微分積分学続論II-微分方程式 2T17, 2T18, 2T19

担当 : 岡井

2022 年 6 月 28 日現在

- 成績=(定期試験 (100))+(課題 (演習・レポート等)(20))
- 参考書 : 笠原晧司　微分方程式の基礎 (朝倉書店)
- 内容
  - 初等解法
  - 線型常微分方程式の解空間
  - 連立常微分方程式，行列の指数関数
  - 常微分方程式の解の存在と一意性

目次

1　微分方程式とは

微分方程式とは: 導関数とそのいくつかの微分に関する方程式
未知関数の変数が 1 個のとき，常微分方程式(ordinary differential equation(ODE と略す)) という．
未知関数の変数が 2 個以上のとき，偏微分方程式(partial differential equation(PDE と略す)) という．

例

- $x = x(t)$ に対する

$$\frac{\mathrm{d}^3 x}{\mathrm{d}t^3} + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\right)^2 + x^5 \sin t = e^t$$

  は 3 階の ODE
- $u = u(x, y)$ に対する

$$\frac{\partial u}{\partial x} + u \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \cos(xy)$$

  は 2 階の PDE

目的

- 与えられた微分方程式の解は存在するか？ 適当な条件を課すと解は 1 個になるか？
- 解は具体的な関数として求まるか？
- (具体的に解けない場合でも) 解の幾何学的な挙動が (ある程度) わかるか？
- 解全体のなす集合は，どうなるか？

例　$x = x(t)$ に対する

$$(*): \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k \cdot x \qquad (k : \text{定数})$$

の全ての解は

$$x(t) = C \cdot e^{kt} \qquad (C\text{は任意定数})$$

の形で与えられる (従って $t = 0$ で $x(0) = C_0$ となる解は $C_0 e^{kt}$ のみ)

$\because$ $x_1(t) = C_1 e^{kt}$ は

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = C_1 k e^{kt} = k \cdot C_1 e^{kt} = k x_1$$

となって $(*)$ を満たす．
$x_2(t)$ も，$(*)$ を満たすとするとき，$x_2(t) \cdot e^{-kt}$ を考えると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x_2 \cdot e^{-kt}\right) = \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} e^{-kt} + x_2 \cdot (-k) e^{-kt} \equiv 0 \qquad (\text{恒等的に}(\text{すべての}t\text{で})0)$$

より

$$x_2(t) \cdot e^{-kt} \equiv C_2 \qquad (C_2\text{はある定数})$$

となって

$$x_2(t) = C_2 e^{kt}$$

と書ける． □

別の導き方　$x \neq 0$ として $(*)$ を

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k$$

と変形して，この両辺を t について積分:

$$\int \frac{1}{x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int k\,\mathrm{d}t \qquad \left(\underline{\text{注}}\ \text{どちらかの辺に積分定数}C\text{をつける}\right)$$

(この計算を「$\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = k\,\mathrm{d}t$ の両辺を積分」と略して書く)

$$\log_e |x| = kt + C$$

より

$$|x| = e^{kt+C} = e^C \cdot e^{kt}$$
$$x = \pm e^c \cdot e^{kt} = C_1 e^{kt}. \qquad (C_1\text{は任意定数})$$

注　$C_1 = \pm e^C$ は 0 以外の実数を動く
一方 $x(t) \equiv 0$ も $(*)$ の解なので，これが $C_1 = 0$ の場合に相当
合わせて$\underline{C_1 \text{ は任意定数}}$としてよい

この解き方を一般化:

2　変数分離型 ODE

$x = x(t)$ に対する

$$(*) : \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = g(t)h(x) \qquad (g, h\text{は与えられた連続関数})$$

解き方:　$(*)$ を

$$\frac{1}{h(x)}\,\mathrm{d}x = g(t)\,\mathrm{d}t$$

と変形して，<u>この両辺を積分</u>：

$$\int \frac{1}{h(x)}\,\mathrm{d}x = \int g(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

これを x について解けばよい
($\underline{\text{注}}$ $h(x_0) = 0$ となる x_0 があると $x(t) \equiv x_0$ も，$0 = 0$ として $(*)$ を満たす解になる)

注

- 積分が具体的に求まらないものも (たくさん) ある
- x について解けない (or 解かない方がきれいな) 場合もある

例

$$(*) : (1+t)x + (1-x)t \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$$

を解く

$$\begin{aligned}
(x-1)t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= (t+1)x \\
\frac{x-1}{x}\,\mathrm{d}x &= \frac{t+1}{t}\,\mathrm{d}t && \text{(変数分離型)} \\
\int \frac{x-1}{x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{t+1}{t}\,\mathrm{d}t && \text{(積分)} \\
\log|xt| &= x - t - C \\
|xt| &= e^{x-t-C} = e^{-C}e^{x-t} \\
xt &= \pm e^{-C} \cdot e^{x-t} = C_1 e^{x-t} && \left(\pm e^{-C} = C_1 \text{とおく}\right)
\end{aligned}$$

例

$$(*) : t\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+t^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$$

を解く

$$\begin{aligned}
\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x &= -\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t \\
\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x &= -\int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t \\
\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+t^2} &= C. && (x\text{について解かなくてよい})
\end{aligned}$$

2.1 変数分離型に帰着できるもの

2.1.1 同次型 ODE

$x = x(t)$ に対する

$$(*) : \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varphi\left(\frac{x}{t}\right) \qquad (\varphi\text{は与えられた関数})$$

(解き方): $\underline{u = \frac{x}{t}}$とおくと $x = ut$ より

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \cdot t + u\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}$$

従って

$$(*) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \cdot t + u = \varphi(u).$$

即ち

$$\frac{1}{\varphi(u) - u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{(変数分離型)}$$

となる.

例

$$(*) : \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{-2tx}{t^2+x^2}\left(= \frac{-2\frac{x}{t}}{1+\left(\frac{x}{t}\right)^2}\right)$$

のとき，$u = \frac{x}{t}$ とおくと，

$$\begin{aligned}
(*) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\cdot t + u &= \frac{-2u}{1+u^2} \\
t\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= \frac{-2u}{u^2+1} - u = \frac{-u^3-3u}{u^2+1} \\
-\frac{u^2+1}{u^3+3u}\,\mathrm{d}u &= \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t && \text{(積分)} \\
-\int \frac{u^2+1}{u^3+3u}\,\mathrm{d}u &= \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\
\log|u^3+3u| + \log\left(|t|^3\right) &= -3C \\
\left|t^3\left(u^3+3u\right)\right| &= e^{-3C} \\
t^3\left(u^3+3u\right) &= \pm e^{-3C}\,(= C_1 \text{とおく}) \\
x^3+3t^2x &= C_1 && \left(u = \frac{x}{t}\text{を代入}\right)
\end{aligned}$$

3　1 階線型 ODE

未知関数 $x = x(t)$ に対する

$$(*) : \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + P(t)\cdot x = Q(t) \qquad (P(t), Q(t)\text{は与えられた関数})$$

の形の ODE を1 階線型ODE という．

一般に，自然数 n に対して

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n} + P_{n-1}(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + P_1(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + P_0(t)x = Q(t) \qquad (P_0(t),\ldots,P_{n-1}(t),Q(t)\text{は与えられた関数})$$

の形の ODE をn 階線型ODE という．

(解法 1)　$(e^{f(t)} = f'(t)e^{f(t)}$ と積の微分を利用)

$(*)$ の (左辺) の $P(t)$ を

$$\left(e^{f(t)}\right)' = f'(t)e^{f(t)} \qquad \left(' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)$$

の $f'(t)$ と思って $(*)$ の両辺に $e^{\int P(t)\mathrm{d}t}$ をかける．($\int P(t)\,\mathrm{d}t$ の積分定数は 1 つ固定):

$$\begin{aligned}
x'e^{\int P(t)\mathrm{d}t} + x\cdot P(t)e^{\int P(t)\mathrm{d}t} &= e^{\int P(t)\mathrm{d}t}\cdot Q(t) \\
xe^{\int P(t)\mathrm{d}t} &= \int \left\{e^{\int P(t)dt}Q(t)\right\}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

これから $x(t)$ を求めればよい．

(解法 2)　(定数変化法) $(*)$ の右辺を 0 に代えて出来る

$$(\mathrm{o}) : \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + P(t)x = 0$$

を考えると，これは変数分離型となって解ける

$$\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -P(t)\,\mathrm{d}t$$

より

$$\begin{aligned} \log|x| &= -\int P(t)\,\mathrm{d}t \\ |x| &= e^{-\int P(t)\mathrm{d}t} \\ &= e^{C} \cdot e^{R(t)} && \left(-\int P(t)\,\mathrm{d}t = R(t) + C \text{とする}\right) \\ x &= \pm e^{C} \cdot e^{R(t)} = C_1 e^{R(t)} && \left(\pm e^{C} = C_1 \text{とおく}\right) \end{aligned}$$

(o) の解は

$$x(t) = C \cdot g(t) \qquad (C\text{は任意定数})$$

という形なので，定数 C を関数 $C(t)$ に代えて (定数を変化させて)

$$x = C(t) \cdot g(t)$$

が元の $(*)$ を満たすように $C(t)$ を決める．
(注 この方法は一般に n 階線型 ODE の場合にも使える)

例

$$(*) : \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{t}x = t^3$$

を (解法 1) で解く
$(*)$ の両辺に $e^{\log t} = t$ をかけると

$$\begin{aligned} x' \cdot e^{\log t} + x \cdot \left(e^{\log t}\right)' &= t \cdot t^3 \\ xt &= \int t^4\,\mathrm{d}t = \frac{t^5}{5} + C \\ x &= \frac{t^4}{5} + \frac{C}{t} \end{aligned}$$

例

$$(*) : x' + x\cos t = \sin t \cdot \cos t$$

を (解法 2) で解く．
まず，

$$(\mathrm{o}) : \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x\cos t = 0$$

