

Curs 7

Cuprins

1 Modele Herbrand

2 Decidabilitate și semi-decidabilitate

Logica de ordinul I - sintaxa

Limbaj de ordinul I \mathcal{L}

- unic determinat de $\tau = (\mathbf{R}, \mathbf{F}, \mathbf{C}, \text{ari})$

Termenii lui \mathcal{L} , notați $\text{Trm}_{\mathcal{L}}$, sunt definiți inductiv astfel:

- orice variabilă este un termen;
- orice simbol de constantă este un termen;
- dacă $f \in \mathbf{F}$, $\text{ar}(f) = n$ și t_1, \dots, t_n sunt termeni, atunci $f(t_1, \dots, t_n)$ este termen.

Formulele atomice ale lui \mathcal{L} sunt definite astfel:

- dacă $R \in \mathbf{R}$, $\text{ar}(R) = n$ și t_1, \dots, t_n sunt termeni, atunci $R(t_1, \dots, t_n)$ este formulă atomică.

Formulele lui \mathcal{L} sunt definite astfel:

- orice formulă atomică este o formulă
- dacă φ este o formulă, atunci $\neg\varphi$ este o formulă
- dacă φ și ψ sunt formule, atunci $\varphi \vee \psi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$ sunt formule
- dacă φ este o formulă și x este o variabilă, atunci $\forall x\varphi$, $\exists x\varphi$ sunt formule

Logica de ordinul I - semantică

O **structură** este de forma $\mathcal{A} = (A, \mathbf{F}^{\mathcal{A}}, \mathbf{R}^{\mathcal{A}}, \mathbf{C}^{\mathcal{A}})$, unde

- A este o mulțime nevidă
- $\mathbf{F}^{\mathcal{A}} = \{f^{\mathcal{A}} \mid f \in \mathbf{F}\}$ este o mulțime de operații pe A ;
dacă f are aritatea n , atunci $f^{\mathcal{A}} : A^n \rightarrow A$.
- $\mathbf{R}^{\mathcal{A}} = \{R^{\mathcal{A}} \mid R \in \mathbf{R}\}$ este o mulțime de relații pe A ;
dacă R are aritatea n , atunci $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^n$.
- $\mathbf{C}^{\mathcal{A}} = \{c^{\mathcal{A}} \in A \mid c \in \mathbf{C}\}$.

O **interpretare a variabilelor** lui \mathcal{L} în \mathcal{A} (**\mathcal{A} -interpretare**) este o funcție $I : V \rightarrow A$.

Inductiv, definim **interpretarea termenului** t în \mathcal{A} sub I notat $t^{\mathcal{A}}$.

Inductiv, definim când o **formulă este adevărată în \mathcal{A} în interpretarea I** notat $\mathcal{A}, I \models \varphi$.

În acest caz spunem că (\mathcal{A}, I) este **model** pentru φ .

O formulă φ este **adevărată într-o structură \mathcal{A}** , notat $\mathcal{A} \models \varphi$, dacă este adevărată în \mathcal{A} sub orice interpretare. Spunem că \mathcal{A} este **model** al lui φ .

O formulă φ este **adevărată în logica de ordinul I**, notat $\models \varphi$, dacă este adevărată în orice structură. O formulă φ este **validă** dacă $\models \varphi$.

O formulă φ este **satisfiabilă** dacă există o structură \mathcal{A} și o \mathcal{A} -interpretare I astfel încât $\mathcal{A}, I \models \varphi$.

Enunț. Formă prenex. Formă Skolem

- Un **enunț** este o formulă fără variabile libere.

Enunț. Formă prenex. Formă Skolem

- Un **enunț** este o formulă fără variabile libere.
- Pentru orice formulă φ există un enunț în **formă prenex** α astfel încât $\varphi \models \alpha$.

Enunț. Formă prenex. Formă Skolem

- Un **enunț** este o formulă fără variabile libere.
- Pentru orice formulă φ există un enunț în **formă prenex** α astfel încât $\varphi \models \alpha$.
- Pentru orice enunț în formă prenex α există un enunț în **formă Skolem** α^{sk} astfel încât
 α este satisfiabilă dacă și numai dacă α^{sk} este satisfiabilă.

Validitate și satisfiabilitate

Dacă φ este o formulă atunci

φ este validă dacă și numai dacă $\neg\varphi$ nu este satisfiabilă.

Vom arăta că pentru a verifica validitatea/satisfiabilitatea este suficient să ne uităm la o singură structură.

Modelle Herbrand

Universul Herbrand

Fie \mathcal{L} un limbaj de ordinul I.

- Presupunem că are cel puțin un simbol de constantă!
- Dacă nu are, adăugăm un simbol de constantă.

Universul Herbrand

Fie \mathcal{L} un limbaj de ordinul I.

- Presupunem că are cel puțin un simbol de constantă!
- Dacă nu are, adăugăm un simbol de constantă.

Universul Herbrand este mulțimea $T_{\mathcal{L}}$ a tuturor termenilor fără variabile.

Universul Herbrand

Fie \mathcal{L} un limbaj de ordinul I.

- Presupunem că are cel puțin un simbol de constantă!
- Dacă nu are, adăugăm un simbol de constantă.

Universul Herbrand este mulțimea $T_{\mathcal{L}}$ a tuturor termenilor fără variabile.

Exemplu

Fie \mathcal{L} un limbaj de ordinul I cu un simbol de funcție f de aritate 2 și două simboluri de constantă a și b .

Universul Herbrand

Fie \mathcal{L} un limbaj de ordinul I.

- Presupunem că are cel puțin un simbol de constantă!
- Dacă nu are, adăugăm un simbol de constantă.

Universul Herbrand este mulțimea $T_{\mathcal{L}}$ a tuturor termenilor fără variabile.

Exemplu

Fie \mathcal{L} un limbaj de ordinul I cu un simbol de funcție f de aritate 2 și două simboluri de constantă a și b .

Universul Herbrand pentru limbajul \mathcal{L} este mulțimea:

$$a, b, f(a, b), f(f(a, b), b), f(f(a, a), f(b, b)), \dots$$

Structură Herbrand

O structură Herbrand este o structură $\mathcal{H} = (T_{\mathcal{L}}, \mathbf{F}^{\mathcal{H}}, \mathbf{R}^{\mathcal{H}}, \mathbf{C}^{\mathcal{H}})$, unde

- pentru orice simbol de constantă c , $c^{\mathcal{H}} = c$
- pentru orice simbol de funcție f de aritate n ,
 $f^{\mathcal{H}}(t_1, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, t_n)$

Atenție! Într-o structură Herbrand nu fixăm o definiție pentru relații:
pentru orice simbol de relație R de aritate n , $R^{\mathcal{H}}(t_1, \dots, t_n) \subseteq (T_{\mathcal{L}})^n$

Structură Herbrand

Exemplu

Fie \mathcal{L} un limbaj de ordinul I cu un simbol de funcție f de aritate 1, un simbol de constantă a și un simbol de relație R de aritate 2.

Structură Herbrand

Exemplu

Fie \mathcal{L} un limbaj de ordinul I cu un simbol de funcție f de aritate 1, un simbol de constantă a și un simbol de relație R de aritate 2.

O structură Herbrand $\mathcal{H} = (T_{\mathcal{L}}, \mathbf{F}^{\mathcal{H}}, \mathbf{R}^{\mathcal{H}}, \mathbf{C}^{\mathcal{H}})$ unde

- $T_{\mathcal{L}} = \{a, f(a), f(f(a)), \dots\}$
- $a^{\mathcal{H}} = a \in T_{\mathcal{L}}$
- $f_{\mathcal{H}}^T(t) = f(t)$
- $R^{\mathcal{H}} = \{(a, a), (f(a), f(a)), (f(f(a)), f(f(a))), \dots\}$

Model Herbrand

- O **interpretare Herbrand** este o interpretare $H : V \rightarrow T_{\mathcal{L}}$

Model Herbrand

- O **interpretare Herbrand** este o interpretare $H : V \rightarrow T_{\mathcal{L}}$
- O structură Herbrand \mathcal{H} este **model** al unei formule φ dacă $\mathcal{H} \models \varphi$.
În acest caz spunem că \mathcal{H} este **model Herbrand** al lui φ .

