

# Wahrscheinlichkeitstheorie 1

Cornelius Hanel

October 15, 2024

# Preface

Fehler oder Ergänzungen bitte an

`corneliush99@univie.ac.at`

oder auf GitHub.

# Contents

<b>Preface</b>	<b>1</b>
<b>1. Messbare Räume und Maße</b>	<b>3</b>
Algebra, $\sigma$ -Algebra und Maß . . . . .	3
Eigenschaften von Maßen . . . . .	4
Erzeugung von $\sigma$ -Algebren . . . . .	7
<b>2. Äußere und Innere Maße</b>	<b>10</b>
$\lambda$ - und $\pi$ -Systeme . . . . .	10
Prämaße und äußere Maße . . . . .	12
<b>3. Maß auf <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>18</b>
Motivation . . . . .	18
Messen von Intervallen . . . . .	19
Erzeugung von Maßen auf $\mathbb{R}$ . . . . .	22
<b>4. Messbare Abbildungen und Zufallsvariablen</b>	<b>29</b>
Urbildoperator und Messbarkeit . . . . .	29
Messbare Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}$ . . . . .	31
Messbare Funktionen mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$ . . . . .	33
<b>5. Lebesgue-Integral</b>	<b>38</b>
Konstruktion des Integrals . . . . .	38
Eigenschaften des Integrals . . . . .	42
<b>6. Ungleichungen</b>	<b>58</b>
Markov-Ungleichung . . . . .	58
Konvexität und Jensen-Ungleichung . . . . .	59
Hölder-Ljapunov-Minkowski . . . . .	62
<b>7. Unabhängigkeit</b>	<b>65</b>
Unabhängigkeit von Ereignissen und Zufallsvariablen . . . . .	65
Borel–Cantelli Lemmata . . . . .	67
Asymptotische $\sigma$ -Algebra . . . . .	71

# 1. Messbare Räume und Maße

## Algebra, $\sigma$ -Algebra und Maß

Sei im folgenden Kapitel  $\Omega$  jeweils eine nicht-leere Menge. Die Komplementbildung erfolgt jeweils bezüglich  $\Omega$ , also  $A^c = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$ .

**1.1. Definition:** Eine Familie von Teilmengen  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  ist eine Algebra (Englisch *field of sets*), wenn folgendes gilt:

- (i)  $\Omega \in \mathcal{A}$
- (ii)  $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$  (Abgeschlossenheit bzgl. Komplementbildung)
- (iii)  $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}$  (Abgeschlossenheit bzgl. endlichen Vereinigungen)

**Bemerkung:** (iii) ist äquivalent zu  $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cap B \in \mathcal{A}$  (Abgeschlossenheit bzgl. endlichen Durchschnitten).

**1.2. Definition:** Eine Familie von Teilmengen  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  ist eine  $\sigma$ -Algebra (Englisch auch  *$\sigma$ -field*), wenn folgendes gilt:

- (i)  $\Omega \in \mathcal{A}$
- (ii)  $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$  (Abgeschlossenheit bzgl. Komplementbildung)
- (iii)  $A_n \in \mathcal{A}, n \geq 1 \implies \bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{A}$  (Abgeschlossenheit bzgl. abzählbaren Vereinigungen)

**Bemerkung:** (iii) ist äquivalent zu  $A_n \in \mathcal{A}, n \geq 1 \implies \bigcap_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{A}$  (Abgeschlossenheit bzgl. abzählbaren Durchschnitten).

**1.3. Definition:** Ein messbarer Raum ist ein Paar  $(\Omega, \mathcal{A})$ , wobei  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $\Omega$ . Eine Menge  $A \in \mathcal{A}$  heißt messbar.

#### 1.4. Beispiel:

- $\mathcal{A} := \{\emptyset, \Omega\}$  ist die kleinste (triviale)  $\sigma$ -Algebra auf  $\Omega$ .
- $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega)$  ist die größte  $\sigma$ -Algebra auf  $\Omega$ .
- $\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{P}(\Omega) : A \text{ oder } A^c \text{ endlich}\}$  ist eine  $\sigma$ -Algebra falls  $\Omega$  endlich ist, aber nur eine Algebra falls  $\Omega$  unendlich ist. Sei  $\{\omega_1, \omega_2, \dots\} \subseteq \Omega$  mit  $\omega_i \neq \omega_j$  für  $i \neq j$ . Definiere  $A_i := \{\omega_{2i}\}$  für alle  $i \geq 1$ . Dann gilt  $A_i \in \mathcal{A}$  für alle  $i \geq 1$ , aber  $\bigcup_{i \geq 1} A_i = \{\omega_2, \omega_4, \dots\}$  und  $(\bigcup_{i \geq 1} A_i)^c = \{\omega_1, \omega_3, \dots\}$  sind beide unendlich und damit nicht in  $\mathcal{A}$ .

**1.5. Definition:** Sei  $(\Omega, \mathcal{A})$  ein messbarer Raum. Ein Maß auf  $(\Omega, \mathcal{A})$  ist eine Abbildung  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ , sodass

- (i)  $\mu(\emptyset) = 0$
- (ii) Für  $A_n \in \mathcal{A}, n \geq 1$  paarweise disjunkt gilt ( $\sigma$ -Additivität)

$$\mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n)$$

Ein Maß  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  ist  $\sigma$ -endlich, falls es  $A_n \in \mathcal{A}, n \geq 1$  gibt, sodass  $\Omega = \bigcup_{n \geq 1} A_n$  und  $\mu(A_n) < \infty$  für alle  $n \geq 1$ . Ein Maß  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  ist endlich, falls  $\mu(\Omega) < \infty$  (damit folgt  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty)$ ). Ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist eine Abbildung  $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  mit  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ .

**1.6. Definition:** Sei  $(\Omega, \mathcal{A})$  ein messbarer Raum und  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  ein Maß auf  $(\Omega, \mathcal{A})$ . Dann nennt man  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  einen Maßraum. Falls  $\mu = \mathbb{P}$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, nennt man  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  einen Wahrscheinlichkeitsraum.

## Eigenschaften von Maßen

**1.7. Satz:** Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum. Dann gilt

- (i) Für  $A_i \in \mathcal{A}, 1 \leq i \leq n$  paarweise disjunkt gilt (endliche Additivität)

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$$

- (ii) Für  $A, B \in \mathcal{A}$  mit  $A \subseteq B$  gilt  $\mu(A) \leq \mu(B)$  (Monotonie).

- (iii) Für  $A_n \in \mathcal{A}, n \geq 1$  gilt ( $\sigma$ -Subadditivität)

$$\mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) \leq \sum_{n \geq 1} \mu(A_n)$$

- (iv) Falls  $\mu$  endlich ist gilt für  $A, B \in \mathcal{A}$ , dass  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$  (Einschluss-Ausschluss-Prinzip)

**Beweis:**

- (i) Setze  $A_i := \emptyset \in \mathcal{A}$  für  $i > n$ . Damit folgt die Aussage aus der  $\sigma$ -Additivität.
- (ii) Schreibe  $B = (B \setminus A) \cup A$  als Vereinigung disjunkter Mengen. Damit folgt mit (i), dass  $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$ .
- (iii) Setze hier  $B_1 := A_1$  und  $B_k := A_k \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} A_j\right)$  für  $k \geq 2$ . Dann gilt  $B_k \in \mathcal{A}$  für alle  $k \geq 1$ ,  $B_k$  sind paarweise disjunkt,  $\bigcup_{k \geq 1} B_k = \bigcup_{n \geq 1} A_n$  und  $B_k \subseteq A_k$  für alle  $k \geq 1$ . Es folgt mit (ii)

$$\mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{k \geq 1} B_k\right) = \sum_{k \geq 1} \mu(B_k) \leq \sum_{m \geq 1} \mu(A_m)$$

- (iv) Schreibe  $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ . Dann gilt mit (i)

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B) &= \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A) \\ &= \mu(A) + \mu(B \setminus A) \\ &= \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) \end{aligned}$$

□

**Bemerkung:** In der Literatur ist das Einschluss-Ausschluss-Prinzip meist in der allgemeineren Form für endliche Vereinigungen  $\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)$  zu finden.

**1.8. Korollar:** Für  $A, B \in \mathcal{A}$  mit  $A \subseteq B$  und  $\mu(B) < \infty$  gilt  $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$ . Damit folgt für endliche Maße  $\mu(A^c) = \mu(\Omega) - \mu(A)$  und insbesondere für Wahrscheinlichkeitsmaße  $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$ .

**Beweis:** Folgt sofort aus Satz 1.7 (i) mit  $B = A \cup (B \setminus A)$ . □

**1.9. Satz (Stetigkeit von unten/oben):** Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum und  $A_n \in \mathcal{A}, n \geq 1$ .

- (i) Falls  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq \bigcup_{n \geq 1} A_n$ , dann gilt  $\mu(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right)$  (Stetigkeit von unten).
- (ii) Falls  $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq \bigcap_{n \geq 1} A_n$  und  $\mu(A_1) < \infty$ , dann gilt  $\mu(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcap_{n \geq 1} A_n\right)$  (Stetigkeit von oben).

In (ii) genügt es  $\mu(A_j) < \infty$  für ein  $j \geq 1$  vorauszusetzen, also  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) < \infty$  (Monotonie).

**Beweis:**

- (i) Setze  $B_1 := A_1$  und  $B_k := A_k \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} A_j\right)$ . Damit ist  $B_k$  für alle  $k \geq 1$  messbar und  $B_k$  sind paarweise disjunkt. Weiters gilt  $A_n = \bigcup_{k=1}^n B_k$ ,  $B_n \subseteq A_n$  und  $\bigcup_{n \geq 1} A_n = \bigcup_{k \geq 1} B_k$  (leicht nachzuprüfen). Es folgt

$$\begin{aligned} \mu \left( \bigcup_{n \geq 1} A_n \right) &= \mu \left( \bigcup_{k \geq 1} B_k \right) \\ &= \sum_{k \geq 1} \mu(B_k) \\ &= \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K \mu(B_k) \\ &= \lim_{K \rightarrow \infty} \mu \left( \bigcup_{k=1}^K B_k \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(A_N) \end{aligned}$$

- (ii) Setze  $B_k := A_1 \setminus A_k$ . Dann gilt  $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots \subseteq \bigcup_{k \geq 1} B_k = A_1 \setminus \left(\bigcap_{n \geq 1} A_n\right)$ . Mit (i) folgt

$$\mu(B_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mu \left( A_1 \setminus \left( \bigcap_{n \geq 1} A_n \right) \right)$$

Es gilt  $A_n \subseteq A_1$ ,  $\bigcap_{n \geq 1} A_n \subseteq A_1$  und damit  $\mu \left( \bigcap_{n \geq 1} A_n \right) < \infty$ . Es folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(B_k) = \mu(A_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(A_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left( \bigcap_{n \geq 1} A_n \right)$$

und damit die Aussage. □

**1.10. Definition:** Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum. Falls für  $\omega \in \Omega$   $\{\omega\} \in \mathcal{A}$  und  $\mu(\{\omega\}) > 0$  gilt, dann nennt man  $\omega$  ein Atom von  $\mu$  (bezüglich dem Maßraum).

**1.11. Proposition:** Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ein  $\sigma$ -endlicher Maßraum. Dann ist die Menge der Atome  $A := \{\omega \in \Omega : \{\omega\} \in \mathcal{A}, \mu(\{\omega\}) > 0\}$  höchstens abzählbar.

**Beweis:** Schreibe

$$A = \bigcup_{n \geq 1} \left\{ \omega \in \Omega : \{\omega\} \in \mathcal{A}, \mu(\{\omega\}) > \frac{1}{n} \right\}$$

Es genügt zu zeigen, dass jedes Element der Vereinigung höchstens abzählbar ist (abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen ist abzählbar [benötigt das Auswahlaxiom]). Sei also  $A_n :=$

$\{\omega \in \Omega : \{\omega\} \in \mathcal{A}, \mu(\{\omega\}) > \frac{1}{n}\}$ . Wähle außerdem  $B_n \in \mathcal{A}, n \geq 1$ , sodass  $\bigcup_{n \geq 1} B_n = \Omega$  und  $\mu(B_n) < \infty$  ( $\sigma$ -Endlichkeit). Dann gilt

$$A_n = \bigcup_{k \geq 1} (B_k \cap A_n)$$

Es genügt also zu zeigen, dass  $A_n \cap B_k$  für alle  $k, n \geq 1$  höchstens abzählbar ist. Wir zeigen sogar, dass  $A_n \cap B_k$  für alle  $k, n \geq 1$  endlich ist:

Angenommen  $A_n \cap B_k$  ist abzählbar unendlich und schreibe  $A_n \cap B_k = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$  mit  $\omega_i \neq \omega_j$  für  $i \neq j$ . Damit folgt

$$\mu(A_n \cap B_k) = \mu\left(\bigcup_{j \geq 1} \{\omega_j\}\right) = \sum_{j \geq 1} \mu(\{\omega_j\}) = \infty$$

Aber  $\mu(A_n \cap B_k) \leq \mu(B_k) < \infty$  für alle  $n, k \geq 1$ , ein Widerspruch. Es verbleibt noch zu zeigen, dass  $A_n \cap B_k$  nicht überabzählbar sein kann (einfache Überlegung).  $\square$

## Erzeugung von $\sigma$ -Algebren

**1.12. Lemma:** Sei  $I$  eine beliebige Indexmenge. Sei  $\mathcal{A}_i$  für jedes  $i \in I$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $\Omega$ . Dann ist  $\mathcal{A} := \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$  wieder eine  $\sigma$ -Algebra auf  $\Omega$ .

**Beweis:** Es gilt drei Eigenschaften zu zeigen:

(i)  $\Omega \in \mathcal{A}$

Es gilt laut Annahme  $\Omega \in \mathcal{A}_i$  für alle  $i \in I$ , womit die Behauptung sofort folgt.

(ii)  $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$

$A \in \mathcal{A} \iff \forall i \in I : A \in \mathcal{A}_i \implies \forall i \in I : A^c \in \mathcal{A}_i \iff A^c \in \mathcal{A}$

(iii)  $A_n \in \mathcal{A}, n \geq 1 \implies \bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{A}$   
wie (ii).  $\square$

**1.13. Definition:** Sei  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ . Dann definiert man die von  $\mathcal{M}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra als

$$\sigma(\mathcal{M}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{A} \text{ } \sigma\text{-Algebra} \\ \mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}}} \mathcal{A}$$

Mit Lemma 1.12 folgt sofort, dass  $\sigma(\mathcal{M})$  eine  $\sigma$ -Algebra bezüglich  $\Omega$  ist. Weiters ist  $\sigma(\mathcal{M})$  die kleinste  $\sigma$ -Algebra, die  $\mathcal{M}$  enthält (i.e. ist  $\mathcal{E}$  eine  $\sigma$ -Algebra mit  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{E}$ , dann folgt  $\sigma(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{E}$ ).

**1.14. Lemma:** Sei  $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ . Dann folgt  $\sigma(\mathcal{M}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{M}_2)$ .

**Beweis:**  $\sigma(\mathcal{M}_2)$  ist eine  $\sigma$ -Algebra, die  $\mathcal{M}_2$  enthält, und damit auch  $\mathcal{M}_1$ . Mit der Bemerkung in Definition 1.13 folgt die Aussage.  $\square$



**1.14.<sup>1</sup>/<sub>2</sub>. Definition:** Sei  $K \subseteq \Omega$  und  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ . Dann definiert man die Spur (English *trace*) von  $\mathcal{M}$  auf  $K$  als

$$\mathcal{M}|_K := \{M \cap K : M \in \mathcal{M}\}$$

**1.15. Proposition:** Sei  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $\Omega$  und  $K \subseteq \Omega$ . Dann ist  $\mathcal{A}|_K$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $K$ . Man nennt  $\mathcal{A}|_K$  die Spur- $\sigma$ -Algebra von  $\mathcal{A}$  auf  $K$ .

**Beweis:** Es gilt drei Eigenschaften zu zeigen:

(i)  $K \in \mathcal{A}|_K$   
Es gilt  $\Omega \in \mathcal{A}$  und damit  $K = K \cap \Omega \in \mathcal{A}|_K$ .

(ii)  $A \in \mathcal{A}|_K \implies K \setminus A \in \mathcal{A}|_K$   
 $A \in \mathcal{A}|_K \implies A = K \cap B, B \in \mathcal{A}$ . Nun gilt aber

$$\begin{aligned} K \setminus A &= (K \setminus A) \cap K = (K \setminus (K \cap B)) \cap K \\ &= (K \cap (K \cap B)^c) \cap K \\ &= (K \setminus B) \cap (K \cap K^c) \\ &= K \cap B^c \in \mathcal{A}|_K \end{aligned}$$

da  $B^c \in \mathcal{A}$ .

(iii)  $A_n \in \mathcal{A}|_K, n \geq 1 \implies \bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{A}|_K$   
Es gilt  $A_n = B_n \cap K$  für  $B_n \in \mathcal{A}, n \geq 1$  und damit

$$\bigcup_{n \geq 1} A_n = \bigcup_{n \geq 1} (B_n \cap K) = K \cap \bigcup_{n \geq 1} B_n \in \mathcal{A}|_K$$

da  $\bigcup_{n \geq 1} B_n \in \mathcal{A}$ . □

**1.16. Lemma:** Sei  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  und  $K \subseteq \Omega$ . Dann gilt

$$\sigma(\mathcal{M}|_K) = \sigma(\mathcal{M})|_K$$

**Beweis:** Wir verwenden hier einige Ergebnisse aus der Übung, z.B.  $K \subseteq L \implies \mathcal{M}|_K \subseteq \mathcal{M}|_L$ ,  $\mathcal{M} \subseteq \sigma(\mathcal{M})$  und  $\mathcal{A}$   $\sigma$ -Algebra  $\implies \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$

I.  $\sigma(\mathcal{M}|_K) \subseteq \sigma(\mathcal{M})|_K$   
Es gilt  $\mathcal{M} \subseteq \sigma(\mathcal{M})$  und damit  $\mathcal{M}|_K \subseteq \sigma(\mathcal{M})|_K$ . Damit folgt

$$\sigma(\mathcal{M}|_K) \subseteq \sigma\left(\sigma(\mathcal{M})|_K\right) = \sigma(\mathcal{M})|_K$$

da  $\sigma(\mathcal{M})|_K$  mit Proposition 1.15 eine  $\sigma$ -Algebra ist.

II.  $\sigma(\mathcal{M}|_K) \supseteq \sigma(\mathcal{M})|_K$   
Definiere hierfür

$$\mathcal{G} := \{A \in \sigma(\mathcal{M}) : A \cap K \in \sigma(\mathcal{M}|_K)\} \subseteq \sigma(\mathcal{M})$$

Falls  $\mathcal{G}$  eine  $\sigma$ -Algebra ist, die  $\mathcal{M}$  enthält, dann folgt  $\sigma(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{G}$  und damit  $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{M})$ .  
Daraus folgt schließlich

$$\forall A \in \sigma(\mathcal{M}) : A \cap K \in \sigma(\mathcal{M}|_K)$$

und damit  $\sigma(\mathcal{M})|_K \subseteq \sigma(\mathcal{M}|_K)$ .

III.  $\mathcal{G}$  ist eine  $\sigma$ -Algebra und  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{G}$

$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{G}$  folgt sofort aus  $\mathcal{M} \subseteq \sigma(\mathcal{M})$  und  $\mathcal{M}|_K \subseteq \sigma(\mathcal{M}|_K)$ . Zeige also, dass  $\mathcal{G}$  eine  $\sigma$ -Algebra ist.

- (i)  $\Omega \in \sigma(\mathcal{M})$  und  $\Omega \cap K = K \in \sigma(\mathcal{M}|_K)$ .
- (ii)  $A \in \mathcal{G} \iff A \in \sigma(\mathcal{M}) \wedge A \cap K \in \sigma(\mathcal{M}|_K)$   
 $\implies A^c \in \sigma(\mathcal{M}) \wedge K \setminus (A \cap K) = K \cap A^c \in \sigma(\mathcal{M}|_K)$
- (iii)  $A_n \in \mathcal{G}, n \geq 1 \iff \forall n \geq 1 : A_n \in \sigma(\mathcal{M}) \wedge A_n \cap K \in \sigma(\mathcal{M}|_K)$   
 $\implies \bigcup_{n \geq 1} A_n \in \sigma(\mathcal{M}) \wedge \bigcup_{n \geq 1} (A_n \cap K) = K \cap \bigcup_{n \geq 1} A_n \in \sigma(\mathcal{M}|_K)$  □

## 2. Äußere und Innere Maße

### $\lambda$ - und $\pi$ -Systeme

**2.1. Definition:** Eine Mengenfamilie  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  ist ein  $\lambda$ -System (auch Dynkin-System oder d-System), wenn gilt

- (i)  $\Omega \in \mathcal{D}$
- (ii)  $A, B \in \mathcal{D}, A \subseteq B \implies B \setminus A \in \mathcal{D}$
- (iii)  $\forall n \geq 1 : A_n \in \mathcal{D}, A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \implies \bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{D}$

**2.2. Lemma:** Sei  $(\Omega, \mathcal{A})$  ein messbarer Raum und seien  $\mu, \nu$  endliche Maße auf  $(\Omega, \mathcal{A})$ , sodass  $\mu(\Omega) = \nu(\Omega)$ . Dann ist

$$\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = \nu(A)\}$$

ein  $\lambda$ -System.

**Beweis:**

- (i) Laut Voraussetzung gilt  $\mu(\Omega) = \nu(\Omega)$ .
- (ii) Seien  $A, B \in \mathcal{D}$ . Dann gilt  $\mu(A) = \nu(A)$  und  $\mu(B) = \nu(B)$  und es folgt

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A) = \nu(B) - \nu(A) = \nu(B \setminus A)$$

- (iii) Seien  $A_n \in \mathcal{D}, n \geq 1$  und  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$ . Dann gilt  $\mu(A_n) = \nu(A_n)$  für alle  $n \geq 1$ . Mit der Stetigkeit von unten folgt

$$\mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(A_n) = \nu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right)$$

□

**2.3. Definition:** Eine durchschnittsstabile Mengenfamilie  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  nennt man  $\pi$ -System.

**Bemerkung:** Jede  $\sigma$ -Algebra ist damit sowohl ein  $\lambda$ -System, als auch ein  $\pi$ -System.

**2.4. Lemma:** Sei  $\mathcal{M}$  sowohl ein  $\lambda$ -System, als auch ein  $\pi$ -System. Dann ist  $\mathcal{M}$  eine  $\sigma$ -Algebra.