を解く

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= -\cos t\cdot \mathrm{d}t \\
\log|x| &= -\sin t + C \qquad\qquad\qquad (\text{積分}) \\
|x| &= e^{-\sin t + C} = e^{C}e^{-\sin t} \\
x &= \pm e^{C}e^{\sin t} = C_1 e^{-\sin t}
\end{aligned}
$$

次に C_1 を $C(t)$ に代えて,

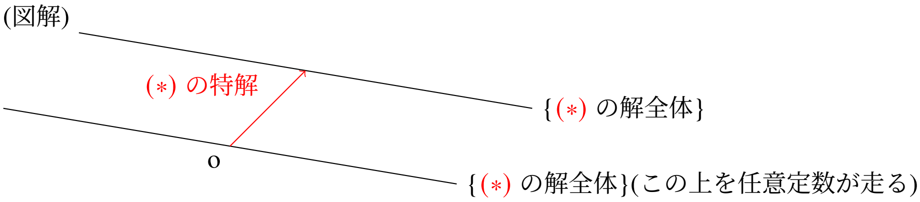
$$x = C(t)\cdot e^{-\sin t}$$

を $(*)$ に代入

$$
\begin{aligned}
&\left(C' e^{-\sin t} + C\cdot(-\cos t)e^{-\sin t}\right) + Ce^{-\sin t}\cdot\cos t = \sin t\cos t \\
&\qquad C' = \sin t\cdot\cos t\cdot e^{\sin t} \\
&\qquad C = \int \sin t\cdot\left(e^{\sin t}\right)'\,\mathrm{d}t = \sin t\cdot e^{\sin t} - \int \cos t\cdot e^{\sin t}\,\mathrm{d}t \quad (\text{部分積分}) \\
&\qquad\quad = \sin t\cdot e^{\sin t} - e^{\sin t} + C_2 \\
&\qquad x = Ce^{-\sin t} = \sin t - 1 + C_2 e^{-\sin t}
\end{aligned}
$$

注　$(*)$ の一般解は ($(*)$ の 1 つの解[*1])+((o) の一般解) という形をしている
　(n 階の ODE の解で n 個の任意定数を含むものを一般解という)

(図解)



{(o) の解全体}は $\mathbb{R}$ に同型な 1 次元ベクトル空間をなす (原点 ($x(t)\equiv 0$) を通る)
{$(*)$ の解全体}はそれを $(*)$ の特解の分だけ「平行移動」してできる直線になる.

3.1　1 階線型 ODE に帰着できるもの

3.1.1　Bernoulli(ベルヌーイ) 型 ODE

　未知関数 $x = x(t)$ に対する

$$(*) : \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + P(t)x = Q(t)x^{a} \qquad \big(P(t), Q(t)\text{は与えられた関数}, a\text{は定数(自然数でなくてもよい)}\big)$$

の形の ODE をBernoulli 型という.

[*1] $(*)$ の特解 or 特殊解という

(解き方): 　方針 : x^a を消したいので $(*)$ の両辺に x^{-a} をかける
すると

$$x^{-a}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+P(t)\cdot x^{-a+1}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x^{-a+1}}{-a+1}\right)+P(t)\cdot x^{-a+1}=Q(t)$$

となるので $\underline{u=x^{-a+1}}$ とおくと

$$\frac{1}{-a+1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+P(t)u=Q(t)$$

となって，u についての 1 階線型 ODE になる．

例

$$(*):\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{2t}x=\frac{1}{4}x^5$$

のとき，$(*)$ の両辺に x^{-5} をかけると

$$x^{-5}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{2t}x^{-5+1}=\frac{1}{4}$$

$u=x^{-4}$ とおくと

$$\begin{aligned}-\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{2t}u&=\frac{1}{4}\\ u'-\frac{2}{t}u&=-1 \qquad\qquad \left({}'=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\end{aligned}$$

この両辺に $e^{\log(t^{-2})}=t^{-2}$ をかけると $((-2\log t)'=\left(\log\left(t^{-2}\right)\right)')$

$$t^{-2}\cdot u'+t^{-2}\left(-\frac{2}{t}\right)u=-t^{-2}\quad\left(t^{-2}\cdot u'+t^{-2}\left(-\frac{2}{t}\right)u=\left(t^{-2}u\right)'\right)$$

両辺積分:

$$\begin{aligned}t^{-2}u&=-\int t^{-2}dt=\frac{1}{t}+C\\ u&=t^2\left(\frac{1}{t}+C\right)=t+ct^2\end{aligned}$$

$u=x^{-4}$ なので

$$x^4=\frac{1}{t+ct^2}\qquad\qquad (\text{このままでよい})$$

4　行列の対角化と定数係数連立線型 ODE

目標 : 正方行列の固有値・固有ベクトル，対角化について復習し，それができる場合に連立 ODE への使い方を考えたい

4.0.1 固有値

$\lambda \in \mathbb{C}$(=複素数全体の集合) が，$n \times n$ 行列 A の固有値

$\overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow}$ $A\vec{\mathbf{p}} = \lambda\vec{\mathbf{p}}$ となる $\vec{\mathbf{0}} \neq \vec{\mathbf{p}} \in \mathbb{C}^n$($A$ の固有値 λ に対する固有ベクトル) が存在

$\Leftrightarrow$ $\vec{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ に対する連立 1 次方程式 $(\lambda I - A)\vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{0}}$ が非自明な解 $\vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{p}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ をもつ

$\Leftrightarrow$ $(\lambda I - A)^{-1}$ が存在しない

$\Leftrightarrow$ $\det(\lambda I - A) = 0$

(注 $\mathbb{C}$ 上で考えると A は n 個の固有値を持つ．そのため $\lambda \in \mathbb{C}, \vec{\mathbf{p}} \in \mathbb{C}^n$ とした)

即ち，A の固有値 λ は n 次方程式 $\det(\lambda I - A) = 0$ の解 λ とし，λ の固有ベクトル $\vec{\mathbf{p}}$ は連立 1 次方程式 $(\lambda I - A)\vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{0}}$ の解 $\vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{p}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ として求まる．

4.0.2 固有空間

$V(\lambda) = \left\{\vec{\mathbf{p}} \in \mathbb{C}^n \mid A\vec{\mathbf{p}} = \lambda\vec{\mathbf{p}}\right\}$ とおく (V は A の固有値 λ に対する固有空間)

注 $V(\lambda)$ は $\mathbb{C}^n$ の複素部分ベクトル空間になる (和とスカラー ($\in \mathbb{C}$) 倍に関して閉じている)

4.0.3 対角化

A が対角化可能

$\overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow}$ ある $n \times n$ 正則行列 P によって $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ と出来る ($\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ は A の n 個の固有値となる)

4.0.4 対角化可能性の判定

$\det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$ ($\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ は相異なり，λ_i の重複度 $= m_1(m_1 + \cdots + m_r = n)$) とするとき

$$A \text{ が対角化可能} \Leftrightarrow \text{各 } i = 1, \cdots, r \text{ に対して } \dim_{\mathbb{C}} V(\lambda_i) = m_i \text{ となる}$$

このとき各 $V(\lambda_i)$ の基底 $\left\{\vec{\mathbf{p_1}}^{(i)}, \cdots, \vec{\mathbf{p_{m_i}}}^{(i)}\right\}$ を $i = 1, \cdots, r$ の順に並べて

$$P = \left(\vec{\mathbf{p_1}}^{(1)} \cdots \vec{\mathbf{p_{m_1}}}^{(1)} \cdots \vec{\mathbf{p_1}}^{(r)} \cdots \vec{\mathbf{p_{m_r}}}^{(r)}\right)$$

とおくと，この各列ベクトルが1 次独立となり，全体で $\mathbb{C}^n$ の基底をなすので，P は正則となって

$$\begin{aligned} AP &= A\left(\vec{\mathbf{p_1}}^{(1)} \cdots \vec{\mathbf{p_{m_r}}}^{(r)}\right) \\ &= \left(A\vec{\mathbf{p_1}}^{(1)} \cdots A\vec{\mathbf{p_{m_r}}}^{(r)}\right) \\ &= \left(\lambda_1\vec{\mathbf{p_1}}^{(1)} \cdots \lambda_r\vec{\mathbf{p_{m_r}}}^{(r)}\right) \end{aligned}$$

$$
= \left(\vec{\mathbf{p_1}}^{(1)} \cdots \vec{\mathbf{p_{m_r}}}^{(r)}\right)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & \text{\huge 0} & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_r & & \\ & \text{\huge 0} & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_r \end{pmatrix}
$$

$$
= P\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r I_{m_r} \end{pmatrix}
$$

と対角化できる.

4.1 連立線型 ODE

未知関数

$$
\vec{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}
$$

に対する

$$
{\color{red}(*)} : \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t} = A\vec{\mathbf{x}} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}dt} \\ \vdots \\ \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}dt} \end{pmatrix}\right)\left(A\text{は各成分が}\underline{\text{定数}}\text{の}n \times n\text{行列}\right)
$$

を考える.

