Wahrscheinlichkeitstheorie 1

Cornelius Hanel

February 6, 2025

Preface

Fehler oder Ergänzungen bitte an

`corneliush99@univie.ac.at`

oder auf GitHub.

Contents

1. Messbare Räume und Maße

Algebra, σ-Algebra und Maß

Sei im folgenden Kapitel Ω jeweils eine nicht-leere Menge. Die Komplementbildung erfolgt jeweils bezüglich Ω, also $A^c = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$.

1.1. Definition: Eine Familie von Teilmengen $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ist eine Algebra (Englisch *field of sets*), wenn folgendes gilt:

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$

(ii) $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$ (Abgeschlossenheit bzgl. Komplementbildung)

(iii) $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}$ (Abgeschlossenheit bzgl. endlichen Vereinigungen)

Bemerkung: (iii) ist äquivalent zu $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cap B \in \mathcal{A}$ (Abgeschlossenheit bzgl. endlichen Durchschnitten).

1.2. Definition: Eine Familie von Teilmengen $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ist eine σ-Algebra (Englisch auch σ-*field*), wenn folgendes gilt:

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$

(ii) $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$ (Abgeschlossenheit bzgl. Komplementbildung)

(iii) $A_n \in \mathcal{A}, n \geqslant 1 \implies \bigcup_{n\geqslant 1} A_n \in \mathcal{A}$ (Abgeschlossenheit bzgl. abzählbaren Vereinigungen)

Bemerkung: (iii) ist äquivalent zu $A_n \in \mathcal{A}, n \geqslant 1 \implies \bigcap_{n\geqslant 1} A_n \in \mathcal{A}$ (Abgeschlossenheit bzgl. abzählbaren Durchschnitten).

1.3. Definition: Ein messbarer Raum ist ein Paar $(\Omega, \mathcal{A})$, wobei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω. Eine Menge $A \in \mathcal{A}$ heißt messbar.

1.4. Beispiel:

- $\mathcal{A} := \{\emptyset, \Omega\}$ ist die kleinste (triviale) σ-Algebra auf Ω.
- $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega)$ ist die größte σ-Algebra auf Ω.
- $\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{P}(\Omega) : A \text{ oder } A^c \text{ endlich}\}$ ist eine σ-Algebra falls Ω endlich ist, aber nur eine Algebra falls Ω unendlich ist. Sei $\{\omega_1, \omega_2, \ldots\} \subseteq \Omega$ mit $\omega_i \neq \omega_j$ für $i \neq j$. Definiere $A_i := \{\omega_{2i}\}$ für alle $i \geqslant 1$. Dann gilt $A_i \in \mathcal{A}$ für alle $i \geqslant 1$, aber $\bigcup_{i \geqslant 1} A_i = \{\omega_2, \omega_4, \ldots\}$ und $\left(\bigcup_{i \geqslant 1} A_i\right)^c = \{\omega_1, \omega_3, \ldots\}$ sind beide unendlich und damit nicht in $\mathcal{A}$.

1.5. Definition: Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ ist eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, sodass

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) Für $A_n \in \mathcal{A}, n \geqslant 1$ paarwise disjunkt gilt (σ-Additivität)

$$\mu\left(\bigcup_{n \geqslant 1} A_n\right) = \sum_{n \geqslant 1} \mu(A_n)$$

Ein Maß $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ist σ-endlich, falls es $A_n \in \mathcal{A}, n \geqslant 1$ gibt, sodass $\Omega = \bigcup\limits_{n \geqslant 1} A_n$ und $\mu(A_n) < \infty$ für alle $n \geqslant 1$. Ein Maß $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ist endlich, falls $\mu(\Omega) < \infty$ (damit folgt $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty)$). Ein Warhscheinlichkeitsmaß ist eine Abbildung $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$ mit $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

1.6. Definition: Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Dann nennt man $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ einen Maßraum. Falls $\mu = \mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, nennt man $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ einen Wahrscheinlichkeitsraum.

Eigenschaften von Maßen

1.7. Satz: Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Dann gilt

(i) Für $A_i \in \mathcal{A}, 1 \leqslant i \leqslant n$ paarweise disjunkt gilt (endliche Additivität)

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

(ii) Für $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subseteq B$ gilt $\mu(A) \leqslant \mu(B)$ (Monotonie).

(iii) Für $A_n \in A, n \geqslant 1$ gilt (σ-Subadditivität)

$$\mu\left(\bigcup_{n \geqslant 1} A_n\right) \leqslant \sum_{n \geqslant 1} \mu(A_n)$$

(iv) Falls μ endlich ist gilt für $A, B \in \mathcal{A}$, dass $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$ (Einschluss-Ausschluss-Prinzip)

Beweis:

(i) Setze $A_i := \emptyset \in \mathcal{A}$ für $i > n$. Damit folgt die Aussage aus der σ-Additivität.

(ii) Schreibe $B = (B \setminus A) \cup A$ als Vereinigung disjunkter Mengen. Damit folgt mit (i), dass $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geqslant \mu(A)$.

(iii) Setze hier $B_1 := A_1$ und $B_k := A_k \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} A_j\right)$ für $k \geqslant 2$. Dann gilt $B_k \in \mathcal{A}$ für alle $k \geqslant 1$, B_k sind paarweise disjunkt, $\bigcup_{k\geqslant 1} B_k = \bigcup_{n\geqslant 1} A_n$ und $B_k \subseteq A_k$ für alle $k \geqslant 1$. Es folgt mit (ii)

$$\mu\left(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{k\geqslant 1} B_k\right) = \sum_{k\geqslant 1} \mu(B_k) \leqslant \sum_{m\geqslant 1} \mu(A_n)$$

(iv) Schreibe $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$. Dann gilt mit (i)

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B) &= \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A) \\ &= \mu(A) + \mu(B \setminus A) \\ &= \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) \end{aligned}$$

□

Bemerkung: In der Literatur ist das Einschluss-Ausschluss-Prinzip meist in der allgemeineren Form für endliche Vereinigungen $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_n\right)$ zu finden.

1.8. Korollar: Für $A, B \in /A$ mit $A \subseteq B$ und $\mu(B) < \infty$ gilt $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$. Damit folgt für endliche Maße $\mu(A^c) = \mu(\Omega) - \mu(A)$ und insbesondere für Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Beweis: Folgt sofort aus Satz 1.7 (i) mit $B = A \cup (B \setminus A)$. □

1.9. Satz (Stetigkeit von unten/oben): Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $A_n \in \mathcal{A}, n \geqslant 1$.

(i) Falls $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq \bigcup_{n\geqslant 1} A_n$, dann gilt $\mu(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu\left(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n\right)$ (Stetigkeit von unten).

(ii) Falls $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \supseteq \bigcap_{n\geqslant 1} A_n$ und $\mu(A_1) < \infty$, dann gilt $\mu(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu\left(\bigcap_{n\geqslant 1} A_n\right)$ (Stetigkeit von oben).

In (ii) genügt es $\mu(A_j) < \infty$ für ein $j \geqslant 1$ vorauszusetzen, also $\limsup_{n\to\infty} \mu(A_n) < \infty$ (Monotonie).

Beweis:

(i) Setze $B_1 := A_1$ und $B_k := A_k \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} A_j\right)$. Damit ist B_k für alle $k \geqslant 1$ messbar und B_k sind paarweise disjunkt. Weiters gilt $A_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$, $B_n \subseteq A_n$ und $\bigcup_{n\geqslant 1} A_n = \bigcup_{k\geqslant 1} B_k$ (leicht nachzuprüfen). Es folgt

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{k\geqslant 1} B_k\right) \\
&= \sum_{k\geqslant 1} \mu(B_k) \\
&= \lim_{K\to\infty} \sum_{k=1}^{K} \mu(B_k) \\
&= \lim_{K\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{K} B_k\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \mu(A_N)
\end{aligned}$$

(ii) Setze $B_k := A_1 \setminus A_k$. Dann gilt $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \ldots \subseteq \bigcup_{k\geqslant 1} B_k = A_1 \setminus \left(\bigcap_{n\geqslant 1} A_n\right)$. Mit (i) folgt

$$\mu(B_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \mu\left(A_1 \setminus \left(\bigcap_{n\geqslant 1} A_n\right)\right)$$

Es gilt $A_n \subseteq A_1$, $\bigcap_{n\geqslant 1} A_n \subseteq A_1$ und damit $\mu\left(\bigcap_{n\geqslant 1} A_n\right) < \infty$. Es folgt

$$\lim_{k\to\infty} \mu(B_k) = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcap_{n\geqslant 1} A_n\right)$$

und damit die Aussage. □

1.10. Definition: Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Falls für $\omega \in \Omega$ $\{\omega\} \in \mathcal{A}$ und $\mu(\{\omega\}) > 0$ gilt, dann nennt man ω ein Atom von μ (bezüglich dem Maßraum).

1.11. Proposition: Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum. Dann ist die Menge der Atome $A := \{\omega \in \Omega : \{\omega\} \in \mathcal{A}, \mu(\{\omega\}) > 0\}$ höchstens abzählbar.

Beweis: Schreibe

$$A = \bigcup_{n\geqslant 1} \left\{\omega \in \Omega : \{\omega\} \in \mathcal{A}, \mu(\{\omega\}) > \frac{1}{n}\right\}$$

Es genügt zu zeigen, dass jedes Element der Vereinigung höchstens abzählbar ist (abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen ist abzählbar [benötigt das Auswahlaxiom]). Sei also $A_n :=$

$\{\omega \in \Omega : \{\omega\} \in \mathcal{A}, \mu(\{\omega\}) > \frac{1}{n}\}$. Wähle außerdem $B_n \in \mathcal{A}, n \geqslant 1$, sodass $\bigcup_{n \geqslant 1} B_n = \Omega$ und $\mu(B_n) < \infty$ (σ-Endlichkeit). Dann gilt

$$A_n = \bigcup_{k \geqslant 1} (B_k \cap A_n)$$

Es genügt also zu zeigen, dass $A_n \cap B_k$ für alle $k, n \geqslant 1$ höchstens abzählbar ist. Wir zeigen sogar, dass $A_n \cap B_k$ für alle $k, n \geqslant 1$ endlich ist:
Angenommen $A_n \cap B_k$ ist abzählbar unendlich und schreibe $A_n \cap B_k = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ mit $\omega_i \neq \omega_j$ für $i \neq j$. Damit folgt

$$\mu(A_n \cap B_k) = \mu\left(\bigcup_{j \geqslant 1} \{\omega_j\}\right) = \sum_{j \geqslant 1} \mu(\{\omega_j\}) = \infty$$

Aber $\mu(A_n \cap B_k) \leqslant \mu(B_k) < \infty$ für alle $n, k \geqslant 1$, ein Widerspruch. Es verbleibt noch zu zeigen, dass $A_n \cap B_k$ nicht überabzählbar sein kann (einfache Überlegung). $\square$

Erzeugung von σ-Algebren

1.12. Lemma: Sei I eine beliebige Indexmenge. Sei $\mathcal{A}_i$ für jedes $i \in I$ eine σ-Algebra auf Ω. Dann ist $\mathcal{A} := \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ wieder eine σ-Algebra auf Ω.

Beweis: Es gilt drei Eigenschaften zu zeigen:

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$
Es gilt laut Annahme $\Omega \in \mathcal{A}_i$ für alle $i \in I$, womit die Behauptung sofort folgt.

(ii) $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$
$A \in \mathcal{A} \iff \forall i \in I : A \in \mathcal{A}_i \implies \forall i \in I : A^c \in \mathcal{A}_i \iff A^c \in \mathcal{A}$

(iii) $A_n \in \mathcal{A}, n \geqslant 1 \implies \bigcup_{n \geqslant 1} A_n \in \mathcal{A}$
wie (ii). $\square$

1.13. Definition: Sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Dann definiert man die von $\mathcal{M}$ erzeute σ-Algebra als

$$\sigma(\mathcal{M}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{A}\ \sigma\text{-Algebra} \\ \mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}}} \mathcal{A}$$

Mit Lemma 1.12 folgt sofort, dass $\sigma(\mathcal{M})$ eine σ-Algebra bezüglich Ω ist. Weiters ist $\sigma(\mathcal{M})$ die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{M}$ enthält (i.e. ist $\mathcal{E}$ eine σ-Algebra mit $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{E}$, dann folgt $\sigma(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{E}$).

1.14. Lemma: Sei $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Dann folgt $\sigma(\mathcal{M}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{M}_2)$.

Beweis: $\sigma(\mathcal{M}_2)$ ist eine σ-Algebra, die $\mathcal{M}_2$ enthält, und damit auch $\mathcal{M}_1$. Mit der Bemerkung in Definition 1.13 folgt die Aussage. $\square$

1.14.$\frac{1}{2}$. Definition: Sei $K \subseteq \Omega$ und $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Dann definiert man die Spur (Englisch *trace*) von $\mathcal{M}$ auf K als

$$\mathcal{M}\big|_K := \{M \cap K : M \in \mathcal{M}\}$$

1.15. Proposition: Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω und $K \subseteq \Omega$. Dann ist $\mathcal{A}\big|_K$ eine σ-Algebra auf K. Man nennt $\mathcal{A}\big|_K$ die Spur-σ-Algebra von $\mathcal{A}$ auf K.

Beweis: Es gilt drei Eigenschaften zu zeigen:

(i) $K \in \mathcal{A}\big|_K$
Es gilt $\Omega \in \mathcal{A}$ und damit $K = K \cap \Omega \in \mathcal{A}\big|_K$.

(ii) $A \in \mathcal{A}\big|_K \implies K \setminus A \in \mathcal{A}\big|_K$
$A \in \mathcal{A}\big|_K \implies A = K \cap B, B \in \mathcal{A}$. Nun gilt aber

$$\begin{aligned} K \setminus A &= (K \setminus A) \cap K = (K \setminus (K \cap B)) \cap K \\ &= (K \cap (K \cap B)^c) \cap K \\ &= (K \setminus B) \cup (K \cap K^c) \\ &= K \cap B^c \in \mathcal{A}\big|_K \end{aligned}$$

da $B^c \in \mathcal{A}$.

(iii) $A_n \in \mathcal{A}\big|_K, n \geqslant 1 \implies \bigcup_{n\geqslant 1} A_n \in \mathcal{A}\big|_K$
Es gilt $A_n = B_n \cap K$ für $B_n \in \mathcal{A}, n \geqslant 1$ und damit

$$\bigcup_{n\geqslant 1} A_n = \bigcup_{n\geqslant 1}(B_n \cap K) = K \cap \bigcup_{n\geqslant 1} B_n \in \mathcal{A}\big|_K$$

da $\bigcup_{n\geqslant 1} B_n \in \mathcal{A}$. $\square$

1.16. Lemma: Sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ und $K \subseteq \Omega$. Dann gilt

$$\sigma(\mathcal{M}\big|_K) = \sigma(\mathcal{M})\big|_K$$

Beweis: Wir verwenden hier einige Ergebnisse aus der Übung, z.B. $K \subseteq L \implies \mathcal{M}\big|_K \subseteq \mathcal{M}\big|_L$, $\mathcal{M} \subseteq \sigma(\mathcal{M})$ und $\mathcal{A}$ σ-Algebra $\implies \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$

I. $\underline{\sigma(\mathcal{M}\big|_K) \subseteq \sigma(\mathcal{M})\big|_K}$
Es gilt $\mathcal{M} \subseteq \sigma(\mathcal{M})$ und damit $\mathcal{M}\big|_K \subseteq \sigma(\mathcal{M})\big|_K$. Damit folgt

$$\sigma(\mathcal{M}\big|_K) \subseteq \sigma\left(\sigma(\mathcal{M})\big|_K\right) = \sigma(\mathcal{M})\big|_K$$

da $\sigma(\mathcal{M})\big|_K$ mit Proposition 1.15 eine σ-Algebra ist.

II. $\underline{\sigma(\mathcal{M}\big|_K) \supseteq \sigma(\mathcal{M})\big|_K}$
Definiere hierfür

$$\mathcal{G} := \{A \in \sigma(\mathcal{M}) : A \cap K \in \sigma(\mathcal{M}\big|_K)\} \subseteq \sigma(\mathcal{M})$$

Falls $\mathcal{G}$ eine σ-Algebra ist, die $\mathcal{M}$ enthält, dann folgt $\sigma(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{G}$ und damit $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{M})$. Daraus folgt schließlich

$$\forall A \in \sigma(\mathcal{M}) : A \cap K \in \sigma(\mathcal{M}\big|_K)$$

und damit $\sigma(\mathcal{M})\big|_K \subseteq \sigma(\mathcal{M}\big|_K)$.

III. $\underline{\mathcal{G} \text{ ist eine } \sigma\text{-Algebra und } \mathcal{M} \subseteq \mathcal{G}}$
$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{G}$ folgt sofort aus $\mathcal{M} \subseteq \sigma(\mathcal{M})$ und $\mathcal{M}\big|_K \subseteq \sigma(\mathcal{M}\big|_K)$. Zeige also, dass $\mathcal{G}$ eine σ-Algebra ist.

(i) $\Omega \in \sigma(\mathcal{M})$ und $\Omega \cap K = K \in \sigma(\mathcal{M}\big|_K)$.

(ii) $A \in \mathcal{G} \iff A \in \sigma(\mathcal{M}) \wedge A \cap K \in \sigma(\mathcal{M}\big|_K)$
$\implies A^c \in \sigma(\mathcal{M}) \wedge K \setminus (A \cap K) = K \cap A^c \in \sigma(\mathcal{M}\big|_K)$

(iii) $A_n \in \mathcal{G}, n \geqslant 1 \iff \forall n \geqslant 1 : A_n \in \sigma(\mathcal{M}) \wedge A_n \cap K \in \sigma(\mathcal{M}\big|_K)$
$\implies \bigcup_{n\geqslant 1} A_n \in \sigma(\mathcal{M}) \wedge \bigcup_{n\geqslant 1}(A_n \cap K) = K \cap \bigcup_{n\geqslant 1} A_n \in \sigma(\mathcal{M}\big|_K)$ $\square$

2. Äußere und Innere Maße

λ- und π-Systeme

2.1. Definition: Eine Mengenfamilie $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ist ein λ-System (auch Dynkin-System oder d-System), wenn gilt

(i) $\Omega \in \mathcal{D}$

(ii) $A, B \in \mathcal{D}, A \subseteq B \implies B \setminus A \in \mathcal{D}$

(iii) $\forall n \geqslant 1 : A_n \in \mathcal{D}, A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \implies \bigcup_{n \geqslant 1} A_n \in \mathcal{D}$

2.2. Lemma: Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und seien μ, ν endliche Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$, sodass $\mu(\Omega) = \nu(\Omega)$. Dann ist

$$\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = \nu(A)\}$$

ein λ-System.

Beweis:

(i) Laut Voraussetzung gilt $\mu(\Omega) = \nu(\Omega)$.

(ii) Seien $A, B \in \mathcal{D}$. Dann gilt $\mu(A) = \nu(A)$ und $\mu(B) = \nu(B)$ und es folgt

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A) = \nu(B) - \nu(A) = \nu(B \setminus A)$$

(iii) Seien $A_n \in \mathcal{D}, n \geqslant 1$ und $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$. Dann gilt $\mu(A_n) = \nu(A_n)$ für alle $n \geqslant 1$. Mit der Stetigkeit von unten folgt

$$\mu\left(\bigcup_{n \geqslant 1} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = \lim_{n \to \infty} \nu(A_n) = \nu\left(\bigcup_{n \geqslant 1} A_n\right)$$

$\square$

2.3. Definition: Eine durchschnittsstabile Mengenfamilie $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ nennt man π-System.

Bemerkung: Jede σ-Algebra ist damit sowohl ein λ-System, als auch ein π-System.

2.4. Lemma: Sei $\mathcal{M}$ sowohl ein λ-System, als auch ein π-System. Dann ist $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra.

Beweis: Die ersten beiden Eigenschaften einer σ-Algebra folgen sofort. Mit de Morgan folgt außerdem die Abgeschlossenheit bezüglich endlicher Vereinigungen. Seien also $A_n \in \mathcal{M}, n \geqslant 1$. Setze $B_N := \bigcup_{n=1}^{N} A_n \in \mathcal{M}$ für alle $N \geqslant 1$. Dann gilt $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \ldots$ und damit $\bigcup_{N \geqslant 1} B_N = \bigcup_{n \geqslant 1} A_n \in \mathcal{M}$. □

2.5. Definition: Für $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ definiere das von $\mathcal{M}$ erzeugte λ-System als

$$\lambda(\mathcal{M}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{D}\ \lambda\text{-System} \\ \mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}}} \mathcal{D}$$

$\lambda(\mathcal{M})$ ist wohldefiniert, da z.B. $\mathcal{P}(\Omega)$ oder $\sigma(\mathcal{M})$ λ-Systeme sind, die $\mathcal{M}$ enthalten.

2.6. Proposition: $\lambda(\mathcal{M})$ ist das kleinste λ-System auf Ω, das $\mathcal{M}$ enthält.

Beweis: Da der Durchschnitt beliebig vieler λ-Systeme wieder ein λ-System ist, ist $\lambda(\mathcal{M})$ ein λ-System. Sei $\mathcal{D}$ ein λ-System, das $\mathcal{M}$ enthält. Dann gilt $\lambda(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{D}$. □

2.7. Satz (Sierpiński–Dynkin's λ–π Theorem): Ist $\mathcal{M}$ ein π-System, dann gilt

$$\lambda(\mathcal{M}) = \sigma(\mathcal{M})$$

Beweis: Die Inklusion $\lambda(\mathcal{M}) \subseteq \sigma(\mathcal{M})$ folgt sofort aus der Bemerkung zu Definition 2.3. Es verbleibt also die Inklusion $\sigma(\mathcal{M}) \subseteq \lambda(\mathcal{M})$ zu zeigen. Dazu genügt es zu zeige, dass $\lambda(\mathcal{M})$ ein π-System ist.

I. Definiere $\mathcal{D}_1 := \{A \in \lambda(\mathcal{M}) : \forall M \in \mathcal{M} : A \cap M \in \lambda(\mathcal{M})\}$. Dann gilt $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}_1$ (leicht nachzuprüfen) und per Konstruktion $\mathcal{D}_1 \subseteq \lambda(\mathcal{M})$. Falls $\mathcal{D}_1$ ein λ-System ist (Beweis Übung), gilt $\lambda(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{D}_1$ und somit $\mathcal{D}_1 = \lambda(\mathcal{M})$.

