**FMI, Info, Anul II, 2018-2019**
**Programare logică**

# Seminar 5
# Forma prenex. Skolemizare. Herbrandizare

**Teorie pentru S4.1:**

O formulă $\varphi$ este în **formă rectificată** dacă:

(i) nici o variabilă nu apare şi liberă şi legată;

(ii) cuantificatori distincţi leagă variabile distincte.

Intuitiv, forma rectificată a unei formule se obţine prin redenumirea variabilelor astfel încât să nu apară conflicte.

O **formulă prenex** este o formulă de forma $Q_1x_1\, Q_2x_2 \ldots Q_nx_n\, \varphi$ unde $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$, $x_1, \ldots, x_n$ sunt variabile distincte şi $\varphi$ nu conţine cuantificatori.

Pentru o formulă rectificată putem obţine o formulă echivalentă în formă prenex astfel:

- Se înlocuiesc $\rightarrow$ şi $\leftrightarrow$ :

$$\begin{aligned} \varphi \rightarrow \psi &\;\;\text{⫤⊨}\;\; \neg\varphi \vee \psi \\ \varphi \leftrightarrow \psi &\;\;\text{⫤⊨}\;\; (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi) \end{aligned}$$

- Se aplică următoarele echivalenţe:

$$\begin{aligned} \neg\exists x\, \neg\varphi &\;\;\text{⫤⊨}\;\; \forall x\, \varphi & \qquad \forall x\, \varphi \wedge \forall x\, \psi &\;\;\text{⫤⊨}\;\; \forall x\, (\varphi \wedge \psi) \\ \neg\forall x\, \neg\varphi &\;\;\text{⫤⊨}\;\; \exists x\, \varphi & \qquad \exists x\, \varphi \vee \exists x\, \psi &\;\;\text{⫤⊨}\;\; \exists x\, (\varphi \vee \psi) \\ \neg\exists x\, \varphi &\;\;\text{⫤⊨}\;\; \forall x\, \neg\varphi & \qquad \forall x\, \forall y\, \varphi &\;\;\text{⫤⊨}\;\; \forall y\, \forall x\, \varphi \\ \neg\forall x\, \varphi &\;\;\text{⫤⊨}\;\; \exists x\, \neg\varphi & \qquad \exists x\, \exists y\, \varphi &\;\;\text{⫤⊨}\;\; \exists y\, \exists x\, \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall x\, \varphi \vee \psi &\;\;\text{⫤⊨}\;\; \forall x\, (\varphi \vee \psi) \text{ dacă } x \notin FV(\psi) \\ \forall x\, \varphi \wedge \psi &\;\;\text{⫤⊨}\;\; \forall x\, (\varphi \wedge \psi) \text{ dacă } x \notin FV(\psi) \\ \exists x\, \varphi \vee \psi &\;\;\text{⫤⊨}\;\; \exists x\, (\varphi \vee \psi) \text{ dacă } x \notin FV(\psi) \\ \exists x\, \varphi \wedge \psi &\;\;\text{⫤⊨}\;\; \exists x\, (\varphi \wedge \psi) \text{ dacă } x \notin FV(\psi) \end{aligned}$$

**(S5.1)** Considerăm un limbaj de ordinul I cu $\mathbf{R} = \{P, R, Q\}$ cu $ari(P) = 1$ şi $ari(R) = ari(Q) = 2$. Găsiţi formele echivalente prenex pentru următoarele formule:

1) $\forall x \exists y (R(x,y) \rightarrow R(y,x)) \rightarrow \exists x R(x,x)$

