

## Seminar 2

### Deducția naturală pentru calculul propozițional

Sistemul de reguli al deducției naturale
--

$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} (\wedge i)$ $\frac{\boxed{\begin{array}{c} \varphi \\ \vdots \\ \psi \end{array}}}{\varphi \rightarrow \psi} (\rightarrow i)$ $\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} (\vee i_1) \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi} (\vee i_2)$ $\frac{\boxed{\begin{array}{c} \varphi \\ \vdots \\ \perp \end{array}}}{\neg \varphi} (\neg i)$ $\frac{\varphi}{\neg \neg \varphi} (\neg \neg i)$ $\frac{}{\varphi \vee \neg \varphi} \text{ TND}$	$\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} (\wedge e_1) \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} (\wedge e_2)$ $\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi} (\rightarrow e)$ $\frac{\varphi \vee \psi \quad \boxed{\begin{array}{c} \varphi \\ \vdots \\ \chi \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c} \psi \\ \vdots \\ \chi \end{array}}}{\chi} (\vee e)$ $\frac{\varphi \quad \neg \varphi}{\perp} (\neg e)$ $\frac{\neg \neg \varphi}{\varphi} (\neg \neg e)$ $\frac{\perp}{\varphi} (\perp e)$
---	---

TND (*tertium non datur*) este regulă derivată.

**Atenție!** La acest sistem se adaugă regula de copiere.

Regula de copiere:

- la un pas al unei demonstrații poate fi copiată orice formulă demonstrată anterior.
- la un pas al unei demonstrații nu pot fi copiate formule din interiorul cutiilor care sunt închise în acel moment.

Exemplu în curs sau Huth si Ryan, pg. 20

(S2.1) Demonstrați că următorii secvenți sunt valizi:

- (1)  $(p \wedge q) \wedge r, s \wedge t \vdash q \wedge s$
- (2)  $p, \neg\neg(q \wedge r) \vdash \neg\neg p \wedge r$
- (3)  $p \wedge q \rightarrow r \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)$
- (4)  $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- (5)  $p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q \vdash \neg p$

(S2.2) Demonstrați că următoarele reguli pot fi derivate din regulile deducției naturale:

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi \quad \neg\psi}{\neg\varphi} \text{ MT} \qquad \frac{\boxed{\begin{array}{c} \neg\varphi \\ \vdots \\ \perp \end{array}}}{\varphi} \text{ RAA}$$

MT = *modus tollens*

RAA = *reductio ad absurdum*

(S2.3) Fie  $n \geq 1$  și  $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi$  formule. Demonstrați că

dacă  $\vdash \varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow (\dots \rightarrow (\varphi_n \rightarrow \varphi) \dots))$  este valid, atunci  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi$  este valid.

(S2.4) Știm că *echivalența logică* este definită astfel:  $\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$ . Găsiți reguli de introducere și eliminare pentru  $\leftrightarrow$ .

**Teorie pentru S2.5 și S2.6:**

Fie  $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Form$ . O formulă  $\varphi$  este  $\Gamma$ -tautologie (consecință semantică a lui  $\Gamma$ ) dacă orice model al lui  $\Gamma$  este și model pentru  $\varphi$ , i.e.  $e^+(\Gamma) = \{1\}$  implică  $e^+(\varphi) = 1$  pentru orice evaluare  $e : Var \rightarrow \{0, 1\}$ . Notăm prin  $\Gamma \models \varphi$  faptul că  $\varphi$  este o  $\Gamma$ -tautologie.

(S2.5) Fie  $n \geq 1$  și  $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi$  formule. Demonstrați că

$$\text{dacă } \varphi_1, \dots, \varphi_n \models \varphi \text{ atunci } \models \varphi_1 \rightarrow (\varphi_2 \rightarrow (\dots \rightarrow (\varphi_n \rightarrow \varphi) \dots)).$$

(S2.6)

(1) Arătați că regula  $(\vee_i)$  este corectă, adică

$$\Gamma \models \varphi \text{ implică } \Gamma \models \varphi \vee \psi \text{ pentru orice } \Gamma \subseteq Form.$$

(2) Arătați că regula  $(\neg_i)$  este corectă, adică

$$\Gamma \models \varphi \rightarrow \perp \text{ implică } \Gamma \models \neg \varphi \text{ pentru orice } \Gamma \subseteq Form.$$

(S2.7) Formalizați și demonstrați folosind deducția naturală faptul că din ipotezele (i1)-(i5) deducem (c):

- (i1) *Toți scriitorii care înțeleg natura umană sunt înțelepți.*
- (i2) *Un scriitor care este poet adevărat poate trezi sentimente puternice.*
- (i3) *Shakespeare este scriitorul care a scris "Hamlet".*
- (i4) *Un poet care trezește sentimente puternice înțelege natura umană.*
- (i5) *Numai un poet adevărat putea scrie "Hamlet".*

(c) Shakespeare este înțelept.

Traducere după S. Burris, Logic for Mathematics and Computer Science, Prentice Hall 1998.  
Exercițiu din Lewis Carroll, Symbolic Logic and The Game of Logic, 1897/87. Forma originală:

*All writers, who understand the human nature, are clever.*

*No writer is a true poet unless he can stir the heart of men.*

*Shakespeare wrote "Hamlet".*

*No writer who does not understand human nature can stir the heart of men.*

*None but a true poet could have written "Hamlet".*

*Therefore Shakespeare is clever.*