$\boxed{\text{仮定}}$ A が P によって<u>対角化可能</u> $\left(P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}\right)$ とする. このとき

$$
P^{-1}\vec{\mathbf{x}}(t) = \vec{\mathbf{X}}(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ \vdots \\ X_n(t) \end{pmatrix}
$$

と未知関数を変換すると

$$
\vec{\mathbf{x}}(t) = P \cdot \vec{\mathbf{X}}(t)
$$

より

$$
\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(P\vec{\mathbf{X}}\right) = P\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{X}}}{\mathrm{d}t} \qquad (P\text{の各成分は定数})
$$

となるので

$$
{\color{red}(*)} \Leftrightarrow P \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{X}}}{\mathrm{d}t} = A \cdot PX
$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{X}}}{\mathrm{d}t} = P^{-1}AP\vec{\mathbf{X}} \qquad \left(P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}X_1}{\mathrm{d}t} \\ \vdots \\ \frac{\mathrm{d}X_n}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 X_1 \\ \vdots \\ \lambda_n X_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} X_1(t) \\ \vdots \\ X_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ C_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \qquad (C_1, \ldots, C_n \text{は任意定数})$$

$$\Leftrightarrow \vec{\mathbf{x}}(t) = P\vec{\mathbf{X}}(t) = P\begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ C_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

と解ける．(行列を対角化することで，連立 ODE が n 個の単独の ODE に分離できる)

例 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ に対して

$$(*) : \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_3 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_3 \end{pmatrix}$$

を解く．

まず，A が対角化できるか調べる

- A の固有値:

$$\begin{aligned}
\det(\lambda I - A) &= \det\left\{\begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \lambda & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}\right\} \\
&= \begin{vmatrix} \lambda & -2 & -4 \\ -2 & \lambda+3 & -2 \\ -4 & -2 & \lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \lambda+4 & 0 & -\lambda-4 \\ -2 & \lambda+3 & -2 \\ -4 & -2 & \lambda \end{vmatrix} \\
&= (\lambda+4)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & \lambda+3 & -2 \\ -4 & -2 & \lambda \end{vmatrix} \\
&= (\lambda+4)\left|\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & \lambda+3 & -4 \\ -4 & -2 & \lambda-4 \end{array}\right| \\
&= (\lambda+4)\cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} \lambda+3 & -4 \\ -2 & \lambda-4 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda+4)^2(\lambda-5)
\end{aligned}$$

より
$$\begin{cases}\lambda_1 = -4 & \text{(重複度2)} \\ \lambda_2 = 5 & \text{(重複度1)}\end{cases}$$

- $\underline{V(\lambda_1)}$: 連立方程式

$$(\lambda_1 I - A)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_3 \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{0}}$$

を解く.

$$(-4)I - A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(行基本変形による掃き出し計算)}$$

より

$$\begin{aligned}((-4)I - A)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_3 \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{0}} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_3 \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{0}} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 + \frac{1}{2} + y_3 & = 0 \\ 0 & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}s - t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \frac{s}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (s, t\text{は任意})\end{aligned}$$

$\vec{\mathbf{p_1}}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{p_2}}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおく.

$$V(\lambda_1) = \left\langle \vec{\mathbf{p_1}}^{(1)}, \vec{\mathbf{p_2}}^{(2)} \right\rangle_{\mathbb{C}} \left(= \left\{ c_1\vec{\mathbf{p_1}}^{(1)} + c_2\vec{\mathbf{p_2}}^{(2)} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{C} \right\}\right)$$

で
$$\dim_{\mathbb{C}} V(\lambda_1) = 2 = (\lambda_1\text{の重複度})$$

となる.

- $\underline{V(\lambda_2)}$:

$$5I - A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より

$$(5I - A)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_3 \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{0}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_3 \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{0}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 - y_3 & = 0 \\ y_2 - \frac{1}{2}y_3 & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ \frac{1}{2}u \\ u \end{pmatrix} = \frac{u}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (u\text{は任意})$$

$\vec{\mathbf{p}_1}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ とおく．$V(\lambda_2) = \left\langle \vec{\mathbf{p}_1}^{(2)} \right\rangle_{\mathbb{C}}$ で $\dim_{\mathbb{C}} V(\lambda_2) = 1$ となる．

従って各 $i = 1, 2$ に対して $\dim_{\mathbb{C}} V(\lambda_i) = m_i$ となって，A は対角化可能．実際

$$P = \left(\vec{\mathbf{p}_1}^{(1)} \vec{\mathbf{p}_2}^{(1)} \vec{\mathbf{p}_1}^{(2)}\right) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

により

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \text{\Large 0} \\ & \lambda_1 & \\ \text{\Large 0} & & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & & \text{\Large 0} \\ & -4 & \\ \text{\Large 0} & & 5 \end{pmatrix}$$

となる．

このとき P を使って

$$P^{-1}\vec{\mathbf{x}}(t) = \vec{\mathbf{X}}(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ \vdots \\ X_3(t) \end{pmatrix}$$

とおくと

$$(*) : \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t} = A\vec{\mathbf{x}} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{X}}}{\mathrm{d}t} = P^{-1}AP\vec{\mathbf{X}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}X_1}{\mathrm{d}t} \\ \vdots \\ \frac{\mathrm{d}X_3}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4X_1 \\ -4X_2 \\ 5X_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} X_1(t) \\ \vdots \\ X_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{-4t} \\ C_2 e^{-4t} \\ C_3 e^{5t} \end{pmatrix} \qquad (C_1, \cdots, C_3\text{は任意定数})$$

$$\Leftrightarrow \vec{\mathbf{x}}(t) = P\vec{\mathbf{X}}(t) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 e^{-4t} \\ C_2 e^{-4t} \\ C_3 e^{5t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-C_1 - C_2)e^{-4t} + 2C_3 e^{5t} \\ 2C_1 e^{-4t} + C_3 e^{5t} \\ C_2 e^{-4t} + 2C_3 e^{5t} \end{pmatrix}$$

と解ける．

4.1.1　A が対角化可能でないときの扱い

　このときもある $n \times n$ 正則行列 P によって，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_m \end{pmatrix} \qquad \left(各 J_k = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} の形 (\text{Jordan block}) \right)$$

という形には出来る (<u>Jordan 標準形</u>という).

注

- $P^{-1}AP$ の対角線上には A の n 個の固有値が並ぶ
- 同じ固有値が異なる blocks 上に現れることもある.
- $J = (\lambda)$ $(1 \times 1$ 行列) の場合もある<u>例</u>$\left(\begin{array}{c|cc} \lambda & * & * \\ \hline * & \lambda & 1 \\ * & 0 & \lambda \end{array}\right)$

　これを認めて，

$$P^{-1}\vec{\mathbf{x}}(t) = \vec{\mathbf{X}}(t)$$

とおき，$P^{-1}AP$ の Jordan blocks に合わせて $\vec{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{X}}_\mathbf{1} \\ \vdots \\ \vec{\mathbf{X}}_\mathbf{m} \end{pmatrix}$ と分けると，

$$(*) : \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t} = A\vec{\mathbf{x}}$$

は，各 blocks 上の

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{X}}_\mathbf{k}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \vec{\mathbf{X}}_\mathbf{k} \ (k = 1, \cdots, m)$$

に分かれ，これらは簡単に解ける:$\vec{\mathbf{X}}_\mathbf{k}(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ \vdots \\ X_N(t) \end{pmatrix}$ と書きなおすと

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_N \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\mathrm{d}X_1}{\mathrm{d}t} & = \lambda X_1 + X_2 \\ & \vdots \\ \frac{\mathrm{d}X_{N-1}}{\mathrm{d}t} & = \lambda X_{N-1} + X_N \\ \frac{\mathrm{d}X_N}{\mathrm{d}t} & = \lambda X_N \end{cases}$$

となるので，まず $\frac{\mathrm{d}X_N}{\mathrm{d}t}$ について，

$$X_N = C_N e^{\lambda t}$$

と解け，これを $\frac{\mathrm{d}X_{N-1}}{\mathrm{d}t}$ についての式に代入すると

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}X_{N-1}}{\mathrm{d}t} - \lambda X_{N-1} &= C_N e^{\lambda t} && \text{(1 階線型 ODE)} \\
e^{-\lambda t} X'_{N-1} + \left(e^{-\lambda t}\right)' X_{N-1} &= C_N \\
e^{-\lambda t} X_{N-1} &= \int C_N \,\mathrm{d}t = C_N t + C_{N-1} && \text{(両辺積分)} \\
X_{N-1} &= (C_N t + C_{N-1}) e^{\lambda t} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

と下から順に求まっていく．

5　全微分型 ODE

未知関数 $x = x(t)$ に対する ODE

$$(*) : P(t,x) + Q(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad (P, Q \text{は与えられた関数})$$

がある C^1 級関数 $\varphi(t,x)$ によって

$$\begin{cases} P = \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} \\ Q = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \end{cases}$$

となるとき $(*)$ を (完)全微分型という．

注　$(*)$ を

$$P(t,x)\,\mathrm{d}t + Q(t,x)\,\mathrm{d}x = 0$$

と書くこともある．このとき，

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}\varphi \qquad (\varphi\text{の全微分})$$

となるので，$(*)$ を全微分型という．

5.1　全微分型の解

$x = x(t)$ が

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$$

の解のとき，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t, x(t)) = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$$

よって，

$$\varphi(t, x(t)) = C \qquad\qquad (C\text{はある定数})$$

逆に方程式

$$\varphi(t, x) = C$$

が陰関数 $x = x(t)$ をもつ ($\varphi(t, x(t)) = C$) とき，

$$\varphi(t, x(t)) = C$$

の両辺を t で微分して

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$$

となる．
従って，

$$\varphi(t, x) = C$$

が $(*)$ の一般解を与える．

5.2 いつ全微分型になるか

$(*)$ で P と Q を C^1 級関数とするとき，

$$(*)\text{が全微分型} \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial x}(t, x) = \frac{\partial Q}{\partial t}(t, x)$$

となる．

$$\frac{\partial P}{\partial x}(t, x) = \frac{\partial Q}{\partial t}(t, x)$$

を可積分条件という．

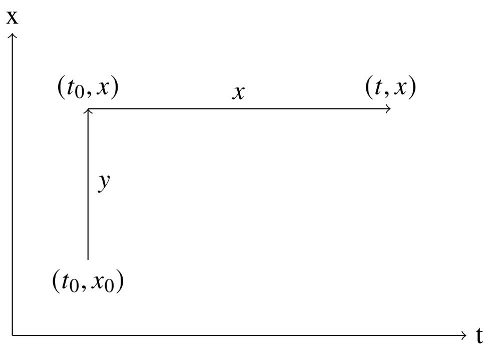
$\because$ $\Rightarrow$:

$$P = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, Q = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

なら，

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}$$
$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x}$$

となる．
$\Leftarrow$: このときは $\varphi(t, x)$ を次のように定める．点 (t_0, x_0) を任意に固定し，(t_0, x_0) から (t, x) に至る path C を



