Curs 2

Cuprins

Logica propozițională PL (recap.)

Logica propozițională PL

- O propoziție este un enunț care poate fi adevărat (1) sau fals (0).
- Propozițiile sunt notate simbolic (φ, ψ, χ, $\cdots$) și sunt combinate cu ajutorul conectorilor logici ($\neg$, $\rightarrow$, $\vee$, $\wedge$, $\leftrightarrow$).

Exemplu

Fie φ propoziția:

$$(\texttt{stark} \wedge \neg\ \texttt{dead}) \rightarrow (\texttt{sansa} \vee \texttt{arya} \vee \texttt{bran})$$

Cine este $\neg\varphi$? Propoziția $\neg\varphi$ este:

$$\texttt{stark} \wedge \neg\ \texttt{dead} \wedge \neg\texttt{sansa} \wedge \neg\texttt{arya} \wedge \neg\texttt{bran}$$

Limbajul și formulele PL

- Limbajul PL
  - variabile propoziționale: $Var = \{p, q, v, \ldots\}$
  - conectori logici: $\neg$ (unar), $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$ (binari)

- Formulele PL

$$
\begin{array}{lcl}
var & ::= & p \mid q \mid v \mid \ldots \\
form & ::= & var \mid (\neg form) \mid form \wedge form \mid form \vee form \\
 & & \mid form \rightarrow form \mid form \leftrightarrow form
\end{array}
$$

Exemplu

- Nu sunt formule: $v_1 \neg \rightarrow (v_2)$, $\neg v_1 v_2$
- Sunt formule: $((v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow (\neg v_1))$, $(\neg(v_1 \rightarrow v_2))$

- Notăm cu *Form* mulțimea formulelor.

Limbajul și formulele PL

- Limbajul PL
  - variabile propoziționale: $Var = \{p, q, v, \ldots\}$
  - conectori logici: $\neg$ (unar), $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$ (binari)
- Formulele PL

$$
\begin{array}{lcl}
var & ::= & p \mid q \mid v \mid \ldots \\
form & ::= & var \mid (\neg form) \mid form \wedge form \mid form \vee form \\
 & & \mid form \rightarrow form \mid form \leftrightarrow form
\end{array}
$$

- Conectorii sunt împărțiți în conectori de bază și conectori derivați (în funcție de formalism).
- Legături între conectori:

$$
\begin{array}{rcl}
\varphi \vee \psi & := & \neg\varphi \rightarrow \psi \\
\varphi \wedge \psi & := & \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi) \\
\varphi \leftrightarrow \psi & := & (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)
\end{array}
$$

Sintaxa și semantica

Un sistem logic are două componente:

- Sintaxa
  - noțiuni sintactice: demonstrație, teoremă
  - notăm prin $\vdash \varphi$ faptul că φ este teoremă
  - notăm prin $\Gamma \vdash \varphi$ faptul că formula φ este demonstrabilă din mulțimea de formule Γ
- Semantica
  - noțiuni semantice: adevăr, model, tautologie (formulă universal adevărată)
  - notăm prin $\models \varphi$ faptul că φ este tautologie
  - notăm prin $\Gamma \models \varphi$ faptul că formula φ este adevărată atunci când toate formulele din mulțimea Γ sunt adevărate

Exemplu

Formalizați următorul raționament:

`If winter is coming and Ned is not alive then Robb is lord of Winterfell. Winter is coming. Rob is not lord of Winterfell. Then Ned is alive.`

O posibilă formalizare este următoarea:

p = `winter is coming`
q = `Ned is alive`
r = `Robb is lord of Winterfel`

$\{(p \wedge \neg q) \to r, p, \neg r\} \models q$

Semantica PL

- Mulțimea valorilor de adevăr este $\{0, 1\}$ pe care considerăm următoarele operații:

x	$\neg x$
0	1
1	0

x	y	$x \rightarrow y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$x \vee y := max\{x, y\} \qquad x \wedge y := min\{x, y\}$$

Semantica PL

- o funcție $e : Var \to \{0,1\}$ se numește evaluare (interpretare)
- pentru orice evaluare $e : Var \to \{0,1\}$ există o unică funcție $e^+ : Form \to \{0,1\}$ care verifică următoarele proprietăți:
  - $e^+(v) = e(v)$
  - $e^+(\neg\varphi) = \neg e^+(\varphi)$
  - $e^+(\varphi \to \psi) = e^+(\varphi) \to e^+(\psi)$
  - $e^+(\varphi \wedge \psi) = e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)$
  - $e^+(\varphi \vee \psi) = e^+(\varphi) \vee e^+(\psi)$

  oricare ar fi $v \in Var$ și φ, $\psi \in Form$.