Model Herbrand

- O **interpretare Herbrand** este o interpretare $H: V \rightarrow T_{\mathcal{L}}$
- O structură Herbrand \mathcal{H} este **model** al unei formule φ dacă $\mathcal{H} \models \varphi$.
În acest caz spunem că \mathcal{H} este **model Herbrand** al lui φ .

Exemplu

Fie \mathcal{L} un limbaj de ordinul 1 cu un simbol de funcție f de aritate 1, un simbol de constantă a și un simbol de relație R de aritate 2.

O structură Herbrand $\mathcal{H} = (T_{\mathcal{L}}, \mathbf{F}^{\mathcal{H}}, \mathbf{R}^{\mathcal{H}}, \mathbf{C}^{\mathcal{H}})$ unde

- $T_{\mathcal{L}} = \{a, f(a), f(f(a)), \dots\}$
- $a^{\mathcal{H}} = a \in T_{\mathcal{L}}$
- $f_{\mathcal{H}}^T(t) = f(t)$
- $R^{\mathcal{H}} = \{(a, a), (f(a), f(a)), (f(f(a)), f(f(a))), \dots\}$

Model Herbrand

- O **interpretare Herbrand** este o interpretare $H: V \rightarrow T_{\mathcal{L}}$
- O structură Herbrand \mathcal{H} este **model** al unei formule φ dacă $\mathcal{H} \models \varphi$.
În acest caz spunem că \mathcal{H} este **model Herbrand** al lui φ .

Exemplu

Fie \mathcal{L} un limbaj de ordinul 1 cu un simbol de funcție f de aritate 1, un simbol de constantă a și un simbol de relație R de aritate 2.

O structură Herbrand $\mathcal{H} = (T_{\mathcal{L}}, \mathbf{F}^{\mathcal{H}}, \mathbf{R}^{\mathcal{H}}, \mathbf{C}^{\mathcal{H}})$ unde

- $T_{\mathcal{L}} = \{a, f(a), f(f(a)), \dots\}$
- $a^{\mathcal{H}} = a \in T_{\mathcal{L}}$
- $f_{\mathcal{H}}^T(t) = f(t)$
- $R^{\mathcal{H}} = \{(a, a), (f(a), f(a)), (f(f(a)), f(f(a))), \dots\}$

$\mathcal{H} \models \forall x R(x, x)$.

Model Herbrand

Exemplu

Fie \mathcal{L} un limbaj de ordinul 1 cu un simbol de funcție f de aritate 1, un simbol de constantă a și un simbol de relație R de aritate 2.

O structură Herbrand $\mathcal{H} = (T_{\mathcal{L}}, \mathbf{F}^{\mathcal{H}}, \mathbf{R}^{\mathcal{H}}, \mathbf{C}^{\mathcal{H}})$ unde

- $T_{\mathcal{L}} = \{a, f(a), f(f(a)), \dots\}$
- $a^{\mathcal{H}} = a \in T_{\mathcal{L}}$
- $f_{\mathcal{H}}^T(t) = f(t)$
- $R^{\mathcal{H}} = \{(a, f(a)), (f(a), f(f(a))), (f(f(a)), f(f(f(a))))), \dots\}$

Model Herbrand

Exemplu

Fie \mathcal{L} un limbaj de ordinul I cu un simbol de funcție f de aritate 1, un simbol de constantă a și un simbol de relație R de aritate 2.

O structură Herbrand $\mathcal{H} = (T_{\mathcal{L}}, \mathbf{F}^{\mathcal{H}}, \mathbf{R}^{\mathcal{H}}, \mathbf{C}^{\mathcal{H}})$ unde

- $T_{\mathcal{L}} = \{a, f(a), f(f(a)), \dots\}$
- $a^{\mathcal{H}} = a \in T_{\mathcal{L}}$
- $f_{\mathcal{H}}^T(t) = f(t)$
- $R^{\mathcal{H}} = \{(a, f(a)), (f(a), f(f(a))), (f(f(a)), f(f(f(a))))), \dots\}$

$\mathcal{H} \not\models \forall x R(x, x).$

Model Herbrand

Exemplu

- Considerăm structura Herbrand în care toate simbolurile de relație sunt adevărate peste tot,

Model Herbrand

Exemplu

- Considerăm structura Herbrand în care toate simbolurile de relație sunt adevărate peste tot, adică
- pentru orice simbol de relație R de aritate n , $R^{\mathcal{H}} = (T_{\mathcal{L}})^n$.
- Această structură este model pentru orice mulțime de formule atomice.
- **Exercițiu:** De ce?

Interpretări

Fie φ este o formulă, $t \in T_{\mathcal{L}}$ un termen fără variabile și $x \in V$.

Reamintim că $\varphi[x/t]$ este formula obținută înlocuind în φ toate aparițiile libere ale lui x cu t , i.e. $\varphi[x/t] = \{x \leftarrow t\}\varphi$.

Interpretări

Fie φ este o formulă, $t \in T_{\mathcal{L}}$ un termen fără variabile și $x \in V$.

Reamintim că $\varphi[x/t]$ este formula obținută înlocuind în φ toate aparițiile libere ale lui x cu t , i.e. $\varphi[x/t] = \{x \leftarrow t\}\varphi$.

Propoziția 1

Fie \mathcal{A} o structură, $I: V \rightarrow A$ o interpretare și $a = t_I^{\mathcal{A}}$. Atunci

Interpretări

Fie φ este o formulă, $t \in T_{\mathcal{L}}$ un termen fără variabile și $x \in V$.

Reamintim că $\varphi[x/t]$ este formula obținută înlocuind în φ toate aparițiile libere ale lui x cu t , i.e. $\varphi[x/t] = \{x \leftarrow t\}\varphi$.

Propoziția 1

Fie \mathcal{A} o structură, $I: V \rightarrow A$ o interpretare și $a = t_I^{\mathcal{A}}$. Atunci

1 pentru orice termen u avem $u[x/t]_I^{\mathcal{A}} = u_{I_{x \leftarrow a}}^{\mathcal{A}}$

Interpretări

Fie φ este o formulă, $t \in T_{\mathcal{L}}$ un termen fără variabile și $x \in V$.

Reamintim că $\varphi[x/t]$ este formula obținută înlocuind în φ toate aparițiile libere ale lui x cu t , i.e. $\varphi[x/t] = \{x \leftarrow t\}\varphi$.

Propoziția 1

Fie \mathcal{A} o structură, $I: V \rightarrow A$ o interpretare și $a = t_I^A$. Atunci

- 1 pentru orice termen u avem $u[x/t]_I^A = u_{I_{x \leftarrow a}}^A$
- 2 pentru orice formulă φ avem

$$\mathcal{A}, I \models \varphi[x/t] \text{ dacă și numai dacă } \mathcal{A}, I_{x \leftarrow a} \models \varphi$$

Intuitiv, a schimba evaluarea I atribuind variabilei x valoarea $a \in A$ este același lucru cu a înlocui variabila x cu un termen t a cărei interpretare prin I este a .

Propoziția 2

Fie \mathcal{H} o structură Herbrand, $H: V \rightarrow T_{\mathcal{L}}$ o interpretare Herbrand, $x \in V$ și $t \in T_{\mathcal{L}}$ un termen fără variabile. Sunt adevărate:

Propoziția 2

Fie \mathcal{H} o structură Herbrand, $H: V \rightarrow T_{\mathcal{L}}$ o interpretare Herbrand, $x \in V$ și $t \in T_{\mathcal{L}}$ un termen fără variabile. Sunt adevărate:

1 $t_H^{\mathcal{H}} = t$

Propoziția 2

Fie \mathcal{H} o structură Herbrand, $H: V \rightarrow T_{\mathcal{L}}$ o interpretare Herbrand, $x \in V$ și $t \in T_{\mathcal{L}}$ un termen fără variabile. Sunt adevărate:

- 1 $t_H^{\mathcal{H}} = t$
- 2 $\mathcal{H}, H \models \varphi[x/t]$ dacă și numai dacă $\mathcal{H}, H_{x \leftarrow t} \models \varphi$

Interpretări Herbrand

Propoziția 2

Fie \mathcal{H} o structură Herbrand, $H: V \rightarrow T_{\mathcal{L}}$ o interpretare Herbrand, $x \in V$ și $t \in T_{\mathcal{L}}$ un termen fără variabile. Sunt adevărate:

- 1 $t_H^{\mathcal{H}} = t$
- 2 $\mathcal{H}, H \models \varphi[x/t]$ dacă și numai dacă $\mathcal{H}, H_{x \leftarrow t} \models \varphi$

Demonstrație

- 1 prin inducție structurală pe termeni.
- 2 Următoarele echivalențe sunt adevărate

$$\mathcal{H}, H \models \varphi[x/t] \text{ ddacă } \mathcal{H}, H_{x \leftarrow t_H^{\mathcal{H}}} \models \varphi \text{ ddacă } \mathcal{H}, H_{x \leftarrow t} \models \varphi$$

Prima echivalență rezultă din Propoziția 1, iar a doua rezultă din punctul 1.