**Beweis:** Die ersten beiden Eigenschaften einer  $\sigma$ -Algebra folgen sofort. Mit de Morgan folgt außerdem die Abgeschlossenheit bezüglich endlicher Vereinigungen. Seien also  $A_n \in \mathcal{M}, n \geq 1$ . Setze  $B_N := \bigcup_{n=1}^N A_n \in \mathcal{M}$  für alle  $N \geq 1$ . Dann gilt  $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots$  und damit

$$\bigcup_{N \geq 1} B_N = \bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{M}. \quad \square$$

**2.5. Definition:** Für  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  definiere das von  $\mathcal{M}$  erzeugte  $\lambda$ -System als

$$\lambda(\mathcal{M}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{D} \text{ } \lambda\text{-System} \\ \mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}}} \mathcal{D}$$

$\lambda(\mathcal{M})$  ist wohldefiniert, da z.B.  $\mathcal{P}(\Omega)$  oder  $\sigma(\mathcal{M})$   $\lambda$ -Systeme sind, die  $\mathcal{M}$  enthalten.

**2.6. Proposition:**  $\lambda(\mathcal{M})$  ist das kleinste  $\lambda$ -System auf  $\Omega$ , das  $\mathcal{M}$  enthält.

**Beweis:** Da der Durchschnitt beliebig vieler  $\lambda$ -Systeme wieder ein  $\lambda$ -System ist, ist  $\lambda(\mathcal{M})$  ein  $\lambda$ -System. Sei  $\mathcal{D}$  ein  $\lambda$ -System, das  $\mathcal{M}$  enthält. Dann gilt  $\lambda(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{D}$ .  $\square$

**2.7. Satz (Sierpiński–Dynkin’s  $\lambda$ - $\pi$  Theorem):** Ist  $\mathcal{M}$  ein  $\pi$ -System, dann gilt

$$\lambda(\mathcal{M}) = \sigma(\mathcal{M})$$

**Beweis:** Die Inklusion  $\lambda(\mathcal{M}) \subseteq \sigma(\mathcal{M})$  folgt sofort aus der Bemerkung zu Definition 2.3. Es verbleibt also die Inklusion  $\sigma(\mathcal{M}) \subseteq \lambda(\mathcal{M})$  zu zeigen. Dazu genügt es zu zeigen, dass  $\lambda(\mathcal{M})$  ein  $\pi$ -System ist.

- I. Definiere  $\mathcal{D}_1 := \{A \in \lambda(\mathcal{M}) : \forall M \in \mathcal{M} : A \cap M \in \lambda(\mathcal{M})\}$ . Dann gilt  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}_1$  (leicht nachzuprüfen) und per Konstruktion  $\mathcal{D}_1 \subseteq \lambda(\mathcal{M})$ . Falls  $\mathcal{D}_1$  ein  $\lambda$ -System ist (Beweis Übung), gilt  $\lambda(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{D}_1$  und somit  $\mathcal{D}_1 = \lambda(\mathcal{M})$ .
- II. Definiere  $\mathcal{D}_2 := \{A \in \lambda(\mathcal{M}) : \forall B \in \lambda(\mathcal{M}) : A \cap B \in \lambda(\mathcal{M})\}$ . Es gilt  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D}_2$  und  $\mathcal{D}_2 \subseteq \lambda(\mathcal{M})$ . Falls  $\mathcal{D}_2$  ein  $\lambda$ -System ist (Beweis Übung), gilt  $\lambda(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{D}_2$  und damit  $\mathcal{D}_2 = \lambda(\mathcal{M})$ .

Damit folgt, dass  $\lambda(\mathcal{M})$  durchschnittsstabil ist.  $\square$

**2.8. Korollar:** Seien  $\mu$  und  $\nu$  endliche Maße auf einem messbaren Raum  $(\Omega, \mathcal{A})$ , die auf einem  $\pi$ -System  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}$  übereinstimmen (i.e.  $\forall M \in \mathcal{M} : \mu(M) = \nu(M)$ ). Falls  $\mu(\Omega) = \nu(\Omega)$ , dann stimmen  $\mu$  und  $\nu$  auch auf  $\sigma(\mathcal{M})$  überein.

**Beweis:** Sei  $\mathcal{D}$  wie in Lemma 2.2. Dann gilt  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}$  und mit Proposition 2.6 folgt  $\lambda(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{D}$ . Mit Satz 2.7 folgt schließlich  $\lambda(\mathcal{M}) = \sigma(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{D}$ .  $\square$

**2.9. Korollar:** Seien  $\mu$  und  $\nu$  Maße auf einem messbaren Raum  $(\Omega, \mathcal{A})$ , die auf einem  $\pi$ -System  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}$  übereinstimmen und sei  $\mu$   $\sigma$ -endlich auf  $\mathcal{M}$ . Dann stimmen  $\mu$  und  $\nu$  auch auf  $\sigma(\mathcal{M})$  überein.

**Beweis:** Trivial, falls  $\mu(\Omega) = 0$ . Sei also  $\mu(\Omega) > 0$ . Mit der  $\sigma$ -Endlichkeit von  $\mu$  auf  $\mathcal{M}$ , gibt es  $A_n \in \mathcal{M}$ , sodass  $\mu(A_n)$  für  $n$  hinreichend groß ( $\exists N \geq 1, \forall n \geq N$ , etc.). Sei o.B.d.A.  $\mu(A_n) > 0$  für alle  $n \geq 1$  und definiere

$$\mu_n(\cdot) := \frac{\mu(A_n \cap \cdot)}{\mu(A_n)} \text{ und } \nu_n(\cdot) := \frac{\nu(A_n \cap \cdot)}{\nu(A_n)}$$

Dann sind  $\mu_n$  und  $\nu_n$  endliche Maße auf  $(\Omega, \mathcal{A})$  und laut Voraussetzung stimmen  $\mu_n$  und  $\nu_n$  auf  $\mathcal{M}$  überein, da  $A_n \cap M \in \mathcal{M}$  für alle  $M \in \mathcal{M}$ . Außerdem gilt  $\mu_n(\Omega) = \nu_n(\Omega) = 1$ . Mit Korollar 2.8 folgt, dass  $\mu_n$  und  $\nu_n$  auch auf  $\sigma(\mathcal{M})$  übereinstimmen. Nun gilt für  $A \in \sigma(\mathcal{M})$

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu\left(A \cap \bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n \geq 1} (A_n \cap A)\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n \cap A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) \cdot \mu(A_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(A) \cdot \nu(A_n) = \nu(A) \end{aligned}$$

$\square$

## Prämaße und äußere Maße

**2.10. Definition:** Sei  $\mathcal{A}_0$  eine Algebra auf  $\Omega$ . Ein Prämaß auf  $(\Omega, \mathcal{A}_0)$  ist eine Abbildung  $\mu : \mathcal{A}_0 \rightarrow [0, \infty]$  mit

(i)  $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) Für  $A_i \in \mathcal{A}_0, i \geq 1$  disjunkt mit  $\bigcup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{A}_0$  gilt  $\mu\left(\bigcup_{i \geq 1} A_i\right) = \sum_{i \geq 1} \mu(A_i)$

**2.11. Definition:** Sei  $\mu$  ein Prämaß auf  $(\Omega, \mathcal{A}_0)$ . Das entsprechende äußere Maß ist die Abbildung  $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$  mit

$$\mu^*(A) := \inf_{\substack{A_i \in \mathcal{A}_0, i \geq 1 \\ A \subseteq \bigcup_{i \geq 1} A_i}} \sum_{i \geq 1} \mu(A_i)$$

**Bemerkung:**  $\mu^*$  ist wohldefiniert, da  $\Omega, \emptyset \in \mathcal{A}_0$  und der inf damit von unten durch 0 beschränkt ist.

**2.12. Definition:** Sei  $\mu$  ein Prämaß auf  $(\Omega, \mathcal{A}_0)$  und  $\mu^*$  das entsprechende äußere Maß. Eine Menge  $A \subseteq \Omega$  ist von außen messbar (bzgl.  $\mu^*$ ), falls

$$\forall M \in \mathcal{P}(\Omega) : \mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \cap A^c) = \mu^*(M)$$

Sei außerdem  $\mathcal{A}^*$  die Familie der von außen messbaren Mengen.

Betrachte im Folgenden jeweils ein Prämaß  $\mu$  auf  $(\Omega, \mathcal{A}_0)$ , das entsprechende äußere Maß  $\mu^*$  und die von außen messbaren Mengen  $\mathcal{A}^*$ .

**2.13. Lemma:**

- (i)  $\mu^*(\emptyset) = 0$
- (ii)  $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) : \mu^*(A) \geq 0$
- (iii)  $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega), A \subseteq B : \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

**Beweis:**

- (i)  $\mu^*(\emptyset) = \sum_{i \geq 1} \mu(\emptyset) = 0$ , da  $\emptyset \in \mathcal{A}_0$ . Insbesondere ist  $\emptyset$  von außen messbar (einfach zu prüfen).
- (ii) siehe Bemerkung zu Definition 2.11.
- (iii) Zeige hierzu die  $\sigma$ -Subadditivität, also

$$\mu^* \left( \bigcup_{n \geq 1} A_n \right) \leq \sum_{n \geq 1} \mu^*(A_n)$$

für alle  $A_n \in \mathcal{P}(\Omega), n \geq 1$ . Sei dazu  $\varepsilon > 0$  und wähle  $B_{n,i} \in \mathcal{A}_0, i \geq 1$ , sodass  $A_n \subseteq \bigcup_{i \geq 1} B_{n,i}$ . Dann gilt

$$\bigcup_{n \geq 1} A_n \subseteq \bigcup_{n \geq 1} \bigcup_{i \geq 1} B_{n,i} \text{ und } \sum_{i \geq 1} \mu(B_{n,i}) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Hinweis:  $a \leq \left( \inf_{a \in A} a \right) + \varepsilon$  für alle  $a \in A$  und  $\varepsilon > 0$ . Es folgt

$$\mu^* \left( \bigcup_{n \geq 1} A_n \right) \leq \sum_{n \geq 1} \sum_{i \geq 1} \mu(B_{n,i}) \leq \sum_{n \geq 1} \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon + \sum_{n \geq 1} \mu^*(A_n)$$

Die  $\sigma$ -Subadditivität (und damit die Monotonie) folgt für  $\varepsilon \searrow 0$ . □

**2.14. Korollar:**  $\mu^*$  ist damit auch endlich subadditiv, also

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega) : \mu^*(A \cup B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

Insbesondere ist eine Menge  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$  genau dann von außen messbar, wenn

$$\forall M \in \mathcal{P}(\Omega) : \mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \cap A^c) \leq \mu^*(M)$$

**2.15. Lemma:**  $\mathcal{A}^*$  ist eine Algebra.

**Beweis:**

- (i)  $\Omega \in \mathcal{A}^*$ : folgt ähnlich wie der Beweis von Lemma 2.13 (i) oder aus (ii) unten.
- (ii)  $A \in \mathcal{A}^* \implies A^c \in \mathcal{A}^*$ : trivial.
- (iii)  $A, B \in \mathcal{A}^* \implies A \cap B \in \mathcal{A}^*$ : Es gilt  $\forall M \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\mu^*(M) &= \mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \cap A^c) \\
&= \mu^*(M \cap A \cap B) + \mu^*(M \cap A^c \cap B) + \mu^*(M \cap A \cap B^c) + \mu^*(M \cap A^c \cap B^c) \\
&= \mu^*(M \cap A \cap B) + \mu^*((M \cap A \cap B^c) \cup (M \cap A^c \cap B^c) \cup (M \cap A^c \cap B)) \\
&= \mu^*(M \cap A \cap B) + \mu^*((M \cap A^c) \cup (M \cap A \cap B^c)) \\
&= \mu^*(M \cap (A \cap B)) + \mu^*(M \cap (A \cap B)^c)
\end{aligned}$$

Die Aussage folgt mit Korollar 2.14. □

**2.16. Lemma:** Seien  $A_i \in \mathcal{A}^*, i \geq 1$  disjunkt. Dann gilt für alle  $M \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$\mu^*\left(M \cap \bigcup_{i \geq 1} A_i\right) = \sum_{i \geq 1} \mu^*(M \cap A_i)$$

**Beweis:** Sei  $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  und sei  $A_n = \emptyset$  für alle  $n > N$ . Induktion in  $N$ .

- $N = 1$ : trivial
- $N = 2$ : Hier gilt

$$\begin{aligned}
\mu^*(M \cap (A_1 \cup A_2)) &= \mu^*(M \cap (A_1 \cup A_2) \cap A_1) + \mu^*(M \cap (A_1 \cup A_2) \cap A_1^c) \\
&= \mu^*(M \cap A_1) + \mu^*(M \cap A_2)
\end{aligned}$$

da  $A_1 \in \mathcal{A}^*$ .

- $P(N) \implies P(N+1)$ : Da  $\mathcal{A}^*$  eine Algebra ist, gilt  $\bigcup_{i=1}^N A_i \in \mathcal{A}^*$  und damit

$$\begin{aligned}
\mu^*\left(M \cap \bigcup_{i=1}^{N+1} A_i\right) &= \mu^*\left(M \cap \left(\bigcup_{i=1}^N A_i \cup A_{N+1}\right)\right) \\
&= \mu^*\left(M \cap \bigcup_{i=1}^N A_i\right) + \mu^*(M \cap A_{N+1}) \\
&= \sum_{i=1}^N \mu^*(M \cap A_i) + \mu^*(M \cap A_{N+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{N+1} \mu^*(M \cap A_i)
\end{aligned}$$

- $N = \infty$ : Mit der  $\sigma$ -Subadditivität gilt

$$\mu^* \left( M \cap \bigcup_{i \geq 1} A_i \right) = \mu^* \left( \bigcup_{i \geq 1} (M \cap A_i) \right) \leq \sum_{i \geq 1} \mu^*(M \cap A_i)$$

Aber für alle  $m \geq 1$  gilt mit der Monotonie

$$\begin{aligned} \mu^* \left( M \cap \bigcup_{i \geq 1} A_i \right) &\geq \mu^* \left( M \cap \bigcup_{i=1}^m A_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \mu^*(M \cap A_i) \end{aligned}$$

und die Aussage folgt für  $m \rightarrow \infty$ . □

**2.17. Lemma:**  $\mathcal{A}^*$  ist eine  $\sigma$ -Algebra.

**Beweis:** Mit Lemma 2.15 genügt es die Abgeschlossenheit bzgl. abzählbarer Durchschnitte zu zeigen. Seien dazu zunächst  $A_i \in \mathcal{A}^*, i \geq 1$  disjunkt. Setze  $B_n := \bigcup_{i=1}^n A_i$  und  $B := \bigcup_{i \geq 1} A_i$ .

Dann gilt für  $M \in \mathcal{P}(\Omega)$  und alle  $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \mu^*(M) &= \mu^*(M \cap B_n) + \mu^*(M \cap B_n^c) \\ &= \mu^* \left( M \cap \bigcup_{i=1}^n A_i \right) + \mu^* \left( M \cap \left( \bigcup_{i=1}^n A_i \right)^c \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \mu^*(M \cap A_i) + \mu^* \left( M \cap \left( \bigcup_{i=1}^n A_i \right)^c \right) \\ &\geq \sum_{i=1}^n \mu^*(M \cap A_i) + \mu^* \left( M \cap \left( \bigcup_{i \geq 1} A_i \right)^c \right) \end{aligned}$$

da  $B_n \in \mathcal{A}^*$  (Algebra). Für  $n \rightarrow \infty$  folgt

$$\begin{aligned} \mu^*(M) &\geq \sum_{i \geq 1} \mu^*(M \cap A_i) + \mu^* \left( M \cap \left( \bigcup_{i \geq 1} A_i \right)^c \right) \\ &\stackrel{2.16.}{=} \mu^* \left( M \cap \bigcup_{i \geq 1} A_i \right) + \mu^* \left( M \cap \left( \bigcup_{i \geq 1} A_i \right)^c \right) \end{aligned}$$

und damit schließlich  $\bigcup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{A}^*$ .

Seien nun  $A_i \in \mathcal{A}^*, i \geq 1$  allgemein (also nicht unbedingt disjunkt). Setze  $B_1 := A_1$  und  $B_n := A_n \setminus \left( \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right)$  für alle  $n \geq 2$ . Mit Lemma 2.15 gilt  $B_n \in \mathcal{A}^*$  für alle  $n \geq 1$  und



insbesondere sind die  $B_n, n \geq 1$  disjunkt und  $\bigcup_{n \geq 1} B_n = \bigcup_{i \geq 1} A_i$ . Die Aussage folgt mit der ersten Fall.  $\square$

**2.18. Lemma:** Für  $A \in \mathcal{A}_0$  gilt  $\mu(A) = \mu^*(A)$ .

**Beweis:** Laut Konstruktion (siehe 2.11) gilt  $\mu^*(A) \leq \mu(A)$ . Sei also  $\varepsilon > 0$  und wähle  $A_i \in \mathcal{A}_0, i \geq 1$ , sodass  $A \subseteq \bigcup_{i \geq 1} A_i$  und

$$\sum_{i \geq 1} \mu(A_i) \leq \mu^*(A) + \varepsilon$$

Da  $\mu$  als Prämaß monoton und  $\sigma$ -additiv (und damit auch  $\sigma$ -subadditiv, siehe Übung) auf  $\mathcal{A}_0$  ist, folgt

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu\left(A \cap \bigcup_{i \geq 1} A_i\right) \\ &= \mu\left(\bigcup_{i \geq 1} (A \cap A_i)\right) \\ &\leq \sum_{i \geq 1} \mu(A \cap A_i) \\ &\leq \sum_{i=1} \mu(A_i) \leq \mu^*(A) + \varepsilon \end{aligned}$$

und die Aussage folgt für  $\varepsilon \searrow 0$ .  $\square$

**2.19. Lemma:**  $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}^*$ , also ist jede Menge in der Algebra  $\mathcal{A}_0$  auch von außen messbar.

**Beweis:** Sei  $A \in \mathcal{A}_0$  und  $M \in \mathcal{P}(\Omega)$ . Zu zeigen ist

$$\mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \cap A^c) \leq \mu^*(M)$$

Sei dazu  $\varepsilon > 0$  und wähle  $A_i \in \mathcal{A}_0, i \geq 1$ , sodass  $M \subseteq \bigcup_{i \geq 1} A_i$  und  $\sum_{i \geq 1} \mu(A_i) \leq \mu^*(M) + \varepsilon$ .

Setze  $B_i := A \cap A_i$  und  $C_i := A^c \cap A_i$ . Dann sind  $B_i$  und  $C_i$  disjunkt und  $B_i, C_i \in \mathcal{A}_0$  für  $i \geq 1$ . Außerdem gilt  $\bigcup_{i \geq 1} B_i = A \cap \bigcup_{i \geq 1} A_i$  und damit  $A \cap M \subseteq \bigcup_{i \geq 1} B_i$ . Ähnliches gilt für  $C_i$ .

Damit gilt

$$\mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \cap A^c) \leq \sum_{i \geq 1} \mu(B_i) + \mu(C_i) = \sum_{i \geq 1} \mu(A_i) \leq \mu^*(M) + \varepsilon$$

und die Aussage folgt für  $\varepsilon \searrow 0$ .  $\square$

**2.20. Satz:** Sei  $\mu$  ein Prämaß auf  $(\Omega, \mathcal{A}_0)$  und seien  $\mu^*$  das entsprechende äußere Maß und  $\mathcal{A}^*$  die Familie der von außen messbaren Mengen. Dann ist  $(\Omega, \mathcal{A}^*, \mu^*)$  ein Maßraum,  $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}^*$  und es gilt  $\forall A \in \mathcal{A}_0 : \mu(A) = \mu^*(A)$ .

**Beweis:** Mit Lemma 2.17 ist  $\mathcal{A}^*$  eine  $\sigma$ -Algebra. Mit Lemma 2.13 und Lemma 2.16 ( $M = \Omega$ ) folgt, dass  $\mu^*$  alle Eigenschaften eines Maßes auf  $(\Omega, \mathcal{A}^*)$  erfüllt. Mit Lemma 2.19 gilt  $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}^*$  und mit Lemma 2.18 gilt  $\mu = \mu^*$  auf  $\mathcal{A}_0$ .  $\square$

**2.21. Satz (Maßerweiterungssatz von Carathéodory):** Sei  $\mu$  ein Prämaß auf einer Algebra  $\mathcal{A}_0$ , sodass  $\exists A_n \in \mathcal{A}_0, n \geq 1 : \Omega = \bigcup_{n \geq 1} A_n$  und  $\forall n \geq 1 : \mu(A_n) < \infty$ . Dann gibt es eine eindeutige Erweiterung  $\mu^*$  auf  $\sigma(\mathcal{A}_0)$  mit  $\mu = \mu^*$  auf  $\mathcal{A}_0$ .

**Beweis:** Es gilt  $\sigma(\mathcal{A}_0) \subseteq \mathcal{A}^*$ . Mit Satz 2.20 ist  $\mu^*$  ein Maß auf  $(\Omega, \mathcal{A}^*)$  und damit auch auf  $(\Omega, \sigma(\mathcal{A}_0))$ , das auf  $\mathcal{A}_0$  mit  $\mu$  übereinstimmt. Sei  $\nu$  ein weiteres Maß, das auf  $\mathcal{A}_0$  mit  $\mu$  übereinstimmt. Dann stimmt  $\nu$  auf  $\mathcal{A}_0$  auch mit  $\mu^*$  überein. Beachte, dass  $\mathcal{A}_0$  durchschnittsstabil ist, und damit die Voraussetzungen von Korollar 2.9 erfüllt sind. Damit gilt  $\forall A \in \sigma(\mathcal{A}_0) : \nu(A) = \mu^*(A)$ .  $\square$

# 3. Maß auf $\mathbb{R}$

## Motivation

**3.1. Beispiel:** Betrachte den messbaren Raum  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$  und eine Folge nicht-negativer reeller Zahlen  $p_i \geq 0, i \geq 1$  mit  $\sum_{i \geq 1} p_i = 1$ . Definiere die Abbildung  $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow [0, 1]$  mit  $A \mapsto \sum_{i \in A} p_i$ . Dann ist  $\mathbb{P}$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß, da  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$  (leere Summe),  $\mathbb{P}(\mathbb{N}) = 1$  (per Konstruktion), und für  $A_n \in \mathcal{P}(\mathbb{N}), n \geq 1$  disjunkt

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{i \in \bigcup_{n \geq 1} A_n} p_i \stackrel{\dagger}{=} \sum_{n \geq 1} \sum_{i \in A_n} p_i = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n)$$

wobei der Schritt in  $\dagger$  aus dem folgenden Satz (cf. Analysis I?) folgt. Dieses Beispiel deckt alle diskreten Verteilungen auf  $\mathbb{N}$  ab. Unser Ziel ist es, dieses Beispiel auf stetige Verteilungen auf  $\mathbb{R}$  zu erweitern.