Exemplu

Dacă $e(p) = 0$ și $e(q) = 1$ atunci

$$e^+(p \vee (p \to q)) = e^+(p) \vee e^+(p \to q) = e(p) \vee (e(p) \to e(q)) = 1$$

Semantica PL

Considerăm $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Form$.

- O evaluare $e : Var \to \{0,1\}$ este model al formulei φ dacă $e^+(\varphi) = 1$. Evaluarea e este model al lui Γ dacă $e^+(\Gamma) = \{1\}$, i.e. $e^+(\gamma) = 1$ oricare $\gamma \in \Gamma$.
- O formulă φ este satisfiabilă dacă are un model. O mulțime Γ de formule este satisfiabilă dacă are un model.
- O formulă φ este tautologie (validă, universal adevarată) dacă $e^+(\varphi) = 1$ pentru orice evaluare $e : Var \to \{0,1\}$.
  Notăm prin $\models \varphi$ faptul că φ este o tautologie.
- O formulă φ este $\Gamma-$tautologie (consecință semantică a lui Γ) dacă orice model al lui Γ este și model pentru φ, i.e. $e^+(\Gamma) = \{1\}$ implică $e^+(\varphi) = 1$ pentru orice evaluare $e : Var \to \{0,1\}$.
  Notăm prin $\Gamma \models \varphi$ faptul că φ este o Γ-tautologie.

Semantica PL

Cum verificăm că o formulă este tautologie: $\models \varphi$?

- Fie $v_1, \ldots, v_n$ variabilele care apar în φ.
- Cele 2^n evaluări posibile $e_1, \ldots, e_{2^n}$ pot fi scrise într-un tabel:

v_1	v_2	$\ldots$	v_n	φ
$e_1(v_1)$	$e_1(v_2)$	$\ldots$	$e_1(v_n)$	$e_1^+(\varphi)$
$e_2(v_1)$	$e_2(v_2)$	$\ldots$	$e_2(v_n)$	$e_2^+(\varphi)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$e_{2^n}(v_1)$	$e_{2^n}(v_2)$	$\ldots$	$e_{2^n}(v_n)$	$e_{2^n}^+(\varphi)$

Fiecare evaluare corespunde unei linii din tabel!

- $\models \varphi$ dacă și numai dacă $e_1^+(\varphi) = \cdots = e_{2^n}^+(\varphi) = 1$

Verificarea problemei consecinței logice

- În principiu, putem verifica problema consecinței logice construind un tabel de adevăr, cu câte o linie pentru fiecare interpretare posibilă.
- În cazul în care formula conțin n variabile, tabelul de adevăr are 2^n rânduri. Această metodă este atât de costisitoare computațional (timp exponențial).
- Problemă deschisă de un milion de dolari:

  Este posibil să decidem problema consecinței logice în cazul propozițional printr-un algoritm care să funcționeze în timp polinomial?

  Echivalent, este adevărată $P = NP$?
  (Institutul de Matematica Clay – Millennium Prize Problems)
- SAT este problema satisfiabilității în calculul propozițional clasic. SAT-solverele sunt bazate pe metode sintactice.

