Tema A.2

3 puncte. Predare: săptămâna a 4-a inclusiv (20 octombrie - 24 octombrie)

Probleme propuse pentru rezolvare la laborator.
Algoritmul simplex.

$$\begin{cases} \max & 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4 + 2 \\ & 0.5x_1 - 5.5x_2 - 2.5x_3 + 9x_4 \leqslant 0 \\ & 0.5x_1 - 1.5x_2 - 0.5x_3 + x_4 \leqslant 0 \\ & x_1 \leqslant 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \max & (z =)10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4 + 2 \\ & 0.5x_1 - 5.5x_2 - 2.5x_3 + 9x_4 + x_5 = 0 \\ & 0.5x_1 - 1.5x_2 - 0.5x_3 + x_4 + x_6 = 0 \\ & x_1 + x_7 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geqslant 0 \end{cases}$$

Tabloul simplex 1:

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS		
x_5	$\boxed{.5}$	-5.5	-2.5	9	0	0/.5	← min
x_6	.5	-1.5	-.5	1	0	0/.5	
x_7	1	0	0	0	1	1/1	
z	-10	57	9	24	2		

Tabloul simplex 2:

	x_5	x_2	x_3	x_4	RHS		
x_1	2	-11	-5	18	0		
x_6	-1	$\boxed{4}$	2	-8	0	0/4	← min
x_7	-2	11	5	-18	1	1/11	
z	20	-53	-41	204	2		

Tabloul simplex 3:

	x_5	x_6	x_3	x_4	RHS		
x_1	-.75	2.75	$\boxed{.5}$	-4	0	0/.5	← min
x_2	-.25	.25	.5	-2	0	0/.5	
x_7	.75	-2.75	-.5	4	1		
z	6.75	13.25	-14.5	98	2		

Tabloul simplex 4:

	x_5	x_6	x_1	x_4	RHS		
x_3	-1.5	5.5	2	-8	0		
x_2	.5	-2.5	-1	$\boxed{2}$	0	0/2	← min
x_7	0	0	1	0	1		
z	-15	93	29	-18	2		

Tabloul simplex 5:

	x_5	x_6	x_1	x_2	RHS		
x_3	$\boxed{.5}$	-4.5	-2	4	0	0/.5	← min
x_4	.25	-1.25	-.5	.5	0	0/.25	
x_7	0	0	1	0	1		
z	-10.5	70.5	20	9	2		

Tabloul simplex 6:

	x_3	x_6	x_1	x_2	RHS		
x_5	2	-9	-4	8	0		
x_4	-.5	$\boxed{1}$	.5	-1.5	0	0/1	← min
x_7	0	0	1	0	1		
z	-21	-24	-22	93	2		

Tabloul simplex 7:

	x_3	x_4	x_1	x_2	RHS
x_5	-2.5	9	.5	-5.5	0
x_6	-.5	1	.5	-1.5	0
x_7	0	0	1	0	1
z	9	24	-10	57	2

Probleme propuse pentru acasă.

Să se implementeze (C, C++, C#, Java) algoritmul simplex al cărui pseudocod este schiţat mai jos (presupunem că avem un tabel simplex de dimensiuni $(m+1)\times(n+1)$):

*// dacă $t_{m+1,k} \leqslant 0$, $\forall k$, tabelul simplex este **optimal**: soluţia de bază curentă este optimă.*

while $(\exists\, t_{m+1,j} < 0,\ j \leqslant n)$ **{**

  let $1 \leqslant l \leqslant n$ **such that** $t_{m+1,l} < 0$**;**

  *// l este coloana pivotului, **variabila** de pe coloana l va fi **de intrare** (în bază)*

  if $(t_{h,l} \leqslant 0,\ h \leqslant m)$ *// problema are **optim nemărginit***

    return;

  let $1 \leqslant k \leqslant m$ **such that** $\dfrac{t_{k,n+1}}{t_{k,l}} = \min\left\{\dfrac{t_{h,n+1}}{t_{h,l}} \;:\; t_{h,l} > 0\right\}$

  *// k este linia pivotului, **variabila** de pe linia k va fi **de ieşire** (din bază)*

  for $i = \overline{1, m+1},\ i \neq k$

    for $j = \overline{1, n+1},\ j \neq l$

      $t_{i,j} \leftarrow \dfrac{t_{i,j}t_{k,l} - t_{i,l}t_{k,j}}{t_{k,l}}$**;** *// operaţia de **pivotare***

  for $i = \overline{1, m+1},\ i \neq k$

    $t_{i,l} \leftarrow -\dfrac{t_{i,l}}{t_{k,l}}$**;**

  for $j = \overline{1, n+1},\ j \neq l$

    $t_{k,j} \leftarrow \dfrac{t_{k,j}}{t_{k,l}}$**;**

  $t_{k,l} \leftarrow \dfrac{1}{t_{k,l}}$**;**

}

Algoritmul simplex va conţine ***regula lui Bland*** de evitare a ciclurilor:

- dintre variabilele care ar putea intra în bază, se alege ca variabilă de intrare aceea cu indice mai mic;
- dacă mai multe variabile ar putea ieşi din bază, i. e. $\min\left\{\frac{t_{h,n+1}}{t_{h,l}} : t_{h,l} > 0\right\}$ se atinge pentru mai multe linii h, se alege ca variabilă de ieşire aceea cu indice mai mic.

Tabloul simplex 6':

	x_3	x_6	x_1	x_2	RHS		
x_5	2	-9	-4	8	0		
x_4	-.5	1	$\boxed{.5}$	-1.5	0	0/.5	← min
x_7	0	0	1	0	1	1/1	
z	21	-24	-22	93	2		

Tabloul simplex 7':

	x_3	x_6	x_4	x_2	RHS		
x_5	-2	-1	8	-4	0		
x_1	-1	2	2	-3	0		
x_7	$\boxed{1}$	-2	-2	3	1	1/1	← min
z	-1	20	44	27	2		

Tabloul simplex 8':

	x_7	x_6	x_4	x_2	RHS
x_5	2	-5	4	2	2
x_1	1	0	0	0	1
x_3	1	-2	-2	3	1
z	1	18	42	30	3

Soluţia de bază curentă este optimă: $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 2, x_6 = x_7 = 0$; valoarea optimă a funcţiei obiectiv este 3[1].

Algoritmul simplex astfel implementat va fi rulat pentru verificare pe problemele **2** şi **4** din **Tema A.1** şi pe următoarele două probleme:

$$1.\begin{cases} \max & x_1 + 2x_2 + x_3 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 \leqslant 2 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 4 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leqslant 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$2.\begin{cases} \max & -x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 \\ & x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \leqslant 1 \\ & x_1 - 4x_2 - x_3 + 6x_4 \leqslant 2 \\ & x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 \leqslant 0 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

Comparaţi rezultatele cu cele obţinute utilizând unul din pachetele soft recomandate (vezi **Tema A.1**).

[1] Valoarea funcţiei obiectiv pentru soluţia de bază curentă se găseşte in colţul din dreapta jos.