Teorema lui Herbrand

Teorema lui Herbrand

Fie $n \geq 0$ și $\varphi = \forall x_k \dots \forall x_1 \psi$ un enunț în forma Skolem.

Atunci φ are un model dacă și numai dacă are un model Herbrand.

Teorema lui Herbrand

Teorema lui Herbrand

Fie $n \geq 0$ și $\varphi = \forall x_k \dots \forall x_1 \psi$ un enunț în forma Skolem.

Atunci φ are un model dacă și numai dacă are un model Herbrand.

Demonstrație

Dacă φ are un model Herbrand atunci este, evident, satisfiabilă. Vom demonstra afirmația inversă.

Teorema lui Herbrand

Teorema lui Herbrand

Fie $n \geq 0$ și $\varphi = \forall x_k \dots \forall x_1 \psi$ un enunț în forma Skolem.

Atunci φ are un model dacă și numai dacă are un model Herbrand.

Demonstrație

Dacă φ are un model Herbrand atunci este, evident, satisfiabilă. Vom demonstra afirmația inversă.

Fie \mathcal{A} un model pentru φ , adică $\mathcal{A} \models \varphi$. Vrem să construim un model Herbrand \mathcal{H} pentru φ , ceea ce revine la a da o interpretare pentru simbolurile de relații.

Teorema lui Herbrand

Demonstrație (cont.)

Dacă $R \in \mathbf{R}$ și $\text{ari}(R) = n$ definim

$$(t_1, \dots, t_n) \in R^{\mathcal{H}} \text{ dacă și numai dacă } \mathcal{A} \models R(t_1, \dots, t_n) \quad (*)$$

Teorema lui Herbrand

Demonstrație (cont.)

Dacă $R \in \mathbf{R}$ și $\text{ari}(R) = n$ definim

$$(t_1, \dots, t_n) \in R^{\mathcal{H}} \text{ dacă și numai dacă } \mathcal{A} \models R(t_1, \dots, t_n) \quad (*)$$

Demonstrăm prin inducție după $k \geq 0$ că

oricare ar fi $\varphi = \forall x_k \dots \forall x_1 \psi$ un enunț în forma Skolem,
 $\mathcal{A} \models \varphi$ implică $\mathcal{H} \models \varphi$

Teorema lui Herbrand

Demonstrație (cont.)

- Pasul de bază $k = 0$. În acest caz $\varphi = \psi$ și φ nu are variabile libere. Deci φ este formată din formule atomice care conțin doar termeni fără variabile. Aplicând (*) rezultă că $\mathcal{A} \models \varphi$ implică $\mathcal{H} \models \varphi$.

Teorema lui Herbrand

Demonstrație (cont.)

- Pasul de bază $k = 0$. În acest caz $\varphi = \psi$ și φ nu are variabile libere. Deci φ este formată din formule atomice care conțin doar termeni fără variabile. Aplicând (*) rezultă că $\mathcal{A} \models \varphi$ implică $\mathcal{H} \models \varphi$.
- Presupunem afirmația adevărată pentru $k - 1$ și o demonstrăm pentru k . Dacă notăm $\alpha = \forall x_{k-1} \dots \forall x_1 \psi$ atunci $\varphi = \forall x_k \alpha$.

Teorema lui Herbrand

Demonstrație (cont.)

- Pasul de bază $k = 0$. În acest caz $\varphi = \psi$ și φ nu are variabile libere. Deci φ este formată din formule atomice care conțin doar termeni fără variabile. Aplicând (*) rezultă că $\mathcal{A} \models \varphi$ implică $\mathcal{H} \models \varphi$.
- Presupunem afirmația adevărată pentru $k - 1$ și o demonstrăm pentru k . Dacă notăm $\alpha = \forall x_{k-1} \dots \forall x_1 \psi$ atunci $\varphi = \forall x_k \alpha$. Observăm că α nu satisface ipoteza de inducție deoarece poate conține x_k ca variabilă liberă.

Teorema lui Herbrand

Demonstrație (cont.)

- Pasul de bază $k = 0$. În acest caz $\varphi = \psi$ și φ nu are variabile libere. Deci φ este formată din formule atomice care conțin doar termeni fără variabile. Aplicând (*) rezultă că $\mathcal{A} \models \varphi$ implică $\mathcal{H} \models \varphi$.
- Presupunem afirmația adevărată pentru $k - 1$ și o demonstrăm pentru k . Dacă notăm $\alpha = \forall x_{k-1} \dots \forall x_1 \psi$ atunci $\varphi = \forall x_k \alpha$. Observăm că α nu satisface ipoteza de inducție deoarece poate conține x_k ca variabilă liberă.
Fie $t \in T_{\mathcal{L}}$ un termen fără variabile. Observăm că $\alpha[x_k/t]$ este enunț în formă Skolem,

Teorema lui Herbrand

Demonstrație (cont.)

□ Pasul de bază $k = 0$. În acest caz $\varphi = \psi$ și φ nu are variabile libere. Deci φ este formată din formule atomice care conțin doar termeni fără variabile. Aplicând (*) rezultă că $\mathcal{A} \models \varphi$ implică $\mathcal{H} \models \varphi$.

□ Presupunem afirmația adevărată pentru $k - 1$ și o demonstrăm pentru k . Dacă notăm $\alpha = \forall x_{k-1} \dots \forall x_1 \psi$ atunci $\varphi = \forall x_k \alpha$.

Observăm că α nu satisface ipoteza de inducție deoarece poate conține x_k ca variabilă liberă.

Fie $t \in T_{\mathcal{L}}$ un termen fără variabile. Observăm că $\alpha[x_k/t]$ este enunț în formă Skolem, deci $\mathcal{A} \models \alpha[x_k/t]$ implică $\mathcal{H} \models \alpha[x_k/t]$ din ipoteza de inducție.

Teorema lui Herbrand

Demonstrație (cont.)

□ $\mathcal{A} \models \varphi$ implică

Teorema lui Herbrand

Demonstrație (cont.)

- $\mathcal{A} \models \varphi$ implică
- $\mathcal{A}, I \models \varphi$ pentru orice interpretare I , ceea ce implică

Teorema lui Herbrand

Demonstrație (cont.)

- $\mathcal{A} \models \varphi$ implică
- $\mathcal{A}, I \models \varphi$ pentru orice interpretare I , ceea ce implică
- $\mathcal{A}, I_{x_k \leftarrow a} \models \alpha$ pentru orice $a \in A$. Aplicând Propoziția 1 obținem

Teorema lui Herbrand

Demonstrație (cont.)

- $\mathcal{A} \models \varphi$ implică
- $\mathcal{A}, I \models \varphi$ pentru orice interpretare I , ceea ce implică
- $\mathcal{A}, I_{x_k \leftarrow a} \models \alpha$ pentru orice $a \in A$. Aplicând Propoziția 1 obținem
- $\mathcal{A}, I \models \alpha[x_k/t]$ pentru orice $t \in T_{\mathcal{L}}$.

Teorema lui Herbrand

Demonstrație (cont.)

- $\mathcal{A} \models \varphi$ implică
- $\mathcal{A}, I \models \varphi$ pentru orice interpretare I , ceea ce implică
- $\mathcal{A}, I_{x_k \leftarrow a} \models \alpha$ pentru orice $a \in A$. Aplicând Propoziția 1 obținem
- $\mathcal{A}, I \models \alpha[x_k/t]$ pentru orice $t \in T_{\mathcal{L}}$.
- Deoarece I a fost o interpretare arbitrară, am demonstrat că

Teorema lui Herbrand

Demonstrație (cont.)