Sintaxa PL

Sisteme deductive pentru calculul propozițional clasic:

- Sistemul Hilbert
- Rezoluție
- Deducția naturală
- Calculul cu secvenți

Sistemul Hilbert

- Oricare ar fi $\varphi, \psi, \chi \in Form$ următoarele formule sunt axiome:
  - (A1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
  - (A2) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$
  - (A3) $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$.
- Regula de deducție este modus ponens: $\dfrac{\varphi, \ \varphi \to \psi}{\psi}\,\text{MP}$
- O demonstrație pentru φ este o secvență de formule $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ astfel încât $\gamma_n = \varphi$ și, pentru fiecare $i \in \{1, \ldots, n\}$, una din următoarele condiții este satisfăcută:
  - γ_i este axiomă,
  - γ_i se obține din formulele anterioare prin MP: există $j, k < i$ astfel încât $\gamma_j = \gamma_k \to \gamma_i$
- O formulă φ este teoremă dacă are o demonstrație. Notăm prin $\vdash \varphi$ faptul că φ este teoremă.

Sistemul Hilbert

Fie $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Form$.

- O demonstrație din ipotezele Γ (sau Γ-demonstrație) pentru φ este o secvență de formule γ_1, ..., γ_n astfel încât $\gamma_n = \varphi$ și, pentru fiecare $i \in \{1, \ldots, n\}$, una din următoarele condiții este satisfăcută:
  - γ_i este axiomă,
  - $\gamma_i \in \Gamma$
  - γ_i se obține din formulele anterioare prin MP: există j, $k < i$ astfel încât $\gamma_j = \gamma_k \to \gamma_i$
- O formulă φ este Γ-teoremă dacă are o Γ-demonstrație. Notăm prin $\Gamma \vdash \varphi$ faptul că φ este o Γ-teoremă

Sistemul Hilbert

Teorema deducției TD (Herbrand, 1930)

Fie $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Form$. Atunci

$$\Gamma \vdash \varphi \to \psi \text{ dacă și numai dacă } \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$$

Exemplu

Arătați că $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$

(1) $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \varphi$ (ipoteza)
(2) $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \varphi \to \psi$ (ipoteza)
(3) $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \psi$ (1),(2), MP
(4) $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \psi \to \chi$ (ipoteza)
(5) $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \chi$ (3),(4), MP
(6) $\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi\} \vdash \varphi \to \chi$ TD
(7) $\{\varphi \to \psi\} \vdash (\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)$ TD
(8) $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$ TD

Sistemul Hilbert

- Oricare ar fi φ, ψ, $\chi \in Form$ următoarele formule sunt axiome:
  (A1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
  (A2) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$
  (A3) $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$.
- Regula de deducție este modus ponens: $\dfrac{\varphi, \ \varphi \to \psi}{\psi}\,\textbf{MP}$

Teorema de completitudine

Γ-teoremele și Γ-tautologiile coincid, i.e.

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ dacă și numai dacă } \Gamma \models \varphi$$

oricare are fi $\Gamma \cup \{\varphi\} \in Form$.
În particular, $\vdash \varphi$ dacă și numai dacă $\models \varphi$.

($\Rightarrow$) Corectitudine
($\Leftarrow$) Completitudine

Reguli de deducție pentru PL

O regula de deducție are forma

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \varphi_1, \ldots, \Gamma_n \vdash \varphi_n}{\Gamma \vdash \varphi}$$

A demonstra o regulă de deducție derivată revine la a deduce concluzia $\Gamma \vdash \varphi$ din premisele $\Gamma_1 \vdash \varphi_1$, ..., $\Gamma_n \vdash \varphi_n$.

Exemplu

Folosind teorema deducției se demonstrează regula:

$$\frac{\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}$$

Deducția naturală DN

Deducția naturală[1] pe scurt

- În deducția naturală deducem (demonstrăm) formule din alte formule folosind reguli de deducție.

- Numim secvent o expresie de forma

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$$

  Formulele $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ se numesc premise, iar ψ se numește concluzie.

- Un secvent este valid dacă există o demonstrație folosind regulile de deducție.

- O teoremă este o formulă ψ astfel încât $\vdash \psi$ (adică ψ poate fi demonstrată din mulțimea vidă de ipoteze).

- Pentru fiecare conector logic vom avea reguli de introducere și reguli de eliminare.

[1] M. Huth, M. Ryan, Logic in Computer Science: Modelling and Reasoning about Systems, Cambridge University Press New York, 2004.