**3.2. Satz (Umordnung absolut konvergenter Reihen):** Sei die Reihe von  $a_n, n \geq 1$  absolut konvergent und sei  $b_n, n \geq 1$  eine Umordnung der  $a_n, n \geq 1$  (i.e. es gibt eine Bijektion  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $b_n = a_{f(n)}$ ). Dann ist die Reihe von  $b_n, n \geq 1$  absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{n \geq 1} a_n = \sum_{n \geq 1} b_n$$

**Beweis:** Sei  $\varepsilon > 0$  und definiere

$$s_N := \sum_{n=1}^N a_n \text{ und } t_N := \sum_{n=1}^N b_n$$

Dann gibt es  $N \geq 1$ , sodass

$$\left| \sum_{n \geq 1} a_n - s_N \right| < \varepsilon$$

Da die Reihe von  $a_n, n \geq 1$  auch absolut konvergiert können wir  $N \geq 1$  so wählen, dass auch

$$\left| \sum_{n \geq 1} |a_n| - (|a_1| + \dots + |a_N|) \right| = \sum_{n \geq N+1} |a_n| < \varepsilon$$

Wähle nun  $M \geq 1$  groß genug, dass unter den  $b_n, n = 1, \dots, M$  die Werte  $a_1, \dots, a_N$  alle vorkommen. Für alle  $m \geq M$  ist  $t_m - s_N$  damit eine Summe, in der die Werte  $a_1, \dots, a_N$  nicht vorkommen und mit der Dreiecksungleichung folgt

$$|t_m - s_N| \leq \sum_{n \geq N+1} a_n < \varepsilon$$

Damit gilt  $\forall m \geq M$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n \geq 1} a_n - t_m \right| &= \left| \sum_{n \geq 1} a_n - s_N + s_N - t_m \right| \\ &\leq \left| \sum_{n \geq 1} a_n - s_N \right| + |s_N - t_m| < 2\varepsilon \end{aligned}$$

für  $N$  hinreichend groß. Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt die Aussage.  $\square$

**3.2.<sup>1/2</sup>. Satz (Riemann'scher Umordnungssatz):** Sei die Reihe von  $a_n, n \geq 1$  konvergent, aber nicht absolut konvergent. Dann gibt es für jede Zahl  $a \in \mathbb{R}$  eine Umordnung  $b_n, n \geq 1$ , sodass

$$\sum_{n \geq 1} b_n = a$$

**Beweis:** siehe z.B. Theorem 22.7, Spivak, M. *Calculus*. ? edn., pp. ?.  $\square$

## Messen von Intervallen

Sei im Folgenden  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebige monoton-nichtfallende und rechtsseitig stetige Funktion. Beachte, dass damit linksseitige Grenzwerte für  $F$  existieren. Gängige Beispiele sind z.B.:  $F(x) = x$  oder  $F(x) = \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2}$ . Wir suchen nun eine möglichst "kleine"  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  auf  $\mathbb{R}$ , die alle Intervalle der Form  $[a, b]$  enthält und ein Maß  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ , sodass  $\mu([a, b]) = F(b) - F(a)$ .

**3.3. Definition:** Sei  $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ . Definiere das halboffene Intervall

$$(a, b) := \begin{cases} (a, b] & \text{falls } b < \infty \\ (a, \infty) & \text{falls } b = \infty \end{cases}$$

sowie die Familie der halboffenen Intervalle

$$\mathcal{J} := \{(a, b) : -\infty \leq a \leq b \leq \infty\}$$

und die Mengenfunktion  $\phi : \mathcal{J} \rightarrow [0, \infty]$  mit

$$(a, b) \mapsto \begin{cases} F(b) - F(a) & \text{falls } a < b \\ 0 & \text{falls } a = b \end{cases}$$

**3.4. Lemma:**  $\phi$  ist  $\sigma$ -additiv auf  $\mathcal{J}$ .

**Beweis:** Seien  $J_n \in \mathcal{J}, n \geq 1$ , disjunkt, sodass auch  $\bigcup_{n \geq 1} J_n \in \mathcal{J}$ . Zeige

$$\phi \left( \bigcup_{n \geq 1} J_n \right) = \sum_{n \geq 1} \phi(J_n)$$

Da  $\bigcup_{n \geq 1} J_n \in \mathcal{J}$ , können wir  $\bigcup_{n \geq 1} J_n = (a, b)$  schreiben. Seien o.B.d.A. alle  $J_n = (a_i, b_i)$  nicht-leer und aufsteigend geordnet, sodass

$$a = a_1 < b_1 = a_2 < \dots < b_{n-1} = a_n < b_n = b$$

Dann gilt

$$\sum_{n \geq 1} \phi(J_n) = \sum_{n \geq 1} [F(b_n) - F(a_n)] = F(b_n) - F(a_1) = F(b) - F(a) = \phi \left( \bigcup_{n \geq 1} J_n \right)$$

□

**Bemerkung:** Beachte, dass  $\bigcup_{n \geq 1} J_n \in \mathcal{J}$  hier eine notwendige Voraussetzung ist, da  $\mathcal{J}$  keine Algebra (bzw.  $\sigma$ -Algebra) ist. Wir erweitern  $\mathcal{J}$  zunächst konstruktiv zu einer Algebra  $\mathcal{J}^*$  und die Mengenfunktion  $\phi : \mathcal{J} \rightarrow [0, \infty]$  zu einem Prämaß  $\phi^* : \mathcal{J}^* \rightarrow [0, \infty]$ . Später liefert uns dann ein (nicht-konstruktiver) Satz (Maßerweiterungssatz von Carathéodory) eine Erweiterung von  $\phi^*$  zu einem Maß  $\mu : \sigma(\mathcal{J}^*) \rightarrow [0, \infty]$ .

**3.5. Definition:** Definiere die Mengenfamilie

$$\mathcal{J}^* := \left\{ \bigcup_{i=1}^n J_i : n \in \mathbb{N}, J_i \in \mathcal{J}, J_i \text{ disjunkt für } i = 1, \dots, n \right\}$$

aller endlichen disjunkten Vereinigungen von halboffenen Intervallen.

**3.6. Lemma:**  $\mathcal{J}^*$  ist eine Algebra auf  $\mathbb{R}$  mit  $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}^*$ .

**Beweis:** Die Eigenschaften  $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}^*$  und  $\mathbb{R} \in \mathcal{J}^*$  sind trivial. Zeige also die Abgeschlossenheit bezüglich Komplementbildung und endlichen Durchschnitten.

Für  $(a, b) \in \mathcal{J}$  gilt  $(a, b)^c = (-\infty, a) \cup (b, \infty) \in \mathcal{J}^*$ . Sei also  $A = \bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i) \in \mathcal{J}^*$  mit  $(a_i, b_i)$  disjunkt, nicht-leer und aufsteigend geordnet, d.h.

$$-\infty \leq a_i < b_1 \leq a_2 < \dots \leq a_n < b \leq \infty$$

Dann gilt  $A^c = (-\infty, a_1) \cup (b_1, a_2) \cup \dots \cup (b_{n-1}, a_n) \cup (b_n, \infty) \in \mathcal{J}^*$  per Definition von  $\mathcal{J}^*$ .

Seien nun  $A, B \in \mathcal{J}^*, A = \bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i), B = \bigcup_{j=1}^m (c_j, d_j)$  jeweils endliche Vereinigungen

disjunkter, halboffener Intervalle, d.h.  $(a_i, b_i)$  paarweise disjunkt für  $i = 1, \dots, n$  und  $(c_j, d_j)$  paarweise disjunkt für  $j = 1, \dots, m$ . Dann gilt

$$A \cap B = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m (a_i, b_i) \cap (c_j, d_j) = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m (\max\{a_i, c_j\}, \max\{b_i, d_j\})$$

Die Disjunktheit der Intervalle  $(\max\{a_i, c_j\}, \max\{b_i, d_j\})$  für  $i = 1, \dots, n$  und  $j = 1, \dots, m$  ist leicht nachzuprüfen (Widerspruchsargument).  $\square$

**3.7. Definition:** Sei  $A = \bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i) \in \mathcal{J}^*$  mit  $(a_i, b_i)$  disjunkt für  $i = 1, \dots, n$ . Definiere nun die Erweiterung  $\phi^* : \mathcal{J}^* \rightarrow [0, \infty]$  mit  $A \mapsto \sum_{i=1}^n \phi((a_i, b_i))$ . Da  $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}^*$  gilt  $\phi = \phi^*$  auf  $\mathcal{J}$ .

**3.8. Proposition:**  $\phi^*(A)$  ist wohldefiniert für alle  $A \in \mathcal{J}^*$  und insbesondere unabhängig von der Darstellung von  $A$ .

**Beweis:** Sei  $A = \bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i) = \bigcup_{j=1}^m (c_j, d_j) \in \mathcal{J}^*$ . Schreibe für  $i = 1, \dots, n$

$$(a_i, b_i) = (a_i, b_i) \cap A = (a_i, b_i) \cap \bigcup_{j=1}^m (c_j, d_j) = \bigcup_{j=1}^m [(c_j, d_j) \cap (a_i, b_i)]$$

und analog für  $j = 1, \dots, m$

$$(c_j, d_j) = \bigcup_{i=1}^n [(c_j, d_j) \cap (a_i, b_i)]$$

Es folgt mit der  $\sigma$ -Additivität von  $\phi$  auf  $\mathcal{J}$

$$\begin{aligned} \phi^* \left( \bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i) \right) &= \sum_{i=1}^n \phi((a_i, b_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n \phi \left( \bigcup_{j=1}^m [(c_j, d_j) \cap (a_i, b_i)] \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \phi((a_i, b_i) \cap (c_j, d_j)) \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \phi((a_i, b_i) \cap (c_j, d_j)) \\ &= \sum_{j=1}^m \phi \left( \bigcup_{i=1}^n [(c_j, d_j) \cap (a_i, b_i)] \right) \\ &= \sum_{j=1}^m \phi((c_j, d_j)) = \phi^* \left( \bigcup_{j=1}^m (c_j, d_j) \right) \end{aligned}$$

$\square$

## Erzeugung von Maßen auf $\mathbb{R}$

Wir möchten  $\phi^* : \mathcal{J}^* \rightarrow [0, \infty]$  nun zu einem Maß  $\mu : \sigma(\mathcal{J}^*) \rightarrow [0, \infty]$  erweitern. Wir fordern dazu folgende Eigenschaften von  $\phi^*$ :

### 3.9. Lemma:

- (i)  $\phi^*(\emptyset) = 0$
- (ii) Für  $A_n \in \mathcal{J}^*, n \geq 1$  disjunkt, mit  $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{J}^*$  gilt  $\phi^*(\bigcup_{n \geq 1} A_n) = \sum_{n \geq 1} \phi^*(A_n)$  ( $\phi^*$  ist  $\sigma$ -additiv auf  $\mathcal{J}^*$ ).
- (iii)  $\exists B_n \in \mathcal{J}^*, n \geq 1$ , sodass  $\mathbb{R} = \bigcup_{n \geq 1} B_n$  und  $\phi^*(B_n) < \infty$  für  $n \geq 1$  (Das Prämaß  $\phi^*$  ist  $\sigma$ -endlich auf  $(\mathbb{R}, \mathcal{J}^*)$ ).

### Beweis:

- (i)  $\phi(\emptyset) = \phi^*((1, 1)) = \phi((1, 1)) = 0$  per Definition von  $\phi$ .
- (ii) Setze  $A := \bigcup_{n \geq 1} A_n$ . Da  $A \in \mathcal{J}^*$  können wir  $A = \bigcup_{j=1}^k (c_j, d_j)$  schreiben mit  $(c_j, d_j)$  disjunkt für  $j = 1, \dots, k$ . Schreibe weiters  $A_n = \bigcup_{i=1}^{m_n} (a_i^{(n)}, b_i^{(n)})$  mit  $(a_i^{(n)}, b_i^{(n)})$  disjunkt für  $i = 1, \dots, m_n$  und alle  $n \geq 1$ . Es gilt

$$(c_j, d_j) = (c_j, d_j) \cap A = \bigcup_{n \geq 1} (A_n \cap (c_j, d_j))$$

und

$$A_n = A_n \cap A = \bigcup_{i=1}^{m_n} \bigcup_{j=1}^k \left( (a_i^{(n)}, b_i^{(n)}) \cap (c_j, d_j) \right)$$

und mit Lemma 3.4 folgt (mit der Eigenschaft, dass  $\mathcal{J}$  durchschnittsstabil ist)

$$\phi((c_j, d_j)) = \sum_{n \geq 1} \sum_{i=1}^{m_n} \phi \left( (a_i^{(n)}, b_i^{(n)}) \cap (c_j, d_j) \right)$$

und per Definition von  $\phi^*$  gilt

$$\phi^*(A_n) = \sum_{i=1}^{m_n} \sum_{j=1}^k \phi \left( (a_i^{(n)}, b_i^{(n)}) \cap (c_j, d_j) \right)$$

Mit Satz 3.2 (??, und  $\sigma$ -Endlichkeit?) folgt

$$\begin{aligned}
\phi^*(A) &= \sum_{i=1}^k \phi((c_i, d_i]) \\
&= \sum_{j=1}^k \sum_{n \geq 1} \sum_{i=1}^{m_n} \phi((a_i^{(n)}, b_i^{(n)}) \cap (c_j, d_j]) \\
&\stackrel{\text{Satz 3.2}}{=} \sum_{n \geq 1} \sum_{i=1}^{m_n} \sum_{j=1}^k \phi((a_i^{(n)}, b_i^{(n)}) \cap (c_j, d_j]) \\
&= \sum_{n \geq 1} \phi^*(A_n)
\end{aligned}$$

- (iii) Wähle hier  $B_n := (-n, n) \in \mathcal{J}^*$ . Dann gilt  $\mathbb{R} = \bigcup_{n \geq 1} (-n, n)$  und  $\phi^*(B_n) = F(n) - F(-n) < \infty$  für alle  $n \geq 1$ .  $\square$

**3.10. Lemma:** Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i) Für  $A_n \in \mathcal{J}, n \geq 1$  disjunkt, mit  $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{J}$  gilt  $\phi(\bigcup_{n \geq 1} A_n) = \sum_{n \geq 1} \phi(A_n)$
- (ii) Für  $A_n \in \mathcal{J}^*, n \geq 1$  disjunkt, mit  $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{J}^*$  gilt  $\phi^*(\bigcup_{n \geq 1} A_n) = \sum_{n \geq 1} \phi^*(A_n)$

**Beweis:** folgt. Ich denke (ii)  $\implies$  (i) folgt mit der Inklusion  $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}^*$  und  $\phi(A) = \phi^*(A)$  für  $A \in \mathcal{J}$ . (i)  $\implies$  (ii) folgt aus dem Beweis von Lemma 3.9 (insofern dieser stimmt)?

**3.11. Lemma:** Sei  $I \subseteq \mathbb{N}$  nicht-leer und seien  $(a_i, b_i) \in \mathcal{J}, i \in I$  nicht-leer und disjunkt, sodass  $\bigcup_{i \in I} (a_i, b_i) \subseteq (a, b) \in \mathcal{J}$ . Dann folgt

$$\sum_{i \in I} F(b_i) - F(a_i) \leq F(b) - F(a)$$

**Beweis:**

I.  $I$  endlich

Da  $I$  in Bijektion zu  $\{1, \dots, n\}$  steht, setze o.B.d.A.  $I = \{1, \dots, n\}$  und ordne die Intervalle aufsteigend, also

$$a \leq a_1 < b_1 \leq \dots \leq a_n < b_n \leq b$$

Dann gilt

$$\sum_{i=1}^n F(b_i) - F(a_i) = -F(a_1) + F(b_1) - \dots - F(a_n) + F(b_n) \leq F(b_n) - F(a_1) \leq F(b) - F(a)$$

da  $F(b_k) \leq F(a_{k+1})$  für  $k = 1, \dots, n-1$ .



II.  $I$  abzählbar unendlich

Da  $I$  in Bijektion zu  $\mathbb{N}$  steht, setze o.B.d.A  $I = \mathbb{N}$ . Dann gilt

$$\sum_{i \geq 1} F(b_i) - F(a_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F(b_i) - F(a_i) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} F(b) - F(a) = F(b) - F(a)$$

mit dem I. Teil. □

**3.12. Lemma:** Sei  $I \subseteq \mathbb{N}$  nicht-leer und seien  $(a_i, b_i) \in \mathcal{J}, i \in I$  nicht-leer, sodass  $\bigcup_{i \in I} (a_i, b_i) \supseteq (a, b) \in \mathcal{J}$ . Dann folgt

$$F(b) - F(a) \leq \sum_{i \in I} F(b_i) - F(a_i)$$

**Beweis:**

I.  $I$  endlich

Sei wie im Beweis von Lemma 3.11 o.B.d.A  $I = \{1, \dots, n\}$ . Seien außerdem die Intervalle  $(a_i, b_i)$  disjunkt und aufsteigend geordnet. Dann gilt  $a \in (a_k, b_k)$  und  $b \in (a_\ell, b_\ell)$  für  $1 \leq k \leq \ell \leq n$  und  $b_i = a_{i+1}$  für alle  $i = k, \dots, \ell - 1$ . Es folgt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F(b_i) - F(a_i) &\geq \sum_{i=k}^{\ell} F(b_i) - F(a_i) \\ &= -F(a_k) + F(b_\ell) \\ &\geq F(b) - F(a) \end{aligned}$$

II.  $I$  abzählbar unendlich,  $a, b < \infty$

Sei wie im Beweis von Lemma 3.11 o.B.d.A.  $I = \mathbb{N}$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Da  $F$  rechtsstetig ist, gibt es  $\delta, \delta_i > 0, i \geq 1$ , sodass

$$F(a + \delta) < F(a) + \varepsilon, \quad F(b_i + \delta_i) < F(b_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$$

Beachte, dass  $(a + \delta, b) \bigcup_{i \geq 1} (a_i, b_i + \delta_i)$ . Nun existiert eine endliche Menge  $J \subseteq \mathbb{N}$  (einfache Überlegung), sodass

$$(a + \delta, b) \subseteq \bigcup_{j \in J} (a_j, b_j + \delta_j)$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} F(b) - F(a + \delta) &\leq \sum_{j \in J} F(b_j + \delta_j) - F(a_j) \\ &\leq \varepsilon + \sum_{i \geq 1} F(b_i) - F(a_i) \end{aligned}$$

Die Aussage folgt für  $\varepsilon \searrow 0$ .

III.  $I$  abzählbar unendlich,  $a$  oder  $b$  unendlich

Es gibt hier drei Fälle:

$$(a, b) = \begin{cases} (-\infty, b] \\ (a, \infty) \\ (-\infty, \infty) \end{cases}$$

Sei  $\varepsilon > 0$ . Wegen den Eigenschaften von  $F$  gibt es  $s, t \in \mathbb{R}$ , sodass  $a \leq s \leq t \leq b$  und

$$F(s) \leq F(a) + \varepsilon, \quad F(t) \leq F(b) - \varepsilon$$

Es folgt weiters

$$(s, t) \subseteq (a, b) \subseteq \bigcup_{i \geq 1} (a_i, b_i)$$

$$F(b) - F(a) \geq F(t) - F(s) \geq F(b) - F(a) - 2\varepsilon$$

Die Aussage folgt für  $\varepsilon \searrow 0$ . □

**Bemerkung:** Damit können wir  $\phi^*$  eindeutig zu einem Maß  $\mu$  auf  $\sigma(\mathcal{J}^*)$  erweitern. Beachte (einfache Überlegung)

$$\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}^*, \quad \mathcal{J}^* \subseteq \sigma(\mathcal{J}) \implies \sigma(\mathcal{J}) = \sigma(\mathcal{J}^*)$$

**3.13. Definition:** Definiere die Borel'sche  $\sigma$ -Algebra auf  $\mathbb{R}$  durch

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) := \sigma(\mathcal{J}^*)$$

**3.14. Proposition:** Es gilt  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{J}_i)$  für  $i = 1, \dots, n$  und

$$\mathcal{J}_1 := \{(a, b) : -\infty \leq a \leq b \leq \infty\}$$

$$\mathcal{J}_2 := \{[a, b] : -\infty < a \leq b < \infty\}$$

$$\mathcal{J}_3 := \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{J}_4 := \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\}$$

**Beweis:** nur für  $\mathcal{J}_1$ , Rest Übung!

I.  $\mathcal{J}_1 \subseteq \sigma(\mathcal{J})$

$$(a, b) = \bigcup_{n \geq 1} \left(a, b - \frac{1}{n}\right] \in \sigma(\mathcal{J}), \text{ da } \left(a, b - \frac{1}{n}\right] = \left(a, b - \frac{1}{n}\right) \in \mathcal{J} \text{ für alle } n \geq 1.$$

II.  $\mathcal{J}_1 \supseteq \sigma(\mathcal{J})$

$$(a) \quad a, b < \infty: (a, b) = (a, b] = \bigcap_{n \geq 1} \left(a, b + \frac{1}{n}\right) \in \sigma(\mathcal{J}_1).$$

$$(b) \quad a = -\infty, b < \infty: (a, b) = (-\infty, b] = \bigcap_{n \geq 1} \left(-\infty, b + \frac{1}{n}\right) \in \sigma(\mathcal{J}_1)$$

$$(c) \quad a < \infty, b = \infty: (a, b) = (a, \infty) \in \mathcal{J}_1 \subseteq \sigma(\mathcal{J}_1)$$

$$(d) \quad a = -\infty, b = \infty: (a, b) = \mathbb{R} \in \mathcal{J}_1 \subseteq \sigma(\mathcal{J}_1) \quad \square$$

**3.15. Proposition:** Es gilt  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{O})$ , mit  $\mathcal{O} = \{O \subseteq \mathbb{R} : O \text{ offen}\}$ .

**Beweis:** folgt.

**3.16. Korollar:**  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  enthält alle einpunktigen, offenen und abgeschlossenen Teilmengen von  $\mathbb{R}$ .

**Beweis:** Die Inklusion der offenen und abgeschlossenen Teilmengen folgt aus Proposition 3.15 und der Abgeschlossenheit bezüglich Komplementbildung. Außerdem gilt

$$\{x\} = \bigcap_{n \geq 1} \left( x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

mit Proposition 3.14. □

**3.17. Satz:** Sei  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  monoton nicht-fallend und rechtsstetig. Dann existiert genau ein  $\sigma$ -endliches Maß  $\mu_F : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$  mit  $\mu_F((a, b)) = F(b) - F(a)$ .

**Beweis:** Existenz und Eindeutigkeit folgen aus dem Maßerweiterungssatz von Carathéodory. Außerdem gilt  $\mathbb{R} = \bigcup_{n \geq 1} (-n, n)$  und  $\forall n \geq 1 : \mu_F((-n, n)) = F(n) - F(-n) < \infty$ . □

**3.18. Definition:** Das Lebesgue-Maß  $\lambda(\cdot)$  (auch  $\text{vol}(\cdot)$ ) auf  $\mathbb{R}$  ist definiert durch das von der Funktion  $F(x) = x$  induzierte Maß (gemäß Satz 3.17).