ととって

$$\varphi(t,x) = \int_{x_0}^{x} Q(t_0,y)\,\mathrm{d}y + \int_{t_0}^{t} P(s,x)\,\mathrm{d}s$$

と置く．このとき

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{t_0}^{t} P(s,x)\,\mathrm{d}s\right) = P(t,x) \\
\frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,x) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{x_0}^{x} Q(t_0,y)\,\mathrm{d}y\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{t_0}^{t} P(s,x)\,\mathrm{d}s\right) \\
&= Q(t_0,x) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial Q}{\partial s}(s,x)\,\mathrm{d}s \qquad \left(\text{微分と積分の順序交換と}\frac{\partial P}{\partial x}(s,x) = \frac{\partial Q}{\partial s}(s,x)\right) \\
&= Q(t_0,x) + (Q(t,x) - Q(t_0,x)) \\
&= Q(t,x)
\end{aligned}$$

従って $(*)$ は全微分型となる． □

注　この $\varphi(t,x)$ の定め方は (t,x) 平面上のベクトル場 $\begin{pmatrix} P(t,x) \\ Q(t,x) \end{pmatrix}$ の path C $(\alpha \leq v \leq \beta)$

$$\begin{cases} t = t(v) \\ x = x(v) \end{cases}$$

に沿う線積分

$$\int_C \{P(t,x)\,\mathrm{d}t + Q(t,x)\,\mathrm{d}x\} \left(= \int_\alpha^\beta \left\{ P(t(v),x(v))\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}v} + Q(t(v),x(v))\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v} \right\} \mathrm{d}v \right)$$

に他ならない．

もし

$$P\,\mathrm{d}t + Q\,\mathrm{d}x = \frac{\partial\varphi}{\partial t}\,\mathrm{d}t + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\mathrm{d}x$$

なら，ベクトル場 $\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial t} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} \end{pmatrix} = \mathrm{grad}\,\varphi$ の C 上の線積分として

$$\varphi(t,x) - \varphi(t_0,x_0) = \int_C (\mathrm{grad}\,\varphi)\cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{r}} = \int_C \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial t}\,\mathrm{d}t + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\mathrm{d}x \right\} = \int_C (P\,\mathrm{d}t + Q\,\mathrm{d}x)$$

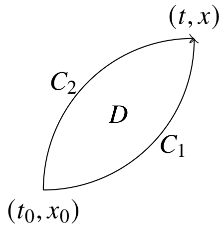
となるので，先のように $\varphi(t,x)$ を定めた ($\varphi(t_0,x_0)$ は 0 としてよい).

注　(t_0, x_0) から (t, x) に至る path C をどう取っても $\int_C (P\,\mathrm{d}t + Q\,\mathrm{d}x)$ は同じ値となる．

∵ 2 通りの path C_1, C_2 に対して

$$\int_{C_1} (P\,\mathrm{d}t + Q\,\mathrm{d}x) = \int_{C_2} (P\,\mathrm{d}t + Q\,\mathrm{d}x)$$

を言えばよい．



上の図のようになるとき，平面領域に対する Green の定理により，

$$\int (P\,\mathrm{d}t + Q\,\mathrm{d}x) = \iint_D \left(-\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial t}\right) \mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$$

となる．可積分条件より

$$-\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial t} = 0$$

なので，右辺は 0．従って

$$\int_{C_1} (P\,\mathrm{d}t + Q\,\mathrm{d}x) = \int_{C_2} (P\,\mathrm{d}t + Q\,\mathrm{d}x)$$

途中で交差しているときは，交差する前と後で分けて考えればよい．　□

例

$$(*) : (x \sin t - t)\,\mathrm{d}t + \left(x^2 - \cos t\right) \mathrm{d}x = 0$$

を解く．

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \sin t = \frac{\partial Q}{\partial t}$$

であるから，これは全微分型

$(t_0, x_0) = (0, 0)$ と取って，

$$\varphi(t, x) = \int_0^x Q(0, y)\,\mathrm{d}y + \int_0^t P(s, x)\,\mathrm{d}s$$

とおくと，

$$\int_0^x Q(0, y)\,\mathrm{d}y = \int_0^x \left(y^2 - 1\right) \mathrm{d}y = \left[\frac{y^3}{3} - y\right]_0^x = \frac{x^3}{3} - x$$

$$\int_0^t P(s, x) = \int_0^t (x \sin s - s)\,\mathrm{d}s = \left[-x \cos s - \frac{s^2}{2}\right]_{s=0}^{s=t} = \left(-x \cos t - \frac{t^2}{2}\right) - (-x - 0)$$

従って

$$\varphi(t, x) = -x \cos t - \frac{t^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

となる．(∗) の一般解は

$$\varphi = (\text{定数})$$

より

$$-x\cos t - \frac{t^2}{2} + \frac{x^3}{3} = C \qquad (C\text{は任意定数})$$

[別解]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = P = x\sin t - t$$

の両辺を x は定数だと思って t について積分

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial t}\,\mathrm{d}t = \int (x\sin t - t)\,\mathrm{d}t$$

$$\varphi(t,x) = -x\cos t - \frac{t^2}{2} + C(x) \qquad (x\text{は定数と思うので積分定数は}x\text{の関数でよい})$$

この両辺を x で偏微分すると

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\cos t + C'(x)$$

これが

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = Q = x^2 - \cos t$$

に一致する．すなわち

$$C'(x) = x^2$$
$$\Leftrightarrow C(x) = \frac{x^3}{3} + C$$

従って

$$\varphi(t,x) = -x\cos t - \frac{t^2}{2} + \left(\frac{x^3}{3} + C\right)$$

となって，解は

$$\varphi = (\text{定数})$$

より

$$-x\cos t - \frac{t^2}{2} + \frac{x^3}{3} = C_1$$

と書ける．

(注 (∗) が全微分型でないときは，この計算はうまくいかない)

5.3　全微分型でないとき

$$(*) : P + Q\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$$

が全微分型でなくてもこの両辺にある関数 $\mu(t,x)$ をかけると

$$(\mu P) + (\mu Q)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$$

が全微分型になることがある．このような $\mu = \mu(t,x)$ を $(*)$ の積分因子という．

一般には積分因子 $\mu(t,x)$ を求めるのは難しいが，μ が t のみの関数 $\mu(t)$，または μ が x のみの関数 $\mu(x)$ と仮定して積分因子が求まることがある．この場合を考える．

$\mu = \mu(t)$ に対して

$$\begin{aligned}
&(*) : (\mu P)\,\mathrm{d}t + (\mu Q)\,\mathrm{d}x = 0\text{が全微分型} \\
\Leftrightarrow\ &\frac{\partial(\mu P)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial t} && \text{(可積分条件)} \\
\Leftrightarrow\ &\mu\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t}Q + \mu\frac{\partial Q}{\partial t} \\
\Leftrightarrow\ &\mu\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t}\right) = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t}Q
\end{aligned}$$

このとき

$$\frac{\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t}}{\mu} = \frac{\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t}}{Q}$$

で右辺は t のみの関数なので

$$f(t) = \frac{\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t}}{\mu}$$

とおくと，

$$\begin{aligned}
\int \frac{\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t}}{\mu}\,\mathrm{d}t &= \int f(t)\,\mathrm{d}t \\
\int \frac{1}{\mu}\,\mathrm{d}u &= \int f(t)\,\mathrm{d}t \\
|\mu| &= e^{\int f(t)\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

となって

$$\mu = e^{\int f(t)\mathrm{d}t}$$

ととれる (積分定数は何でもよい).

まとめ

$$(*) : P\,\mathrm{d}t + Q\,\mathrm{d}x = 0$$

において

- $\dfrac{\partial P}{\partial x} - \dfrac{\partial Q}{\partial t} = 0$ のとき，$(*)$ は全微分型
- $\dfrac{\partial P}{\partial x} - \dfrac{\partial Q}{\partial t} \neq 0$ のとき，
  - $\dfrac{\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t}}{Q}$ が t のみの関数 $f(t)$ となるとき，$\mu(t) = e^{\int f(t)\mathrm{d}t}$ を積分因子にとれる．
  - $\dfrac{\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial x}}{P}$ が x のみの関数 $g(x)$ となるとき，$\mu(x) = e^{\int g(x)\mathrm{d}x}$ を積分因子にとれる．

例

$$(*) : e^x \,\mathrm{d}t + \left(-2t^2x - te^x\right)\mathrm{d}x = 0$$

を考える．

$$\frac{\partial P}{\partial x} = e^x \neq \frac{\partial Q}{\partial t} = -4tx - e^x$$

なので，$(*)$ は全微分型でない．

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t}}{Q} = \frac{e^x + 4tx + e^x}{-2t^2x - te^x} = -\frac{2}{t}\ (t\text{のみの関数})$$

となるので，

$$\mu(t) = e^{\int -\left(\frac{2}{t}\right)\mathrm{d}t} = e^{\log t^{-2}} = t^{-2}$$

が $(*)$ の積分因子にとれる．
$(*)$ の両辺に t^{-2} をかけて

$$(**) : t^{-2}e^x \,\mathrm{d}t + t^{-2}\left(-2t^2x - te^x\right)\mathrm{d}x = 0$$

$$\begin{aligned}\tilde{P} &= t^{-2}e^x \\ \tilde{Q} &= t^{-2}\left(-2t^2x - te^x\right) = -2x - t^{-1}e^x\end{aligned}$$

とおく．ここで

$$(t_0, x_0) = (1, 0)$$

ととって (注 $t = 0$ では t^{-2} は定義されないので $t_0 = 1$ とする．)

$$\varphi(t,x) = \int_0^x \tilde{Q}(1,y)\,\mathrm{d}y + \int_1^t \tilde{P}(s,x)\,\mathrm{d}s$$

とおくと，

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^x \tilde{Q}(1,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^x (-2y - e^y)\,\mathrm{d}y = \left[-y^2 - e^y\right]_{y=0}^{y=x} = \left(-x^2 - e^x\right) - (0 - 1) \\ \displaystyle\int_1^t \tilde{P}(s,x)\,\mathrm{d}x = \int_1^t s^{-2}e^x\,\mathrm{d}s = \left[\frac{s^{-2+1}}{-2+1}e^x\right]_{s=1}^{s=t} = \left(-\frac{1}{t}e^x\right) - (-e^x) \end{cases}$$

$$\varphi(t,x) = -x^2 - \frac{1}{t}e^x + 1$$

となるので，$(**)$ の一般解 (すなわち $(*)$ の一般解) は

$$\varphi = (\text{定数})$$

より

$$-\frac{1}{t}e^x - x^2 - C$$

となる．

6　べき級数法

「求積」で解けない場合の究極の方法
ODE の解を

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \qquad (a_n \text{は定数})$$

と仮定して，これをもとの ODE に代入して，係数 $a_0, a_1, \ldots$ を順に決めていく方法.