Regulile pentru conjuncție

- Intuitiv, a demonstra $\varphi \wedge \psi$ revine la a demonstra φ și ψ. Obținem astfel regula

$$\frac{\varphi \qquad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ (\wedge i)$$

  Eticheta $(\wedge i)$ înseamnă $\wedge$-introducere deoarece $\wedge$ este introdus în concluzie.

- Regulile pentru $\wedge$- eliminare sunt:

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ (\wedge e_1) \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\ (\wedge e_2)$$

Regulile pentru conjuncție

Exemplu

Demonstrați că secventul $p \wedge q, r \vdash q \wedge r$ este valid.

Putem scrie demonstrația ca un arbore

$$\dfrac{\dfrac{p \wedge q}{q}\,(\wedge e_2) \qquad r}{q \wedge r}\,(\wedge i)$$

sau putem scrie demonstrația într-un mod liniar astfel:

1	$p \wedge q$	*premisa*
2	r	*premisa*
3	q	$(\wedge e_2)$,1
4	$q \wedge r$	$(\wedge i)$,3,2

Regulile pentru dubla negație

- Regulile ¬¬-introducere și ¬¬-eliminare sunt:

$$\frac{\neg\neg\varphi}{\varphi}\ (\neg\neg e) \qquad \frac{\varphi}{\neg\neg\varphi}\ (\neg\neg i)$$

Example

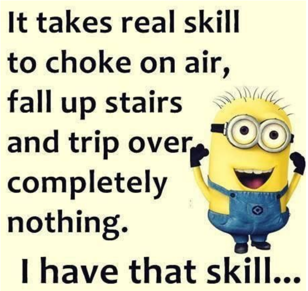
Demonstrați că secventul $\neg\neg(q \wedge r) \vdash \neg\neg r$ este valid.

1	$\neg\neg(q \wedge r)$	*premisa*
2	$q \wedge r$	$(\neg\neg ei)$,1
3	r	$(\wedge e_2)$,2
4	$\neg\neg r$	$(\neg\neg i)$,3

Regulile pentru implicație: $\to$-eliminare

- Regula de $\to$-eliminare o stiți deja: este *modus ponens*:

$$\frac{\varphi \qquad \varphi \to \psi}{\psi}\ (\to e)$$



Regulile pentru implicație: $\to$-introducere

- Intuitiv, a demonstra $\varphi \to \psi$ revine la a demonstra ψ în ipoteza φ, i.e. presupunem temporar φ și demonstrăm ψ.
  Acest lucru se reprezintă astfel:

$$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \psi\end{array}}}{\varphi \to \psi}\ (\to i)$$

- Cutia (chenarul) are rostul de a marca scopul ipotezei φ: numai deducțiile din interiorul cutiei pot folosi φ.
- În momentul în care am obținut ψ, închidem cutia și deducem $\varphi \to \psi$ în afara cutiei.
- O ipoteză nu poate fi folosită în afara scopului său.

Regulile pentru implicație

Exemplu

Demonstrați teorema $\vdash (p \wedge q) \to p$

Vom considera $p \wedge q$ ca ipoteză temporară

$$\boxed{p \wedge q}$$

$$\boxed{\dfrac{p \wedge q}{p}\ (\wedge e_1)}$$

$$\boxed{\dfrac{p \wedge q}{p}\ (\wedge e_1)}$$

$$\dfrac{\boxed{\dfrac{p \wedge q}{p}\ (\wedge e_1)}}{p \wedge q \to p}\ (\to i)$$

Regulile pentru implicație

Exemplu

Demonstrați teorema $\vdash (p \wedge q) \rightarrow p$

Putem scrie demonstrația într-un mod liniar în felul următor:

1	$p \wedge q$	*ipoteza*
2	p	$(\wedge e_1)$,1
3	$p \wedge q \rightarrow p$	$(\rightarrow i)$,1−2

Regulile pentru implicație

Exemplu

Demonstrați teorema $\vdash p \to p$

1	p	*ipoteza*
2	$p \to p$	$(\to i)$,1

Regulile pentru implicație

Exemplu

Demonstrați teorema $\vdash (p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$

