

Wahrscheinlichkeitstheorie 2

Cornelius Hanel

July 29, 2024

Preface

Fehler oder Ergänzungen bitte an

`corneliush99@univie.ac.at`

Es fehlt noch:

- ~~Beweis von Satz 10.2~~ ✓
- ~~Beweis von Satz 10.3~~ ✓
- ~~Illustration im Beweis von PMT1, Teil 3~~ ✓
- ~~Lindeberg CLT~~ ✓
- ~~Ljapunov CLT~~ ✓
- ~~Satz 12.8: R-N für signierte Maße~~ ✓
- ~~Satz 11.10 allgemeiner Fall (Handout)~~ ✓
- ~~Beweis von Satz 9.24~~ ✓
- ~~Beweis von Satz 9.25~~ ✓
- Lemma 8.6 und Bemerkungen
- Beweis von Proposition 8.17
- Beweis von Satz 9.18
- Anfang von Kapitel 8

Änderungen und Unklarheiten:

- Portemanteau I, Teil III: am Anfang $t \in \mathbb{R}$ statt $t > 0$
- Satz 11.9: MONK statt DOMK?
- Satz 11.10 Teilfolgen mit Helly?
- Satz 11.13 Konvergenz in Verteilung oder punktweise?
- Definition 13.1: Ergänzungen
- Proposition 9.6
- Proposition 9.13 Messbarkeit? (Teilmenge einer Nullmenge)
- Überall: Dimension von k zu d geändert
- Reihenfolge von 8.15 und 8.16 getauscht
- Reihenfolge von 8.23 bis 8.25 verändert

Contents

Preface	1
8. Produkträume und Produktmaße	4
Produktmaß und Integral	6
Messbarkeit \mathbb{R}^d -wertiger Funktionen	13
9. Konvergenz von messbaren Abbildungen	19
Konvergenz von $\overline{\mathbb{R}}$ -wertigen Funktionen	19
Konvergenz von \mathbb{R}^d -wertigen Funktionen	24
Gleichgradige Integrierbarkeit	27
10. Konvergenz von Zufallsvariablen	30
Gesetze der großen Zahlen	30
11. Schwache Konvergenz	33
Schwach konvergente Teilfolgen	43
Charakteristische Funktionen	47
Zentrale Grenzwertsätze	52
12. Radon-Nikodym-Ableitungen	58
12.1 Signierte Maße	58
13. Bedingte Erwartungswerte und Wahrscheinlichkeiten	65
Eigenschaften bedingter Erwartungswerte	66
Bedingte Verteilungen	69

8. Produkträume und Produktmaße

8.4. Lemma: \mathcal{R}^* ist eine Algebra.

Beweis:

- $\Omega \in \mathcal{R}^*$: folgt sofort aus $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ und $\Omega_1 \in \mathcal{A}_1, \Omega_2 \in \mathcal{A}_2$.
- $A, B \in \mathcal{R}^* \implies A \cap B \in \mathcal{R}^*$: Schreibe $A = \bigcup_{i=1}^k A_{i,1} \times \dots \times A_{i,d}$ und $B = \bigcup_{j=1}^\ell B_{j,1} \times \dots \times B_{j,d}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} A \cap B &= \left(\bigcup_{i=1}^k A_{i,1} \times \dots \times A_{i,d} \right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^\ell B_{j,1} \times \dots \times B_{j,d} \right) \\ &= \bigcup_{i=1}^k \bigcup_{j=1}^\ell (A_{i,1} \times \dots \times A_{i,d} \cap B_{j,1} \times \dots \times B_{j,d}) \end{aligned}$$

Wir wissen, dass eine Vereinigung zweier messbarer Rechtecke wieder ein messbares Rechteck ist. Damit gilt $A \cap B \in \mathcal{R}^*$.

- $A \in \mathcal{R}^* \implies A^c \in \mathcal{R}^*$: Sei hier auch wieder $A = \bigcup_{i=1}^k A_{i,1} \times \dots \times A_{i,d}$. Dann gilt mit de Morgan $A^c = \bigcap_{i=1}^k (A_{i,1} \times \dots \times A_{i,d})^c$. Zeige also, dass das Komplement eines messbaren Rechtecks eine endliche Vereinigung messbarer Rechtecke ist (dann folgt mit Abgeschlossenheit bezüglich endlicher Durchschnitte die Aussage). Zeige also

$$A_1 \times \dots \times A_d \in \mathcal{R} \implies (A_1 \times \dots \times A_d)^c \in \mathcal{R}^*$$

Definiere dazu für $i = 1, \dots, d$ die Koordinatenabbildungen

$$\pi_i : \Omega \rightarrow \Omega_i, (\omega_1, \dots, \omega_d) \mapsto \omega_i$$

Dann gilt

$$A_1 \times \dots \times A_d = \bigcap_{i=1}^d \{\pi_i \in A_i\}$$

und es folgt

$$(A_1 \times \dots \times A_d)^c = \bigcup_{j=1}^d \bigcup_{\substack{J \subseteq \{1, \dots, d\} \\ |J|=j}} \left[\left(\bigcap_{i \in J} \{\pi_i \notin A_i\} \right) \cap \left(\bigcap_{i \notin J} \{\pi_i \in A_i\} \right) \right]$$

wobei $(\bigcap_{i \in J} \{\pi_i \notin A_i\}) \cap (\bigcap_{i \notin J} \{\pi_i \in A_i\}) \in \mathcal{R}$ disjunkt sind. Da die Vereinigung endlich ist, folgt die Aussage. \square

Bemerkung: Bisher ist $\mu : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$ definiert als $\mu(A_1 \times \dots \times A_d) := \mu(A_1) \cdot \dots \cdot \mu(A_d)$. Wir erweitern μ nun zu einer Abbildung $\mu^* : \mathcal{R}^* \rightarrow [0, \infty]$ mit

$$\mu^* \left(\bigcup_{i=1}^k R_i \right) := \sum_{i=1}^k \mu(R_i)$$

für $R_i \in \mathcal{R}, i = 1, \dots, k$ disjunkt.

8.5. Lemma: Die Abbildung μ^* (definiert wie oben) ist ein Prämaß und unabhängig von der Darstellung von $R = \bigcup_{i=1}^k R_i$.

Beweis: $\mu^*(\emptyset) = 0$ und $\mu^*(A) \geq 0$ sind trivial. Zeige also die σ -Additivität. Seien also $R_1, R_2, \dots, \in \mathcal{R}^*$ disjunkt und insbesondere $\bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \in \mathcal{R}^*$. Damit folgt

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} R_i = \bigcup_{j=1}^m S_j$$

mit $S_j \in \mathcal{R}, j = 1, \dots, m$.

Zur Unabhängigkeit von der Darstellung: Sei $A = \bigcup_{i=1}^n R_i = \bigcup_{j=1}^m S_j$ mit $R_i, S_j \in \mathcal{R}$ für $i = 1, \dots, n$ und $j = 1, \dots, m$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mu^* \left(\bigcup_{i=1}^n R_i \right) &\stackrel{\text{Def.}}{=} \sum_{i=1}^n \mu(R_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \mu(R_i \cap A) = \sum_{i=1}^n \mu \left(R_i \cap \bigcup_{j=1}^m S_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \mu \left(\bigcup_{j=1}^m (S_j \cap R_i) \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mu(S_j \cap R_i) \\ &= \sum_{j=1}^m \mu \left(S_j \cap \bigcup_{i=1}^n R_i \right) = \sum_{j=1}^m \mu(S_j) \\ &= \mu^* \left(\bigcup_{j=1}^m S_j \right) \end{aligned}$$

□

Bemerkung: Um μ^* nun zu einem Maß auf $(\prod_{i=1}^n \Omega_i, \sigma(\mathcal{R}^*))$ zu erweitern, sind mit dem Maßerweiterungssatz von Carathéodory folgende Voraussetzungen notwendig:

- (i) $\mu^*(\emptyset) = 0$ (bereits gezeigt).
- (ii) σ -Additivität: Für $A_i \in \mathcal{R}^*$ disjunkt mit $\bigcup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{R}^*$ gilt

$$\mu^* \left(\bigcup_{i \geq 1} A_i \right) = \sum_{i \geq 1} \mu^*(A_i)$$

- (iii) σ -Endlichkeit: $\exists B_j \in \mathcal{R}^*, j \geq 1 : \Omega = \bigcup_{j \geq 1} B_j$ und $\forall j \geq 1 : \mu^*(B_j) < \infty$.

8.7. Satz: Seien $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ jeweils σ -endliche Maßräume für $i = 1, \dots, d$. Dann existiert mit dem Maßerweiterungssatz von Carathéodory ein eindeutiges σ -endliches Maß μ auf dem Produktraum $(\prod_{i=1}^d \Omega_i, \bigotimes_{i=1}^d \mathcal{A}_i)$ mit der Eigenschaft, dass

$$\forall A_i \in \mathcal{A}_i, i = 1, \dots, d : \mu(A_1 \times \dots \times A_d) = \prod_{i=1}^d \mu_i(A_i)$$

Man nennt μ das Produktmaß.

Beweis: Ohne Beweis.

8.8. Korollar: Seien F_1, \dots, F_d Verteilungsfunktionen auf \mathbb{R} . Dann gibt es einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und Zufallsvariablen $X_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, d$, sodass $X_i \sim F_i$ und die X_i unabhängig sind.

Beweis: Jedes F_i definiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P}_i auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit

$$\mathbb{P}_i((-\infty, t]) := F_i(t)$$

(cf. Satz 3.17). Definiere $\Omega := \mathbb{R}^d, \mathcal{A} := \bigotimes_{i=1}^d \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mathbb{P} := \bigotimes_{i=1}^d \mathbb{P}_i, X_i := \pi_i$. Dann sind die $X_i, i = 1, \dots, d$ alle messbar und für $t \in \mathbb{R}$ und $i = 1, \dots, d$ gilt

$$\mathbb{P}(X_i \leq t) = \mathbb{P}(\mathbb{R} \times \dots \times (-\infty, t] \times \dots \times \mathbb{R}) = 1 \cdot \dots \cdot \mathbb{P}_i((-\infty, t]) \cdot \dots \cdot 1 = F_i(t)$$

Schließlich gilt für $t \in \mathbb{R}^d$ und $i = 1, \dots, d$

$$\mathbb{P}(X_1 \leq t_1, \dots, X_d \leq t_d) = \mathbb{P}((-\infty, t_1] \times \dots \times (-\infty, t_d]) = \prod_{i=1}^d \mathbb{P}_i((-\infty, t_i])$$

sodass die X_i unabhängig sind. □

Produktmaß und Integral

Betrachte in diesem Abschnitt zwei σ -endliche Maßräume $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i), i = 1, 2$, den entsprechenden Produktraum $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$, sowie einen weiteren messbaren Raum (Ω', \mathcal{A}') .

8.9. Definition: Sei $\omega_1 \in \Omega_1$ fixiert.

(i) Für $A \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$ sei

$$A_{\omega_1} := \{\omega_2 \in \Omega_2 : (\omega_1, \omega_2) \in A\}$$

der ω_1 -Schnitt (ω_1 -section) von A .

(ii) Für $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \Omega'$ sei

$$f_{\omega_1} : \Omega_2 \rightarrow \Omega', \omega_2 \mapsto f(\omega_1, \omega_2)$$

der ω_1 -Schnitt (ω_1 section) von f .

Bemerkung: Es gilt (einfacher Beweis, siehe Übung)

- (i) $(\mathbb{1}_A)_{\omega_1} = \mathbb{1}_{A_{\omega_1}}$
- (ii) Für $A' \subseteq \Omega'$ ist $f_{\omega_1}^{-1}(A') = (f^{-1}(A'))_{\omega_1}$

8.10. Proposition: Sei $\omega_1 \in \Omega_1$ fixiert. Dann gilt

- (i) Ist $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, dann ist $A_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2$
- (ii) Ist $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \Omega'$ $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ - \mathcal{A}' -messbar, dann ist $f_{\omega_1} : \Omega_2 \rightarrow \Omega'$ \mathcal{A}_2 - \mathcal{A}' -messbar.

Analoges gilt natürlich für die entsprechenden ω_2 -Schnitte.

Beweis: Betrachte für $\omega_1 \in \Omega_1$ fixiert die Abbildung $g_{\omega_1} : \Omega_2 \rightarrow \Omega_1 \times \Omega_2, \omega_2 \mapsto (\omega_1, \omega_2)$. Dann gilt

$$\forall A = (A_1 \times A_2) \in \mathcal{R} : g_{\omega_1}^{-1}(A) = \begin{cases} A_2 & \text{falls } \omega_1 \in A_1 \\ \emptyset & \text{falls } \omega_1 \notin A_1 \end{cases}$$

Damit ist $g_{\omega_1} : \mathcal{A}_2 \rightarrow \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ -messbar (Da Messbarkeit im Erzeugendensystem eine hinreichende Bedingung ist). Damit folgt nun

- (i) $A_{\omega_1} = \{\omega_2 \in \Omega_2 : (\omega_1, \omega_2) \in A\} = g_{\omega_1}^{-1}(A) \in \mathcal{A}_2$
- (ii) $f_{\omega_1}(\omega_2) = f(\omega_1, \omega_2) = f(g(\omega_1, \omega_2)) = (f \circ g)(\omega_2)$

womit die Messbarkeit von f_{ω_1} aus der Messbarkeit von Zusammensetzungen messbarer Funktionen folgt. \square

8.11. Satz (Tonelli's Theorem): Sei $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ nicht-negativ und messbar. Dann ist die Abbildung

$$s_1 : \Omega_1 \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ mit } \omega_1 \mapsto \int_{\Omega_2} f_{\omega_1} d\mu_2$$

nicht-negativ und messbar und es gilt

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{\Omega_1} s_1 d\mu_1 = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f_{\omega_1} d\mu_2 \right) d\mu_1$$

Bemerkung: Die σ -Endlichkeit von μ_1 und μ_2 ist hier notwendig. Ein analoges Ergebnis gilt auch wenn die Reihenfolge der Integrale geändert wird.

Beweis: Betrachte zunächst den Fall wo μ_1 und μ_2 (und damit auch das Produktmaß $\mu_1 \otimes \mu_2$) endlich sind.

I. **f Indikatorfunktion auf messbarem Rechteck, $f = \mathbb{1}_{A_1 \times A_2}$ mit $A_1 \times A_2 \in \mathcal{R}$**

Hier gilt $f_{\omega_1}(\omega_2) = \mathbb{1}_{A_1}(\omega_1) \cdot \mathbb{1}_{A_2}(\omega_2)$ und damit

$$s_1(\omega_1) = \mathbb{1}_{A_1}(\omega_1) \int_{\Omega_2} \mathbb{1}_{A_2} d\mu_2 = \mathbb{1}_{A_1}(\omega_1) \cdot \mu_2(A_2) \geq 0$$

und als einfache Funktion auf einer \mathcal{A}_1 -messbaren Menge auch \mathcal{A}_1 - $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ -messbar. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \int s_1 d\mu_1 &= \int \mathbb{1}_{A_1} \mu_2(A_2) d\mu_1 = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2) \\ &= (\mu_1 \otimes \mu_2)(A_1 \times A_2) = \int \mathbb{1}_{A_1 \times A_2} d(\mu_1 \otimes \mu_2) \end{aligned}$$

II. **f Indikatorfunktion auf endl. Vereinigung messbarer Rechtecke, $f = \mathbb{1}_A$ mit $A \in \mathcal{R}^*$**
Hier gilt $f_{\omega_1}(\omega_2) = (\mathbb{1}_A)_{\omega_1}(\omega_2) = \mathbb{1}_{A_{\omega_1}}(\omega_2)$ und da $A_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2$, ist f_{ω_1} \mathcal{A}_2 - $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ -messbar. Es gilt

$$s_1(\omega_1) = \int \mathbb{1}_{A_{\omega_1}} d\mu_2 = \mu_2(A_{\omega_1}) \geq 0$$

Zeige nun die Messbarkeit von s_1 : Definiere dazu

$$\mathcal{L} := \left\{ A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 : s_1(\cdot) = \int \mathbb{1}_A(\cdot, \omega_2) d\mu_2(\omega_2) \text{ ist } \mathcal{A}_1\text{-}\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\text{-messbar} \right\}$$

und zeige $\mathcal{L} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Es gilt natürlich $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{L} \subseteq \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 = \sigma(\mathcal{R})$ wobei die erste Inklusion mit dem I. Fall und die zweite Inklusion laut Konstruktion gilt. Wir wissen, dass \mathcal{R} ein π -System ist. Mit dem λ - π -Theorem genügt es also zu zeigen, dass \mathcal{L} ein λ -System ist (einfache Überlegung). Es gilt also zu zeigen

- $\Omega_1 \times \Omega_2 \in \mathcal{L}$: Gilt, da $\Omega_1 \times \Omega_2 \in \mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}$.
- $A, B \in \mathcal{L}, A \subseteq B \implies B \setminus A \in \mathcal{L}$: Hier gilt $\mathbb{1}_{B \setminus A} = \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A$, sodass

$$\int \mathbb{1}_{B \setminus A} d\mu_2 = \int \mathbb{1}_B d\mu_2 - \int \mathbb{1}_A d\mu_2$$

als Differenz zweier messbarer Funktionen (da $A, B \in \mathcal{L}$) wieder messbar ist.

- $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots, A_i \in \mathcal{L}, \forall i \geq 1 \implies \bigcup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{L}$: Setze $A := \bigcup_{i \geq 1} A_i$, sodass $0 \leq \mathbb{1}_{A_i} \nearrow \mathbb{1}_A$ punktweise. Damit gilt

$$\forall \omega_1 \in \Omega_1, \forall \omega_2 \in \Omega_2 : 0 \leq (\mathbb{1}_{A_i})_{\omega_1}(\omega_2) \nearrow (\mathbb{1}_A)_{\omega_1}(\omega_2)$$

und mit MONK folgt

$$\forall \omega_1 \in \Omega_1 : \int (\mathbb{1}_A)_{\omega_1} d\mu_2 = \lim_{i \rightarrow \infty} \int (\mathbb{1}_{A_i})_{\omega_1} d\mu_2$$

Das Integral ist als Grenzwert messbarer Funktionen damit messbar (da der Grenzwert laut MONK auch existiert).

Damit ist \mathcal{L} ein λ -System. Zeige nun $\int \mathbb{1}_A d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int s_1 d\mu_1$: Es gilt

$$\int \mathbb{1}_A d(\mu_1 \otimes \mu_2) = (\mu_1 \otimes \mu_2)(A)$$

Definiere

$$\nu(A) := \int \left(\int \mathbb{1}_A(\cdot, \omega_2) d\mu_2(\omega_2) \right) d\mu_1(\omega_1)$$

Wegen dem I. Fall wissen wir, dass $\nu(R) = (\mu_1 \otimes \mu_2)(R)$ für $R \in \mathcal{R}$ gilt. Falls ν ein Maß auf $\sigma(\mathcal{R}) = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ ist, folgt mit Korollar 2.8, dass ν und $(\mu_1 \otimes \mu_2)$ auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \supseteq \mathcal{R}^*$ übereinstimmen und damit die Aussage. $\nu(\emptyset)$ und $\nu \geq 0$ ergeben sich sofort aus den Eigenschaften vom Lebesgue-Integral. Zeige also die σ -Additivität:

Seien $A_i \in \mathcal{A}, i \geq 1$ disjunkt und definiere $B_n := \bigcup_{i=1}^n A_i, B := \bigcup_{i \geq 1} A_i$. Dann gilt $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots \subseteq B$ und damit $0 \leq \mathbb{1}_{B_n} \nearrow \mathbb{1}_B$. Folglich gilt auch $\forall \omega_1 \in \Omega_1 : 0 \leq (\mathbb{1}_{B_n})_{\omega_1} \nearrow (\mathbb{1}_B)_{\omega_1}$. Mit MONK folgt

$$\forall \omega_1 \in \Omega_1 : 0 \leq \int (\mathbb{1}_{B_n})_{\omega_1} d\mu_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int (\mathbb{1}_B)_{\omega_1} d\mu_2$$

und (nochmal MONK)

$$0 \leq \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} (\mathbb{1}_{B_n})_{\omega_1} d\mu_2 \right) d\mu_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} (\mathbb{1}_B)_{\omega_1} d\mu_2 \right) d\mu_1$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \nu(B) &= \nu \left(\bigcup_{i \geq 1} A_i \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} \mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^n A_i} d\mu_2 \right) d\mu_1 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i} d\mu_2 \right) d\mu_1 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} \mathbb{1}_{A_i} d\mu_2 \right) d\mu_1 \\ &= \sum_{i \geq 1} \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} \mathbb{1}_{A_i} d\mu_2 \right) d\mu_1 = \sum_{i \geq 1} \nu(A_i) \end{aligned}$$

wobei die inneren Integrale jeweils über den ω_1 -Schnitt der jeweiligen Funktionen zu verstehen sind.

III. **f einfache Funktion, $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mathbb{1}_{A_i}$ mit $A_i \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ disjunkt**

$$s_1(\omega_1) = \int f_{\omega_1} d\mu_2 = \int \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mathbb{1}_{A_i} \right)_{\omega_1} d\mu_2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \int \mathbb{1}_{A_i} d\mu_2 \geq 0$$

und s_1 ist als Linearkombination messbarer Funktionen wieder messbar. Weiters gilt

$$\begin{aligned}
\int f \, d(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \int \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mathbb{1}_{A_i} \, d(\mu_1 \otimes \mu_2) \\
&= \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \int \mathbb{1}_{A_i} \, d(\mu_1 \otimes \mu_2) \\
&= \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot (\mu_1 \otimes \mu_2)(A_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \nu(A_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} \mathbb{1}_{A_i} \, d\mu_2 \right) d\mu_1 \\
&= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mathbb{1}_{A_i} \, d\mu_2 \right) d\mu_1 \\
&= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f \, d\mu_2 \right) d\mu_1
\end{aligned}$$

IV. f nicht-negativ, messbar

Wähle eine Folge einfacher Funktionen $f_n, n \geq 1$, sodass $0 \leq f_n \nearrow f$. Seien die f_n o.B.d.A. wie im III. Fall. Dann gilt $\forall \omega_1 \in \Omega_1 : 0 \leq (f_n)_{\omega_1} \nearrow f_{\omega_1}$ und mit MONK folgt

$$\forall \omega_1 \in \Omega_1 : 0 \leq \int_{\Omega_2} (f_n)_{\omega_1} \, d\mu_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_2} f_{\omega_1} \, d\mu_2$$

wobei die Integrale der f_n mit dem III. Fall messbar sind und der Grenzwert damit auch. Weiters gilt

$$\begin{aligned}
\int f \, d(\mu_1 \otimes \mu_2) &\stackrel{\text{Def.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d(\mu_1 \otimes \mu_2) \\
&\stackrel{\text{III.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f_n \, d\mu_2 \right) d\mu_1 \\
&\stackrel{\text{MONK}}{=} \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f \, d\mu_2 \right) d\mu_1 = \int_{\Omega_1} s_1 \, d\mu_1
\end{aligned}$$

Betrachte nun den allgemeinen Fall, wo μ_1 und μ_2 beide σ -endlich sind.