II. Definiere $\mathcal{D}_2 := \{A \in \lambda(\mathcal{M}) : \forall B \in \lambda(\mathcal{M}) : A \cap B \in \lambda(\mathcal{M})\}$. Es gilt $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D}_2$ und $\mathcal{D}_2 \subseteq \lambda(\mathcal{M})$. Falls $\mathcal{D}_2$ ein λ-System ist (Beweis Übung), gilt $\lambda(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{D}_2$ und damit $\mathcal{D}_2 = \lambda(\mathcal{M})$.

Damit folgt, dass $\lambda(\mathcal{M})$ durchschnittsstabil ist. □

2.8. Korollar: Seien μ und ν endliche Maße auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$, die auf einem π-System $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}$ übereinstimmen (i.e. $\forall M \in \mathcal{M} : \mu(M) = \nu(M)$). Falls $\mu(\Omega) = \nu(\Omega)$, dann stimmen μ und ν auch auf $\sigma(\mathcal{M})$ überein.

Beweis: Sei $\mathcal{D}$ wie in Lemma 2.2. Dann gilt $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}$ und mit Proposition 2.6 folgt $\lambda(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{D}$. Mit Satz 2.7 folgt schließlich $\lambda(\mathcal{M}) = \sigma(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{D}$. □

2.9. Korollar: Seien μ und ν Maße auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$, die auf einem π-System $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}$ übereinstimmen und sei μ σ-endlich auf $\mathcal{M}$. Dann stimmen μ und ν auch auf $\sigma(\mathcal{M})$ überein.

Beweis: Trivial, falls $\mu(\Omega) = 0$. Sei also $\mu(\Omega) > 0$. Mit der σ-Endlichkeit von μ auf $\mathcal{M}$, gibt es $A_n \in \mathcal{M}$, sodass $\mu(A_n)$ für n hinreichend groß ($\exists N \geqslant 1, \forall n \geqslant N$, etc.). Sei o.B.d.A. $\mu(A_n) > 0$ für alle $n \geqslant 1$ und definiere

$$\mu_n(\cdot) := \frac{\mu(A_n \cap \cdot)}{\mu(A_n)} \text{ und } \nu_n(\cdot) := \frac{\nu(A_n \cap \cdot)}{\nu(A_n)}$$

Dann sind μ_n und ν_n endliche Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$ und laut Voraussetzung stimmen μ_n und ν_n auf $\mathcal{M}$ überein, da $A_n \cap M \in \mathcal{M}$ für alle $M \in \mathcal{M}$. Außerdem gilt $\mu_n(\Omega) = \nu_n(\Omega) = 1$. Mit Korollar 2.8 folgt, dass μ_n und ν_n auch auf $\sigma(\mathcal{M})$ übereinstimmen. Nun gilt für $A \in \sigma(\mathcal{M})$

$$\begin{aligned}
\mu(A) &= \mu\left(A \cap \bigcup_{n \geqslant 1} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n \geqslant 1} (A_n \cap A)\right) \\
&= \lim_{n \to \infty} \mu(A_n \cap A) = \lim_{n \to \infty} \mu_n(A) \cdot \mu(A_n) \\
&= \lim_{n \to \infty} \nu_n(A) \cdot \nu(A_n) = \nu(A)
\end{aligned}$$

□

Prämaße und äußere Maße

2.10. Definition: Sei $\mathcal{A}_0$ eine Algebra auf Ω. Ein Prämaß auf $(\Omega, \mathcal{A}_0)$ ist eine Abbildung $\mu : \mathcal{A}_0 \to [0, \infty]$ mit

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) Für $A_i \in \mathcal{A}_0, i \geqslant 1$ disjunkt mit $\bigcup_{i \geqslant 1} A_i \in \mathcal{A}_0$ gilt $\mu\left(\bigcup_{i \geqslant 1} A_i\right) = \sum_{i \geqslant 1} \mu(A_i)$

2.11. Definition: Sei μ ein Prämaß auf $(\Omega, \mathcal{A}_0)$. Das entsprechende äußere Maß ist die Abbildung $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ mit

$$\mu^*(A) := \inf_{\substack{A_i \in \mathcal{A}_0, i \geqslant 1 \\ A \subseteq \bigcup_{i \geqslant 1} A_i}} \sum_{i \geqslant 1} \mu(A_i)$$

Bemerkung: μ^* ist wohldefiniert, da $\Omega, \emptyset \in \mathcal{A}_0$ und der inf damit von unten durch 0 beschränkt ist.

2.12. Definition: Sei μ ein Prämaß auf $(\Omega, \mathcal{A}_0)$ und μ^* das entsprechende äußere Maß. Eine Menge $A \subseteq \Omega$ ist von außen messbar (bzgl. μ^*), falls

$$\forall M \in \mathcal{P}(\Omega) : \mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \cap A^c) = \mu^*(M)$$

Sei außerdem $\mathcal{A}^*$ die Familie der von außen messbaren Mengen.

Betrachte im Folgenden jeweils ein Prämaß μ auf $(\Omega, \mathcal{A}_0)$, das entsprechende äußere Maß μ^* und die von außen messbaren Mengen $\mathcal{A}^*$.

2.13. Lemma:

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$

(ii) $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) : \mu^*(A) \geqslant 0$

(iii) $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega), A \subseteq B : \mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$

Beweis:

(i) $\mu^*(\emptyset) = \sum_{i \geqslant 1} \mu(\emptyset) = 0$, da $\emptyset \in \mathcal{A}_0$. Insbesondere ist $\emptyset$ von außen messbar (einfach zu prüfen).

(ii) siehe Bemerkung zu Definition 2.11.

(iii) Zeige hierzu die σ-Subadditivität, also

$$\mu^*\left(\bigcup_{n \geqslant 1} A_n\right) \leqslant \sum_{n \geqslant 1} \mu^*(A_n)$$

für alle $A_n \in \mathcal{P}(\Omega), n \geq 1$. Sei dazu $\varepsilon > 0$ und wähle $B_{n,i} \in \mathcal{A}_0, i \geqslant 1$, sodass $A_n \subseteq \bigcup_{i \geqslant 1} B_{n,i}$. Dann gilt

$$\bigcup_{n \geqslant 1} A_n \subseteq \bigcup_{n \geqslant 1} \bigcup_{i \geqslant 1} B_{n,i} \text{ und } \sum_{i \geqslant 1} \mu(B_{n,i}) \leqslant \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Hinweis: $a \leqslant \left(\inf_{a \in A} a\right) + \varepsilon$ für alle $a \in A$ und $\varepsilon > 0$. Es folgt

$$\mu^*\left(\bigcup_{n \geqslant 1} A_n\right) \leqslant \sum_{n \geqslant 1} \sum_{i \geqslant 1} \mu(B_{n,i}) \leqslant \sum_{n \geqslant 1} \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon + \sum_{n \geqslant 1} \mu^*(A_n)$$

Die σ-Subadditivität (und damit die Monotonie) folgt für $\varepsilon \searrow 0$. $\square$

2.14. Korollar: μ^* ist damit auch endlich subadditiv, also

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega) : \mu^*(A \cup B) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

Insbesondere ist eine Menge $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ genau dann von außen messbar, wenn

$$\forall M \in \mathcal{P}(\Omega) : \mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \cap A^c) \leqslant \mu^*(M)$$

2.15. Lemma: A^* ist eine Algebra.

Beweis:

(i) $\Omega \in \mathcal{A}^*$: folgt ähnlich wie der Beweis von Lemma 2.13 (i) oder aus (ii) unten.

(ii) $A \in \mathcal{A}^* \implies A^c \in \mathcal{A}^*$: trivial.

(iii) $A, B \in \mathcal{A}^* \implies A \cap B \in \mathcal{A}^*$: Es gilt $\forall M \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\mu^*(M) &= \mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \cap A^c) \\
&= \mu^*(M \cap A \cap B) + \mu^*(M \cap A^c \cap B) + \mu^*(M \cap A \cap B^c) + \mu^*(M \cap A^c \cap B^c) \\
&= \mu^*(M \cap A \cap B) + \mu^*\left((M \cap A \cap B^c) \cup (M \cap A^c \cap B^c) \cup (M \cap A^c \cap B)\right) \\
&= \mu^*(M \cap A \cap B) + \mu^*\left((M \cap A^c) \cup (M \cap A \cap B^c)\right) \\
&= \mu^*(M \cap (A \cap B)) + \mu^*(M \cap (A \cap B)^c)
\end{aligned}$$

Die Aussage folgt mit Korollar 2.14. □

2.16. Lemma: Seien $A_i, \in \mathcal{A}^*, i \geqslant 1$ disjunkt. Dann gilt für alle $M \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$\mu^*\left(M \cap \bigcup_{i \geqslant 1} A_i\right) = \sum_{i \geqslant 1} \mu^*(M \cap A_i)$$

Beweis: Sei $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und sei $A_n = \emptyset$ für alle $n > N$. Induktion in N.

- $N = 1$: trivial
- $N = 2$: Hier gilt

$$\begin{aligned}
\mu^*(M \cap (A_1 \cup A_2)) &= \mu^*(M \cap (A_1 \cup A_2) \cap A_1) + \mu^*(M \cap (A_1 \cup A_2) \cap A_1^c) \\
&= \mu^*(M \cap A_1) + \mu^*(M \cap A_2)
\end{aligned}$$

da $A_1 \in \mathcal{A}^*$.

- $P(N) \implies P(N+1)$: Da $\mathcal{A}^*$ eine Algebra ist, gilt $\bigcup_{i=1}^{N} A_i \in \mathcal{A}^*$ und damit

$$\begin{aligned}
\mu^*\left(M \cap \bigcup_{i=1}^{N+1} A_i\right) &= \mu^*\left(M \cap \left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i \cup A_{N+1}\right)\right) \\
&= \mu^*\left(M \cap \bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) + \mu^*(M \cap A_{N+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \mu^*(M \cap A_i) + \mu^*(M \cap A_{N+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{N+1} \mu^*(M \cap A_i)
\end{aligned}$$

- $N = \infty$: Mit der σ-Subadditivität gilt

$$\mu^*\left(M \cap \bigcup_{i \geqslant 1} A_i\right) = \mu^*\left(\bigcup_{i \geqslant 1}(M \cap A_i)\right) \leqslant \sum_{i \geqslant 1} \mu^*(M \cap A_i)$$

Aber für alle $m \geqslant 1$ gilt mit der Monotonie

$$\begin{aligned} \mu^*\left(M \cap \bigcup_{i \geqslant 1} A_i\right) &\geqslant \mu^*\left(M \cap \bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \mu^*(M \cap A_i) \end{aligned}$$

und die Aussage folgt für $m \to \infty$. □

2.17. Lemma: $\mathcal{A}^*$ ist eine σ-Algebra.

Beweis: Mit Lemma 2.15 genügt es die Abgeschlossenheit bzgl. abzählbarer Durchschnitte zu zeigen. Seien dazu zunächst $A_i \in \mathcal{A}^*, i \geqslant 1$ disjunkt. Setze $B_n := \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ und $B := \bigcup_{i \geqslant 1} A_i$. Dann gilt für $M \in \mathcal{P}(\Omega)$ und alle $n \geqslant 1$

$$\begin{aligned} \mu^*(M) &= \mu^*(M \cap B_n) + \mu^*(M \cap B_n^c) \\ &= \mu^*\left(M \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mu^*\left(M \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mu^*(M \cap A_i) + \mu^*\left(M \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c\right) \\ &\geqslant \sum_{i=1}^{n} \mu^*(M \cap A_i) + \mu^*\left(M \cap \left(\bigcup_{i \geqslant 1} A_i\right)^c\right) \end{aligned}$$

da $B_n \in \mathcal{A}^*$ (Algebra). Für $n \to \infty$ folgt

$$\begin{aligned} \mu^*(M) &\geqslant \sum_{i \geqslant 1} \mu^*(M \cap A_i) + \mu^*\left(M \cap \left(\bigcup_{i \geqslant 1} A_i\right)^c\right) \\ &\overset{2.16.}{=} \mu^*\left(M \cap \bigcup_{i \geqslant 1} A_i\right) + \mu^*\left(M \cap \left(\bigcup_{i \geqslant 1} A_i\right)^c\right) \end{aligned}$$

und damit schließlich $\bigcup_{i \geqslant 1} A_i \in \mathcal{A}^*$.

Seien nun $A_i \in \mathcal{A}^*, i \geqslant 1$ allgemein (also nicht unbedingt disjunkt). Setze $B_1 := A_1$ und $B_n := A_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)$ für alle $n \geqslant 2$. Mit Lemma 2.15 gilt $B_n \in \mathcal{A}^*$ für alle $n \geqslant 1$ und insbesondere sind die $B_n, n \geqslant 1$ disjunkt und $\bigcup_{n\geqslant 1} B_n = \bigcup_{i\geqslant 1} A_i$. Die Aussage folgt mit der ersten Fall. $\square$

2.18. Lemma: Für $A \in \mathcal{A}_0$ gilt $\mu(A) = \mu^*(A)$.

Beweis: Laut Konstruktion (siehe 2.11) gilt $\mu^*(A) \leqslant \mu(A)$. Sei also $\varepsilon > 0$ und wähle $A_i \in \mathcal{A}_0, i \geqslant 1$, sodass $A \subseteq \bigcup_{i\geqslant 1} A_i$ und

$$\sum_{i\geqslant 1} \mu(A_i) \leqslant \mu^*(A) + \varepsilon$$

Da μ als Prämaß monoton und σ-additiv (und damit auch σ-subadditiv, siehe Übung) auf $\mathcal{A}_0$ ist, folgt

$$\begin{aligned}
\mu(A) &= \mu\left(A \cap \bigcup_{i\geqslant 1} A_i\right) \\
&= \mu\left(\bigcup_{i\geqslant 1}(A \cap A_i)\right) \\
&\leqslant \sum_{i\geqslant 1} \mu(A \cap A_i) \\
&\leqslant \sum_{i=1} \mu(A_i) \leqslant \mu^*(A) + \varepsilon
\end{aligned}$$

und die Aussage folgt für $\varepsilon \searrow 0$. $\square$

2.19. Lemma: $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}^*$, also ist jede Menge in der Algebra $\mathcal{A}_0$ auch von außen messbar.

Beweis: Sei $A \in \mathcal{A}_0$ und $M \in \mathcal{P}(\Omega)$. Zu zeigen ist

$$\mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \cap A^c) \leqslant \mu^*(M)$$

Sei dazu $\varepsilon > 0$ und wähle $A_i \in \mathcal{A}_0, i \geqslant 1$, sodass $M \subseteq \bigcup_{i\geqslant 1} A_i$ und $\sum_{i\geqslant 1} \mu(A_i) \leqslant \mu^*(M) + \varepsilon$. Setze $B_i := A \cap A_i$ und $C_i := A^c \cap A_i$. Dann sind B_i und C_i disjunkt und $B_i, C_i \in \mathcal{A}_0$ für $i \geqslant 1$. Außerdem gilt $\bigcup_{i\geqslant 1} B_i = A \cap \bigcup_{i\geqslant 1} A_i$ und damit $A \cap M \subseteq \bigcup_{i\geqslant 1} B_i$. ähnliches gilt für C_i. Damit gilt

$$\mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \cap A^c) \leqslant \sum_{i\geqslant 1} \mu(B_i) + \mu(C_i) = \sum_{i\geqslant 1} \mu(A_i) \leqslant \mu^*(M) + \varepsilon$$

und die Aussage folgt für $\varepsilon \searrow 0$. $\square$

2.20. Satz: Sei μ ein Prämaß auf $(\Omega, \mathcal{A}_0)$ und seien μ^* das entsprechende äußere Maß und $\mathcal{A}^*$ die Familie der von außen messbaren Mengen. Dann ist $(\Omega, \mathcal{A}^*, \mu^*)$ ein Maßraum, $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}^*$ und es gilt $\forall A \in \mathcal{A}_0 : \mu(A) = \mu^*(A)$.

Beweis: Mit Lemma 2.17 ist $\mathcal{A}^*$ eine σ-Algebra. Mit Lemma 2.13 und Lemma 2.16 ($M = \Omega$) folgt, dass μ^* alle Eigenschaften eines Maßes auf $(\Omega, \mathcal{A}^*)$ erfüllt. Mit Lemma 2.19 gilt $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}^*$ und mit Lemma 2.18 gilt $\mu = \mu^*$ auf $\mathcal{A}_0$. $\square$

2.21. Satz (Maßerweiterungssatz von Carathéodory): Sei μ ein Prämaß auf einer Algebra $\mathcal{A}_0$, sodass $\exists A_n \in \mathcal{A}_0, n \geqslant 1 : \Omega = \bigcup\limits_{n \geqslant 1} A_n$ und $\forall n \geqslant 1 : \mu(A_n) < \infty$. Dann gibt es eine eindeutige Erweiterung μ^* auf $\sigma(\mathcal{A}_0)$ mit $\mu = \mu^*$ auf $\mathcal{A}_0$.

Beweis: Es gilt $\sigma(\mathcal{A}_0) \subseteq \mathcal{A}^*$. Mit Satz 2.20 ist μ^* ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A}^*)$ und damit auch auf $(\Omega, \sigma(\mathcal{A}_0))$, das auf $\mathcal{A}_0$ mit μ übereinstimmt. Sei ν ein weiteres Maß, das auf $\mathcal{A}_0$ mit μ übereinstimmt. Dann stimmt ν auf $\mathcal{A}_0$ auch mit μ^* überein. Beachte, dass $\mathcal{A}_0$ durchschnittsstabil ist, und damit die Voraussetzungen von Korollar 2.9 erfüllt sind. Damit gilt $\forall A \in \sigma(\mathcal{A}_0) : \nu(A) = \mu^*(A)$. $\square$

3. Maß auf $\mathbb{R}$

Motivation

3.1. Beispiel: Betrachte den messbaren Raum $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ und eine Folge nicht-negativer reeller Zahlen $p_i \geqslant 0, i \geqslant 1$ mit $\sum_{i\geqslant 1} p_i = 1$. Definiere die Abbildung $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,1]$ mit $A \mapsto \sum_{i\in A} p_i$. Dann ist $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß, da $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ (leere Summe), $\mathbb{P}(\mathbb{N}) = 1$ (per Konstruktion), und für $A_n \in \mathcal{P}(\mathbb{N}), n \geqslant 1$ disjunkt

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n\right) = \sum_{i\in\bigcup_{n\geqslant 1} A_n} p_i \stackrel{\dagger}{=} \sum_{n\geqslant 1}\sum_{i\in A_n} p_i = \sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(A_n)$$

wobei der Schritt in † aus dem folgenden Satz (cf. Analysis I?) folgt. Dieses Beispiel deckt alle diskreten Verteilungen auf $\mathbb{N}$ ab. Unser Ziel ist es, dieses Beispiel auf stetige Verteilungen auf $\mathbb{R}$ zu erweitern.

3.2. Satz (Umordnung absolut konvergenter Reihen): Sei die Reihe von $a_n, n \geqslant 1$ absolut konvergent und sei $b_n, n \geqslant 1$ eine Umordnung der $a_n, n \geqslant 1$ (i.e. es gibt eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $b_n = a_{f(n)}$). Dann ist die Reihe von $b_n, n \geqslant 1$ absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{n\geqslant 1} a_n = \sum_{n\geqslant 1} b_n$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ und definiere

$$s_N := \sum_{n=1}^{N} a_n \text{ und } t_N := \sum_{n=1}^{N} b_n$$

Dann gibt es $N \geqslant 1$, sodass

$$\left|\sum_{n\geqslant 1} a_n - s_N\right| < \varepsilon$$

Da die Reihe von $a_n, n \geqslant 1$ auch absolut konvergiert können wir $N \geqslant 1$ so wählen, dass auch

$$\left|\sum_{n\geqslant 1} |a_n| - (|a_1| + \ldots + |a_N|)\right| = \sum_{n\geqslant N+1} |a_n| < \varepsilon$$

Wähle nun $M \geqslant 1$ groß genug, dass unter den $b_n, n = 1, \ldots, M$ die Werte $a_1, \ldots, a_N$ alle vorkommen. Für alle $m \geqslant M$ ist $t_m - s_N$ damit eine Summe, in der die Werte $a_1, \ldots, a_N$ nicht vorkommen und mit der Dreiecksungleichung folgt

$$|t_m - s_N| \leqslant \sum_{n \geqslant N+1} a_n < \varepsilon$$

Damit gilt $\forall m \geqslant M$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n \geqslant 1} a_n - t_m \right| &= \left| \sum_{n \geqslant 1} a_n - s_N + s_N - t_m \right| \\ &\leqslant \left| \sum_{n \geqslant 1} a_n - s_N \right| + |s_N - t_m| < 2\varepsilon \end{aligned}$$

für N hinreichend groß. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Aussage. □

3.2.$\frac{1}{2}$. Satz (Riemann'scher Umordnungssatz): Sei die Reihe von $a_n, n \geqslant 1$ konvergent, aber nicht absolut konvergent. Dann gibt es für jede Zahl $a \in \mathbb{R}$ eine Umordnung $b_n, n \geqslant 1$, sodass

$$\sum_{n \geqslant 1} b_n = a$$

Beweis: siehe z.B. Theorem 22.7, Spivak, M. *Calculus*. ? edn., pp. ?. □

Messen von Intervallen

Sei im Folgenden $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige monoton-nichtfallende und rechtsseitig stetige Funktion. Beachte, dass damit linksseitige Grenzwerte für F existieren. Gängige Beispiele sind z.B.: $F(x) = x$ oder $F(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}$. Wir suchen nun eine möglichst "kleine" σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf $\mathbb{R}$, die alle Intervalle der Form $[a, b]$ enthält und ein Maß $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, sodass $\mu([a, b]) = F(b) - F(a)$.