例

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = tx$$

の解 $x(t)$ で

$$x(0) = C(\text{定数})$$

を満たすものを求める．

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots$$

とおいてこれを t で微分.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^n$$

一方

$$tx = t\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots\right) = a_0 t + a_1 t^2 + a_2 t^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} t^n$$

この両辺の $t^0, t^1, t^2, \ldots$ の各係数を比較

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ 2a_2 = a_0 \\ \vdots \\ (n+1)a_{n+1} = a_{n-1} \\ \vdots \end{cases}$$

よって 1 つおきの漸化式

$$na_n = a_{n-2}$$

となる.

- $n = 2m + 1$(奇数) のとき，$a_1 = 0, 3a_3 = a_1 = 0, \cdots$ となって
$$a_n = 0$$
- $n = 2m$(偶数) のとき,
$$\begin{aligned} 2ma_{2m} &= a_{2m-2} \\ a_{2m} &= \frac{a_{2(m-1)}}{2m} = \frac{1}{2m}\frac{a_{2(m-2)}}{2(m-1)} = \cdots \\ &= \frac{a_0}{2m \cdot 2(m-1)\cdots 2} = \frac{C}{2^m m!} \end{aligned}$$
従って
$$x(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m}t^{2m} = C\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m m!}t^{2m}\right) = C\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t^2}{2}\right)^m}{m!} = Ce^{\frac{t^2}{2}}$$
となる.

7 線型常微分方程式系の一般的性質

n 個の未知関数 $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ を

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

とまとめて書く ($\vec{\mathbf{x}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

$$(*) : \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t} = A(t)\vec{\mathbf{x}}(t) + \vec{\mathbf{r}}(t)$$

ただし,

$$A(t) = \left(a_{ij}(t)\right)$$

は各成分が連続関数となる $n \times n$ 行列で,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} \\ \vdots \\ \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} r_1(t) \\ \vdots \\ r_n(t) \end{pmatrix} : \text{各成分が連続}$$

を考える (線型常微分方程式系 or 連立線型 ODE という).
$\vec{\mathbf{r}}(t) = \vec{\mathbf{0}}$ のとき同次 (or 斉次) 方程式という．$\vec{\mathbf{r}}(t) \neq \vec{\mathbf{0}}$ のとき非同次 (or 非斉次) 方程式という.

7.1 同次方程式と非同次方程式の関係

$$\text{(o)}:\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t}=A(t)\vec{\mathbf{x}}$$
$$\text{(N)}:\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t}=A(t)\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{r}}(t) \qquad \left(\vec{\mathbf{r}}(t)\neq\vec{\mathbf{0}}\right)$$

とするとき

1. $\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{p}}(t)$ が (N) の 1 つの解 (特解 or 特殊解という) で，$\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{o}}(t)$ が (o) の任意の解のとき，$\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{o}}+\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{p}}$ は (N) の解

   ∵
   $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{o}}+\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{p}}\right)=\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{0}}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{p}}}{\mathrm{d}t}=A(t)\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{0}}+\left(A(t)\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{p}}+\vec{\mathbf{r}}(t)\right)=A(t)\left(\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{o}}+\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{p}}\right)+\vec{\mathbf{r}}(t)$$

   □

2. 逆に $\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}(t),\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{2}}(t)$ が (N) の任意の解 ⇒ $\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}-\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{2}}$ は (o) の解

   ∵
   $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}-\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{2}}\right)=\left(A(t)\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}+\vec{\mathbf{r}}(t)\right)-\left(A(t)\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{2}}+\vec{\mathbf{r}}(t)\right)=A(t)\left(\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}-\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{2}}\right)$$

   □

注　1,2 を合わせると

$$\left\{\text{(N)の解全体}\right\}=\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{p}}+\left\{\text{(o)の解全体}\right\}$$

となり $\left\{\text{(N)の解全体}\right\}$ は $\left\{\text{(o)の解全体}\right\}$ を $\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{p}}$ だけ平行移動したものとなる．(従って (N) の 1 つの解 $\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{p}}$ と (o) の任意の解が求まれば，(N) の任意の解が求まる)

7.2 解の存在と一意性

$$(*):\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t}=A(t)\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{r}}(t)$$

の解 $\vec{\mathbf{x}}(t)$ で任意の初期条件

$$\vec{\mathbf{x}}(0)=\vec{\mathbf{a}}(\in\mathbb{R}^n\,(\text{or}\,\mathbb{C}^n))$$

を満たすものがただ一つ存在する

7.3 同次方程式の解の重ね合わせ

$\vec{\mathbf{z}}(t), \vec{\mathbf{w}}(t)$ が

$$(\mathrm{o}) : \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t} = A(t)\vec{\mathbf{x}}$$

の解で，かつ $k \in \mathbb{R}(\mathrm{or}\,\mathbb{C})$ とすると，$\vec{\mathbf{z}} + \vec{\mathbf{w}}, k\vec{\mathbf{z}}$ も (o) の解

$\because$

$$\frac{\mathrm{d}(\vec{\mathbf{z}} + \vec{\mathbf{w}})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{z}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{w}}}{\mathrm{d}t} = A(t)\vec{\mathbf{z}} + A(t)\vec{\mathbf{w}} = A(t)(\vec{\mathbf{z}} + \vec{\mathbf{w}})$$
$$\frac{\mathrm{d}(k\vec{\mathbf{z}})}{\mathrm{d}t} = k\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{z}}}{\mathrm{d}t} = kA(t)\vec{\mathbf{z}} = A(t)(k\vec{\mathbf{z}})$$

□

[意味]:$\{$(o)の解全体$\}$ は和とスカラー倍に関して閉じていてベクトル空間をなす(1 つの解 $(\vec{\mathbf{x}}(t))_{t\in\mathbb{R}}$ を 1 本のベクトルと思う)

7.4 同次方程式の解空間

$$(\mathrm{o}) : \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t} = A(t)\vec{\mathbf{x}}$$

に対する解の存在と一意性により

$$\begin{array}{ccc} \{(\mathrm{o})\text{の解全体}\} & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^n(\mathrm{or}\,\mathbb{C}^n) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ (\vec{\mathbf{x}}(t))_{t\in\mathbb{R}} & \longmapsto & \vec{\mathbf{x}}(t) \end{array}$$

この F は線形写像 $(F(\vec{\mathbf{z}} + \vec{\mathbf{w}}) = F(\vec{\mathbf{z}}) + F(\vec{\mathbf{w}}), F(k\vec{\mathbf{z}}) = kF(\vec{\mathbf{z}}))$ なので，この F により

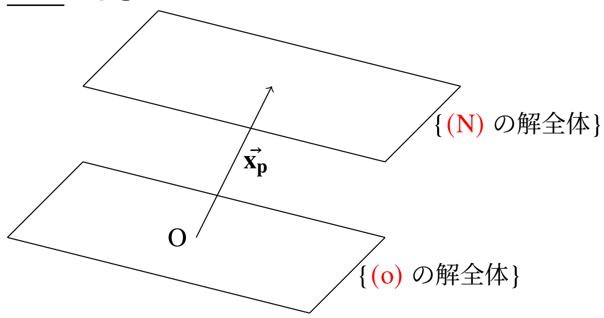
$$\left\{(\mathrm{o})\text{の解全体}\left(\text{原点}\vec{\mathbf{x}}(t) = \vec{\mathbf{0}}\text{を通る}\right)\right\} \cong \mathbb{R}^n(\mathrm{or}\,\mathbb{C}^n) \qquad (\text{ベクトル空間として同型(同じとみなせる)})$$

従って

$$\vec{\mathbf{r}}(t) \neq \vec{\mathbf{0}}$$

に対して $\{$(N)の解全体$\}$ は $\mathbb{R}^n$ を特解 $\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{p}}$ の分だけ平行移動したものとなる.