Für $i = 1, 2$ gibt es Mengenfolgen $B_{i,n} \in \mathcal{A}_i, n \geq 1$, sodass $B_{i,1} \subseteq B_{i,2} \subseteq \dots \subseteq \bigcup_{n \geq 1} B_{i,n}$ und $\forall n \geq 1 : \mu_i(B_{i,n}) < \infty$. Für $B_n := B_{1,n} \times B_{2,n} \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ ist $\Omega_1 \times \Omega_2 = \bigcup_{n \geq 1} B_n$ und $\forall n \geq 1 : (\mu_1 \otimes \mu_2)(B_n) = \mu_1(B_{1,n}) \cdot \mu_2(B_{2,n}) < \infty$. Damit ist auch $\mu_1 \otimes \mu_2$ ein σ -endliches Maß. Definiere nun für $n \geq 1$ die folgenden Maße für messbare Mengen A :

$$\begin{aligned}
\mu_{1,n}(A) &:= \mu_1(A \cap B_{1,n}) \\
\mu_{2,n}(A) &:= \mu_2(A \cap B_{2,n}) \\
\pi_n(A) &:= (\mu_1 \otimes \mu_2)(A \cap B_n)
\end{aligned}$$

Dann gelten folgende Eigenschaften (leicht zu prüfen):

- $\mu_{2,n}$, $\mu_{1,n}$ und π_n sind endliche Maße für alle $n \geq 1$.
- $\pi_n = \mu_{1,n} \otimes \mu_{2,n}$
- Es gilt für $i = 1, 2$, dass

$$\int_{\Omega_i} f \, d\mu_{i,n} = \int_{\Omega_i} f \cdot \mathbb{1}_{B_{i,n}} \, d\mu_i$$

für $f : \Omega_i \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ nicht-negativ und messbar und

$$\int f \, d\pi_n = \int f \cdot \mathbb{1}_{B_n} \, d(\mu_1 \otimes \mu_2)$$

für $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ nicht-negativ und messbar

- Der Satz von Tonelli gilt für $\mu_{1,n}$ und $\mu_{2,n}$ wie bereits bewiesen.

Sei also $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ nicht-negativ und messbar. Dann gilt $0 \leq f \cdot \mathbb{1}_{B_n} \nearrow f$ und $\forall \omega_1 \in \Omega_1 : 0 \leq (f \cdot \mathbb{1}_{B_n})_{\omega_1} \nearrow f_{\omega_1}$. Mit MONK folgt also

$$\begin{aligned} s_1(\omega_1) &= \int_{\Omega_2} f_{\omega_1} \, d\mu_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_2} (f \cdot \mathbb{1}_{B_n})_{\omega_1} \, d\mu_2 \\ &= \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_2} f_{\omega_1} \, d\mu_{2,n} & \text{falls } \omega_1 \in B_{1,n} \\ 0 & \text{falls } \omega_1 \notin B_{1,n} \end{cases} \\ &= \mathbb{1}_{B_{1,n}}(\omega_1) \int_{\Omega_2} f_{\omega_1} \, d\mu_{2,n} \geq 0 \end{aligned}$$

und messbar (IV. Fall und Produkt mit Indikatorfunktion auf messbarer Menge). Weiters gilt

$$\begin{aligned} \int f \, d(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \mathbb{1}_{B_n} \cdot f \, d(\mu_1 \otimes \mu_2) \\ &\stackrel{\text{s.o.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int f \, d\pi_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int f \, d(\mu_{1,n} \otimes \mu_{2,n}) \\ &\stackrel{\text{IV.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f_{\omega_1} \, d\mu_{2,n} \right) \, d\mu_{1,n} \\ &\stackrel{\text{s.o.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_1} \left(\mathbb{1}_{B_{1,n}} \int_{\Omega_2} f_{\omega_1} \cdot \mathbb{1}_{B_{2,n}} \, d\mu_2 \right) \, d\mu_1 \\ &\stackrel{2 \times \text{MONK}}{=} \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f_{\omega_1} \, d\mu_2 \right) \, d\mu_1 = \int_{\Omega_1} s_1 \, d\mu_1 \end{aligned}$$

wobei der vorletzte Schritt mit den nicht-negativen monotonen Folgen $(f_{\omega_1} \cdot \mathbb{1}_{B_{2,n}}), n \geq 1$ und $(\mathbb{1}_{B_{1,n}} \cdot \int_{\Omega_2} f_{\omega_1} \mathbb{1}_{B_{2,n}} \, d\mu_2), n \geq 1$ und MONK folgt. \square

8.12. Satz (Fubini's Theorem): Sei $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ absolut $\mu_1 \otimes \mu_2$ -integrierbar. Dann gibt es eine messbare Menge $N_1 \in \mathcal{A}_1$ mit folgenden Eigenschaften

- (i) $\mu_1(N_1) = 0$ und $\forall \omega_1 \notin N_1 : f_{\omega_1} \in L_1(\mu_2)$

(ii) Die Abbildung $s_1 : \Omega_1 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mit

$$s_1(\omega_1) := \begin{cases} \int_{\Omega_2} f_{\omega_1} d\mu_2 & \text{falls } \omega_1 \notin N_1 \\ 0 & \text{falls } \omega_1 \in N_1 \end{cases}$$

ist absolut μ_1 -integrierbar.

(iii)

$$\int f d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{\Omega_1} s_1 d\mu_1$$

Beweis:

(i) $|f|$ ist nicht-negativ und messbar. Laut Annahme und mit Tonelli (Satz 8.11) gilt

$$\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} |f| d\mu_2 \right) d\mu_1 = \int |f| d(\mu_1 \otimes \mu_2) < \infty$$

wobei das innere Integral auf der linken Seite für alle $\omega_a \in \Omega_1$ eine nicht-negative Funktion mit endlichem μ_1 -Integral ist und damit $< \infty$ f.ü. ist. Definiere also

$$N_1 := \left\{ \omega_1 \in \Omega_1 : \int_{\Omega_2} |f|_{\omega_1} d\mu_2 = \infty \right\}$$

Dann gilt wegen der Messbarkeit von s_1 laut Tonelli $N_1 \in \mathcal{A}_1$ und trivial die gesuchten Eigenschaften (da $|f_{\omega_1}| = |f|_{\omega_1}$).

(ii) Schreibe $f = f_+ - f_-$ und wende jeweils Tonelli auf den Positiv- und Negativteil an. Schreibe

$$\begin{aligned} s_1(\omega_1) &= \begin{cases} \int_{\Omega_2} (f_{\omega_1})_+ d\mu_2 - \int_{\Omega_2} (f_{\omega_1})_- d\mu_2 & \text{falls } \omega_1 \notin N_1 \\ 0 & \text{falls } \omega_1 \in N_1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \int_{\Omega_2} (f_+)_{\omega_1} d\mu_2 - \int_{\Omega_2} (f_-)_{\omega_1} d\mu_2 & \text{falls } \omega_1 \notin N_1 \\ 0 & \text{falls } \omega_1 \in N_1 \end{cases} \end{aligned}$$

Damit ist s_1 als Produkt und Summe messbarer Funktionen und mit Tonelli messbar. Weiters gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} |s_1| d\mu_1 &= \int_{\Omega_1} \mathbb{1}_{N_1^c} \left| \int_{\Omega_2} (f_{\omega_1})_+ d\mu_2 - \int_{\Omega_2} (f_{\omega_1})_- d\mu_2 \right| d\mu_1 \\ &\stackrel{\text{DUG}}{\leq} \int_{\Omega_1} \mathbb{1}_{N_1^c} \left(\left| \int_{\Omega_2} (f_{\omega_1})_+ d\mu_2 \right| + \left| \int_{\Omega_2} (f_{\omega_1})_- d\mu_2 \right| \right) d\mu_1 \\ &= \int_{\Omega_1} \mathbb{1}_{N_1^c} \int_{\Omega_2} (f_{\omega_1})_+ d\mu_2 d\mu_1 + \int_{\Omega_1} \mathbb{1}_{N_1^c} \int_{\Omega_2} (f_{\omega_1})_- d\mu_2 d\mu_1 \\ &\leq \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} (f_{\omega_1})_+ d\mu_2 d\mu_1 + \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} (f_{\omega_1})_- d\mu_2 d\mu_1 \\ &\stackrel{\text{Tonelli}}{=} \int f_+ d(\mu_1 \otimes \mu_2) + \int f_- d(\mu_1 \otimes \mu_2) \\ &= \int f d(\mu_1 \otimes \mu_2) < \infty \end{aligned}$$

Damit ist s_1 absolut μ_1 -integrierbar.

(iii) Mit Tonelli für f_+ und f_- gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1} d\mu_1 &\stackrel{\text{Def.}}{=} \int_{\Omega_1} \mathbb{1}_{N_1^c} \left(\int_{\Omega_2} f_{\omega_1} d\mu_2 \right) d\mu_1 \\
&= \int_{\Omega_1} \mathbb{1}_{N_1^c} \left(\int_{\Omega_2} (f_+)_{\omega_1} d\mu_2 \right) d\mu_1 - \int_{\Omega_1} \mathbb{1}_{N_1^c} \left(\int_{\Omega_2} (f_-)_{\omega_1} d\mu_2 \right) d\mu_1 \\
&= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} (f_+)_{\omega_1} d\mu_2 \right) d\mu_1 - \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} (f_-)_{\omega_1} d\mu_2 \right) d\mu_1 \\
&\stackrel{\text{Tonelli}}{=} \int f_+ d(\mu_1 \otimes \mu_2) - \int f_- d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int f d(\mu_1 \otimes \mu_2)
\end{aligned}$$

wobei der vorletzte Schritt aus $\mu_1(N_1) = 0$ und $f \stackrel{a.e.}{=} g \implies \int f d\mu = \int g d\mu$ folgt. \square .

8.13. Beispiel: Betrachte unabhängige Zufallsvariablen $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ mit gemeinsamer pmf $p_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)$, marginal pmfs $p_X = \mathbb{P}(X = x)$, $p_Y(y) = \mathbb{P}(Y = y)$ und eine messbare Funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ mit

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{p_{X,Y}(x, y)} \frac{(-1)^{x+1}}{x + y} = \frac{1}{p_X(x) \cdot p_Y(y)} \frac{(-1)^{x+1}}{x + y}$$

Gesucht ist $\mathbb{E}f(X, Y)$. Betrachte dazu folgende Tabelle

$\downarrow y / x \rightarrow$	1	2	3	4	...	Summe
1	1/2	-1/3	1/4	-1/5	...	$1 - \log 2 =: c$
2	1/3	-1/4	1/5	-1/6	...	$-c + 1/2$
3	1/4	-1/5	1/6	-1/7	...	$c - 1/2 + 1/3$
4	1/5	-1/6	1/7	-1/8	...	$c + 1/2 - 1/3 + 1/4$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
Summe	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$...	

Damit gelten folgende Eigenschaften

(i) $\sum_{x \geq 1} \sum_{y \geq 1} f(x, y) \cdot p_{X,Y}(x, y) = \sum_{x \geq 1} (\infty - \infty + \infty - \dots)$ existiert nicht!

(ii) $\sum_{y \geq 1} \sum_{x \geq 1} f(x, y) \cdot p_{X,Y}(x, y) = \sum_{y \geq 1} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 1/2 + 1/4 + \dots + 1/n & \text{falls } n \text{ gerade} \\ c + 1/3 + 1/5 + \dots + 1/n & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \right) = \infty$

Mit dem Kontrapositiv von Fubini (Satz 8.12) gilt also $\mathbb{E}|f(X, Y)| = \infty$.

Messbarkeit \mathbb{R}^d -wertiger Funktionen

Betrachte in diesem Abschnitt \mathbb{R}^d -wertige Abbildungen (statt $\overline{\mathbb{R}}^d$, der Einfachheit wegen) und die euklidische Norm $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^d x_i^2 \right)^{1/2}$ für $x \in \mathbb{R}^d, x = (x_1, \dots, x_d)'$.

8.14. Definition:

- (i) Sei $\mathcal{O}_d := \{O \subseteq \mathbb{R}^d : O \text{ offen}\}$ die Familie aller offenen Mengen in \mathbb{R}^d . Die Borel- σ -Algebra auf \mathbb{R}^d ist definiert als

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) := \sigma(\mathcal{O}_d)$$

- (ii) Ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ messbar, dann nennt man X einen d -dimensionalen Zufallsvektor. Man nennt die Funktion $F : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$ mit $t \rightarrow \mathbb{P}(X \leq t)$ (komponentenweise) die Verteilungsfunktion (cdf) von X .

8.15. Lemma Betrachte $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_2)$ als metrischen Raum bzw. normierten Vektorraum. Dann gilt

$$f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^\ell \text{ stetig} \iff \forall O \in \mathcal{O}_\ell : f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_d$$

also ist f genau dann stetig, wenn Urbilder offener Mengen unter f immer offen sind. Die Stetigkeit ist hier im Sinn des metrischen Raumes zu verstehen (also "ε-δ-Stetigkeit").

Beweis: Übung! (cf. Höhere Analysis) □

8.16. Proposition: Sei $f : (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \rightarrow (\mathbb{R}^\ell, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\ell))$ stetig. Dann ist f auch messbar.

Beweis: Mit Lemma 8.15 folgt unmittelbar die Messbarkeit im Erzeugendensystem und damit auch die Messbarkeit in $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. □

8.17. Proposition:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \bigotimes_{i=1}^d \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Bemerkung: Allgemeiner gilt

$$\mathcal{B}(X^d) = \bigotimes_{i=1}^d \mathcal{B}(X)$$

für alle separablen Mengen X .

Beweis: fehlt noch! □

8.18 Korollar: Betrachte folgende Mengenfamilien

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &:= \left\{ (-\infty, t_1] \times \dots \times (-\infty, t_d] : t \in \mathbb{R}^d \right\} \\ \mathcal{J}_2 &:= \left\{ (s_1, t_1) \times \dots \times (s_d, t_d) : s, t \in \mathbb{R}^d \right\} \\ \mathcal{J}_3 &:= \left\{ (s_1, t_1) \times \dots \times (s_d, t_d) : s, t \in \overline{\mathbb{R}}^d, s_i \leq t_i \text{ für } i = 1, \dots, d \right\} \end{aligned}$$

Dann gilt $\sigma(\mathcal{J}_1) = \sigma(\mathcal{J}_2) = \sigma(\mathcal{J}_3) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$

Beweis: Übung! Hinweis: Mit $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{O}_1)$ und $\mathbb{R} = \bigcup_{k \geq 1} (-k, k)$, wobei $(-k, k) \in \mathcal{O}_1$ gilt für $\mathcal{M} := \{A_1 \times \dots \times A_n : A_i \in \mathcal{O}_1 \text{ für } i = 1, \dots, d\}$, dass $\sigma(\mathcal{M}) = \bigotimes_{i=1}^d \sigma(\mathcal{O}_1) = \bigotimes_{i=1}^d \mathcal{B}(\mathbb{R})$. \square

8.19. Korollar: Sei (Ω, \mathcal{A}) ein messbarer Raum und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d, \omega \mapsto (f_1(\omega), \dots, f_d(\omega))'$ mit $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist f genau dann \mathcal{A} - $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ -messbar, wenn die Koordinatenfunktionen f_i für $i = 1, \dots, d$ jeweils \mathcal{A} - $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbar sind.

Beweis:

I. \implies

Die Koordinatenprojektionen $\pi_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ sind stetig und damit $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ - $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbar. Damit ist $f_i = (\pi_i \circ f)$ auch messbar.

II. \impliedby

Mit Korollar 8.18 genügt es die Messbarkeit für Urbilder unter f aus \mathcal{J}_∞ zu zeigen. Es gilt

$$f^{-1}((-\infty, t_1] \times \dots \times (-\infty, t_d]) = \bigcap_{i=1}^d \{f_i \leq t_i\} \in \mathcal{A}$$

da ein endlicher Durchschnitt messbarer Mengen wieder messbar ist. \square

8.20. Korollar: Sei (Ω, \mathcal{A}) ein messbarer Raum und seien $f, g : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ und $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ messbar. Sei weiters $M \in \mathbb{R}^{\ell \times d}$ eine deterministische Matrix. Dann gilt

(i) $f + g$ ist \mathcal{A} - $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ -messbar.

(ii) $\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^d f_i g_i$ ist \mathcal{A} - $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbar.

(iii) Mf ist \mathcal{A} - $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\ell)$ -messbar.

(iv) hf ist \mathcal{A} - $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ -messbar.

Beweis: Folgt aus der Messbarkeit der Komponentenfunktionen und der Messbarkeit von Summen und Produkten messbarer Funktionen. \square

8.21. Proposition: Die Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$ einer Zufallsvariable $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ hat folgende Eigenschaften:

(i) Für eine Folge $t_n = (t_n^{(1)}, \dots, t_n^{(d)})' \in \mathbb{R}^d, n \geq 1$ mit $\min_{1 \leq i \leq d} t_n^{(i)} \searrow -\infty$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} F(t_n) = 0$ und für eine Folge $s_n = (s_n^{(1)}, \dots, s_n^{(d)})' \in \mathbb{R}^d, n \geq 1$ mit $\min_{1 \leq i \leq d} s_n^{(i)} \nearrow \infty$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} F(s_n) = 1$.

(ii) Für $t_n \in \mathbb{R}^d, n \geq 1$ mit $t_n \searrow t_0$ komponentenweise gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} F(t_n) = F(t_0)$. (**Rechtsstetigkeit**)

(iii) Für $t_n \in \mathbb{R}^d, n \geq 1$ mit $t_n \nearrow t_0$ komponentenweise existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} F(t_n)$.

(iv) Für $s, t \in \mathbb{R}^d$ mit $s \leq d$ komponentenweise gilt

$$0 \leq \sum_{k=0}^d (-1)^k \sum_{x \in I_k} F(x)$$

wobei $I_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \sum_{i=1}^d \delta_{x_i, s_i} = k, \sum_{i=1}^d \delta_{x_i, t_i} = d - k \right\}$, also die Menge der x , sodass x in k Komponenten mit s übereinstimmt und in den restlichen Komponenten mit t übereinstimmt.

Beweis:

(i) Sei $m_n := \min_{1 \leq i \leq d} t_n^{(i)}$ und sei i_n so, dass $m_n = t_n^{(i_n)}$ (also, dass das Minimum in der i_n -ten Koordinate angenommen wird).

- Falls $m_n \searrow -\infty$

$$\begin{aligned} F(t_n) &= \mathbb{P}(X_1 \leq t_n^{(1)}, \dots, X_d \leq t_n^{(d)}) \\ &\leq \mathbb{P}(X_{i_n} \leq m_n) \\ &\leq \sum_{i=1}^d \mathbb{P}(X_i \leq m_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

- Falls $m_n \nearrow \infty$

$$\begin{aligned} F(t_n) &= \mathbb{P}(X_1 \leq t_n^{(1)}, \dots, X_d \leq t_n^{(d)}) \\ &\geq \mathbb{P}(X_1 \leq m_n, \dots, X_d \leq m_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{S.V.U.}} \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}^d) = 1 \end{aligned}$$

wobei die Stetigkeit von unten mit den Mengen $(-\infty, t_n^{(i)}] \supseteq (-\infty, m_n], i = 1, \dots, d$ gilt.

(ii) Setze $A_n := \{X \leq t_n\}$. Dann gilt $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq \bigcap_{n \geq 1} A_n$. Mit der Stetigkeit von oben folgt $\mathbb{P}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n)$ und damit $F(t_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(t_n)$.

(iii) Für A_n wie in (ii) gilt hier $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq \bigcup_{n \geq 1} A_n =: A$. Mit der Stetigkeit von unten folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} F(t_n) = \mathbb{P}(A) \in [0, 1]$, sodass der Grenzwert existiert.

(iv) Es gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbb{P}(X \in (s_1, t_1] \times \dots \times (s_d, t_d]) \\ &= \mathbb{P}(\{X \leq t\} \setminus \{\exists i \leq d : X_i \leq s_i\}) \\ &= \mathbb{P}(\{X \leq t\} \setminus \{\forall i \leq d : X_i \leq t_i, \exists i \leq d : X_i \leq s_i\}) =: (*) \end{aligned}$$

Setze $A_j := \{X \leq t, X_j \leq s_j\}$ für $j = 1, \dots, d$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (*) &= F(t) - \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^d A_j\right) \stackrel{\text{In-Ex}}{=} F(t) + \sum_{\ell=1}^d (-1)^\ell \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, d\} \\ |I|=\ell}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in I} A_j\right) \\ &= F(t) + \sum_{\ell=1}^d (-1)^\ell \sum_{x \in I_k} F(x) = \sum_{\ell=0}^d (-1)^\ell \sum_{x \in I_k} F(x) \end{aligned}$$

□

8.22. Proposition: Sei $F : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$ eine Funktion mit den Eigenschaften (i)-(iv) aus Proposition 8.21. Dann gibt es einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und einen Zufallsvektor $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, sodass F die cf von X ist.

Beweis: Nur Beweisidee: Konstruiere ein Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P} auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, sodass

$$\mathbb{P}((-\infty, t_1] \times \dots \times (-\infty, t_d]) = F(t)$$

und setze $X(\omega) := \omega$ für $\omega \in \mathbb{R}^d$. □

8.23. Definition: Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ messbar. Sind alle Komponentenfunktionen $f_i : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $i = 1, \dots, d$ (quasi-)integrierbar, dann nennt man f (quasi-)integrierbar und setzt

$$\int f \, d\mu := \left(\int f_1 \, d\mu, \dots, \int f_d \, d\mu \right)'$$

8.24. Definition: Sei V ein Vektorraum über einen Körper K . Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$ ist eine Norm auf V , falls für $x, y \in V$ und $\lambda \in K$ gilt:

- $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Bemerkung: Eine Norm $\|\cdot\|$ erfüllt auch die umgekehrte Dreiecksungleichung

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

8.25. Lemma: Alle Normen auf \mathbb{R}^d sind äquivalent, i.e. für eine beliebige Norm $\|\cdot\|$ auf \mathbb{R}^d gibt es Konstanten $\alpha, \beta > 0$, sodass

$$\forall x \in \mathbb{R}^d : \alpha \|x\|_\infty \leq \|x\| \leq \beta \|x\|_\infty$$

für $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq d} x_i$. Insbesondere führen damit alle Normen auf \mathbb{R}^d zu denselben offenen Mengen.

Beweis: Betrachte die kanonische Basis $\{e_1, \dots, e_d\}$ und setze $\mu := \max_{1 \leq i \leq d} \|e_i\|$. Dann gilt

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^d x_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^d \|x_i e_i\| = \sum_{i=1}^d |x_i| \|e_i\| \leq \mu \sum_{i=1}^d |x_i| \leq k \mu \|x\|_\infty =: \beta \|x\|_\infty$$

Damit ist die Abbildung $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ mit $x \mapsto \|x\|$ stetig, denn

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \leq \beta \|x - y\|_\infty$$

und für $\varepsilon > 0$, setze $\delta := \varepsilon/\beta$. Betrachte nun $S := \{s \in \mathbb{R}^d : \|s\|_\infty = 1\}$. Dann ist S mit Heine–Borel kompakt und für f gilt der Extremwertsatz. Sei also $p \in \arg \min_{x \in S} \|x\|$. Dann gilt $\|p\| \neq 0$ und für alle $x \neq 0$ gilt

$$\|x\| = \left\| \|x\|_\infty \cdot \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\| = \|x\|_\infty \left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\| \geq \|x\|_\infty \cdot \|p\| =: \alpha \|x\|_\infty$$

□

Bemerkung: Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf \mathbb{R}^d . Dann gilt

$$f \in L_1 \iff \|f\| \in L_1$$

da für $i = 1, \dots, d$ gilt

$$|f_i| \leq \|f\|_2 \leq \sum_{j=1}^d |f_j|$$

und alle Normen auf \mathbb{R}^d äquivalent sind (cf. Lemma 8.25).