**3.19. Definition:** Sei  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  monoton nicht-fallend und rechtsstetig, sodass zusätzlich  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ . Dann nennt man  $F$  eine Verteilungsfunktion (cdf). Mit Satz 3.17 induziert jede Verteilungsfunktion ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}$  auf  $\mathbb{R}$ .

**3.20. Satz** Sei  $\varphi$  ein  $\sigma$ -endliches Maß auf  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . Dann existiert eine Funktion  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass

- $F$  ist monoton nichtfallend.
- $F$  ist rechtsseitig stetig.
- Für  $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$  und  $F(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$  gilt für alle  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ .

$$\varphi((a, b)) = F(b) - F(a)$$

**Beweis:**

I. Fall:  $\varphi$  endlich.

Setze  $F(x) := \varphi((-\infty, x])$  für  $x \in \mathbb{R}$ . Da  $\varphi$  endlich ist, ist  $F$  reellwertig. Die Monotonie von  $F$  folgt aus der Monotonie von  $\varphi$  (siehe Satz 1.7). Die Rechtsstetigkeit von  $F$  folgt der Stetigkeit von oben (siehe Satz 1.9). Schließlich gilt für  $-\infty < a < b < \infty$

$$\begin{aligned}\varphi((a, b]) &= \varphi((-\infty, b] \setminus (-\infty, a]) \\ &= \varphi((-\infty, b]) - \varphi((-\infty, a]) = F(b) - F(a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi((-\infty, b)) &\stackrel{\text{S.V.U.}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi((x, b]) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} F(b) - F(x) = F(b) - F(-\infty)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi((a, \infty)) &\stackrel{\text{S.V.U.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi((a, x]) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) - F(a) = F(\infty) - F(a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi((-\infty, \infty)) &\stackrel{\text{S.V.U.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi((-x, x]) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) - F(-x) = F(\infty) - F(-\infty)\end{aligned}$$

II. Fall:  $\varphi(\mathbb{R}) = \infty$ .

Setze hier

$$F(x) := \begin{cases} \varphi((0, x]) & \text{falls } x \geq 0 \\ -\varphi((x, 0]) & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Die Monotonie und Rechtsstetigkeit folgen wie im I. Fall. Für die dritte Eigenschaft argumentiere wie im I. Fall und betrachte jeweils die Fälle

$$\begin{aligned}0 &\leq a \leq b < \infty \\ -\infty < a < 0 \leq b < \infty \\ -\infty < a < b \leq 0\end{aligned}$$

□

**3.21. Korollar:** Sei  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$  ein  $\sigma$ -endlicher Maßraum und  $\mu((a, b)) = F(b) - F(a)$  für eine monoton nicht-fallende, rechtsstetige Funktion  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann gilt für  $a \in \mathbb{R}$ :

$$\mu(\{a\}) = F(a) - \lim_{x \nearrow a} F(x)$$

Insbesondere ist  $\{a\}$  ein Atom von  $\mu$ , wenn  $F$  eine Sprungstelle bei  $a$  hat.

**Beweis:** Schreibe  $\{a\} = \bigcap_{n \geq 1} (a - \frac{1}{n}, a]$  und beachte, dass  $\mu((a-1, a]) = F(a) - F(a-1) < \infty$ . Mit der Stetigkeit von oben (Satz 1.9) gilt

$$\mu(\{a\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left( \left( a - \frac{1}{n}, a \right] \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ F(a) - F \left( a - \frac{1}{n} \right) \right] = F(a) - \lim_{x \nearrow a} F(x)$$

wobei die letzte Gleichung aus der Definition eines einseitigen Grenzwertes folgt (cf. Analysis).  $\square$

## 4. Messbare Abbildungen und Zufallsvariablen

Betrachte im folgenden Kapitel jeweils einen Maßraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  und eine Abbildung  $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ .

### Urbildoperator und Messbarkeit

**4.1. Definition:** Sei  $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ . Für  $A' \subseteq \Omega'$  definiere das Urbild von  $A'$  unter  $f$  als

$$f^{-1}(A') := \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in A'\} \subseteq \Omega$$

Kurschreibweise:  $f^{-1}(A') = f^{-1}A' = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in A'\}$ . Beachte, dass der Urbild-Operator nicht die inverse Funktion ist (im Gegensatz zur Inversen ist das Urbild immer definiert).

**4.1.<sup>1</sup>/<sub>2</sub>. Proposition :** Der Urbild-Operator kommutiert mit Mengenoperationen, i.e.

$$(i) \quad f^{-1}\left(\bigcup_{n \geq 1} A'_n\right) = \bigcup_{n \geq 1} f^{-1}(A'_n)$$

$$(ii) \quad f^{-1}(A'^c) = (f^{-1}(A'))^c$$

$$(iii) \quad f^{-1}\left(\bigcap_{n \geq 1} A'_n\right) = \bigcap_{n \geq 1} f^{-1}(A'_n)$$

**Beweis:** Übung! (iii) folgt aus (i), (ii) und de Morgan.

**4.2. Definition:** Betrachte zwei messbare Räume  $(\Omega, \mathcal{A})$  und  $(\Omega', \mathcal{A}')$ . Eine Abbildung  $f$  heißt  $\mathcal{A}$ - $\mathcal{A}'$ -messbar, falls

$$\forall A' \in \mathcal{A}' : f^{-1}(A') \in \mathcal{A}$$

Falls  $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$  eine messbare Abbildung von einem Wahrscheinlichkeitsraum nach  $\Omega'$  ist, nennt man  $X$  eine  $\Omega'$ -wertige Zufallsvariable (e.g.  $\Omega' = \mathbb{R}$  oder  $\Omega' = \mathbb{C}$ ). Definiert man eine Abbildung als  $\mathcal{A}$ - $\mathcal{A}'$ -messbar, so schreibt man oft  $f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$ .

**4.3. Definition:** Sei  $I$  eine beliebige, nicht-leere Indexmenge und seien  $f_i : \Omega \rightarrow \Omega', i \in I$ . Definiere die von den  $f_i, i \in I$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra als

$$\sigma(f_i, i \in I) := \sigma(\{f_i^{-1}(A') : A' \in \mathcal{A}', i \in I\})$$

**Bemerkung:**

- (i)  $\sigma(f_i, i \in I)$  ist die kleinste  $\sigma$ -Algebra auf  $\Omega$  für die alle  $f_i, i \in I$  messbar sind.
- (ii) Ist  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $\Omega$ , dann gilt:  $\forall i \in I : f_i \text{ ist } \mathcal{A}\text{-}\mathcal{A}'\text{-messbar} \iff \sigma(f_i, i \in I) \subseteq \mathcal{A}$
- (iii)  $\sigma(f) = \{f^{-1}(A') : A' \in \mathcal{A}'\}$ , da der Urbild-Operator mit Mengenoperationen kommutiert.

**4.4. Proposition:** Betrachte zwei messbare Räume  $(\Omega, \mathcal{A}), (\Omega', \mathcal{A}')$ , wobei  $\mathcal{A}' = \sigma(\mathcal{M}')$  für eine Mengenfamilie  $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{P}(\Omega')$ , sowie eine Abbildung  $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ . Setze  $\mathcal{M} := \{f^{-1}(M') : M' \in \mathcal{M}'\}$ . Dann gilt  $\sigma(f) = \sigma(\mathcal{M})$  und insbesondere ist  $f$  genau dann  $\mathcal{A}\text{-}\mathcal{A}'\text{-messbar}$ , wenn  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}$ .

**Beweis:**

I.  $\sigma(\mathcal{M}) \subseteq \sigma(f)$

Es gilt  $\mathcal{M}' \subseteq \sigma(\mathcal{M}')$  und damit

$$\mathcal{M} = \{f^{-1}(M') : M' \in \mathcal{M}'\} \subseteq \{f^{-1}(M') : M' \in \sigma(\mathcal{M}')\} = \sigma(f)$$

Damit folgt  $\sigma(\mathcal{M}) \subseteq \sigma(\sigma(f)) = \sigma(f)$ .

II.  $\sigma(\mathcal{M}) \supseteq \sigma(f)$

Setze  $\mathcal{G}' := \{M' \in \sigma(\mathcal{M}') : f^{-1}(M') \in \sigma(\mathcal{M})\}$  und zeige  $\mathcal{G}' = \sigma(\mathcal{M}')$ . Die Inklusion  $\mathcal{G}' \subseteq \sigma(\mathcal{M}')$  folgt sofort aus der Konstruktion. Es genügt also zu zeigen, dass  $\mathcal{G}'$  eine  $\sigma$ -Algebra ist und  $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{G}'$ .

(i) Sei  $M' \in \mathcal{M}'$ . Dann gilt  $M' \in \sigma(\mathcal{M}')$  und  $f^{-1}(M') \in \mathcal{M}$  per Definition von  $\mathcal{M}$ . Es folgt  $f^{-1}(M') \in \sigma(\mathcal{M})$  und damit  $M' \in \mathcal{G}'$ .

(ii) Zeige, dass  $\mathcal{G}'$  eine  $\sigma$ -Algebra ist.

- Es gilt  $\Omega' \in \sigma(\mathcal{M}')$  und  $f^{-1}(\Omega') = \Omega \in \sigma(\mathcal{M})$ .
- Abgeschlossenheit bezüglich Komplementbildung und abzählbaren Vereinigungen folgt aus Bemerkung (iii) oben.

III. Zur Messbarkeit.

(i) Sei  $f$   $\mathcal{A}\text{-}\mathcal{A}'\text{-messbar}$ . Es gilt mit Bemerkung (ii) oben

$$\mathcal{M} = \{f^{-1}(M') : M' \in \mathcal{M}'\} \subseteq \{f^{-1}(M') : M' \in \sigma(\mathcal{M}')\} = \sigma(f) \subseteq \mathcal{A}$$

(ii) Sei  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}$ . Damit gilt  $\sigma(\mathcal{M}) = \sigma(f) \subseteq \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$  und mit Bemerkung (ii) oben folgt die Aussage.  $\square$

#### 4.5. Lemma:

$$\sigma(f_i : i \in I) = \sigma \left( \left\{ \bigcap_{j \in J} f_j^{-1}(A'_j) : J \subseteq I, J \text{ endlich, } A'_j \in \mathcal{A}' \text{ für } j \in J \right\} \right)$$

#### Beweis:

I.  $\subseteq$

Es gilt  $\{f_i^{-1}(A') : A' \in \mathcal{A}, i \in I\} \subseteq \left\{ \bigcap_{j \in J} f_j^{-1}(A'_j) : J \subseteq I, J \text{ endlich, } A'_j \in \mathcal{A}' \text{ für } j \in J \right\}$ .

II.  $\supseteq$

folgt sofort aus der Abgeschlossenheit bezüglich endlicher Durchschnitte und der Kommutativität des Urbildoperators mit dem Durchschnittsoperator.  $\square$

**4.6. Proposition:** Betrachte messbare Räume  $(\Omega_i, \mathcal{A}_i), i = 1, 2, 3$  sowie messbare Abbildungen

$$\begin{aligned} f &: (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \rightarrow (\Omega_2, \mathcal{A}_2) \\ g &: (\Omega_2, \mathcal{A}_2) \rightarrow (\Omega_3, \mathcal{A}_3) \end{aligned}$$

Dann ist  $g \circ f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_3$  auch  $\mathcal{A}_1$ – $\mathcal{A}_3$ -messbar.

**Beweis:** Sei  $A_3 \in \mathcal{A}_3$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} (g \circ f)^{-1}(A_3) &= \{\omega_1 \in \Omega_1 : (g \circ f)(\omega_1) \in A_3\} \\ &= \{\omega_1 \in \Omega_1 : g(f(\omega_1)) \in A_3\} \\ &= \{\omega_1 \in \Omega_1 : f(\omega_1) \in g^{-1}(A_3)\} \end{aligned}$$

Laut Annahme gilt  $g^{-1}(A_3) \in \mathcal{A}_2$  für alle  $A_3 \in \mathcal{A}_3$  und mit der Messbarkeit von  $f$  folgt die Aussage.  $\square$

## Messbare Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}$

**4.7. Lemma:** Seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  jeweils metrische Räume. Dann ist eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  genau dann stetig (bezüglich  $d_X, d_Y$ ), wenn Urbilder offener Mengen offen sind.

**Beweis:** cf. Höhere Analysis, siehe z.B. Theorem 4.8 in Rudin, W. (1976) *Principles of Mathematical Analysis*. 3rd edn., pp. 86-87.  $\square$

**4.8. Proposition:** Ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, dann ist  $f$   $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ – $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbar.

**Beweis:** folgt sofort aus Lemma 4.7 und Proposition 2.15.  $\square$

**Bemerkung:** Proposition 4.8 lässt sich auf beliebige metrische Räume ausweiten.



**4.9. Proposition:** Sei  $(\Omega, \mathcal{A})$  ein messbarer Raum und seien  $f, g : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  messbar. Sei  $c \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

- (i)  $cf$  mit  $(cf)(\omega) := cf(\omega)$  ist messbar.
- (ii)  $f + g$  mit  $(f + g)(\omega) := f(\omega) + g(\omega)$  ist messbar.
- (iii)  $fg$  mit  $(fg)(\omega) := f(\omega)g(\omega)$  ist messbar.
- (iv) Für alle  $\omega \in \Omega$  mit  $g(\omega) \neq 0$  ist  $\frac{f}{g}$  mit  $\left(\frac{f}{g}\right)(\omega) := \frac{f(\omega)}{g(\omega)}$  messbar.

**Beweis:**

- (i) Da die konstante Abbildung messbar ist, gilt (iii)  $\implies$  (i).
- (ii) Fixiere  $t \in \mathbb{R}$ . Da der Urbildoperator mit Mengenoperationen kommutiert (und mit Proposition 3.14), genügt es zu zeigen, dass Mengen der Form

$$A = \{\omega \in \Omega : f(\omega) + g(\omega) \in (-\infty, t)\}$$

in  $\mathcal{A}$  messbar sind. Dazu genügt es zu zeigen, dass

$$A = \bigcup_{\substack{q, r \in \mathbb{Q} \\ q+r < t}} \{\omega \in \Omega : f(\omega) < q\} \cap \{\omega \in \Omega : g(\omega) < r\} =: B$$

Sei  $\omega \in B$ . Dann gibt es rationale Zahlen  $q, r$  mit  $q + r < t$ , sodass  $f(\omega) < q$  und  $g(\omega) < r$  und somit  $f(\omega) + g(\omega) < q + r < t$ , also  $\omega \in A$ .

Sei  $\omega \in A$ . Dann gilt  $f(\omega) + g(\omega) < t$  und damit  $\delta := t - (f(\omega) + g(\omega)) > 0$ . Da  $\mathbb{Q}$  dicht in  $\mathbb{R}$  ist, gibt es  $q, r \in \mathbb{Q}$ , sodass  $f(\omega) < q$ ,  $g(\omega) < r$  und  $q + r < f(\omega) + g(\omega) + \delta = t$ . Damit folgt  $\omega \in B$ .

- (iii)  $fg = \frac{1}{2}(f + g)^2 - f^2 - g^2$  wobei  $t \mapsto \frac{1}{2}t^2$  und  $t \mapsto -t^2$  stetig und damit messbar sind. Die Aussage folgt mit (ii).
- (iv) Fixiere  $t \in \mathbb{R}$ . Mit (iii) genügt es zu zeigen, dass  $\{1/g < t, g \neq 0\}$  messbar ist. Setze z.B.

$$(1/g)(\omega) := \begin{cases} 1/g(\omega) & \text{falls } g(\omega) \neq 0 \\ 0 & \text{falls } g(\omega) = 0 \end{cases}$$

Es gilt

$$\{1/g < t\} = \{1/g < t, g < 0\} \cup \{1/g < t, g > 0\} \cup \{1/g < t, g = 0\}$$

Die Menge  $\{1/g < t, g = 0\}$  ist trivial ( $\Omega$  oder  $\emptyset$ ) messbar.

Für  $t > 0$  gilt

$$\{1/g < t, g > 0\} = \{g > 1/t, g > 0\}, \quad \{1/g < t, g < 0\} = \{g < 1/t, g < 0\}$$

Für  $t < 0$  gilt

$$\{1/g < t, g > 0\} = \{g < 1/t, g > 0\}, \{1/g < t, g < 0\} = \{g > 1/t, g < 0\}$$

Für  $t = 0$  gilt

$$\{1/g < t, g > 0\} = \{g < 0, g > 0\} = \emptyset, \{1/g < t, g < 0\} = \{g < 0, g < 0\} = \{g < 0\}$$

Die Aussage folgt mit Abgeschlossenheit von  $\mathcal{A}$  bezüglich Vereinigungen, Durchschnitten und Komplementen.  $\square$

## Messbare Funktionen mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$

**4.10. Definition:** Definiere die erweiterten reellen Zahlen als

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

und analog zum reellen Fall die Mengenfamilie

$$\mathcal{K} := \{[-\infty, t] : t \in \overline{\mathbb{R}}\}$$

sowie die Borel- $\sigma$ -Algebra

$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) := \sigma(\mathcal{K})$$

**4.11. Definition (Rechenregeln in  $\overline{\mathbb{R}}$ ):**

$$\begin{aligned} a + \infty &= \infty + a := \infty \text{ für } a > -\infty \\ a - \infty &= -\infty + a := -\infty \text{ für } a < \infty \\ a \cdot \infty &= \infty \cdot a := \infty \text{ für } a > 0 \\ a \cdot \infty &= \infty \cdot a := -\infty \text{ für } a < 0 \\ a \cdot (-\infty) &= (-\infty) \cdot a := -\infty \text{ für } a > 0 \\ a \cdot (-\infty) &= (-\infty) \cdot a := \infty \text{ für } a < 0 \\ 0 \cdot \infty &= 0 \cdot (-\infty) := 0 \end{aligned}$$

Beachte, dass  $\infty - \infty$  nicht definiert ist.

**4.12. Lemma:** Es gilt  $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})|_{\mathbb{R}} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Außerdem ist  $\mathbb{R} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ , sodass insbesondere  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ .

**Beweis:**

$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})|_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{K})|_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{K}|_{\mathbb{R}}) \stackrel{1.16}{=} \sigma(\mathcal{J}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Außerdem gilt  $\{-\infty\} = \bigcap_{n \geq 1} [-\infty, -n] \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$  und  $\{\infty\} = \bigcap_{n \geq 1} [n, \infty] \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$  und damit

$$\mathbb{R} = \overline{\mathbb{R}} \setminus (\{-\infty\} \cup \{\infty\}) \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$$

$\square$

**4.13. Korollar:** Sei  $(\Omega, \mathcal{A})$  ein messbarer Raum und  $f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  messbar. Dann ist  $f$  auch  $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ -messbar.

**Beweis:** folgt sofort aus Lemma 4.12. □

**Bemerkung:** Damit gelten alle Aussagen in diesem Abschnitt auch für  $\mathbb{R}$ -wertige Funktionen.

**4.14. Korollar:** Sei  $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ . Dann gilt

$$A = B \cup \{\infty\} \text{ oder } A = B \cup \{-\infty\} \text{ oder } A = B \text{ oder } A = B \cup \{-\infty, \infty\}$$

für ein  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

**Beweis:**  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})|_{\mathbb{R}} \implies B = A \cap \mathbb{R}$  mit  $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ . Nun gilt  $A = (A \setminus \mathbb{R}) \cup (A \cap \mathbb{R})$ , wobei  $A \setminus \mathbb{R} = \{\infty\}$  oder  $\{-\infty\}$  oder  $\{-\infty, \infty\}$ . □

**4.15. Korollar:** Sei  $(\Omega, \mathcal{A})$  ein messbarer Raum. Eine Abbildung  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  ist  $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ -messbar, genau dann wenn:

$$\begin{aligned} \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : f^{-1}(B) &\in \mathcal{A} \\ f^{-1}(\{-\infty\}) &\in \mathcal{A} \\ f^{-1}(\{\infty\}) &\in \mathcal{A} \end{aligned}$$

**Beweis:** folgt sofort aus Kommutativität des Urbildoperators mit Mengenoperationen und Korollar 4.14. □

**4.16. Definition:** Sei  $A \subseteq \Omega$ . Die Indikatorfunktion  $\mathbb{1}_A : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  auf  $A$  (auch: charakteristische Funktion) ist definiert als

$$\mathbb{1}_A(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega \in A \\ 0 & \text{falls } \omega \notin A \end{cases}$$

**Bemerkung:** Jede Funktion  $f : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  mit  $f(\Omega) = \{0, 1\}$  ist eine Indikatorfunktion auf der Menge  $A = \{\omega \in \Omega : f(\omega) = 1\}$ .

**4.17. Lemma:** Sei  $(\Omega, \mathcal{A})$  ein messbarer Raum. Für  $A \subseteq \Omega$  ist  $\mathbb{1}_A$  genau dann  $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbar, wenn  $A \in \mathcal{A}$ .

**Beweis:** Es gilt

$$\mathbb{1}_A^{-1}(B) = \begin{cases} \emptyset & \text{falls } 0, 1 \notin B \\ A & \text{falls } 0 \notin B, 1 \in B \\ A^c & \text{falls } 0 \in B, 1 \notin B \\ \Omega & \text{falls } 0, 1 \in B \end{cases}$$

für alle  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . □

**4.18. Proposition:** Sei  $(\Omega, \mathcal{A})$  ein messbarer Raum und  $f_n : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, n \geq 1$  alle  $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ -messbar. Dann sind die Funktionen

$$\sup_{n \geq 1} f_n, \inf_{n \geq 1} f_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n, \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$$

auch  $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ -messbar und insbesondere ist die Menge  $\{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega) \text{ existiert in } \overline{\mathbb{R}}\}$  messbar.

**Beweis:** Betrachte zunächst die Messbarkeitseigenschaften:

$$\begin{aligned} \left\{ \sup_{n \geq 1} f_n < c \right\} &= \bigcup_{n \geq 1} \{f_n < c\} \in \mathcal{A} \implies \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \left\{ \sup_{n \geq 1} f_n \in B \right\} \in \mathcal{A} \\ \left\{ \sup_{n \geq 1} f_n = \infty \right\} &= \bigcap_{k \geq 1} \left\{ \sup_{n \geq 1} f_n > k \right\} \in \mathcal{A} \\ \left\{ \sup_{n \geq 1} f_n = -\infty \right\} &= \left\{ -\sup_{n \geq 1} f_n = \infty \right\} \\ \inf_{n \geq 1} f_n &= -\sup_{n \geq 1} (-f_n) \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n &= \inf_{N \geq 1} \left( \sup_{n \geq N} f_n \right) \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n &= -\limsup_{n \rightarrow \infty} (-f_n) \end{aligned}$$

Die Messbarkeit folgt mit Korollar 4.15 und Proposition 4.9 Weiters gilt

$$\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \in \overline{\mathbb{R}} \right\} = \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \right\} \cup \left\{ \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n = \infty \right\} \cup \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n = -\infty \right\}$$

□

**4.19. Definition:** Sei  $(\Omega, \mathcal{A})$  ein messbarer Raum. Seien  $A_i \in \mathcal{A}$  und  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  für  $i = 1, \dots, n$ . Dann nennt man  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(\omega) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}(\omega)$  eine einfache Funktion.