$\underline{n = 2}$のとき



8　n 階線型 ODE

関数 $y=y(t)$ に対する

$$(**) : y^{(n)}+P_{n-1}(t)y^{(n-1)}+\cdots+P_1(t)y'+P_0(t)y=Q(t)\quad\left(\text{各}P_i(t),Q(t)\text{は与えられた関数}, y^{(k)}=\frac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}t^k}\right)$$

は

$$\vec{\mathbf{x}}(t)=\begin{pmatrix} y(t)\\ y'(t)\\ \vdots\\ y^{(n-1)}(t)\end{pmatrix}$$

とおくと

$$(**)\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t}\left(=\begin{pmatrix} y'\\ y''\\ \vdots\\ y^{(n)}\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} y'\\ y''\\ \vdots\\ y^{(n-1)}\\ -P_{n-1}(t)y^{(n-1)}-\cdots-P_1(t)y'-P_0(t)y+Q(t)\end{pmatrix}\qquad\left(y^{(n)}\text{が}(**)\text{により規定されると見る}\right)$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1\\ -P_0(t) & & & & -P_{n-1}(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y\\ y'\\ \vdots\\ \vdots\\ y^{(n-1)}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0\\ \vdots\\ \vdots\\ 0\\ Q(t)\end{pmatrix}$$

となり，$A(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1\\ -P_0(t) & & & & -P_{n-1}(t)\end{pmatrix}, \vec{\mathbf{x}}(t)=\begin{pmatrix} y\\ y'\\ \vdots\\ \vdots\\ y^{(n-1)}\end{pmatrix}, \vec{\mathbf{r}}=\begin{pmatrix} 0\\ \vdots\\ \vdots\\ 0\\ Q(t)\end{pmatrix}$ とおくと，$(*)$ に帰着できる．

従って

$$\begin{aligned}(\mathrm{o}) : & y^{(n)}+P_{n-1}(t)y^{(n-1)}+\cdots+P_1(t)y'+P_0(t)y=0\\ & y^{(n)}+P_{n-1}(t)y^{(n-1)}+\cdots+P_1(t)y'+P_0(t)y=Q(t)\qquad (Q(t)\neq 0)\end{aligned}$$

に対して先と同様のことが成り立ち，

- $\{$同次方程式(o)の解全体$\}$ は n 次元ベクトル空間をなし，解 $y(t)$ は初期値

$$\vec{\mathbf{x}}(0)=\begin{pmatrix} y(0)\\ y'(0)\\ \vdots\\ y^{(n)}(0)\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n(\mathrm{or}\,\mathbb{C}^n)$$

　を与えるごとにただ 1 つ定まる．

- $\{$非同次方程式(N)の解$\}$ は (N) の特解 $y_p(t)$ が 1 つ求まると $y_p + \{$(o)の解全体$\}$ と書ける．

Question (o) の n 個の解はいつ 1 次独立となるか？ (いつ (o) の解空間の基底をなすか)

9 関数の 1 次独立性の判定

一般に $X_1(t), \dots, X_n(t)$ が C^∞ 級関数のとき

$$X_1, \dots, X_n \text{が(関数として)}\underline{1\text{ 次独立}}$$
$$\overset{\text{定義}}{\Leftrightarrow} \text{定数} C_1, \dots C_n \text{に対して「} C_1X_1 + \cdots C_nX_n \equiv 0 \Rightarrow C_1 = 0, \cdots, C_n = 0 \text{」が成り立つ．}$$

ここで $\equiv$ は関数として (すべての t で)0 の意．

$$C_1X_1 + \cdots + C_nX_n \equiv 0$$

の両辺を k 回微分すると

$$C_1X_1^{(k)} + \cdots C_nX_n^{(k)} = 0$$

これを $k = 0, 1, \dots, n-1$ についてまとめると

$$\begin{pmatrix} X_1 & \cdots & X_n \\ X_1' & \cdots & X_n' \\ \vdots & & \vdots \\ X_1^{(n-1)} & \cdots & X_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} \equiv \vec{\mathbf{0}}$$

となる．ここで $n \times n$ 行列 $X(t)$ を

$$X(t) = \begin{pmatrix} X_1 & \cdots & X_n \\ X_1' & \cdots & X_n' \\ \vdots & & \vdots \\ X_1^{(n-1)} & \cdots & X_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

とおく．ここでもしある $t = t_0$ で

$$\det(X(t_0)) \neq 0$$

となれば $X(t_0)^{-1}$ が存在するのでこれを

$$X(t_0)\begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{0}}$$

の両辺にかけて

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{0}}$$

を得る．従ってこのとき $X_1(t), \dots, X_n(t)$ は (関数として) 1 次独立となる．

結論　n 個の関数 $X_1(t),\dots,X_n(t)$ に対してある $t=t_0$ で

$$\begin{vmatrix} X_1(t_0) & \cdots & X_n(t_0) \\ X_1'(t_0) & \cdots & X_n'(t_0) \\ \vdots & & \vdots \\ X_1^{(n-1)}(t_0) & \cdots & X_n^{(n-1)}(t_0) \end{vmatrix} \neq \vec{\mathbf{0}} \implies X_1(t),\dots,X_n(t) \text{は 1 次独立}$$

$\begin{vmatrix} X_1(t_0) & \cdots & X_n(t_0) \\ X_1'(t_0) & \cdots & X_n'(t_0) \\ \vdots & & \vdots \\ X_1^{(n-1)}(t_0) & \cdots & X_n^{(n-1)}(t_0) \end{vmatrix}$ を $X_1,\dots,X_n$ の $t=t_0$ での Wronskian(ロンスキアン) といい $W[X_1,\dots,X_n](t)$ と書く．

例

$$X_1(t)=e^{\lambda_1 t},\cdots,X_n(t)=e^{\lambda_n t} \text{で} \lambda_1,\dots,\lambda_n \text{が} \underline{\text{相異なる定数}} \implies X_1,\dots,X_n \text{は 1 次独立}$$

$\because$

$$X_j(t)=e^{\lambda_j t}$$

に対して

$$X_j^{(k)}(t)=\lambda_j^k e^{\lambda_j t}$$
$$X_j^{(k)}(0)=\lambda_j^k$$

となるので

$$W[X_1,\dots,X_n](0)=\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \left(=\Lambda \text{とおく}\right)$$

このとき，<u>主張</u>

$$\lambda_1,\dots,\lambda_n \text{が相異なる} \implies \Lambda=0 \qquad \left(\text{従って} X_1,\dots,X_n \text{は 1 次独立}\right)$$

$\because$ Λ で $\lambda_i=\lambda_j$ とすると (i 列)=(j 列) となって $\Lambda=0$ となる．したがって因数定理により Λ は $\left(\lambda_j=\lambda_i\right)$ $(j\neq i)$ を因数に持ち $\prod_{1\le i\le j\le n}\left(\lambda_j-\lambda_i\right)$ で割り切れる．ところで

$$\left(\Lambda \text{の次数}\right)=0+1+\cdots+n-1=\frac{n(n-1)}{2} \qquad \left(\det \text{は各行から 1 個ずつ選ぶ}\right)$$
$$\left(\prod_{1\le i\le j\le n}\left(\lambda_j-\lambda_i\right)\text{の次数}\right)={}_n\mathrm{C}_2=\frac{n(n-1)}{2}$$

で同じなので

$$\Lambda=\left(\text{定数}\right)\prod_{1\le i\le j\le n}\left(\lambda_j-\lambda_i\right)$$

となる．ここで「添え字の大きなものができるだけ多くかかる項」を見ると

$$\Lambda \text{では} \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \text{の取り方で det での係数} = 1$$

$$\prod_{1 \leq i \leq j \leq n} \left(\lambda_j - \lambda_i\right) \text{では} \lambda_j \text{の方なので係数} = 1$$

従って (定数)=1．今

$$i \neq j \Rightarrow \lambda_j - \lambda_i \neq 0$$

なので

$$\Lambda = \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} \left(\lambda_j - \lambda_i\right) \neq 0$$

となる． □

□

補足 (関数の 1 次独立性の判定)

例 自然数 n に対して $X_1(t) = 1, X_2(t) = t, \cdots, X_n(t) = t^{n-1}$ は 1 次独立

$\because$

$$\begin{aligned}
\text{Wronskian}\, W[X_1, \ldots, X_n](t) &= \begin{vmatrix} X_1 & \cdots & X_n \\ X_1' & \cdots & X_n' \\ \vdots & & \vdots \\ X_1^{(n-1)} & \cdots & X_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & t & t^2 & \cdots & t^{n-1} \\ 0 & 1 & 2t & \cdots & (n-1)t^{n-2} \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (n-1)! \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & * & \\ & & 2 & & & \\ & & & 3! & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & (n-1)! \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 0! & & & * & \\ & 1! & & & \\ & & 2! & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & (n-1)! \end{vmatrix} = 0! \times 1! \times \cdots \times (n-1)! \neq 0
\end{aligned}$$

なので $X_1(t), \ldots X_n(t)$ は 1 次独立 □

例　定数 λ に対して $Y_1(t)=e^{\lambda t}, Y_2(t)=te^{\lambda t}, \cdots, Y_n(t)=t^{n-1}e^{\lambda t}$ は 1 次独立.

$\because$ もし $Y_1,\ldots,Y_n$ が 1 次従属とすると

$$C_1Y_1(t)+\cdots+C_nY_n(t)\equiv 0$$

となる定数

$$(C_1,\ldots,C_n)\neq(0,\cdots,0)$$

がとれる．この式の両辺に $e^{-\lambda t}(\neq 0)$ をかけると

$$C_1\cdot 1+C_2\cdot t+\cdots+C_nt^{n-1}\equiv 0$$

となる定数

$$(C_1,\ldots,C_n)\neq(0,\cdots,0)$$

が存在して，これは前の例に矛盾．したがって $Y_1,\ldots Y_n$ は 1 次独立　$\square$

10　定数係数 n 階同次線型 ODE

　未知関数 $x=x(t)$ に対する

$$\text{(o)}:x^{(n)}+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x'+a_0x=0 \qquad (a_0,\ldots,a_{n-1}\text{は定数})$$

の n 個の 1 次独立な解 ((o) の解空間 $(\cong\mathbb{R}^n)$ の基底) を求めたい.

　記号 : x から $x'=\frac{dx}{dt}$ を作る操作を D で表す (微分作用素).

$$Dx=x', D^2x=D(Dx)=x'',\cdots,D^nx=x^{(n)}$$

すると (o) は

$$\left(D^n+a_{n-1}D^{n-1}+\cdots+a_1D+a_0\right)x=0$$

と書ける. $D^n+a_{n-1}D^{n-1}+\cdots+a_1D+a_0$ を $P(D)$(D の n 次式) とおく. 次に, $\left(D^n+a_{n-1}D^{n-1}+\cdots+a_1D+a_0\right)$ の中で D を未知数 λ に代えて

$$P(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0$$

という n 次方程式 ((o) の特性方程式という) を考える ($P(\lambda)$ を (o) の特性多項式という)．ここで

$$P(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{m_r} \qquad \left(\lambda_1,\ldots,\lambda_r\text{は相異なり}m_1+\cdots+m_r=n\right)$$

と因数分解できたとする．すると (o) は

$$(D-\lambda_1)^{m_1}\cdots(D-\lambda_r)^{m_r}x=0$$

となる.