- $\mathcal{A} \models \varphi$ implică
- $\mathcal{A}, I \models \varphi$ pentru orice interpretare I , ceea ce implică
- $\mathcal{A}, I_{x_k \leftarrow a} \models \alpha$ pentru orice $a \in A$. Aplicând Propoziția 1 obținem
- $\mathcal{A}, I \models \alpha[x_k/t]$ pentru orice $t \in T_{\mathcal{L}}$.
- Deoarece I a fost o interpretare arbitrară, am demonstrat că
- $\mathcal{A} \models \alpha[x_k/t]$ pentru orice $t \in T_{\mathcal{L}}$.

Teorema lui Herbrand

Demonstrație (cont.)

- $\mathcal{A} \models \varphi$ implică
- $\mathcal{A}, I \models \varphi$ pentru orice interpretare I , ceea ce implică
- $\mathcal{A}, I_{x_k \leftarrow a} \models \alpha$ pentru orice $a \in A$. Aplicând Propoziția 1 obținem
- $\mathcal{A}, I \models \alpha[x_k/t]$ pentru orice $t \in T_{\mathcal{L}}$.
- Deoarece I a fost o interpretare arbitrară, am demonstrat că
- $\mathcal{A} \models \alpha[x_k/t]$ pentru orice $t \in T_{\mathcal{L}}$.
- Aplicând ipoteza de inducție obținem

Teorema lui Herbrand

Demonstrație (cont.)

- $\mathcal{A} \models \varphi$ implică
- $\mathcal{A}, I \models \varphi$ pentru orice interpretare I , ceea ce implică
- $\mathcal{A}, I_{x_k \leftarrow a} \models \alpha$ pentru orice $a \in A$. Aplicând Propoziția 1 obținem
- $\mathcal{A}, I \models \alpha[x_k/t]$ pentru orice $t \in T_{\mathcal{L}}$.
- Deoarece I a fost o interpretare arbitrară, am demonstrat că
- $\mathcal{A} \models \alpha[x_k/t]$ pentru orice $t \in T_{\mathcal{L}}$.
- Aplicând ipoteza de inducție obținem
- $\mathcal{H} \models \alpha[x_k/t]$ pentru orice $t \in T_{\mathcal{L}}$, adică

Teorema lui Herbrand

Demonstrație (cont.)

- $\mathcal{A} \models \varphi$ implică
- $\mathcal{A}, I \models \varphi$ pentru orice interpretare I , ceea ce implică
- $\mathcal{A}, I_{x_k \leftarrow a} \models \alpha$ pentru orice $a \in A$. Aplicând Propoziția 1 obținem
- $\mathcal{A}, I \models \alpha[x_k/t]$ pentru orice $t \in T_{\mathcal{L}}$.
- Deoarece I a fost o interpretare arbitrară, am demonstrat că
- $\mathcal{A} \models \alpha[x_k/t]$ pentru orice $t \in T_{\mathcal{L}}$.
- Aplicând ipoteza de inducție obținem
- $\mathcal{H} \models \alpha[x_k/t]$ pentru orice $t \in T_{\mathcal{L}}$, adică
- $\mathcal{H}, H \models \alpha[x_k/t]$ pentru orice $t \in T_{\mathcal{L}}$ și orice interpretarea H .

Teorema lui Herbrand

Demonstrație (cont.)

- $\mathcal{A} \models \varphi$ implică
- $\mathcal{A}, I \models \varphi$ pentru orice interpretare I , ceea ce implică
- $\mathcal{A}, I_{x_k \leftarrow a} \models \alpha$ pentru orice $a \in A$. Aplicând Propoziția 1 obținem
- $\mathcal{A}, I \models \alpha[x_k/t]$ pentru orice $t \in T_{\mathcal{L}}$.
- Deoarece I a fost o interpretare arbitrară, am demonstrat că
- $\mathcal{A} \models \alpha[x_k/t]$ pentru orice $t \in T_{\mathcal{L}}$.
- Aplicând ipoteza de inducție obținem
- $\mathcal{H} \models \alpha[x_k/t]$ pentru orice $t \in T_{\mathcal{L}}$, adică
- $\mathcal{H}, H \models \alpha[x_k/t]$ pentru orice $t \in T_{\mathcal{L}}$ și orice interpretarea H .
- Folosind Propoziția 2 obținem

Teorema lui Herbrand

Demonstrație (cont.)

- $\mathcal{A} \models \varphi$ implică
- $\mathcal{A}, I \models \varphi$ pentru orice interpretare I , ceea ce implică
- $\mathcal{A}, I_{x_k \leftarrow a} \models \alpha$ pentru orice $a \in A$. Aplicând Propoziția 1 obținem
- $\mathcal{A}, I \models \alpha[x_k/t]$ pentru orice $t \in T_{\mathcal{L}}$.
- Deoarece I a fost o interpretare arbitrară, am demonstrat că
- $\mathcal{A} \models \alpha[x_k/t]$ pentru orice $t \in T_{\mathcal{L}}$.
- Aplicând ipoteza de inducție obținem
- $\mathcal{H} \models \alpha[x_k/t]$ pentru orice $t \in T_{\mathcal{L}}$, adică
- $\mathcal{H}, H \models \alpha[x_k/t]$ pentru orice $t \in T_{\mathcal{L}}$ și orice interpretarea H .
- Folosind Propoziția 2 obținem
- $\mathcal{H}, H_{x_k \leftarrow t} \models \alpha$ pentru orice $t \in T_{\mathcal{L}}$ și orice interpretare H , deci

Teorema lui Herbrand

Demonstrație (cont.)

- $\mathcal{A} \models \varphi$ implică
- $\mathcal{A}, I \models \varphi$ pentru orice interpretare I , ceea ce implică
- $\mathcal{A}, I_{x_k \leftarrow a} \models \alpha$ pentru orice $a \in A$. Aplicând Propoziția 1 obținem
- $\mathcal{A}, I \models \alpha[x_k/t]$ pentru orice $t \in T_{\mathcal{L}}$.
- Deoarece I a fost o interpretare arbitrară, am demonstrat că
- $\mathcal{A} \models \alpha[x_k/t]$ pentru orice $t \in T_{\mathcal{L}}$.
- Aplicând ipoteza de inducție obținem
- $\mathcal{H} \models \alpha[x_k/t]$ pentru orice $t \in T_{\mathcal{L}}$, adică
- $\mathcal{H}, H \models \alpha[x_k/t]$ pentru orice $t \in T_{\mathcal{L}}$ și orice interpretarea H .
- Folosind Propoziția 2 obținem
- $\mathcal{H}, H_{x_k \leftarrow t} \models \alpha$ pentru orice $t \in T_{\mathcal{L}}$ și orice interpretare H , deci
- $\mathcal{H}, H \models \forall x_k \alpha$ pentru orice interpretare H , adică

Teorema lui Herbrand

Demonstrație (cont.)

- $\mathcal{A} \models \varphi$ implică
- $\mathcal{A}, I \models \varphi$ pentru orice interpretare I , ceea ce implică
- $\mathcal{A}, I_{x_k \leftarrow a} \models \alpha$ pentru orice $a \in A$. Aplicând Propoziția 1 obținem
- $\mathcal{A}, I \models \alpha[x_k/t]$ pentru orice $t \in T_{\mathcal{L}}$.
- Deoarece I a fost o interpretare arbitrară, am demonstrat că
- $\mathcal{A} \models \alpha[x_k/t]$ pentru orice $t \in T_{\mathcal{L}}$.
- Aplicând ipoteza de inducție obținem
- $\mathcal{H} \models \alpha[x_k/t]$ pentru orice $t \in T_{\mathcal{L}}$, adică
- $\mathcal{H}, H \models \alpha[x_k/t]$ pentru orice $t \in T_{\mathcal{L}}$ și orice interpretarea H .
- Folosind Propoziția 2 obținem
- $\mathcal{H}, H_{x_k \leftarrow t} \models \alpha$ pentru orice $t \in T_{\mathcal{L}}$ și orice interpretare H , deci
- $\mathcal{H}, H \models \forall x_k \alpha$ pentru orice interpretare H , adică $\mathcal{H} \models \varphi$ □

Teorema lui Herbrand

Teorema lui Herbrand

Fie $n \geq 0$ și $\varphi = \forall x_k \dots \forall x_1 \psi$ un enunț în forma Skolem.

Atunci φ are un model dacă și numai dacă are un model Herbrand.