1	$p \to q$	*ipoteza*
2	$q \to r$	*ipoteza*
3	p	*ipoteza*

1	$p \to q$	*ipoteza*
2	$q \to r$	*ipoteza*
3	p	*ipoteza*
4	q	$(\to e)$,1,3
5	r	$(\to e)$,2,4

1	$p \to q$	*ipoteza*
2	$q \to r$	*ipoteza*
3	p	*ipoteza*
4	q	$(\to e)$,1,3
5	r	$(\to e)$,2,4
6	$p \to r$	$(\to i)$,3–5

Regulile ”cutiilor”

- O cutie marchează scopul unei ipoteze temporare, ce poate fi folosită pentru a demonstra formulele din interiorul cutiei.
- Cutiile pot fi incluse una în alta; se pot deschide cutii noi după închiderea celor vechi.
- Linia care urmează după închiderea unei cutii trebuie să conțină concluzia regulii pentru care a fost utilizată cutia.
- Într-un punct al unei demonstrații se pot folosi formulele care au apărut anterior, cu excepția celor din interiorul cutiilor închise.

Regula pentru "copiere"

- La un pas al unei demonstrații poate fi copiată orice formulă demonstrată anterior.
- La un pas al unei demonstrații **nu** pot fi copiate formule din interiorul cutiilor care sunt închise în acel moment.

Exemplu

Demonstrați teorema $\vdash p \to (q \to p)$

1	p	*ipoteza*
2	q	*ipoteza*

1	p	*ipoteza*
2	q	*ipoteza*
3	p	*copiere* 1

1	p	*ipoteza*
2	q	*ipoteza*
3	p	*copiere* 1
4	$q \to p$	$(\to i)$,2–3

1	p	*ipoteza*

Regulile pentru disjuncție: $\vee$-introducere

- Intuitiv, a demonstra $\varphi \vee \psi$ revine la a demonstra φ sau ψ. În consecință, regulile de $\vee$-introducere sunt

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee i_1) \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee i_2)$$

Exemplu

Demonstrați că secventul $q \rightarrow r \vdash q \rightarrow (r \vee p)$ este valid.

1	$q \rightarrow r$	*premisa*
2	q	*ipoteza*
3	r	$(\rightarrow e)$,1,2
4	$r \vee p$	$(\vee i_1)$,3
5	$q \rightarrow (r \vee p)$	$(\rightarrow i)$,2–4

Regulile pentru disjuncție: $\vee$-eliminare

- Cum procedăm pentru a demonstra χ știind $\varphi \vee \psi$?
  Trebuie să analizăm două cazuri:
  - presupunem φ și demonstrăm χ
  - presupunem ψ și demonstrăm χ

  Astfel, dacă am demonstrat $\varphi \vee \psi$ putem să deducem χ deoarece cazurile de mai sus acoperă toate situațiile posibile.

- Regula $\vee$-eliminare reflectă aceast argument:

$$\frac{\varphi \vee \psi \qquad \boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \chi\end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c}\psi\\ \vdots\\ \chi\end{array}}}{\chi}\ (\vee e)$$

Regulile pentru disjuncție

Exemplu

Demonstrați că secventul $q \to r \vdash (p \vee q) \to (p \vee r)$ este valid.

1	$q \to r$	*premisa*
2	$p \vee q$	*ipoteza*
3	p	*ipoteza*
4	$p \vee r$	$(\vee i_1)$,3
5	q	*ipoteza*
6	r	$(\to e)$,1,5
7	$p \vee r$	$(\vee i_2)$,6
8	$p \vee r$	$(\vee e)$,2,3−4,5−7
9	$p \vee q \to p \vee r$	$(\to i)$,2−8

Regulile pentru negație

- Pentru orice φ, formulele $\varphi \wedge \neg\varphi$ și $\neg\varphi \wedge \varphi$ se numesc contradicții. O contradicție arbitrară va fi notată $\perp$.