9. Konvergenz von messbaren Abbildungen

Sei in diesem Kapitel $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ immer ein generischer Maßraum.

Konvergenz von $\overline{\mathbb{R}}$ -wertigen Funktionen

Seien in diesem Abschnitt $f_n, f, g_n, g : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ messbare Funktionen. Weiters setze hier $\infty - \infty = -\infty + \infty := 0$.

9.1. Definition: Eine Funktionenfolge $f_n, n \geq 1$ konvergiert μ -fast-überall (kurz f.ü.) gegen f , falls

$$\mu \left(\left\{ \omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega) = f(\omega) \right\}^c \right) = 0$$

Wir schreiben dann $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.e.} f$ (almost everywhere) oder im Falle eines Wahrscheinlichkeitsraumes $a.s.$ (almost surely).

9.2. Lemma: Es gilt $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.e.} f$ genau dann, wenn

$$(i) \quad \forall \varepsilon > 0 : \mu \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{ |f_n - f| \geq \varepsilon \} \right) = 0$$

$$(ii) \quad \text{Falls } \mu \text{ endlich ist, dann ist (i) äquivalent zu } \forall \varepsilon > 0 : \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(|f_n - f| > \varepsilon \text{ für alle } n \geq N) = 0$$

Beweis: Mit der archimedischen Eigenschaft von \mathbb{R} genügt es jeweils den Fall $\varepsilon = 1/k$ für alle $k \geq 1$ zu betrachten.

$$I. \quad f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.e.} f \implies (i):$$

$$\begin{aligned} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \right\} &= \left\{ \forall k \geq 1 \exists N \geq 1 \forall n \geq N : |f_n - f| < \frac{1}{k} \right\} \\ &= \bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{N \geq 1} \bigcap_{n \geq N} \left\{ |f_n - f| < \frac{1}{k} \right\} \\ &= \bigcap_{k \geq 1} \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\{ |f_n - f| > \frac{1}{k} \right\} \end{aligned}$$

Also gilt mit de Morgan und den Gesetzen zu \limsup und \liminf von Mengen

$$\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \right\}^c = \bigcup_{k \geq 1} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ |f_n - f| \geq \frac{1}{k} \right\}$$

und laut Annahme damit

$$\mu \left(\bigcup_{k \geq 1} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ |f_n - f| \geq \frac{1}{k} \right\} \right) = 0$$

und damit insbesondere

$$\mu \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ |f_n - f| \geq \frac{1}{k} \right\} \right) = 0$$

für jedes $k \geq 1$ (da $A_k \subseteq \bigcup_{k \geq 1} A_k$ für alle $k \geq 1$).

II. (i) $\implies f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.e.} f$:

$$\begin{aligned} \mu \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \neq f \right) &\stackrel{\text{s.o.}}{=} \mu \left(\bigcup_{k \geq 1} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ |f_n - f| \geq \frac{1}{k} \right\} \right) \\ &\stackrel{\sigma\text{-Subadd.}}{\leq} \sum_{k \geq 1} \mu \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ |f_n - f| \geq \frac{1}{k} \right\} \right) = 0 \end{aligned}$$

wobei der letzte Schritt aus der Annahme folgt.

III. μ endlich $\implies ((i) \iff (ii))$:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ |f_n - f| \geq \frac{1}{k} \right\} = \bigcap_{N \geq 1} \bigcup_{n \geq N} \left\{ |f_n - f| \geq \frac{1}{k} \right\} =: \bigcap_{N \geq 1} A_N$$

Dann gilt $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq \bigcap_{N \geq 1} A_N$ und mit der Stetigkeit von oben gilt

$$\begin{aligned} \mu \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ |f_n - f| \geq \frac{1}{k} \right\} \right) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(A_N) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mu \left(|f_n - f| > \frac{1}{k} \text{ für alle } n \geq N \right) = 0 \end{aligned}$$

für alle $k \geq 1$. □

9.3. Lemma:

$$\forall \varepsilon > 0 : \sum_{n \geq 1} \mu(|f_n - f| > \varepsilon) < \infty \implies f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.e.} f$$

Beweis: Mit dem 1. Borel–Cantelli-Lemma für allgemeine Maße (Lemma 7.8, Bemerkung 2) gilt

$$\mu \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} |f_n - f| > \varepsilon \right) = 0$$

und mit Lemma 9.2 folgt die Behauptung. □

9.4. Definition: Eine Funktionenfolge $f_n, n \geq 1$ konvergiert im Maß μ gegen f , falls

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(|f_n - f| > \varepsilon) = 0$$

Wir schreiben dann $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mu} f$.

9.5. Proposition: Ist μ endlich, dann gilt $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.e.} f \implies f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mu} f$.

Beweis: Es gelte $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.e.} f$. Mit Lemma 9.2 (ii) folgt

$$\forall \varepsilon > 0 \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(|f_n - f| > \varepsilon \text{ für alle } n \geq N) = 0$$

Aber $\{|f_n - f| > \varepsilon\} \subseteq \{|f_n - f| > \varepsilon \text{ für alle } n \geq N\}$ und damit folgt per Definition von Konvergenz im Maß die Aussage. \square

9.6. Proposition: Sei μ endlich. Dann ist $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mu} f$ äquivalent zu folgender Aussage:
Jede Teilfolge $f_{n_k}, k \geq 1$ von $f_n, n \geq 1$ enthält eine weitere Teilfolge $f_{n_{k_j}}, j \geq 1$, sodass

$$f_{n_{k_j}} \xrightarrow[j \rightarrow \infty]{a.e.} f$$

Beweis:

I. \implies

Sei $0 < \varepsilon < 1$. Da $\mu(|f_n - f| > \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, kann man o.B.d.A. annehmen, dass $\mu(|f_n - f| > \varepsilon) \leq 1$ für alle $n \geq 1$ (wähle einfach einen Index $N \geq 1$ für den die Aussage wahr ist, das Argument ändert sich dadurch nicht). Sei nun eine beliebige Teilfolge $f_{n_k}, k \geq 1$ gegeben. Wähle nun eine weitere Teilfolge $f_{n_{k_j}}, j \geq 1$, sodass

$$\mu\left(|f_{n_{k_j}} - f| > \frac{1}{j}\right) < 2^{-j}$$

Dann gilt

$$\sum_{j \geq 1} \mu(|f_{n_{k_j}} - f| > \varepsilon) = \sum_{\substack{j \geq 1 \\ j \leq 1/\varepsilon}} \mu(|f_{n_{k_j}} - f| > \varepsilon) + \sum_{\substack{j \geq 1 \\ j > 1/\varepsilon}} \mu(|f_{n_{k_j}} - f| > \varepsilon)$$

Die erste Summe ist endlich, und jeder Term ist nach oben durch 1 beschränkt. Eine Abschätzung der Terme in der zweiten Summe erfolgt mit obigem Argument. Damit gilt

$$\sum_{j \geq 1} \mu(|f_{n_{k_j}} - f| > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} + \sum_{j \geq 1} 2^{-j} = \frac{1}{\varepsilon} + 2 < \infty$$

und mit Lemma 9.3 folgt $f_{n_{k_j}} \xrightarrow[j \rightarrow \infty]{a.e.} f$.

II. \Leftarrow

Angenommen $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mu} f$. Dann gibt es $\varepsilon > 0$, sodass $\mu(|f_n - f| > \varepsilon)$ nicht gegen 0 geht. Da μ aber endlich ist, ist die Folge $(\mu(|f_n - f| > \varepsilon))_{n \geq 1}$ beschränkt und mit Bolzano–Weierstraß existiert eine Teilfolge $f_{n_k}, k \geq 1$, die konvergiert, also

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(|f_{n_k} - f| > \varepsilon) = \alpha$$

mit $\alpha > 0$. Da alle Teilfolgen von konvergenten Folgen gegen denselben Grenzwert konvergieren, folgt für die Teilfolge $f_{n_{k_j}}, j \geq 1$ aus der Annahme

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mu(|f_{n_{k_j}} - f| > \varepsilon) = \alpha$$

Mit Proposition 9.5 gilt aber $f_{n_{k_j}} \xrightarrow[j \rightarrow \infty]{\mu} f$ und damit erhalten wir einen Widerspruch. \square

9.7. Definition: Sei $p \geq 1$. Eine Funktionenfolge $f_n, n \geq 1$ konvergiert in L_p (bzw. im p -ten Mittel) gegen f , falls

$$\int |f_n - f|^p d\mu \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Wir schreiben dann $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_p} f$

9.8. Proposition:

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_p} f \implies f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mu} f$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} \int |f_n - f|^p d\mu &\geq \int |f_n - f|^p \cdot \mathbf{1}_{\{|f_n - f|^p > \varepsilon^p\}} d\mu \\ &\geq \int \varepsilon^p \cdot \mathbf{1}_{\{|f_n - f|^p > \varepsilon^p\}} d\mu \\ &= \varepsilon^p \cdot \mu(|f_n - f|^p > \varepsilon^p) \end{aligned}$$

Teile beide Seiten durch ε^p und die linke Seite konvergiert noch immer gegen 0, und damit auch die rechte Seite. Damit folgt per Definition von Konvergenz im Maß die Aussage. \square

Bemerkung: Der Beweis liefert auch eine allgemeine Form der Markov-Ungleichung: Für $g \geq 0$ und $\varepsilon > 0$ gilt

$$\mu(g \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int g d\mu$$

9.9. Proposition: Für $1 \leq p \leq q < \infty$ gilt

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_q} f \implies f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_p} f$$

Beweis: Mit der Ljapunov-Ungleichung gilt

$$\left(\int |f_n - f|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int |f_n - f|^q d\mu \right)^{1/q}$$

wobei die rechte Seite laut Annahme gegen 0 konvergiert. Die Aussage folgt mit dem continuous mapping theorem für konvergente Folgen reeller Zahlen. \square

9.10. Proposition: Sei $f_n, n \geq 1$ eine Funktionenfolge, sodass $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_1} f$ für eine absolut integrierbare Funktion f , i.e. $f \in L_1$. Dann folgt

$$\int f_n d\mu \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int f d\mu$$

Beweis: Es gilt $f_n \in L_1$ für hinreichend große n (also $\exists N \geq 1 \forall n \geq N : f_n \in L_1$), denn mit der Dreiecksungleichung gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int |f_n| d\mu \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\int |f_n - f| d\mu + \int |f| d\mu \right) < \infty$$

Weiters ist

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int f_n d\mu - \int f d\mu \right| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| d\mu = 0$$

womit die Aussage folgt. \square

9.12. Proposition: Sei μ ein endliches Maß und f_n, g_n, f, g alle reellwertig für alle $n \geq 1$, sodass $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mu/a.e.} f$ und $g_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mu/a.e.} g$. Dann gilt

$$(i) \quad f_n \pm g_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mu/a.e.} f \pm g$$

$$(ii) \quad f_n \cdot g_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mu/a.e.} f \cdot g$$

$$(iii) \quad \text{Falls } \mu(g = 0), \text{ dann } \frac{f_n}{g_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mu/a.e.} \frac{f}{g}$$

Beweis: Der Fall für Konvergenz f.ü. folgt sofort aus der Tatsache, dass die Vereinigung zweier Nullmengen wieder eine Nullmenge ist. Zeige also die Aussage für Konvergenz im Maß.

Sei $n_k, k \geq 1$ eine Teilfolge von $n, n \geq 1$. Weil $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mu} f$, gibt es eine wegen Proposition 9.6 eine weitere Teilfolge $n_{k_j}, j \geq 1$ von $n_k, k \geq 1$, sodass $f_{n_{k_j}} \xrightarrow[j \rightarrow \infty]{a.e.} f$. Da $n_{k_j}, j \geq 1$ aber auch eine Teilfolge der ursprünglichen Folge $n, n \geq 1$ ist, gibt es eine weitere Teilfolge $n_{k_{j_\ell}}, \ell \geq 1$, sodass $g_{n_{k_{j_\ell}}} \xrightarrow[\ell \rightarrow \infty]{a.e.} g$. Es gilt aber auch $f_{n_{k_{j_\ell}}} \xrightarrow[\ell \rightarrow \infty]{a.e.} f$ und damit $f_{n_{k_{j_\ell}}} \pm g_{n_{k_{j_\ell}}} \xrightarrow[\ell \rightarrow \infty]{a.e.} f \pm g$ und $f_{n_{k_{j_\ell}}} \cdot g_{n_{k_{j_\ell}}} \xrightarrow[\ell \rightarrow \infty]{a.e.} f \cdot g$. Damit gibt es für jede Teilfolge $n_k, k \geq 1$ von $n, n \geq 1$ eine weitere Teilfolge $n_{k_{j_\ell}}, \ell \geq 1$, sodass Summe/Differenz/Produkt konvergieren und mit Proposition 9.6 folgt die Aussage für Konvergenz im Maß. Für (iii) siehe Übung! \square

9.13. Satz (Continuous Mapping Theorem, CMT): Sei μ endlich und sei $f_n, n \geq 1$ eine reellwertige Funktionenfolge, sodass $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mu/a.e.} f$. Sei weiters $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung, die stetig auf einer Menge $H \subseteq N$, mit $\mu(f \notin N) = 0$ ist. Dann gilt

$$h(f_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mu/a.e.} h(f)$$

Beweis: Zeige den Fall mit Konvergenz f.ü. Sei $A := \{\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \neq f\} \cup \{f \notin N\}$. Dann gilt mit der σ -Subadditivität $\mu(A) = 0$ und für $\omega \notin A$ gilt $f_n(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(\omega)$ und $f(\omega) \in H$. Mit dem Continuous Mapping Theorem für punktweise Konvergenz folgt $h(f_n(\omega)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} h(f(\omega))$. Damit folgt

$$h(f_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.e.} h(f)$$

Die Aussage für Konvergenz im Maß folgt mit Proposition 9.6. □

Konvergenz von \mathbb{R}^d -wertigen Funktionen

In diesem Abschnitt seien $f_n, f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ \mathcal{A} - $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ -messbar und $\|\cdot\|$ die euklidische Norm auf \mathbb{R}^d .

9.14. Definition:

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mu/a.e./L_p} f \iff \|f_n - f\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mu/a.e./L_p} 0$$

9.15. Proposition: Für $f_n = (f_n^{(1)}, \dots, f_n^{(d)})'$ und $f = (f^{(1)}, \dots, f^{(d)})'$ gilt

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mu/a.e./L_p} f \iff \forall i = 1, \dots, d : f_n^{(i)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mu/a.e./L_p} f^{(i)}$$

Beweis: Für $x = (x_1, \dots, x_d)'$ gilt die folgende Ungleichung für alle $j = 1, \dots, d$

$$|x_j| = \sqrt{x_j^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^d x_j^2} = \|x\| \leq \sqrt{d \cdot \max_{1 \leq j \leq d} x_j^2} = \sqrt{d} \max_{1 \leq j \leq d} |x_j| \leq \sqrt{d} \sum_{j=1}^d |x_j|$$

und damit

$$|f_n^{(i)} - f^{(i)}| \leq \|f_n - f\| \leq \sqrt{d} \sum_{j=1}^d |f_n^{(j)} - f^{(j)}|$$

womit die Behauptung folgt. □

Bemerkung: Damit gelten die Resultate aus dem vorherigen Abschnitt auch für vektorwertige rationale Operationen, soweit diese definiert sind.

Konvergenz von Integralen

Seien in diesem Abschnitt $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f_n, f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ messbar.

9.16. Lemma (von Fatou, 1.Version): Sei $f_n, n \geq 1$ eine Folge nicht-negativer Funktionen. Dann gilt

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu$$

Beweis: Setze $g_n := \inf_{k \geq n} f_k$, sodass $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$ und $0 \leq g_1 \leq \dots \leq \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$. Dann gilt mit MONK

$$\int \lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n \, d\mu$$

Da aber $g_n = \inf_{k \geq n} f_k \leq f_n$ gilt für alle $n \geq 1$: $\int g_n \, d\mu \leq \int f_n \, d\mu$ und damit

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu$$

□

9.17. Lemma (von Fatou, 2.Version): Sei $f_n, n \geq 1$ eine Folge von Funktionen, sodass $g \leq f_n$ für alle $n \geq 1$ und $g_- \in L_1$. Sei weiters f_n quasi-integrierbar, i.e. $f \in L$, für alle $n \geq 1$. Dann gilt

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu$$

Beweis:

I. Fall ($\int g_+ \, d\mu = \infty$)

Weil $f \leq f_n$ für alle $n \geq 1$ und damit $g \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$, folgt $\int f_n \, d\mu = \infty$ für alle $n \geq 1$. Damit gilt auch $\liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu = \infty$ und die Aussage folgt trivial.

II. Fall ($\int g_+ \, d\mu < \infty$)

Damit gilt laut Voraussetzung $g \in L_1$ und damit $g < \infty$ f.ü., sodass für alle $n \geq 1$ $(f_n - g)$ f.ü. wohldefiniert und f.ü. nicht-negativ ist. Mit Lemma 9.16 folgt

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} (f_n - g) \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n - g \, d\mu$$

und mit der Linearität des Integrals und der Tatsache, dass g nicht von n abhängt folgt die Aussage. □

9.18. Satz (Dominated Convergence Theorem, DOMK): Sei $f_n, n \geq 1$ eine Funktionenfolge, sodass $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mu} f$ und $|f_n| \leq g$ für alle $n \geq 1$ und eine integrierbare Funktion g . Dann folgt

(i) $f \in L_1$

(ii) $\int f_n \, d\mu \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int f \, d\mu$

(iii) $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_1} f$

Beweis:

9.19. Korollar (Bounded Convergence Theorem): Sei μ ein endliches Maß und $f_n, n \geq 1$ eine Funktionenfolge, sodass $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mu} f$ und $|f_n| \leq K$ für ein $K \in [0, \infty)$. Dann folgt (i), (ii) und (iii) aus Satz 9.18.

Beweis: Folgt sofort aus DOMK (Satz 9.18) und $\int K \, d\mu = K \cdot \mu(\Omega) < \infty$ für endliche Maße. \square

9.20. Lemma (Scheffé's Lemma): Seien $f_n, n \geq 1, f$ nicht-negative, integrierbare Funktionen, sodass $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mu} f$. Falls zusätzlich $\int f_n \, d\mu \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int f \, d\mu$, dann folgt $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_1} f$.

Beweis: Setze $h_n := f - f_n$ und wende DOMK (Satz 9.18) auf die Folgen $(h_n)_+, n \geq 1$ und $(h_n)_-, n \geq 1$ an. \square

9.21. Proposition: Falls $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_p} f$ und $f \in L_p$ für ein $p \geq 1$, dann folgt

$$(i) \quad \int |f_n|^p \, d\mu \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int |f|^p \, d\mu$$

$$(ii) \quad \int f_n \, d\mu \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int f \, d\mu$$

Beweis:

(i) Mit der Minkowski-Ungleichung gilt

$$\left(\int |f_n|^p \, d\mu \right)^{1/p} = \left(\int |f_n - f + f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int |f_n - f|^p \, d\mu \right)^{1/p} + \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

wobei der erste Summand laut Annahme gegen 0 konvergiert (und damit insbesondere ab einem Index $N \geq 1$ endlich ist) und der zweite Summand laut Annahme endlich ist. Es gilt also $f_n \in L_p$ für hinreichend große n . Weiters folgt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int |f_n|^p \, d\mu \leq \int |f|^p \, d\mu$$

da der erste Summand nicht-negativ ist. Aber mit der Minkowski-Ungleichung gilt auch

$$\left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} = \left(\int |f - f_n + f_n|^p \, d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int |f - f_n|^p \, d\mu \right)^{1/p} + \left(\int |f_n|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

sodass

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int |f_n|^p \, d\mu \geq \int |f|^p \, d\mu$$

und daher

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n|^p \, d\mu = \int |f|^p \, d\mu$$

(ii) Es gilt $|(f_n)_+ - f_+| \leq |f_n - f|$ und $|(f_n)_- - f_-| \leq |f_n - f|$ (einfache Überlegung). Laut Annahme gilt $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_p} f$ und mit Proposition 9.9 auch $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_1} f$. Mit den beiden Ungleichung oben folgt also

$$(f_n)_+ \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_1} f_+ \quad \text{und} \quad (f_n)_- \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_1} f_-$$

Da $f \in L_p$ gilt auch $f \in L_1$ und damit $f_+, f_- \in L_1$. Mit Teil (i) folgt

$$\int (f_n)_+ d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int f_+ d\mu \text{ und } \int (f_n)_- d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int f_- d\mu$$

und mit den Rechenregeln für Konvergenz von Folgen reeller Zahlen die Aussage. \square

Gleichgradige Integrierbarkeit

Seien in diesem Abschnitt $f_n : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ messbare Funktionen für alle $n \geq 1$.

9.22. Definition: Sei μ endlich. Eine Folge messbarer Funktionen $f_n, n \geq 1$ ist gleichgradig integrierbar ("uniformly integrable", g.i.), falls

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{|f_n| \geq \alpha} |f_n| d\mu = 0$$

Bemerkung: Eine konstante Folge absolut integrierbarer, reellwertiger Funktionen ist gleichgradig integrierbar, da

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{\{|f| \geq \alpha\}} |f| d\mu = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int |f| \cdot \mathbb{1}_{\{|f| \geq \alpha\}} d\mu$$

wobei $|f| < \infty$ f.ü., da $f \in L_1$ und damit

$$|f| \cdot \mathbb{1}_{\{|f| \geq \alpha\}} \xrightarrow[\alpha \rightarrow \infty]{a.e.} 0 \stackrel{a.e.}{=} \mathbb{1}_{\{|f| = \infty\}}$$

Da $|f| \cdot \mathbb{1}_{\{|f| \geq \alpha\}} \leq f \in L_1$ folgt mit DOMK

$$\int_{\{|f| \geq \alpha\}} |f| d\mu \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} \mu(|f| = \infty) = 0$$

9.23. Lemma: Sei μ endlich und $f_n, n \geq 1$ gleichgradig integrierbar. Dann folgt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int |f_n| d\mu < \infty$$

i.e. $f_n \in L_1$ für hinreichend große n .

Beweis: Wähle $\alpha > 0$, sodass $\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\{|f_n| \geq \alpha\}} |f_n| d\mu < \infty$. Dann gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int |f_n| d\mu = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\{|f_n| \geq \alpha\}} |f_n| d\mu + \int_{\{|f_n| < \alpha\}} |f_n| d\mu \right) < \infty$$

wobei der erste Summand laut Annahme endlich ist und der zweite Summand $\leq \alpha \cdot \mu(\Omega)$ ist. \square

9.24. Lemma: Sei μ endlich und seien $f_n, n \geq 1$ und $g_n, n \geq 1$ gleichgradig integrierbar. Dann ist $f_n + g_n$ f.ü. wohldefiniert für hinreichend große n und $f_n + g_n, n \geq 1$ ist gleichgradig integrierbar.