Teorema lui Herbrand reduce problema satisfiabilității la găsirea unui model Herbrand.

Teorema lui Herbrand

Exemplu

Fie \mathcal{L} un limbaj cu $\mathbf{R} = \{P, R\}$, $\mathbf{C} = \{c_1, c_2, c_3\}$ și $\text{ari}(P) = \text{ari}(R) = 1$.
Cercetați **satisfiabilitatea** formulelor:

□ $\varphi = \forall x \forall y (P(x) \wedge R(y) \rightarrow P(y))$

Teorema lui Herbrand

Exemplu

Fie \mathcal{L} un limbaj cu $\mathbf{R} = \{P, R\}$, $\mathbf{C} = \{c_1, c_2, c_3\}$ și $\text{ari}(P) = \text{ari}(R) = 1$.
Cercetați **satisfiabilitatea** formulelor:

□ $\varphi = \forall x \forall y (P(x) \wedge R(y) \rightarrow P(y))$

Știm că este suficient să găsim un model Herbrand.

Teorema lui Herbrand

Exemplu

Fie \mathcal{L} un limbaj cu $\mathbf{R} = \{P, R\}$, $\mathbf{C} = \{c_1, c_2, c_3\}$ și $\text{ari}(P) = \text{ari}(R) = 1$.
Cercetați **satisfiabilitatea** formulelor:

□ $\varphi = \forall x \forall y (P(x) \wedge R(y) \rightarrow P(y))$

Știm că este suficient să găsim un model Herbrand.

Considerăm structura Herbrand \mathcal{H} cu

□ $T_{\mathcal{L}} = \{c_1, c_2, c_3\}$

□ $P^{\mathcal{H}} = \{c_1\}$ și $R^{\mathcal{H}} = \{c_1\}$

Teorema lui Herbrand

Exemplu

Fie \mathcal{L} un limbaj cu $\mathbf{R} = \{P, R\}$, $\mathbf{C} = \{c_1, c_2, c_3\}$ și $\text{ari}(P) = \text{ari}(R) = 1$. Cercetați **satisfiabilitatea** formulelor:

□ $\varphi = \forall x \forall y (P(x) \wedge R(y) \rightarrow P(y))$

Știm că este suficient să găsim un model Herbrand.

Considerăm structura Herbrand \mathcal{H} cu

□ $T_{\mathcal{L}} = \{c_1, c_2, c_3\}$

□ $P^{\mathcal{H}} = \{c_1\}$ și $R^{\mathcal{H}} = \{c_1\}$

Se observă că $\mathcal{H} \models \varphi$, deci φ este satisfiabilă.

Teorema lui Herbrand

Exemplu (cont.)

$$\square \psi = (P(c_1) \rightarrow R(c_3)) \wedge (\neg P(c_1) \rightarrow P(c_2)).$$

Teorema lui Herbrand

Exemplu (cont.)

□ $\psi = (P(c_1) \rightarrow R(c_3)) \wedge (\neg P(c_1) \rightarrow P(c_2)).$

Formulele atomice sunt asemănătoare variabilelor din calculul propozițional. Putem scrie interpretările Herbrand într-un tabel

$P(c_1)$	$R(c_3)$	$P(c_2)$	ψ
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
...

Teorema lui Herbrand

Exemplu (cont.)

□ $\psi = (P(c_1) \rightarrow R(c_3)) \wedge (\neg P(c_1) \rightarrow P(c_2)).$

Formulele atomice sunt asemănătoare variabilelor din calculul propozițional. Putem scrie interpretările Herbrand într-un tabel

$P(c_1)$	$R(c_3)$	$P(c_2)$	ψ
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
...

Observăm că formula este adevărată într-o interpretare în care $P(c_2)$ este adevărată, iar $P(c_1)$ și $R(c_3)$ sunt false.

Teorema lui Herbrand

Exemplu (cont.)

□ $\psi = (P(c_1) \rightarrow R(c_3)) \wedge (\neg P(c_1) \rightarrow P(c_2)).$

Formulele atomice sunt asemănătoare variabilelor din calculul propozițional. Putem scrie interpretările Herbrand într-un tabel

$P(c_1)$	$R(c_3)$	$P(c_2)$	ψ
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
...

Observăm că formula este adevărată într-o interpretare în care $P(c_2)$ este adevărată, iar $P(c_1)$ și $R(c_3)$ sunt false.

Considerăm structura Herbrand \mathcal{H} cu

- $T_{\mathcal{L}} = \{c_1, c_2, c_3\}$
- $P^{\mathcal{H}} = \{c_2\}$ și $R^{\mathcal{H}} = \{c_2\}$

Teorema lui Herbrand

Exemplu (cont.)

□ $\psi = (P(c_1) \rightarrow R(c_3)) \wedge (\neg P(c_1) \rightarrow P(c_2)).$

Formulele atomice sunt asemănătoare variabilelor din calculul propozițional. Putem scrie interpretările Herbrand într-un tabel

$P(c_1)$	$R(c_3)$	$P(c_2)$	ψ
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
...

Observăm că formula este adevărată într-o interpretare în care $P(c_2)$ este adevărată, iar $P(c_1)$ și $R(c_3)$ sunt false.

Considerăm structura Herbrand \mathcal{H} cu

□ $T_{\mathcal{L}} = \{c_1, c_2, c_3\}$

□ $P^{\mathcal{H}} = \{c_2\}$ și $R^{\mathcal{H}} = \{c_2\}$

Se observă că $\mathcal{H} \models \psi$, deci ψ este satisfiabilă.

Teorema lui Herbrand

Exemplu

Fie \mathcal{L} un limbaj cu $\mathbf{R} = \{P, R\}$, $\mathbf{C} = \emptyset$ și $\text{ari}(P) = \text{ari}(R) = 1$. Cercetați validitatea formulei

$$\chi = \forall x \forall y \forall z (\neg(P(x) \rightarrow R(z)) \vee \neg(\neg P(x) \rightarrow P(y)))$$

Teorema lui Herbrand

Exemplu

Fie \mathcal{L} un limbaj cu $\mathbf{R} = \{P, R\}$, $\mathbf{C} = \emptyset$ și $\text{ari}(P) = \text{ari}(R) = 1$. Cercetați validitatea formulei

$$\chi = \forall x \forall y \forall z (\neg(P(x) \rightarrow R(z)) \vee \neg(\neg P(x) \rightarrow P(y)))$$

- A cerceta validitatea lui χ este echivalent cu a cerceta satisfiabilitatea lui $\neg\chi$

$$\neg\chi = \exists x \exists y \exists z ((P(x) \rightarrow R(z)) \wedge (\neg P(x) \rightarrow P(y)))$$

Teorema lui Herbrand

Exemplu

Fie \mathcal{L} un limbaj cu $\mathbf{R} = \{P, R\}$, $\mathbf{C} = \emptyset$ și $\text{ari}(P) = \text{ari}(R) = 1$. Cercetați validitatea formulei

$$\chi = \forall x \forall y \forall z (\neg(P(x) \rightarrow R(z)) \vee \neg(\neg P(x) \rightarrow P(y)))$$

- A cerceta validitatea lui χ este echivalent cu a cerceta satisfiabilitatea lui $\neg\chi$

$$\neg\chi = \exists x \exists y \exists z ((P(x) \rightarrow R(z)) \wedge (\neg P(x) \rightarrow P(y)))$$

- Determinăm forma Skolem: $\mathcal{L}^{sk} = \mathcal{L} \cup \{c_1, c_2, c_3\}$

$$(\neg\chi)^{sk} = (P(c_1) \rightarrow R(c_3)) \wedge (\neg P(c_1) \rightarrow P(c_2))$$

Teorema lui Herbrand

Exemplu

Fie \mathcal{L} un limbaj cu $\mathbf{R} = \{P, R\}$, $\mathbf{C} = \emptyset$ și $\text{ari}(P) = \text{ari}(R) = 1$. Cercetați **validitatea** formulei

$$\chi = \forall x \forall y \forall z (\neg(P(x) \rightarrow R(z)) \vee \neg(\neg P(x) \rightarrow P(y)))$$

- A cerceta validitatea lui χ este echivalent cu a cerceta satisfiabilitatea lui $\neg\chi$

$$\neg\chi = \exists x \exists y \exists z ((P(x) \rightarrow R(z)) \wedge (\neg P(x) \rightarrow P(y)))$$

- Determinăm forma Skolem: $\mathcal{L}^{sk} = \mathcal{L} \cup \{c_1, c_2, c_3\}$

$$(\neg\chi)^{sk} = (P(c_1) \rightarrow R(c_3)) \wedge (\neg P(c_1) \rightarrow P(c_2))$$

- Din exercițiul anterior știm că $(\neg\chi)^{sk}$ este satisfiabilă, deci **$\neg\chi$ este satisfiabilă**. În concluzie, **χ nu este adevărată** în logica de ordinul I, i.e. $\not\models \chi$.