- Faptul că dintr-o contradicție se poate deduce orice este reprezentat printr-o regulă specială:

$$\frac{\perp}{\varphi}\ (\perp e)$$

- Regulile de $\neg$-eliminare și $\neg$-introducere sunt:

$$\frac{\varphi \quad \neg\varphi}{\perp}\ (\neg e) \qquad\qquad \frac{\boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \perp\end{array}}}{\neg\varphi}\ (\neg i)$$

Regulile pentru negație

Exemplu

Demonstrați că secventul $p \to \neg p \vdash \neg p$ este valid.

1	$p \to \neg p$	*premisa*
2	p	*ipoteza*
3	$\neg p$	$(\to e)$,1,2
4	$\bot$	$(\neg e)$,2,3
5	$\neg p$	$(\neg i)$,2−4

Regulile DN

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ (\wedge i)$$

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \psi\end{array}}}{\varphi \to \psi}\ (\to i)$$

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee i_1) \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee i_2)$$

$$\frac{\varphi}{\neg\neg\varphi}\ (\neg\neg i) \qquad \frac{\boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \bot\end{array}}}{\neg\varphi}\ (\neg i)$$

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ (\wedge e_1) \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\ (\wedge e_2)$$

$$\frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\ (\to e)$$

$$\frac{\varphi \vee \psi \quad \boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \chi\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c}\psi\\ \vdots\\ \chi\end{array}}}{\chi}\ (\vee e)$$

$$\frac{\neg\neg\varphi}{\varphi}\ (\neg\neg e) \qquad \frac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\ (\neg e) \qquad \frac{\bot}{\varphi}\ (\bot e)$$

Reguli derivate

- Următoarele reguli pot fi derivate din regulile deducției naturale:

$$\frac{\varphi \to \psi \quad \neg\psi}{\neg\varphi}\ \textbf{MT} \qquad \frac{\boxed{\begin{array}{c}\neg\varphi \\ \vdots \\ \bot\end{array}}}{\varphi}\ \textbf{RAA} \qquad \frac{}{\varphi \vee \neg\varphi}\ \textbf{TND}$$

Reguli derivate: **TND**

Exemplu

Regula $\dfrac{}{\varphi \vee \neg\varphi}$ **TND** este derivată în deducția naturală.

1	$\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$	*ipoteza*
2	φ	*ipoteza*
3	$\varphi \vee \neg\varphi$	$(\vee i_1)$,2
4	$\bot$	$(\neg e)$,3,1
5	$\neg\varphi$	$(\neg i)$,2−4
6	$\varphi \vee \neg\varphi$	$(\vee i_2)$,5
7	$\bot$	$(\neg e)$,6,1
8	$\neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$	$(\neg i)$,1−7
9	$\varphi \vee \neg\varphi$	$(\neg\neg e)$,8

MT și **RAA** sunt exerciții pentru seminar!

Corectitudinea și completitudinea DN

Corectitudinea DN

Teoremă

Deducția naturală este corectă, i.e.

$$\text{dacă } \varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi \text{ este valid atunci } \ \varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$$

oricare ar fi $n \geq 0$ și formulele $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, φ.

Demonstrație

Din ipoteză știm că există o demonstrație pentru φ din ipotezele $\varphi_1, \ldots,$ φ_n folosind regulile deducției naturale.

Fie k numărul de linii dintr-o demonstrație în forma liniară. Prin inducție după $k \geq 1$ vom arăta că

oricare ar fi $n \geq 0$ și $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$, φ formule, dacă $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi$ are o demonstrație de lungime $k \geq 1$ atunci $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$,

(orice secvent care are o demonstrație de lungime k este corect).

Corectitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Atenție! Facem inducție după lungimea demonstrației, numărul de premise este arbitrar. *Cazul* $k = 1$. În acest caz demonstrația este

1	φ	*premisa*

ceea ce înseamnă că secventul inițial este $\varphi \vdash \varphi$.

Este evident că $\varphi \models \varphi$

Corectitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Cazul de inducție. Vom presupune că:

oricare ar fi $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$, φ, *dacă* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi$ *are o demonstrație de lungime* $< k$ *atunci* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$

și vom demonstra că proprietatea este adevărată pentru secvenți cu demonstrații de lungime k.