注 定数 λ に対して

$$(\lambda x)' = \lambda x'$$

即ち

$$D(\lambda x) = \lambda Dx$$

となるので

$$D\lambda = \lambda D$$

となって D と定数倍は順番を代えてよい (可換という). これにより $(D-\lambda_1)^{m_1}\cdots(D-\lambda_r)^{m_r}$ を展開すると $D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0$ になる. 一方, D と関数 $f(t)$ 倍は可換でない. 実際

$$D(f(t)x(t)) = f'(t)x(t) + f(t)x'(t) = (Df)x + fDx$$

となって $(Df)x$ の分だけずれる.

このとき $i \neq j$ に対して

$$(D-\lambda_i)^{m_i}\left(D-\lambda_j\right)^{m_j} = \left(D-\lambda_j\right)^{m_j}(D-\lambda_i)^{m_i}$$

となるので $(D-\lambda_i)^{m_i}$ を 1 番先に x に作用させて, 各 $i = 1, \ldots, r$ に対して

$$(D-\lambda_i)^{m_i}x = 0$$

を考えると, これの m_i 個の 1 次独立な解として $e^{\lambda_0 t}, te^{\lambda_1 t}, \ldots, t^{m_i-1}e^{\lambda_i t}$ が得られる.

$\because$ 添え字 i を略して $t^k e^{\lambda t}$ $(l = 0, \ldots, m-1)$ が

$$(D-\lambda)^m x = 0$$

の 1 次独立な解を言う. x が

$$(D-\lambda)^m x = 0$$

を満たすとして

$$y(t) = e^{-\lambda t}x$$

とおくと

$$\begin{aligned}
Dy &= \left(e^{-\lambda t}x\right)' = \left(e^{-\lambda t}\right)'x + e^{-\lambda t}x' = \left(-\lambda e^{-\lambda t}\right)x + e^{-\lambda t}Dx = e^{-\lambda t}(D-\lambda)x \\
D^2 y &= D\left(e^{-\lambda t}(D-\lambda)x\right) = \left(e^{-\lambda t}\right)'(D-\lambda)x + e^{-\lambda t}D(D-\lambda)x = e^{-\lambda t}(D-\lambda)^2 x \\
&\ \ \vdots \\
D^m y &= e^{-\lambda t}(D-\lambda)^m x = 0 \qquad \left((D-\lambda)^m x = 0\,(\text{仮定})\right)
\end{aligned}$$

となるので, y は $1, t, \ldots, t^{n-1}$ の 1 次結合で書ける.

$$x = e^{\lambda t}y$$

なので x は $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \ldots, t^{n-1}e^{\lambda t}$ の 1 次結合で書ける. □

従って (o) の $n(=m_1+\cdots+m_r)$ 個の解として $\left\{t^k e^{\lambda_j t}\ \left(k=0,\ldots,m_j-1.j=1,\ldots,r\right)\right\}$ が得られる.
主張 これらは全体として1 次独立になる (従って (o) の解空間の基底になる)

∵ これらの 1 次結合で 0 になったとする.

$$\sum_{j=1}^{r}\left\{\sum_{k=0}^{m_j-1} c_{j,k} t^k e^{\lambda_j t}\right\}=0 \tag{*}$$

このとき各 $c_{j,k}=0$ を言えばよい.

Case 1 各 $j=1,\ldots,r$ に対して

$$\sum_{k=0}^{m_j-1} c_{j,k} t^k e^{\lambda_j t}=0$$

とすると $\left\{e^{\lambda_j t}, te^{\lambda_j t}, \ldots, t^{m_j-1}e^{\lambda_j t}\right\}$ が 1 次独立であったので各 $c_{j,k}=0$ となって OK.
Case 2 ある j_0 に対して

$$\sum_{k=0}^{m_{j_0}-1} c_{j_0,k} t^k e^{\lambda_{j_0} t} \neq 0$$

とする．このときは

$$x_j(t)=\sum_{k=0}^{m_j-1} c_{j,k} t^k e^{\lambda_{j_0} t}$$

とおいて次を言えばよい.
主張 2 $x_j(t)\ (j=1,\ldots,r)$ が

$$\left(D-\lambda_j\right)^{m_j} x_j=0$$

を満たし，そのうちの $j=1,\ldots,l$ に対して

$$x_j(t)\neq 0$$

とするとき $x_j(t)\ (j=1,\ldots,l)$ は 1 次独立．これが言えると，$x_{j_0}\neq 0$ が*により

$$x_{j_0}(t)=\sum_{j\neq j_0} x_j(t)$$

と書けて主張 2 に反する．従って，Case 2 は生じない.

∵ 主張 2 を示す．$x_1(t),\ldots,x_l(t)$ が 1 次従属とすると，ある $x_{j_0}(t)$ が

$$x_{j_0}(t)=\sum_{j=j_0} C_j\cdot x_j(t)$$

と書ける．ここで特性多項式

$$P(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{m_r}$$

の逆数を考えて，これを部分分数に分解すると，

$$\frac{1}{P(\lambda)} = \frac{1}{(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{m_r}} = \sum_{j=1}^{r}\frac{q_j(\lambda)}{\left(\lambda-\lambda_j\right)^{m_j}}$$

と書ける ($q_j(\lambda)$ は λ の m_j-1 次式)．この両辺に $P(\lambda)$ をかけると

$$1 = \sum_{j=1}^{r} q_j(\lambda)(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\cdots\widehat{\left(\lambda-\lambda_j\right)^{m_j}}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{m_r}$$

となる．ここで

$$\hat{P}_j(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1}\cdots\widehat{\left(\lambda-\lambda_j\right)^{m_j}}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{m_r}$$

とおく．すると

$$1 = \sum_{j\neq j_0} q_j(\lambda)\hat{P}_j(\lambda) + q_{j_0}(\lambda)\hat{P_{j_0}}(\lambda)$$

という λ の多項式になり，λ に D を代入して

$$I = \sum_{j\neq j_0} q_j(D)\hat{P}_j(D) + q_{j_0}(D)\hat{P_{j_0}}(D) \qquad\qquad (I\text{は恒等写像})$$

を得る．これを $x_{j_0}(t)$ に作用させると

$$Ix_{j_0}(t) = \sum_{j\neq j_0} q_j(D)\hat{P}_j(D)x_{j_0}(t) + q_{j_0}(D)\hat{P_{j_0}}(D)x_{j_0}(t)$$

これの左辺は

$$Ix_{j_0}(t) = x_{j_0}(t) \neq 0$$

一方右辺について, 第 1 項は中に $\left(D-\lambda_{j_0}\right)^{m_{j_0}}$ があるので 0 になる. 第 2 項は $\hat{P_{j_0}}(D)$ の中に $\left(D-\lambda_j\right)^{m_j}$ があるので 0 になる．よって右辺は 0 となって矛盾．従って主張 2 が言えた． □

□

結論

$$\text{(o)} : x^{(n)} + a_{n_1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1x' + a_0x\left(= \left(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1D + a_0\right)x\right) = 0$$

のすべての解は (o) を

$$(D-\lambda_1)^{m_1}\cdots(D-\lambda_r)^{m_r}x = 0$$

と書きなおすと

$$x(t) = \sum_{j=1}^{r}\left(\sum_{k=1}^{m_j-1} c_{j,k}t^k e^{\lambda_i t}\right)$$

で与えられる ($t^k e^{\lambda_i t}$ は 1 次独立).

例　λ_j が複素数

$$\lambda_j = p + iq \, (p, q \in \mathbb{R})$$

のときは Euler の公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$$

を使うと

$$e^{\lambda_j t} = e^{(p+iq)t} = e^{pt} e^{iqt} = e^{pt} (\cos(qt) + i \sin(qt))$$

と書ける．このまま全て $\mathbb{C}$ 上で考えて任意定数 $C_{j,k} \in \mathbb{C}$ としてもよいが，$a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ のときは，λ_j と $\bar{\lambda}_j = p - iq$ が同時に pair として現れ，同じ重複度を持つので，

$$\begin{aligned} e^{\lambda_j t} &= e^{pt} (\cos(qt) + i \sin(qt)) \\ e^{\bar{\lambda}_j t} &= e^{pt} (\cos(qt) - i \sin(qt)) \end{aligned}$$

が同時に現れる．ここで

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(e^{\lambda_j t} + e^{\bar{\lambda}_j t}\right) &= e^{pt} \cos(qt) \\ \frac{1}{2i}\left(e^{\lambda_j t} - e^{\bar{\lambda}_j t}\right) &= e^{pt} \sin(qt) \end{aligned}$$

となり，逆に $e^{\lambda_j t}$ と $e^{\bar{\lambda}_j t}$ はこの 2 つの 1 次結合で書ける．従って，$t^k e^{\lambda_j t}$ を $t^k e^{pt} \cos(qt)$ に，$t^k e^{\bar{\lambda}_j t t}$ を $t^k e^{pt} \sin(qt)$ に代えても 1 次独立性は不変 (どちらも

$$(D - \lambda_j)^{m_j} (D - \bar{\lambda}_j)^{m_j} x = 0$$

の解空間の基底をなす→実数値関数としての (o) の解空間の基底を作れる)．

例

$$\text{(o)} : x'' + 3x' + 2 = 0$$

のとき，

$$x'' + 3x' + 2 = \left(D^2 + 3D + 2\right)x$$

特性方程式は

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$$

その解は

$$\lambda = -1, 2$$

より，$e^{(-1)t}, e^{(-2)t}$ を作る．(o) の一般解 (全ての解) は

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} \qquad (C_1, C_2 \text{は任意定数})$$

例

$$(\mathrm{o}) : \left(D^4 - 5D^3 + 9D^2 - 7D + 2\right)x = 0$$

のとき，特性方程式は

$$\lambda^4 - 5\lambda^3 + 9\lambda^2 - 7\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^3 = 0$$