Universul Herbrand al unei formule

Fie φ un enunț în forma Skolem, adică $\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_n \psi$.

□ Definim $T(\varphi)$, **universul Herbrand al formulei φ** , astfel:

- dacă c este o constantă care apare în φ atunci $c \in T(\varphi)$,
- dacă φ nu conține nicio constantă atunci alegem o constantă arbitrară c și considerăm că $c \in T(\varphi)$,
- dacă f este un simbol de funcție care apare în φ cu $ari(f) = n$ și $t_1, \dots, t_n \in T(\varphi)$ atunci $f(t_1, \dots, t_n) \in T(\varphi)$.

Universul Herbrand al unei formule

Fie φ un enunț în forma Skolem, adică $\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_n \psi$.

- Definim $T(\varphi)$, **universul Herbrand al formulei φ** , astfel:
 - dacă c este o constantă care apare în φ atunci $c \in T(\varphi)$,
 - dacă φ nu conține nicio constantă atunci alegem o constantă arbitrară c și considerăm că $c \in T(\varphi)$,
 - dacă f este un simbol de funcție care apare în φ cu $ari(f) = n$ și $t_1, \dots, t_n \in T(\varphi)$ atunci $f(t_1, \dots, t_n) \in T(\varphi)$.

Exemplu

- pt. $\varphi_1 = \forall x \forall y (P(x) \wedge R(y) \rightarrow P(y))$ avem $T(\varphi_1) = \{c\}$
- pt. $\varphi_2 = \forall x (\neg P(x) \wedge P(f(c)))$ avem $T(\varphi_2) = \{c, f(c), f(f(c)), \dots\}$

Intuitiv, $T(\varphi)$ este mulțimea termenilor care se pot construi folosind simbolurile de funcții care apar în φ .

Expansiunea Herbrand a unei formule

Fie φ un enunț în forma Skolem, adică $\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_n \psi$.

□ Definim **expansiunea Herbrand** a lui φ astfel

$$\mathcal{H}(\varphi) = \{ \psi[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n] \mid t_1, \dots, t_n \in T(\varphi) \}$$

Expansiunea Herbrand a unei formule

Fie φ un enunț în forma Skolem, adică $\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_n \psi$.

□ Definim **expansiunea Herbrand** a lui φ astfel

$$\mathcal{H}(\varphi) = \{ \psi[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n] \mid t_1, \dots, t_n \in T(\varphi) \}$$

Exemplu

□ $\varphi_1 = \forall x \forall y (P(x) \wedge R(y) \rightarrow P(y))$
 $T(\varphi_1) = \{c\}$
 $\mathcal{H}(\varphi_1) = \{P(c) \wedge R(c) \rightarrow P(c)\}$

Expansiunea Herbrand a unei formule

Fie φ un enunț în forma Skolem, adică $\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_n \psi$.

□ Definim **expansiunea Herbrand** a lui φ astfel

$$\mathcal{H}(\varphi) = \{ \psi[x_1/t_1, \dots, x_n/t_n] \mid t_1, \dots, t_n \in T(\varphi) \}$$

Exemplu

□ $\varphi_1 = \forall x \forall y (P(x) \wedge R(y) \rightarrow P(y))$

$$T(\varphi_1) = \{c\}$$

$$\mathcal{H}(\varphi_1) = \{P(c) \wedge R(c) \rightarrow P(c)\}$$

□ $\varphi_2 = \forall x (\neg P(x) \wedge P(f(c)))$

$$T(\varphi_2) = \{c, f(c), f(f(c)), \dots\}$$

$$\mathcal{H}(\varphi_2) = \{ \neg P(c) \wedge P(f(c)), \neg P(f(c)) \wedge P(f(c)), \\ \neg P(f(f(c))) \wedge P(f(c)), \neg P(f(f(f(c)))) \wedge P(f(c)), \dots \}$$

Expansiunea Herbrand al unei formule

Fie φ un enunț în forma Skolem, adică $\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_n \psi$.

Teoremă

Sunt echivalente:

- φ este satisfiabilă,

Expansiunea Herbrand al unei formule

Fie φ un enunț în forma Skolem, adică $\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_n \psi$.

Teoremă

Sunt echivalente:

- φ este satisfiabilă,
- φ are un model Herbrand \mathcal{H} cu proprietatea că $\mathbf{R}^{\mathcal{H}} \subseteq T(\varphi)^n$ pentru orice relație $R \in \mathbf{R}$ cu $\text{ari}(R) = n$ care apare în φ ,

Expansiunea Herbrand al unei formule

Fie φ un enunț în forma Skolem, adică $\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_n \psi$.

Teoremă

Sunt echivalente:

- ☐ φ este satisfiabilă,
- ☐ φ are un model Herbrand \mathcal{H} cu proprietatea că $\mathbf{R}^{\mathcal{H}} \subseteq T(\varphi)^n$ pentru orice relație $R \in \mathbf{R}$ cu $\text{ari}(R) = n$ care apare în φ ,
- ☐ mulțimea de formule $\mathcal{H}(\varphi)$ este satisfiabilă.

Expansiunea Herbrand al unei formule

Exemplu

$$\square \varphi_1 = \forall x \forall y (P(x) \wedge R(y) \rightarrow P(y))$$

$$T(\varphi_1) = \{c\}$$

$$\mathcal{H}(\varphi_1) = \{P(c) \wedge R(c) \rightarrow P(c)\}$$

$$\mathcal{H}(\varphi_1) \text{ este satisfiabilă: } P^{\mathcal{H}} = R^{\mathcal{H}} = \{c\}$$

Expansiunea Herbrand al unei formule

Exemplu

□ $\varphi_1 = \forall x \forall y (P(x) \wedge R(y) \rightarrow P(y))$

$$T(\varphi_1) = \{c\}$$

$$\mathcal{H}(\varphi_1) = \{P(c) \wedge R(c) \rightarrow P(c)\}$$

$\mathcal{H}(\varphi_1)$ este satisfiabilă: $P^{\mathcal{H}} = R^{\mathcal{H}} = \{c\}$

□ $\varphi_2 = \forall x (\neg P(x) \wedge P(f(c)))$

$$T(\varphi_2) = \{c, f(c), f(f(c)), \dots\}$$

$$\mathcal{H}(\varphi_2) = \{\neg P(c) \wedge P(f(c)), \neg P(f(c)) \wedge P(f(c)), \\ \neg P(f(f(c))) \wedge P(f(c)), \neg P(f(f(f(c)))) \wedge P(f(c)), \dots\}$$

$\mathcal{H}(\varphi_2)$ nu este satisfiabilă: conține formula $\neg P(f(c)) \wedge P(f(c))$.

- Cercetarea validității poate fi redusă la cercetarea satisfiabilității.
- Cercetarea satisfiabilității unei formule poate fi redusă la cercetarea satisfiabilității unui enunț în forma Skolem.
- Teorema lui Herbrand reduce verificarea satisfiabilității unui enunț în forma Skolem la verificarea satisfiabilității în universul Herbrand.
- În situații particulare Teorema lui Herbrand ne dă o procedură de decizie a satisfiabilității, dar acest fapt **nu este adevărat** în general:
dacă limbajul \mathcal{L} conține cel puțin o constantă și cel puțin un simbol de funcție f cu $ari(f) \geq 1$ atunci universul Herbrand $T_{\mathcal{L}}$ este infinit.

Decidabilitate și semi-decidabilitate

Probleme decidabile și semi-decidabile

- O problemă de decizie este o problemă cu răspuns binar T/F.

Este n număr prim?

Probleme decidabile și semi-decidabile

- O **problemă de decizie** este o problemă cu răspuns binar **T/F**.

Este n număr prim?