Fie (R) ultima regulă care se aplică în demonstrație, adică

$$\begin{array}{lll} 1 & \varphi_1 & \textit{premisa} \\ & \vdots & \\ n & \varphi_n & \textit{premisa} \\ & \vdots & \\ k & \varphi & (R) \end{array}$$

Corectitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Presupunem că ultima regulă a fost $(\wedge i)$. Aceasta înseamnă că

$$\varphi = \psi \wedge \chi$$

1	φ_1	*premisa*
	$\vdots$	
n	φ_n	*premisa*
	$\vdots$	
k_1	ψ	
	$\vdots$	
k_2	χ	
k	$\psi \wedge \chi$	$(\wedge i)k_1, k_2$

Se observă că secvenții
$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$ și
$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \chi$
au demonstrații de lungime $< k$.

Din ipoteza de inducție rezultă
$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$ și
$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \chi$ deci

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi \wedge \chi$$

Corectitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Presupunem că ultima regulă a fost $(\rightarrow i)$. Aceasta înseamnă că

$$\varphi = \psi \rightarrow \chi$$

și ca în demonstrație există o cutie.

$$\begin{array}{lll}
1 & \varphi_1 & \textit{premisa} \\
 & \vdots & \\
n & \varphi_n & \textit{premisa} \\
 & \vdots & \\
k_1 & \psi & \textit{ipoteza} \\
 & \vdots & \\
k_2 & \chi & \\
 & & \\
k & \psi \rightarrow \chi & (\rightarrow i) k_1 - k_2
\end{array}$$

Se observă că

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi \vdash \chi$$

are demonstrația de lungime $< k$.

Din ipoteza de inducție rezultă

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi \models \chi \quad (*)$$

Corectitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Putem acum să demonstrăm că $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \models \varphi$.

Fie $e : Var \to \{0, 1\}$ o evaluare astfel încât $e^+(\varphi_1) = \cdots = e^+(\varphi_n) = 1$. Vrem să arătăm că $e^+(\varphi) = 1$.

Deoarece $\varphi = \psi \to \chi$ considerăm două cazuri.

Dacă $e^+(\psi) = 0$ atunci $e^+(\varphi) = 0 \to e^+(\chi) = 1$.

Dacă $e^+(\psi) = 1$ atunci e^+ este un model pentru formulele $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi$. Din $(*)$ rezultă ca $e^+(\chi) = 1$, deci $e^+(\varphi) = 1 \to 1 = 1$.

Am demonstrat că regula $(\to i)$ este corectă.

Pentru a finaliza demonstrația trebuie sa arătăm că fiecare din celelalte reguli ale deducției naturale este corectă. $\square$

Notații

Pentru a demonstra ca DN este completă pentru PL facem următoarele notații:

- Fie $e : Var \to \{0,1\}$ evaluare. Pentru orice $v \in Var$ definim

$$v^e := \begin{cases} v & \text{dacă } e(v) = 1 \\ \neg v & \text{dacă } e(v) = 0 \end{cases}$$

- $Var(\varphi) := \{v \in Var \mid v \text{ apare în } \varphi\}$ oricare φ formulă.

Completitudinea DN - rezultate ajutătoare

Propoziția 1

Fie φ este o formulă și $Var(\varphi) = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Pentru orice evaluare $e : Var \to \{0, 1\}$ sunt adevărate:

- $e^+(\varphi) = 1$ implică $\{v_1^e, \ldots, v_n^e\} \vdash \varphi$ este valid,
- $e^+(\varphi) = 0$ implică $\{v_1^e, \ldots, v_n^e\} \vdash \neg\varphi$ este valid.

Propoziția 2

Oricare ar fi formulele $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, φ,
dacă $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$ atunci $\models \varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\cdots \to (\varphi_n \to \varphi) \cdots))$.

Propoziția 3

Oricare ar fi formulele $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, φ,
dacă $\vdash \varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\cdots \to (\varphi_n \to \varphi) \cdots))$ este valid,
atunci $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi$ este valid.

Completitudinea DN

Teoremă

Deducția naturală este completă, i.e.

$$\text{dacă } \varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi \quad \text{atunci} \quad \varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi \text{ este valid}$$

oricare ar fi formulele $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, φ.