2) $\neg P(x) \rightarrow \neg \forall y \exists x R(x,y)$

3) $\exists x R(x,y) \leftrightarrow \forall y Q(x,y)$

**Demonstraţie:**

1)

$$
\begin{array}{lll}
 & \forall x \exists y (R(x,y) \rightarrow R(y,x)) \rightarrow \exists x R(x,x) & \\
\mathrel{\text{⫤}\!\!\vDash} & \forall x \exists y (R(x,y) \rightarrow R(y,x)) \rightarrow \exists z R(z,z) & \text{(redenumim variabile)} \\
\mathrel{\text{⫤}\!\!\vDash} & \neg \forall x \exists y (\neg R(x,y) \vee R(y,x)) \vee \exists z R(z,z) & \\
\mathrel{\text{⫤}\!\!\vDash} & \exists x \forall y (R(x,y) \wedge \neg R(y,x)) \vee \exists z R(z,z) & \\
\mathrel{\text{⫤}\!\!\vDash} & \exists z (\exists x \forall y (R(x,y) \wedge \neg R(y,x)) \vee R(z,z)) & \\
\mathrel{\text{⫤}\!\!\vDash} & \exists z \exists x (\forall y (R(x,y) \wedge \neg R(y,x)) \vee R(z,z)) & \\
\mathrel{\text{⫤}\!\!\vDash} & \exists z \exists x \forall y ((R(x,y) \wedge \neg R(y,x)) \vee R(z,z)) &
\end{array}
$$

2)

$$
\begin{array}{lll}
 & \neg P(x) \rightarrow \neg \forall y \exists x R(x,y) & \\
\mathrel{\text{⫤}\!\!\vDash} & \neg P(z) \rightarrow \neg \forall y \exists x R(x,y) & \text{(redenumim variabile)} \\
\mathrel{\text{⫤}\!\!\vDash} & P(z) \vee \neg \forall y \exists x R(x,y) & \\
\mathrel{\text{⫤}\!\!\vDash} & P(z) \vee \exists y \forall x \neg R(x,y) & \\
\mathrel{\text{⫤}\!\!\vDash} & \exists y (P(z) \vee \forall x \neg R(x,y)) & \\
\mathrel{\text{⫤}\!\!\vDash} & \exists y \forall x (P(z) \vee \neg R(x,y)) &
\end{array}
$$

3)

$$
\begin{array}{lll}
 & \exists x R(x,y) \leftrightarrow \forall y Q(x,y) & \\
\mathrel{\text{⫤}\!\!\vDash} & \exists x R(x,u) \leftrightarrow \forall y Q(v,y) & \text{(redenumim variabile)} \\
\mathrel{\text{⫤}\!\!\vDash} & (\exists x R(x,u) \rightarrow \forall y Q(v,y)) \wedge (\forall y Q(v,y) \rightarrow \exists x R(x,u)) & \\
\mathrel{\text{⫤}\!\!\vDash} & (\exists x R(x,u) \rightarrow \forall y Q(v,y)) \wedge (\forall y' Q(v,y') \rightarrow \exists x' R(x',u)) & \text{(redenumim variabile)} \\
\mathrel{\text{⫤}\!\!\vDash} & (\neg \exists x R(x,u) \vee \forall y Q(v,y)) \wedge (\neg \forall y' Q(v,y') \vee \exists x' R(x',u)) & \\
\mathrel{\text{⫤}\!\!\vDash} & (\forall x \neg R(x,u) \vee \forall y Q(v,y)) \wedge (\exists y' \neg Q(v,y') \vee \exists x' R(x',u)) & \\
\mathrel{\text{⫤}\!\!\vDash} & \forall x \forall y (\neg R(x,u) \vee Q(v,y)) \wedge \exists y' \exists x' (\neg Q(v,y') \vee R(x',u)) & \\
\mathrel{\text{⫤}\!\!\vDash} & \forall x \forall y \exists y' \exists x' ((\neg R(x,u) \vee Q(v,y)) \wedge (\neg Q(v,y') \vee R(x',u))) &
\end{array}
$$

$\square$

$\boxed{\textbf{Teorie pentru S4.2:}}$

Fie $\varphi$ enunţ în formă prenex. Definim $\varphi^{sk}$ o **formă Skolem** a lui $\varphi$ şi $\mathcal{L}^{sk}(\varphi)$ astfel:

- dacă $\varphi$ este liberă de cuantificatori, atunci $\varphi^{sk} = \varphi$ şi $\mathcal{L}^{sk}(\varphi) = \mathcal{L}$,