3.3. Definition: Sei $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant \infty$. Definiere das halboffene Interval

$$(a, b\rangle := \begin{cases} (a, b] & \text{falls } b < \infty \\ (a, \infty) & \text{falls } b = \infty \end{cases}$$

sowie die Familie der halboffenen Intervalle

$$\mathcal{J} := \{(a, b\rangle : -\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant \infty\}$$

und die Mengenfunktion $\phi : \mathcal{J} \to [0, \infty]$ mit

$$(a, b\rangle \mapsto \begin{cases} F(b) - F(a) & \text{falls } a < b \\ 0 & \text{falls } a = b \end{cases}$$

3.4. Lemma: ϕ ist σ-additiv auf $\mathcal{J}$.

Beweis: Seien $J_n \in \mathcal{J}, n \geqslant 1$, disjunkt, sodass auch $\bigcup_{n\geqslant 1} J_n \in \mathcal{J}$. Zeige

$$\phi\left(\bigcup_{n\geqslant 1} J_n\right) = \sum_{n\geqslant 1} \phi(J_n)$$

Da $\bigcup_{n\geqslant 1} J_n \in \mathcal{J}$, können wir $\bigcup_{n\geqslant 1} J_n = (a,b\rangle$ schreiben. Seien o.B.d.A. alle $J_n = (a_i, b_i\rangle$ nicht-leer und aufsteigend geordnet, sodass

$$a = a_1 < b_1 = a_2 < \ldots < b_{n-1} = a_n < b_n = b$$

Dann gilt

$$\sum_{n\geqslant 1} \phi(J_n) = \sum_{n\geqslant 1} [F(b_n) - F(a_n)] = F(b_n) - F(a_1) = F(b) - F(a) = \phi\left(\bigcup_{n\geqslant 1} J_n\right)$$

□

Bemerkung: Beachte, dass $\bigcup_{n\geqslant 1} J_n \in \mathcal{J}$ hier eine notwendige Voraussetzung ist, da $\mathcal{J}$ keine Algebra (bzw. σ-Algebra) ist. Wir erweitern $\mathcal{J}$ zunächst konstruktiv zu einer Algebra $\mathcal{J}^*$ und die Mengenfunktion $\phi : \mathcal{J} \to [0,\infty]$ zu einem Prämaß $\phi^* : \mathcal{J}^* \to [0,\infty]$. Später liefert uns dann ein (nicht-konstruktiver) Satz (Maßerweiterungssatz von Carathéodory) eine Erweiterung von ϕ^* zu einem Maß $\mu : \sigma(\mathcal{J}^*) \to [0,\infty]$.

3.5. Definition: Definiere die Mengenfamilie

$$\mathcal{J}^* := \left\{\bigcup_{i=1}^{n} J_i : n \in \mathbb{N}, J_i \in \mathcal{J}, J_i \text{ disjunkt für } i = 1,\ldots,n\right\}$$

aller endlichen disjunkten Vereinigungen von halboffenen Intervallen.

3.6. Lemma: $\mathcal{J}^*$ ist eine Algebra auf $\mathbb{R}$ mit $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}^*$.

Beweis: Die Eigenschaften $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}^*$ und $\mathbb{R} \in \mathcal{J}^*$ sind trivial. Zeige also die Abgeschlossenheit bezüglich Komplementbildung und endlichen Durchschnitten.

Für $(a,b\rangle \in \mathcal{J}$ gilt $(a,b\rangle^c = (-\infty, a\rangle \cup (b,\infty\rangle \in \mathcal{J}^*$. Sei also $A = \bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i\rangle \in \mathcal{J}^*$ mit $(a_i, b_i\rangle$ disjunkt, nicht-leer und aufsteigend geordnet, d.h.

$$-\infty \leqslant a_i < b_1 \leqslant a_2 < \ldots \leqslant a_n < b \leqslant \infty$$

Dann gilt $A^c = (-\infty, a_1\rangle \cup (b_1, a_2\rangle \cup \ldots \cup (b_{n-1}, a_n\rangle \cup (b_n, \infty\rangle \in \mathcal{J}^*$ per Definition von $\mathcal{J}^*$.

Seien nun $A, B \in \mathcal{J}^*, A = \bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i\rangle, B = \bigcup_{j=1}^m (c_j, d_j\rangle$ jeweils endliche Vereinigungen disjunkter, halboffener Intervalle, d.h. $(a_i, b_i\rangle$ paarweise disjunkt für $i = 1, \dots, n$ und $(c_j, d_j\rangle$ paarweise disjunkt für $j = 1 \dots, m$. Dann gilt

$$A \cap B = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} (a_i, b_i\rangle \cap (\alpha_i, d_i\rangle = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} (\max\{a_i, c_j\}, \max\{b_i, d_j\}\rangle$$

Die Disjunktheit der Intervalle $(\max\{a_i, c_j\}, \max\{b_i, d_j\}\rangle$ für $i = 1, \dots, n$ und $j = 1, \dots, m$ ist leicht nachzuprüfen (Widerspruchsargument). $\square$

3.7. Definition: Sei $A = \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i\rangle \in \mathcal{J}^*$ mit $(a_i, b_i\rangle$ disjunkt für $i = 1, \dots, n$. Definiere nun die Erweiterung $\phi^* : \mathcal{J}^* \to [0, \infty]$ mit $A \mapsto \sum_{i=1}^{n} \phi\left((a_i, b_i\rangle\right)$. Da $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}^*$ gilt $\phi = \phi^*$ auf $\mathcal{J}$.

3.8. Proposition: $\phi^*(A)$ ist wohldefiniert für alle $A \in \mathcal{J}^*$ und insbesondere unabhängig von der Darstellung von A.

Beweis: Sei $A = \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i\rangle = \bigcup_{j=1}^{m} (\alpha_i, d_i\rangle \in \mathcal{J}^*$. Schreibe für $i = 1, \dots, n$

$$(a_i, b_i\rangle = (a_i, b_i\rangle \cap A = (a_i, b_i\rangle \cap \bigcup_{j=1}^{m} (c_j, d_j\rangle = \bigcup_{j=1}^{m} [(c_j, d_j\rangle \cap (a_i, b_i\rangle]$$

und analog für $j = 1, \dots, m$

$$(c_j, d_j\rangle = \bigcup_{i=1}^{n} [(c_j, d_j\rangle \cap (a_i, b_i\rangle]$$

Es folgt mit der σ-Additivität von ϕ auf $\mathcal{J}$

$$\begin{aligned}
\phi^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i\rangle\right) &= \sum_{i=1}^{n} \phi((a_i, b_i\rangle) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \phi\left(\bigcup_{j=1}^{m} [(c_j, d_j\rangle \cap (a_i, b_i\rangle]\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \phi((a_i, b_i\rangle \cap (c_j, d_j\rangle) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \phi((a_i, b_i\rangle \cap (c_j, d_j\rangle) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \phi\left(\bigcup_{i=1}^{n} [(c_j, d_j\rangle \cap (a_i, b_i\rangle]\right) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \phi((c_j, d_j\rangle) = \phi^*\left(\bigcup_{j=1}^{m} (c_j, d_j\rangle\right)
\end{aligned}$$

$\square$

Erzeugung von Maßen auf $\mathbb{R}$

Wir möchten $\phi^* : \mathcal{J}^* \to [0,\infty]$ nun zu einem Maß $\mu : \sigma(\mathcal{J}^*) \to [0,\infty]$ erweitern. Wir fordern dazu folgende Eigenschaften von ϕ^*:

3.9. Lemma:

(i) $\phi^*(\emptyset) = 0$

(ii) Für $A_n \in \mathcal{J}^*, n \geqslant 1$ disjunkt, mit $\bigcup_{n\geqslant 1} A_n \in \mathcal{J}^*$ gilt $\phi^*\left(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n\right) = \sum_{n\geqslant 1} \phi^*(A_n)$ (ϕ^* ist σ-additiv auf $\mathcal{J}^*$).

(iii) $\exists B_n \in \mathcal{J}^*, n \geqslant 1$, sodass $\mathbb{R} = \bigcup_{n\geqslant 1} B_n$ und $\phi^*(B_n) < \infty$ für $n \geqslant 1$ (Das Prämaß ϕ^* ist σ-endlich auf $(\mathbb{R}, \mathcal{J}^*)$).

Beweis:

(i) $\phi(\emptyset) = \phi^*((1,1\rangle) = \phi((1,1\rangle) = 0$ per Definition von ϕ.

(ii) Setze $A := \bigcup_{n\geqslant 1} A_n$. Da $A \in \mathcal{J}^*$ können wir $A = \bigcup_{j=1}^{k} (c_j, d_j\rangle$ schreiben mit $(c_j, d_j\rangle$ disjunkt für $j = 1, \ldots, k$. Schreibe weiters $A_n = \bigcup_{i=1}^{m_n} (a_i^{(n)}, b_i^{(n)}\rangle$ mit $(a_i^{(n)}, b_i^{(n)}\rangle$ disjunkt für $i = 1, \ldots, m_n$ und alle $n \geqslant 1$. Es gilt

$$(c_j, d_j\rangle = (c_j, d_j\rangle \cap A = \bigcup_{n\geqslant 1} (A_n \cap (c_j, d_j\rangle)$$

und

$$A_n = A_n \cap A = \bigcup_{i=1}^{m_n} \bigcup_{j=1}^{k} \left((a_i^{(n)}, b_i^{(n)}\rangle \cap (c_j, d_j\rangle\right)$$

und mit Lemma 3.4 folgt (mit der Eigenschaft, dass $\mathcal{J}$ durchschnittsstabil ist)

$$\phi((c_j, d_j\rangle) = \sum_{n\geqslant 1} \sum_{i=1}^{m_n} \phi\left((a_i^{(n)}, b_i^{(n)}\rangle \cap (c_j, d_j\rangle\right)$$

und per Definition von ϕ^* gilt

$$\phi^*(A_n) = \sum_{i=1}^{m_n} \sum_{j=1}^{k} \phi\left((a_i^{(n)}, b_i^{(n)}\rangle \cap (c_j, d_j\rangle\right)$$

Mit Satz 3.2 (??, und σ-Endlichkeit?) folgt

$$\begin{aligned}
\phi^*(A) &= \sum_{i=1}^{k} \phi((c_j, d_j\rangle) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \sum_{n\geqslant 1} \sum_{i=1}^{m_n} \phi\left((a_i^{(n)}, b_i^{(n)}\rangle \cap (c_j, d_j\rangle\right) \\
&\overset{\text{Satz 3.2}}{=} \sum_{n\geqslant 1} \sum_{i=1}^{m_n} \sum_{j=1}^{k} \phi\left((a_i^{(n)}, b_i^{(n)}\rangle \cap (c_j, d_j\rangle\right) \\
&= \sum_{n\geqslant 1} \phi^*(A_n)
\end{aligned}$$

(iii) Wähle hier $B_n := (-n, n\rangle \in \mathcal{J}^*$. Dann gilt $\mathbb{R} = \bigcup_{n\geqslant 1}(-n, n\rangle$ und $\phi^*(B_n) = F(n) - F(-n) < \infty$ für alle $n \geqslant 1$. $\square$

3.10. Lemma: Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Für $A_n \in \mathcal{J}, n \geqslant 1$ disjunkt, mit $A = \bigcup_{n\geqslant 1} A_n \in \mathcal{J}$ gilt $\phi\left(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n\right) = \sum_{n\geqslant 1} \phi(A_n)$

(ii) Für $A_n \in \mathcal{J}^*, n \geqslant 1$ disjunkt, mit $A = \bigcup_{n\geqslant 1} A_n \in \mathcal{J}^*$ gilt $\phi^*\left(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n\right) = \sum_{n\geqslant 1} \phi^*(A_n)$

Beweis: folgt. Ich denke (ii) $\Longrightarrow$ (i) folgt mit der Inklusion $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}^*$ und $\phi(A) = \phi^*(A)$ für $A \in \mathcal{J}$. (i) $\Longrightarrow$ (ii) folgt aus dem Beweis von Lemma 3.9 (insofern dieser stimmt)?

3.11. Lemma: Sei $I \subseteq \mathbb{N}$ nicht-leer und seien $(a_i, b_i\rangle \in \mathcal{J}, i \in I$ nicht-leer und disjunkt, sodass $\bigcup_{i\in I}(a_i, b_i\rangle \subseteq (a, b\rangle \in \mathcal{J}$. Dann folgt

$$\sum_{i\in I} F(b_i) - F(a_i) \leqslant F(b) - F(a)$$

Beweis:

I. I endlich
Da I in Bijektion zu $\{1, \ldots, n\}$ steht, setze o.B.d.A. $I = \{1, \ldots, n\}$ und ordne die Intervalle aufsteigend, also

$$a \leqslant a_1 < b_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n < b_n \leqslant b$$

Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n} F(b_i) - F(a_i) = -F(a_1) + F(b_1) - \ldots - F(a_n) + F(b_n) \leqslant F(b_n) - F(a_1) \leqslant F(b) - F(a)$$

da $F(b_k) \leqslant F(a_{k+1})$ für $k = 1, \ldots, n-1$.

II. I abzählbar unendlich
Da I in Bijektion zu $\mathbb{N}$ steht, setze o.B.d.A $I = \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\sum_{i \geqslant 1} F(b_i) - F(a_i) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} F(b_i) - F(a_i) \leqslant \lim_{n \to \infty} F(b) - F(a) = F(b) - F(a)$$

mit dem I. Teil. □

3.12. Lemma: Sei $I \subseteq \mathbb{N}$ nicht-leer und seien $(a_i, b_i\rangle \in \mathcal{J}, i \in I$ nicht-leer, sodass $\bigcup_{i \in I} (a_i, b_i\rangle \supseteq (a, b\rangle \in \mathcal{J}$. Dann folgt

$$F(b) - F(a) \leqslant \sum_{i \in I} F(b_i) - F(a_i)$$

Beweis:

I. I endlich
Sei wie im Beweis von Lemma 3.11 o.B.d.A $I = \{1, \dots, n\}$. Seien außerdem die Intervalle $(a_i, b_i\rangle$ disjunkt und aufsteigend geordnet. Dann gilt $a \in (a_k, b_k\rangle$ und $b \in (a_\ell, b_\ell\rangle$ für $1 \leqslant k \leqslant \ell \leqslant n$ und $b_i = a_{i+1}$ für alle $i = k, \dots, \ell - 1$. Es folgt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} F(b_i) - F(a_i) &\geqslant \sum_{i=k}^{\ell} F(b_i) - F(a_i) \\ &= -F(a_k) + F(b_\ell) \\ &\geqslant F(b) - F(a) \end{aligned}$$

II. I abzählbar unendlich, $a, b < \infty$
Sei wie im Beweis von Lemma 3.11 o.B.d.A. $I = \mathbb{N}$. Sei $\varepsilon > 0$. Da F rechtsstetig ist, gibt es $\delta, \delta_i > 0, i \geqslant 1$, sodass

$$F(a + \delta) < F(a) + \varepsilon, \; F(b_i + \delta_i) < F(b_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$$

Beachte, dass $(a + \delta, b\rangle \bigcup_{i \geqslant 1} (a_i, b_i + \delta_i\rangle$. Nun existiert eine endliche Menge $J \subseteq \mathbb{N}$ (einfache Überlegung), sodass

$$(a + \delta, b\rangle \subseteq \bigcup_{j \in J} (a_j, b_j + \delta_j\rangle$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} F(b) - F(a + \delta) &\leqslant \sum_{j \in J} F(b_j + \delta_j) - F(a_j) \\ &\leqslant \varepsilon + \sum_{i \geqslant 1} F(b_i) - F(a_i) \end{aligned}$$

Die Aussage folgt für $\varepsilon \searrow 0$.

III. I abzählbar unendlich, a oder b unendlich
Es gibt hier drei Fälle:

$$(a, b\rangle = \begin{cases} (-\infty, b] \\ (a, \infty) \\ (-\infty, \infty) \end{cases}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wegen den Eigenschaften von F gibt es $s, t \in \mathbb{R}$, sodass $a \leqslant s \leqslant t \leqslant b$ und

$$F(s) \leqslant F(a) + \varepsilon,\ F(t) \leqslant F(b) - \varepsilon$$

Es folgt weiters

$$(s, t\rangle \subseteq (a, b\rangle \subseteq \bigcup_{i \geqslant 1} (a_i, b_i\rangle$$
$$F(b) - F(a) \geqslant F(t) - F(s) \geqslant F(b) - F(a) - 2\varepsilon$$

Die Aussage folgt für $\varepsilon \searrow 0$. □

Bemerkung: Damit können wir ϕ^* eindeutig zu einem Maß μ auf $\sigma(\mathcal{J}^*)$ erweitern. Beachte (einfache Überlegung)

$$\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}^*,\ \mathcal{J}^* \subseteq \sigma(\mathcal{J}) \implies \sigma(\mathcal{J}) = \sigma(\mathcal{J}^*)$$

3.13. Definition: Definiere die Borel'sche σ-Algebra auf $\mathbb{R}$ durch

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) := \sigma(\mathcal{J}^*)$$

3.14. Proposition: Es gilt $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{J}_i)$ für $i = 1, \ldots, n$ und

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &:= \{(a, b) : -\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant \infty\} \\ \mathcal{J}_2 &:= \{[a, b] : -\infty < a \leqslant b < \infty\} \\ \mathcal{J}_3 &:= \{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\} \\ \mathcal{J}_4 &:= \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Beweis: nur für $\mathcal{J}_1$, Rest Übung!

I. $\mathcal{J}_1 \subseteq \sigma(\mathcal{J})$
$(a, b) = \bigcup_{n \geqslant 1} \big(a, b - \frac{1}{n}\big] \in \sigma(\mathcal{J})$, da $\big(a, b - \frac{1}{n}\big] = \big(a, b - \frac{1}{n}\big\rangle \in \mathcal{J}$ für alle $n \geqslant 1$.

II. $\mathcal{J}_1 \supseteq \sigma(\mathcal{J})$

(a) $a, b < \infty$: $(a, b\rangle = (a, b] = \bigcap_{n \geqslant 1} \big(a, b + \frac{1}{n}\big) \in \sigma(\mathcal{J}_1)$.

(b) $a = -\infty, b < \infty$: $(a, b\rangle = (-\infty, b] = \bigcap_{n \geqslant 1} \big(-\infty, b + \frac{1}{n}\big)\, \sigma(\mathcal{J}_1)$

(c) $a < \infty, b = \infty$: $(a, b\rangle = (a, \infty) \in \mathcal{J}_1 \subseteq \sigma(\mathcal{J}_1)$

(d) $a = -\infty, b = \infty$: $(a, b\rangle = \mathbb{R} \in \mathcal{J}_1 \subseteq \sigma(\mathcal{J}_1)$ □

3.15. Proposition: Es gilt $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{O})$, mit $\mathcal{O} = \{O \subseteq \mathbb{R} : O \text{ offen}\}$.

Beweis: folgt.

3.16. Korollar: $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ enthält alle einpunktigen, offenen und abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{R}$.

Beweis: Die Inklusion der offenen und abgeschlossenen Teilmengen folgt aus Proposition 3.15 und der Abgeschlossenheit bezüglich Komplementbildung.
Außerdem gilt

$$\{x\} = \bigcap_{n \geqslant 1} \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

mit Proposition 3.14. □

3.17. Satz: Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton nicht-fallend und rechtsstetig. Dann existiert genau ein σ-endliches Maß $\mu_F : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ mit $\mu_F((a, b\rangle) = F(b) - F(a)$.

Beweis: Existenz und Eindeutigkeit folgen aus dem Maßerweiterungssatz von Carathéodory. Außerdem gilt $\mathbb{R} = \bigcup_{n \geqslant 1} (-n, n\rangle$ und $\forall n \geqslant 1 : \mu_F((-n, n\rangle) = F(n) - F(-n) < \infty$. □

3.18. Definition: Das Lebesgue-Maß $\lambda(\cdot)$ (auch $\mathrm{vol}(\cdot)$) auf $\mathbb{R}$ ist definiert durch das von der Funktion $F(x) = x$ induzierte Maß (gemäß Satz 3.17).

3.19. Definition: Sei $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ monoton nicht-fallend und rechtsstetig, sodass zusätzlich $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ und $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$. Dann nennt man F eine Verteilungsfunktion (cdf). Mit Satz 3.17 induziert jede Verteilungsfunktion ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $\mathbb{R}$.

3.20. Satz Sei φ ein σ-endliches Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Dann existiert eine Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass

- F ist monoton nichtfallend.
- F ist rechtsseitig stetig.
- Für $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x)$ und $F(\infty) = \lim\limits_{x \to \infty} F(x)$ gilt für alle $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$.

$$\varphi\left((a, b\rangle\right) = F(b) - F(a)$$

Beweis:

I. Fall: φ endlich.
Setze $F(x) := \varphi\left((-\infty, x]\right)$ für $x \in \mathbb{R}$. Da φ endlich ist, ist F reellwertig. Die Monotonie von F folgt aus der Monotonie von φ (siehe Satz 1.7). Die Rechtsstetigkeit von F folgt der Stetigkeit von oben (siehe Satz 1.9). Schließlich gilt für $-\infty < a < b < \infty$

$$\begin{aligned}\varphi\left((a, b]\right) &= \varphi\left((-\infty, b] \setminus (-\infty, a]\right)\\ &= \varphi((-\infty, b]) - \varphi((-\infty, a]) = F(b) - F(a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi((-\infty, b)) &\overset{\text{S.V.U.}}{=} \lim_{x\to-\infty} \varphi((x, b])\\ &= \lim_{x\to-\infty} F(b) - F(x) = F(b) - F(-\infty)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi((a, \infty)) &\overset{\text{S.V.U.}}{=} \lim_{x\to\infty} \varphi((a, x])\\ &= \lim_{x\to\infty} F(x) - F(a) = F(\infty) - F(a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi((-\infty, \infty)) &\overset{\text{S.V.U.}}{=} \lim_{x\to\infty} \varphi((-x, x])\\ &= \lim_{x\to\infty} F(x) - F(-x) = F(\infty) - F(-\infty)\end{aligned}$$

II. Fall: $\varphi(\mathbb{R}) = \infty$.
Setze hier

$$F(x) := \begin{cases} \varphi((0, x]) & \text{falls } x \geqslant 0 \\ -\varphi((x, 0]) & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Die Monotonie und Rechtssteitgkeit folgen wie im I. Fall. Für die dritte Eigenschaft argumentiere wie im I. Fall und betrachte jeweils die Fälle

$$\begin{aligned} 0 \leqslant a \leqslant b < \infty \\ -\infty < a < 0 \leqslant b < \infty \\ -\infty < a < b \leqslant 0 \end{aligned}$$

$\square$

3.21. Korollar: Sei $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und $\mu((a, b\rangle) = F(b) - F(a)$ für eine monoton nicht-fallende, rechtsstetige Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann gilt für $a \in \mathbb{R}$:

$$\mu(\{a\}) = F(a) - \lim_{x \nearrow a} F(x)$$

Insbesondere ist $\{a\}$ ein Atom von μ, wenn F eine Sprungstelle bei a hat.