Beweis: Es ist $\int |f_n| d\mu < \infty$ für $n \geq n_f$ und $\int |g_n| d\mu < \infty$ für $n \geq n_g$. Damit ist

$$\int f_n + g_n d\mu \leq \int |f_n| + |g_n| d\mu < \infty$$

und damit $f_n + g_n < \infty$ fast überall für $n \geq \max(n_f, n_g)$.

Setze nun $h_n := \max(|f_n|, |g_n|)$, $n \geq 1$. Dann gilt $|f_n + g_n| \leq 2h_n$ und

$$\begin{aligned} h_n \cdot \mathbb{1}_{\{h_n \geq \alpha/2\}} &= h_n \cdot \mathbb{1}_{\{|f_n| \geq \alpha/2\}} \cdot \mathbb{1}_{\{f_n \geq g_n\}} + h_n \cdot \mathbb{1}_{\{|g_n| \geq \alpha/2\}} \cdot \mathbb{1}_{\{f_n < g_n\}} \\ &\leq |f_n| \cdot \mathbb{1}_{\{|f_n| \geq \alpha/2\}} + |g_n| \cdot \mathbb{1}_{\{|g_n| \geq \alpha/2\}} \end{aligned}$$

und damit für $\alpha > 0$

$$\begin{aligned} \int_{\{|f_n + g_n| \geq \alpha\}} |f_n + g_n| d\mu &\leq 2 \int_{\{h_n \geq \alpha/2\}} h_n d\mu \\ &\leq 2 \int_{\{|f_n| \geq \alpha/2\}} |f_n| d\mu + 2 \int_{\{|g_n| \geq \alpha/2\}} |g_n| d\mu \end{aligned}$$

wobei der \limsup für $n \rightarrow \infty$ beider Summanden für $\alpha \rightarrow \infty$ gegen 0 geht, womit $f_n + g_n$, $n \geq 1$ gleichgradig integrierbar sind. \square

9.25. Satz: Sei μ endlich. Dann ist folgendes äquivalent

- (i) $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_1} f$ und $f \in L_1$
- (ii) $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mu} f$ und f_n , $n \geq 1$ gleichgradig integrierbar

Bemerkung: Aus (i) folgt mit Proposition 9.10, dass

$$\int f_n d\mu \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int f d\mu$$

Beweis:

I. (i) \implies (ii)

Aus (i) folgt mit Proposition 9.8, dass $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mu} f$. Weiters ist für $\alpha > 0$

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| d\mu \geq \int_{\{|f_n - f| \geq \alpha\}} |f_n - f| d\mu \geq 0$$

Damit ist $f_n - f$, $n \geq 1$ gleichgradig integrierbar. Da $f \in L_1$ ist die konstante Folge f , $n \geq 1$ gleichgradig integrierbar und mit Satz 9.24 auch die Summe $f_n = (f_n - f) + f$, $n \geq 1$

II. (ii) \implies (i)

Mit Proposition 9.6 genügt es, die Aussage unter der stärkeren Annahme $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.e.} f$ zu zeigen.

Mit Fatou I gilt

$$\int |f| d\mu = \int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int |f_n| d\mu \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int |f_n| d\mu < \infty$$

wobei die Endlichkeit des Integrals für große n aus der Annahme der gleichgradigen Integrierbarkeit folgt. Damit gilt $f \in L_1$. Für $\alpha > 0$ gilt

$$\int |f_n - f| d\mu = \int_{\{|f_n - f| \geq \alpha\}} |f_n - f| d\mu + \int_{\{|f_n - f| < \alpha\}} |f_n - f| d\mu$$

wobei mit Korollar 9.19 gilt

$$\int_{\{|f_n - f| < \alpha\}} |f_n - f| d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

und damit

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| d\mu = \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\{|f_n - f| \geq \alpha\}} |f_n - f| d\mu$$

Da aber $f \in L_1$ ist die konstante Folge $f, n \geq 1$ gleichgradig integrierbar, womit die Aussage mit der Dreiecksungleichung für $\alpha \searrow 0$ folgt. \square

9.26. Proposition: Sei μ endlich. Angenommen $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mu} f$ und $\limsup_{n \rightarrow \infty} \int |f_n|^{1+\delta} d\mu < \infty$ für ein $\delta > 0$. Dann folgt

(i) $f \in L_1$

(ii) $\int f_n d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int f d\mu$

(iii) $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_1} f$

Beweis: Unter der Annahme $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mu}$ genügt es mit Satz 9.25 zu zeigen, dass $f_n, n \geq 1$ gleichgradig integrierbar ist.

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\{|f_n| \geq \alpha\}} |f_n| d\mu &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\{|f_n|^\delta \geq \alpha^\delta\}} |f_n| \cdot \frac{\alpha^\delta}{\alpha^\delta} d\mu \\ &\leq \frac{1}{\alpha^\delta} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\{|f_n|^\delta \geq \alpha^\delta\}} |f_n| |f_n|^\delta d\mu \\ &= \frac{1}{\alpha^\delta} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\{|f_n| \geq \alpha\}} |f_n| |f_n|^\delta d\mu \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

da der \limsup im letzten Ausdruck endlich ist und $\alpha^{-\delta} \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} 0$. \square

10. Konvergenz von Zufallsvariablen

Gesetze der großen Zahlen

Sei im folgenden Kapitel $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ jeweils ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X_n, X \in L_1, n \geq 1$ jeweils \mathbb{R} -wertige Zufallsvariablen.

10.1. Proposition: Sei $X \in L_2$. Dann ist folgendes äquivalent:

1. $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}X_i) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_2} 0$
2. $\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{Cov}(X_i, X_j) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

Beweis:

$$\mathbb{E} \left[\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}X_i) \right)^2 \right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbb{E} [(X_i - \mathbb{E}X_i)(X_j - \mathbb{E}X_j)]$$

Bemerkung: Für $X_i \in L_2$ unkorreliert ist 2. äquivalent zu

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) \longrightarrow 0$$

Falls die $X_i \in L_2$ und i.i.d. sind, gilt 1. und 2. trivial.

10.2. Satz (Schwaches Gesetz der großen Zahlen, WLLN): Seien $X_i \in L_1$ i.i.d.. Dann gilt:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \mathbb{E}X_1$$

Beweis: Sei $M > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}X_i) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i \cdot \mathbf{1}_{\{|X_i| \leq M\}} - \mathbb{E}[X_i \cdot \mathbf{1}_{\{|X_i| \leq M\}}]) \\ &\quad + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i \cdot \mathbf{1}_{\{|X_i| > M\}} - \mathbb{E}[X_i \cdot \mathbf{1}_{\{|X_i| > M\}}]) \end{aligned}$$

I. Zum ersten Summanden:

Die Zufallsvariablen $X_i \cdot \mathbb{1}_{\{|X_i| \leq M\}}$ sind unabhängig und beschränkt (also $\in L_\infty$ und damit insbesondere $\in L_2$). Damit ist

$$\text{Var}(X_i \cdot \mathbb{1}_{\{|X_i| \leq M\}}) = \mathbb{E}[X_i^2 \cdot \mathbb{1}_{\{|X_i| \leq M\}}] - (\mathbb{E}[X_i \cdot \mathbb{1}_{\{|X_i| \leq M\}}])^2 \leq 2M^2$$

Mit Bemerkung (ii) zu Proposition 10.1 folgt damit, dass der erste Summand $\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_2}$ und damit $\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0$.

II. Zum zweiten Summanden:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i \cdot \mathbb{1}_{\{|X_i| > M\}} - \mathbb{E}[X_i \cdot \mathbb{1}_{\{|X_i| > M\}}]) \right| &\stackrel{\text{DUG}}{\leq} \mathbb{E} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i \cdot \mathbb{1}_{\{|X_i| > M\}}| + |\mathbb{E}[X_i \cdot \mathbb{1}_{\{|X_i| > M\}}]| \right] \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} |X_i \cdot \mathbb{1}_{\{|X_i| > M\}}| + \mathbb{E}[|X_i| \cdot \mathbb{1}_{\{|X_i| > M\}}] \\ &= 2 \cdot \mathbb{E}[|X_1| \cdot \mathbb{1}_{\{|X_1| > M\}}] \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Sei also $\varepsilon > 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}X_i) \right| > \varepsilon \right) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|(1) + (2)| > \varepsilon) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(|(1)| > \frac{\varepsilon}{2} \right) + \mathbb{P} \left(|(2)| > \frac{\varepsilon}{2} \right) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(|(2)| > \frac{\varepsilon}{2} \right) \\ &\stackrel{\text{Markov}}{\leq} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \mathbb{E}|(2)|}{\varepsilon} \\ &\leq \frac{4 \cdot \mathbb{E}[|X_1| \cdot \mathbb{1}_{\{|X_1| > M\}}]}{\varepsilon} \end{aligned}$$

fr jedes $M > 0$. Wähle nun fr $\varepsilon > 0$ ein $M > 0$ so, sodass dieser Ausdruck $< \delta$ ist. Das funktioniert wegen II. fr jedes $\delta > 0$ und daher folgt

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}X_i) \right| > \varepsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

und damit die Aussage. □

10.3. Satz (Starkes Gesetz der großen Zahlen, SLLN): Seien $X_i \in L_1$ i.i.d.. Dann gilt sogar die stärkere Aussage:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} \mathbb{E}X_1$$

Beweis: siehe z.B.: P. Billingsley, *Probability and Measure* (2nd Ed.), Theorem 6.1 □

10.4. Proposition (Momentenmethode): Betrachte i.i.d. Zufallsvariablen $X_i, i \geq 1$, sodass $X_i^d \in L_1$ für ein $d \geq 1$. Sei außerdem $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ und setze $\theta := f(\mathbb{E}X_1^1, \dots, \mathbb{E}X_1^d)$ (θ könnte z.B. als Funktion der ersten d Momente die Verteilung von X_1 parametrisieren). Falls f stetig im Punkt $(\mathbb{E}X_1^1, \dots, \mathbb{E}X_1^d)'$ ist, dann gilt für $\hat{\theta}_n := f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^1, \dots, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^d\right)$, dass $\hat{\theta}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \theta$.

Beweis: Mit der Ljapunov-Ungleichung gilt $X_i^j \in L_1$ für $j = 1, \dots, d$. Weiters sind X_i^j i.i.d. Mit dem SLLN gilt damit für $j = 1, \dots, d$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^j \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} \mathbb{E}X_1^j$$

und mit Proposition 9.15 folgt

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^1, \dots, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^d \right)' \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} (\mathbb{E}X_1^1, \dots, \mathbb{E}X_1^d)'$$

Die Aussage folgt schließlich mit dem CMT (quasi Satz 9.13. für $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^\ell$). □

11. Schwache Konvergenz

Betrachte in diesem Kapitel einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, reelwertige Zufallsvariablen $X, X_n, n \geq 1$ mit entsprechenden cdfs $F, F_n, n \geq 1$ bzw. den entsprechenden induzierten Wahrscheinlichkeitsmaßen $\mathbb{P}, \mathbb{P}_n, n \geq 1$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

11.1. Definition: $\mathbb{P}_n, n \geq 1$ konvergieren schwach/in Verteilung gegen \mathbb{P} , wenn

$$\forall t \in \mathbb{R} \text{ mit } F(\cdot) \text{ stetig in } t : F_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} F(t)$$

Kurz: $\mathbb{P}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathbb{P}$, oder $F_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} F$, oder $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} X$.

11.2. Proposition: $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X \implies X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} X$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

$$\begin{aligned} F_n(t) &= \mathbb{P}(X_n \leq t) \\ &= \mathbb{P}(X_n \leq t, |X_n - X| \leq \varepsilon) + \mathbb{P}(X_n \leq t, |X_n - X| > \varepsilon) \\ &\leq \mathbb{P}(X - \varepsilon \leq t, |X_n - X| \leq \varepsilon) + \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \\ &\leq \mathbb{P}(X - \varepsilon \leq t) + \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \end{aligned}$$

Damit folgt $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(t) \leq F(t + \varepsilon)$$

Gleichzeitig gilt:

$$\begin{aligned} F(t - \varepsilon) &= \mathbb{P}(X \leq t - \varepsilon) \\ &= \mathbb{P}(X \leq t - \varepsilon, |X_n - X| \leq \varepsilon) + \mathbb{P}(X \leq t - \varepsilon, |X_n - X| > \varepsilon) \\ &\leq \mathbb{P}(X_n - \varepsilon \leq t - \varepsilon, |X_n - X| \leq \varepsilon) + \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \\ &= \mathbb{P}(X_n \leq t) + \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(t) \geq F(t - \varepsilon)$$

Wenn $F(\cdot)$ nun stetig im Punkt t ist, dann gilt

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} F(t - \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} F(t + \varepsilon) = F(t)$$

und damit

$$F(t) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(t) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(t) \leq F(t)$$

und es folgt für alle $t \in \mathcal{C}(F)$:

$$F_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} F(t)$$

□

11.3. Proposition: Es gelte $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} X$ mit $\mathbb{P}(X = c) = 1$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Dann folgt $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} c$.

Beweis:

$$F(t) = \begin{cases} 1, & \text{if } t \geq c \\ 0, & \text{if } t < c \end{cases}$$

ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{c\}$ und damit stetig in $c \pm \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$. Also gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) &= \mathbb{P}(|X_n - c| > \varepsilon) \\ &= \mathbb{P}(X_n - c \notin [-\varepsilon, \varepsilon]) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X_n - c \in [-\varepsilon, \varepsilon]) \\ &\leq 1 - F_n(c + \varepsilon) + F_n(c - \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1 - F(c + \varepsilon) + F(c - \varepsilon) = 0 \end{aligned}$$

Damit folgt $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X \stackrel{a.s.}{=} c$.

□

11.4. Satz (von Glivenko–Cantelli): Seien $X_n, n \geq 1$ i.i.d.reellwertige Zufallsvariablen mit cdf F . Definiere die empirical cdf:

$$\hat{F}_n(t) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{X_i \leq t\}}$$

für alle $\omega \in \Omega$. Dann gilt:

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |\hat{F}_n(t) - F(t)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} 0$$

Beweis: Zeige zuerst, dass $\sup_{t \in \mathbb{R}} |\hat{F}_n(t) - F(t)|$ messbar ist. Wähle dazu $t_k \in \mathbb{R}, k \geq 1$, sodass

$$|\hat{F}_n(t_k) - F(t_k)| \geq \sup_{t \in \mathbb{R}} |\hat{F}_n(t) - F(t)| - \frac{1}{k}$$

Beachte, dass t_k von ω abhängt! Wähle nun $q_k \in \mathbb{Q}, k \geq 1$, sodass

$$|\hat{F}_n(q_k) - F(q_k)| \geq |\hat{F}_n(t_k) - F(t_k)| - \frac{1}{k}$$

Dieser Schritt funktioniert wegen der rechtsseitigen Stetigkeit von $F, \hat{F}_n, n \geq 1$. Nun folgt aber

$$|\hat{F}_n(q_k) - F(q_k)| \geq \sup_{t \in \mathbb{R}} |\hat{F}_n(t) - F(t)| - \frac{2}{k}$$

und damit

$$|\hat{F}_n(q_k) - F(q_k)| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \sup_{t \in \mathbb{R}} |\hat{F}_n(t) - F(t)|$$

Also

$$\sup_{q \in \mathbb{Q}} |\hat{F}_n(q) - F(q)| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |\hat{F}_n(t) - F(t)|$$

wobei die linke Seite als abzählbares Supremem messbarer Funktionen messbar ist.

Setze nun $F(-\infty) = \hat{F}_n(-\infty) = 0$ und $F(\infty) = \hat{F}_n(\infty) = 1$ und wähle ein Mesh

$$-\infty = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = +\infty$$

sodass

$$F(t_{j-}) - F(t_{j-1}) \leq \varepsilon \quad (1)$$

für $1 \leq j \leq k$. Dazu verfährt man folgendermaßen:

Beginne mit $t_0 = -\infty$. Angenommen wir haben schon $j-1 \geq 0$ Punkte gewählt, sodass (1) für alle $i \leq j-1$ gilt und $t_{j-1} < \infty$. Setze dann

$$t_j := \sup \{t > t_{j-1} : F(t_-) - F(t_{j-1}) < \varepsilon\}$$

Mit der Stetigkeit von oben gilt dann $F(t_-) - F(t_{j-1}) = \mathbb{P}(t_{j-1} < X < t) \xrightarrow[t \searrow t_{j-1}]{} 0$. Damit ist t_j

wohldefiniert. Falls $t_j = \infty$ sind wir fertig. Andernfalls wiederholt man die Prozedur für $j+1$. Wir haben am Schluss also Punkte $(t_j)_{0 \leq j \leq k}$ für die gilt:

$$F(t_{j-}) - F(t_{j-1}) \leq \varepsilon$$

$$F(t_j) - F(t_{j-1}) \geq \varepsilon$$

Da $F(\infty) - F(-\infty) = 1$, gilt $k\varepsilon \leq 1$ und damit $k < \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor$, also endet die Prozedur immer in endlich vielen Schritten.

Zeige nun, dass die empirische cdf gleichmäßig in $t \in \mathbb{R}$ gegen die tatsächliche cdf konvergiert. Mit dem SLLN gilt

$$\hat{F}_n(t_j) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} F(t_j) \quad (2)$$

$$\hat{F}_n(t_{j-}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} F(t_{j-}) \quad (3)$$

Sei also N_ε , so dass für alle $\omega \in N_\varepsilon^c$ (2) und (3) gelten. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ gibt es $1 \leq j \leq k$, sodass $t \in [t_{j-1}, t_j)$ und es gilt

$$\begin{aligned} \hat{F}_n(t) - F(t) &\stackrel{\text{Monotonie}}{\leq} \hat{F}_n(t_{j-}) - F(t_{j-1}) = \\ &= \hat{F}_n(t_{j-}) - F(t_{j-}) + F(t_{j-}) - F(t_{j-1}) \leq \\ &\leq \hat{F}_n(t_{j-}) - F(t_{j-}) + \varepsilon \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \hat{F}_n(t) - F(t) &\stackrel{\text{Monotonie}}{\geq} \hat{F}_n(t_{j-1}) - F(t_{j-}) = \\ &= \hat{F}_n(t_{j-1}) - F(t_{j-1}) + F(t_{j-1}) - F(t_{j-}) \geq \\ &\geq \hat{F}_n(t_{j-1}) - F(t_{j-1}) - \varepsilon \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} (\hat{F}_n(t_{j-}) - F(t)) &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \max \left\{ \hat{F}_n(t_{j-1}) - F(t_{j-1}) : 1 \leq j \leq k \right\} + \varepsilon \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{t \in \mathbb{R}} (\hat{F}_n(t_{j-}) - F(t)) &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \min \left\{ \hat{F}_n(t_{j-1}) - F(t_{j-1}) : 1 \leq j \leq k \right\} - \varepsilon \end{aligned}$$

Weil $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{t \in \mathbb{R}} \left(\hat{F}_n(t_{j-}) - F(t) \right) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left(\hat{F}_n(t_{j-}) - F(t) \right) = 0$$

und damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} |\hat{F}_n(t) - F(t)| = 0$$

für alle $\omega \in \bigcup_{\varepsilon > 0} N_\varepsilon^c = \bigcup_{n \geq 1} N_n^c$ mit Maß 0. □

Bemerkung: Für eine Klasse von Funktionen \mathcal{F} , sei

$$\begin{aligned} \forall f \in \mathcal{F} : \hat{F}_n(f) &:= n^{-1} \sum_{i=1}^n f(X_i) \\ F(f) &:= \mathbb{E}[f(X_1)] \end{aligned}$$

Im Fall von Satz 11.4 war z.B. $\mathcal{F} = \{\mathbb{1}_{(-\infty, t]}(\cdot), t \in \mathbb{R}\}$. Im allgemeinen Fall geben Glivenko-Cantelli Theoreme Bedingungen an die Klasse \mathcal{F} , sodass

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} |\hat{F}_n(f) - F(f)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.e.} 0$$

11.5. Satz (Portemanteau Theorem 1): Es gilt $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} X$ genau dann, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (i) $\mathbb{E}f(X_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}f(X)$ für alle f stetig mit kompaktem Träger.
- (ii) $\mathbb{E}f(X_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}f(X)$ für alle f stetig und beschränkt.

Bemerkung: Ist f stetig und $\overline{\text{supp } f}$ kompakt, dann ist f auch beschränkt. Damit gilt trivial (ii) \implies (i).

Beweis:

I. $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} X \implies$ (i)

Sei f wie in (i). Dann ist f auf $\text{supp } f$ auch gleichmäßig stetig. Für $\varepsilon > 0$ wähle ein Mesh

$$a_0 < a_1 < \dots < a_{k-1} < a_k$$

sodass

$$\begin{aligned} \forall x \notin (a_0, a_k] : f(x) &= 0 \\ \forall x \in (a_{i-1}, a_i] : |f(x) - f(a_i)| &< \varepsilon \quad \text{für } 1 \leq i \leq k \end{aligned}$$

und so, dass a_0, \dots, a_k alle Stetigkeitsstellen von F sind (davon gibt es höchstens abzählbar viele, also ist das ohne Probleme möglich).