- dacă $\varphi$ este universală[1], atunci $\varphi^{sk} = \varphi$ şi $\mathcal{L}^{sk}(\varphi) = \mathcal{L}$,
- dacă $\varphi = \exists x\, \psi$ atunci introducem un nou simbol de constantă $c$ şi considerăm $\varphi^1 = \psi[x/c]$, $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L} \cup \{c\}$.
- dacă $\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_k\, \exists x\, \psi$ atunci introducem un nou simbol de funcţie $f$ de aritate $k$ şi considerăm $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L} \cup \{f\}$,

$$\varphi^1 = \forall x_1 \ldots \forall x_k\, \psi[x/f(x_1 \ldots x_k)]$$

În ambele cazuri, $\varphi^1$ are cu un cuantificator existenţial mai puţin decât $\varphi$. Dacă $\varphi^1$ este liberă de cuantificatori sau universală, atunci $\varphi^{sk} = \varphi^1$. Dacă $\varphi^1$ nu este universală, atunci formăm $\varphi^2, \varphi^3, \ldots$, până ajungem la o formulă universală şi aceasta este $\varphi^{sk}$.

**(S5.2)** Consideram un limbaj de ordinul I cu $\mathbf{C} = \{b\}$ şi $\mathbf{R} = \{P, R, Q\}$ cu $ari(P) = 1$ şi $ari(R) = ari(Q) = 2$. Găsiţi formele Skolem pentru următoarele formule în formă prenex:

1) $\forall x \exists y \forall z \exists w (R(x, y) \wedge (R(y, z) \to (R(z, w) \wedge R(w, w))))$
2) $\forall x_1 \forall y_1 \exists y_2 \exists x_2 ((\neg R(x_1, y_2) \vee Q(b, y_1)) \wedge (\neg Q(x_1, y_2) \vee R(x_2, b)))$
3) $\exists x_1 \forall y_1 \exists x_2 (P(y_1) \vee R(x_1, x_2))$

**Demonstraţie:**

1) $\varphi_1 = \forall x \forall z \exists w (R(x, f(x)) \wedge (R(f(x), z) \to (R(z, w) \wedge R(w, w))))$ $\quad (y \mapsto f(x))$
   $\varphi_2 = \forall x \forall z (R(x, f(x)) \wedge (R(f(x), z) \to (R(z, g(x, z)) \wedge R(g(x, z), g(x, z)))))$ $\quad (w \mapsto g(x, z))$

2) $\varphi_1 = \forall x_1 \forall y_1 \exists x_2 ((\neg R(x_1, f(x_1, y_1)) \vee Q(b, y_1)) \wedge (\neg Q(x_1, f(x_1, y_1)) \vee R(x_2, b)))$ $\quad (y_2 \mapsto f(x_1, y_1))$
   $\varphi_2 = \forall x_1 \forall y_1 ((\neg R(x_1, f(x_1, y_1)) \vee Q(b, y_1)) \wedge (\neg Q(x_1, f(x_1, y_1)) \vee R(g(x_1, y_1), b)))$ $\quad (x_2 \mapsto g(x_1, y_1))$

3) $\varphi_1 = \forall y_1 \exists x_2 (P(y_1) \vee R(c, x_2))$ $\quad (x_1 \mapsto c)$
   $\varphi_2 = \forall y_1 (P(y_1) \vee R(c, f(y_1)))$ $\quad (x_2 \mapsto f(y_1))$

□

**Teorie pentru S4.3:**

Fie $\varphi$ un enunţ în forma Skolem, adică $\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_n\, \psi$.

[1] Un enunţ se numeşte **universal** dacă conţine doar cuantificatori universali.

