathbf{R} = \{P, Q\}$ cu $\text{ari}(P) = 3$, $\text{ari}(Q) = 2$.

- Descrieți termenii din universul Herbrand.
- Descrieți formulele din expansiunea Herbrand a următoarelor formule:
 - 1) $\varphi := \forall x \forall y P(c, f(x, b), g(y))$
 - 2) $\psi := \forall x \forall y (Q(x, b) \vee Q(x, g(y)))$
- Cercetați satisfiabilitatea formulelor φ și ψ .

(S5.4) Considerăm următoarea formulă în logica de ordinul I:

$$\varphi = \forall y \forall z ((\neg P(f(a)) \vee Q(y)) \wedge P(z) \wedge \neg Q(b))$$

Construiți expansiunea Herbrand și arătați că formula nu este satisfiabilă.

²Reamintim că $\psi[x/t]$ este formula obținută înlocuind în ψ toate aparițiile libere ale lui x cu t .