Definiere

$$g_\varepsilon(x) := \sum_{i=1}^k f(a_i) \mathbb{1}_{(a_{i-1}, a_i]}(x)$$

sodass

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon \quad (4)$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}g_\varepsilon(X_n) &= \sum_{i=1}^k f(a_i) \mathbb{P}(a_{i-1} < X_n \leq a_i) = \\ &= \sum_{i=1}^k f(a_i) (F_n(a_i) - F_n(a_{i-1})) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k f(a_i) (F(a_i) - F(a_{i-1})) = \mathbb{E}g_\varepsilon(X) \end{aligned}$$

und mit (4) folgt $\forall \varepsilon > 0 : f \leq g_\varepsilon + \varepsilon$ und $g_\varepsilon \leq f + \varepsilon$ und damit

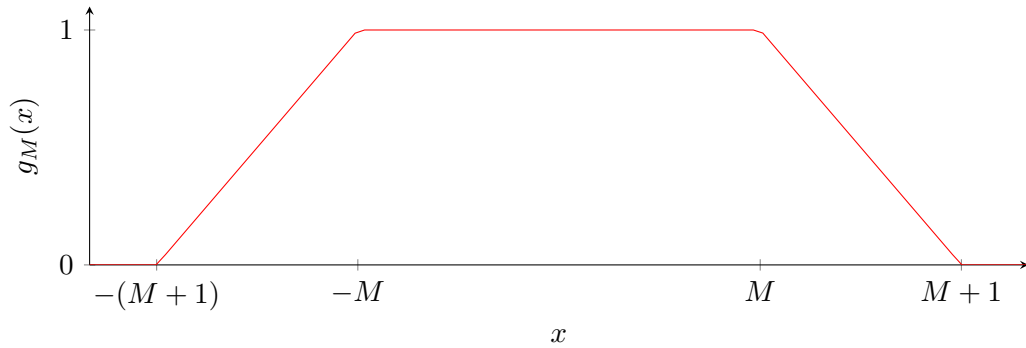
$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}f(X_n) &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}g_\varepsilon(X_n) + \varepsilon = \mathbb{E}g_\varepsilon(X) + \varepsilon \leq \mathbb{E}f(X) + 2\varepsilon \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}f(X_n) &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}g_\varepsilon(X_n) - \varepsilon = \mathbb{E}g_\varepsilon(X) - \varepsilon \geq \mathbb{E}f(X) - 2\varepsilon \end{aligned}$$

und für $\varepsilon \rightarrow 0$ folgt, dass

$$\mathbb{E}f(X_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}f(X)$$

II. (i) \implies (ii)

Sei f wie in (ii). Für $M > 1$ definiere eine stetige Funktion g_M mit kompaktem Träger, wie folgt:



$$\text{Also } g_M(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x \notin (-M-1, M+1] \\ 1 & \text{if } x \in (-M, M] \\ x + (M+1) & \text{if } x \in (-M-1, -M] \\ (M+1) - x & \text{if } x \in (M, M+1] \end{cases}$$

Wähle nun M groß genug, sodass $|1 - \mathbb{E}g_M(X)| < \varepsilon$ (möglich wegen $g_M(x) \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 1$ und MONK). Die Funktion $f_M := f \cdot g_M$ ist dann stetig, beschränkt und hat kompakten Träger (einfache Überlegung). Weiters folgt

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}f(X_n) - \mathbb{E}f(X)| &= |\mathbb{E}[f(X_n) - f_M(X_n) + f_M(X_n) - f_M(X) + f_M(X) - f(X)]| \leq \\ &\leq |\mathbb{E}f(X_n) - \mathbb{E}f_M(X_n)| + |\mathbb{E}f_M(X_n) - \mathbb{E}f_M(X)| + |\mathbb{E}f_M(X) - \mathbb{E}f(X)| \end{aligned}$$

Betrachte nun der Reihe nach alle drei Summanden

$$|\mathbb{E}f(X_n) - f_M(X_n)| \leq \|f\|_\infty |\mathbb{E}[1 - g_M(X_n)]| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|f\|_\infty |\mathbb{E}[1 - g_M(X)]| \leq \varepsilon \cdot \|f\|_\infty$$

$$|\mathbb{E}[f_M(X_n) - f_M(X)]| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{Ann.}} 0$$

$$|\mathbb{E}f(X) - f_M(X)| \stackrel{\text{s.o.}}{\leq} \varepsilon \cdot \|f\|_\infty$$

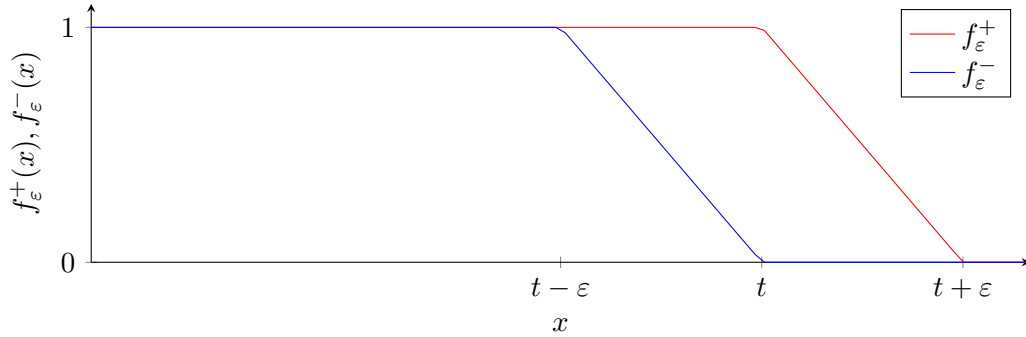
Damit folgt

$$0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} |\mathbb{E}[f(X_n) - f(X)]| \leq 2\varepsilon$$

und da $\varepsilon > 0$ beliebig war auch die Aussage.

III. (ii) $\implies X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} X$

Für $t \in \mathbb{R}$ definiere stetige, beschränkte Funktionen f_ε^- und f_ε^+ wie folgt:



Dann ist $f_\varepsilon^- \leq \mathbb{1}_{(-\infty, t]} \leq f_\varepsilon^+$ und damit

$$\mathbb{E}f_\varepsilon^-(X_n) \leq F_n(t) \leq \mathbb{E}f_\varepsilon^+(X_n)$$

für alle $n \geq 1$. Es folgt mit DOMK

$$\mathbb{E}f_\varepsilon^-(X) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(t) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(t) \leq \mathbb{E}f_\varepsilon^+(X)$$

Aber

$$\mathbb{E}f_\varepsilon^-(X) \geq \mathbb{E}[\mathbb{1}_{(-\infty, t-\varepsilon]}(X)] = F(t-\varepsilon)$$

$$\mathbb{E}f_\varepsilon^-(X) \leq \mathbb{E}[\mathbb{1}_{(-\infty, t+\varepsilon]}(X)] = F(t+\varepsilon)$$

Wenn F also stetig im Punkt t ist, folgt $F_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} F(t)$. □

11.6. Satz (Portemanteau Theorem 2): Es gilt $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} X$ genau dann, wenn eine der folgenden Bedingungen zutrifft:

- (i) Für $O \subseteq \mathbb{R}$ offen ist $\mathbb{P}(X \in O) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \in O)$.
- (ii) Für $A \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen ist $\mathbb{P}(X \in A) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \in A)$.
- (iii) Für $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mit $\mathbb{P}(X \in \partial B) = 0$ gilt $\mathbb{P}(X_n \in B) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{P}(X \in B)$.

Beweis: (i) \iff (ii) folgt sofort aus O offen $\iff O^c$ abgeschlossen.

I. $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X \implies$ (i)

Sei $O \subseteq \mathbb{R}$ offen und wähle stetige und beschränkte Funktionen (einfache Zerlegung, Hinweis: Jede offene Teilmenge von \mathbb{R} ist eine abzählbare Vereinigung offener Intervalle) $f_m, m \geq 1$, sodass

$$0 \leq f_1 \leq \dots \leq \lim_{m \rightarrow \infty} f_m = \mathbb{1}_O$$

Es folgt mit Portemanteau 1 (Satz 11.5)

$$\forall m \geq 1 : \mathbb{E}f_m(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}f_m(X_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \in O)$$

und damit

$$\mathbb{P}(X \in O) = \mathbb{E}\mathbb{1}_O(X) \stackrel{\text{MONK}}{=} \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}f_m(X) \stackrel{\text{s.o.}}{\leq} \lim_{m \rightarrow \infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \in O) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \in O)$$

II. (i),(ii) \implies (iii)

Sei $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mit $\mathbb{P}(X \in \partial B) = 0$. Dann ist

$$\mathbb{P}(X \in B \setminus \partial B) = \mathbb{P}(X \in \text{int}(B)) = \mathbb{P}(X \in \text{clos}(B)) = \mathbb{P}(X \in B)$$

und damit

$$\mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(X \in \text{clos}(B)) \stackrel{\text{(ii)}}{\geq} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \in \text{clos}(B)) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \in B)$$

$$\mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(X \in \text{int}(B)) \stackrel{\text{(i)}}{\leq} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \in \text{int}(B)) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \in B)$$

und damit

$$\mathbb{P}(X_n \in B) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{P}(X \in B)$$

III. (iii) $\implies X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} X$

Für $B = (-\infty, t]$ ist $\mathbb{P}(X_n \in B) = F_n(t)$ und $\partial B = \{t\}$. Wenn F also stetig in t ist, folgt die Aussage. \square

11.7. Satz (Slutsky's Theorem): Wenn $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} X$ und $Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Z$, mit $\mathbb{P}(Z = c) = 1$, dann gilt:

(i) $X_n + Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} X + c$

(ii) $X_n Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Xc$

(iii) Falls $c \neq 0$: $\frac{X_n}{Z_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \frac{X}{c}$

Beweis:

- (i) Wenn t Stetigkeitspunkt der Verteilung von $X + c$ ist, dann ist $t - c$ Stetigkeitspunkt der Verteilung von X , also

$$\lim_{x \nearrow t} \mathbb{P}(X \leq x - c) = \lim_{x \nearrow t-c} \mathbb{P}(X + c \leq x) \stackrel{\text{Ann.}}{=} \mathbb{P}(X + c \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t - c)$$

Damit folgt $X_n + c \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} X + c$ für $c \in \mathbb{R}$.

Sei also $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit kompaktem Träger. Dann ist f beschränkt und gleichmäßig stetig. Sei $\varepsilon > 0$ und wähle $\delta > 0$, sodass

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}f(X_n + Z_n) - \mathbb{E}f(X_n + c)| &\leq \mathbb{E}|f(X_n + Z_n) - f(X_n + c)| = \\ &= \mathbb{E}[|f(X_n + Z_n) - f(X_n + c)| \mathbf{1}_{|Z_n - c| \geq \delta}] \\ &\quad + \mathbb{E}[|f(X_n + Z_n) - f(X_n + c)| \mathbf{1}_{|Z_n - c| < \delta}] \leq \\ &\leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \cdot \mathbb{P}(|Z_n - c| \geq \delta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \varepsilon \end{aligned}$$

Für $\varepsilon \searrow 0$ und mit $X_n + c \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} X + c$ folgt die Aussage mit Portememanteau 1 (Satz 11.5).

- (ii) Zeige zuerst den Fall wo $c = 0$:

Hier genügt es mit Proposition 11.3 zu zeigen, dass $X_n Z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0$. Für $\varepsilon > 0$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X_n Z_n| > \varepsilon) &= \mathbb{P}(|X_n Z_n| > \varepsilon, |Z_n| > \delta) + \mathbb{P}(|X_n Z_n| > \varepsilon, |Z_n| \leq \delta) \\ &\leq \mathbb{P}(|X_n Z_n| > \varepsilon, |Z_n| \leq \delta) + \mathbb{P}(|Z_n| > \delta) \\ &= \mathbb{P}(X_n < -\varepsilon/\delta) + [1 - \mathbb{P}(X_n \leq \varepsilon/\delta)] + \mathbb{P}(|Z_n| > \delta) \\ &\leq F_n(-\varepsilon/\delta) + 1 - F_n(\varepsilon/\delta) + \mathbb{P}(|Z_n| > \delta) \end{aligned}$$

Wir können nun $\delta > 0$ so wählen, dass F in den Punkten $\pm\varepsilon/\delta$ stetig ist. Dann folgt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n Z_n| > \varepsilon) \leq F(-\varepsilon/\delta) + [1 - F(\varepsilon/\delta)]$$

und für $\delta \searrow 0$ folgt die gewünschte Aussage.

Zeige nun den Fall wo $c \neq 0$:

Schreibe dazu $X_n Z_n = X_n(Z_n - c) + X_n c$. Es gilt $X_n c \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} X c$ (einfach zu prüfen) und $(Z_n - c) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0$. Mit dem ersten Fall folgt

$$X_n(Z_n - c) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P/d} 0$$

Mit (i) folgt also

$$X_n Z_n = X_n(Z_n - c) + X_n c \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} X c$$

- (iii) Die Abbildung $t \mapsto 1/t$ ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ und damit gilt

$$\frac{1}{Z_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \frac{1}{c}$$

Mit (ii) folgt damit die Aussage. □

11.8. Satz (Continuous Mapping Theorem, CMT): Seien $X_n, n \geq 1$ und X Zufallsvariablen, sodass $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} X$ und sei $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung, sodass es $H \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gibt, mit $H \subseteq C(h)$ und $\mathbb{P}(X \in H) = 1$. Dann folgt

$$h(X_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} h(X)$$

Beweis: Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen. Dann gilt

$$h^{-1}A \subseteq \text{clos}(h^{-1}A) \stackrel{\dagger}{\subseteq} h^{-1}A \cup H^c$$

\dagger folgt mit einer kurzen Überlegung aus der Tatsache, dass Urbilder abgeschlossener Mengen unter stetigen Funktionen wieder abgeschlossen sind.

Damit folgt nun

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(h(X_n) \in A) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \in h^{-1}A) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \in \text{clos}(h^{-1}A)) \\ &\stackrel{\text{PMT2}}{\leq} \mathbb{P}(X \in h^{-1}A) \\ &\leq \mathbb{P}(X \in h^{-1}A \cup H^c) \\ &\leq \mathbb{P}(X \in h^{-1}A) + \mathbb{P}(X \in H^c) \\ &= \mathbb{P}(X \in h^{-1}A) = \mathbb{P}(h(X) \in A) \end{aligned}$$

und da A eine beliebige abgeschlossene Teilmenge von \mathbb{R} war folgt mit PMT2 (Satz 11.6), dass

$$h(X_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} h(X)$$

□

11.9. Proposition (δ -Methode): Für eine Folge von Zufallsvariablen $X_n, n \geq 1$ mit

$$\sqrt{n}(X_n - \mu) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(t, \sigma^2)$$

und eine Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die stetig im Punkt μ ist, gilt

$$\sqrt{n}(f(X_n) - f(\mu)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, (f'(\mu))^2 \sigma^2)$$

Eine hinreichende Bedingung an die $X_n, n \geq 1$ wäre z.B., dass sie einen zentralen Grenzwertsatz (siehe Sätze 11.25, 11.26, 11.27) erfüllen.

Beweis: Betrachte die Abbildung $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$x \mapsto \begin{cases} f'(\mu) - \frac{f(x) - f(\mu)}{x - \mu} & \text{if } x \neq \mu \\ 0 & \text{if } x = \mu \end{cases}$$

Da $f'(\mu)$ existiert ist g stetig im Punkt μ (Definition der Ableitung). Dann gilt

$$f(x) - f(\mu) = f'(\mu)(x - \mu) - g(x)(x - \mu)$$

und damit

$$\sqrt{n}(f(X_n) - f(\mu)) = f'(\mu)\sqrt{n}(X_n - \mu) - g(X_n)\sqrt{n}(X_n - \mu) =: A_n - B_n$$

Mit Slutsky's Theorem (Satz 11.7. (ii)) und dem Reproduktionssatz folgt sofort $A_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, (f'(\mu))^2 \sigma^2)$.

Es genügt mit Slutsky's Theorem (Satz 11.7. (i)) also zu zeigen, dass $B_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0$.

Sei $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Dann gilt (einfache Überlegung) $X_n - Z \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0$. Da g stetig in μ ist, gilt mit dem Continuous Mapping Theorem (Satz 11.8) $g(X_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} g(\mu) = 0$. Dann folgt erneut mit Slutsky's Theorem $B_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P/d} 0$ und damit die Behauptung. \square

11.10. Satz Seien $X_n, n \geq 1$ gleichgradig integrierbar und $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} X$. Dann folgt $X \in L_1$ und $\mathbb{E}X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}X$.

Beweis:

I. $X_n, n \geq 0$ und X alle nicht-negativ

Aus der gleichgradigen Integrierbarkeit folgt mit Lemma 9.2

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}|X_n| = B < \infty$$

Für alle $M > 1$ definiere $g_M(\cdot)$ wie im Beweis von Satz 11.5 (PMT1, Teil II). Dann ist g_M stetig, beschränkt und hat kompakten Träger. Also ist die Abbildung mit $t \mapsto t \cdot g_M(t)$ stetig mit kompaktem Träger und es gilt $\forall m \geq 1$

$$0 \leq \mathbb{E}[Xg_M(X)] \stackrel{\text{PMT1}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n g_M(X_n)] \stackrel{g_M \leq 1}{\leq} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}X_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}|X_n| = B < \infty$$

Gleichzeitig gilt aber

$$0 \leq Xg_1(X) \leq \dots \leq \lim_{M \rightarrow \infty} Xg_M(X) = X$$

und mit MONK

$$0 \leq \mathbb{E}X = \lim_{M \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Xg_M(X)] \leq B$$

und da $\mathbb{E}X = \mathbb{E}|X|$, folgt $X \in L_1$.

Zeige nun die Konvergenz:

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}X_n - \mathbb{E}X| &= |\mathbb{E}[X_n g_M(X_n) - X + X_n - X_n g_M(X_n)]| \\ &\leq |\mathbb{E}[X_n g_M(X_n)] - \mathbb{E}X| + \mathbb{E}|X_n| |1 - g_M(X_n)| \\ &\leq |\mathbb{E}[X_n g_M(X_n)] - \mathbb{E}X| + \mathbb{E}|X_n| \cdot \mathbf{1}_{\{|X_n| \geq M\}} \end{aligned}$$

Damit folgt mit PMT1

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\mathbb{E}X_n - \mathbb{E}X| \leq |\mathbb{E}[Xg_M(X)] - \mathbb{E}X| + \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}|X_n| \cdot \mathbf{1}_{\{|X_n| \geq M\}}$$

und für $M \rightarrow \infty$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\mathbb{E}X_n - \mathbb{E}X| \leq \limsup_{M \rightarrow \infty} |\mathbb{E}X g_M(X) - \mathbb{E}X| + \limsup_{M \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}|X_n| \cdot \mathbb{1}_{\{|X_n| \geq M\}} = 0$$

wobei die letzte Gleichung mit MONK und der Def. von gleichgradiger Integrierbarkeit folgt.

II. allgemeiner Fall

Die Abbildung mit $t \mapsto \max(t, 0)$ ist stetig auf \mathbb{R} , sodass mit dem Continuous Mapping Theorem (Satz 11.8) für $X^+ := \max(X, 0)$ und $X_n^+ := \max(X_n, 0)$ gilt

$$X_n^+ \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} X^+$$

Da $0 \leq X_n^+ \leq |X_n^+|$ und die $X_n, n \geq 1$ gleichgradig integrierbar sind, sind auch die $X_n^+, n \geq 1$ gleichgradig integrierbar. Mit dem I. Fall folgt

$$\mathbb{E}X_n^+ \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}X^+$$

Dasselbe gilt für den Negativteil und es folgt

$$\mathbb{E}X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}X$$

mit den Rechenregeln für Konvergenz von Folgen reeller Zahlen. □

Schwach konvergente Teilfolgen

Erinnerung Analysis: Jede Folge reeller Zahlen $a_n, n \geq 1$ enthält eine Teilfolge $a_{n_i}, i \geq 1$, die gegen einen Grenzwert $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ konvergiert, i.e. $\alpha = \lim_{i \rightarrow \infty} a_{n_i} \in \overline{\mathbb{R}}$. Falls $a_n, n \geq 1$ zusätzlich beschränkt ist, dann gilt $\alpha \in \mathbb{R}$. Ähnliches gilt für Wahrscheinlichkeitsmaße.

Reimnder: $b_n, n \geq 1$ ist eine Teilfolge von $a_n, n \geq 1$, falls eine bijektive, streng monoton steigende Abbildung $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ existiert, sodass $b_n = a_{f(n)}$ für alle $n \geq 1$.

11.11. Satz (Helly's Selection Theorem): Sei $F_n, n \geq 1$ eine Folge von Verteilungsfunktionen (cdfs). Dann existiert eine Teilfolge $F_{n_i}, i \geq 1$ und eine monoton-nichtfallende rechtsstetige Funktion $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit linksseitigen Grenzwerten (cdlg), sodass

$$\forall t \in C(F) : F_{n_i}(t) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} F(t)$$

Dabei ist aber nicht garantiert, dass F auch eine cdf ist (also $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1, \lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 0$)!

Beweis: Ordne $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$ und wähle aus der vollen Folge $n = 1, 2, 3, \dots$ eine erste Teilfolge $n_i(1), i \geq 1$, sodass $F_{n_i(1)}(q_1)$ für $i \rightarrow \infty$ konvergiert (möglich da $F_n \leq 1$, cf. Anmerkung unter der Unterüberschrift).

Wähle nun eine weitere (Teil-)Teilfolge $n_i(2), i \geq 1$, sodass $F_{n_i(2)}(q_2)$ für $i \rightarrow \infty$ konvergiert.

⋮

Für die k -te Teilfolge $n_i(k), i \geq 1$ existieren dann die Grenzwerte

$$\lim_{i \rightarrow \infty} F_{n_i(k)}(q_\ell), \ell = 1, \dots, k$$

Setze nun $n_i := n_i(i)$ für $i \geq 1$. Dann konvergiert $F_{n_i}(q_\ell)$ für jedes $\ell \geq 1$, da n_i ab dem Index $i = \ell$ eine Teilfolge von $n_\ell(1)$ ist. Setze nun für $q \in \mathbb{Q}$

$$G(q) := \lim_{i \rightarrow \infty} F_{n_i}(q)$$

Dann ist $G : \mathbb{Q} \rightarrow [0, 1]$ monoton-nichtfallend auf \mathbb{Q} , da jedes Element der Folge $F_{n_i}(q)$ monoton-nichtfallend ist. Für $t \in \mathbb{R}$ definiere nun

$$F(t) := \inf\{G(q) : q \geq t, q \in \mathbb{Q}\}$$

Als Infimum einer nichtleeren Menge ist $F(t)$ damit für alle $t \in \mathbb{R}$ wohldefiniert und

1. F ist monoton-nichtfallend auf \mathbb{R} , da

$$s \leq t \implies \{G(q) : q \geq s, q \in \mathbb{Q}\} \supseteq \{G(q) : q \geq t, q \in \mathbb{Q}\}$$

2. F ist rechtsstetig auf \mathbb{R} :

Sei $\varepsilon > 0, t \in \mathbb{R}$. Dann gibt es mit der Greatest Lower Bound Property $q \in \mathbb{Q}, q \geq t$, sodass

$$F(t) \leq G(q) \leq F(t) + \varepsilon$$

da \mathbb{Q} dicht in \mathbb{R} liegt. Damit gilt

$$\forall s \in [t, q] : F(t) \leq F(s) \leq F(q) = G(q) \leq F(t) + \varepsilon$$

und für $\varepsilon \searrow 0$ folgt die Aussage.

3. $F_{n_i} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F$ auf $C(F)$:

Sei F stetig in t , und sei $\varepsilon > 0$. Wähle nun $\delta > 0$, sodass

$$|t - s| < \delta \implies |F(t) - F(s)| < \varepsilon$$

Wähle nun $r, q \in \mathbb{Q}$, sodass

$$t - \delta < r < t < q < t + \delta$$

und somit

$$F(t) - \varepsilon < F(r) \leq F(t) \leq F(q) < F(t) + \varepsilon$$

Mit der Definition von G und F folgt nun

$$F_{n_i}(r) \leq F_{n_i}(t) \leq F_{n_i}(q)$$

wobei die linke und rechte Schranke gegen $G(r)$ bzw. $G(q)$ konvergieren, also

$$F(t) - \varepsilon < G(r) \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} F_{n_i}(t) \leq \limsup_{i \rightarrow \infty} F_{n_i}(t) \leq G(q) < F(t) + \varepsilon$$

und für $\varepsilon \searrow 0$ folgt die Aussage. □

11.12. Definition: Eine Folge von Zufallsvariablen $X_n, n \geq 1$ ist *stochastisch beschränkt*, wenn gilt:

$$\sup_{n \geq 1} \mathbb{P}(|X_n| > M) \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0$$

Die entsprechende Folge der Maße/cdfs nennt man dann *straff*.