- O problemă de decizie $\mathcal{D}(x)$ este **decidabilă** dacă există un algoritm care, pentru orice intrare x , întoarce **T** când $\mathcal{D}(x)$ este adevărată și **F** când $\mathcal{D}(x)$ este falsă.

Probleme decidabile și semi-decidabile

- O **problemă de decizie** este o problemă cu răspuns binar **T/F**.

Este n număr prim?

- O problemă de decizie $\mathcal{D}(x)$ este **decidabilă** dacă există un algoritm care, pentru orice intrare x , întoarce **T** când $\mathcal{D}(x)$ este adevărată și **F** când $\mathcal{D}(x)$ este falsă.
- O problemă de decizie $\mathcal{D}(x)$ este **semi-decidabilă (recursiv enumerabilă)** dacă există un algoritm care, pentru orice intrare x , întoarce **T** când $\mathcal{D}(x)$ este adevărată, dar este posibil să nu se termine când $\mathcal{D}(x)$ este falsă.

Probleme decidabile și semi-decidabile

- O **problemă de decizie** este o problemă cu răspuns binar **T/F**.

Este n număr prim?

- O problemă de decizie $\mathcal{D}(x)$ este **decidabilă** dacă există un algoritm care, pentru orice intrare x , întoarce **T** când $\mathcal{D}(x)$ este adevărată și **F** când $\mathcal{D}(x)$ este falsă.
- O problemă de decizie $\mathcal{D}(x)$ este **semi-decidabilă (recursiv enumerabilă)** dacă există un algoritm care, pentru orice intrare x , întoarce **T** când $\mathcal{D}(x)$ este adevărată, dar este posibil să nu se termine când $\mathcal{D}(x)$ este falsă.

$\mathcal{D}(n) = "n \text{ este număr prim}"$ este decidabilă.

Problema validității ¹

Vom analiza problema validității în logica de ordinul I, adică:

$$\mathfrak{D}(\varphi) = "\varphi \text{ este validă}"$$

¹Referințe

M. Huth, M. Ryan, Logic in Computer Science, 2009

<http://www.cs.ox.ac.uk/people/james.worrell/lectures.html>

Problema validității ¹

Vom analiza problema validității în logica de ordinul I, adică:

$$\mathcal{D}(\varphi) = "\varphi \text{ este validă}"$$

- În logica de ordinul I, problema validității $\mathcal{D}(\varphi)$ este semi-decidabilă.

¹Referințe

M. Huth, M. Ryan, Logic in Computer Science, 2009

<http://www.cs.ox.ac.uk/people/james.worrell/lectures.html>

Problema validității ¹

Vom analiza problema validității în logica de ordinul I, adică:

$$\mathcal{D}(\varphi) = \text{"}\varphi \text{ este validă"}$$

- În logica de ordinul I, problema validității $\mathcal{D}(\varphi)$ este semi-decidabilă.
- În logica de ordinul I, problema validității $\mathcal{D}(\varphi)$ nu este decidabilă.

¹Referințe

M. Huth, M. Ryan, Logic in Computer Science, 2009

<http://www.cs.ox.ac.uk/people/james.worrell/lectures.html>

Semi-decidabilitatea validității în logica de ordinul I

$\mathcal{D}(\varphi) ?$

Semi-decidabilitatea validității în logica de ordinul I

$\mathcal{D}(\varphi) ?$

Teorema de compacitate - cazul propozițional

În **calculul propozițional** o mulțime de formule Γ este satisfiabilă dacă și numai dacă orice submulțime finită a sa este satisfiabilă.

Semi-decidabilitatea validității în logica de ordinul I

$$\mathcal{D}(\varphi) ?$$

Teorema de compacitate - cazul propozițional

În **calculul propozițional** o mulțime de formule Γ este satisfiabilă dacă și numai dacă orice submulțime finită a sa este satisfiabilă.

Corolar

Fie φ un enunț în forma Skolem (în logica de ordinul I) și $\mathcal{H}(\varphi)$ expansiunea Herbrand. Sunt echivalente:

- ☐ φ nu este satisfiabilă,
- ☐ există o submulțime finită a lui $\mathcal{H}(\varphi)$ care nu este satisfiabilă.

Semi-decidabilitatea validității în logica de ordinul I

$\mathcal{D}(\varphi) ?$

Procedură de semi-decidabilitate pentru validitate

Intrare: φ enunț

Semi-decidabilitatea validității în logica de ordinul I

$\mathcal{D}(\varphi) ?$

Procedură de semi-decidabilitate pentru validitate

Intrare: φ enunț

- 1 se determina ψ forma Skolem pentru $\neg\varphi$ (ψ este $(\neg\varphi)^{sk}$)

Semi-decidabilitatea validității în logica de ordinul I

$\mathcal{D}(\varphi) ?$

Procedură de semi-decidabilitate pentru validitate

Intrare: φ enunț

- 1 se determina ψ forma Skolem pentru $\neg\varphi$ (ψ este $(\neg\phi)^{sk}$)
- 2 fie $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots\}$ o enumerare pentru $\mathcal{H}(\psi)$

Semi-decidabilitatea validității în logica de ordinul I

$\mathcal{D}(\varphi) ?$

Procedură de semi-decidabilitate pentru validitate

Intrare: φ enunț

- 1 se determina ψ forma Skolem pentru $\neg\varphi$ (ψ este $(\neg\phi)^{sk}$)
- 2 fie $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots\}$ o enumerare pentru $\mathcal{H}(\psi)$
- 3 pentru $n = 1, 2, 3, \dots$ execută
dacă $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$

Semi-decidabilitatea validității în logica de ordinul I

$\mathcal{D}(\varphi)$?

Procedură de semi-decidabilitate pentru validitate

Intrare: φ enunț

- 1 se determina ψ forma Skolem pentru $\neg\varphi$ (ψ este $(\neg\phi)^{sk}$)
- 2 fie $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots\}$ o enumerare pentru $\mathcal{H}(\psi)$
- 3 pentru $n = 1, 2, 3, \dots$ execută
 dacă $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ **nu este satisfiabilă** atunci
 { **leșire:** φ este valid;
 stop }

Nedecidabilitatea validității în logica de ordinul I

□ Problema corespondenței lui Post (PCP)

Fie $\mathbf{P} = \{(w_1, w'_1), \dots, (w_k, w'_k)\}$ cu $w_i, w'_i \in \{0, 1\}^+$. O soluție pentru \mathbf{P} este o secvență de indici i_1, i_2, \dots, i_n cu $n \geq 1$ astfel încât

$$w_{i_1} \cdots w_{i_n} = w'_{i_1} \cdots w'_{i_n}.$$

Exemplu

\mathbf{P} :

1
101

10
00

011
11

Nedecidabilitatea validității în logica de ordinul I

□ Problema corespondenței lui Post (PCP)

Fie $\mathbf{P} = \{(w_1, w'_1), \dots, (w_k, w'_k)\}$ cu $w_i, w'_i \in \{0, 1\}^+$. O **soluție** pentru \mathbf{P} este o secvență de indici i_1, i_2, \dots, i_n cu $n \geq 1$ astfel încât

$$w_{i_1} \cdots w_{i_n} = w'_{i_1} \cdots w'_{i_n}.$$

Exemplu

\mathbf{P} :

1	10	011
101	00	11

Secvența (1,3,2,3) este soluție:

1	011	10	011	101110011
101	11	00	11	101110011

Nedecidabilitatea validității în logica de ordinul I

□ Problema corespondenței lui Post (PCP)

Fie $\mathbf{P} = \{(w_1, w'_1), \dots, (w_k, w'_k)\}$ cu $w_i, w'_i \in \{0, 1\}^+$. O **soluție** pentru \mathbf{P} este o secvență de indici i_1, i_2, \dots, i_n cu $n \geq 1$ astfel încât

$$w_{i_1} \cdots w_{i_n} = w'_{i_1} \cdots w'_{i_n}.$$

Exemplu

\mathbf{P} :

1	10	011
101	00	11

Secvența (1,3,2,3) este soluție:

1	011	10	011	101110011
101	11	00	11	101110011

□ PCP este nedecidabilă (E.Post, 1946)

Nedecidabilitatea validității în logica de ordinul I

Teorema Church-Turing

Problema validității în logica de ordinul I este nedecidabilă.

Nedecidabilitatea validității în logica de ordinul I

Teorema Church-Turing

Problema validității în logica de ordinul I este nedecidabilă.