Beweis: Schreibe $\{a\} = \bigcap_{n \geqslant 1} \left(a - \frac{1}{n}, a\right\rangle$ und beachte, dass $\mu((a-1, a\rangle) = F(a) - F(a-1) < \infty$. Mit der Stetigkeit von oben (Satz 1.9) gilt

$$\mu(\{a\}) = \lim_{n \to \infty} \mu\left(\left(a - \frac{1}{n}, a\right\rangle\right) = \lim_{n \to \infty} \left[F(a) - F\left(a - \frac{1}{n}\right)\right] = F(a) - \lim_{x \nearrow a} F(x)$$

wobei die letze Gleichung aus der Definition eines einseitigen Grenzwertes folgt (cf. Analysis). $\square$

4. Messbare Abbildungen und Zufallsvariablen

Betrache im folgenden Kapitel jeweils einen Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und eine Abbildung $f : \Omega \to \Omega'$.

Urbildoperator und Messbarkeit

4.1. Definition: Sei $f : \Omega \to \Omega'$. Für $A' \subseteq \Omega'$ definiere das Urbild von A' unter f als

$$f^{-1}(A') := \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in A'\} \subseteq \Omega$$

Kurschreibweise: $f^{-1}(A') = f^{-1}A' = \{f \in A'\}$. Beachte, dass der Urbild-Operator nicht die inverse Funktion ist (im Gegensatz zur Inversen ist das Urbild immer definiert).

4.1.$\frac{1}{2}$. Proposition : Der Urbild-Operator kommutiert mit Mengenoperationen, i.e.

(i) $f^{-1}\left(\bigcup_{n\geqslant 1} A'_n\right) = \bigcup_{n\geqslant 1} f^{-1}(A'_n)$

(ii) $f^{-1}(A'^c) = \left(f^{-1}(A')\right)^c$

(iii) $f^{-1}\left(\bigcap_{n\geqslant 1} A'_n\right) = \bigcap_{n\geqslant 1} f^{-1}(A'_n)$

Beweis: Übung! (iii) folgt aus (i), (ii) und de Morgan.

4.2. Definition: Betrachte zwei messbare Räume $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\Omega', \mathcal{A}')$. Eine Abbildung f heißt $\mathcal{A}$–$\mathcal{A}'$-messbar, falls

$$\forall A' \in \mathcal{A}' : f^{-1}(A') \in \mathcal{A}$$

Falls $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (\Omega', \mathcal{A}')$ eine messbare Abbildung von einem Wahrscheinlichkeitsraum nach Ω' ist, nennt man X eine Ω'-wertige Zufallsvariable (e.g. $\Omega' = \mathbb{R}$ oder $\Omega' = \mathbb{C}$). Definiert man eine Abbildung als $\mathcal{A}$–$\mathcal{A}'$-messbar, so schreibt man oft $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega', \mathcal{A}')$.

4.3. Definition: Sei I eine beliebige, nicht-leere Indexmenge und seien $f_i : \Omega \to \Omega', i \in I$. Definiere die von den $f_i, i \in I$ erzeugte σ-Algebra als

$$\sigma(f_i, i \in I) := \sigma\left(\left\{f_i^{-1}(A') : A' \in \mathcal{A}', i \in I\right\}\right)$$

Bemerkung:

(i) $\sigma(f_i, i \in I)$ ist die kleinste σ-Algebra auf Ω für die alle $f_i, i \in I$ messbar sind.

(ii) Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω, dann gilt: $\forall i \in I : f_i$ ist $\mathcal{A}$–$\mathcal{A}'$-messbar $\iff \sigma(f_i, i \in I) \subseteq \mathcal{A}$

(iii) $\sigma(f) = \{f^{-1}(A') : A' \in \mathcal{A}'\}$, da der Urbild-Operator mit Mengenoperationen kommutiert.

4.4. Proposition: Betrachte zwei messbare Räume $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega', \mathcal{A}')$, wobei $\mathcal{A}' = \sigma(\mathcal{M}')$ für eine Mengenfamilie $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{P}(\Omega')$, sowie eine Abbildung $f : \Omega \to \Omega'$. Setze $\mathcal{M} := \{f^{-1}(M') : M' \in \mathcal{M}'\}$. Dann gilt $\sigma(f) = \sigma(\mathcal{M})$ und insbesondere ist f genau dann $\mathcal{A}$–$\mathcal{A}'$-messbar, wenn $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}$.

Beweis:

I. $\sigma(\mathcal{M}) \subseteq \sigma(f)$
Es gilt $\mathcal{M}' \subseteq \sigma(\mathcal{M}')$ und damit

$$\mathcal{M} = \{f^{-1}(M') : M' \in \mathcal{M}'\} \subseteq \{f^{-1}(M') : M' \in \sigma(\mathcal{M}')\} = \sigma(f)$$

Damit folgt $\sigma(\mathcal{M}) \subseteq \sigma(\sigma(f)) = \sigma(f)$.

II. $\sigma(\mathcal{M}) \supseteq \sigma(f)$
Setze $\mathcal{G}' := \{M' \in \sigma(\mathcal{M}') : f^{-1}(M') \in \sigma(\mathcal{M})\}$ und zeige $\mathcal{G}' = \sigma(\mathcal{M}')$. Die Inklusion $\mathcal{G}' \subseteq \sigma(\mathcal{M}')$ folgt sofort aus der Konstruktion. Es genügt also zu zeigen, dass $\mathcal{G}'$ eine σ-Algebra ist und $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{G}'$.

(i) Sei $M' \in \mathcal{M}'$. Dann gilt $M' \in \sigma(\mathcal{M}')$ und $f^{-1}(M') \in \mathcal{M}$ per Definition von $\mathcal{M}$. Es folgt $f^{-1}(M') \in \sigma(\mathcal{M}')$ und damit $M' \in \mathcal{G}'$.

(ii) Zeige, dass $\mathcal{G}'$ eine σ-Algebra ist.

- Es gilt $\Omega' \in \sigma(\mathcal{M}')$ und $f^{-1}(\Omega') = \Omega \in \sigma(\mathcal{M})$.
- Abgeschlossenheit bezüglich Komplementbildung und abzählbaren Vereinigungen folgt aus Bemerkung (iii) oben.

III. Zur Messbarkeit.

(i) Sei f $\mathcal{A}$–$\mathcal{A}'$-messbar. Es gilt mit Bemerkung (ii) oben

$$\mathcal{M} = \{f^{-1}(M') : M' \in \mathcal{M}'\} \subseteq \{f^{-1}(M') : M' \in \sigma(\mathcal{M}')\} = \sigma(f) \subseteq \mathcal{A}$$

(ii) Sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}$. Damit gilt $\sigma(\mathcal{M}) = \sigma(f) \subseteq \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ und mit Bemerkung (ii) oben folgt die Aussage. $\square$

4.5. Lemma:

$$\sigma(f_i : i \in I) = \sigma\left(\left\{\bigcap_{j\in J} f_j^{-1}(A'_j) : J \subseteq I, J \text{ endlich}, A'_j \in \mathcal{A}' \text{ für } j \in J\right\}\right)$$

Beweis:

I. $\subseteq$
Es gilt $\{f_i^{-1}(A') : A' \in \mathcal{A}, i \in I\} \subseteq \left\{\bigcap_{j\in J} f_j^{-1}(A'_j) : J \subseteq I, J \text{ endlich}, A'_j \in \mathcal{A}' \text{ für } j \in J\right\}$.

II. $\supseteq$
folgt sofort aus der Abgeschlossenheit bezüglich endlicher Durchschnitte und der Kommutativität des Urbildoperators mit dem Durchschnittsoperator. $\square$

4.6. Proposition: Betrachte messbare Räume $(\Omega_i, \mathcal{A}_i), i = 1, 2, 3$ sowie messbare Abbildungen

$$\begin{aligned} f &: (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \to (\Omega_2, \mathcal{A}_2) \\ g &: (\Omega_2, \mathcal{A}_2) \to (\Omega_3, \mathcal{A}_3) \end{aligned}$$

Dann ist $g \circ f : \Omega_1 \to \Omega_3$ auch $\mathcal{A}_1$–$\mathcal{A}_3$-messbar.

Beweis: Sei $A_3 \in \mathcal{A}_3$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (g \circ f)^{-1}(A_3) &= \{\omega_1 \in \Omega_1 : (g \circ f)(\omega_1) \in A_3\} \\ &= \{\omega_1 \in \Omega_1 : g(f(\omega_1)) \in A_3\} \\ &= \{\omega_1 \in \Omega_1 : f(\omega_1) \in g^{-1}(A_3)\} \end{aligned}$$

Laut Annahme gilt $g^{-1}(A_3) \in \mathcal{A}_2$ für alle $A_3 \in \mathcal{A}_3$ und mit der Messbarkeit von f folgt die Aussage. $\square$

Messbare Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}$

4.7. Lemma: Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) jeweils metrische Räume. Dann ist eine Abbildung $f : X \to Y$ genau dann stetig (bezüglich d_X, d_Y), wenn Urbilder offener Mengen offen sind.

Beweis: cf. Höhere Analysis, siehe z.B. Theorem 4.8 in Rudin, W. (1976) *Principles of Mathematical Analysis.* 3rd edn., pp. 86-87. $\square$

4.8. Proposition: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist f $\mathcal{B}(\mathbb{R})$–$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar.

Beweis: folgt sofort aus Lemma 4.7 und Proposition 2.15. $\square$

Bemerkung: Proposition 4.8 lässt sich auf beliebige metrische Räume ausweiten.

4.9. Proposition: Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und seien $f, g : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ messbar. Sei $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(i) cf mit $(cf)(\omega) := cf(\omega)$ ist messbar.

(ii) $f + g$ mit $(f + g)(\omega) := f(\omega) + g(\omega)$ ist messbar.

(iii) fg mit $(fg)(\omega) := f(\omega)g(\omega)$ ist messbar.

(iv) Für alle $\omega \in \Omega$ mit $g(\omega) \neq 0$ ist $\frac{f}{g}$ mit $\left(\frac{f}{g}\right)(\omega) := \frac{f(\omega)}{g(\omega)}$ messbar.

Beweis:

(i) Da die konstante Abbildung messbar ist, gilt (iii) $\Longrightarrow$ (i).

(ii) Fixiere $t \in \mathbb{R}$. Da der Urbildoperator mit Mengenoperationen kommutiert (und mit Proposition 3.14), genügt es zu zeigen, dass Mengen der Form

$$A = \{\omega \in \Omega : f(\omega) + g(\omega) \in (-\infty, t)\}$$

in $\mathcal{A}$ messbar sind. Dazu genügt es zu zeigen, dass

$$A = \bigcup_{\substack{q,r\in\mathbb{Q}\\ q+r<t}} \{\omega \in \Omega : f(\omega) < q\} \cap \{\omega \in \Omega : g(\omega) < r\} =: B$$

Sei $\omega \in B$. Dann gibt es rationale Zahlen q, r mit $q + r < t$, sodass $f(\omega) < q$ und $g(\omega) < r$ und somit $f(\omega) + g(\omega) < q + r < t$, also $\omega \in A$.
Sei $\omega \in A$. Dann gilt $f(\omega) + g(\omega) < t$ und damit $\delta := t - (f(\omega) + g(\omega)) > 0$. Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist, gibt es $q, r \in \mathbb{Q}$, sodass $f(\omega) < q$, $g(\omega) < r$ und $q + r < f(\omega) + g(\omega) + \delta = t$. Damit folgt $\omega \in B$.

(iii) $fg = \frac{1}{2}(f + g)^2 - f^2 - g^2$ wobei $t \mapsto \frac{1}{2}t^2$ und $t \mapsto -t^2$ stetig und damit messbar sind. Die Aussage folgt mit (ii).

(iv) Fixiere $t \in \mathbb{R}$. Mit (iii) genügt es zu zeigen, dass $\{1/g < t, g \neq 0\}$ messbar ist. Setze z.B.

$$(1/g)(\omega) := \begin{cases} 1/g(\omega) & \text{falls } g(\omega) \neq 0 \\ 0 & \text{falls } g(\omega) = 0 \end{cases}$$

Es gilt

$$\{1/g < t\} = \{1/g < t, g < 0\} \cup \{1/g < t, g > 0\} \cup \{1/g < t, g = 0\}$$

Die Menge $\{1/g < t, g = 0\}$ ist trivial (Ω oder $\emptyset$) messbar.
Für $t > 0$ gilt

$$\{1/g < t, g > 0\} = \{g > 1/t, g > 0\}, \ \{1/g < t, g < 0\} = \{g < 1/t, g < 0\}$$

Für $t < 0$ gilt

$$\{1/g < t, g > 0\} = \{g < 1/t, g > 0\},\ \{1/g < t, g < 0\} = \{g > 1/t, g < 0\}$$

Für $t = 0$ gilt

$$\{1/g < t, g > 0\} = \{g < 0, g > 0\} = \emptyset,\ \{1/g < t, g < 0\} = \{g < 0, g < 0\} = \{g < 0\}$$

Die Aussage folgt mit Abgeschlossenheit von $\mathcal{A}$ bezüglich Vereinigungen, Durchschnitten und Komplementen. $\square$

Messbare Funktionen mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$

4.10. Definition: Definiere die erweiterten reellen Zahlen als

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

und analog zum reellen Fall die Mengenfamilie

$$\mathcal{K} := \{[-\infty, t] : t \in \overline{\mathbb{R}}\}$$

sowie die Borel-σ-Algebra

$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) := \sigma(\mathcal{K})$$

4.11. Definition (Rechenregeln in $\overline{\mathbb{R}}$):

$$\begin{aligned}
&a + \infty = \infty + a := \infty \text{ für } a > -\infty \\
&a - \infty = -\infty + a := -\infty \text{ für } a < \infty \\
&a \cdot \infty = \infty \cdot a := \infty \text{ für } a > 0 \\
&a \cdot \infty = \infty \cdot a := -\infty \text{ für } a < 0 \\
&a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a := -\infty \text{ für } a > 0 \\
&a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a := \infty \text{ für } a < 0 \\
&0 \cdot \infty = 0 \cdot (-\infty) := 0
\end{aligned}$$

Beachte, dass $\infty - \infty$ nicht definiert ist.

4.12. Lemma: Es gilt $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\big|_{\mathbb{R}} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Außerdem ist $\mathbb{R} \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, sodass insbesondere $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$.

Beweis:

$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\big|_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{K})\big|_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{K}\big|_{\mathbb{R}}) \overset{1.16}{=} \sigma(\mathcal{J}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Außerdem gilt $\{-\infty\} = \bigcap_{n \geqslant 1} [-\infty, -n] \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ und $\{\infty\} = \bigcap_{n \geqslant 1} [n, \infty] \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ und damit

$$\mathbb{R} = \overline{\mathbb{R}} \setminus (\{-\infty\} \cup \{\infty\}) \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$$

$\square$

4.13. Korollar: Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ messbar. Dann ist f auch $\mathcal{A}$–$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$-messbar.

Beweis: folgt sofort aus Lemma 4.12. $\square$

Bemerkung: Damit gelten alle Aussagen in diesem Abschnitt auch für $\mathbb{R}$-wertige Funktionen.

4.14. Korollar: Sei $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. Dann gilt

$$A = B \cup \{\infty\} \text{ oder } A = B \cup \{-\infty\} \text{ oder } A = B \text{ oder } A = B \cup \{-\infty, \infty\}$$

für ein $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Beweis: $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\big|_{\mathbb{R}} \implies B = A \cap \mathbb{R}$ mit $A \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. Nun gilt $A = (A \setminus \mathbb{R}) \cup (A \cap \mathbb{R})$, wobei $A \setminus \mathbb{R} = \{\infty\}$ oder $\{-\infty\}$ oder $\{-\infty, \infty\}$. $\square$

4.15. Korollar: Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Eine Abbildung $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ ist $\mathcal{A}$–$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$-messbar, genau dann wenn:

$$\begin{aligned} \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : f^{-1}(B) &\in \mathcal{A} \\ f^{-1}(\{-\infty\}) &\in \mathcal{A} \\ f^{-1}(\{\infty\}) &\in \mathcal{A} \end{aligned}$$

Beweis: folgt sofort aus Kommutativität des Urbildoperators mit Mengenoperationen und Korollar 4.14. $\square$

4.16. Definition: Sei $A \subseteq \Omega$. Die Indikatorfunktion $\mathbb{1}_A : \Omega \to \{0, 1\}$ auf A (auch: charakteristische Funktion) ist definiert als

$$\mathbb{1}_A(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega \in A \\ 0 & \text{falls } \omega \notin A \end{cases}$$

Bemerkung: Jede Funktion $f : \Omega \to \{0, 1\}$ mit $f(\Omega) = \{0, 1\}$ ist eine Indikatorfunktion auf der Menge $A = \{\omega \in \Omega : f(\omega) = 1\}$.

4.17. Lemma: Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Für $A \subseteq \Omega$ ist $\mathbb{1}_A$ genau dann $\mathcal{A}$–$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar, wenn $A \in \mathcal{A}$.

Beweis: Es gilt

$$\mathbb{1}_A^{-1}(B) = \begin{cases} \emptyset & \text{falls } 0,1 \notin B \\ A & \text{falls } 0 \notin B, 1 \in B \\ A^c & \text{falls } 0 \in B, 1 \notin B \\ \Omega & \text{falls } 0,1 \in B \end{cases}$$

für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. □

4.18. Proposition: Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $f_n : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}, n \geqslant 1$ alle $\mathcal{A}$–$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$-messbar. Dann sind die Funktionen

$$\sup_{n\geqslant 1} f_n, \ \inf_{n\geqslant 1} f_n, \ \limsup_{n\to\infty} f_n, \ \liminf_{n\to\infty} f_n$$

auch $\mathcal{A}$–$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$-messbar und insbesondere ist die Menge $\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) \text{ existiert in } \overline{\mathbb{R}}\}$ messbar.

Beweis: Betrachte zunächst die Messbarkeitseigenschaften:

$$\left\{\sup_{n\geqslant 1} f_n < c\right\} = \bigcup_{n\geqslant 1} \{f_n > c\} \in \mathcal{A} \implies \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \left\{\sup_{n\geqslant 1} f_n \in B\right\} \in \mathcal{A}$$

$$\left\{\sup_{n\geqslant 1} f_n = \infty\right\} = \bigcap_{k\geqslant 1} \{\sup_{n\geqslant 1} f_n > k\} \in \mathcal{A}$$

$$\left\{\sup_{n\geqslant 1} f_n = -\infty\right\} = \left\{-\sup_{n\geqslant 1} f_n = \infty\right\}$$

$$\inf_{n\geqslant 1} f_n = -\sup_{n\geqslant 1}(-f_n)$$

$$\limsup_{n\to\infty} f_n = \inf_{N\geqslant 1}\left(\sup_{n\geqslant N} f_n\right)$$

$$\liminf_{n\to\infty} f_n = -\limsup_{n\to\infty}(-f_n)$$

Die Messbarkeit folgt mit Korollar 4.15 und Proposition 4.9 Weiters gilt

$$\left\{\lim_{n\to\infty} f_n \in \overline{\mathbb{R}}\right\} = \left\{\limsup_{n\to\infty} f_n = \liminf_{n\to\infty} f_n\right\} \cup \left\{\liminf_{n\to\infty} f_n = \infty\right\} \cup \left\{\limsup_{n\to\infty} f_n = -\infty\right\}$$

□

4.19. Definition: Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Seien $A_i \in \mathcal{A}$ und $\alpha_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann nennt man $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $f(\omega) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}(\omega)$ eine einfache Funktion.

4.20. Korollar: Jede einfache Funktion ist $\mathcal{A}$–$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ und $\mathcal{A}$–$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$-messbar.

Beweis: Folgt sofort aus Lemma 4.17, Korollar 4.13 und Proposition 4.9. □

4.21. Proposition: Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum.

(i) Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ist genau dann einfach, wenn f messbar ist und endlich viele Werte annimmt (i.e. $|f(\Omega)| < \infty$).

(ii) Jede einfache Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ lässt sich schreiben als $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ mit $A_i, i = 1 \ldots, n$ disjunkt.

Beweis:

(i) $\Longrightarrow$: Die Messbarkeit folgt aus Korollar 4.20. Weiters gilt $|f(\Omega)| \leqslant 2^n$.
$\Longleftarrow$: Sei f messbar und $f(\Omega) = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ mit $\gamma_i \neq \gamma_j$ für $i \neq j$. Sei $A_i := \{f = \gamma_i\}$.

(ii) folgt aus dem zweiten Teil im Beweis von (i). □

4.22. Satz: Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ nicht-negativ und messbar. Dann gibt es eine Folge einfacher Funktionen $f_n, n \geqslant 1$, sodass

$$\forall \omega \in \Omega : 0 \leqslant f_1(\omega) \leqslant f_2(\omega) \leqslant \ldots \leqslant \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega)$$

Wir schreiben oft kurz $0 \leqslant f_n \uparrow f$. Ist f zusätzlich beschränkt, i.e. $\exists C \in \mathbb{R} \forall \omega \in \Omega : f(\omega) \leqslant C$, dann ist die Konvergenz gleichmäßig, also

$$\sup_{\omega\in\Omega} |f_n(\omega) - f(\omega)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Beweis: Setze $\forall n \geqslant 1$

$$f_n(\omega) := \sum_{k=0}^{n\cdot 2^n - 1} \frac{k}{2^n} \cdot \mathbb{1}_{\left\{f \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right\}}(\omega) + n \cdot \mathbb{1}_{\{f \geqslant n\}}$$

$f_n \geqslant 0$ und f_n einfach folgen aus der Konstruktion. Zeige also Monotonie und Konvergenz.

- Zeige $\forall \omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega)$
  Falls $f(\omega) < \infty$ gibt es n_0, sodass $f(\omega) < n_0$ und damit

  $$\forall n \geqslant n_0 \exists k \in \{0, \ldots, n \cdot 2^n - 1\} : f(\omega) \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)$$

  sodass $f_n(\omega) = \frac{k}{2^n}$. Insbesondere gilt damit

  $$0 \leqslant f(\omega) - f_n(\omega) \leqslant \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

  Falls $f(\omega) = \infty$ gilt $\forall n \geqslant 1 : f_n(\omega) = n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty = f(\omega)$. Falls f beschränkt ist, gibt es $n_0 \geqslant 1$, sodass $f(\omega) < n_o$ für alle $\omega \in \Omega$ und damit

  $$\forall \omega \in \Omega : 0 \leqslant f(\omega) - f_(\omega) < \frac{1}{2^n}$$

  Da die obere Schranke unabhängig von ω ist, folgt die gleichmäßige Konvergenz.