**4.20. Korollar:** Jede einfache Funktion ist  $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  und  $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ -messbar.

**Beweis:** Folgt sofort aus Lemma 4.17, Korollar 4.13 und Proposition 4.9.  $\square$

**4.21. Proposition:** Sei  $(\Omega, \mathcal{A})$  ein messbarer Raum.

- (i) Eine Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann einfach, wenn  $f$  messbar ist und endlich viele Werte annimmt (i.e.  $|f(\Omega)| < \infty$ ).
- (ii) Jede einfache Funktion  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  lässt sich schreiben als  $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$  mit  $A_i, i = 1 \dots, n$  disjunkt.

**Beweis:**

- (i)  $\implies$  : Die Messbarkeit folgt aus Korollar 4.20. Weiters gilt  $|f(\Omega)| \leq 2^n$ .  
 $\impliedby$  : Sei  $f$  messbar und  $f(\Omega) = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$  mit  $\gamma_i \neq \gamma_j$  für  $i \neq j$ . Sei  $A_i := \{f = \gamma_i\}$ .
- (ii) folgt aus dem zweiten Teil im Beweis von (i).  $\square$

**4.22. Satz:** Sei  $(\Omega, \mathcal{A})$  ein messbarer Raum und  $f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$  nicht-negativ und messbar. Dann gibt es eine Folge einfacher Funktionen  $f_n, n \geq 1$ , sodass

$$\forall \omega \in \Omega : 0 \leq f_1(\omega) \leq f_2(\omega) \leq \dots \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega) = f(\omega)$$

Wir schreiben oft kurz  $0 \leq f_n \uparrow f$ . Ist  $f$  zusätzlich beschränkt, i.e.  $\exists C \in \mathbb{R} \forall \omega \in \Omega : f(\omega) \leq C$ , dann ist die Konvergenz gleichmäßig, also

$$\sup_{\omega \in \Omega} |f_n(\omega) - f(\omega)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

**Beweis:** Setze  $\forall n \geq 1$

$$f_n(\omega) := \sum_{k=0}^{n \cdot 2^n - 1} \frac{k}{2^n} \cdot \mathbf{1}_{\{f \in [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})\}}(\omega) + n \cdot \mathbf{1}_{\{f \geq n\}}$$

$f_n \geq 0$  und  $f_n$  einfach folgen aus der Konstruktion. Zeige also Monotonie und Konvergenz.

- Zeige  $\forall \omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega) = f(\omega)$   
 Falls  $f(\omega) < \infty$  gibt es  $n_0$ , sodass  $f(\omega) < n_0$  und damit

$$\forall n \geq n_0 \exists k \in \{0, \dots, n \cdot 2^n - 1\} : f(\omega) \in \left[ \frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right)$$

sodass  $f_n(\omega) = \frac{k}{2^n}$ . Insbesondere gilt damit

$$0 \leq f(\omega) - f_n(\omega) \leq \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Falls  $f(\omega) = \infty$  gilt  $\forall n \geq 1 : f_n(\omega) = n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty = f(\omega)$ . Falls  $f$  beschränkt ist, gibt es  $n_0 \geq 1$ , sodass  $f(\omega) < n_0$  für alle  $\omega \in \Omega$  und damit

$$\forall \omega \in \Omega : 0 \leq f(\omega) - f_n(\omega) < \frac{1}{2^n}$$

Da die obere Schranke unabhängig von  $\omega$  ist, folgt die gleichmäßige Konvergenz.

- Zeige  $\forall \omega \in \Omega : f_n(\omega) \leq f_{n+1}(\omega)$   
 Sei  $f_n(\omega) = \frac{k}{2^n}$  für  $k \in \{0, \dots, n \cdot 2^n - 1\}$ . Dann gilt

$$f(\omega) \in \left[ \frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right) = \left[ \frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2k+1}{2^{n+1}} \right) \cup \left[ \frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{2k+2}{2^{n+1}} \right)$$

Falls  $f(\omega) \in \left[ \frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2k+1}{2^{n+1}} \right)$ , dann ist  $f_{n+1}(\omega) = \frac{2k}{2^{n+1}} = \frac{k}{2^n} = f_n(\omega)$ .  
 Falls  $f(\omega) \in \left[ \frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{2k+2}{2^{n+1}} \right)$ , dann ist  $f_{n+1}(\omega) = \frac{2k+1}{2^{n+1}} > \frac{k}{2^n} = f_n(\omega)$ .

Sei  $f_n(\omega) = n$ . Dann gilt

$$f(\omega) \in [n, \infty] = [n, n+1) \cup [n+1, \infty]$$

Falls  $f(\omega) \in [n+1, \infty]$ , dann ist  $f_{n+1}(\omega) = n+1 > n = f_n(\omega)$ .  
 Falls  $f(\omega) \in [n, n+1)$ , dann ist

$$\begin{aligned} f_{n+1}(\omega) &= \sum_{k=0}^{(n+1) \cdot 2^{n+1} - 1} \frac{k}{2^{n+1}} \cdot \mathbb{1}_{\{f \in [\frac{k}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^{n+1}})\}} + (n+1) \cdot \mathbb{1}_{\{f \geq n+1\}} \\ &= \frac{(n+1) \cdot 2^{n+1} - 1}{2^{n+1}} > n = f_n(\omega) \end{aligned}$$

□

# 5. Lebesgue-Integral

Sei im folgenden Kapitel immer  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum und  $f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$  messbar.

## Konstruktion des Integrals

### 5.0. Definition (Informelle Definition des Integrals):

(i) Für  $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$  einfach setzt man

$$\int f \, d\mu := \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i)$$

(ii) Für  $f \geq 0$  messbar wählt man einfache Funktionen mit  $0 \leq f_n \uparrow f$  und setzt

$$\int f \, d\mu := \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu$$

(iii) Für  $f$  messbar definiert man  $f^+ := f \cdot \mathbb{1}_{\{f \geq 0\}}$  und  $f^- := f \cdot \mathbb{1}_{\{f < 0\}}$  und setzt

$$\int f \, d\mu := \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu$$

**5.1. Lemma:** Für eine einfache Funktion  $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$  ist  $\int f \, d\mu$  unabhängig von der Darstellung von  $f$ .

**Beweis:** Sei  $m := |f(\Omega)|$ , mit  $f(\Omega) = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$  und sei  $G_\ell := \{\omega \in \Omega : f(\omega) = \gamma_\ell\}$  für  $\ell = 1, \dots, m$ . Dann sind  $G_\ell, \gamma_\ell$  unabhängig von der Darstellung von  $f$  für  $\ell = 1, \dots, m$ . Zeige nun  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{\ell=1}^m \gamma_\ell \mu(G_\ell)$ .

Für  $j \in \{0, 1\}^n$ , sei

$$B_j := \left( \bigcap_{i=1}^n A_{j_i} \right) \cap \left( \bigcap_{i=1}^n A_{j_i}^c \right) = \left( \bigcap_{i:j_i=1} A_i \right) \cap \left( \bigcap_{i:j_i=0} A_i^c \right)$$

und  $\beta_j := \sum_{i=1}^n \alpha_i$ . Dann sind die  $B_j$  disjunkt und  $A_i = \bigcup_{j:j_i=1} B_j$ . Außerdem gilt  $\bigcup_{j \in \{0,1\}^n} B_j = \Omega$  und

$$A_i \cap B_j = \begin{cases} \emptyset & \text{falls } j_i = 0 \\ B_j & \text{falls } j_i = 1 \end{cases}$$

Es folgt

$$\int f \, d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j \in \{0,1\}^n \\ j_i=1}} \mu(B_j) = \sum_{j \in \{0,1\}^n} \mu(B_j) \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, n\} \\ j_i=1}} \alpha_i = \sum_{j \in \{0,1\}^n} \beta_j \mu(B_j)$$

- Falls  $B_j = \emptyset$ , dann wird  $\beta_j$  "weggeworfen", i.e. setze  $\beta_j := 0$ .
- Falls  $\beta_j = \beta_{j'}$ , dann werden  $B_j$  und  $B_{j'}$  vereinigt.

Schließlich erhält man Werte  $\{\beta_{j(1)}, \dots, \beta_{j(m)}\} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$  und für  $\gamma_\ell = \beta_{j(k)}$  ist

$$G_\ell = \{f = \gamma_\ell\} = \{f = \beta_{j(k)}\}$$

Es folgt

$$\int f \, d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{k=1}^m \beta_{j(k)} \mu(B_k) = \sum_{\ell=1}^m \gamma_\ell \mu(G_\ell)$$

□

**5.2. Definition:** Sei  $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$  mit  $\alpha_i \geq 0$  und  $A_i \in \mathcal{A}$  für  $i = 1, \dots, n$  einfach. Das Lebesgue-Integral von  $f$  bezüglich  $\mu$  ist definiert als

$$\int f \, d\mu := \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i) \in [0, \infty]$$

Durch Lemma 5.1 ist der Ausdruck wohldefiniert.

**5.3. Lemma:** Seien  $f, g$  beide nicht-negative, einfache Funktionen sodass  $\forall \omega \in \Omega : f(\omega) \leq g(\omega)$ . Dann gilt (Monotonie des Integrals für einfache Funktionen)

$$\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$$

**Beweis:** Sei  $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$  und  $g = \sum_{j=1}^m \beta_j \mathbb{1}_{B_j}$  in kanonischer Darstellung ( $A_i$  disjunkt für  $i = 1, \dots, n$  und  $B_j$  disjunkt für  $j = 1, \dots, m$ ) und sei o.B.d.A.  $\Omega = \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{j=1}^m B_j$ . Dann gilt

$$f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}$$

$$g = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \beta_j \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}$$

Laut Annahme gilt für  $\omega \in A_i \cap B_j \neq \emptyset$  daher  $\alpha_i \leq \beta_j$  und damit

$$\int f \, d\mu = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \beta_j \mu(A_i \cap B_j) = \int g \, d\mu$$

□



**5.4. Lemma:** Seien  $f_n, n \geq 1$  und  $g$  nicht negative, einfache Funktionen sodass

$$0 \leq f_1 \leq \dots \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \text{ und } g \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$$

Dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \in \overline{\mathbb{R}}$  und  $\int g d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$ .

**Beweis:** Aus Lemma 5.3 folgt

$$0 \leq \int f_1 d\mu \leq \int f_2 d\mu \leq \dots$$

Damit ist  $\int f_n d\mu, n \geq 1$  eine monoton nicht-fallende Folge in  $\overline{\mathbb{R}}$  und damit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \in \overline{\mathbb{R}}$ .

Es verbleibt zu zeigen, dass  $\int g d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$ . Sei  $\alpha > 1$  und definiere  $A_n := \{g \leq \alpha \cdot f_n\}, n \geq 1$ . Dann gilt

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq \bigcup_{n \geq 1} A_n = \Omega$$

da  $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ . Die letzte Gleichheit folgt aus folgendem Argument:

Angenommen  $\exists \omega \in \Omega \setminus (\bigcup_{n \geq 1} A_n)$ . Dann gilt  $\exists \omega \in \Omega \forall n \geq 1 : g(\omega) > \alpha \cdot f_n(\omega)$  und damit für dieses  $\omega \in \Omega$ , dass  $g(\omega) > \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega)$ , ein Widerspruch zur Annahme.

Nun ist  $g \cdot \mathbf{1}_{A_n}$  für  $n \geq 1$  einfach und messbar und  $g \cdot \mathbf{1}_{A_n} \leq \alpha \cdot f_n$ . Mit Lemma 5.3 folgt für  $\alpha \searrow 1$  für alle  $n \geq 1$

$$\int g \cdot \mathbf{1}_{A_n} d\mu \leq \int f_n d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$$

Sei  $g = \sum_{i=1}^m \gamma_i \mathbf{1}_{G_i}$  und damit  $g \cdot \mathbf{1}_{A_n} = \sum_{i=1}^m \gamma_i \mathbf{1}_{G_i \cap A_n}$ . Weiters gilt für  $i = 1, \dots, m$

$$G_i \cap A_1 \subseteq G_i \cap A_2 \subseteq \dots \subseteq \bigcup_{n \geq 1} (G_i \cap A_n) = G_i$$

und mit der Stetigkeit von unten (Satz 1.9) folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(G_i \cap A_n) = \mu(G_i)$  und damit

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int g \cdot \mathbf{1}_{A_n} d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \gamma_i \cdot \mu(G_i \cap A_n) \\ &= \sum_{i=1}^m \gamma_i \cdot \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(G_i \cap A_n) \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \gamma_i \cdot \mu(G_i) = \int g d\mu \end{aligned}$$

Ebenfalls ist  $\int g \cdot \mathbf{1}_{A_n} d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$  für alle  $n \geq 1$  und damit

$$\int g d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g \cdot \mathbf{1}_{A_n} d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$$

□

**5.5. Korollar:** Betrachte eine nicht-negative, messbare Funktion  $f$ , sowie einfache Funktionen  $f_n, n \geq 1$  und  $g_m, m \geq 1$ , sodass  $0 \leq f_n \uparrow f$  und  $0 \leq g_m \uparrow f$ . Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu = \lim_{m \rightarrow \infty} \int g_m \, d\mu$$

Insbesondere ist damit die Wahl der approximierenden Funktionen in der Definition des Lebesgue-Integrals später egal.

**Beweis:** Es gilt  $\forall m \geq 1 : g_m \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  und mit Lemma 5.4  $\forall m \geq 1 : \int g_m \, d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu$ . Es folgt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int g_m \, d\mu \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu$$

Ebenfalls gilt  $\forall n \geq 1 : f_n \leq \lim_{m \rightarrow \infty} g_m$  und mit Lemma 5.4  $\forall n \geq 1 : \int f_n \, d\mu \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \int g_m \, d\mu$ . Wie oben folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \int g_m \, d\mu$$

□

**5.6. Definition:** Sei  $f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$  nicht-negativ und messbar und  $f_n, n \geq 1$  eine beliebige Folge einfacher Funktionen, sodass  $0 \leq f_n \uparrow f$ . Dann ist das Lebesgue-Integral von  $f$  bezüglich  $\mu$  definiert als

$$\int f \, d\mu := \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu$$

Dieser Grenzwert ist wegen der Monotonie (Lemma 5.3) und der Unabhängigkeit von den approximierenden Funktionen (Korollar 5.5) wohldefiniert.

**5.7. Definition:** Für eine Funktion  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  werden der Positivteil  $f^+$  und der Negativteil  $f^-$  definiert als

$$f^+ := \max(f, 0) \text{ und } f^- := -\min(f, 0)$$

Es gilt trivial  $f = f^+ - f^-$ . Ist  $f$  messbar, dann sind  $f^+, f^-$  auch beide messbar, da  $f^+ = f \cdot \mathbb{1}_{\{f \geq 0\}}$  und  $f^- = f \cdot \mathbb{1}_{\{f < 0\}}$ .

**5.8. Definition:** Sei  $f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$  messbar.

(i) Falls  $\int f^+ \, d\mu < \infty$  und  $\int f^- \, d\mu < \infty$ , dann ist  $f$   $\mu$ -integrierbar.

(ii) Falls  $\int f^+ \, d\mu < \infty$  oder  $\int f^- \, d\mu < \infty$ , dann ist  $f$   $\mu$ -quasi-integrierbar.

- (iii) Falls  $\int f^+ d\mu = \int f^- d\mu = \infty$ , dann ist  $f$  nicht  $\mu$ -integrierbar.
- (iv) Falls  $f$  quasi-integrierbar bezüglich  $\mu$  ist, dann ist das Lebesgue-Integral von  $f$  definiert als

$$\int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

**5.9. Definition:** Definiere die folgenden beiden Funktionenräume

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu) &:= \{f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})) : f \text{ integrierbar bezüglich } \mu\} \\ \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu) &:= \{f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})) : f \text{ quasi-integrierbar bezüglich } \mu\}\end{aligned}$$

Falls der Maßraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  bzw. der messbare Raum  $(\Omega, \mathcal{A})$  beliebig oder aus dem Kontext bekannt sind, schreibt man oft kurz  $\mathcal{L}^1$  bzw.  $\mathcal{L}^1(\mu)$ .

**Bemerkung:**  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  bildet mit skalarweiser Addition und Multiplikation einen Vektorraum und  $\|f\|_1 := \int |f| d\mu$  bildet eine Halbnorm auf  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ . Beachte den Unterschied zwischen  $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  und dem Quotientenraum  $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  (bzgl. Äquivalenz fast überall, siehe Definition 5.12). Details siehe z.B. Teschl, G. (2024) *Topics in Real Analysis.*, pp. 73-74.

**5.10. Definition:** Für  $f \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  und  $A \in \mathcal{A}$ , dann wird das Integral von  $f$  bezüglich  $\mu$  über  $A$  definiert als

$$\int_A f d\mu := \int f \cdot \mathbb{1}_A d\mu$$

**5.11. Definition:** Ist  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und ist  $X \in \mathcal{L}(\mathbb{P})$ , dann nennt man

$$\mathbb{E}X := \int X d\mathbb{P}$$

den Erwartungswert von  $X$  unter  $\mathbb{P}$ . Falls zusätzlich  $X \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ , dann nennt man

$$\text{Var}(X) := \int (X - \mathbb{E}X)^2 d\mathbb{P}$$

die Varianz von  $X$  (unter  $\mathbb{P}$ ).

## Eigenschaften des Integrals

**5.12. Definition:**

- Eine Menge  $A \in \mathcal{A}$  mit  $\mu(A) = 0$  nennt man  $\mu$ -Nullmenge.

- Ist  $f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$  messbar und  $B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$  mit  $\mu(\{f \in B\}^c) = \mu(\{f \in B^c\}) = 0$ , dann sagt man, dass das Ereignis  $\{f \in B\}$   $\mu$ -fast-überall eintritt. Kurz:  $f \in B$  f.ü. (englisch *a.e.*, *almost everywhere*).
- Sei  $\mathbb{P}$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß und  $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$  eine Zufallsvariable. Ist  $B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ , sodass  $X \in B$   $\mathbb{P}$ -fast-überall, dann sagt man auch dass  $X \in B$  fast sicher. Kurz:  $X \in B$  f.s. (englisch *a.s.*, *almost surely*).

**Bemerkung:** Die Vereinigung bis zu abzählbar vieler Nullmengen ist wegen der  $\sigma$ -Subadditivität (Satz 1.7 (iii)) wieder eine Nullmenge.

**5.13. Lemma:** Sei  $f \geq 0$  messbar. Dann gilt

$$\int f \, d\mu = 0 \iff f = 0 \text{ a.e.}$$

**Beweis:**

I.  $f$  einfach

Sei  $\int f \, d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mu(A_i) = 0$  in kanonischer Darstellung. Da  $f \geq 0$  gilt für  $i = 1, \dots, n$ , dass  $\alpha_i = 0$  oder  $\mu(A_i) = 0$ .

Es gilt mit der  $\sigma$ -Additivität

$$\mu(\{f > 0\}) = \mu\left(\bigcup_{\substack{i=1 \\ \alpha_i > 0}}^n A_i\right) = \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha_i > 0}}^n \mu(A_i) = 0$$

Sei  $\mu(\{f > 0\}) = 0$ . Dann gilt wie im ersten Fall

$$\sum_{\substack{i=1 \\ \alpha_i > 0}}^n \mu(A_i) = 0 \implies \int f \, d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mu(A_i) = 0$$

II. allgemeiner Fall

Sei  $\int f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu = 0$ . Da  $0 \leq f_n \uparrow f$ , gilt  $\int f_n \, d\mu = 0$  für alle  $n \geq 1$  und mit I. folgt  $f_n = 0$  a.e. Mit der Stetigkeit von unten folgt weiters

$$\mu(\{f > 0\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{f_n > 0\}) = 0$$

Sei nun  $\mu(\{f > 0\}) = 0$ . Dann folgt wegen  $f_n \leq f$  für alle  $n \geq 1$ , dass  $\mu(\{f_n > 0\}) = 0$ .

Mit I. folgt  $\int f_n \, d\mu = 0$  und schließlich  $\int f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu = 0$ .  $\square$

**5.14. Proposition:** Sei  $f \in \mathcal{L}(\mu)$  und  $g$  messbar, sodass  $f = g$  a.e. Dann gilt  $g \in \mathcal{L}(\mu)$  und

$$\int g \, d\mu = \int f \, d\mu$$

**Beweis:** Seien  $f_n, g_n, n \geq 1$  wie im Beweis von Satz 3.22, sodass  $0 \leq f_n \uparrow f$  und  $0 \leq g_n \uparrow g$ .

I.  $f, g$  nicht-negativ  
Es gilt

$$\begin{aligned} \forall B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) : \mu(\{f \in A\}) &= \mu(\{f \in A, f = g\} \cup \{f \in A, f \neq g\}) \\ &= \mu(\{f \in A, f = g\}) + \mu(\{f \in A, f \neq g\}) \\ &= \mu(\{g \in A, f = g\}) + 0 \\ &= \mu(\{g \in A, f = g\}) + \mu(\{g \in A, f \neq g\}) \\ &= \mu(\{g \in A\}) \end{aligned}$$

Damit gilt per Konstruktion von  $f_n, g_n$ , dass  $f_n = g_n$  a.e. für alle  $n \geq 1$  und damit

$$\forall n \geq 1 : \int f_n \, d\mu = \int g_n \, d\mu$$

Es folgt

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n \, d\mu = \int g \, d\mu$$

II.  $f, g$  allgemein

Sei  $f = f^+ - f^-$  und  $g = g^+ - g^-$ . Es gilt  $f^+, f^-, g^+, g^- \geq 0$  und daher  $f^+, f^-, g^+, g^- \in \mathcal{L}(\mu)$ . Nun gilt  $\{f^+ \neq g^+\} = \{f \neq g, f \geq 0, g \geq 0\} \subseteq \{f \neq g\}$  und damit  $f^+ = g^+$  a.e. und  $f^- = g^-$  a.e. Mit I. folgt

$$\int f^+ \, d\mu = \int g^+ \, d\mu \text{ und } \int f^- \, d\mu = \int g^- \, d\mu$$

Die gewünschte Aussage folgt mit der Konstruktion des Integrals. □

**5.15. Proposition:** Ist  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ , dann gilt  $|f| < \infty$  a.e. Insbesondere gibt es eine reelwertige, messbare Funktion  $g : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , sodass  $\int g \, d\mu = \int f \, d\mu$ .