11.13. Lemma: $X_n, n \geq 1$ ist genau dann stochastisch beschränkt, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists g : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty) \text{ messbar} : \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}g(X_n) \leq \varepsilon \cdot \liminf_{|t| \rightarrow \infty} g(t) \quad (5)$$

Beweis:

I. \implies

Wähle $a_0 < a_1 < \dots$ mit $a_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$, sodass mit der stochastischen Beschränktheit

$$\forall n \geq 1 : \mathbb{P}(|X_n| > a_k) < \left(\frac{1}{4}\right)^k$$

(Setze $\varepsilon = 4^{-k}$ und setze a_k dann einfach groß genug). Setze nun

$$g(t) := \sum_{k \geq 0} 2^k \mathbb{1}_{(a_k, a_{k+1}]}(|t|)$$

Dann ist g messbar (einfaches Argument) und $\liminf_{|t| \rightarrow \infty} g(t) = \infty$ (folgt z.B. aus $\liminf \geq \inf$).

Weiters gilt

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1 : \mathbb{E}g(X_n) &= \sum_{k \geq 0} 2^k \mathbb{P}(a_k < |X_n| \leq a_{k+1}) \\ &\leq \sum_{k \geq 0} 2^k \mathbb{P}(|X_n| > a_k) \\ &\leq \sum_{k \geq 0} 2^k \frac{1}{4^k} = 2 < \infty \end{aligned}$$

Es gilt also $\forall \varepsilon > 0$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}g(X_n) \leq 2 \leq \infty = \varepsilon \cdot \liminf_{|t| \rightarrow \infty} g(t)$$

II. \Leftarrow

Sei $\varepsilon > 0$ und wähle g , sodass (5) gilt.

$$\liminf_{|t| \rightarrow \infty} g(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \inf_{|t| > T} g(t)$$

wobei $\inf_{|t| > T} g(t)$ monoton nicht-fallend in T ist. Mit der Annahme können wir $T > 0$ wählen, sodass

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}g(X_n) \leq \varepsilon \cdot \inf_{|t| > T} g(t) \leq \varepsilon \cdot \liminf_{|t| \rightarrow \infty} g(t)$$

Wähle nun $c \in \mathbb{R}$, sodass

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}g(X_n) < c \leq \varepsilon \cdot \inf_{|t| > T} g(t) \leq \varepsilon \cdot \liminf_{|t| \rightarrow \infty} g(t)$$

Für $|t| > T$ ist dann $c < \varepsilon g(t)$, bzw. $1 < \varepsilon g(t)/c$ und damit

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n| > T) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} [1 \cdot \mathbb{1}_{\{|X_n| > T\}}] \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\frac{\varepsilon g(X_n)}{c} \mathbb{1}_{\{|X_n| > T\}} \right] \\ &\leq \frac{\varepsilon}{c} \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}g(X_n) < \varepsilon \end{aligned}$$

Damit gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für $n \geq n_0 : \mathbb{P}(|X_n| > T) < \varepsilon$. Wähle nun $S > 0$ groß genug, sodass für $n = 1, \dots, n_0 - 1 : \mathbb{P}(|X_n| > S) < \varepsilon$ und setze $M := \max(S, T)$. Damit gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $M > 0$, sodass

$$\forall n \geq 1 : \mathbb{P}(|X_n| > M) < \varepsilon$$

und insbesondere $\sup_{n \geq 1} \mathbb{P}(|X_n| > M) \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0$. □

11.14. Satz (Prokhorov Theorem): Betrachte eine Folge von cdfs $F_n, n \geq 1$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) Die $F_n, n \geq 1$ sind straff.
- (ii) Jede Teilfolge $F_{n_i}, i \geq 1$ enthält eine weitere Teilfolge $F_{n_{i_k}}, k \geq 1$, sodass

$$F_{n_{i_k}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} F$$

für eine cdf F .

Beweis:

I. (i) \implies (ii)

Helly's Selection Theorem (Satz 11.11) liefert uns eine Teilfolge $F_{n_{i_k}}, k \geq 1$ und eine monoton nicht-fallende cdlg Funktion F , sodass $F_{n_{i_k}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} F$. Zeige also

$$F(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 1 \text{ und } F(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$$

Da die $F_n, n \geq 1$ straff sind, kann man $M_\ell, \ell \geq 1$ wählen, sodass

$$\sup_{n \geq 1} [F_n(-M_\ell) + 1 - F_n(M_\ell)] \leq \sup_{n \geq 1} \mathbb{P}(|X_n| > M_\ell) < \frac{1}{\ell}$$

O.B.d.A. seien $\pm M_\ell$ Stetigkeitspunkte und $M_\ell + 1 < M_{\ell+1} \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} \infty$ für alle $\ell \geq 1$. Dann gilt $F_{n_{i_k}}(M_\ell) = 1 - [1 - F_{n_{i_k}}(M_\ell)] > 1 - 1/\ell$ und damit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F_n(t) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} F(M_\ell) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} F_{n_{i_k}}(M_\ell) \right) \geq 1$$

Da aber für alle $k \geq 1$ $F_{n_{i_k}}(M_\ell) \leq 1$ sind, folgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1$$

Ein ähnliches Argument funktioniert für $\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t)$.

II. (ii) \implies (i)

Angenommen die $F_n, n \geq 1$ sind nicht straff

$$\implies \exists \varepsilon > 0 \forall M > 0 : \sup_{n \geq 1} \mathbb{P}(|X_n| > M) \geq \varepsilon \quad (6)$$

Wähle nun $n_i, i \geq 1$ so, dass

$$F_{n_i}(-i) + 1 - F_{n_i}(i) > \frac{\varepsilon}{2}$$

Wegen (6) können die $n_i, i \geq 1$ monoton steigend gewählt werden. Laut Voraussetzung existiert nun eine weitere Teilfolge $F_{n_{i_k}}, k \geq 1$ und eine cdf F , sodass

$$F_{n_{i_k}} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{d} F$$

Weil F eine cdf ist, gibt es $M > 0$, sodass

$$F(-M) + 1 - F(M) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Seien o.B.d.A. $\pm M$ Stetigkeitspunkte von F . Dann gilt

$$F(-M) + 1 - F(M) = \lim_{k \rightarrow \infty} [F_{n_{i_k}}(-M) + 1 - F_{n_{i_k}}(M)] < \frac{\varepsilon}{2}$$

Da aber

$$F_{n_{i_k}}(-M) + 1 - F_{n_{i_k}}(M) \geq F_{n_{i_k}}(-i_k) + 1 - F_{n_{i_k}}(i_k) \geq \varepsilon > \frac{\varepsilon}{2}$$

für hinreichend große k (sodass $i_k \geq M$) ergibt sich hier ein Widerspruch zur Annahme (6). \square

Charakteristische Funktionen

Betrachte $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ isomorph zu \mathbb{R}^2 (im Sinne von Vektorräumen). Weil $|a + ib|^2 = \|(a, b)\|_2^2$, kann man $\mathcal{B}(\mathbb{C})$, die von den offenen Teilmengen in \mathbb{C} erzeugte σ -Algebra, auch als $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ betrachten. In diesem Kapitel sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ wieder ein generischer Wahrscheinlichkeitsraum.

11.15. Definition: Sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine Zufallsvariable und schreibe $X = \Re(X) + \Im(X)$ ($\Re(z)$ ist der Realteil von $z \in \mathbb{C}$ und $\Im(z)$ ist der Imaginärteil von $z \in \mathbb{C}$). Sind $\Re(X)$ und $\Im(X)$ beide integrierbar (bzgl.), dann nennt man X integrierbar und setzt

$$\int X \, d\mathbb{P} := \int \Re(X) \, d\mathbb{P} + i \int \Im(X) \, d\mathbb{P}$$

Bemerkung: Es gilt $X \in L_1 \iff |X| \in L_1$, denn

$$\max(\Re(X), \Im(X)) \leq |(\Re(X))^2 + (\Im(X))^2|^{1/2} = |X| \leq |\Re(X)| + |\Im(X)|$$

11.16. Lemma: Das oben definierte Lebesgue-Integral ist linear und für $X \in L_1$ gilt die Dreiecksungleichung

$$|\mathbb{E}X| \leq \mathbb{E}|X|$$

Beweis: folgt noch

Bemerkung: Es gilt (einfacher Beweis, cf. komplexe Analysis)

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} e^{ix} = i e^{ix}$$

11.17. Definition: Die charakteristische Funktion (cf) einer Zufallsvariable $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert als

$$\varphi_X(t) := \mathbb{E} [e^{itX}], \forall t \in \mathbb{R}$$

$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ist mit DOMK immer wohldefiniert, da $|e^{itX}| \leq 1$

11.18. Proposition: Seien X, Y reellwertige, unabhängige Zufallsvariablen. Dann gilt

$$\varphi_{X+Y} = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \varphi_{X+Y}(t) &= \mathbb{E} [e^{itX} e^{itY}] \\ &= \mathbb{E} [(\cos(tX) + i \sin(tX))(\cos(tY) + i \sin(tY))] \\ &= \mathbb{E} [\cos(tX) \cos(tY) + i \cos(tX) \sin(tY) + i \sin(tX) \cos(tY) - \sin(tX) \sin(tY)] \\ &\stackrel{\in \mathbb{R}}{=} \mathbb{E} [\cos(tX) + i \sin(tX)] \mathbb{E} [\cos(tY) + i \sin(tY)] = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) \end{aligned}$$

□

11.19. Lemma: Die momenterzeugende Funktion (mgf) einer reellwertigen Zufallsvariable X

$$M_X(t) := \mathbb{E} [e^{tX}]$$

sei wohldefiniert in einer offenen Umgebung von 0, i.e.

$$\exists t_0 > 0 : M_X(t) \text{ existiert für } t \in (-t_0, t_0)$$

Dann folgt

$$\forall k \geq 0 : X \in L_k \text{ und } \mathbb{E} X^k = \left. \frac{\partial^k}{\partial t^k} M_X(t) \right|_{t=0}$$

Beweis: Sei $M_X(t)$ wohldefiniert für $|t| < t_0$ mit $t_0 > 0$. Dann folgt mit

$$0 \leq e^{t|X|} \leq e^{tX} + e^{-tX}$$

dass

$$\forall |t| < t_0 : e^{t|X|} \in L_1$$

Sei also $t < t_0$. Per Definition ist

$$e^{tX} = \sum_{k \geq 0} \frac{(tX)^k}{k!}$$

wobei die Partialsummen im Betrag durch $e^{t|X|} \in L_1$ beschränkt sind. Mit DOMK gilt damit

$$M_X(t) = \mathbb{E} [e^{tX}] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{t^k \mathbb{E} X^k}{k!}$$

wobei die Reihe absolut konvergiert, da

$$\sum_{k \geq 0} \frac{|t^k \mathbb{E} X^k|}{k!} \leq \sum_{k \geq 0} \frac{|t^k| \mathbb{E} |X|^k}{k!} \stackrel{\text{MONK}}{=} \mathbb{E} \left[\sum_{k \geq 0} \frac{|t^k| |X|^k}{k!} \right] = \mathbb{E} [e^{|tX|}] < \infty$$

Differenzieren liefert dann

$$\frac{\partial^\ell}{\partial t^\ell} M_X(t) = \sum_{k \geq \ell} \frac{k(k-1) \dots (k-\ell+1)}{k!} t^{k-\ell} \mathbb{E} X^k$$

und mit $t = 0$ das gewünschte Ergebnis. □

11.20. Satz (Inversions- und Eindeutigkeitssatz): Sei φ die cf und F die cdf einer reelwertigen Zufallsvariable X . Dann gilt

$$F(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{w^2}{2n^2} + i w v\right) \varphi(-w) dw dv$$

für jedes t mit $\mathbb{P}(X = t) = 0$. Wegen der rechtsstetigkeit von F ist $F(t)$ damit für jedes $t \in \mathbb{R}$ eindeutig durch φ definiert.

Bemerkung: In der Literatur wird oft

$$\mathbb{P}(a \leq X < b) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t) dt$$

angegeben für $\mathbb{P}(X = a) = \mathbb{P}(X = b) = 0$.

Beweis: Die Idee ist Folgende:

Sei $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ u.a. von X und setze $X_n := X + Z/n$. Dann gilt $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} X$ und als Konsequenz auch $F_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} F$. Für t mit $\mathbb{P}(X = t) = 0$, folgt dann $F_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} F(t)$. Zeige nun:

I. X_n hat eine Dichte f_n bzgl. dem Lebesgue-Maß $\lambda = \text{vol}$

II. Diese Dichte ist von der Form

$$f_n(v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{w^2}{2n^2} + i w v\right) \varphi(-w) dw$$

I. Z/n hat eine Riemann-integrierbare Dichte $\phi_{0,1/n^2} =: \phi$ bzgl. λ und somit folgt

$$\begin{aligned}
F_n(t) &= \mathbb{P}(X + Z/n \leq t) \\
&\stackrel{\text{Tonelli, u.a.}}{=} \int_{(X)} \int_{(Z)} \mathbb{1}_{(-\infty, t]}(x + v) \, d\mathbb{P}_{Z/n}(v) \, d\mathbb{P}_X(x) \\
&= \int_{(X)} \int_{-\infty}^{t-x} \phi(v) \, dv \, d\mathbb{P}_X(x) \\
&\stackrel{w:=v+x}{=} \int_X \int_{-\infty}^t \phi(w - x) \, dw \, d\mathbb{P}_X(x) \\
&= \int_{(X)} \int_{(W)} \mathbb{1}_{(-\infty, t]}(w) \phi(w - x) \, d\lambda(w) \, d\mathbb{P}_X(x) \\
&\stackrel{\text{Tonelli}}{=} \int_{(W)} \int_{(X)} \mathbb{1}_{(-\infty, t]}(w) \phi(w - x) \, d\mathbb{P}_X(x) \, d\lambda(w) \\
&= \int_{(W)} \mathbb{1}_{(-\infty, t]}(w) \left[\int_{(X)} \phi(w - x) \, d\mathbb{P}_X(x) \right] d\lambda(w) \\
&= \int_{-\infty}^t \mathbb{E}_X [\phi(w - X)] d\lambda(w)
\end{aligned}$$

Damit ist $f_n(v) := \mathbb{E}_X [\phi(v - X)]$ eine Dichte von X_n .

II. Es gilt

$$\phi(t) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2 n^2}{2}\right) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \varphi_Z(nt)$$

und damit

$$\begin{aligned}
f_n(v) &= \mathbb{E}_X [\phi(v - X)] \\
&= \mathbb{E}_X \left[\frac{n}{\sqrt{2\pi}} \varphi_Z[n(v - X)] \right] \\
&= \mathbb{E}_X \left[\frac{n}{\sqrt{2\pi}} \mathbb{E}_Z [e^{invZ - inXZ}] \right] \\
&\stackrel{\text{Fubini}}{=} \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \mathbb{E}_Z [\mathbb{E}_X [e^{invZ} e^{-inXZ}]] \\
&= \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \mathbb{E}_Z [e^{invZ} \mathbb{E}_X [e^{-inXZ}]] \\
&= \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{w^2}{2n^2}\right) \exp(iwv) \mathbb{E}_X [e^{-iwX}] \, dw \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{w^2}{2n^2} + iwv\right) \varphi(-w) \, dw
\end{aligned}$$

wobei der vorletzte Schritt mit der Erwartung von $nZ \sim \mathcal{N}(0, n^2)$ folgt. \square

11.21. Satz (Lévy Continuity Theorem/Stetigkeitssatz): Betrachte eine Folge von reellwertigen Zufallsvariablen $X_n, n \geq 1$ mit entsprechenden cdfs $F_n, n \geq 1$ und cfs $\varphi_n, n \geq 1$. Wenn

- (i) $\forall t \in \mathbb{R} : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) =: \gamma(t) \in \mathbb{C}$
- (ii) $\gamma(t)$ stetig im Punkt $t = 0$

dann folgt, dass γ die cf einer cdf F ist, und

$$F_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} F$$

Beweis: Seien $X_n, n \geq 1$ jeweils F_n -verteilt. Zeige (später), dass die F_n straff sind. Mit Prokhorov (Satz 11.14) gibt es dann eine Teilfolge $F_{n_j}, j \geq 1$, sodass

$$F_{n_j} \xrightarrow[j \rightarrow \infty]{d} F$$

für eine cdf einer Zufallsvariable X . Da die Funktionen \sin, \cos auf \mathbb{R} stetig und beschränkt sind folgt mit PMT1 (Satz 11.5)

$$\forall t \in \mathbb{R} : \varphi_{n_j}(t) \xrightarrow[j \rightarrow \infty]{} \varphi_X(t)$$

für φ_X die cf von X . Wegen Annahme (i) und weil der Grenzwert von $\varphi_{n_j}(t)$ derselbe wie von $\varphi_n(t)$ sein muss (cf. Analysis: wenn eine Folge konvergiert, dann konvergiert jede Teilfolge zum selben Grenzwert), folgt damit

$$\forall t \in \mathbb{R} : \varphi_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \varphi_X(t)$$

Zeige nun $F_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} F$. Angenommen nicht:

$$\implies \exists \text{Teilfolge } (F_{n_k})_{k \geq 1} : F_{n_k} \not\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{d} F$$

Aber $F_{n_k}, k \geq 1$ ist straff, da $F_n, n \geq 1$ straff ist und enthält mit Helly (Satz 11.11) und Prokhorov (Satz 11.14) daher eine weitere Teilfolge $F_{n_{k_\ell}}, \ell \geq 1$ mit

$$F_{n_{k_\ell}} \xrightarrow[\ell \rightarrow \infty]{d} G$$

für eine cdf G . Damit gilt

$$\forall t \in \mathbb{R} : \varphi_{n_{k_\ell}}(t) \xrightarrow[\ell \rightarrow \infty]{} \varphi_G(t)$$

und damit (siehe oben)

$$\forall t \in \mathbb{R} : \varphi_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \varphi_G(t)$$

Wegen (ii) gilt aber $\varphi_X(t) = \varphi_G(t)$ und mit dem Inversion Theorem (Satz 11.20) folgt

$$G \stackrel{d}{=} F$$

ein Widerspruch. \square

11.22. Satz Betrachte eine Folge von Zufallsvariablen $X_n, n \geq 1$ mit cdfs $F_n, n \geq 1$ und cfs $\varphi_n, n \geq 1$. Es gilt

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} X \iff \varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \varphi$$

Beweis: Die Implikation \implies folgt trivial mit PMT1, da \cos, \sin stetig und beschränkt auf \mathbb{R} sind. Zeige also die Implikation \impliedby

Dazu genügt es zu zeigen, dass $\varphi(\cdot)$ stetig im Punkt $t = 0$ ist (dann folgt mit dem Lévy Continuity Theorem, dass $F_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} F$). Es gilt

$$|e^{itX}| \leq 1 \text{ und } e^{itX} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{a.s.} 1 \text{ (sogar punktweise)}$$

Mit DOMK folgt daher

$$\varphi(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1 = \varphi(0)$$

und damit die Aussage. □

Zentrale Grenzwertsätze

11.23. Lemma: Seien $z_i, w_i \in \mathbb{C}$ mit $|z_i|, |w_i| \leq 1, i = 1, \dots, n$. dann gilt folgende Ungleichung

$$|z_1 \cdot \dots \cdot z_n - w_1 \cdot \dots \cdot w_n| \leq \sum_{i=1}^n |z_i - w_i|$$

Beweis: Induktiv nach n .

1. Base ($P(1)$): $|z_1 - w_1| \leq |z_1 - w_1|$

2. Induktionsschritt ($P(n) \implies P(n+1)$):

$$\begin{aligned} & |z_1 \cdot \dots \cdot z_n \cdot z_{n+1} - w_1 \cdot \dots \cdot w_n \cdot w_{n+1}| \\ &= |z_1 \cdot \dots \cdot z_n \cdot z_{n+1} - z_1 \cdot \dots \cdot z_n w_{n+1} + z_1 \cdot \dots \cdot z_n w_{n+1} - w_1 \cdot \dots \cdot w_n \cdot w_{n+1}| \\ &= |z_1 \cdot \dots \cdot z_n \cdot (z_{n+1} - w_{n+1}) - w_{n+1} \cdot (z_1 \cdot \dots \cdot z_n - w_1 \cdot \dots \cdot w_n)| \\ &\leq |z_1 \cdot \dots \cdot z_n| \cdot |z_{n+1} - w_{n+1}| + |w_{n+1}| |z_1 \cdot \dots \cdot z_n - w_1 \cdot \dots \cdot w_n| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n+1} |z_i - w_i| \end{aligned}$$

□

11.24. Lemma: Für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^n \frac{(ix)^k}{k!} + R_n(x)$$

mit Rest

$$R_n(x) = \frac{i^{n+1}}{n!} \int_0^x (x-s)^n e^{is} ds$$

wobei insbesondere gilt

$$R_n(x) \leq \min \left(\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \frac{2|x|^n}{n!} \right)$$

(wobei uns später im Beweis des Lindeberg-Lévy CLT der Fall $n = 2$ interessiert).

Beweis: Induktiv nach n .