- Zeige $\forall \omega \in \Omega : f_n(\omega) \leqslant f_{n+1}(\omega)$
  Sei $f_n(\omega) = \frac{k}{2^n}$ für $k \in \{0, \ldots, n \cdot 2^n - 1\}$. Dann gilt

$$f(\omega) \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right) = \left[\frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) \cup \left[\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{2k+2}{2^{n+1}}\right)$$

  Falls $f(\omega) \in \left[\frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2k+1}{2^{n+1}}\right)$, dann ist $f_{n+1}(\omega) = \frac{2k}{2^{n+1}} = \frac{k}{2^n} = f_n(\omega)$.
  Falls $f(\omega) \in \left[\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{2k+2}{2^{n+1}}\right)$, dann ist $f_{n+1}(\omega) = \frac{2k+1}{2^{n+1}} > \frac{k}{2^n} = f_n(\omega)$.

  Sei $f_n(\omega) = n$. Dann gilt

$$f(\omega) \in [n, \infty] = [n, n+1) \cup [n+1, \infty]$$

  Falls $f(\omega) \in [n+1, \infty]$, dann ist $f_{n+1}(\omega) = n + 1 > n = f_n(\omega)$.
  Falls $f(\omega) \in [n, n+1)$, dann ist

$$\begin{aligned} f_{n+1}(\omega) &= \sum_{k=0}^{(n+1)\cdot 2^{n+1}-1} \frac{k}{2^{n+1}} \cdot \mathbb{1}_{\left\{f \in \left[\frac{k}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^{n+1}}\right)\right\}} + (n+1) \cdot \mathbb{1}_{\{f \geqslant n+1\}} \\ &= \frac{(n+1) \cdot 2^{n+1} - 1}{2^{n+1}} > n = f_n(\omega) \end{aligned}$$

$\square$

5. Lebesgue-Integral

Sei im folgenden Kapitel immer $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ messbar.

Konstruktion des Integrals

5.0. Definition (Informelle Definition des Integrals):

(i) Für $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ einfach setzt man

$$\int f \, d\mu := \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i)$$

(ii) Für $f \geqslant 0$ messbar wählt man einfache Funktionen mit $0 \leqslant f_n \uparrow f$ und setzt

$$\int f \, d\mu := \lim_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu$$

(iii) Für f messbar definiert man $f^+ := f \cdot \mathbb{1}_{\{f \geqslant 0\}}$ und $f^- := f \cdot \mathbb{1}_{\{f < 0\}}$ und setzt

$$\int f \, d\mu := \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu$$

5.1. Lemma: Für eine einfache Funktion $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ ist $\displaystyle\int f \, d\mu$ unabhängig von der Darstellung von f.

Beweis: Sei $m := |f(\Omega)|$, mit $f(\Omega) = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$ und sei $G_\ell := \{\omega \in \Omega : f(\omega) = \gamma_\ell\}$ für $\ell = 1, \ldots, m$. Dann sind G_ℓ, γ_ℓ unabhängig von der Darstellung von f für $\ell = 1, \ldots, m$. Zeige nun $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{\ell=1}^m \gamma_\ell \mu(G_\ell)$.
Für $j \in \{0, 1\}^n$, sei

$$B_j := \left(\bigcap_{i=1}^n A_{j_i} \right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^n A_{j_i}^c \right) = \left(\bigcap_{i : j_i = 1} A_i \right) \cap \left(\bigcap_{i : j_i = 0} A_i^c \right)$$

und $\beta_j := \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Dann sind die B_j disjunkt und $A_i = \bigcup_{j : j_i = 1} B_j$. Außerdem gilt $\bigcup_{j \in \{0,1\}^n} B_j = \Omega$ und

$$A_i \cap B_j = \begin{cases} \emptyset & \text{falls } j_i = 0 \\ B_j & \text{falls } j_i = 1 \end{cases}$$

Es folgt

$$\int f\ d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j\in\{0,1\}^n \\ j_i=1}} \mu(B_j) = \sum_{j\in\{0,1\}^n} \mu(B_j) \sum_{\substack{i\in\{1,\dots,n\} \\ j_i=1}} \alpha_i = \sum_{j\in\{0,1\}^n} \beta_j \mu(B_j)$$

- Falls $B_j = \emptyset$, dann wird β_j "weggeworfen", i.e. setze $\beta_j := 0$.
- Falls $\beta_j = \beta_{j'}$, dann werden B_j und $B_{j'}$ vereinigt.

Schließlich erhält man Werte $\{\beta_{j^{(1)}}, \dots, \beta_{j^{(m)}}\} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ und für $\gamma_\ell = \beta_{j^{(k)}}$ ist

$$G_\ell = \{f = \gamma_\ell\} = \{f = \beta_{j^{(k)}}\}$$

Es folgt

$$\int f\ d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{k=1}^m \beta_{j^{(k)}} \mu(B_k) = \sum_{\ell=1}^m \gamma_\ell \mu(G_\ell)$$

□

5.2. Definition: Sei $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ mit $\alpha_i \geqslant 0$ und $A_i \in \mathcal{A}$ für $i = 1, \dots, n$ einfach. Das Lebesgue-Integral von f bezüglich μ ist definiert als

$$\int f\ d\mu := \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i) \in [0, \infty]$$

Durch Lemma 5.1 ist der Ausdruck wohldefiniert.

5.3. Lemma: Seien f, g beide nicht-negative, einfache Funktionen sodas $\forall \omega \in \Omega : f(\omega) \leqslant g(\omega)$. Dann gilt (Monotonie des Integrals für einfache Funktionen)

$$\int f\ d\mu \leqslant \int g\ d\mu$$

Beweis: Sei $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ und $g = \sum_{j=1}^m \beta_j \mathbb{1}_{B_j}$ in kanonischer Darstellung (A_i disjunkt für $i = 1, \dots, n$ und B_j disjunkt für $j = 1, \dots, m$) und sei o.B.d.A. $\Omega = \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{j=1}^m B_j$. Dann gilt

$$f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}$$
$$g = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \beta_j \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}$$

Laut Annahme gilt für $\omega \in A_i \cap B_j \neq \emptyset$ daher $\alpha_i \leqslant \beta_j$ und damit

$$\int f\ d\mu = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) \leqslant \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \beta_j \mu(A_i \cap B_j) = \int g\ d\mu$$

□

5.4. Lemma: Seien $f_n, n \geqslant 1$ und g nicht negative, einfache Funktionen sodass

$$0 \leqslant f_1 \leqslant \ldots \leqslant \lim_{n\to\infty} f_n \text{ und } g \leqslant \lim_{n\to\infty} f_n$$

Dann gilt $\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \in \overline{\mathbb{R}}$ und $\int g \, d\mu \leqslant \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$.

Beweis: Aus Lemma 5.3 folgt

$$0 \leqslant \int f_1 \, d\mu \leqslant \int f_2 \, d\mu \leqslant \ldots$$

Damit ist $\int f_n \, d\mu, n \geqslant 1$ eine monoton nicht-fallende Folge in $\overline{\mathbb{R}}$ und damit $\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \in \overline{\mathbb{R}}$. Es verbleibt zu zeigen, dass $\int g \, d\mu \leqslant \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$. Sei $\alpha > 1$ und definiere $A_n := \{g \leqslant \alpha \cdot f_n\}, n \geqslant 1$. Dann gilt

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq \bigcup_{n\geqslant 1} A_n = \Omega$$

da $f_1 \leqslant f_2 \leqslant \ldots$. Die letze Gleichheit folgt aus folgendem Argument:

Angenommen $\exists \omega \in \Omega \setminus \left(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n\right)$. Dann gilt $\exists \omega \in \Omega \forall n \geqslant 1 : g(\omega) \geqslant \alpha \cdot f_n(\omega)$ und damit für dieses $\omega \in \Omega$, dass $g(\omega) > \lim_{n\to\infty} f_n(\omega)$, ein Widerspruch zur Annahme.

Nun ist $g \cdot \mathbb{1}_{A_n}$ für $n \geqslant 1$ einfach und messbar und $g \cdot \mathbb{1}_{A_n} \leqslant \alpha \cdot f_n$. Mit Lemma 5.3 folgt für $\alpha \searrow 1$ für alle $n \geqslant 1$

$$\int g \cdot \mathbb{1}_{A_n} \, d\mu \leqslant \int f_n \, d\mu \leqslant \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$$

Sei $g = \sum_{i=1}^m \gamma_i \mathbb{1}_{G_i}$ und damit $g \cdot \mathbb{1}_{A_n} = \sum_{i=1}^m \gamma_i \mathbb{1}_{G_i \cap A_n}$. Weiters gilt für $i = 1, \ldots, m$

$$G_i \cap A_1 \subseteq G_i \cap A_2 \subseteq \ldots \subseteq \bigcup_{n\geqslant 1} (G_i \cap A_n) = G_i$$

und mit der Stetigkeit von unten (Satz 1.9) folgt $\lim_{n\to\infty} \mu(G_i \cap A_n) = \mu(G_i)$ und damit

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int g \cdot \mathbb{1}_{A_n} \, d\mu &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^m \gamma_i \cdot \mu(G_i \cap A_n) \\
&= \sum_{i=1}^m \gamma_i \cdot \left(\lim_{n\to\infty} \mu(G_i \cap A_n)\right) \\
&= \sum_{i=1}^m \gamma_i \cdot \mu(G_i) = \int g \, d\mu
\end{aligned}$$

Ebenfalls ist $\int g \cdot \mathbb{1}_{A_n} \, d\mu \leqslant \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$ für alle $n \geqslant 1$ und damit

$$\int g \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g \cdot \mathbb{1}_{A_n} \, d\mu \leqslant \lim_{n\to\infty} \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$$

$\square$

5.5. Korollar: Betrachte eine nicht-negative, messbare Funktion f, sowie einfache Funktionen $f_n, n \geqslant 1$ und $g_m, m \geqslant 1$, sodass $0 \leqslant f_n \uparrow f$ und $0 \leqslant g_m \uparrow f$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \lim_{m\to\infty} \int g_m \, d\mu$$

Insbesondere ist damit die Wahl der approxmierenden Funktionen in der Definition des Lebesgue-Integrals später egal.

Beweis: Es gilt $\forall m \geqslant 1 : g_m \leqslant \lim_{n\to\infty} f_n$ und mit Lemma 5.4 $\forall m \geqslant 1 : \int g_m \, d\mu \leqslant \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$. Es folgt

$$\lim_{m\to\infty} \int g_m \, d\mu \leqslant \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$$

Ebenfalls gilt $\forall n \geqslant 1 : f_n \leqslant \lim_{m\to\infty} g_m$ und mit Lemma 5.4 $\forall n \geqslant 1 : \int f_n \, d\mu \leqslant \lim_{m\to\infty} \int g_m \, d\mu$. Wie oben folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \leqslant \lim_{m\to\infty} \int g_m \, d\mu$$

□

5.6. Definition: Sei $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ nicht-negativ und messbar und $f_n, n \geqslant 1$ eine belibige Folge einfacher Funktionen, sodass $0 \leqslant f_n \uparrow f$. Dann ist das Lebesgue-Integral von f bezüglich μ definiert als

$$\int f \, d\mu := \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$$

Dieser Grenzwert ist wegen der Monotonie (Lemma 5.3) und der Unabhängigkeit von den approximierenden Funktionen (Korollar 5.5) wohldefiniert.

5.7. Definition: Für eine Funktion $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ werden der Positivteil f^+ und der Negativteil f^- definiert als

$$f^+ := \max(f, 0) \text{ und } f^- := -\min(f, 0)$$

Es gilt trivial $f = f^+ - f^-$. Ist f messbar, dann sind f^+, f^- auch beide messbar, da $f^+ = f \cdot \mathbb{1}_{\{f \geqslant 0\}}$ und $f^- = f \cdot \mathbb{1}_{\{f < 0\}}$.

5.8. Definition: Sei $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ messbar.

(i) Falls $\int f^+ \, d\mu < \infty$ <u>und</u> $\int f^- \, d\mu < \infty$, dann ist f μ-integrierbar.

(ii) Falls $\int f^+ \, d\mu < \infty$ <u>oder</u> $\int f^- \, d\mu < \infty$, dann ist f μ-quasi-integrierbar.

(iii) Falls $\int f^+ \, d\mu = \int f^- \, d\mu = \infty$, dann ist f nicht μ-integrierbar.

(iv) Falls f quasi-integrierbar bezüglich μ ist, dann ist das Lebesgue-Integral von f definiert als

$$\int f \, d\mu := \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu$$

5.9. Definition: Definiere die folgenden beiden Funktionenräume

$$\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu) := \left\{ f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})) : f \text{ integrierbar bezüglich } \mu \right\}$$
$$\mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu) := \left\{ f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})) : f \text{ quasi-integrierbar bezüglich } \mu \right\}$$

Falls der Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ bzw. der messbare Raum $(\Omega, \mathcal{A})$ beliebig oder aus dem Kontext bekannt sind, schreibt man oft kurz $\mathcal{L}^1$ bzw. $\mathcal{L}^1(\mu)$.

Bemerkung: $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ bildet mit skalarweiser Addition und Multiplikation einen Vektorraum und $\|f\|_1 := \int |f| \, d\mu$ bildet eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Beachte den Unterschied zwischen $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und dem Quotientenraum $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ (bzgl. Äquivalenz fast überall, siehe Definition 5.12). Details siehe z.B. Teschl, G. (2024) *Topics in Real Analysis.*, pp. 73-74.

5.10. Definition: Für $f \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und $A \in \mathcal{A}$, dann wird das Integral von f bezüglich μ über A definiert als

$$\int_A f \, d\mu := \int f \cdot \mathbb{1}_A \, d\mu$$

5.11. Definition: Ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und ist $X \in \mathcal{L}(\mathbb{P})$, dann nennt man

$$\mathbb{E}X := \int X \, d\mathbb{P}$$

den Erwartungswert von X unter $\mathbb{P}$. Falls zusätzlich $X \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$, dann nennt man

$$\mathrm{Var}(X) := \int (X - \mathbb{E}X)^2 \, d\mathbb{P}$$

die Varianz von X (unter $\mathbb{P}$).

Eigenschaften des Integrals

5.12. Definition:

- Eine Menge $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0$ nennt man μ-Nullmenge.

- Ist $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ messbar und $B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ mit $\mu(\{f \in B\}^c) = \mu(\{f \in B^c\}) = 0$, dann sagt man, dass das Ereignis $\{f \in B\}$ μ-fast-überall eintritt. Kurz: $f \in B$ f.ü. (englisch *a.e., almost everywhere*).

- Sei $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß und $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ eine Zufallsvariable. Ist $B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$, sodass $X \in B$ $\mathbb{P}$-fast-überall, dann sagt man auch dass $X \in B$ fast sicher. Kurz: $X \in B$ f.s. (englisch *a.s., almost surely*).

Bemerkung: Die Vereinigung bis zu abzählbar vieler Nullmengen ist wegen der σ-Subadditivität (Satz 1.7 (iii)) wieder eine Nullmenge.

5.13. Lemma: Sei $f \geqslant 0$ messbar. Dann gilt

$$\int f \; d\mu = 0 \iff f = 0 \text{ a.e.}$$

Beweis:

I. f einfach

Sei $\displaystyle\int f \; d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \mu(A_i) = 0$ in kanonischer Darstellung. Da $f \geqslant 0$ gilt für $i = 1, \ldots, n$, dass $\alpha_i = 0$ oder $\mu(A_i) = 0$.

Es gilt mit der σ-Additivität

$$\mu(\{f > 0\}) = \mu\left(\bigcup_{\substack{i=1\\ \alpha_i > 0}}^{n} A_i\right) = \sum_{\substack{i=1\\ \alpha_i > 0}}^{n} \mu(A_i) = 0$$

Sei $\mu(\{f > 0\}) = 0$. Dann gilt wie im ersten Fall

$$\sum_{\substack{i=1\\ \alpha_i > 0}}^{n} \mu(A_i) = 0 \implies \int f \; d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \mu(A_i) = 0$$

II. allgemeiner Fall

Sei $\displaystyle\int f \; d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \; d\mu = 0$. Da $0 \leqslant f_n \uparrow f$, gilt $\int f_n \; d\mu = 0$ für alle $n \geqslant 1$ und mit I. folgt $f_n = 0$ a.e. Mit der Stetigkeit von unten folgt weiters

$$\mu(\{f > 0\}) = \lim_{n\to\infty} \mu(\{f_n > 0\}) = 0$$

Sei nun $\mu(\{f > 0\}) = 0$. Dann folgt wegen $f_n \leqslant f$ für alle $n \geqslant 1$, dass $\mu(\{f_n > 0\}) = 0$. Mit I. folgt $\displaystyle\int f_n \; d\mu = 0$ und schließlich $\displaystyle\int f \; d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \; d\mu = 0$. $\square$

5.14. Proposition: Sei $f \in \mathcal{L}(\mu)$ und g messbar, sodass $f = g$ a.e. Dann gilt $g \in \mathcal{L}(\mu)$ und

$$\int g \; d\mu = \int f \; d\mu$$

Beweis: Seien $f_n, g_n, n \geqslant 1$ wie im Beweis von Satz 3.22, sodass $0 \leqslant f_n \uparrow f$ und $0 \leqslant g_n \uparrow g$.

I. f, g nicht-negativ
   Es gilt

$$\begin{aligned}
\forall B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) : \mu(\{f \in A\}) &= \mu(\{f \in A, f = g\} \cup \{f \in A, f \neq g\}) \\
&= \mu(\{f \in A, f = g\}) + \mu(\{f \in A, f \neq g\}) \\
&= \mu(\{g \in A, f = g\}) + 0 \\
&= \mu(\{g \in A, f = g\}) + \mu(\{g \in A, f \neq g\}) \\
&= \mu(\{g \in A\})
\end{aligned}$$

   Damit gilt per Konstruktion von f_n, g_n, dass $f_n = g_n$ a.e. für alle $n \geqslant 1$ und damit

$$\forall n \geqslant 1 : \int f_n \; d\mu = \int g_n \; d\mu$$

   Es folgt

$$\int f \; d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n \; d\mu = \lim_{n \to \infty} \int g_n \; d\mu = \int g \; d\mu$$

II. f, g allgemein
   Sei $f = f^+ - f^-$ und $g = g^+ - g^-$. Es gilt $f^+, f^-, g^+, g^- \geqslant 0$ und daher $f^+, f^-, g^+, g^- \in \mathcal{L}(\mu)$. Nun gilt $\{f^+ \neq g^+\} = \{f \neq g, f \geqslant 0, g \geqslant 0\} \subseteq \{f \neq g\}$ und damit $f^+ = g^+$ a.e. und $f^- = g^-$ a.e. Mit I. folgt

$$\int f^+ \; d\mu = \int g^+ \; d\mu \text{ und } \int f^- \; d\mu = \int g^- \; d\mu$$

   Die gewünschte Aussage folgt mit der Konstruktion des Integrals. □

5.15. Proposition: Ist $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, dann gilt $|f| < \infty$ a.e. Insbesondere gibt es eine reelwertige, messbare Funktion $g : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, sodass $\displaystyle\int g \; d\mu = \int f \; d\mu$.

Beweis:

I. f nicht-negativ
   Seien $f_n, n \geqslant 1$ wie im Beweis von Satz 3.22. Dann gilt

$$\infty > \int f \; d\mu \geqslant \int f_n \; d\mu \geqslant n \cdot \mu(\{f \geqslant n\})$$

für alle $n \geqslant 1$. Für $n \to \infty$ muss also $\mu(\{f \geqslant n\}) \to 0$ gelten. Nun ist

$$\{f \geqslant 1\} \supseteq \{f \geqslant 2\} \supseteq \ldots \supseteq \bigcap_{n \geqslant 1} \{f \geqslant n\} = \{f = \infty\}$$

und $\mu(\{f \geqslant 1\}) \cdot 1 < \infty$ (s.o.). Mit der Stetigkeit von oben folgt also

$$\mu(\{f = \infty\}) = \lim_{n \to \infty} \mu(\{f \geqslant n\}) = 0$$

und die Aussage folgt mit $f = |f|$, da $f \geqslant 0$.