Demonstrație

Pasul 1. Dacă $\models \varphi$ atunci $\vdash \varphi$ este valid.

Pasul 2. Presupunem că $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$.
Din *Propoziția 2* deducem că $\models \varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\cdots \to (\varphi_n \to \varphi) \cdots))$.
Aplicând *Pasul 1* obținem că $\vdash \varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\cdots \to (\varphi_n \to \varphi) \cdots))$ este valid. În consecință $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi$ este valid din *Propoziția 3*.

Completitudinea DN

Demonstrație (cont.)

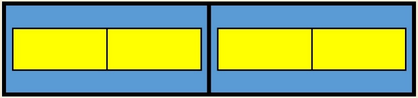
În continuare demonstrăm *Pasul 1*.

Fie φ o tautologie, i.e. $\models \varphi$, astfel încât $Var(\varphi) = \{p_1, \ldots, p_n\}$.

Oricare ar fi $e : Var \to \{0, 1\}$ știm că $e^+(\varphi) = 1$ deci, din *Propoziția 1*, rezultă că secventul $\{p_1^e, \ldots, p_n^e\} \vdash \varphi$ este valid.

Deoarece există 2^n evaluări, i.e., tabelul de adevăr are 2^n linii, obținem 2^n demonstrații pentru φ, fiecare din aceste demonstrații având n premise.

Vom arăta în continuare, pe un exemplu simplu, cum se pot combina aceste 2^n demonstrații cu premise pentru a obține o demonstrație fără premise pentru φ.



Completitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Considerăm $\models \varphi$ și $n = 2$, i.e. $Var(\varphi) = \{p_1, p_2\}$.

De exemplu, puteți considera $\varphi = p_1 \wedge p_2 \to p_1$

Din *Propoziția 1* știm că următorii secvenți sunt valizi:

$$\begin{array}{rl} p_1, p_2 & \vdash \varphi \\ p_1, \neg p_2 & \vdash \varphi \\ \neg p_1, p_2 & \vdash \varphi \\ \neg p_1, \neg p_2 & \vdash \varphi \end{array}$$

deci există demonstrațiile:

$$\boxed{\begin{array}{ll} p_1 & \textit{ipoteza} \\ p_2 & \textit{ipoteza} \\ \vdots & \\ \varphi & \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{ll} p_1 & \textit{ipoteza} \\ \neg p_2 & \textit{ipoteza} \\ \vdots & \\ \varphi & \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{ll} \neg p_1 & \textit{ipoteza} \\ p_2 & \textit{ipoteza} \\ \vdots & \\ \varphi & \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{ll} \neg p_1 & \textit{ipoteza} \\ \neg p_2 & \textit{ipoteza} \\ \vdots & \\ \varphi & \end{array}}$$

Completitudinea DN

Demonstrație (cont.)

Combinăm cele patru demonstrații astfel:

$p_1 \vee \neg p_1$ TND

p_1 $ipoteza$	$\neg p_1$ $ipoteza$

$p_1 \vee \neg p_1$ TND

p_1 $ipoteza$	$\neg p_1$ $ipoteza$
$p_2 \vee \neg p_2$ TND	$p_2 \vee \neg p_2$ TND
p_2 $ipoteza$ $\neg p_2$ $ipoteza$	p_2 $ipoteza$ $\neg p_2$ $ipoteza$

$p_1 \vee \neg p_1$ TND

p_1 $ipoteza$	$\neg p_1$ $ipoteza$
$p_2 \vee \neg p_2$ TND	$p_2 \vee \neg p_2$ TND
p_2 $ipoteza$ $\neg p_2$ $ipoteza$	p_2 $ipoteza$ $\neg p_2$ $ipoteza$
$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$ $\vdots$

Deducția naturală DN

- este un sistem deductiv corect și complet pentru logica clasică,
- stabilește reguli de deducție pentru fiecare operator logic,
- o demonstrație se construiește prin aplicarea succesivă a regulilor de deducție,
- în demonstrații putem folosi ipoteze temporare, scopul acestora fiind bine delimitat.

Pe săptămâna viitoare!