**Beweis:**

I.  $f$  nicht-negativ

Seien  $f_n, n \geq 1$  wie im Beweis von Satz 3.22. Dann gilt

$$\infty > \int f \, d\mu \geq \int f_n \, d\mu \geq n \cdot \mu(\{f \geq n\})$$

für alle  $n \geq 1$ . Für  $n \rightarrow \infty$  muss also  $\mu(\{f \geq n\}) \rightarrow 0$  gelten. Nun ist

$$\{f \geq 1\} \supseteq \{f \geq 2\} \supseteq \dots \supseteq \bigcap_{n \geq 1} \{f \geq n\} = \{f = \infty\}$$

und  $\mu(\{f \geq 1\}) \cdot 1 < \infty$  (s.o.). Mit der Stetigkeit von oben folgt also

$$\mu(\{f = \infty\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{f \geq n\}) = 0$$

und die Aussage folgt mit  $f = |f|$ , da  $f \geq 0$ .

II.  $f$  messbar

Sei  $f = f^+ - f^-$ . Dann gilt  $f^+, f^- \geq 0$  und  $f^+, f^- \in \mathcal{L}^1(\mu)$ . Mit I. folgt  $|f^+|, |f^-| < \infty$  a.e. Die Aussage folgt mit  $|f| = |f^+ - f^-| \leq |f^+| + |f^-|$ . Definiere nun  $g := f \cdot \mathbb{1}_{\{|f| < \infty\}}$ . Dann ist  $f = g$  a.e. mit  $f \in \mathcal{L}^1(\mu) \subseteq \mathcal{L}(\mu)$  und  $g$  messbar. Die Gleichheit der Integral folgt aus Proposition 5.14.  $\square$

### 5.16. Satz (Linearität und Monotonie des Lebesgue-Integrals):

- (i) Seien  $f, g \in \mathcal{L}(\mu)$ , sodass  $\int f \, d\mu + \int g \, d\mu$  wohldefiniert ist (i.e. nicht  $\infty - \infty$ , z.B. wenn  $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ). Dann ist auch  $(f + g)$  fast überall wohldefiniert und

$$\int (f + g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$$

- (ii) Sei  $f \in \mathcal{L}(\mu)$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $(\alpha \cdot f)$  wohldefiniert,  $(\alpha \cdot f) \in \mathcal{L}(\mu)$  und

$$\int (\alpha \cdot f) \, d\mu = \alpha \cdot \int f \, d\mu$$

- (iii) Seien  $f, g \in \mathcal{L}(\mu)$ , sodass  $f \leq g$  a.e. Dann gilt

$$\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$$

### Beweis:

- (i) I.  $f, g \geq 0$  einfach

Seien  $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mathbb{1}_{A_i}$  und  $g = \sum_{j=1}^m \beta_j \cdot \mathbb{1}_{B_j}$  in kanonischer Darstellung. Dann ist

$$(f + g) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\alpha_i + \beta_j) \cdot \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}$$

und

$$\int (f + g) \, d\mu = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\alpha_i + \beta_j) \cdot \mu(A_i \cap B_j)$$

Nun gilt (Einschluss-Ausschluss)  $\mu(A_i \cap B_j) = \mu(A_i) + \mu(B_j) - \mu(A_i \cup B_j)$ . Außerdem sind die  $A_i, i = 1, \dots, n$  eine Partition von  $\Omega$  ( $B_j$  genauso) und damit

$$\sum_{i=1}^n \mu(A_i \cap B_j) = \mu(B_j) \text{ und } \sum_{j=1}^m \mu(A_i \cap B_j) = \mu(A_i)$$

Es folgt

$$\int (f+g) d\mu = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\alpha_i + \beta_j) \cdot \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mu(A_i) + \sum_{j=1}^m \beta_j \cdot \mu(B_j) = \int f d\mu + \int g d\mu$$

## II. $f, g$ nicht-negativ

Wähle  $f_n, g_n, n \geq 1$  einfach mit  $0 \leq f_n \uparrow f$  und  $0 \leq g_n \uparrow g$ . Dann gilt  $0 \leq f_n + g_n \uparrow f + g$ , wobei  $f + g$  nicht-negativ und messbar ist (Proposition 3.18). Wegen  $f + g \geq 0$  gilt auch  $f + g \in \mathcal{L}(\mu)$ . Mit I. folgt

$$\int (f+g) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int (f_n + g_n) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu + \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$$

## III. $f, g$ messbar

Beachte, dass  $\int f d\mu$  und  $\int g d\mu$  wohldefiniert sind, da  $f, g \in \mathcal{L}(\mu)$  und schreibe

$$\begin{aligned} \int f d\mu + \int g d\mu &= \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu + \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu \\ &= \left( \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu \right) - \left( \int f^- d\mu + \int g^- d\mu \right) \in \overline{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

Damit ist  $\left( \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu \right) = \left( \int f^- d\mu + \int g^- d\mu \right) = \infty$  nicht möglich.

Sei also o.B.d.A.  $\left( \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu \right) < \infty$  (der andere Fall folgt ähnlich). Es sind  $f^+, g^+ \geq 0$  und mit II. gilt

$$\int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu = \int (f^+ + g^+) d\mu \in [0, \infty)$$

Mit Proposition 5.15 folgt  $|f^+ + g^+| = f^+ + g^+ < \infty$  a.e. Definiere also für  $\omega \in \Omega$

$$(f+g)(\omega) := \begin{cases} f(\omega) + g(\omega) & \text{falls } f^+(\omega) + g^+(\omega) < \infty \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist  $(f+g)$  wohldefiniert, messbar und  $(f+g) = f+g$  a.e. Außerdem gilt per Konstruktion  $(f+g)^+ \leq (f^+ + g^+)$  und mit (iii) folgt

$$\int (f+g)^+ d\mu \leq \int (f^+ + g^+) d\mu = \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu < \infty$$

Damit gilt  $(f + g) \in \mathcal{L}(\mu)$ . Außerdem gilt

$$(f + g)^+ - (f + g)^- = (f + g) \stackrel{a.e.}{=} f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$

und damit

$$(f + g)^+ + f^- + g^- \stackrel{a.e.}{=} (f + g)^- + f^+ + g^+$$

Mit Proposition 5.14 folgt

$$\int (f + g)^+ + f^- + g^- d\mu = \int (f + g)^- + f^+ + g^+ d\mu$$

und mit II. schließlich

$$\int (f + g)^+ d\mu + \int f^- d\mu + \int g^- d\mu = \int (f + g)^- d\mu + \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu$$

und schließlich

$$\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$$

(ii) I.  $f \geq 0$  einfach

Hier gilt  $\alpha \cdot f = \alpha \cdot \sum_{i=1}^n \beta_i \cdot \mathbf{1}_{B_i} = \sum_{i=1}^n (\alpha \cdot \beta_i) \cdot \mathbf{1}_{B_i}$  und damit

$$\int (\alpha \cdot f) d\mu = \sum_{i=1}^n (\alpha \cdot \beta_i) \cdot \mu(B_i) = \alpha \cdot \sum_{i=1}^n \beta_i \cdot \mathbf{1}_{B_i} = \alpha \cdot \int f d\mu$$

II.  $f \geq 0$  messbar,  $\alpha \geq 0$

Wähle  $f_n$  einfach, sodass  $0 \leq f_n \uparrow f$ . Dann gilt  $0 \leq (\alpha \cdot f_n) \uparrow (\alpha \cdot f)$  und

$$\begin{aligned} \int (\alpha \cdot f) d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int (\alpha \cdot f_n) d\mu \\ &\stackrel{\text{I.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha \cdot \int f_n d\mu \\ &= \alpha \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \\ &= \alpha \cdot \int f d\mu \end{aligned}$$

III.  $f$  messbar,  $\alpha \in \mathbb{R}$

Sei zuerst  $\alpha \geq 0$ . Dann ist  $(\alpha \cdot f)$  wohldefiniert, da  $\alpha \neq \pm\infty$  und

$$(\alpha \cdot f) = (\alpha \cdot f^+) - (\alpha \cdot f^-) = \alpha \cdot (f^+ - f^-)$$

Mit II. gilt

$$\int (\alpha \cdot f^+) d\mu = \alpha \cdot \int f^+ d\mu \quad \text{und} \quad \int (\alpha \cdot f^-) d\mu = \alpha \cdot \int f^- d\mu$$



Da  $f \in \mathcal{L}(\mu)$ , muss eines der beiden Integrale endlich sein und  $(\alpha \cdot f) \in \mathcal{L}(\mu)$ .  
Damit ist

$$\int (\alpha \cdot f^+) d\mu - \int (\alpha \cdot f^-) d\mu$$

wohldefiniert und mit (i) folgt

$$\begin{aligned} \int (\alpha \cdot f) d\mu &= \int (\alpha \cdot f^+) - (\alpha \cdot f^-) d\mu \\ &= \int (\alpha \cdot f^+) d\mu - \int (\alpha \cdot f^-) d\mu \\ &= \alpha \cdot \int f^+ d\mu - \alpha \cdot \int f^- d\mu \\ &= \alpha \cdot \left( \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \right) \\ &= \alpha \cdot \int (f^+ - f^-) d\mu \\ &= \alpha \cdot \int f d\mu \end{aligned}$$

Sei nun  $\alpha < 0$ . Dann ist  $(\alpha \cdot f)$  wohldefiniert und messbar und

$$(\alpha \cdot f) = (-\alpha)(-f)$$

wobei  $(-\alpha) > 0$  und  $(-f) \in \mathcal{L}(\mu)$ . Damit folgt (siehe oben)

$$\begin{aligned} \int (\alpha \cdot f) d\mu &= \int (-\alpha)(-f) d\mu \\ &= (-\alpha) \int (-f) d\mu \\ &= (-\alpha) \int (f^- - f^+) d\mu \\ &= (-1) \cdot \alpha \cdot \left( \int f^- d\mu - \int f^+ d\mu \right) \\ &= (-1)^2 \cdot \alpha \cdot \left( \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \right) \\ &= \alpha \cdot \int f d\mu \end{aligned}$$

(iii) Betrachte hier  $\max(f, g) := g \cdot \mathbb{1}_{\{f \leq g\}} + f \cdot \mathbb{1}_{\{f > g\}}$  messbar mit  $f \leq \max(f, g)$  und  $g = \max(f, g)$  a.e. Damit folgt  $\int \max(f, g) d\mu = \int g d\mu$ .

I.  $f$  nicht-negativ

Hier ist  $0 \leq f \leq \max(f, g)$ . Wähle nun einfache Funktionen  $f_n, m_n, n \geq 1$ , sodass  $0 \leq f_n \uparrow f$  und  $0 \leq m_n \uparrow \max(f, g)$ . Dann gilt für alle  $n \geq 1$

$$0 \leq f_n \leq \max(f, g) = \lim_{n \rightarrow \infty} m_n$$

und mit Lemma 5.4 folgt

$$\forall n \geq 1 : \int f_n d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int m_n d\mu = \int \max(f, g) d\mu = \int g d\mu$$

und damit

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \leq \int g d\mu$$

II.  $f$  messbar

Trivial, wenn  $\int g^+ d\mu = \infty$  oder  $\int f^- d\mu = -\infty$ . Seien also  $f^-, g^+ \in \mathcal{L}^1(\mu)$ .

Wegen  $f \leq \max(f, g)$  folgt  $f^+ \leq [\max(f, g)]^+$  und mit I. gilt

$$\int f^+ d\mu \leq \int [\max(f, g)]^+ d\mu < \infty$$

Wegen  $f \leq \max(f, g)$  gilt auch  $f^- \geq [\max(f, g)]^-$  und mit I. folgt

$$\infty > \int f^- d\mu \geq \int [\max(f, g)]^- d\mu$$

Damit folgt

$$\int f d\mu \leq \int [\max(f, g)]^+ d\mu - \int [\max(f, g)]^- d\mu = \int \max(f, g) d\mu = \int g d\mu$$

□

**5.17. Proposition:** Sei  $f$  messbar. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i)  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$
- (ii)  $|f| \in \mathcal{L}^1(\mu)$
- (iii)  $\exists g \in \mathcal{L}^1(\mu) : |f| \leq g$  a.e.
- (iv)  $\exists h_1, h_2 \in \mathcal{L}^1(\mu) : h_1, h_2 \geq 0, f = h_1 - h_2$

**Beweis:** (i)  $\implies$  (ii):  $f = f^+ - f^-, |f| = f^+ + f^-$

(ii)  $\implies$  (iii):  $g := |f|$

(iii)  $\implies$  (iv):  $|f| \leq g \implies 0 \leq f^+, f^- \leq g$  und mit Monotonie  $\int f^+ d\mu, \int f^- d\mu \leq \int g d\mu < \infty$ . Es gilt also  $f^+, f^- \in \mathcal{L}^1(\mu)$  mit  $f^+, f^- \geq 0$

(iv)  $\implies$  (i):  $\int f d\mu = \int (h_1 - h_2) d\mu = \int h_1 d\mu - \int h_2 d\mu \in \mathbb{R}$ , da  $0 \leq \int h_1 d\mu, \int h_2 d\mu < \infty$

□

**5.18. Korollar:** Seien  $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ . Dann gilt auch  $\max(f, g), \min(f, g) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ .

**Beweis:** Es gilt für  $x, y \in \mathbb{R}$  (leicht nachzuprüfen)

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$$

und damit (zweimal Dreiecksungleichung und Monotonie)

$$\int |\max(f, g)| \, d\mu = \int \left| \frac{f + g + |f - g|}{2} \right| \, d\mu \leq \frac{1}{2} \int 2(|f| + |g|) \, d\mu = \int |f| \, d\mu + \int |g| \, d\mu < \infty$$

Die Aussage für das Minimum folgt mit  $\min(x, y) = -\max(-x, -y)$ .  $\square$

**5.19. Korollar (Dreiecksungleichung für Integrale):** Für  $f \in \mathcal{L}(\mu)$  gilt

$$\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu$$

**Beweis:** Es gilt  $-|f| \leq f \leq |f|$  und mit der Monotonie  $-\int |f| \, d\mu \leq \int f \, d\mu \leq \int |f| \, d\mu$ .

Die Aussage folgt aus  $-y \leq x \leq y \implies |x| \leq y$ .  $\square$

**5.20. Definition:** Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum,  $(\Omega', \mathcal{A}')$  ein messbarer Raum und  $f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$  eine messbare Abbildung. Dann ist das Bildmaß (Englisch *pushforward*) von  $\mu$  unter  $f$  definiert als

$$(f\#\mu)(A') := \mu(f^{-1}(A')) \text{ für alle } A' \in \mathcal{A}'$$

**5.21. Proposition:** Das Bildmaß ist ein Maß auf  $(\Omega', \mathcal{A}')$  mit  $(f\#\mu)(\Omega') = \mu(\Omega)$ . Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} \mu \text{ endlich} &\iff (f\#\mu) \text{ endlich} \\ \mu \text{ Wahrscheinlichkeitsmaß} &\iff (f\#\mu) \text{ Wahrscheinlichkeitsmaß} \end{aligned}$$

**Beweis:** Übung!

**5.22. (Transformationssatz):** Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum,  $(\Omega', \mathcal{A}')$  ein messbarer Raum. Seien  $f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$  und  $g : (\Omega', \mathcal{A}') \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$  messbar und  $(f\#\mu)$  das entsprechende Bildmaß auf  $(\Omega', \mathcal{A}')$ . Zusammenfassend

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \xrightarrow{f} (\Omega', \mathcal{A}', (f\#\mu)) \xrightarrow{g} (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$$

Dann gilt

$$\int_{\Omega} (g \circ f) \, d\mu = \int_{\Omega'} g \, d(f\#\mu)$$

**Beweis:**

I.  $g = \mathbb{1}_{A'}, A' \in \mathcal{A}'$  Indikatorfunktion

Hier ist

$$(g \circ f)(\omega) = \mathbb{1}_{A'}(f(\omega)) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega \in f^{-1}(A') \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \mathbb{1}_{f^{-1}(A')}(\omega)$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (g \circ f) \, d\mu &= \int_{\Omega} \mathbb{1}_{f^{-1}(A')} \, d\mu \\ &= \mu(f^{-1}(A')) = (f\#\mu)(A') \\ &= \int_{\Omega'} \mathbb{1}_{A'} \, d(f\#\mu) = \int_{\Omega'} g \, d(f\#\mu) \end{aligned}$$

II.  $g = \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot \mathbb{1}_{G'_i}, G'_i \in \mathcal{A}', i = 1 \dots, n$  einfach

Hier gilt (wie in I.)

$$(g \circ f)(\omega) = \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot \mathbb{1}_{f^{-1}(G'_i)}(\omega)$$

und damit

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (g \circ f) \, d\mu &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot \mathbb{1}_{f^{-1}(G'_i)} \, d\mu \\ &= \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot \int_{\Omega} \mathbb{1}_{f^{-1}(G'_i)} \, d\mu \\ &= \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot \int_{\Omega} (\mathbb{1}_{G'_i} \circ f) \, d\mu \\ &\stackrel{\text{I.}}{=} \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot \int_{\Omega'} \mathbb{1}_{G'_i} \, d(f\#\mu) \\ &= \int_{\Omega'} \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot \mathbb{1}_{G'_i} \, d(f\#\mu) \\ &= \int_{\Omega'} g \, d(f\#\mu) \end{aligned}$$

III.  $g \geq 0$  nicht-negativ, messbar

Wähle  $g_n : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}, n \geq 1$  einfach mit  $0 \leq g_n \uparrow g$ . Dann ist für alle  $n \geq 1$  die Zusammensetzung  $(g_n \circ f)$  einfach und messbar und insbesondere  $0 \leq (g_n \circ f) \uparrow (g \circ f)$ .

Es folgt

$$\int_{\Omega} (g \circ f) \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (g_n \circ f) \, d\mu \stackrel{\text{II.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega'} g_n \, d(f\#\mu) = \int_{\Omega'} g \, d(f\#\mu)$$

IV.  $g$  allgemein (messbar)

Schreibe  $g = g^+ - g^-$  und beachte, dass  $(g \circ f)^+ = (g^+ \circ f)$  und  $(g \circ f)^- = (g^- \circ f)$ .  
Es folgt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (g \circ f) \, d\mu &= \int_{\Omega} (g \circ f)^+ - (g \circ f)^- \, d\mu \\ &= \int_{\Omega} (g^+ \circ f) \, d\mu - \int_{\Omega} (g^- \circ f) \, d\mu \\ &\stackrel{\text{III.}}{=} \int_{\Omega'} g^+ \, d(f\#\mu) - \int_{\Omega'} g^- \, d(f\#\mu) = \int_{\Omega'} g \, d(f\#\mu) \end{aligned}$$

□

**5.23. Lemma:** Seien  $f_n, n \geq 1$  nicht-negativ und messbar, sodass  $0 \leq f_1 \leq \dots \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ .  
Sei  $g$  einfach, sodass  $0 \leq g \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ . Dann gilt

$$\int g \, d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu$$

**Beweis:** folgt sofort aus Lemma 5.4. □

**5.24. Satz:** Seien  $f_n, n \geq 1$  nicht-negativ und messbar, sodass  $0 \leq f_1 \leq \dots \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ .  
Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu = \int \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) \, d\mu$$

**Beweis:** Es gilt  $\forall n \geq 1 : f_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \geq 0$  messbar. Damit folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \in \mathcal{L}(\mu)$  und damit

$$\forall n \geq 1 : \int f_n \, d\mu \leq \int \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) \, d\mu$$

Es folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu \leq \int \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) \, d\mu$$

Wähle nun  $g_k, k \geq 1$ , sodass  $0 \leq g_k \uparrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ . Mit Lemma 5.23 folgt

$$\forall k \geq 1 : \int g_k \, d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu$$

und damit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int g_k \, d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu$$

Aber per Definition des Integrals gilt

$$\int \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) \, d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int g_k \, d\mu$$

und damit folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \geq \int \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu$$

□

**5.25. Satz:** Seien  $f_n, n \geq 1$  und  $g$  messbare Funktionen, sodass

$$g \leq f_1 \leq \dots \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$$

Falls  $\int g^- d\mu < \infty$ , dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu$$

**Beweis:** Es gilt  $g \leq f_n$  und damit  $f_n^- \leq g^-$  für alle  $n \geq 1$ . Mit der Monotonie folgt

$$\forall n \geq 1 : \int f_n^- d\mu \leq \int g^- d\mu < \infty$$

Außerdem gilt  $\left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)^- \leq g^-$  und mit der Monotonie

$$\int \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)^- d\mu \leq \int g^- d\mu$$

Also sind  $f_n, \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) \in \mathcal{L}(\mu)$ .

I. Sei  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \infty$

Mit der Monotonie gilt  $\int f_n d\mu \leq \int \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu$  für alle  $n \geq 1$  und damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \leq \int \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu$$

Nun ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \infty$  und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu = \infty$$

II. Sei  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu < \infty$

Laut Annahme gilt mit der Monotonie für alle  $n \geq 1$

$$\int g d\mu \leq \int f_n d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu < \infty$$

Daher gilt  $g, f_n, \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n\right) \in \mathcal{L}^1(\mu)$  und mit Proposition 5.15 gilt  $g, f_n, \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n\right) \in \mathbb{R}$  a.e. Da es hier nur um die Werte der Integrale geht, seien also alle Funktionen reellwertig in  $\Omega$ . Dann gilt für alle  $n \geq 1$ , dass  $0 \leq (f_n - g) \uparrow \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n - g)$  und mit Satz 5.24 folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int (f_n - g) d\mu = \int \left( \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n - g) \right) d\mu$$

Die Aussage folgt schließlich aus der Linearität des Integrals.  $\square$

**5.26. Proposition:** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  messbar. Falls  $f$  auf  $[a, b]$  Riemann-integrierbar ist, dann ist  $f$  auch Lebesgue-integrierbar (bzgl. dem Lebesgue-Maß  $\lambda = \text{vol}$  auf  $([a, b], \mathcal{B}([a, b]))$ ) und

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a, b]} f d\lambda$$

**Beweis:** Seien  $U_n, O_n, n \geq 1$  Unter- bzw. Obersummen von  $f$ , sodass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \int_a^b f(x) dx$$

per Konstruktion des Riemann-Integrals. Insbesondere sind  $U_n, O_n < \infty$  für alle  $n \geq 1$  und jede Unter- bzw. Obersumme entspricht dem Integral einer Treppenfunktion  $u_n$  bzw.  $o_n$  für  $n \geq 1$ , sodass  $u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq f \leq \dots \leq o_2 \leq o_1$  auf  $[a, b]$ . Als Treppenfunktionen sind  $u_n, o_n$  insbesondere einfach und damit messbar. Es folgt (einfach zu prüfen)

$$U_n = \int u_n d\lambda \text{ und } O_n = \int o_n d\lambda$$

Da  $f$  Riemann-integrierbar auf  $[a, b]$  ist folgt  $|U_1|, |O_1| < \infty$  und mit der Monotonie folgt

$$\forall n \geq 1 : U_n \leq \int_{[a, b]} f d\lambda \leq O_n$$

Die Aussage folgt nun aus  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n \leq \int_{[a, b]} f d\lambda \leq \lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \int_a^b f(x) dx$ .  $\square$

**Bemerkung:** Sei  $f$  Riemann-integrierbar auf  $[a, b]$ , aber nicht unbedingt messbar. Dann gilt für  $f^* := \lim_{n \rightarrow \infty} o_n$

- $f^* : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist messbar.
- $\int_a^b f(x) dx = \int_{[a, b]} f d\lambda$
- $\{x \in [a, b] : f(x) \neq f^*(x)\} \subseteq N \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  mit  $\mu(N) = 0$

**Korollar 5.27:** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  messbar und (uneigentlich) Riemann-integrierbar auf  $[0, \infty)$ . Dann ist  $f$  auch Lebesgue-integrierbar auf  $[0, \infty)$  und die Integralbegriffe stimmen überein.