II. f messbar
Sei $f = f^+ - f^-$. Dann gilt $f^+, f^- \geqslant 0$ und $f^+, f^- \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Mit I. folgt $|f^+|, |f^-| < \infty$ a.e. Die Aussage folgt mit $|f| = |f^+ - f^-| \leqslant |f^+| + |f^-|$. Definiere nun $g := f \cdot \mathbb{1}_{\{|f| < \infty\}}$. Dann ist $f = g$ a.e. mit $f \in \mathcal{L}^1(\mu) \subseteq \mathcal{L}(\mu)$ und g messbar. Die Gleichheit der Integral folgt aus Proposition 5.14. □

5.16. Satz (Linearität und Monotonie des Lebesgue-Integrals):

(i) Seien $f, g \in \mathcal{L}(\mu)$, sodass $\int f \, d\mu + \int g \, d\mu$ wohldefiniert ist (i.e. nicht $\infty - \infty$, z.B. wenn $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$). Dann ist auch $(f + g)$ fast überall wohldefiniert und

$$\int (f + g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$$

(ii) Sei $f \in \mathcal{L}(\mu)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist $(\alpha \cdot f)$ wohldefiniert, $(\alpha \cdot f) \in \mathcal{L}(\mu)$ und

$$\int (\alpha \cdot f) \, d\mu = \alpha \cdot \int f \, d\mu$$

(iii) Seien $f, g \in \mathcal{L}(\mu)$, sodass $f \leqslant g$ a.e. Dann gilt

$$\int f \, d\mu \leqslant \int g \, d\mu$$

Beweis:

(i) I. $f, g \geqslant 0$ einfach
Seien $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mathbb{1}_{A_i}$ und $g = \sum_{j=1}^m \beta_i \cdot \mathbb{1}_{B_i}$ in kanonischer Darstellung. Dann ist

$$(f + g) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\alpha_i + \beta_j) \cdot \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}$$

und

$$\int (f + g) \, d\mu = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\alpha_i + \beta_j) \cdot \mu(A_i \cap B_j)$$

Nun gilt (Einschluss-Ausschluss) $\mu(A_i \cap B_j) = \mu(A_i) + \mu(B_j) - \mu(A_i \cup B_j)$. Außerdem sind die $A_i, i = 1, \ldots, n$ eine Partition von Ω (B_j genauso) und damit

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \cap B_j) = \mu(B_j) \text{ und } \sum_{j=1}^{m} \mu(A_i \cap B_j) = \mu(A_i)$$

Es folgt

$$\int (f+g)\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (\alpha_i + \beta_j) \cdot \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \mu(A_i) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j \cdot \mu(B_j) = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu$$

II. f, g nicht-negativ
Wähle $f_n, g_n, n \geqslant 1$ einfach mit $0 \leqslant f_n \uparrow f$ und $0 \leqslant g_n \uparrow g$. Dann gilt $0 \leqslant f_n + g_n \uparrow f + g$, wobei $f + g$ nicht-negativ und messbar ist (Proposition 3.18). Wegen $f + g \geqslant 0$ gilt auch $f + g \in \mathcal{L}(\mu)$. Mit I. folgt

$$\int (f+g)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int (f_n + g_n)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu + \lim_{n\to\infty} \int g_n\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu$$

III. f, g messbar
Beachte, dass $\int f\, d\mu$ und $\int g\, d\mu$ wohldefiniert sind, da $f, g \in \mathcal{L}(\mu)$ und schreibe

$$\begin{aligned} \int f\, d\mu + \int g\, d\mu &= \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu + \int g^+\, d\mu - \int g^-\, d\mu \\ &= \left(\int f^+\, d\mu + \int g^+\, d\mu \right) - \left(\int f^-\, d\mu + \int g^-\, d\mu \right) \in \overline{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

Damit ist $\left(\int f^+\, d\mu + \int g^+\, d\mu \right) = \left(\int f^-\, d\mu + \int g^-\, d\mu \right) = \infty$ nicht möglich. Sei also o.B.d.A. $\left(\int f^+\, d\mu + \int g^+\, d\mu \right) < \infty$ (der andere Fall folgt ähnlich). Es sind $f^+, g^+ \geqslant 0$ und mit II. gilt

$$\int f^+\, d\mu + \int g^+\, d\mu = \int (f^+ + g^+)\, d\mu \in [0, \infty)$$

Mit Proposition 5.15 folgt $|f^+ + g^+| = f^+ + g^+ < \infty$ a.e. Definiere also für $\omega \in \Omega$

$$(f+g)(\omega) := \begin{cases} f(\omega) + g(\omega) & \text{falls } f^+(\omega) + g^+(\omega) < \infty \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist $(f + g)$ wohldefiniert, messbar und $(f + g) = f + g$ a.e. Außerdem gilt per Konstruktion $(f + g)^+ \leqslant (f^+ + g^+)$ und mit (iii) folgt

$$\int (f+g)^+\, d\mu \leqslant \int (f^+ + g^+)\, d\mu = \int f^+\, d\mu + \int g^+\, d\mu < \infty$$

Damit gilt $(f+g) \in \mathcal{L}(\mu)$. Außerdem gilt

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = (f+g) \overset{a.e.}{=} f+g = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$

und damit

$$(f+g)^+ + f^- + g^- \overset{a.e.}{=} (f+g)^- + f^+ + g^+$$

Mit Proposition 5.14 folgt

$$\int (f+g)^+ + f^- + g^- \, d\mu = \int (f+g)^- + f^+ + g^+ \, d\mu$$

und mit II. schließlich

$$\int (f+g)^+ \, d\mu + \int f^- \, d\mu + \int g^- \, d\mu = \int (f+g)^- \, d\mu + \int f^+ d\mu + \int g^+ \, d\mu$$

und schließlich

$$\int (f+g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$$

(ii) I. $f \geqslant 0$ einfach
Hier gilt $\alpha \cdot f = \alpha \cdot \sum_{i=1}^n \beta_i \cdot \mathbb{1}_{B_i} = \sum_{i=1}^n (\alpha \cdot \beta_i) \cdot \mathbb{1}_{B_i}$ und damit

$$\int (\alpha \cdot f) \, d\mu = \sum_{i=1}^n (\alpha \cdot \beta_i) \cdot \mu(B_i) = \alpha \cdot \sum_{i=1}^n \beta_i \cdot \mathbb{1}_{B_i} = \alpha \cdot \int f \, d\mu$$

II. $f \geqslant 0$ messbar, $\alpha \geqslant 0$
Wähle f_n einfach, sodass $0 \leqslant f_n \uparrow f$. Dann gilt $0 \leqslant (\alpha \cdot f_n) \uparrow (\alpha \cdot f)$ und

$$\begin{aligned}
\int (\alpha \cdot f) \, d\mu &= \lim_{n\to\infty} \int (\alpha \cdot f_n) \, d\mu \\
&\overset{\text{I.}}{=} \lim_{n\to\infty} \alpha \cdot \int f_n \, d\mu \\
&= \alpha \cdot \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \\
&= \alpha \cdot \int f \, d\mu
\end{aligned}$$

III. f messbar, $\alpha \in \mathbb{R}$
Sei zuerst $\alpha \geqslant 0$. Dann ist $(\alpha \cdot f)$ wohldefiniert, da $\alpha \neq \pm\infty$ und

$$(\alpha \cdot f) = (\alpha \cdot f^+) - (\alpha \cdot f^-) = \alpha \cdot (f^+ - f^-)$$

Mit II. gilt

$$\int (\alpha \cdot f^+) \, d\mu = \alpha \cdot \int f^+ \, d\mu \quad \text{und} \quad \int (\alpha \cdot f^-) \, d\mu = \alpha \cdot \int f^- \, d\mu$$

Da $f \in \mathcal{L}(\mu)$, muss eines der beiden Integrale endlich sein und $(\alpha \cdot f) \in \mathcal{L}(\mu)$. Damit ist

$$\int (\alpha \cdot f^+) \; d\mu - \int (\alpha \cdot f^-) \; d\mu$$

wohldefiniert und mit (i) folgt

$$\begin{aligned}
\int (\alpha \cdot f) \; d\mu &= \int (\alpha \cdot f^+) - (\alpha \cdot f^-) \; d\mu \\
&= \int (\alpha \cdot f^+) \; d\mu - \int (\alpha \cdot f^-) \; d\mu \\
&= \alpha \cdot \int f^+ \; d\mu - \alpha \cdot \int f^- \; d\mu \\
&= \alpha \cdot \left(\int f^+ \; d\mu - \int f^- \; d\mu \right) \\
&= \alpha \cdot \int (f^+ - f^-) \; d\mu \\
&= \alpha \cdot \int f \; d\mu
\end{aligned}$$

Sei nun $\alpha < 0$. Dann ist $(\alpha \cdot f)$ wohldefiniert und messbar und

$$(\alpha \cdot f) = (-\alpha)(-f)$$

wobei $(-\alpha) > 0$ und $(-f) \in \mathcal{L}(\mu)$. Dammit folgt (siehe oben)

$$\begin{aligned}
\int (\alpha \cdot f) \; d\mu &= \int (-\alpha)(-f) \; d\mu \\
&= (-\alpha) \int (-f) \; d\mu \\
&= (-\alpha) \int (f^- - f^+) \; d\mu \\
&= (-1) \cdot \alpha \cdot \left(\int f^- \; d\mu - \int f^+ \; d\mu \right) \\
&= (-1)^2 \cdot \alpha \cdot \left(\int f^+ \; d\mu - \int f^- \; d\mu \right) \\
&= \alpha \cdot \int f \; d\mu
\end{aligned}$$

(iii) Betrachte hier $\max(f,g) := g \cdot \mathbb{1}_{\{f \leqslant g\}} + f \cdot \mathbb{1}_{\{f > g\}}$ messbar mit $f \leqslant \max(f,g)$ und $g = \max(f,g)$ a.e. Damit folgt $\int \max(f,g) \; d\mu = \int g \; d\mu$.

I. f nicht-negativ
Hier ist $0 \leqslant f \leqslant \max(f,g)$. Wähle nun einfache Funktionen $f_n, m_n, n \geqslant 1$, sodass $0 \leqslant f_n \uparrow f$ und $0 \leqslant m_n \uparrow \max(f,g)$. Dann gilt für alle $n \geqslant 1$

$$0 \leqslant f_n \leqslant \max(f,g) = \lim_{n \to \infty} m_n$$

und mit Lemma 5.4 folgt

$$\forall n \geqslant 1 : \int f_n \, d\mu \leqslant \lim_{n\to\infty} \int m_n \, d\mu = \int \max(f,g) \, d\mu = \int g \, d\mu$$

und damit

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \leqslant \int g \, d\mu$$

II. f messbar
Trvial, wenn $\int g^+ \, d\mu = \infty$ oder $\int f^- \, d\mu = -\infty$. Seien also $f^-, g^+ \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Wegen $f \leqslant \max(f,g)$ folgt $f^+ \leqslant [\max(f,g)]^+$ und mit I. gilt

$$\int f^+ \, d\mu \leqslant \int [\max(f,g)]^+ \, d\mu < \infty$$

Wegen $f \leqslant \max(f,g)$ gilt auch $f^- \geqslant [\max(f,g)]^-$ und mit I. folgt

$$\infty > \int f^- \, d\mu \geqslant \int [\max(f,g)]^- \, d\mu$$

Damit folgt

$$\int f \, d\mu \leqslant \int [\max(f,g)]^+ \, d\mu - \int [\max(f,g)]^- \, d\mu = \int \max(f,g) \, d\mu = \int g \, d\mu$$

□

5.17. Proposition: Sei f messbar. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$

(ii) $|f| \in \mathcal{L}^1(\mu)$

(iii) $\exists g \in \mathcal{L}^1(\mu) : |f| \leqslant g$ a.e.

(iv) $\exists h_1, h_2 \in \mathcal{L}^1(\mu) : h_1, h_2 \geqslant 0, f = h_1 - h_2$

Beweis: (i) $\Longrightarrow$ (ii): $f = f^+ - f^-, |f| = f^+ + f^-$
(ii) $\Longrightarrow$ (iii): $g := f$
(iii) $\Longrightarrow$ (iv): $|f| \leqslant g \implies 0 \leqslant f^+, f^- \leqslant g$ und mit Monotonie $\int f^+ \, d\mu, \int f^- \, d\mu \leqslant \int g \, d\mu < \infty$. Es gilt also $f^+, f^- \in \mathcal{L}^1(\mu)$ mit $f^+, f^- \geqslant 0$
(iv) $\Longrightarrow$ (i): $\int f \, d\mu = \int (h_1 - h_2) \, d\mu = \int h_1 \, d\mu - \int h_2 \, d\mu \in \mathbb{R}$, da $0 \leqslant \int h_1 \, d\mu, \int h_2 \, d\mu < \infty$ □

5.18. Korollar: Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Dann gilt auch $\max(f,g), \min(f,g) \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Beweis: Es gilt für $x, y \in \mathbb{R}$ (leicht nachzuprüfen)

$$\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$$

und damit (zweimal Dreiecksungleichung und Monotonie)

$$\int |\max(f,g)|\ d\mu = \int \left|\frac{f+g+|f-g|}{2}\right|\ d\mu \leqslant \frac{1}{2}\int 2(|f|+|g|)\ d\mu = \int |f|\ d\mu + \int |g|\ d\mu < \infty$$

Die Aussage für das Minimum folgt mit $\min(x,y) = -\max(-x,-y)$. □

5.19. Korollar (Dreiecksungleichung für Integrale): Für $f \in \mathcal{L}(\mu)$ gilt

$$\left|\int f\ d\mu\right| \leqslant \int |f|\ d\mu$$

Beweis: Es gilt $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$ und mit der Monotonie $-\int |f|\ d\mu \leqslant \int f\ d\mu \leqslant \int |f|\ d\mu$. Die Aussage folgt aus $-y \leqslant x \leqslant y \implies |x| \leqslant y$. □

5.20. Definition: Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $(\Omega', \mathcal{A}')$ ein messbarer Raum und $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega', \mathcal{A}')$ eine messbare Abbildung. Dann ist das Bildmaß (Englisch *pushforward*) von μ unter f definiert als

$$(f\#\mu)(A') := \mu\left(f^{-1}(A')\right) \text{ für alle } A' \in \mathcal{A}'$$

5.21. Proposition: Das Bildmaß ist ein Maß auf $(\Omega', \mathcal{A}')$ mit $(f\#\mu)(\Omega') = \mu(\Omega)$. Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} \mu \text{ endlich} &\iff (f\#\mu) \text{ endlich} \\ \mu \text{ Wahrscheinlichkeitsmaß} &\iff (f\#\mu) \text{ Wahrscheinlichkeitsmaß} \end{aligned}$$

Beweis: Übung!

5.22. (Transformationssatz): Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraumm $(\Omega', \mathcal{A}')$ ein messbarer Raum. Seien $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega', \mathcal{A}')$ und $g : (\Omega', \mathcal{A}') \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ messbar und $(f\#\mu)$ das entsprechende Bildmaß auf $(\Omega', \mathcal{A}')$. Zusammenfassend

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \xrightarrow{f} (\Omega', \mathcal{A}', (f\#\mu)) \xrightarrow{g} \left(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\right)$$

Dann gilt

$$\int_\Omega (g \circ f)\ d\mu = \int_{\Omega'} g\ d(f\#\mu)$$

Beweis:

I. $g = \mathbb{1}_{A'}, A' \in \mathcal{A}'$ Indikatorfunktion
Hier ist

$$(g \circ f)(\omega) = \mathbb{1}_{A'}(f(\omega)) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega \in f^{-1}(A') \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \mathbb{1}_{f^{-1}(A')}(\omega)$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_\Omega (g \circ f)\ d\mu &= \int_\Omega \mathbb{1}_{f^{-1}(A')}\ d\mu \\ &= \mu\left(f^{-1}(A')\right) = (f\#\mu)(A') \\ &= \int_{\Omega'} \mathbb{1}_{A'}\ d(f\#\mu) = \int_{\Omega'} g\ d(f\#\mu) \end{aligned}$$

II. $g = \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot \mathbb{1}_{G_i'}, G_i' \in \mathcal{A}', i = 1 \ldots, n$ einfach
Hier gilt (wie in I.)

$$(g \circ f)(\omega) = \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot \mathbb{1}_{f^{-1}(G_i')}(\omega)$$

und damit

$$\begin{aligned} \int_\Omega (g \circ f)\ d\mu &= \int_\Omega \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot \mathbb{1}_{f^{-1}(G_i')}\ d\mu \\ &= \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot \int_\Omega \mathbb{1}_{f^{-1}(G_i')}\ d\mu \\ &= \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot \int_\Omega \left(\mathbb{1}_{G_i'} \circ f\right)\ d\mu \\ &\overset{\text{I.}}{=} \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot \int_{\Omega'} \mathbb{1}_{G_i'}\ d(f\#\mu) \\ &= \int_{\Omega'} \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot \mathbb{1}_{G_i'}\ d(f\#\mu) \\ &= \int_{\Omega'} g\ d(f\#\mu) \end{aligned}$$

III. $g \geqslant 0$ nicht-negativ, messbar
Wähle $g_n : \Omega' \to \mathbb{R}, n \geqslant 1$ einfach mit $0 \leqslant g_n \uparrow g$. Dann ist für alle $n \geqslant 1$ die Zusammensetzung $(g_n \circ f)$ einfach und messbar und insbesondere $0 \leqslant (g_n \circ f) \uparrow (g \circ f)$.
Es folgt

$$\int_\Omega (g \circ f)\ d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega (g_n \circ f)\ d\mu \overset{\text{II.}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega'} g_n\ d(f\#\mu) = \int_{\Omega'} g\ d(f\#\mu)$$

IV. g allgemein (messbar)
Schreibe $g = g^+ - g^-$ und beachte, dass $(g \circ f)^+ = (g^+ \circ f)$ und $(g \circ f)^- = (g^- \circ f)$. Es folgt

$$\begin{aligned}\int_\Omega (g \circ f)\ d\mu &= \int_\Omega (g \circ f)^+ - (g \circ f)^-\ d\mu \\ &= \int_\Omega (g^+ \circ f)\ d\mu - \int_\Omega (g^- \circ f)\ d\mu \\ &\overset{\text{III.}}{=} \int_{\Omega'} g^+\ d(f\#\mu) - \int_{\Omega'} g^-\ d(f\#\mu) = \int_{\Omega'} g\ d(f\#\mu)\end{aligned}$$

□

5.23. Lemma: Seien $f_n, n \geqslant 1$ nicht-negativ und messbar, sodass $0 \leqslant f_1 \leqslant \ldots \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} f_n$. Sei g einfach, sodass $0 \leqslant g \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} f_n$. Dann gilt

$$\int g\ d\mu \leqslant \lim_{n\to\infty} \int f_n\ d\mu$$

Beweis: folgt sofort aus Lemma 5.4. □

5.24. Satz: Seien $f_n, n \geqslant 1$ nicht-negativ und messbar, sodass $0 \leqslant f_1 \leqslant \ldots \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} f_n$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\ d\mu = \int \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)\ d\mu$$

Beweis: Es gilt $\forall n \geqslant 1 : f_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} f_n \geqslant 0$ messbar. Damit folgt $\lim\limits_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{L}(\mu)$ und damit

$$\forall n \geqslant 1 : \int f_n\ d\mu \leqslant \int \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)\ d\mu$$

Es folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\ d\mu \leqslant \int \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)\ d\mu$$

Wähle nun $g_k, k \geqslant 1$, sodass $0 \leqslant g_k \uparrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n$. Mit Lemma 5.23 folgt

$$\forall k \geqslant 1 : \int g_k\ d\mu \leqslant \lim_{n\to\infty} \int f_n\ d\mu$$

und damit

$$\lim_{k\to\infty} \int g_k\ d\mu \leqslant \lim_{n\to\infty} \int f_n\ d\mu$$

Aber per Definition des Integrals gilt

$$\int \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)\ d\mu = \lim_{k\to\infty} \int g_k\ d\mu$$

und damit folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \geqslant \int \left(\lim_{n\to\infty} f_n \right) \, d\mu$$

□

5.25. Satz: Seien $f_n, n \geqslant 1$ und g messbare Funktionen, sodass

$$g \leqslant f_1 \leqslant \ldots \leqslant \lim_{n\to\infty} f_n$$

Falls $\int g^- \, d\mu < \infty$, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int \left(\lim_{n\to\infty} f_n \right) \, d\mu$$

Beweis: Es gilt $g \leqslant f_n$ und damit $f_n^- \leqslant g^-$ für alle $n \geqslant 1$. Mit der Monotonie folgt

$$\forall n \geqslant 1 : \int f_n^- \, d\mu \leqslant \int g^- \, d\mu < \infty$$

Außerdem gilt $\left(\lim_{n\to\infty} f_n \right)^- \leqslant g^-$ und mit der Monotonie

$$\int \left(\lim_{n\to\infty} f_n \right)^- \, d\mu \leqslant \int g^- \, d\mu$$

Also sind $f_n, \left(\lim_{n\to\infty} f_n \right) \in \mathcal{L}(\mu)$.

I. Sei $\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \infty$
   Mit der Monotonie gilt $\int f_n \, d\mu \leqslant \int \left(\lim_{n\to\infty} f_n \right) \, d\mu$ für alle $n \geqslant 1$ und damit

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \leqslant \int \left(\lim_{n\to\infty} f_n \right) \, d\mu$$

   Nun ist $\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \infty$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int \left(\lim_{n\to\infty} f_n \right) \, d\mu = \infty$$

II. Sei $\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu < \infty$
   Laut Annahme gilt mit der Monotonie für alle $n \geqslant 1$

$$\int g \, d\mu \leqslant \int f_n \, d\mu \leqslant \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu < \infty$$

Daher gilt $g, f_n, \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und mit Proposition 5.15 gilt $g, f_n, \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) \in \mathbb{R}$ a.e. Da es hier nur um die Werte der Integrale geht, seien also alle Funktionen reellwertig in Ω. Dann gilt für alle $n \geqslant 1$, dass $0 \leqslant (f_n - g) \uparrow \lim_{n\to\infty}(f_n - g)$ und mit Satz 5.24 folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int (f_n - g)\ d\mu = \int \left(\lim_{n\to\infty}(f_n - g)\right)\ d\mu$$

Die Aussage folgt schließlich aus der Linearität des Integrals. $\square$

5.26. Proposition: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ messbar. Falls f auf $[a,b]$ Riemann-integrierbar ist, dann ist f auch Lebesgue-integrierbar (bzgl. dem Lebesgue-Maß $\lambda = \mathrm{vol}$ auf $([a,b], \mathcal{B}([a,b]))$) und

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_{[a,b]} f\ d\lambda$$

Beweis: Seien $U_n, O_n, n \geqslant 1$ Unter- bzw. Obersummen von f, sodass

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} O_n = \int_a^b f(x)\ dx$$

per Konstruktion des Riemann-Integrals. Insbesondere sind $U_n, O_n < \infty$ für alle $n \geqslant 1$ und jede Unter- bzw. Obersumme entspricht dem Integral einer Treppenfunktion u_n bzw o_n für $n \geqslant 1$, sodass $u_1 \leqslant u_2 \leqslant \ldots \leqslant f \leqslant \ldots \leqslant o_2 \leqslant o_1$. auf $[a,b]$. Als Treppenfunktionen sind u_n, o_n insbesondere einfach und damit messbar. Es folgt (einfach zu prüfen)

$$U_n = \int u_n\ d\lambda \text{ und } O_n = \int o_n\ d\lambda$$

Da f Riemman-integrierbar auf $[a,b]$ ist folgt $|U_1|, |O_1| < \infty$ und mit der Monotonie folgt

$$\forall n \geqslant 1 : U_n \leqslant \int_{[a,b]} f\ d\lambda \leqslant O_n$$

Die Aussage folgt nun aus $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{n\to\infty} U_n \leqslant \int_{[a,b]} f\ d\lambda \leqslant \lim_{n\to\infty} O_n = \int_a^b f(x)\ dx.$ $\square$

Bemerkung: Sei f Riemann-integrierbar auf $[a,b]$, aber nicht unbedingt messbar. Dann gilt für $f^* := \lim_{n\to\infty} o_n$

- $f^* : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist messbar.
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = \int_{[a,b]} f\ d\lambda$
- $\{x \in [a,b] : f(x) \neq f^*(x)\} \subseteq N \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mit $\mu(N) = 0$

Korollar 5.27: Sei $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ messbar und (uneigentlich) Riemann-integrierbar auf $[0, \infty)$. Dann ist f auch Lebesgue-integrierbar auf $[0, \infty)$ und die Integralbegriffe stimmen überein.