Demonstrație (schiță)

Vom arăta că problema validității poate fi redusă la PCP:

*fiind dată o problemă de corespondență $\mathbf{P} = \{(w_1, w'_1), \dots, (w_k, w'_k)\}$
există o formulă $\varphi_{\mathbf{P}}$ astfel încât*

\mathbf{P} are o soluție dacă și numai dacă $\models \varphi_{\mathbf{P}}$.

Nedecidabilitatea validității în logica de ordinul I

Teorema Church-Turing

Problema validității în logica de ordinul I este nedecidabilă.

Demonstrație (schiță)

Vom arăta că problema validității poate fi redusă la PCP:

fiind dată o problemă de corespondență $\mathbf{P} = \{(w_1, w'_1), \dots, (w_k, w'_k)\}$ există o formulă $\varphi_{\mathbf{P}}$ astfel încât

\mathbf{P} are o soluție dacă și numai dacă $\models \varphi_{\mathbf{P}}$.

Definim \mathcal{L} un limbaj de ordinul I cu $\mathbf{F} = \{f_0, f_1\}$, $\mathbf{R} = \{P\}$, $\mathbf{C} = \{e\}$,
 $\text{ari}(f_0) = \text{ari}(f_1) = 1$ și $\text{ari}(P) = 2$

Nedecidabilitatea validității în logica de ordinul I

Teorema Church-Turing

Problema validității în logica de ordinul I este nedecidabilă.

Demonstrație (schiță)

Vom arăta că problema validității poate fi redusă la PCP:

fiind dată o problemă de corespondență $\mathbf{P} = \{(w_1, w'_1), \dots, (w_k, w'_k)\}$ există o formulă $\varphi_{\mathbf{P}}$ astfel încât

\mathbf{P} are o soluție dacă și numai dacă $\models \varphi_{\mathbf{P}}$.

Definim \mathcal{L} un limbaj de ordinul I cu $\mathbf{F} = \{f_0, f_1\}$, $\mathbf{R} = \{P\}$, $\mathbf{C} = \{e\}$, $\text{ari}(f_0) = \text{ari}(f_1) = 1$ și $\text{ari}(P) = 2$

Pentru $b_1 \dots b_n \in \{0, 1\}^+$ definim $f_{b_1 \dots b_n} := f_{b_n}(f_{b_{n-1}}(\dots(f_{b_1}(e))\dots))$

Nedecidabilitatea validității în logica de ordinul I

Demonstrație (schită)

Fie $\mathbf{P} = \{(w_1, w'_1), \dots, (w_k, w'_k)\}$ o problemă de corespondență.

Definim un model \mathcal{A} :

$A = \{0, 1\}^*$, $e^{\mathcal{A}} := \lambda$, $f_0^{\mathcal{A}}(w) := w0$, $f_1^{\mathcal{A}}(w) := w1$

Nedecidabilitatea validității în logica de ordinul I

Demonstrație (schiță)

Fie $\mathbf{P} = \{(w_1, w'_1), \dots, (w_k, w'_k)\}$ o problemă de corespondență.

Definim un model \mathcal{A} :

$$A = \{0, 1\}^*, e^{\mathcal{A}} := \lambda, f_0^{\mathcal{A}}(w) := w0, f_1^{\mathcal{A}}(w) := w1$$

$$P^{\mathcal{A}} = \{(\mathbf{w}, \mathbf{w}') \mid \text{există } n \geq 1 \text{ și } i_1, \dots, i_n \text{ astfel încât} \\ \mathbf{w} = w_{i_1} \cdots w_{i_n} \text{ și } \mathbf{w}' = w'_{i_1} \cdots w'_{i_n}\}$$

Nedecidabilitatea validității în logica de ordinul I

Demonstrație (schiță)

Fie $\mathbf{P} = \{(w_1, w'_1), \dots, (w_k, w'_k)\}$ o problemă de corespondență.

Definim un model \mathcal{A} :

$$A = \{0, 1\}^*, e^A := \lambda, f_0^A(w) := w0, f_1^A(w) := w1$$

$$P^A = \{(\mathbf{w}, \mathbf{w}') \mid \text{există } n \geq 1 \text{ și } i_1, \dots, i_n \text{ astfel încât} \\ \mathbf{w} = w_{i_1} \cdots w_{i_n} \text{ și } \mathbf{w}' = w'_{i_1} \cdots w'_{i_n}\}$$

Considerăm următoarele formule:

$$\varphi_1 := \bigwedge_{i=1}^k P(f_{w_i}(e), f_{w'_i}(e))$$

$$\varphi_2 := \forall x \forall y \left(P(x, y) \rightarrow \bigwedge_{i=1}^k P(f_{w_i}(x), f_{w'_i}(y)) \right)$$

$$\psi := \exists z P(z, z) \text{ și } \varphi_{\mathbf{P}} := \varphi_1 \wedge \varphi_2 \rightarrow \psi$$

Nedecidabilitatea validității în logica de ordinul I

Demonstrație (schită)

Fie $\mathbf{P} = \{(w_1, w'_1), \dots, (w_k, w'_k)\}$ o problemă de corespondență.

Definim un model \mathcal{A} :

$$A = \{0, 1\}^*, e^{\mathcal{A}} := \lambda, f_0^{\mathcal{A}}(w) := w0, f_1^{\mathcal{A}}(w) := w1$$

$$P^{\mathcal{A}} = \{(\mathbf{w}, \mathbf{w}') \mid \text{există } n \geq 1 \text{ și } i_1, \dots, i_n \text{ astfel încât} \\ \mathbf{w} = w_{i_1} \cdots w_{i_n} \text{ și } \mathbf{w}' = w'_{i_1} \cdots w'_{i_n}\}$$

Considerăm următoarele formule:

$$\varphi_1 := \bigwedge_{i=1}^k P(f_{w_i}(e), f_{w'_i}(e))$$

$$\varphi_2 := \forall x \forall y \left(P(x, y) \rightarrow \bigwedge_{i=1}^k P(f_{w_i}(x), f_{w'_i}(y)) \right)$$

$$\psi := \exists z P(z, z) \text{ și } \varphi_{\mathbf{P}} := \varphi_1 \wedge \varphi_2 \rightarrow \psi$$

Observăm că $\mathcal{A} \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$. În consecință, dacă $\mathcal{A} \models \varphi_{\mathbf{P}}$ atunci $\mathcal{A} \models \psi$, deci \mathbf{P} are o soluție. *Cealaltă implicație este tehnică.*

Nedecidabilitatea validității în logica de ordinul I

Demonstrație (schiță)

Fie $\mathbf{P} = \{(w_1, w'_1), \dots, (w_k, w'_k)\}$ o problemă de corespondență.

Definim un model \mathcal{A} :

$$A = \{0, 1\}^*, e^A := \lambda, f_0^A(w) := w0, f_1^A(w) := w1$$

$$P^A = \{(\mathbf{w}, \mathbf{w}') \mid \text{există } n \geq 1 \text{ și } i_1, \dots, i_n \text{ astfel încât} \\ \mathbf{w} = w_{i_1} \cdots w_{i_n} \text{ și } \mathbf{w}' = w'_{i_1} \cdots w'_{i_n}\}$$

Considerăm următoarele formule:

$$\varphi_1 := \bigwedge_{i=1}^k P(f_{w_i}(e), f_{w'_i}(e))$$

$$\varphi_2 := \forall x \forall y \left(P(x, y) \rightarrow \bigwedge_{i=1}^k P(f_{w_i}(x), f_{w'_i}(y)) \right)$$

$$\psi := \exists z P(z, z) \text{ și } \varphi_{\mathbf{P}} := \varphi_1 \wedge \varphi_2 \rightarrow \psi$$

Observăm că $\mathcal{A} \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$. În consecință, dacă $\mathcal{A} \models \varphi_{\mathbf{P}}$ atunci $\mathcal{A} \models \psi$, deci \mathbf{P} are o soluție. *Cealaltă implicație este tehnică.*

În consecință, $\models \varphi_{\mathbf{P}}$ implică existența unei soluții pentru \mathbf{P} .



Logica de ordinul I

- În logica de ordinul I, problema validității este semi-decidabilă.
- În logica de ordinul I, problema validității nu este decidabilă.



Pe săptămâna viitoare!