**Beweis:** Laut Annahme gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f(x) \, dx < \infty$$

und insbesondere ist  $f$  damit Riemann-integrierbar auf  $[0, t]$  für alle  $t > 0$ . Es folgt

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(x) \, dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f(x) \, dx \\ &\stackrel{5.26}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{[0, t]} f \, d\lambda \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int f \cdot \mathbf{1}_{[0, t]} \, d\lambda \\ &\stackrel{5.24}{=} \int \lim_{t \rightarrow \infty} (f \cdot \mathbf{1}_{[0, t]}) \, d\lambda \\ &= \int_{[0, \infty)} f \, d\lambda \end{aligned}$$

□

**Bemerkung:** Die Bedingung  $f \geq 0$  ist notwendig! (Gegenbeispiel  $\sin(x)/x$ )

## 5.28. Beispiel:

**5.29. Proposition:** Sei  $f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$  nicht-negativ und messbar. Definiere für  $A \in \mathcal{A}$

$$\nu(A) := \int_A f \, d\mu$$

Dann ist  $\nu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  ein Maß auf  $(\Omega, \mathcal{A})$  und für  $f \in \mathcal{L}^1(\nu)$  gilt

$$\int g \, d\nu = \int fg \, d\mu$$

**Beweis:**

I. Zeige zunächst, dass  $\nu$  ein Maß ist.

(i)  $f \geq 0 \implies f \cdot \mathbf{1}_A \geq 0 \implies \int_A f \, d\mu \in [0, \infty]$ , womit  $\nu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  wohldefiniert ist.



(ii)  $\nu(\emptyset) = \int_{\emptyset} f \, d\mu = \int f \cdot \mathbb{1}_{\emptyset} \, d\mu = \int 0 \, d\mu = 0$

(iii) Seien  $A_n \in \mathcal{A}, n \geq 1$  disjunkt. Dann gilt

$$\begin{aligned} \nu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) &= \int_{\bigcup_{n \geq 1} A_n} f \, d\mu = \int f \cdot \mathbb{1}_{\bigcup_{n \geq 1} A_n} \, d\mu \\ &= \int f \cdot \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \mathbb{1}_{A_n} \right) \, d\mu \\ &\stackrel{5.24}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \int f \cdot \sum_{n=1}^N \mathbb{1}_{A_n} \, d\mu \\ &= \sum_{n \geq 1} \int_{A_n} f \, d\mu = \sum_{n \geq 1} \nu(A_n) \end{aligned}$$

II.  $g = \mathbb{1}_A, A \in \mathcal{A}$  Indikatorfunktion

Hier gilt

$$\int g \, d\nu = \int \mathbb{1}_A \, d\nu = \nu(A) = \int f \, d\mu = \int f \cdot \mathbb{1}_A \, d\mu = \int f g \, d\mu$$

III.  $g = \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot \mathbb{1}_{G_i}$  einfach

Hier gilt

$$\int g \, d\nu = \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot \nu(G_i) \stackrel{\text{II.}}{=} \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot \left( \int_{G_i} f \, d\mu \right) = \int f \cdot \left( \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot \mathbb{1}_{G_i} \right) \, d\mu = \int f g \, d\mu$$

IV.  $g \geq 0$  nicht-negativ, messbar

Wähle  $g_n, n \geq 1$  einfach mit  $0 \leq g_n \uparrow g$ . Wegen III. gilt  $\int g_n \, d\nu = \int f g_n \, d\mu$  für alle  $n \geq 1$ . Außerdem gilt wegen  $f \geq 0$ , dass  $0 \leq f g_n \uparrow f g$  und damit

$$\int g \, d\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n \, d\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f g_n \, d\mu \stackrel{5.24}{=} \int \lim_{n \rightarrow \infty} f g_n \, d\mu = \int f g \, d\mu$$

V.  $g$  messbar

Sei  $g = g^+ - g^-$ . Wegen IV. gilt  $\int g^+ \, d\nu = \int f g^+ \, d\mu$  und  $\int g^- \, d\nu = \int f g^- \, d\mu$ .

Damit folgt

$$\int g \, d\nu = \int g^+ \, d\nu - \int g^- \, d\nu = \int f(g^+ - g^-) \, d\mu = \int f g \, d\mu$$

□

**Bemerkung:**  $\nu$  erbt alle Nullmengen von  $\mu$  (kann jedoch auch zusätzliche Nullmengen haben). Es gilt also

$$\mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0$$

**5.30. Definition:** Für  $f$  und  $\nu$  wie in Proposition 5.29 nennt man  $f$  die Dichte von  $\nu$  bezüglich  $\mu$ . Kurz  $f = \frac{d\nu}{d\mu}$ . Ist  $X$  eine reellwertige Zufallsvariable und  $\mathbb{P}(X \in A) = \nu(A)$ , dann nennt man  $f$  auch die Dichte von  $X$  bezüglich  $\mu$ .

**Bemerkung:** In Proposition 5.29 sind ein Maß  $\mu$  und eine Dichte  $f$  gegeben. Falls zwei Maße  $\mu, \nu$  gegeben sind, liefert der Satz von Radon–Nikodym (cf. Wahrscheinlichkeitstheorie 2) Bedingungen an  $\mu$  und  $\nu$  für die Existenz einer Dichte  $f$ .

## 6. Ungleichungen

Sei in diesem Kapitel  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum, und  $X, Y : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$  Zufallsvariablen.

### Markov-Ungleichung

**6.1. Satz (Markov-Ungleichung):** Sei  $X \geq 0$  und  $c > 0$ . Dann gilt

$$\mathbb{P}(X \geq c) \leq c^{-1} \cdot \mathbb{E}X$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X &= \int_{\Omega} X \, d\mathbb{P} = \int_{X \geq c} X \, d\mathbb{P} + \int_{X < c} X \, d\mathbb{P} \\ &\geq \int_{X \geq c} X \, d\mathbb{P} \\ &\geq \int_{X \geq c} c \, d\mathbb{P} = c \cdot \mathbb{P}(X \geq c) \end{aligned}$$

□

**6.2. Korollar:** Sei  $X \geq 0$  und  $c > 0$ . Dann gilt sogar

$$\mathbb{P}(X \geq c) \leq c^{-1} \cdot \mathbb{E}[X \cdot \mathbf{1}_{X \geq c}]$$

**Beweis:** wie 6.1.

□

**6.3. Korollar (Chebyshev-Ungleichung):** Sei  $X \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$  und  $c > 0$ . Dann gilt

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq c) \leq c^{-2} \cdot \text{Var}(X)$$

**Beweis:** Mit der Markov-Ungleichung folgt

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq c) = \mathbb{P}((X - \mathbb{E}X)^2 \geq c^2) \stackrel{6.1}{\leq} c^{-2} \cdot \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2] = c^{-2} \cdot \text{Var}(X)$$

**6.4. Korollar (Chernoff-Schranke):** Sei  $X$  eine reellwertige Zufallsvariable und  $c > 0$ . Dann gilt

$$\mathbb{P}(X \geq c) \leq \inf_{t>0} e^{-tc} \cdot M_X(t)$$

wobei  $M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$  die momenterzeugende Funktion von  $X$  ist.

**Beweis:** Sei  $t > 0$ . Dann gilt mit der Markov-Ungleichung

$$\mathbb{P}(X \geq c) = \mathbb{P}(e^{tX} \geq e^{tc}) \stackrel{6.1}{\leq} e^{-tc} \cdot M_X(t)$$

Diese Ungleichung gilt für alle  $t > 0$ . Daher können wir das Infimum nehmen und die Chernoff-Schranke folgt.  $\square$

## Konvexität und Jensen-Ungleichung

**6.5. Definition:** Sei  $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$  ein nicht-leeres Intervall. Dann ist eine Abbildung  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  konvex, falls gilt

$$\forall x, y \in (a, b), \forall \alpha \in (0, 1) : f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

**6.6. Lemma:** Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann ist  $f$  genau dann konvex, wenn gilt

$$\forall s, t, u : a < s < t < u < b : \frac{f(t) - f(s)}{t - s} \leq \frac{f(u) - f(t)}{u - t}$$

**Beweis:**

I. Sei zunächst  $f$  konvex (nach Definition 6.5)

Setze  $\alpha := \frac{u - t}{u - s}$ . Dann ist  $1 - \alpha = \frac{t - s}{u - s}$  und  $\alpha s + (1 - \alpha)u = t$ . Aus der Konvexität von  $f$  folgt

$$f(\alpha s + (1 - \alpha)u) = f(t) \leq \alpha f(s) + (1 - \alpha)f(u) \tag{1}$$

Damit gilt

$$f(t) - f(s) \leq (1 - \alpha)[f(u) - f(s)] = \frac{t - s}{u - s}[f(u) - f(s)]$$

und

$$\frac{f(t) - f(s)}{t - s} \leq \frac{f(u) - f(s)}{u - s}$$

Aus (1) folgt ebenfalls

$$f(t) - f(u) \leq \alpha[f(s) - f(u)]$$

und damit

$$\frac{f(u) - f(t)}{u - t} \geq \frac{f(u) - f(s)}{u - s}$$

II. Sei nun die Bedingung aus Lemma 6.6 erfüllt

Falls  $x < y$ , setze

$$s := x, \quad t := \alpha x + (1 - \alpha)y, \quad u := y$$

Dann ist

$$\alpha = \frac{u - t}{u - s}, \quad 1 - \alpha = \frac{t - s}{u - s}$$

Laut Annahme gilt

$$f(t) \leq f(s) + \frac{t - s}{u - s} [f(u) - f(s)] = \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

Falls  $x > y$ , setze

$$s := y, \quad t := \alpha x + (1 - \alpha)y, \quad u := x$$

Dann ist

$$\alpha = \frac{t - s}{u - s}, \quad 1 - \alpha = \frac{u - t}{u - s}$$

und die Aussage folgt wie oben aus der Annahme.  $\square$

**6.7. Lemma:** Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ .  $f$  ist genau dann konvex, wenn gilt

$$\forall x \in (a, b), \exists \gamma \in \mathbb{R}, \forall y \in (a, b) : f(y) \geq f(x) + \gamma(y - x)$$

**Beweis:**

I. Sei  $f$  konvex (nach Definition 6.5)

Wähle  $a < x_- < x < b$  und setze

$$\gamma := \inf_{y \in (x, b)} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq \frac{f(x) - f(x_-)}{x - x_-} > -\infty$$

Für  $x = y$  ist die Aussage trivial. Für  $x < y$  ist

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq \gamma$$

sodass  $f(y) \geq f(x) + \gamma(y - x)$ . Für  $x > y$  ist

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq \gamma$$

da  $\gamma \geq \frac{f(x) - f(x_-)}{x - x_-}$  für alle  $x_- \in (a, x)$ , sodass auch  $f(y) \geq f(x) + \gamma(y - x)$ .

II. Sei nun die Bedingung aus Lemma 6.7 erfüllt

Wähle  $a < s < t < u$ . Aus der Annahme folgt  $f(s) \geq f(t) + \gamma(s - t)$  und damit

$$\gamma \geq \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

Ebenfalls folgt aus der Annahme  $f(u) \geq f(t) + \gamma(u - t)$  und damit

$$\gamma \leq \frac{f(u) - f(t)}{u - t}$$

Die Konvexität von  $f$  folgt mit Lemma 6.6.  $\square$

**6.8. Korollar:** Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar auf  $(a, b)$ . Dann gilt

$$f \text{ konvex} \iff f' \text{ monoton nicht-fallend}$$

**Beweis:**

I. Sei  $f$  konvex (nach Definition 6.5)

Seien  $a < s < u < b$  und wähle  $s_+, t_-, t_+, u_-$  so, dass

$$s < s_+ < t_- < t_+ < u_- < u$$

Mit Lemma 6.6 folgt

$$\frac{f(s_+) - f(s)}{s_+ - s} \leq \frac{f(t_-) - f(s_+)}{t_- - s_+} \leq \frac{f(t_+) - f(t_-)}{t_+ - t_-} \leq \frac{f(u_-) - f(t_+)}{u_- - t_+} \leq \frac{f(u) - f(u_-)}{u - u_-}$$

und

$$f'(s) = \lim_{s_- \searrow s} \frac{f(s_+) - f(s)}{s_+ - s} \leq \frac{f(t_+) - f(t_-)}{t_+ - t_-} \leq \lim_{u_- \nearrow u} \frac{f(u) - f(u_-)}{u - u_-} = f'(u)$$

Also folgt für alle  $u, s \in (a, b)$  mit  $s < u$ , dass  $f'(s) \leq f'(u)$ .

II. Sei  $f'$  monoton nicht-fallend

Seien  $a < s < t < u < b$ . Es gilt (Fundamentalsatz der Analysis, Mittelwertsatz)

$$f(t) = f(s) + \int_s^t f'(z) dz \leq f(s) + (t - s)f'(t)$$

und damit

$$\frac{f(t) - f(s)}{t - s} \leq f'(t)$$

Ebenfalls gilt (wie oben)

$$f(u) = f(t) + \int_t^u f'(z) dz \geq f(t) + (u - t)f'(t)$$

und damit

$$\frac{f(u) - f(t)}{u - t} \geq f'(t)$$

Die Aussage folgt mit Lemma 6.6. □

**6.9. Lemma:** Ist  $f$  konvex auf  $(a, b)$ , dann ist  $f$  stetig auf  $(a, b)$ .

**Beweis:** Sei  $x \in (a, b)$ . Für  $s < y < x$  ist mit Lemma 6.7

$$f(y) \geq f(x) + \gamma(y - x)$$

und

$$f(y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(s)$$

für  $\alpha = \frac{y - s}{x - s}$ . Damit gilt  $\lim_{y \nearrow x} f(y) = f(x)$ . Analog folgt auch  $\lim_{y \searrow x} f(y) = f(x)$ . □

**6.10. Satz (Jensen-Ungleichung):** Sei  $X \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$  mit  $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow ((a, b), \mathcal{B}((a, b)))$ , mit  $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ . Ist  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  konvex, dann gilt

$$f(\mathbb{E}X) \leq \mathbb{E}f(X)$$

**Beweis:** Es gilt  $\mathbb{E}X \in (a, b)$  (Monotonie,  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ ). Mit Lemma 6.7 gilt

$$f(X) \geq f(\mathbb{E}X) + (X - \mathbb{E}X) \cdot \gamma =: Z$$

Es gilt  $Z \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$  (leicht nachzuprüfen) und

$$\mathbb{E}Z = \mathbb{E}[f(\mathbb{E}X)] + \gamma \cdot \mathbb{E}[X - \mathbb{E}X] = f(\mathbb{E}X)$$

Da  $f(X) \geq Z$ , gilt  $[f(X)]^- \leq Z^- \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$  und damit  $f(X) \in \mathcal{L}(\mathbb{P})$ . Mit der Monotonie folgt

$$f(\mathbb{E}X) = \mathbb{E}[f(\mathbb{E}X)] = \int Z \, d\mathbb{P} \leq \int f(X) \, d\mathbb{P} = \mathbb{E}f(X)$$

□

## Hölder-Ljapunov-Minkowski

**6.11. Lemma (Young-Ungleichung):** folgt

**6.12. Satz (Hölder-Ungleichung):** Sei nun  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum und  $f, g \in \mathcal{L}(\mu)$ . Sei  $p \in (1, \infty)$  und  $q$  der konjugierte (duale) Index zu  $p$ , i.e.  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Dann gilt

$$\int |fg| \, d\mu \leq \left( \int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \cdot \left( \int |g|^q \, d\mu \right)^{1/q}$$

**Beweis:**

I. Fall:  $\int |f|^p \, d\mu = 0$  oder  $\int |g|^q \, d\mu = 0$

Sei o.B.d.A. der erste Fall zutreffend. Dann gilt  $|f| = 0$  a.e. und (mit der Konvention  $0 \cdot \infty = 0$ ) folgt  $|fg| = 0$  a.e. und die Aussage ist trivial.

II. Fall:  $\int |f|^p \, d\mu, \int |g|^q \, d\mu > 0$

Die Aussage ist trivial, falls eines der Integrale unendlich ist. Es seien also beide Integrale reellwertig. Setze

$$A := \frac{|f|^p}{\int |f|^p \, d\mu}, \quad B := \frac{|g|^q}{\int |g|^q \, d\mu}$$

Mit Lemma 6.11 gilt

$$\frac{|fg|}{\left( \int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \left( \int |g|^q \, d\mu \right)^{1/q}} \leq \frac{|f|^p}{p \cdot \left( \int |f|^p \, d\mu \right)} + \frac{|g|^q}{q \cdot \left( \int |g|^q \, d\mu \right)}$$

Die Ungleichung folgt mit der Monotonie.

□

**Bemerkung:** Die Ungleichung hält auch für  $p = 1$  und  $p = \infty$  mit entsprechenden konjugierten Indizes  $q = \infty$  und  $q = 1$ . Außerdem sei für  $p \in (0, \infty)$

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) := \left\{ f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) : \int |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

**6.13. Korollar (Cauchy–Schwarz-Ungleichung):**

$$\int |fg| d\mu \leq \left( \int |f|^{1/2} d\mu \right)^{1/2} \left( \int |g|^{1/2} d\mu \right)^{1/2}$$

**Bemerkung:** Für Zufallsvariablen  $X, Y \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$  mit  $\text{Var}(X), \text{Var}(Y) > 0$  definiere den Korrelationskoeffizienten

$$\rho_{X,Y} := \frac{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)]}{\sqrt{\text{Var}(X) \cdot \text{Var}(Y)}}$$

Dieser ist wegen Korollar 6.13 und Satz 6.12 wohldefiniert und es gilt  $\rho_{X,Y} \in [-1, 1]$ .

**6.14. Korollar (Ljapunov-Ungleichung):** Betrachte einen endlichen Maßraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  mit  $\mu(\Omega) = 1$  und eine messbare Abbildung  $f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ . Für  $1 \leq p \leq q < \infty$  gilt

$$\left( \int |f|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \left( \int |f|^q d\mu \right)^{1/q}$$

**Beweis:** Setze  $A := |f|^p, B := 1, a := q/p, b := q/(q-p) = a/(a-1)$ . Dann gilt  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$  und mit Satz 6.12 folgt

$$\int |f|^p d\mu = \int |AB| d\mu \leq \left( \int |A|^a d\mu \right)^{1/a} \cdot \left( \int |B|^b d\mu \right)^{1/b} = \left( \int |f|^q d\mu \right)^{p/q}$$

□

**Bemerkung:** Die Ungleichung lässt sich natürlich auf beliebige endliche Maßräume erweitern. In der englischsprachigen Literatur wird unter der Ljapunov-Ungleichung oft ein Korollar der Hölder-Ungleichung (Log-Konvexität von  $L^p$ ) angegeben, siehe z.B. Problem 3.12 und Problem 3.13 aus Teschl, G. (2024) *Topics in Real Analysis*, p. 83.

**6.15. Satz (Minkowski-Ungleichung):** Für  $p \in [1, \infty)$  gilt

$$\left( \int |f + g|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \left( \int |f|^p d\mu \right)^{1/p} + \left( \int |g|^p d\mu \right)^{1/p}$$



**Beweis:** Der Beweis ist trivial, falls  $\int |f + g|^p d\mu = 0$  oder einer der Summanden auf der rechten Seite unendlich ist. Sei also  $\int |f + g|^p d\mu > 0$  und  $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ . Der Fall  $p = 1$  folgt aus der Dreiecksungleichung für Betrag und Monotonie. Sei also  $p \in (0, \infty)$ . Es gilt  $|f + g|^p = |f + g| \cdot |f + g|^{p-1} \leq |f| \cdot |f + g|^{p-1} + |g| \cdot |f + g|^{p-1}$ . Mit der Monotonie folgt

$$\int |f + g| d\mu \leq \int |f| \cdot |f + g|^{p-1} d\mu + \int |g| \cdot |f + g|^{p-1} d\mu$$

Wende nun die Hölder-Ungleichung mit  $q := p/(p-1)$  an. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int |f + g|^p d\mu &\leq \left( \int |f|^p d\mu \right)^{1/p} \cdot \left( \int |f + g|^{p-1 \cdot \frac{p}{p-1}} d\mu \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\quad + \left( \int |g|^p d\mu \right)^{1/p} \cdot \left( \int |f + g|^{p-1 \cdot \frac{p}{p-1}} d\mu \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &= \left( \int |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{p-1}{p}} \left[ \left( \int |f|^p d\mu \right)^{1/p} + \left( \int |g|^p d\mu \right)^{1/p} \right] \end{aligned}$$

□

**Bemerkung:** Für  $p \in [1, \infty)$  ist die Abbildung

$$\|f\|_p := \left( \int |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

eine Halbnorm auf  $\mathcal{L}^p(\mu)$ . Für den Quotientenraum  $L^p(\mu)$  bezüglich der Äquivalenzrelation  $f \sim g \iff f = g$  a.e. bildet  $\|\cdot\|_p$  eine Norm.

# 7. Unabhängigkeit

In diesem Kapitel sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $X, Y : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$  Zufallsvariablen. Sei außerdem  $I \neq \emptyset$  eine beliebige Indexmenge.

## Unabhängigkeit von Ereignissen und Zufallsvariablen

**7.1. Definition:** Ereignisse  $A_i \in \mathcal{A}_i, i \in I$  sind unabhängig, falls gilt

$$\forall J \subseteq I \text{ mit } |J| < \infty : \mathbb{P} \left( \bigcap_{j \in J} A_j \right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)$$

Kurz  $A_i, i \in I$  u.a.