1. Base (P(0)):

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{is} ds &= i^{-1} e^{is} \Big|_{s=0}^{s=x} \\ &= -ie^{is} \Big|_{s=0}^{s=x} \\ &= i - ie^{ix} \\ \implies ie^{ix} &= i - \int_0^x e^{is} ds \\ \implies e^{ix} &= 1 + i \int_0^x e^{is} ds = \sum_{k=0}^0 \frac{(ix)^k}{k!} + \frac{i^{0+1}}{0!} \int_0^x (x-s)^0 e^{is} ds \end{aligned}$$

2. Induktionsschritt ($P(n) \implies P(n+1)$): Laut Voraussetzung gilt

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^n \frac{(ix)^k}{k!} + R_n(X)$$

wobei

$$R_n(x) = \frac{i^{n+1}}{n!} \int_0^x (x-s)^n e^{is} ds$$

Zeige also

$$R_n(x) = \frac{(ix)^{n+1}}{(n+1)!} + R_{n+1}(x)$$

Mit partieller Integration ($f(s) = e^{is}$, $g'(s) = -\frac{(x-s)^{n+1}}{n+1}$) gilt

$$\begin{aligned}
R_n(x) &= \frac{i^{n+1}}{n!} \int_0^x (x-s)^n e^{is} ds \\
&= \frac{i^{n+1}}{n!} \left(\left[-e^{is} \frac{(x-s)^{n+1}}{n+1} \right]_{s=0}^{s=x} + \int_0^x i e^{is} \frac{(x-s)^{n+1}}{n+1} ds \right) \\
&= \frac{i^{n+1}}{n!} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{i}{n+1} \int_0^x (x-s)^{n+1} e^{is} ds \right) \\
&= \frac{(ix)^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{i^{n+2}}{(n+1)!} \int_0^x (x-s)^{n+1} e^{is} ds \\
&= \frac{(ix)^{n+1}}{(n+1)!} + R_{n+1}(x)
\end{aligned}$$

Zur ersten Ungleichung:

Für $x \geq 0$ und mit $|e^{ix}| \leq 1$, $|i^\ell| = 1$, $\forall \ell \geq 1$ ist

$$\begin{aligned}
|R_n(x)| &\leq \frac{1}{n!} \int_0^x |x-s|^n ds \\
&= \frac{1}{n!} \int_0^x (x-s)^n ds \\
&= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \stackrel{x \geq 0}{=} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

Für $x < 0$ ist

$$\begin{aligned}
|R_n(x)| &\leq \frac{1}{n!} \left| \int_0^x (x-s)^n e^{is} ds \right| \\
&= \frac{1}{n!} \left| \int_x^0 (x-s)^n e^{is} ds \right| \\
&= \frac{1}{n!} \int_x^0 (s-x)^n ds = \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!} \stackrel{x \leq 0}{=} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

womit die erste Ungleichung für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Zur zweiten Ungleichung:

$$\begin{aligned}
R_n(x) &= \frac{i^{n+1}}{n!} \int_0^x (x-s)^n e^{is} ds \\
&= \frac{i^{n+1}}{n!} \left([-ie^{is}(x-s)^n]_{s=0}^{s=x} - in \int_0^x (x-s)^{n-1} e^{is} ds \right) \\
&= \frac{i^{n+2}x^n}{n!} - \frac{i^{n+2}}{(n-1)!} \int_0^x (x-s)e^{is} ds
\end{aligned}$$

wobei der erste Schritt wieder mit partieller Integration für $f(s) = (x-s)^n$ und $g'(s) = e^{is}$ folgt. Ähnlich wie für die erste Ungleichung folgt damit

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^n}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} \left| \int_0^x (x-s)^{n-1} e^{is} ds \right| \leq \frac{2|x|^n}{n!}$$

□

11.25. Satz (Lindeberg–Lévy CLT): Es seien $X_i \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} X, i \geq 1$ quadratisch integrierbare Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}X = \mu, \text{Var}(X) = \sigma^2 \in (0, \infty)$. Für $\bar{X}_n := \sum_{i=1}^n X_i$ gilt dann

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

Beweis: Seien o.B.d.A. $\mu = 0, \sigma = 1$. Sei im Folgenden ψ die cf von X und φ_n die cf von $\sqrt{n}\bar{X}_n$. Zu zeigen ist dann

$$\varphi_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{-t^2/2}$$

Mit Lemma 11.23 gilt $e^{itX} = 1 + itX - \frac{(tX)^2}{2} + R_2(tX)$ wobei $|R_2(tX)| \leq \min\left(\frac{|tX|^3}{6}, t^2 X^2\right)$. Damit gilt also

$$\psi(t) = 1 + \mathbb{E}[itX] - \frac{t^2 \mathbb{E}X^2}{2} + \mathbb{E}R_2(tX)$$

Sei $t > 0$. Mit der zweiten Ungleichung aus Lemma 11.23 gilt $\left| \frac{R_2(tX)}{t^2} \right| \leq X^2 \in L_1$ und mit der ersten Ungleichung gilt $\left| \frac{R_2(tX)}{t^2} \right| \xrightarrow[t \searrow 0]{a.s.} 0$. Mit DOMK folgt schließlich

$$\mathbb{E} \left| \frac{R_2(tX)}{t^2} \right| \xrightarrow[t \searrow 0]{} 0$$

Nun gilt

$$\varphi_n(t) = \mathbb{E} \left[e^{it\sqrt{n}\bar{X}_n} \right] \stackrel{\text{i.i.d.}}{=} \left[\psi \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right]^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + \mathbb{E}[R_2(tX)] \right)^n$$

Für $t = 0$ gilt also $\varphi_n(0) = 1 = e^{-0^2/2}$.

Für $t \neq 0$ ist

$$\begin{aligned}
\left| \varphi_n(t) - e^{-t^2/2} \right| &= \left| \varphi_n(t) - \left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)^n + \left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)^n - e^{-t^2/2} \right| \\
&\leq \left| \varphi_n(t) - \left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)^n \right| + \left| \left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)^n - e^{-t^2/2} \right| \\
&= \left| \left[\psi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right]^n - \left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)^n \right| + \mathcal{O}(1) \\
&\stackrel{11.22}{\leq} \sum_{i=1}^n \left| \psi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - \left(1 - \frac{t^2}{2n}\right) \right| \\
&= n \left| \psi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - \left(1 - \frac{t^2}{2n}\right) \right| \\
&= n \left| \mathbb{E} \left[R_2\left(\frac{tX}{\sqrt{n}}\right) \right] \right| \\
&= \frac{nt^2}{n} \left| \frac{\mathbb{E} \left[R_2\left(\frac{tX}{\sqrt{n}}\right) \right]}{t^2/n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0
\end{aligned}$$

□

Lindeberg- und Ljapunov-Bedingung

Betrachte nun allgemeiner ein triangulres Feld von quadratisch integrierbaren Zufallsvariablen $X_{n,i}, i = 1, \dots, r_n, n \geq 1$, sodass fr $n \geq 1$ die $X_{n,1}, \dots, X_{n,r_n}$ unabhngig sind. Definiere weiters

$$\sigma_{n,i}^2 := \text{Var}(X_{n,i}) \text{ und } s_n^2 := \sum_{i=1}^{r_n} \sigma_{n,i}^2$$

Eine Folge von quadratisch integrierbaren, unabhngigen Zufallsvariablen $Y_k, k \geq 1$ erflft diese Eigenschaften natrlich, da wir dann $X_{n,i} \sim Y_i$ fr alle $n \geq 1$ und $i = 1, \dots, r_n$ haben.

11.26. Definition (Lindeberg-Bedingung): Wir sagen, dass die Lindeberg-Bedingung fr $X_{n,i}, i = 1, \dots, r_n, n \geq 1$ gilt, falls

$$\forall \varepsilon > 0 : \frac{1}{s_n^2} \sum_{i=1}^{r_n} \mathbb{E} \left[(X_{n,i} - \mathbb{E}X_{n,i})^2 \mathbf{1}_{\{|X_{n,i} - \mathbb{E}X_{n,i}| > \varepsilon \cdot s_n\}} \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

11.27. Satz (Lindeberg CLT): Unter der Lindeberg-Bedingung gilt fr $\bar{X}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^{r_n} X_{n,i}$, dass

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mathbb{E}\bar{X}_n}{s_n} = \frac{\bar{X}_n - \mathbb{E}\bar{X}_n}{\sqrt{\text{Var}(\bar{X}_n)}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

Beweis: siehe z.B. P. Billingsley, *Probability and Measure* (3rd Ed.), p.360.

□

11.28. Definition (Ljapunov-Bedingung): Wir sagen, dass die Ljapunov-Bedingung fr $X_{n,i}, i = 1, \dots, r_n, n \geq 1$ gilt, falls

$$\exists \delta > 0 : \frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{i=1}^{r_n} \mathbb{E} |X_{n,i} - \mathbb{E} X_{n,i}|^{2+\delta} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

11.29. Lemma: Die Ljapunov-Bedingung impliziert die Lindeberg-Bedingung.

Beweis: Sei o.B.d.A. $\mathbb{E} X_{n,i} = 0$ fr alle $i = 1, \dots, r_n, n \geq 1$. Sei $\delta > 0$ wie in der Ljapunov-Bedingung, die laut Annahme gilt. Fr $\varepsilon > 0$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{s_n^2} \sum_{i=1}^{r_n} \mathbb{E} \left[X_{n,i}^2 \mathbb{1}_{\{|X_{n,i}| > \varepsilon \cdot s_n\}} \right] &\stackrel{1 \leq \frac{|X_{n,i}|^\delta}{(\varepsilon \cdot s_n)^\delta}}{\leq} \frac{1}{s_n^2} \sum_{i=1}^{r_n} \mathbb{E} \left[X_{n,i}^2 \frac{|X_{n,i}|^\delta}{(\varepsilon \cdot s_n)^\delta} \mathbb{1}_{\{|X_{n,i}| > \varepsilon \cdot s_n\}} \right] \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^\delta} \frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{i=1}^{r_n} \mathbb{E} |X_{n,i}|^{2+\delta} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

□

12. Radon-Nikodym-Ableitungen

In diesem Kapitel sei (Ω, \mathcal{A}) ein messbarer Raum und ν, μ generische Maße auf diesem Raum.

Signierte Maße

12.1. Definition: Ein signiertes Maß ist eine Abbildung $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$, die σ -additiv ist, i.e. für $A_n \in \mathcal{A}, n \geq 1$ disjunkt gilt

$$\varphi \left(\bigcup_{n \geq 1} A_n \right) = \sum_{n \geq 1} \varphi(A_n)$$

In unserem Kontext seien signierte Maße immer endlich und bilden \emptyset auf 0 ab.

12.2. Beispiel: Einige Beispiele für signierte Maße sind

- (i) $\phi(A) := \mu(A)$, wenn μ endlich ist.
- (ii) $\varphi(A) := \mu(A) - \nu(A)$, wenn μ, ν endlich sind.
- (iii) $\varphi(A) := \int_A f d\mu$, wenn $f \in L_1(\mu)$

12.3. Lemma: Seien $A_n \in \mathcal{A}, n \geq 1$, sodass entweder

- (i) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq \bigcup_{n \geq 1} A_n := A$, oder
- (ii) $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq \bigcap_{n \geq 1} A_n := A$

Dann ist in beiden Fällen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(A_n) = \varphi(A)$$

i.e. signierte Maße sind von unten/oben stetig.

Beweis:

(i)

$$\begin{aligned} \varphi(A) &= \varphi(A_1 \cup \bigcup_{n \geq 1} (A_{n+1} \setminus A_n)) \\ &= \varphi(A_1) + \sum_{n \geq 1} \varphi(A_{n+1} \setminus A_n) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\varphi(A_1) + \sum_{n=1}^N \varphi(A_{n+1} \setminus A_n) \right] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \varphi(A_{N+1}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \varphi(A_N) \end{aligned}$$

(ii) Hier gilt $A_1^c \subseteq \dots \subseteq \bigcup_{n \geq 1} A_n^c =: A^c$

$$\begin{aligned} &\stackrel{(i)}{\implies} \varphi(A^c) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(A_n^c) \\ &\implies \varphi(\Omega) - \varphi(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\varphi(\Omega) - \varphi(A_n)] = \varphi(\Omega) - \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(A_n) \\ &\implies \varphi(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(A_n) \end{aligned}$$

□

4. Satz (Hahn/Jordan Decomposition Theorem): Sei φ ein signiertes Maß auf (Ω, \mathcal{A}) . Dann gibt es eine Partition (Hahn-Zerlegung) von Ω

$$\Omega = \Omega_+ \cup \Omega_-$$

mit $\Omega_+, \Omega_- \in \mathcal{A}$, sodass

$$\forall A \in \mathcal{A} : \varphi(A \cap \Omega_+) =: \varphi_+(A) \geq 0, \quad \varphi(A \cap \Omega_-) =: \varphi_-(A) \leq 0$$

Daraus folgt sofort die Jordan-Zerlegung

$$\forall A \in \mathcal{A} : \varphi(A) = \varphi_+(A) + \varphi_-(A)$$

Beweis: Sei $\alpha := \sup_{A \in \mathcal{A}} \varphi(A)$. Dann gibt es eine Menge $D \in \mathcal{A}$, sodass dieses Supremum angenommen wird, i.e. $\varphi(D) = \alpha$ (Details zur Konstruktion siehe unten). Setze nun $\Omega_+ := D$ und $\Omega_- := D^c$. Dann gilt

- Angenommen es gibt $A \in \mathcal{A}$ mit $\varphi(A \cap D) < 0$. Dann ist $D = (D \cap A) \cup (D \setminus A)$ und

$$\alpha = \varphi(D) = \varphi(D \cap A) + \varphi(D \setminus A) < \varphi(D \setminus A)$$

ein Widerspruch, da $D \setminus A \in \mathcal{A}$ und $\alpha = \sup_{A \in \mathcal{A}} \varphi(A)$.

- Angenommen es gibt $A \in \mathcal{A}$ mit $\varphi(A \cap D^c) > 0$. Dann ist

$$\varphi(D \cup (A \cap D^c)) = \varphi(D) + \varphi(A \cap D^c) > \varphi(D) = \alpha$$

ein Widerspruch, da $D \cup (A \cap D^c) \in \mathcal{A}$ und $\alpha = \sup_{A \in \mathcal{A}} \varphi(A)$.

Zur Konstruktion von D :

Wähle $A_n, n \geq 1$, sodass $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(A_n) = \alpha$ und definiere für $n \geq 1$

$$\mathcal{B}_n := \left\{ B_I = \left(\bigcap_{I_i=1} A_i \right) \cup \left(\bigcap_{I_i=0} A_i^c \right) : I \in \{0, 1\}^n \right\}$$

sukzessive feiner werdende Partitionen von Ω . Setze nun

$$C_n := \bigcup_{\substack{B_I \in \mathcal{B}_n \\ \varphi(B_I) > 0}} B_I$$

Nun ist

$$A_n = \bigcup_{\substack{B_I \in \mathcal{B}_n \\ I_n=1}} B_I$$

sodass $\varphi(A_n) \leq \varphi(C_n)$ (*). Außerdem ist

$$\varphi\left(\bigcup_{m=n}^N C_m\right) \leq \varphi\left(\bigcup_{m=n}^{N+1} C_m\right)$$

da $\left(\bigcup_{m=n}^{N+1} C_m\right) \setminus \left(\bigcup_{m=n}^N C_m\right)$ eine Vereinigung von Mengen B_I aus \mathcal{B}_{N+1} mit $\varphi(B_I) > 0$ ist. (**)

Setze nun $D_i := \limsup_{n \rightarrow \infty} C_n$ Dann folgt

$$\begin{aligned} \alpha &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(A_n) \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi(C_n) \\ &\stackrel{(**)}{\leq} \liminf_{n \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} \varphi\left(\bigcup_{m=n}^N C_m\right) \\ &\stackrel{\text{s.v.U.}}{=} \liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} C_m\right) \\ &\stackrel{\text{s.v.O.}}{=} \varphi\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} C_m\right) \\ &= \varphi\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} C_n\right) = \varphi(D) \leq \alpha \end{aligned}$$

□

12.5. Definition:

(i) μ und ν sind gegenseitig singular (kurz $\mu \perp \nu$), wenn

$$\exists M \in \mathcal{A} : \mu(M) = 0, \nu(M^c) = 0$$

Die Relation \perp ist symmetrisch, i.e. $\mu \perp \nu \iff \nu \perp \mu$.

(ii) ν ist absolut stetig bezüglich μ , (kurz $\nu \ll \mu$) wenn

$$\forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0$$

Die Relation \ll ist transitiv, i.e. $\nu \ll \mu, \mu \ll \lambda \implies \nu \ll \lambda$.

12.6. Lemma: Seien μ und ν zwei endliche Maße, die NICHT gegenseitig singular sind. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(B) > 0$, sodass

$$\forall A \in \mathcal{A} : \varepsilon \cdot \mu(A \cap B) \leq \nu(A \cap B)$$

Beweis: Für $n \geq 1$ definiere ein signiertes Maß $\varphi_n := \nu - \mu/n$. Seien nun $\Omega_+^{(n)}$ und $\Omega_-^{(n)}$ die Hahn-Zerlegung von φ_n . Setze $M := \bigcup_{n \geq 1} \Omega_+^{(n)}$ und $M^c = \bigcap_{n \geq 1} \Omega_-^{(n)}$. Da $\varphi_1 \leq \dots \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \nu$, gilt $\Omega_+^{(1)} \supseteq \dots \supseteq M^c$ und mit der S.v.O. für signierte Maße $\forall n \geq 1 : \varphi_n(M^c) \leq 0$. Damit folgt per Definition für alle $n \geq 1$

$$\nu(M^c) - \frac{1}{n}\mu(M^c) \leq 0 \iff \nu(M^c) \leq \frac{1}{n}\mu(M^c)$$

und damit $\nu(M^c) = 0$. Laut Annahme gilt aber $\nu \not\ll \mu$ und damit $\mu(M) > 0$. Also folgt

$$0 < \mu(M) \leq \sum_{n \geq 1} \mu(\Omega_+^{(n)})$$

und damit gibt es ein $m \geq 1$, sodass $\mu(\Omega_+^{(m)}) > 0$ (*). Mit der Definition von φ_m gilt aber

$$\forall A \in \mathcal{A} : \nu(A \cap \Omega_+^{(m)}) - \frac{1}{m}\mu(A \cap \Omega_+^{(m)}) \geq 0 \iff \nu(A \cap \Omega_+^{(m)}) \geq \frac{1}{m}\mu(A \cap \Omega_+^{(m)})$$

Setze also $B := \Omega_+^{(m)}$ mit $\varepsilon := m^{-1}$. Dann gilt wegen (*) auch $\mu(B) = \mu(\Omega_+^{(m)}) > 0$. \square

12.7. Satz (Radon–Nikodym Theorem für σ -endliche Maße): Seien μ und ν zwei σ -endliche Maße, sodass $\nu \ll \mu$. Dann hat ν eine Dichte bezüglich μ , i.e. es gibt ein $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ messbar, sodass

$$\forall A \in \mathcal{A} : \nu(A) = \int_A f \, d\mu \quad (7)$$

Wir schreiben $f = \frac{d\nu}{d\mu}$. Falls insbesondere $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine weitere messbare Abbildung ist, die (7) erfüllt, dann gilt $f = g$ μ -a.e.

Beweis: Unterscheide hier die Fälle, wo μ, ν beide endlich sind, und den allgemeinen Fall (μ, ν beide σ -endlich).

1. Fall (μ, ν beide endlich): Betrachte die Menge

$$\mathcal{G} := \left\{ g \geq 0 : g \text{ messbar und } \forall A \in \mathcal{A} : \int_A g \, d\mu \leq \nu(A) \right\}$$

Da die konstante Nullfunktion $0 \in \mathcal{G}$, gilt $\mathcal{G} \neq \emptyset$ und es gibt ein $f \in \mathcal{G}$, sodass

$$\int f \, d\mu = \sup_{g \in \mathcal{G}} \int g \, d\mu \quad (8)$$

Zerlege nun $\nu(\cdot)$ als $\nu(A) = \int_A f \, d\mu + \nu_s(A)$ für $A \in \mathcal{A}$ mit Rest $\nu_s(\cdot)$. Dann ist ν_s ein endliches Maß und

$$\nu_s \perp \mu \quad (9)$$

Zeige also (8) und (9):

(8): Für $g, h \in \mathcal{G}$ ist $\max(g, h) \in \mathcal{G}$, denn für $A \in \mathcal{A}$ gilt

$$\int_A \max(g, h) \, d\mu = \int_{A \cap \{g \geq h\}} g \, d\mu + \int_{A \cap \{g < h\}} h \, d\mu \stackrel{g, h \in \mathcal{G}}{\leq} \nu(A \cap \{g \geq h\}) + \nu(A \cap \{g < h\}) = \nu(A)$$

Für $g_n \in \mathcal{G}, n \geq 1$ mit $0 \leq g_1 \leq \dots \leq \lim_{n \rightarrow \infty} g_n =: g$ ist $g \in \mathcal{G}$, denn für $A \in \mathcal{A}$ gilt

$$\int_A g \, d\mu \stackrel{\text{MONK}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A g_n \, d\mu \leq \nu(A)$$

wobei die letzte Ungleichung folgt, da jedes Element der Folge $\int_A g_n \, d\mu$ durch $\nu(A)$ beschränkt ist.

(9): Angenommen (9) gilt nicht. Mit Lemma 12.6 gibt es $\varepsilon > 0, b \in \mathcal{A}$ mit $\mu(b) > 0$, sodass $\forall A \in \mathcal{A} : \varepsilon \cdot \mu(A \cap b) \leq \nu_s(A \cap b)$. Damit folgt für $A \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \int_A (f + \varepsilon \cdot \mathbb{1}_b) \, d\mu &= \int_A f \, d\mu + \varepsilon \cdot \mu(A \cap b) \\ &\leq \int_A f \, d\mu + \nu_s(A \cap b) \\ &\leq \int_A f \, d\mu + \nu_s(A) = \nu(A) \end{aligned}$$

Damit folgt $f + \varepsilon \cdot \mathbb{1}_b \in \mathcal{G}$ und

$$\sup_{g \in \mathcal{G}} \int g \, d\mu \geq \int (f + \varepsilon \cdot \mathbb{1}_b) \, d\mu = \int f \, d\mu + \varepsilon \cdot \mu(b) > \int f \, d\mu = \sup_{g \in \mathcal{G}} \int g \, d\mu$$

ein Widerspruch.

Mit (9) folgt per Definition von gegenseitiger Singularität

$$\exists M \in \mathcal{A} : \mu(M) = 0, \nu_s(M^c) = 0$$

. Da aber $\nu \ll \mu$ ist $\nu(M) = 0$ und

$$0 = \nu(M) \stackrel{\text{per const.}}{\geq} \nu_s(M) \geq 0$$

und damit

$$\nu_s(\Omega) = \nu_s(M) + \nu_s(M^c) = 0$$

Also ist ν_s das Nullmaß und $\nu(A) = \int_A f \, d\mu$, womit die erste Aussage folgt.

Sei nun g eine weitere Dichte von ν bzgl. μ (also eine messbare Abbildung, die (7) erfüllt). Setze $A := \{f > g\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} 0 &= \nu(A) - \nu(A) \\ &= \int_A f \, d\mu - \int_A g \, d\mu \\ &= \int_A f - g \, d\mu \\ &= \int \mathbb{1}_{\{f-g>0\}} (f - g) \, d\mu \end{aligned}$$

und da im Integral $f - g > 0$, gilt $\mathbb{1}_A \stackrel{a.e.}{=} 0$ und $\mu(A) = 0$. Ein ähnliches Argument folgt für $B := \{f < g\}$ und die Aussage folgt schließlich mit der σ -Subadditivität.

