応用代数学

2022 年 10 月 17 日現在

0 準備

集合 X, Y, Z に対して

- $Y \setminus X$:$X, Y \subset Z$ に対して，X に属さない Y の元のなす集合
$$Y \setminus X = (\,)\{y \mid y \in Y \text{ かつ } y \notin X\}$$
- $X \sqcup Y$: 集合 X と Y の直和 (direct sum) あるいは分割和 (disjoint sum) を表し，互いに交わらない二つの集合 X と Y の和集合
$$A \sqcup B \Leftrightarrow A \cup B \,\mathrm{for}\, A \cap B = \emptyset$$
- (有限) 集合 X の元の個数を $\sharp X$
$$\sharp(\,)\{a, b, c\} = 3$$

写像 集合 X から集合 Y への写像 f とは，X の各元 x に対して Y の元 $y = f(x)$ を対応させる規則

$$f : X \to Y; x \mapsto y = f(x)$$

- f による $A \subset X$ の像 (image)
$$f(A) = \{f(a) \mid a \in A\} \subset Y$$
- f による $B \subset Y$ の逆像あるいは f による引き渡し
$$f^{-1}(B) = \{a \in X \mid f(a) \in B\}$$
- $f : X \to Y, g : Y \to Z$ において，合成 $g \circ f$
$$\begin{array}{cccccl} g \circ f : & X & \longrightarrow & Z & & \\ & \Cup & & \Cup & & \\ & x & \longmapsto & z & = g \circ f(x) = g(f(x)) & \end{array}$$

0.1 集合の分割と同値関係

一般に集合 S を交わりのない (空でない) 集合の和で表すことを類別 (classification)という

$$S = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \cdots$$

各部分集合 A_j をこの類別における類という

全ての類から一つずつ元を選んできて得られる集合 R を完全代表系という．集合 R の元を代表元という．このとき，任意の $x \in S$ に対して，集合 S から集合族 $\{A_1, A_2, \cdots\}$ への自然な全射写像$x \mapsto A_j(\ni x)$ が得られる．

定義 0.1 (同値関係)
集合 S 上の同値関係 $\sim \Leftrightarrow$ 集合 S 上の二項関係 $\sim$ が任意の $a, b, c \in S$ に対し，

反射則 $a \sim a$
対称則 $a \sim b \Rightarrow b \sim a$
推移則 $a \sim b$かつ$b \sim c \Rightarrow a \sim c$

定義 0.2 (同値類)
集合 S に同値関係 $\sim$ が存在するとき，S の各元 a に対して定まる空でない部分集合

$$C_a = \{x \mid x \in S, x \sim a\}$$

を a の同値類 (equivalence class) という．

定義 0.3 (商集合)
同値関係 $\sim$ による同値類の集合を S の $\sim$ による商集合 (quotient set) といい $S/\sim$ で表す

$$S/\sim = \{C_a \mid a \in S\}$$

定義 0.4 (同値類別)
同値関係による集合の分割．同値関係 $\sim$ による同値類別

$$S = \bigsqcup_{a \in R \subset S} C_a$$

ここで S の部分集合 R は全ての同値類の代表元の集合であり，完全代表系である．このとき，自然な全射 $\pi : S \to S/\sim; x \mapsto C_x$ が存在する．さらに全単射写像 $R \to S/\sim$ も存在する．

$$C_a \cap C_b \neq \emptyset \Rightarrow C_a = C_b$$

が成立する (同値関係の性質から直ちに示される)

例 S: ある学校の学生全体の集合．$a, b \in S$ の間の関係「クラスメートである」は同値関係．この関係を $\sim'$ で表すと，$a \sim' b$ は「a は b とクラスメートである」の意．このとき $C_a = \{x \in S \mid x \sim a\}$ は「a さんのクラスメート (a さんを含む) の全体」$\leftrightarrow$ a さんの属するクラス

1　群

定義 1.1 (二項演算)
一般に，集合 M の 2 つの元 x, y に対してただ一つの元 $\mu(x, y) \in M$ が対応しているとき，μ を M 上の二項演算という．すなわち，

$$\mu : M \times M \to M$$

ここで記号 μ は省略して，$\mu(x,y)$ を $x \cdot y, x \circ y$, あるいは xy などと書く (誤解のない限り).

定義 1.2 (群)
群 (group)G とは，以下の規則を満たす二項演算 μ をもつ集合のこと．

$$\mu : G \times G \to G$$

厳密には (G,μ) のことを群と呼ぶが群 G などと省略することが多い．任意の $x,y,z \in G$ に対して成立:

1. 結合法則
$$\mu(\mu(x,y),z) = \mu(x,\mu(y,z))$$
2. 単位元 $e \in G$ の存在.
$$\mu(e,x) = \mu(x,e) = x$$
3. 逆元の存在.
$$\mu(x,x') = \mu(x',x) = e$$
なる $x' \in G$[*1]

定義 1.3 群 G の位数 (order):G に含まれる元の個数を表し，$|G|$ と書く．位数が有限のとき，有限群という．有限群でないとき，無限群という．

一般に群では $(\mu(x,y) \neq \mu(y,x))$

$$x \circ y \neq y \circ x \quad \bigl(\text{交換関係が必ずしも成立しない}\bigr)$$

定義 1.4 G の任意の元について，$xy = yx$ が成り立つとき可換群 (Abel 群) という．可換群の演算記号を加法的に $x+y$ と書くとき，加法群と呼び，このとき加法に関する単位元を 0 と表し，零元と呼ぶことが多い (x の逆元は $-x$).

[*1] あとで x の逆元 x' は唯一に定まることを示す．x' を x^{-1} と書くことが多い