**7.2. Beispiel:** Paarweise Unabhängigkeit impliziert nicht unbedingt Unabhängigkeit. Betrachte zum Beispiel  $X, Y \in \mathcal{U}\{0, 1\}$  unabhängig diskret-gleichverteilt und setze  $Z := (X + Y) \bmod 2$

**Bemerkung:** Betrachte unabhängige Ereignisse  $A, B$ . Dann sind auch folgende Ereignisse u.a.:

$$A, B^c \quad A^c, B \quad A^c, B^c \quad A, \emptyset \quad A, \Omega \quad \text{etc.}$$

Also ist jedes Ereignis in  $\sigma(\{A\}) = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$  von jedem Ereignis in  $\sigma(\{B\}) = \{\emptyset, \Omega, B, B^c\}$  u.a.

**7.3. Definition:** Familien von Ereignissen  $\mathcal{G}_i \subseteq \mathcal{A}, i \in I$  sind unabhängig, wenn für jede Auswahl von Mengen  $G_i \in \mathcal{G}_i$  die entsprechenden Ereignisse unabhängig sind. Insbesondere folgt damit aus der Unabhängigkeit eines Mengensystems auch die Unabhängigkeit aller größeren Mengensysteme, i.e.

$$\forall i \in I : \mathcal{G}_i, i \in I \text{ u.a. und } \mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{G}_i \implies \mathcal{F}_i, i \in I \text{ u.a.}$$

**7.4. Definition:** Zufallsvariablen  $X_i, i \in I$  sind unabhängig, wenn die  $\sigma$ -Algebren  $\sigma(X_i), i \in I$  unabhängig sind.

**7.5. Proposition:** Seien  $(X_i, \mathcal{X}_i)$  und  $(Y_i, \mathcal{Y}_i)$  messbare Räume und  $X_i : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (X_i, \mathcal{X}_i)$  unabhängige Zufallsvariablen für  $i \in I$ . Seien außerdem  $g_i : (X_i, \mathcal{X}_i) \rightarrow (Y_i, \mathcal{Y}_i)$  messbare Abbildungen für  $i \in I$ . Dann sind auch die Zufallsvariablen  $(g_i \circ X_i) : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (Y_i, \mathcal{Y}_i), i \in I$  unabhängig.

**Beweis:** Für  $i \in I$  gilt

$$\begin{aligned}\sigma(g_i \circ X_i) &= \sigma(\{(g_i \circ X_i)^{-1}(A_i) : A_i \in \mathcal{Y}_i\}) \\ &= \sigma(\{X_i^{-1}(g_i^{-1}(A_i)) : A_i \in \mathcal{Y}_i\}) \\ &\subseteq \sigma(\{X_i^{-1}(B_i) : B_i \in \mathcal{X}_i\})\end{aligned}$$

wobei die letzte Inklusion aus der Messbarkeit von  $g_i$  folgt. Die Aussage folgt aus Definitionen 7.3 und 7.4.  $\square$

**7.6. Proposition:** Betrachte unabhängige Zufallsvariablen  $X, Y : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ , sodass  $X, Y \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ . Dann gilt  $XY \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$  und  $\mathbb{E}[XY] = (\mathbb{E}X) \cdot (\mathbb{E}Y)$ .

**Beweis:**

I.  $X, Y$  Indikatorfunktionen

Seien hier  $X = \mathbb{1}_A, Y = \mathbb{1}_B$  mit  $A, B \in \mathcal{A}$ . Dann gilt  $A = \{X = 1\}, B = \{Y = 1\}$  und  $A, B$  sind unabhängig. Es gilt  $XY = \mathbb{1}_{A \cap B} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$  (einfache Überlegung) und

$$\mathbb{E}[XY] = \int \mathbb{1}_{A \cap B} d\mathbb{P} = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = (\mathbb{E}X) \cdot (\mathbb{E}Y)$$

II.  $X, Y$  einfache Funktionen

Seien  $X = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mathbb{1}_{A_i}, Y = \sum_{j=1}^m \beta_j \cdot \mathbb{1}_{B_j}$  mit  $A_i$  disjunkt und  $\alpha_i$  alle verschieden für  $i = 1, \dots, n$  und  $B_j$  disjunkt und  $\beta_j$  alle verschieden für  $j = 1, \dots, m$ . Dann sind  $A_i = \{X = \alpha_i\}$  und  $B_j = \{Y = \beta_j\}$  u.a. für  $i = 1, \dots, n$  und  $j = 1, \dots, m$ . Außerdem ist  $XY$  wieder einfach und damit  $XY \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$  und es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[XY] &= \int \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j \cdot \mathbb{1}_{A_i} \mathbb{1}_{B_j} d\mathbb{P} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j \cdot \mathbb{P}(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j \cdot \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(B_j) \\ &= \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mathbb{P}(A_i) \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^m \beta_j \cdot \mathbb{P}(B_j) \right) = (\mathbb{E}X) \cdot (\mathbb{E}Y)\end{aligned}$$

III.  $X, Y$  nicht negativ, messbar

Wähle einfache Funktionen  $X_n, Y_n, n \geq 1$ , sodass  $0 \leq X_n \uparrow X$  und  $0 \leq Y_n \uparrow Y$ . Dann gilt auch  $0 \leq X_n Y_n \uparrow XY$ . Für  $X_n, Y_n, n \geq 1$  wie üblich ist  $X_n$  eine messbare Funktion von  $X$  und  $Y_n$  eine messbare Funktion von  $Y$ . Da  $XY \geq 0$ , gilt  $XY \in \mathcal{L}(\mathbb{P})$  und  $\mathbb{E}[XY]$  ist wohldefiniert in  $\overline{\mathbb{R}}$ . Es gilt

$$\mathbb{E}[XY] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n Y_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbb{E}X_n) \cdot (\mathbb{E}Y_n) = (\mathbb{E}X) \cdot (\mathbb{E}Y)$$

und damit  $XY \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ .

IV.  $X, Y$  messbar

Schreibe  $X = X^+ - X^-$  und  $Y = Y^+ - Y^-$ . Mit Proposition sind  $X^-, Y^-$  u.a.,  $X^+, Y^+$  u.a.,  $X^-, Y^+$  u.a. und  $X^+, Y^-$  u.a. Ebenfalls gilt

$$|XY| \leq |X^+Y^+ - X^-Y^+ + X^-Y^- - X^+Y^-| \leq X^+Y^+ + X^-Y^+ + X^-Y^- + X^+Y^-$$

wobei alle Summanden auf der rechten Seite integrierbar sind. Damit gilt  $XY \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[XY] &= \mathbb{E}[X^+Y^+] + \mathbb{E}[X^-Y^-] - \mathbb{E}[X^-Y^+] - \mathbb{E}[X^+Y^-] \\ &= (\mathbb{E}X^+) \cdot (\mathbb{E}Y^+) + (\mathbb{E}X^-) \cdot (\mathbb{E}Y^-) - (\mathbb{E}X^-) \cdot (\mathbb{E}Y^+) - (\mathbb{E}X^+) \cdot (\mathbb{E}Y^-) \\ &= (\mathbb{E}X) \cdot (\mathbb{E}Y) \end{aligned}$$

□

## Borel–Cantelli Lemmata

**7.7. Definition:** Seien  $A_n \subseteq \Omega, n \geq 1$ . Definiere

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{m \geq n} A_m \text{ und } \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{m \geq n} A_m$$

Intuitiv macht diese Definition Sinn, da für  $\limsup \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_M$  gilt, dass  $M = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$  und ähnliches für den  $\liminf$ . Kurz  $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ unendlich oft}\}$  (englisch:  $A_n$  *infinitely often*) und  $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ letztendlich}\}$  (englisch:  $A_n$  *eventually*).

**Bemerkung:** Es gilt

- $\left( \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \right)^c = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n^c$  (De Morgan)
- $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \subseteq \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$
- $A_n$  messbar für  $n \geq 1 \implies \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n, \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$  messbar

**7.8. Lemma (I. Borel–Cantelli Lemma)** Betrachte einen allgemeinen Maßraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ .

Seien  $A_n \in \mathcal{A}, n \geq 1$ , sodass  $\sum_{n \geq 1} \mu(A_n) < \infty$ . Dann folgt  $\mu \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \right) = 0$ .

**Beweis:** Da  $\mu(A_n) \in [0, \infty)$  für alle  $n \geq 1$ , ist die Reihe  $\sum_{n \geq 1} \mu(A_n)$  absolut konvergent.

Ebenfalls gilt

$$\bigcup_{m \geq 1} A_m \supseteq \bigcup_{m \geq 2} A_m \supseteq \dots \supseteq \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{m \geq n} A_m = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$$

und  $\mu\left(\bigcup_{m \geq 1} A_m\right) \leq \sum_{m \geq 1} \mu(A_m) < \infty$ . Mit der Stetigkeit von oben folgt

$$\begin{aligned} \mu\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) &= \mu\left(\bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{m \geq n} A_m\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{m \geq n} A_m\right) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m \geq n} \mu(A_m) = 0 \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung aus der (bedingten) Konvergenz folgt (Cauchy-Folge).  $\square$

**7.9. Lemma (II. Borel–Cantelli Lemma)** Betrachte einen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  und  $A_n \in \mathcal{A}, n \geq 1$  unabhängig, sodass  $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n) = \infty$ . Dann ist  $\mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) = 1$ .

**Beweis:** Beachte die Ungleichung (Beweis z.B. mit Mittelwertsatz oder 1. und 2. Ableitung)

$$1 - x \leq e^{-x} \text{ für alle } x \geq 0$$

Laut Annahme gilt für alle  $N \geq 1$  :  $\sum_{n \geq N} \mathbb{P}(A_n) = \infty$  (einfache Überlegung). Zeige nun

$$\mathbb{P}\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n^c\right) = 0.$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n^c\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{m \geq n} A_m^c\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{m \geq n} \mathbb{P}(A_m^c) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{m \geq n} (1 - \mathbb{P}(A_m)) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{m \geq n} e^{-\mathbb{P}(A_m)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(-\sum_{m \geq n} \mathbb{P}(A_m)\right) = \exp\left(-\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m \geq n} \mathbb{P}(A_m)\right) = 0 \end{aligned}$$

$\square$

**7.10. Korollar:** Seien  $X_n : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ ,  $n \geq 1$  nicht-negative Zufallsvariablen und sei

$$\forall \varepsilon > 0 : \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X_n > \varepsilon) < \infty$$

Dann gilt  $\mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = 0\right)$ .

**Beweis:** Da  $X_n \geq 0$  für  $n \geq 1$  gilt

$$\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = 0 \right\} = \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n = 0 \right\} = \bigcap_{k \geq 1} \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n \leq \frac{1}{k} \right\}$$

Aus der Voraussetzung folgt nun

$$\forall k \geq 1 : \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X_n > k^{-1}) < \infty$$

und mit Lemma 7.8 gilt  $\mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{X_n > k^{-1}\}\right) = 0$ . Es gilt

$$1 = \mathbb{P}\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} \{X_n \leq k^{-1}\}\right) \leq \mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n \leq k^{-1}\right) \leq 1$$

und damit  $\mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n > k^{-1}\right) = 0$  für alle  $k \geq 1$ . Schließlich folgt

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k \geq 1} \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n \leq k^{-1} \right\}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq 1} \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n > k^{-1} \right\}\right) \geq 1 - \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n > k^{-1}\right) = 1$$

□

**7.11. Lemma:** Sei  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}$  ein  $\pi$ -System und  $A \in \mathcal{A}$ . Sind  $\mathcal{M}$  und  $\{A\}$  unabhängig, dann sind auch  $\sigma(\mathcal{M})$  und  $\{A\}$  unabhängig.

**Beweis:** Trivial, falls  $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$ . Sei also  $\mathbb{P}(A) \in (0, 1)$  und zeige  $\forall M \in \sigma(\mathcal{M}) : \mathbb{P}(A \cap M) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(M)$ . Setze dafür

$$\mathbb{P}(\cdot | A) := \frac{\mathbb{P}(\cdot \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$

für  $\mathbb{P}(A) \neq 0$  (laut Annahme erfüllt). Zeige also  $\mathbb{P}(M|A) = \mathbb{P}(M)$  für alle  $M \in \sigma(\mathcal{M})$ .  $\mathbb{P}(\cdot | A)$  ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\Omega, \mathcal{A})$  und es gilt laut Annahme

$$\forall M \in \mathcal{M} : \mathbb{P}(M|A) = \mathbb{P}(M)$$

Mit dem  $\lambda$ - $\pi$ -Theorem folgt, dass  $\mathbb{P}(\cdot | A)$  und  $\mathbb{P}(\cdot)$  auch auf  $\sigma(\mathcal{M})$  übereinstimmen müssen.

□

**7.12. Satz:** Sei für  $i \in I$ ,  $\mathcal{M}_i \subseteq \mathcal{A}$  ein  $\pi$ -System. Dann gilt

$$\mathcal{M}_i, i \in I \text{ u.a.} \iff \sigma(\mathcal{M}_i), i \in I \text{ u.a.}$$

**Beweis:** Die Richtung  $\Leftarrow$  ist trivial. Sei also  $J \subseteq I, J = \{1, \dots, k\}$  endlich und zeige, dass  $\sigma(\mathcal{M}_j), j \in J$  unabhängig sind.

1. Schritt: Wähle  $M_j \in \mathcal{M}_j$  beliebig für  $j = 2, \dots, k$ . Laut Annahme sind  $\mathcal{M}_1$  und  $\{M_2 \cap \dots \cap M_k\}$  unabhängig, sodass mit Lemma 7.11. auch  $\sigma(\mathcal{M}_1)$  und  $\{M_2 \cap \dots \cap M_k\}$  unabhängig sind. Es folgt, dass  $\sigma(\mathcal{M}_1), \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_k$  unabhängig sind.
2. Schritt: Wähle  $M_1 \in \sigma(\mathcal{M}_1)$  und  $M_j \in \mathcal{M}_j, j = 3, \dots, k$ . Wegen dem 1. Schritt sind  $\mathcal{M}_2$  und  $\{M_1 \cap M_3 \cap \dots \cap M_k\}$  unabhängig. Mit Lemma 7.11 folgt, dass  $\sigma(\mathcal{M}_2)$  und  $\{M_1 \cap M_3 \cap \dots \cap M_k\}$  unabhängig sind und damit  $\sigma(\mathcal{M}_2), \sigma(\mathcal{M}_1), \mathcal{M}_3, \dots, \mathcal{M}_k$  unabhängig sind.

Nach  $k - 2$  weiteren Schritten ist die Unabhängigkeit von  $\sigma(\mathcal{M}_1), \dots, \sigma(\mathcal{M}_k)$  bewiesen.  $\square$

**7.13. Korollar:** Seien  $X_i : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})), i \in I$  Zufallsvariablen. Dann sind die  $X_i, i \in I$  genau dann unabhängig, wenn gilt

$$\forall J \subseteq I, |J| < \infty : \forall t_j \in \overline{\mathbb{R}}, j \in J : \mathbb{P}(X_j \leq t_j, j \in J) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(X_j \leq t_j)$$

Falls  $X_i, i \in I$  reelwertig sind, können die  $t_j \in \mathbb{R}$  gewählt werden.

**Beweis:** Die Richtung  $\implies$  ist trivial. Es gilt (cf. Kapitel 3)  $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma(\mathcal{K}) = \sigma(\{[-\infty, t] : t \in \overline{\mathbb{R}}\})$ . Für  $i \in I$  setze  $\mathcal{M}_i := \{X_i^{-1}([-\infty, t]) : t \in \overline{\mathbb{R}}\}$ . Mit Proposition 3.4 gilt  $\sigma(\mathcal{M}_i) = \sigma(X_i)$  für alle  $i \in I$ . Da der Durchschnitt zweier abgeschlossener Intervalle wieder ein abgeschlossenes Intervall ist, ist  $\mathcal{M}_i$  für  $i \in I$  ein  $\pi$ -System. Laut Annahme sind  $\mathcal{M}_i, i \in I$  unabhängig. Mit Satz 7.12 folgt die Unabhängigkeit der  $\sigma(X_i), i \in I$  und damit per Definition die Unabhängigkeit der  $X_i, i \in I$ .  $\square$

**7.14. Proposition:** Seien  $X_i : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{A}'), i \in I$  unabhängige Zufallsvariablen. Für eine Partition  $I = K \cup L$  mit  $K, L \neq \emptyset$  sind auch  $\sigma(X_k, k \in K)$  und  $\sigma(X_\ell, \ell \in L)$  unabhängig.

**Beweis:** Mit Lemma 3.5 gilt

$$\sigma(X_k, k \in K) = \sigma \left( \bigcap_{j \in J} \{X_j \in A'_j\} : J \subseteq K, |J| < \infty, A'_j \in \mathcal{A}' \text{ für } j \in J \right) = \sigma(\mathcal{E}_1)$$

und  $\sigma(X_\ell, \ell \in L) = \sigma(\mathcal{E}_2)$ , wobei  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$   $\pi$ -Systeme sind (einfach nachzuprüfen). Außerdem sind  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$  unabhängig, denn für  $A = \bigcap_{j \in J} \{X_j \in A'_j\} \in \mathcal{E}_1$  für  $J \subseteq K$  endlich und  $B =$

$\bigcap_{m \in M} \{X_m \in A'_m\}$  für  $M \subseteq L$  endlich gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J \cup M} \{X_j \in A'_j\}\right) \stackrel{J \cup M \subseteq I}{=} \prod_{j \in J \cup M} \mathbb{P}(X_j \in A'_j) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} \{X_j \in A'_j\}\right) \cdot \mathbb{P}\left(\bigcap_{m \in M} \{X_m \in A'_m\}\right) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \end{aligned}$$

da  $K, L$  disjunkt sind und damit auch alle endlichen Teilmengen  $J, M$  disjunkt sind. Mit Satz 7.12 folgt nun, dass  $\sigma(\mathcal{E}_1)$  und  $\sigma(\mathcal{E}_2)$  unabhängig sind und damit die Aussage.  $\square$

## Asymptotische $\sigma$ -Algebra

**7.15. Definition:** Seien  $X_n, n \geq 1$  Zufallsvariablen. Setze

$$\mathcal{B}_n := \sigma(X_1, \dots, X_n) \text{ und } \mathcal{T}_n := \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots)$$

Dann gilt  $\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{B}_{n+1}$  und  $\mathcal{T}_n \supseteq \mathcal{T}_{n+1}$  für alle  $n \geq 1$ . Definiere weiters

$$\mathcal{B} := \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{B}_n \text{ und } \mathcal{T}_\infty := \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{T}_n$$

Dann sind  $\sigma(\mathcal{B})$  und  $\mathcal{T}_\infty$   $\sigma$ -Algebren und man nennt  $\mathcal{T}_\infty$  die asymptotische  $\sigma$ -Algebra (englisch *tail  $\sigma$ -algebra*) der  $X_n, n \geq 1$ .

**7.16. Satz (0–1-Gesetz von Kolmogorov):** Betrachte unabhängige Zufallsvariablen  $X_n, n \geq 1$  sowie deren asymptotische  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{T}_\infty$ . Dann gilt  $\forall A \in \mathcal{T}_\infty : \mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$ .

**Beweis:** Mit Lemma 7.14 sind  $\mathcal{B}_n$  und  $\mathcal{T}_n$  unabhängig für alle  $n \geq 1$ . Da  $\mathcal{T}_\infty \subseteq \mathcal{T}_n$  sind  $\mathcal{B}_n$  und  $\mathcal{T}_\infty$  für alle  $n \geq 1$  unabhängig. Damit sind auch  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{T}_\infty$  unabhängig. Da  $\mathcal{B}$  ein  $\pi$ -System ist (leicht nachzuprüfen), folgt mit Satz 7.12, dass  $\sigma(\mathcal{B})$  und  $\mathcal{T}_\infty$  unabhängig sind. Nun ist

$$\mathcal{T}_\infty \subseteq \mathcal{T}_n = \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots) \subseteq \sigma(X_1, X_2, \dots) = \sigma(\mathcal{B})$$

und damit sind  $\mathcal{T}_\infty$  und  $\mathcal{T}_\infty$  unabhängig und

$$\forall A \in \mathcal{T}_\infty : \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap A) = (\mathbb{P}(A))^2$$

und damit  $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$ .  $\square$

**7.17. Beispiel (Ereignisse aus  $\mathcal{T}$ ):** Betrachte unabhängige, rellwertige Zufallsvariablen  $X_n, n \geq 1$ .



- (i)  $\left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n \geq c \right\}, \left\{ \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n \geq c \right\} \in \mathcal{T}_\infty$  für  $c \in \mathbb{R}$ .  
Es gilt

$$\left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n \geq c \right\} = \left\{ \limsup_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \geq N}} X_n \geq c \right\} \in \mathcal{T}_N$$

für alle  $N \geq 1$  und damit  $\left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n \geq c \right\} \in \bigcap_{N \geq 1} \mathcal{T}_N = \mathcal{T}_\infty$ . Ähnliches gilt für den  $\liminf$ .

- (ii)  $\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} X_n \in \mathbb{R} \right\} \in \mathcal{T}_\infty$  folgt aus Proposition 3.18.

- (iii)  $\left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_n > c \right\}, \left\{ \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_n > c \right\} \in \mathcal{T}_\infty$

Sei  $\omega \in \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_n > c \right\}$ . Dann gibt es eine Teilfolge  $n'$ , sodass

$$\lim_{n' \rightarrow \infty} \frac{1}{n'} \sum_{i=1}^{n'} X_i(\omega) > c$$

Aber  $\forall N \geq 1$  gilt

$$\frac{1}{n'} \sum_{i=1}^{n'} X_i(\omega) = \frac{1}{n'} \sum_{\substack{i=1 \\ i \leq N}}^{n'} X_i(\omega) + \frac{1}{n'} \sum_{\substack{i=1 \\ i > N}}^{n'} X_i(\omega)$$

wobei der erste Summand für  $n' \rightarrow \infty$  gegen 0 konvergiert (einfache Überlegung).  
Damit gilt

$$\lim_{n' \rightarrow \infty} \frac{1}{n'} \sum_{\substack{i=1 \\ i > N}}^{n'} X_i(\omega) = c' > c$$

für alle  $N \geq 1$  und es folgt

$$\omega \in \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\substack{i=1 \\ i > N}}^n X_n > c \right\} \in \mathcal{T}_N$$

für alle  $N \geq 1$ . Ähnliches gilt für den  $\liminf$ .

- (iv)  $\left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_n \text{ konvergiert in } \overline{\mathbb{R}} \right\} \in \mathcal{T}_\infty$  folgt ebenfalls aus Proposition 3.18.