- Definim **universul Herbrand al formulei** $\varphi$, notat $T(\varphi)$, astfel:
  - dacă $c$ este o constantă care apare în $\varphi$ atunci $c \in T(\varphi)$,
  - dacă $\varphi$ nu conţine nicio constantă atunci alegem o constantă arbitrară $c$ şi considerăm că $c \in T(\varphi)$,
  - dacă $f$ este un simbol de funcţie care apare în $\varphi$ cu $ari(f) = n$ şi $t_1, \ldots, t_n \in T(\varphi)$ atunci $f(t_1, \ldots, t_n) \in T(\varphi)$.
- Definim **expansiunea Herbrand** a lui $\varphi$ astfel

$$\mathcal{H}(\varphi) = \{\psi[x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n] \mid t_1, \ldots, t_n \in T(\varphi)\}.$$[2]

**(S5.3)** Considerăm un limbaj de ordinul I cu $\mathbf{F} = \{f, g\}$ cu $ari(f) = 2$ şi $ari(g) = 1$, $\mathbf{C} = \{b, c\}$ şi $\mathbf{R} = \{P, Q\}$ cu $ari(P) = 3, ari(Q) = 2$ .

(a) Descrieţi termenii din universul Herbrand.

(b) Descrieţi formulele din expansiunea Herbrand a următoarelor formule:

1) $\varphi := \forall x \forall y \, P(c, f(x, b), g(y))$
2) $\psi := \forall x \forall y \, (Q(x, b) \vee Q(x, g(y)))$

(c) Cercetaţi satisfiabilitatea formulelor $\varphi$ şi $\psi$.

**Demonstraţie:** (a) Universul Herbrand

$$T(\varphi) = \{b, c, g(b), g(c), g(g(b)), g(g(c)), \ldots, f(b, c), f(b, g(b)), f(b, g(c)), f(g(c), b), f(g(c), g(c)), \ldots\}$$
$$T(\psi) = \{b, g(b), g(g(b)), g(g(g(b))), g(g(g(g(b)))), \ldots\}$$

(b) Expansiunea Herbrand

$$\mathcal{H}(\varphi) = \{P(c, f(b, b), g(b)), P(c, f(b, b), g(c)), P(c, f(c, b), g(b)), P(c, f(g(b), b), g(g(g(b)))), \ldots\}$$

$$\begin{gathered}\mathcal{H}(\psi) = \{Q(b, b) \vee Q(b, g(b)),\ Q(b, b) \vee Q(b, g(g(b))),\ Q(g(b), b) \vee Q(g(b), g(b)),\\ Q(g(b), b) \vee Q(g(b), g(g(b))),\ Q(g(g(b)), b) \vee Q(g(g(b)), g(b)), \ldots\}\end{gathered}$$

(c) Ştim că o formulă este satisfabilă dacă expansiunea Herbrand este satisfiabilă, adică dacă putem defini relatiile $P$ şi $Q$ în universul Herbrand astfel încât expansiunea formulei să aibă un model Herbrand.
1) Definim $P^{\mathcal{H}} = \{(c, f(t_1, b), g(t_2)) \mid t_1, t_2 \in T(\varphi)\}$.
2) Definim $Q^{\mathcal{H}} = \{(t, b) \mid t \in T(\psi)\}$ □

[2] Reamintim că $\psi[x/t]$ este formula obţinută înlocuind în $\psi$ toate apariţiile libere ale lui $x$ cu $t$.

**(S5.4)** Considerăm următoarea formulă în logica de ordinul I:

$$\varphi = \forall y\, \forall z\, ((\neg P(f(a)) \vee Q(y)) \wedge P(z) \wedge \neg Q(b))$$

Construiţi expansiunea Herbrand şi arătaţi că formula nu este satisfiabilă.

**Demonstraţie:** $T(\varphi) = \{a, b, f(a), f(b), f(f(a)), f(f(b)), \cdots\}$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\varphi) = \{&(\neg P(f(a)) \vee Q(a)) \wedge P(a) \wedge \neg Q(b),\\ &(\neg P(f(a)) \vee Q(f(a))) \wedge P(f(a)) \wedge \neg Q(b),\\ &(\neg P(f(a)) \vee Q(b)) \wedge P(f(a)) \wedge \neg Q(b), \cdots\}\end{aligned}$$

Observăm că $(\neg P(f(a)) \vee Q(b)) \wedge P(f(a)) \wedge \neg Q(b)$ e nesatisfiabilă, deci $\mathcal{H}(\varphi)$ este nesatisfiabilă. $\square$