Beweis: Laut Annahme gilt

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t f(x)\ dx < \infty$$

und insbesondere ist f damit Riemann-integrierbar auf $[0, t]$ für alle $t > 0$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f(x)\ dx &= \lim_{t\to\infty} \int_0^t f(x)\ dx \\
&\overset{5.26}{=} \lim_{t\to\infty} \int\limits_{[0,t]} f\ d\lambda \\
&= \lim_{t\to\infty} \int f \cdot \mathbb{1}_{[0,t]}\ d\lambda \\
&\overset{5.24}{=} \int \lim_{t\to\infty} \left(f \cdot \mathbb{1}_{[0,t]}\right)\ d\lambda \\
&= \int\limits_{[0,\infty)} f\ d\lambda
\end{aligned}$$

□

Bemerkung: Die Bedingung $f \geqslant 0$ ist notwendig! (Gegenbeispiel $\sin(x)/x$)

5.28. Beispiel:

5.29. Proposition: Sei $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ nicht-negativ und messbar. Definiere für $A \in \mathcal{A}$

$$\nu(A) := \int\limits_A f\ d\mu$$

Dann ist $\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ und für $f \in \mathcal{L}^1(\nu)$ gilt

$$\int g\ d\nu = \int fg\ d\mu$$

Beweis:

I. Zeige zunächst, dass ν ein Maß ist.

(i) $f \geqslant 0 \implies f \cdot \mathbb{1}_A \geqslant 0 \implies \displaystyle\int_A f\ d\mu \in [0, \infty]$, womit $\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ wohldefiniert ist.

(ii) $\nu(\emptyset) = \int_\emptyset f \, d\mu = \int f \cdot \mathbb{1}_\emptyset \, d\mu = \int 0 \, d\mu = 0$

(iii) Seien $A_n \in \mathcal{A}, n \geqslant 1$ disjunkt. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\nu\left(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n\right) &= \int\limits_{\bigcup_{n\geqslant 1} A_n} f \, d\mu = \int f \cdot \mathbb{1}_{\bigcup_{n\geqslant 1} A_n} \, d\mu \\
&= \int f \cdot \left(\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N \mathbb{1}_{A_n}\right) \, d\mu \\
&\overset{5.24}{=} \lim_{N\to\infty} \int f \cdot \sum_{n=1}^N \mathbb{1}_{A_n} \, d\mu \\
&= \sum_{n\geqslant 1} \int_{A_n} f \, d\mu = \sum_{n\geqslant 1} \nu(A_n)
\end{aligned}$$

II. $g = \mathbb{1}_A, A \in \mathcal{A}$ Indikatorfunktion
Hier gilt

$$\int g \, d\nu = \int \mathbb{1}_A \, d\nu = \nu(A) = \int\limits_A f \, d\mu = \int f \cdot \mathbb{1}_A \, d\mu = \int fg \, d\mu$$

III. $g = \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot \mathbb{1}_{G_i}$ einfach
Hier gilt

$$\int g \, d\nu = \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot \nu(G_i) \overset{\text{II.}}{=} \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot \left(\int\limits_{G_i} f \, d\mu\right) = \int f \cdot \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot \mathbb{1}_{G_i}\right) \, d\mu = \int fg \, d\mu$$

IV. $g \geqslant 0$ nicht-negativ, messbar
Wähle $g_n, n \geqslant 1$ einfach mit $0 \leqslant g_n \uparrow g$. Wegen III. gilt $\int g_n \, d\nu = \int fg_n \, d\mu$ für alle $n \geqslant 1$. Außerdem gilt wegen $f \geqslant 0$, dass $0 \leqslant fg_n \uparrow fg$ und damit

$$\int g \, d\nu = \lim_{n\to\infty} \int g_n \, d\nu = \lim_{n\to\infty} \int fg_n \, d\mu \overset{5.24}{=} \int \lim_{n\to\infty} fg_n \, d\mu = \int fg \, d\mu$$

V. g messbar
Sei $g = g^+ - g^-$. Wegen IV. gilt $\int g^+ \, d\nu = \int fg^+ \, d\mu$ und $\int g^- \, d\nu = \int fg^- \, d\mu$. Damit folgt

$$\int g \, d\nu = \int g^+ \, d\nu - \int g^- \, d\nu = \int f(g^+ - g^-) \, d\mu = \int fg \, d\mu$$

$\square$

Bemerkung: ν erbt alle Nullmengen von μ (kann jedoch auch zusätzliche Nullmengen haben). Es gilt also

$$\mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0$$

5.30. Definition: Für f und ν wie in Proposition 5.29 nennt man f die Dichte von ν bezüglich μ. Kurz $f = \frac{d\nu}{d\mu}$. Ist X eine reellwertige Zufallsvariable und $\mathbb{P}(X \in A) = \nu(A)$, dann nennt man f auch die Dichte von X bezüglich μ.

Bemerkung: In Proposition 5.29 sind ein Maß μ und eine Dichte f gegeben. Falls zwei Maße μ, ν gegeben sind, liefert der Satz von Radon–Nikodym (cf. Wahrscheinlichkeitstheorie 2) Bedingungen an μ und ν für die Existenz einer Dichte f.

6. Ungleichungen

Sei in diesem Kapitel $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und $X, Y : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ Zufallsvariablen.

Markov-Ungleichung

6.1. Satz (Markov-Ungleichung): Sei $X \geqslant 0$ und $c > 0$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(X \geqslant c) \leqslant c^{-1} \cdot \mathbb{E}X$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X = \int\limits_{\Omega} X \; d\mathbb{P} &= \int\limits_{X \geqslant c} X \; d\mathbb{P} + \int\limits_{X < c} X \; d\mathbb{P} \\
&\geqslant \int\limits_{X \geqslant c} X \; d\mathbb{P} \\
&\geqslant \int\limits_{X \geqslant c} c \; d\mathbb{P} = c \cdot \mathbb{P}(X \geqslant c)
\end{aligned}$$

□

6.2. Korollar: Sei $X \geqslant 0$ und $c > 0$. Dann gilt sogar

$$\mathbb{P}(X \geqslant c) \leqslant c^{-1} \cdot \mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_{X \geqslant c}]$$

Beweis: wie 6.1. □

6.3. Korollar (Chebyshev-Ungleichung): Sei $X \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ und $c > 0$. Dann gilt

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}X| \geqslant c\right) \leqslant c^{-2} \cdot \mathrm{Var}(X)$$

Beweis: Mit der Markov-Ungleichung folgt

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}X| \geqslant c\right) = \mathbb{P}\left((X - \mathbb{E}X)^2 \geqslant c^2\right) \overset{6.1}{\leqslant} c^{-2} \cdot \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2] = c^{-2} \cdot \mathrm{Var}(X)$$

6.4. Korollar (Chernoff-Schranke): Sei X eine reellwertige Zufallsvariable und $c > 0$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(X \geqslant c) \leqslant \inf_{t>0} e^{-tc} \cdot M_X(t)$$

wobei $M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$ die momenterzeugende Funktion von X ist.

Beweis: Sei $t > 0$. Dann gilt mit der Markov-Ungleichung

$$\mathbb{P}(X \geqslant c) = \mathbb{P}\left(e^{tX} \geqslant e^{tc}\right) \overset{6.1}{\leqslant} e^{-tc} \cdot M_X(t)$$

Diese Ungleichung gilt für alle $t > 0$. Daher können wir das Infimum nehmen und die Chernoff-Schranke folgt. □

Konvexität und Jensen-Ungleichung

6.5. Definition: Sei $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht-leeres Intervall. Dann ist eine Abbildung $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ konvex, falls gilt

$$\forall x, y \in (a, b), \forall \alpha \in (0, 1) : f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leqslant \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

6.6. Lemma: Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Dann ist f genau dann konvex, wenn gilt

$$\forall s, t, u : a < s < t < u < b : \frac{f(t) - f(s)}{t - s} \leqslant \frac{f(u) - f(t)}{u - t}$$

Beweis:

I. Sei zunächst f konvex (nach Definition 6.5)
Setze $\alpha := \dfrac{u - t}{u - s}$. Dann ist $1 - \alpha = \dfrac{t - s}{u - s}$ und $\alpha s + (1 - \alpha)u = t$. Aus der Konvexität von f folgt

$$f(\alpha s + (1 - \alpha)u) = f(t) \leqslant \alpha f(s) + (1 - \alpha)f(u) \tag{1}$$

Damit gilt

$$f(t) - f(s) \leqslant (1 - \alpha)[f(u) - f(s)] = \frac{t - s}{u - s}[f(u) - f(s)]$$

und

$$\frac{f(t) - f(s)}{t - s} \leqslant \frac{f(u) - f(s)}{u - s}$$

Aus (1) folgt ebenfalls

$$f(t) - f(u) \leqslant \alpha[f(s) - f(u)]$$

und damit

$$\frac{f(u) - f(t)}{u - t} \geqslant \frac{f(u) - f(s)}{u - s}$$

II. Sei nun die Bedingung aus Lemma 6.6 erfüllt
Falls $x < y$, setze

$$s := x,\ t := \alpha x + (1-\alpha)y,\ u := y$$

Dann ist

$$\alpha = \frac{u-t}{u-s},\ 1-\alpha = \frac{t-s}{u-s}$$

Laut Annahme gilt

$$f(t) \leqslant f(s) + \frac{t-s}{u-s}[f(u) - f(s)] = \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

Falls $x > y$, setze

$$s := y,\ t := \alpha x + (1-\alpha)y,\ u := x$$

Dann ist

$$\alpha = \frac{t-s}{u-s},\ 1-\alpha = \frac{u-t}{u-s}$$

und die Aussage folgt wie oben aus der Annahme. □

6.7. Lemma: Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. f ist genau dann konvex, wenn gilt

$$\forall x \in (a,b), \exists \gamma \in \mathbb{R}, \forall y \in (a,b) : f(y) \geqslant f(x) + \gamma(y-x)$$

Beweis:

I. Sei f konvex (nach Definition 6.5)
Wähle $a < x_- < x < b$ und setze

$$\gamma := \inf_{y\in(x,b)} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geqslant \frac{f(x)-f(x_-)}{x-x_-} > -\infty$$

Für $x = y$ ist die Aussage trivial. Für $x < y$ ist

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geqslant \gamma$$

sodass $f(y) \geqslant f(x) + \gamma(y-x)$. Für $x > y$ ist

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leqslant \gamma$$

da $\gamma \geqslant \dfrac{f(x)-f(x_-)}{x-x_-}$ für alle $x_- \in (a,x)$, sodass auch $f(y) \geqslant f(x) + \gamma(y-x)$.

II. Sei nun die Bedingung aus Lemma 6.7 erfüllt
Wähle $a < s < t < u$. Aus der Annahme folgt $f(s) \geqslant f(t) + \gamma(s-t)$ und damit

$$\gamma \geqslant \frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

Ebenfalls folgt aus der Annahme $f(u) \geqslant f(t) + \gamma(u-t)$ und damit

$$\gamma \leqslant \frac{f(u)-f(t)}{u-t}$$

Die Konvexität von f folgt mit Lemma 6.6. □

6.8. Korollar: Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf (a,b). Dann gilt

$$f \text{ konvex} \iff f' \text{ monoton nicht-fallend}$$

Beweis:

I. Sei f konvex (nach Definition 6.5)
Seien $a < s < u < b$ und wähle s_+, t_-, t_+, u_- so, dass

$$s < s_+ < t_- < t_+ < u_- < u$$

Mit Lemma 6.6 folgt

$$\frac{f(s_+) - f(s)}{s_+ - s} \leqslant \frac{f(t_-) - f(s_+)}{t_- - s_+} \leqslant \frac{f(t_+) - f(t_-)}{t_+ - t_-} \leqslant \frac{f(u_-) - f(t_+)}{u_- - t_+} \leqslant \frac{f(u) - f(u_-)}{u - u_-}$$

und

$$f'(s) = \lim_{s_- \searrow s} \frac{f(s_+) - f(s)}{s_+ - s} \leqslant \frac{f(t_+) - f(t_-)}{t_+ - t_-} \leqslant \lim_{u_- \nearrow u} \frac{f(u) - f(u_-)}{u - u_-} = f'(u)$$

Also folgt für alle $u, s \in (a,b)$ mit $s < u$, dass $f'(s) \leqslant f'(u)$.

II. Sei f' monoton nicht-fallend
Seien $a < s < t < u < b$. Es gilt (Fundamentalsatz der Analysis, Mittelwertsatz)

$$f(t) = f(s) + \int_s^t f(z)\ dz \leqslant f(s) + (t-s)f'(t)$$

und damit

$$\frac{f(t) - f(s)}{t - s} \leqslant f'(t)$$

Ebenfalls gilt (wie oben)

$$f(u) = f(t) + \int_t^u f(z)\ dz \geqslant f(t) + (u-t)f'(t)$$

und damit

$$\frac{f(u) - f(u)}{u - t} \geqslant f'(t)$$

Die Aussage folgt mit Lemma 6.6. □

6.9. Lemma: Ist f konvex auf (a,b), dann ist f stetig auf (a,b).

Beweis: Sei $x \in (a,b)$. Für $s < y < x$ ist mit Lemma 6.7

$$f(y) \geqslant f(x) + \gamma(y - x)$$

und

$$f(y) \leqslant \alpha f(x) + (1-\alpha) f(s)$$

für $\alpha = \dfrac{y-s}{x-s}$. Damit gilt $\lim\limits_{y \nearrow x} = f(x)$. Analog folgt auch $\lim_{y \searrow x} f(y) = f(x)$. □

6.10. Satz (Jensen-Ungleichung): Sei $X \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ mit $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to ((a,b), \mathcal{B}((a,b)))$, mit $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$. Ist $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ konvex, dann gilt

$$f(\mathbb{E}X) \leqslant \mathbb{E}f(X)$$

Beweis: Es gilt $\mathbb{E}X \in (a,b)$ (Monotonie, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$). Mit Lemma 6.7 gilt

$$f(X) \geqslant f(\mathbb{E}X) + (X - \mathbb{E}X) \cdot \gamma =: Z$$

Es gilt $Z \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ (leicht nachzuprüfen) und

$$\mathbb{E}Z = \mathbb{E}[f(\mathbb{E}X)] + \gamma \cdot \mathbb{E}[X - \mathbb{E}X] = f(\mathbb{E}X)$$

Da $f(X) \geqslant Z$, gilt $[f(X)]^- \leqslant Z^- \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ und damit $f(X) \in \mathcal{L}(\mathbb{P})$. Mit der Monotonie folgt

$$f(\mathbb{E}X) = \mathbb{E}[f(\mathbb{E}X)] = \int Z \, d\mathbb{P} \leqslant \int f(X) \, d\mathbb{P} = \mathbb{E}f(X)$$

$\square$

Hölder-Ljapunov-Minkowski

6.11. Lemma (Young-Ungleichung): Es sei $p \in (1, \infty)$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Fr $a, b \geqslant 0$ gilt

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $a^p = b^q$.

Beweis: Falls $a = 0$ oder $b = 0$ gilt die Ungleichung trivial. Es gelte also $a, b > 0$. Setze $t := p^{-1}$ und damit $1 - t = q^{-1}$. Da $x \mapsto \log x$ konkav ist gilt

$$\log\left(ta^p + (1-t)b^q\right) \geqslant t \log\left(a^p\right) + (1-t) \log\left(b^q\right) = \log(ab)$$

und die Ungleichung folgt mit Anwendung von exp auf beiden Seiten. $\square$

6.12. Satz (Hölder-Ungleichung): Sei nun $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f, g \in \mathcal{L}(\mu)$. Sei $p \in (1, \infty)$ und q der konjugierte (duale) Index zu p, i.e. $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Dann gilt

$$\int |fg| \, d\mu \leqslant \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \cdot \left(\int |g|^q \, d\mu\right)^{1/q}$$

Beweis:

I. Fall: $\displaystyle\int |f|^p \, d\mu = 0$ oder $\displaystyle\int |g|^q \, d\mu = 0$
Sei o.B.d.A. der erste Fall zutreffend. Dann gilt $|f| = 0$ a.e. und (mit der Konvention $0 \cdot \infty = 0$) folgt $|fg| = 0$ a.e. und die Aussage ist trivial.

II. Fall: $\displaystyle\int |f|^p \, d\mu, \int |g|^q \, d\mu > 0$
Die Aussage ist trivial, falls eines der Integrale unendlich ist. Es seien also beide Integrale reellwertig. Setze

$$A := \frac{|f|^p}{\displaystyle\int |f|^p \, d\mu}, \; B := \frac{|g|^q}{\displaystyle\int |g|^q \, d\mu}$$

Mit Lemma 6.11 gilt

$$\frac{|fg|}{\left(\displaystyle\int |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \left(\displaystyle\int |g|^q \, d\mu\right)^{1/q}} \leqslant \frac{|f|^p}{p \cdot \left(\displaystyle\int |f|^p \, d\mu\right)} + \frac{|g|^q}{q \cdot \left(\displaystyle\int |g|^q \, d\mu\right)}$$

Die Ungleichung folgt mit der Monotonie. □

Bemerkung: Die Ungleichung hält auch für $p = 1$ und $p = \infty$ mit entsprechenden konjugierten Indizes $q = \infty$ und $q = 1$. Außerdem sei für $p \in (0, \infty)$

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) := \left\{ f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) : \int |f|^p \, d\mu < \infty \right\}$$

6.13. Korollar (Cauchy–Schwarz-Ungleichung):

$$\int |fg| \, d\mu \leqslant \left(\int |f|^{1/2} \, d\mu\right)^{1/2} \left(\int |g|^{1/2} \, d\mu\right)^{1/2}$$

Bemerkung: Für Zufallsvariablen $X, Y \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P})$ mit $\mathrm{Var}(X), \mathrm{Var}(Y) > 0$ definiere den Korrelationskoeffizienten

$$\rho_{X,Y} := \frac{\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)\right]}{\sqrt{\mathrm{Var}(X) \cdot \mathrm{Var}(Y)}}$$

Dieser ist wegen Korollar 6.13 und Satz 6.12 wohldefiniert und es gilt $\rho_{X,Y} \in [-1, 1]$.

6.14. Korollar (Ljapunov-Ungleichung): Betrachte einen endlichen Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mit $\mu(\Omega) = 1$ und eine messbare Abbildung $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$. Für $1 \leqslant p \leqslant q < \infty$ gilt

$$\left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \leqslant \left(\int |f|^q \, d\mu\right)^{1/q}$$

Beweis: Setze $A := |f|^p, B := 1, a := q/p, b := q/(q-p) = a/(a-1)$. Dann gilt $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ und mit Satz 6.12 folgt

$$\int |f|^p \, d\mu = \int |AB| \, d\mu \leqslant \left(\int |A|^a \, d\mu \right)^{1/a} \cdot \left(\int |B|^b \, d\mu \right)^{1/b} = \left(\int |f|^q \, d\mu \right)^{p/q}$$

□

Bemerkung: Die Ungleichung lässt sich natürlich auf beliebige endliche Maßräume erweitern. In der englischsprachigen Literatur wird unter der Ljapunov-Ungleichung oft ein Korollar der Hölder-Ungleichung (Log-Konvexität von L^p) angegeben, siehe z.B. Problem 3.12 und Problem 3.13 aus Teschl, G. (2024) *Topics in Real Analysis.*, p. 83.

6.15. Satz (Minkowski-Ungleichung): Für $p \in [1, \infty)$ gilt

$$\left(\int |f+g|^p \, d\mu \right)^{1/p} \leqslant \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} + \left(\int |g|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

Beweis: Der Beweis ist trivial, falls $\displaystyle\int |f+g|^p \, d\mu = 0$ oder einer der Summanden auf der rechten Seite unendlich ist. Sei also $\displaystyle\int |f+g|^p \, d\mu > 0$ und $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Der Fall $p = 1$ folgt aus der Dreiecksungleichung für Betrag und Monotonie. Sei also $p \in (0, \infty)$. Es gilt $|f+g|^p = |f+g| \cdot |f+g|^{p-1} \leqslant |f| \cdot |f+g|^{p-1} + |g| \cdot |f+g|^{p-1}$. Mit der Monotonie folgt

$$\int |f+g| \, d\mu \leqslant \int |f| \cdot |f+g|^{p-1} \, d\mu + \int |g| \cdot |f+g|^{p-1} \, d\mu$$

Wende nun die Hölder-Ungleichung mit $q := p/(p-1)$ an. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int |f+g|^p \, d\mu &\leqslant \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \cdot \left(\int |f+g|^{p-1 \cdot \frac{p}{p-1}} \, d\mu \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\quad + \left(\int |g|^p \, d\mu \right)^{1/p} \cdot \left(\int |f+g|^{p-1 \cdot \frac{p}{p-1}} \, d\mu \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&= \left(\int |f+g|^p \, d\mu \right)^{\frac{p-1}{p}} \left[\left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} + \left(\int |g|^p \, d\mu \right)^{1/p} \right]
\end{aligned}$$

□

Bemerkung: Für $p \in [1, \infty)$ ist die Abbildung

$$\|f\|_p := \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^p(\mu)$. Für den Quotientenraum $L^p(\mu)$ bezüglich der Äquivalenzrelation $f \sim g \iff f = g$ a.e. bildet $\| \cdot \|_p$ eine Norm.

7. Unabhängigkeit

In diesem Kapitel sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, Y : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega', \mathcal{A}')$ Zufallsvariablen. Sei außerdem $I \neq \emptyset$ eine beliebige Indexmenge.

Unabhängigkeit von Ereignissen und Zufallsvariablen

7.1. Definition: Ereignisse $A_i \in \mathcal{A}_i, i \in I$ sind unabhängig, falls gilt

$$\forall J \subseteq I \text{ mit } |J| < \infty : \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)$$

Kurz $A_i, i \in I$ u.a.

7.2. Beispiel: Paarweise Unabhängigkeit impliziert nicht unbedingt Unabhängigkeit. Betrachte zum Beispiel $X, Y \in \mathcal{U}\{0, 1\}$ unabhängig diskret-gleichverteilt und setze $Z := (X + Y) \bmod 2$

Bemerkung: Betrachte unabhängige Eregnisse A, B. Dann sind auch folgende Ereignisse u.a.:

$$A, B^c \qquad A^c, B \qquad A^c, B^c \qquad A, \emptyset \qquad A, \Omega \qquad \text{etc.}$$

Also ist jedes Ereignis in $\sigma(\{A\}) = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$ von jedem Ereignis in $\sigma(\{B\}) = \{\emptyset, \Omega, B, B^c\}$ u.a.

7.3. Definition: Familien von Ereignissen $\mathcal{G}_i \subseteq \mathcal{A}, i \in I$ sind unabhängig, wenn für jede Auswahl von Mengen $G_i \in \mathcal{G}_i$ die entsprechenden Ereignisse unabhängig sind. Insbesondere folgt damit aus der Unabhängigkeit eines Mengensystems auch die Unabhängigkeit aller gröberen Mengensysteme, i.e.

$$\forall i \in I : \mathcal{G}_i, i \in I \text{ u.a. und } \mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{G}_i \implies \mathcal{F}_i, i \in I \text{ u.a.}$$

7.4. Definition: Zufallsvariablen $X_i, i \in I$ sind unabhängig, wenn die σ-Algebren $\sigma(X_i), i \in I$ unabhängig sind.