2. Fall: (μ, ν) beide σ -endlich): Wähle $A_n \in \mathcal{A}, n \geq 1$ mit $A_1 \subseteq \dots \subseteq \bigcup_{n \geq 1} A_n = \Omega$, sodass $\mu(A_n) < \infty$ für alle $n \geq 1$. Wähle $B_n \in \mathcal{A}$ mit denselben Eigenschaften für ν . Setze nun $C_n := A_n \cap B_n$ für $n \geq 1$, sodass $C_n \in \mathcal{A}$ und $C_1 \subseteq \dots \subseteq \bigcup_{n \geq 1} C_n = \Omega$ und $\mu(C_n), \nu(C_n) < \infty$ für alle $n \geq 1$. Disjunktivisiere nun C_n durch $M_1 := C_1$ und $M_{n+1} := C_{n+1} \setminus C_n$ für alle $n \geq 1$. Dann gilt $\Omega = \bigsqcup_{n \geq 1} M_n$ und $\mu(M_n), \nu(M_n) < \infty$ für alle $n \geq 1$. Definiere nun endlich Maße ν_n und μ_n wie folgt:

$$\begin{aligned}\nu_n(A) &:= \nu(A \cap M_n) \\ \mu_n(A) &:= \mu(A \cap M_n)\end{aligned}$$

für alle $n \geq 1$ und $A \in \mathcal{A}$. Laut Voraussetzung ist $\nu \ll \mu$ und daher auch $\nu_n \ll \mu_n$ für alle $n \geq 1$. Mit dem 1. Fall hat also für jedes $n \geq 1$ ν_n eine Dichte f_n bzgl. μ_n . Setze nun

$$f := \sum_{n \geq 1} f_n \cdot \mathbb{1}_{M_n}$$

Dann ist $f \geq 0$ und messbar und für $A \in \mathcal{A}$ gilt

$$\begin{aligned}\int_A f \, d\mu &= \int \sum_{n \geq 1} f_n \cdot \mathbb{1}_{M_n} \cdot \mathbb{1}_A \, d\mu \\ &\stackrel{\text{MONK}}{=} \sum_{n \geq 1} \int f_n \cdot \mathbb{1}_{M_n} \cdot \mathbb{1}_A \, d\mu \\ &= \sum_{n \geq 1} \int_A f_n \cdot \mathbb{1}_{M_n} \, d\mu \\ &= \sum_{n \geq 1} \int_A f_n \, d\mu_n \\ &= \sum_{n \geq 1} \nu_n(A) \\ &= \sum_{n \geq 1} \nu(A \cap M_n) = \nu(A)\end{aligned}$$

Die Eindeutigkeit folgt wie im endlichen Fall. □

12.8. Satz (Radon–Nikodym Theorem für signierte Maße) folgt. Sei φ ein signiertes Ma und μ ein σ -endliches Ma, sodass $\varphi \ll \mu$. Dann hat φ eine Dichte bezüglich μ , i.e. es gibt ein $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ messbar, sodass

$$\forall A \in \mathcal{A} : \varphi(A) = \int_A f \, d\mu$$

Wir schreiben $f = \frac{d\varphi}{d\mu}$. Falls insbesondere $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine weitere messbare Abbildung ist, die (7) erfüllt, dann gilt $f = g$ μ -a.e.

Beweis: Betrachte die Hahn-Zerlegung $\Omega = \Omega_+ \cup \Omega_-$ und die Jordan-Zerlegung $\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$. Dann sind φ_+ und φ_- beide endliche Mae und $\varphi_+ \ll \mu, \varphi_- \ll \mu$. Setze also

$$f_{(+)} := \frac{d\varphi_+}{d\mu}, \quad f_{(-)} := \frac{d\varphi_-}{d\mu}, \quad f := f_{(+)} - f_{(-)}$$

Die Messbarkeit von f folgt sofort aus der Messbarkeit von $f_{(+)}, f_{(-)}$ laut Satz 12.7. Weiters gilt $f_{(+)}, f_{(-)} \in L_1(\mu)$ und damit auch $f \in L_1(\mu)$. Dass f eine Dichte von φ bezglich μ ist folgt mit

$$\varphi(A) = \varphi_+(A) - \varphi_-(A) = \int_A f_{(+)} d\mu - \int f_{(-)} d\mu = \int_A f d\mu$$

Ist g eine weitere Dichte von φ bezglich μ , dann ist $g \cdot \mathbb{1}_{\Omega_+}$ eine Dichte von φ_+ bezglich μ und mit Satz 12.7 gilt $g \cdot \mathbb{1}_{\Omega_+} \stackrel{a.e.}{=} f_{(+)}$. Dasselbe folgt für $g \cdot \mathbb{1}_{\Omega_-}$ und $f_{(-)}$. Da die Vereinigung zweier Nullmengen wieder eine Nullmenge ist folgt

$$g \stackrel{a.e.}{=} f$$

□

13. Bedingte Erwartungswerte und Wahrscheinlichkeiten

13.1. Definition: Betrachte einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit einer sub- σ -Algebra $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$ und eine Zufallsvariable $X \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, i.e. \mathcal{A} -messbar und integrierbar. Für $G \in \mathcal{G}$ sei $\nu(G) := \int_G X \, d\mathbb{P} = \mathbb{E}[\mathbf{1}_G X]$ und $\mathbb{P}_{\mathcal{G}}(G) := \mathbb{P}(G)$. Dann ist ν ein signiertes Maß auf (Ω, \mathcal{G}) und $\mathbb{P}_{\mathcal{G}}$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß (und damit endlich) auf (Ω, \mathcal{G}) , sodass $\nu \ll \mathbb{P}_{\mathcal{G}}$.

Der bedingte Erwartungswert von X bezüglich \mathcal{G} ist dann definiert als

$$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] := \frac{d\nu}{d\mathbb{P}_{\mathcal{G}}}$$

Für eine weitere Zufallsvariable Y auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, setzt man

$$\mathbb{E}[X \mid Y] := \mathbb{E}[X \mid \sigma(Y)]$$

Für $A \in \mathcal{A}$ setzt man

$$\mathbb{P}(A \mid \mathcal{G}) := \mathbb{E}[\mathbf{1}_A \mid \mathcal{G}]$$

Bemerkung: $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ ist fast sicher eindeutig, d.h. falls Y eine \mathcal{G} -messbare Zufallsvariable ist und $\forall G \in \mathcal{G} : \mathbb{E}[Y \cdot \mathbf{1}_G] = \mathbb{E}[X \cdot \mathbf{1}_G]$, dann gilt $Y \stackrel{a.s.}{=} \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$. Mit Satz kann man den bedingten Erwartungswert $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ auch für quasiintegrierbare X definieren (Details Übung).

13.2. Beispiel: Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit einer sub- σ -Algebra $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$. Für $X = \mathbf{1}_A$ und $Y = \mathbf{1}_B$ mit $A, B \in \mathcal{A}$ mit $0 < \mathbb{P}(B) < 1$ ist

$$\mathbb{P}(A \mid \mathbf{1}_B)(\omega) = \begin{cases} \mathbb{P}(A \mid B)(\omega) & \text{wenn } \omega \in B \\ \mathbb{P}(A \mid B^c)(\omega) & \text{wenn } \omega \notin B \end{cases}$$

Weiters ist $\Omega \in \sigma(B)$, sodass für $\mathbf{1}_{\Omega} = 1$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{E}\mathbf{1}_A = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_{\Omega}] \\ &\stackrel{\text{Def.}}{=} \int_{\Omega} \mathbb{E}[\mathbf{1}_A \mid \sigma(B)] \, d\mathbb{P} \\ &= \int_{\Omega} \mathbb{P}(A \mid \mathbf{1}_B) \, d\mathbb{P} \\ &\stackrel{\text{s.ö.}}{=} \mathbb{P}(A \mid B) \cdot \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \mid B^c) \end{aligned}$$

Eigenschaften bedingter Erwartungswerte

13.3. Proposition: Sei $X \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$ eine sub- σ -Algebra.

- (i) Sind $\sigma(X)$ und \mathcal{G} unabhängig, dann gilt $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] \stackrel{a.s.}{=} \mathbb{E}[X]$.
- (ii) Ist X \mathcal{G} - $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ -messbar, dann ist $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] \stackrel{a.s.}{=} X$

Beweis:

- (i) Die konstante Zufallsvariable $\mathbb{E}[X]$ ist natürlich \mathcal{G} -messbar und für $G \in \mathcal{G}$ sind $\mathbb{1}_G$ und X unabhängig (per Definition), sodass

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{1}_G] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[\mathbb{1}_G] \stackrel{u.a.}{=} \mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_G]$$

- (ii) Wenn X \mathcal{G} - $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ -messbar ist, ist X eine Dichte gemäß Definition 13.1, da trivial

$$\mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_G] = \mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_G]$$

□

Bemerkung: Damit gilt für $X \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sofort

- $\mathbb{E}[X \mid \{\emptyset, \Omega\}] \stackrel{a.s.}{=} \mathbb{E}[X]$
- $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{A}] \stackrel{a.s.}{=} X$

13.4. Proposition: Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit einer sub- σ -Algebra $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$, $X_n, n \geq 1$ eine Folge von $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ -integrierbaren Zufallsvariablen und X, Y $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ -integrierbare Zufallsvariablen. Seien außerdem $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt

- (i) Ist $X \stackrel{a.s.}{=} a$, dann ist $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] \stackrel{a.s.}{=} a$
- (ii) $\mathbb{E}[aX + bY \mid \mathcal{G}] \stackrel{a.s.}{=} a \cdot \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] + b \cdot \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{G}]$ (**Linearität**)
- (iii) Ist $X \stackrel{a.s.}{\leq} Y$, dann ist $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] \leq \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{G}]$ (**Monotonie**)
- (iv) $|\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]| \stackrel{a.s.}{\leq} \mathbb{E}[|X| \mid \mathcal{G}]$ (**Dreiecksungleichung**)
- (v) Fr $X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ fast sicher, ist (**MONK**)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{G}] \stackrel{a.s.}{=} \mathbb{E}\left[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n \mid \mathcal{G}\right]$$

- (vi) Falls $\forall n \geq 1 : Y \stackrel{a.s.}{\leq} X_n$ und $\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n \in L_1$, dann ist (**Fatou's Lemma**)

$$\mathbb{E}[\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n \mid \mathcal{G}] \stackrel{a.s.}{\leq} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{G}]$$

- (vii) Falls $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.s.} X$ und $\forall n \geq 1 : |X_n| \stackrel{a.s.}{\leq} Y$, dann ist $X \in L_1$ und (**DOMK**)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{G}] \stackrel{a.s.}{=} \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$$

Beweis:

- (i) folgt sofort aus Proposition 13.3 und der Tatsache, dass X u.a. von jedem \mathcal{G} ist.
- (ii) $a \cdot \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] + b \cdot \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{G}]$ ist als Linearkombination \mathcal{G} -messbarer Funktionen wieder \mathcal{G} -messbar und für $G \in \mathcal{G}$ gilt:

$$\begin{aligned} \int_G a \cdot \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] + b \cdot \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{G}] d\mathbb{P} &= a \int_G \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] d\mathbb{P} + b \int_G \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{G}] d\mathbb{P} \\ &= a \cdot \mathbb{E}[X \cdot \mathbf{1}_G] + b \cdot \mathbb{E}[Y \cdot \mathbf{1}_G] \\ &= \mathbb{E}[(aX + bY) \cdot \mathbf{1}_G] \end{aligned}$$

Die Aussage folgt mit Definition 13.1 und Satz 12.8.

- (iii) Hier ist insbesondere $X_+ \stackrel{a.s.}{\leq} Y_+$, sodass $0 \stackrel{a.s.}{\leq} Y_+ - X_+$. Sei $G := \{\mathbb{E}[X_+ \mid \mathcal{G}] > \mathbb{E}[Y_+ \mid \mathcal{G}]\}$. Dann ist G messbar und

$$\int_G \mathbb{E}[X_+ \mid \mathcal{G}] - \mathbb{E}[Y_+ \mid \mathcal{G}] d\mathbb{P} \stackrel{(ii)}{=} \int_G \mathbb{E}[X_+ - Y_+ \mid \mathcal{G}] d\mathbb{P} = \mathbb{E}[(X_+ - Y_+) \cdot \mathbf{1}_G]$$

wobei das linke Integral nicht-negativ und das rechte Integral nicht-positiv ist, sodass $\mathbb{P}(G) = 0$ folgt. Ein hnliches Argument gilt für X_- und Y_- , sodass folgt

$$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}[X_+ \mid \mathcal{G}] - \mathbb{E}[X_- \mid \mathcal{G}] \leq \mathbb{E}[Y_+ \mid \mathcal{G}] - \mathbb{E}[Y_- \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{G}]$$

wobei alle Relationen fast sicher gelten.

- (iv) Aus $X \leq |X|$ folgt mit (iii), dass

$$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] \stackrel{a.s.}{\leq} \mathbb{E}[|X| \mid \mathcal{G}]$$

Aus $-X \leq |X|$ folgt mit (ii) und (iii), dass

$$-\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] \stackrel{a.s.}{=} \mathbb{E}[-X \mid \mathcal{G}] \leq \mathbb{E}[|X| \mid \mathcal{G}]$$

womit die Aussage aus der Kombination beider Flle folgt.

- (v) Mit (iii) gilt $\mathbb{E}[X_1 \mid \mathcal{G}] \leq \mathbb{E}[X_2 \mid \mathcal{G}] \leq \dots \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{G}]$. Damit ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{G}]$ als Grenzwert \mathcal{G} -messbarer Funktionen messbar. Mit (iv) ist $|\mathbb{E}[X_1 \mid \mathcal{G}]| \stackrel{a.s.}{\leq} \mathbb{E}[|X_1| \mid \mathcal{G}]$, und damit $\mathbb{E}[X_1 \mid \mathcal{G}] \in L_1$. Mit MONK gilt für $G \in \mathcal{G}$

$$\begin{aligned} \int_G \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{G}] d\mathbb{P} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_G \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{G}] d\mathbb{P} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n \cdot \mathbf{1}_G] \\ &\stackrel{\text{MONK}}{=} \mathbb{E}[X \cdot \mathbf{1}_G] \end{aligned}$$

womit per Definition 13.1 die Aussage folgt.

- (vi) Fr $Z_n := \inf_{k \geq n} X_k$ gilt $Z_1 \leq \dots \leq \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n \in L_1$. Es gilt $Z_n \stackrel{a.s.}{\leq} X_k$ fr alle $k \geq n$, sodass mit (iii)

$$\mathbb{E}[Z_n \parallel \mathcal{G}] \stackrel{a.s.}{\leq} \inf_{k \geq n} \mathbb{E}[X_k \parallel \mathcal{G}]$$

und damit

$$\mathbb{E}[\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n \parallel \mathcal{G}] \stackrel{(v)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Z_n \parallel \mathcal{G}] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} \mathbb{E}[X_k \parallel \mathcal{G}] = \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n \parallel \mathcal{G}]$$

wobei in der letzten Ungleichung die ersten beiden Relationen als fast sicher zu verstehen sind.

- (vii) Mit DOMK ist $X \in L_1$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X]$. Mit (iii) und (iv) gilt

$$|\mathbb{E}[X_n \parallel \mathcal{G}]| \stackrel{a.s.}{\leq} \mathbb{E}[|X_n| \parallel \mathcal{G}] \stackrel{a.s.}{\leq} \mathbb{E}[Y_n \parallel \mathcal{G}]$$

Mit (vi) gilt

$$\mathbb{E}[X \parallel \mathcal{G}] \stackrel{a.s.}{=} \mathbb{E}[\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n \parallel \mathcal{G}] \stackrel{a.s.}{\leq} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n \parallel \mathcal{G}]$$

wobei die letzte Ungleichung folgt, da laut Annahme $\mathbb{E}[-Y \parallel \mathcal{G}] \leq \mathbb{E}[X_n \parallel \mathcal{G}]$ fr alle $n \geq 1$. Ebenfalls gilt

$$\begin{aligned} -\mathbb{E}[X \parallel \mathcal{G}] &\stackrel{a.s.}{=} \mathbb{E}[-X \parallel \mathcal{G}] \\ &\stackrel{a.s.}{=} \mathbb{E}[\liminf_{n \rightarrow \infty} (-X_n) \parallel \mathcal{G}] \\ &\stackrel{a.s.}{\leq} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[-X_n \parallel \mathcal{G}] \\ &\stackrel{a.s.}{=} -\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n \parallel \mathcal{G}] \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n \parallel \mathcal{G}] \stackrel{a.s.}{\leq} \mathbb{E}[X \parallel \mathcal{G}] \stackrel{a.s.}{\leq} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n \parallel \mathcal{G}]$$

und damit folgt die Aussage. \square

13.5. Proposition: Sei $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$ eine sub- σ -Algebra und seien X, U Zufallsvariablen, sodass $X, UX \in L_1$. Falls $U \mathcal{G} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -messbar ist, dann gilt

$$\mathbb{E}[UX \parallel \mathcal{G}] \stackrel{a.s.}{=} U \cdot \mathbb{E}[X \parallel \mathcal{G}]$$

Beweis: $U \cdot \mathbb{E}[X \parallel \mathcal{G}]$ ist \mathcal{G} -messbar.

I. $U = \mathbf{1}_H, H \in \mathcal{G}$

$$\forall G \in \mathcal{G} : \int_G U \cdot \mathbb{E}[X \parallel \mathcal{G}] d\mathbb{P} = \int_{G \cap H} \mathbb{E}[X \parallel \mathcal{G}] d\mathbb{P} = \mathbb{E}[X \cdot \mathbf{1}_{G \cap H}] = \mathbb{E}[UX \cdot \mathbf{1}_G]$$

II. U einfach

folgt aus I. und der Linearitt des bedingten Erwartungswertes.

III. $U \geq 0$

Whle $U_n, n \geq 1$ einfach und \mathcal{G} -messbar mit $0 \leq U_n \nearrow U$. Dann gilt $U_n X \rightarrow UX$ und $|U_n X| = |U_n| |X| \leq |U| |X|$. Es folgt

$$\mathbb{E}[UX \parallel \mathcal{G}] \stackrel{\text{DOMK}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[U_n X \parallel \mathcal{G}] \stackrel{\text{II.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} U_n \cdot \mathbb{E}[X \parallel \mathcal{G}] = U \cdot \mathbb{E}[X \parallel \mathcal{G}]$$

IV. U allgemein

Schreibe $U = U_+ - U_-$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[UX \parallel \mathcal{G}] &= \mathbb{E}[(U_+ - U_-)X \parallel \mathcal{G}] \\ &\stackrel{a.s.}{=} \mathbb{E}[U_+X \parallel \mathcal{G}] - \mathbb{E}[U_-X \parallel \mathcal{G}] \\ &\stackrel{a.s.}{=} (U_+) \cdot \mathbb{E}[X \parallel \mathcal{G}] - (U_-) \cdot \mathbb{E}[X \parallel \mathcal{G}] \\ &\stackrel{a.s.}{=} (U_+ - U_-) \cdot \mathbb{E}[X \parallel \mathcal{G}] = U \cdot \mathbb{E}[X \parallel \mathcal{G}]\end{aligned}$$

□

13.6. Proposition: Seien \mathcal{G} und \mathcal{H} sub- σ -Algebren, sodass $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$. Sei $X \in L_1$. Dann gilt

$$\mathbb{E}[X \parallel \mathcal{H}] \stackrel{(i)}{=} \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \parallel \mathcal{H}] \parallel \mathcal{G}] \stackrel{(ii)}{=} \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \parallel \mathcal{G}] \parallel \mathcal{H}]$$

fast sicher.

Beweis:

(i) folgt sofort, da $\mathbb{E}[X \parallel \mathcal{H}]$ \mathcal{H} -messbar und damit auch \mathcal{G} -messbar ist. Mit Proposition 13.3 gilt

$$\mathbb{E}[X \parallel \mathcal{H}] \stackrel{a.s.}{=} \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \parallel \mathcal{H}] \parallel \mathcal{G}]$$

(ii) $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \parallel \mathcal{G}] \parallel \mathcal{H}]$ ist \mathcal{H} -messbar und damit auch \mathcal{G} -messbar. Es gilt

$$\begin{aligned}\forall H \in \mathcal{H} : \int_H \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \parallel \mathcal{G}] \parallel \mathcal{H}] d\mathbb{P} &= \int_H \mathbb{E}[X \parallel \mathcal{G}] d\mathbb{P} \\ &= \int_H X d\mathbb{P}\end{aligned}$$

da $H \in \mathcal{H} \implies H \in \mathcal{G}$. Mit Definition 13.1 und Satz 12.8 folgt die Aussage. □

Bedingte Verteilungen

13.7. Satz: Sei $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}$ eine sub- σ -Algebra und sei X eine reelwertige Zufallsvariable. Dann existiert eine Funktion $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \Omega \rightarrow [0, 1]$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) Fr $\omega \in \Omega$ fest ist $\mu(\cdot, \omega) : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$ ein Wahrscheinlichkeitsma.

(ii) Fr $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ fest, gilt fr $\mu(B, \cdot) : \Omega \rightarrow [0, 1]$, dass $\mu(B, \cdot) = \mathbb{P}(X \in B \parallel \mathcal{G})$ fast sicher.

Man nennt $\mu(\cdot, \omega)$ die bedingte Verteilung von X gegeben \mathcal{G} .

Beweis: Fr $q \in \mathbb{Q}$ sei $F(q, \omega) := \mathbb{P}(X \leq q \parallel \mathcal{G})(\omega)$. Fr $q, r \in \mathbb{Q}$ mit $q \leq r$ gilt damit (Monotonie des bedingten Erwartungswertes, Proposition 13.4)

$$F(q, \omega) \leq F(r, \omega) \tag{10}$$

fr alle ω auerhalb einer \mathbb{P} -Nullmenge. Mit DOMK fr bedingte Erwartungswerte (Proposition 13.4) gilt

$$\forall q \in \mathbb{Q} : F(q, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} F\left(q + \frac{1}{n}, \omega\right) \tag{11}$$

fr ω auerhalb einer \mathbb{P} -Nullmenge und (DOMK)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(-n, \omega) = 0 \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} F(n, \omega) = 1 \quad (12)$$

auerhalb einer \mathbb{P} -Nullmenge. Sei N die abzhlbare Vereinigung der in (10), (11) und (12) auftretenden Nullmengen. Dann ist N wieder eine \mathbb{P} -Nullmenge und (10), (11), (12) gelten fr jedes $\omega \in N^c$.

Sei nun $t \in \mathbb{R}$. Fr $\omega \in N^c$ setze

$$F(t, \omega) := \inf \{F(q, \omega) : t \leq q, q \in \mathbb{Q}\}$$

und fr $\omega \in N$ setze $F(t, \omega) := F(t)$ fr eine beliebige fest cdf F . Mit (10), (11) und (12) ist $F(\cdot, \omega)$ eine cdf fr jedes $\omega \in \Omega$. Fr $\omega \in \Omega$ sei nun $\mu(\cdot, \omega)$ das durch $F(\cdot, \omega)$ bestimmte Wahrscheinlichkeitsma auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Damit gilt (i).

Die Mengenfamilie

$$\mathcal{L} := \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \mu(B, \cdot) \text{ ist } \mathcal{G}\text{-messbar}\}$$

ist ein λ -System (leicht zu prfen) und enthlt das π -System $\mathcal{M} := \{(-\infty, q] : q \in \mathbb{Q}\}$. Mit dem λ - π -Theorem gilt

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{M}) = \lambda(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{L} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Also gilt $\mathcal{L} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und $\mu(B, \cdot)$ ist fr jedes $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ \mathcal{G} -messbar.

Fr $B = (-\infty, q]$ mit $q \in \mathbb{Q}$ ist $\mu(B, \cdot) = \mathbb{P}(X \leq q \mid \mathcal{G})$ laut Konstruktion, sodass fr $G \in \mathcal{G}$ gilt

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_G \cdot \mu(B, \cdot)] = \mathbb{P}(G \cap \{X \in B\}) \quad (13)$$

Fr $G \in \mathcal{G}$ fest gilt (13) fr jede Menge $B \in \mathcal{M}$. Sei nun

$$\mathcal{Z} := \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \mathbb{E}[\mathbb{1}_G \cdot \mu(B, \cdot)] = \mathbb{P}(G \cap \{X \in B\})\}$$

Nun sind in (14) beide Seiten der Gleichung endliche Mae, die auf dem π -System \mathcal{M} bereinstimmen. Mit Korollar 2.9 folgt, dass die beiden Mae auch auf $\sigma(\mathcal{M}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ bereinstimmen. Also gilt (13) fr alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Mit Definition 13.1 folgt Aussage (ii). \square