7.5. Proposition: Seien $(X_i, \mathcal{X}_i)$ und $(Y_i, \mathcal{Y}_i)$ messbare Räume und $X_i : (\Omega, \mathcal{A}) \to (X_i, \mathcal{X}_i)$ unabhängige Zufallsvariablen für $i \in I$. Seien außerdem $g_i : (X_i, \mathcal{X}_i) \to (Y_i, \mathcal{Y}_i)$ messbare Abbildungen für $i \in I$. Dann sind auch die Zufallsvariablen $(g_i \circ X_i) : (\Omega, \mathcal{A}) \to (Y_i, \mathcal{Y}_i), i \in I$ unabhängig.

Beweis: Für $i \in I$ gilt

$$\begin{aligned}\sigma(g_i \circ X_i) &= \sigma\left(\left\{(g_i \circ X_i)^{-1}(A_i) : A_i \in \mathcal{Y}_i\right\}\right)\\ &= \sigma\left(\left\{X_i^{-1}\left(g_i^{-1}(A_i)\right) : A_i \in \mathcal{Y}_i\right\}\right)\\ &\subseteq \sigma\left(\left\{X_i^{-1}\left(B_i\right) : B_i \in \mathcal{X}_i\right\}\right)\end{aligned}$$

wobei die letze Inklusion aus der Messbarkeit von g_i folgt. Die Aussage folgt aus Definitionen 7.3 und 7.4. □

7.6. Proposition: Betrachte unabhängige Zufallsvariablen $X, Y : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$, sodass $X, Y \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$. Dann gilt $XY \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ und $\mathbb{E}[XY] = (\mathbb{E}X) \cdot (\mathbb{E}Y)$.

Beweis:

I. X, Y Indikatorfunktionen
Seien hier $X = \mathbb{1}_A, Y = \mathbb{1}_B$ mit $A, B \in \mathcal{A}$. Dann gilt $A = \{X = 1\}, B = \{Y = 1\}$ und A, B sind unabhängig. Es gilt $XY = \mathbb{1}_{A\cap B} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ (einfache Überlegung) und

$$\mathbb{E}[XY] = \int \mathbb{1}_{A\cap B}\, d\mathbb{P} = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = (\mathbb{E}X) \cdot (\mathbb{E}Y)$$

II. X, Y einfache Funktionen
Seien $X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \mathbb{1}_{A_i}, Y = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \cdot \mathbb{1}_{B_j}$ mit A_i disjunkt und α_i alle verschieden für $i = 1, \dots, n$ und B_j disjunkt und β_j alle verschieden für $j = 1 \dots, m$. Dann sind $A_i = \{X = \alpha_i\}$ und $B_j = \{Y = \beta_j\}$ u.a. für $i = 1, \dots, n$ und $j = 1 \dots, m$. Außerdem ist XY wieder einfach und damit $XY \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ und es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[XY] &= \int \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha_i\beta_j \cdot \mathbb{1}_{A_i}\mathbb{1}_{B_j}\, d\mathbb{P}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha_i\beta_j \cdot \mathbb{P}(A_i \cap B_j)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha_i\beta_j \cdot \mathbb{P}(nA_i)\mathbb{P}(B_j)\\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \mathbb{P}(A_i)\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} \beta_j \cdot \mathbb{P}(B_j)\right) = (\mathbb{E}X) \cdot (\mathbb{E}Y)\end{aligned}$$

III. X, Y nicht negativ, messbar
Wähle einfache Funktionen $X_n, Y_n, n \geqslant 1$, sodass $0 \leqslant X_n \uparrow X$ und $0 \leqslant Y_n \uparrow Y$. Dann gilt auch $0 \leqslant X_nY_n \uparrow XY$. Für $X_n, Y_n, n \geqslant 1$ wie üblich ist X_n eine messbare Funktion von X und Y_n eine messbare Funktion von Y. Da $XY \geqslant 0$, gilt $XY \in \mathcal{L}(\mathbb{P})$ und $\mathbb{E}[XY]$ ist wohldefiniert in $\overline{\mathbb{R}}$. Es gilt

$$\mathbb{E}[XY] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_nY_n] = \lim_{n\to\infty} (\mathbb{E}X_n) \cdot (\mathbb{E}Y_n) = (\mathbb{E}X) \cdot (\mathbb{E}Y)$$

und damit $XY \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$.

IV. X, Y messbar
Schreibe $X = X^+ - X^-$ und $Y = Y^+ - Y^-$. Mit Proposition sind X^-, Y^- u.a., X^+, Y^+ u.a., X^-, Y^+ u.a. und X^+, Y^- u.a. Ebenfalls gilt

$$|XY| \leqslant |X^+Y^+ - X^-Y^+ + X^-Y^- - X^+Y^-| \leqslant X^+Y^+ + X^-Y^+ + X^-Y^- + X^+Y^-$$

wobei alle Summanden auf der rechten Seite integrierbar sind. Damit gilt $XY \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[XY] &= \mathbb{E}[X^+Y^+] + \mathbb{E}[X^-Y^-] - \mathbb{E}[X^-Y^+] - \mathbb{E}[X^+Y^-] \\ &= (\mathbb{E}X^+) \cdot (\mathbb{E}Y^+) + (\mathbb{E}X^-) \cdot (\mathbb{E}Y^-) - (\mathbb{E}X^-) \cdot (\mathbb{E}Y^+) - (\mathbb{E}X^+) \cdot (\mathbb{E}Y^-) \\ &= (\mathbb{E}X) \cdot (\mathbb{E}Y)\end{aligned}$$

□

Borel–Cantelli Lemmata

7.7. Definition: Seien $A_n \subseteq \Omega, n \geqslant 1$. Definiere

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n\geqslant 1} \bigcup_{m\geqslant n} A_m \text{ und } \liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n\geqslant 1} \bigcap_{m\geqslant n} A_m$$

Intuitiv macht diese Definition Sinn, da für $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_M$ gilt, dass $M = \limsup_{n\to\infty} A_n$ und ähnliches für den $\liminf$. Kurz $\limsup_{n\to\infty} A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ unendlich oft}\}$ (englisch: A_n *infinitely often*) und $\liminf_{n\to\infty} A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ letzendlich}\}$ (englisch: A_n *eventually*).

Bemerkung: Es gilt

- $\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right)^c = \liminf_{n\to\infty} A_n^c$ (De Morgan)
- $\liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} A_n$
- A_n messbar für $n \geqslant 1 \implies \limsup_{n\to\infty} A_n, \liminf_{n\to\infty} A_n$ messbar

7.8. Lemma (I. Borel–Cantelli Lemma) Betrachte einen allgeminen Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Seien $A_n \in \mathcal{A}, n \geqslant 1$, sodass $\sum_{n\geqslant 1} \mu(A_n) < \infty$. Dann folgt $\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0$.

Beweis: Da $\mu(A_n) \in [0,\infty)$ für alle $n \geqslant 1$, ist die Reihe $\sum_{n\geqslant 1} \mu(A_n)$ absolut konvergent. Ebenfalls gilt

$$\bigcup_{m\geqslant 1} A_m \supseteq \bigcup_{m\geqslant 2} A_m \supseteq \ldots \supseteq \bigcap_{n\geqslant 1} \bigcup_{m\geqslant n} A_m = \limsup_{n\to\infty} A_n$$

und $\mu\left(\bigcup_{m\geqslant 1} A_m\right) \leqslant \sum_{m\geqslant 1} \mu(A_m) < \infty$. Mit der Stetigkeit von oben folgt

$$\begin{aligned}
\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) &= \mu\left(\bigcap_{n\geqslant 1} \bigcup_{m\geqslant n} A_m\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{m\geqslant n} A_n\right) \\
&\leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{m\geqslant n} \mu(A_n) = 0
\end{aligned}$$

wobei die letze Gleichung aus der (bedingten) Konvergenz folgt (Cauchy-Folge). □

7.9. Lemma (II. Borel–Cantelli Lemma) Betrachte einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und $A_n \in \mathcal{A}, n \geqslant 1$ unabhängig, sodass $\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(A_n) = \infty$. Dann ist $\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 1$.

Beweis: Betrachte die Ungleichung (Beweis z.B. mit Mittelwertsatz oder 1. und 2. Ableitung)

$$1 - x \leqslant e^{-x} \text{ für alle } x \geqslant 0$$

Laut Annahme gilt für alle $N \geqslant 1 : \sum_{n\geqslant N} \mathbb{P}(A_n) = \infty$ (einfache Überlegung). Zeige nun $\mathbb{P}\left(\liminf_{n\to\infty} A_n^c\right) = 0$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\liminf_{n\to\infty} A_n^c\right) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{m\geqslant n} A_m^c\right) = \lim_{n\to\infty} \prod_{m\geqslant n} \mathbb{P}(A_m^c) \\
&= \lim_{n\to\infty} \prod_{m\geqslant n} (1 - \mathbb{P}(A_m)) \leqslant \lim_{n\to\infty} \prod_{m\geqslant n} e^{-\mathbb{P}(A_m)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \exp\left(-\sum_{m\geqslant n} \mathbb{P}(A_m)\right) = \exp\left(-\lim_{n\to\infty} \sum_{m\geqslant n} \mathbb{P}(A_m)\right) = 0
\end{aligned}$$

□

7.10. Korollar: Seien $X_n : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})), n \geqslant 1$ nicht-negative Zufallsvariablen und sei

$$\forall \varepsilon > 0 : \sum_{n \geqslant 1} \mathbb{P}(X_n > \varepsilon) < \infty$$

Dann gilt $\mathbb{P}\left(\lim\limits_{n\to\infty} X_n = 0\right)$.

Beweis: Da $X_n \geqslant 0$ für $n \geqslant 1$ gilt

$$\left\{\lim_{n\to\infty} X_n = 0\right\} = \left\{\limsup_{n\to\infty} X_n = 0\right\} = \bigcap_{k\geqslant 1} \left\{\limsup_{n\to\infty} X_n \leqslant \frac{1}{k}\right\}$$

Aus der Voraussetzung folgt nun

$$\forall k \geqslant 1 : \sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}\left(X_n > k^{-1}\right) < \infty$$

und mit Lemma 7.8 gilt $\mathbb{P}\left(\limsup\limits_{n\to\infty}\{X_n > k^{-1}\}\right) = 0$. Es gilt

$$1 = \mathbb{P}\left(\liminf_{n\to\infty}\{X_n \leqslant k^{-1}\}\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} X_n \leqslant k^{-1}\right) \leqslant 1$$

und damit $\mathbb{P}\left(\limsup\limits_{n\to\infty} X_n > k^{-1}\right) = 0$ für alle $k \geqslant 1$. Schließlich folgt

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\geqslant 1}\left\{\limsup_{n\to\infty} X_n \leqslant k^{-1}\right\}\right) = 1-\mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geqslant 1}\left\{\limsup_{n\to\infty} X_n > k^{-1}\right\}\right) \geqslant 1-\sum_{k\geqslant 1}\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} X_n > k^{-1}\right) = 1$$

□

7.11. Lemma: Sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}$ ein π-System und $A \in \mathcal{A}$. Sind $\mathcal{M}$ und $\{A\}$ unabhängig, dann sind auch $\sigma(\mathcal{M})$ und $\{A\}$ unabhängig.

Beweis: Trivial, falls $\mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$. Sei also $\mathbb{P}(A) \in (0,1)$ und zeige $\forall M \in \sigma(\mathcal{M}) : \mathbb{P}(A \cap M) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(M)$. Setze dafür

$$\mathbb{P}(\,\cdot\,|A) := \frac{\mathbb{P}(\,\cdot\, \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$$

für $\mathbb{P}(A) \neq 0$ (laut Annahme erfüllt). Zeige also $\mathbb{P}(M|A) = \mathbb{P}(M)$ für alle $M \in \sigma(\mathcal{M})$. $\mathbb{P}(\,\cdot\,|A)$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ und es gilt laut Annahme

$$\forall M \in \mathcal{M} : \mathbb{P}(M|A) = \mathbb{P}(M)$$

Mit dem λ–π-Theorem folgt, dass $\mathbb{P}(\,\cdot\,|A)$ und $\mathbb{P}(\cdot)$ auch auf $\sigma(\mathcal{M})$ übereinstimmen müssen.

□

7.12. Satz: Sei für $i \in I$, $\mathcal{M}_i \subseteq \mathcal{A}$ ein π-System. Dann gilt

$$\mathcal{M}_i, i \in I \text{ u.a.} \iff \sigma(\mathcal{M}_i), i \in I \text{ u.a.}$$

Beweis: Die Richtung $\Longleftarrow$ ist trivial. Sei also $J \subseteq I, J = \{1, \ldots, k\}$ endlich und zeige, dass $\sigma(\mathcal{M}_j), j \in J$ unabhängig sind.

1. Schritt: Wähle $M_j \in \mathcal{M}_j$ beliebig für $j = 2, \ldots, k$. Laut Annahme sind $\mathcal{M}_1$ und $\{M_2 \cap \ldots \cap M_k\}$ unabhängig, sodass mit Lemma 7.11. auch $\sigma(\mathcal{M}_1)$ und $\{M_2 \cap \ldots \cap M_k\}$ unabhängig sind. Es folgt, dass $\sigma(\mathcal{M}_1), \mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{M}_k$ unabhängig sind.

2. Schritt: Wähle $M_1 \in \sigma(\mathcal{M}_1)$ und $M_j \in \mathcal{M}_j, j = 3, \ldots, k$. Wegen dem 1. Schritt sind $\mathcal{M}_2$ und $\{M_1 \cap M_3 \cap \ldots \cap M_k\}$ unabhängig. Mit Lemma 7.11 folgt, dass $\sigma(\mathcal{M}_2)$ und $\{M_1 \cap M_3 \cap \ldots \cap M_k\}$ unabhängig sind und damit $\sigma(\mathcal{M}_2), \sigma(\mathcal{M}_1), \mathcal{M}_3, \ldots, \mathcal{M}_k$ unabhängig sind.

Nach $k-2$ weiteren Schritten ist die Unabhängigkeit von $\sigma(\mathcal{M}_1), \ldots, \sigma(\mathcal{M}_k)$ bewiesen. □

7.13. Korollar: Seien $X_i : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})), i \in I$ Zufallsvariablen. Dann sind die $X_i, i \in I$ genau dann unabhängig, wenn gilt

$$\forall J \subseteq I, |J| < \infty : \forall t_j \in \overline{\mathbb{R}}, j \in J : \mathbb{P}(X_j \leqslant t_j, j \in J) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(X_j \leqslant t_j)$$

Falls $X_i, i \in I$ reelwertig sind, können die $t_j \in \mathbb{R}$ gewählt werden.

Beweis: Die Richtung $\Longrightarrow$ ist trivial. Es gilt (cf. Kapitel 3) $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma(\mathcal{K}) = \sigma\left(\{[-\infty, t] : t \in \overline{\mathbb{R}}\}\right)$. Für $i \in I$ setze $\mathcal{M}_i := \left\{X_i^{-1}([-\infty, t]) : t \in \overline{\mathbb{R}}\right\}$. Mit Proposition 3.4 gilt $\sigma(\mathcal{M}_i) = \sigma(X_i)$ für alle $i \in I$. Da der Durchschnitt zweier abgeschlossener Intervalle wieder ein abgeschlossenes Intervall ist, ist $\mathcal{M}_i$ für $i \in I$ ein π-System. Laut Annahme sind $\mathcal{M}_i, i \in I$ unabhängig. Mit Satz 7.12 folgt die Unabhängigkeit der $\sigma(X_i), i \in I$ und damit per Definition die Unabhängigkeit der $X_i, i \in I$. □

7.14. Proposition: Seien $X_i : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega', \mathcal{A}'), i \in I$ unabhängige Zufallsvariablen. Für eine Partition $I = K \cup L$ mit $K, L \neq \emptyset$ sind auch $\sigma(X_k, k \in K)$ und $\sigma(X_\ell, \ell \in L)$ unabhängig.

Beweis: Mit Lemma 3.5 gilt

$$\sigma(X_k, k \in K) = \sigma\left(\bigcap_{j \in J}\{X_j \in A'_j\} : J \subseteq K, |J| < \infty, A'_j \in \mathcal{A}' \text{ für } j \in J\right) = \sigma(\mathcal{E}_1)$$

und $\sigma(X_\ell, \ell \in L) = \sigma(\mathcal{E}_2)$, wobei $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ π-Systeme sind (einfach nachzuprüfen). Außerdem sind $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ unabhängig, denn für $A = \bigcap_{j \in J}\{X_j \in A'_j\} \in \mathcal{E}_1$ für $J \subseteq K$ endlich und $B =$

$\bigcap_{m\in M}\{X_m \in A'_m\}$ für $M \subseteq L$ endlich gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A\cap B) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J\cup M}\{X_j\in A'_j\}\right) \overset{J\cup M\subseteq I}{=} \prod_{j\in J\cup M}\mathbb{P}(X_j\in A'_j)\\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J}\{X_j\in A'_j\}\right)\cdot\mathbb{P}\left(\bigcap_{m\in M}\{X_m\in A'_m\}\right) = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)\end{aligned}$$

da K, L disjunkt sind und damit auch alle endlichen Teilmengen J, M disjunkt sind. Mit Satz 7.12 folgt nun, dass $\sigma(\mathcal{E}_1)$ und $\sigma(\mathcal{E}_2)$ unabhängig sind und damit die Aussage. $\square$

Asymptotische σ-Algebra

7.15. Definition: Seien $X_n, n \geqslant 1$ Zufallsvariablen. Setze

$$\mathcal{B}_n := \sigma(X_1,\ldots,X_n) \text{ und } \mathcal{T}_n := \sigma(X_{n+1}, X_{n+2},\ldots)$$

Dann gilt $\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{B}_{n+1}$ und $\mathcal{T}_n \supseteq \mathcal{T}_{n+1}$ für alle $n \geqslant 1$. Definiere weiters

$$\mathcal{B} := \bigcup_{n\geqslant 1}\mathcal{B}_n \text{ und } \mathcal{T}_\infty := \bigcap_{n\geqslant 1}\mathcal{T}_n$$

Dann sind $\sigma(\mathcal{B})$ und $\mathcal{T}_\infty$ σ-Algebren und mann nennt $\mathcal{T}_\infty$ die asymptotische σ-Algebra (englisch *tail σ-algebra*) der $X_n, n \geqslant 1$.

7.16. Satz (0–1-Gesetz von Kolmogorov): Betrachte unabhängige Zufallsvariablen $X_n, n \geqslant 1$ sowie deren asymptotische σ-Algebra $\mathcal{T}_\infty$. Dann gilt $\forall A \in \mathcal{T}_\infty : \mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$.

Beweis: Mit Lemma 7.14 sind $\mathcal{B}_n$ und $\mathcal{T}_n$ unbahängig für alle $n \geqslant 1$. Da $\mathcal{T}_\infty \subseteq \mathcal{T}_n$ sind $\mathcal{B}_n$ und $\mathcal{T}_\infty$ für alle $n \geqslant 1$ unabhängig. Damit sind auch $\mathcal{B}$ und $\mathcal{T}_\infty$ unabhängig. Da $\mathcal{B}$ ein π-System ist (leicht nachzuprüfen), folgt mit Satz 7.12, dass $\sigma(\mathcal{B})$ und $\mathcal{T}_\infty$ unabhängig sind. Nun ist

$$\mathcal{T}_\infty \subseteq \mathcal{T}_n = \sigma(X_{n+1}, X_{n+2},\ldots) \subseteq \sigma(X_1, X_2,\ldots) = \sigma(\mathcal{B})$$

und damit sind $\mathcal{T}_\infty$ und $\mathcal{T}_\infty$ unabhängig und

$$\forall A \in \mathcal{T}_\infty : \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A\cap A) = (\mathbb{P}(A))^2$$

und damit $\mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$. $\square$

7.17. Beispiel (Ereignisse aus $\mathcal{T}$): Betrachte unabhängige, rellwertige Zufallsvariablen $X_n, n \geqslant 1$.

(i) $\left\{\limsup_{n\to\infty} X_n \geqslant c\right\}, \left\{\liminf_{n\to\infty} X_n \geqslant c\right\} \in \mathcal{T}_\infty$ für $c \in \mathbb{R}$.
Es gilt

$$\left\{\limsup_{n\to\infty} X_n \geqslant c\right\} = \left\{\limsup_{\substack{n\to\infty\\ n\geqslant N}} X_n \geqslant c\right\} \in \mathcal{T}_N$$

für alle $N \geqslant 1$ und damit $\left\{\limsup_{n\to\infty} X_n \geqslant c\right\} \in \bigcap_{N\geqslant 1} \mathcal{T}_N = \mathcal{T}_\infty$. Ähnliches gilt für den $\liminf$.

(ii) $\left\{\lim_{n\to\infty} X_n \in \mathbb{R}\right\} \in \mathcal{T}_\infty$ folgt aus Proposition 3.18.

(iii) $\left\{\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_n > c\right\}, \left\{\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_n > c\right\} \in \mathcal{T}_\infty$
Sei $\omega \in \left\{\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_n > c\right\}$. Dann gibt es eine Teilfolge n', sodass

$$\lim_{n'\to\infty} \frac{1}{n'}\sum_{i=1}^{n'} X_i(\omega) > c$$

Aber $\forall N \geqslant 1$ gilt

$$\frac{1}{n'}\sum_{i=1}^{n'} X_i(\omega) = \frac{1}{n'}\sum_{\substack{i=1\\ i\leqslant N}}^{n'} X_i(\omega) + \frac{1}{n'}\sum_{\substack{i=1\\ i>N}}^{n'} X_i(\omega)$$

wobei der erste Summand für $n' \to \infty$ gegen 0 konvergiert (einfache Überlegung). Damit gilt

$$\lim_{n'\to\infty} \frac{1}{n'}\sum_{\substack{i=1\\ i>N}}^{n'} X_i(\omega) = c' > c$$

für alle $N \geqslant 1$ und es folgt

$$\omega \in \left\{\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{\substack{i=1\\ i>N}}^{n} X_n > c\right\} \in \mathcal{T}_N$$

für alle $N \geqslant 1$. Ähnliches gilt für den $\liminf$.

(iv) $\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_n \text{ konvergiert in } \overline{\mathbb{R}}\right\} \in \mathcal{T}_\infty$ folgt ebenfalls aus Proposition 3.18.