その解は

$$\lambda = 1\ (\text{重複度}3), \lambda = 2$$

より，$e^{1t}, te^{1t}, t^2e^{1t}, e^{2t}$ を作る．(o) の一般解は

$$x(t) = C_1e^t + C_2te^t + C_3t^2e^t + C_4e^{2t}$$

例

$$(\mathrm{o}) : \left(D^2 + D + 1\right)x = 0$$

の一般解を実数値関数で表す．

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$$

より

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

より，$e^{\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}t} = e^{-\frac{t}{2}}e^{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}it}$ を作る．$e^{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}it}$ は $\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$ に代える．

$$x(t) = C_1e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

例

$$(\mathrm{o}) : D^3\left(D^2 + 1\right)^2x = 0$$

のとき

$$\lambda^3\left(\lambda^2 + 1\right)^2 = \lambda^3((\lambda - i)(\lambda + i))^2 = 0$$

の解は

$$\lambda = 0(\text{重複度}3), \pm i(\text{重複度}2)$$

より，$e^{0t}, te^{0t}, t^2e^{0t}, e^{\pm it}, te^{\pm it}$ を作り，$e^{\pm it}, te^{\pm it}$ を $\cos t, \sin t$ に代える．(o) の一般解は

$$x(t) = C_1 + C_2t + C_3t^2 + C_4\cos t + C_5\sin t + C_6t\cos t + C_7t\sin t$$

11　定数係数非同次線型 ODE(未定係数法)

目標: 未知関数 $x = x(t)$ に対する

$$(*) : x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = Q(t)$$

$D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ として

$$\left(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0\right)x = Q(t)$$

ここで $a_0, \ldots, a_{n-1}$ は定数．$Q(t)$ は $t^m e^{at}$(m は 0 以上の整数，a は定数) たちの 1 次結合で $Q(t) \neq 0$ の一般解を求めたい．

[解き方]

Step 1 $(*)$ の両辺に (右辺) の$Q(t)$ を消す微分作用素 Eをかける．

例　$Q(t) = t^m e^{at}$ のときは

$$E = (D - a)^{m+1}$$

$Q(t) = t^m \cos(bt)$　or　$t^m \sin(bt)$ のときは

$$E = \left(D^2 + b^2\right)^{m+1}$$

ととればよい．

Step 2 すると，同次方程式

$$(**) : E\left(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0\right)x = 0$$

を得る (注 $(*)$ の解 $\Rightarrow (**)$ の解)．この $(**)$ の一般解を求め，それをもとの $(*)$ に代入して $(*)$ を満たすように任意定数を特定すると $(*)$ の一般解を得る ($Q(t)$ が和の形のときはその各々について上のことを行えばよい)．

例

$$(*) : \left(D^2 + 3D + 2\right)x = e^t$$

のとき，(右辺) の e^t は

$$(D - 1)e^t = \left(e^t\right)' - e^t = 0$$

を満たすので，$(*)$ の両辺に $(D - 1)$ をかけると

$$(**) : (D - 1)\left(D^2 + 3D + 2\right)x = 0$$

$(**)$ の一般解:$(**)$ の特性方程式

$$(\lambda - 1)\left(\lambda^2 + 3\lambda + 2\right) = 0$$

の解は $\lambda=1,-1,-2$ より，$e^{1t}, e^{(-1)t}, e^{-2t}$ を作る．$(**)$ の一般解は

$$x(t)=C_1e^t+C_2e^{-t}+C_3e^{-2t}$$

これを元の $(*)$ に代入．このうち $C_2e^{-t}+C_3e^{-2t}$ の分は

$$\left(D^2+3D+2\right)x=0$$

を満たすものなので $(*)$ に代入すると 0 になる．そこで $x(t)=C_1e^t$ を $(*)$ に代入して任意定数 C_1 を特定する:

$$\left(D^2+3D+2\right)C_1e^t=C_1\left(\left(e^t\right)''+3\left(e^t\right)'+2e^t\right)=C_1(1+3+2)e^t=6C_1e^tx$$

で，これが $(*)$ の (右辺) の e^t に一致 $\Leftrightarrow$ $6C_1=1$ $\Leftrightarrow C_1=\frac{1}{6}$．従って $(*)$ の一般解は

$$x(t)=\frac{1}{6}e^t+C_2^{-t}+C_3e^{-2t}$$

例

$$(*):\left(D^3+1\right)x=t^2$$

のとき，(右辺) の t^2 は

$$D^3\left(t^2\right)=0$$

を満たすので $(*)$ の両辺に D^3 をかけると

$$(**):D^3\left(D^3+1\right)x=0$$

になる．

$(**)$ の一般解: 特性方程式

$$\lambda^3\left(\lambda^3+1\right)=(\lambda+1)\left(\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)=0$$

の解は $\lambda=0$(重複度3)$,-1,\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ より，$e^{0t}, te^{0t}, t^2e^{0t}, e^{(-1)t}, e^{\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)t}=e^{\frac{1}{2}}e^{\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}}$ を作り，$e^{\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}t}$ を $\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$ に代える．$(**)$ の一般解は

$$x(t)=C_1+C_2t+C_3t^2+C_4e^{-t}+C_5e^{\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+C_6e^{\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$C_4e^{-t}+C_5e^{\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+C_6e^{\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$ は $(D^3+1)x=0$ を満たす分なので $(*)$ に代入すると 0 になる．そこで

$$x(t)=C_1+C_2t+C_3t^2$$

を元の $(*)$ に代入:

$$\left(D^3+1\right)\left(C_1+C_2t+C_3t^2\right)=0+\left(C_1+C_2t+C_3t^2\right)$$

で，これが $(*)$ の (右辺) の t^2 に一致 $\Leftrightarrow C_1=0, C_2=0, C_3=1$．したがって $(*)$ の一般解は

$$x(t)=t^2+C_4e^{-t}+C_5e^{\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+C_6e^{\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

例

$$(*) : (D+1)(D+3)x = e^{-t}$$

のとき

$$(D+1)e^{-t} = 0$$

なので $(*)$ の両辺に $(D+1)$ をかけると

$$(**) : (D+1)^2(D+3)x = 0$$

になる．$(**)$ の特性方程式

$$(\lambda+1)^2(\lambda+3) = 0$$

の解は $\lambda = -1$(重複度2)$, -3$ より，$e^{(-1)t}, te^{(-1)t}, e^{-3t}$ を作る．$(**)$ の一般解は

$$x(t) = C_1e^{-t} + C_2te^{-t} + C_3e^{-3t}$$

$C_1e^{-t} + C_3e^{-3t}$ は

$$(D+1)(D+3)x = 0$$

を満たす分なので $(*)$ に代入すると 0 になる．そこで

$$x(t) = C_2te^{t}$$

を元の $(*)$ に代入して C_2 を特定する:

$$\begin{aligned}(D+1)(D+3)C_2te^{-t} &= (D+3)(D+1)C_2te^{-t} = (D+3)C_2e^{-t} \\ &= C_2\left((e^{-t})' + 3e^{-t}\right) = C_2(-1+3)e^{-t} = 2C_2e^{-t}\end{aligned}$$

これが $(*)$ の右辺の e^{-t} に一致 $\Leftrightarrow$ $2C_2 = 2$ $\Leftrightarrow$ $C_2 = \frac{1}{2}$．従って $(*)$ に一般解は

$$x(t) = C_1e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t} + C_3e^{-3t}$$

例

$$(*) : \left(D^2 - 1\right)x = t\sin t$$

(右辺) の $t\sin t$ は

$$\left(D^2+1\right)^2(t\sin t) = \left(D^2+1\right)\left(D^2+1\right)(t\sin t) = \left(D^2+1\right)2\cos t = 0$$

を満たすので $(*)$ の両辺に $\left(D^2+1\right)^2$ を書けると

$$(**) : \left(D^2+1\right)^2\left(D^2-1\right)x = 0$$

になる．$(**)$ の特性方程式

$$\left(\lambda^2+1\right)^2\left(\lambda^2-1\right) = ((\lambda-i)(\lambda+i))^2(\lambda+1)(\lambda-1) = 0$$

の解は $\lambda=\pm i$(重複度2)$,-1,1$ より，$e^{\pm it}, te^{\pm it}, e^{(-1)t}, e^{1t}$ を作り，$e^{\pm it}, te^{\pm it}$ を $\cos t, \sin t$ に代える．$(**)$ の一般解は

$$x(t)=C_1\cos t+C_2\sin t+C_3t\cos t+C_4t\sin t+C_5e^t+C_6e^{-t}$$

$C_5e^t+C_6e^{-t}$ を $(*)$ に代入すると 0 になる．そこで $C_1\cos t+C_2\sin t+C_3t\cos t+C_4t\sin t$ を $(*)$ に代入して $C_1\sim C_4$ を特定する．$\cos t$ は (D^2+1) をかけると 0 になるので $(*)$ の (左辺) の $(D^2+1)-2$ と書くと

$$\begin{aligned}
&\left(D^2-1\right)(C_1\cos t+C_2\sin t+C_3t\cos t+C_4t\sin t)\\
=&\left(D^2+1\right)(C_1\cos t+C_2\sin t)-2(C_1\cos t+C_2\sin t)+\left(D^2+1\right)(C_3t\cos t+C_4t\sin t)-2(C_3t\cos t+C_4t\sin t)\\
=&0-2(C_1\cos t+C_2\sin t)+(C_3(\cos t-t\sin t)+C_4(\sin t-t\cos t))'+(C_3t\cos t+C_4t\sin t)-2(C_3t\cos t+C_4t\sin t)\\
=&(-2C_1+2C_4)\cos t+(-2C_2-2C_3)\sin t+(-2C_3)t\cos t+(-2C_4)t\sin t
\end{aligned}$$

これが $(*)$ の (右辺) の $t\sin t$ に一致

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-2C_1+2C_4=0\\-2C_2-2C_3=0\\\qquad\;\;-2C_3=0\\\qquad\;\;-2C_4=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=-\dfrac{1}{2}\\C_2=0\\C_3=0\\C_4=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$(*)$ の一般解は

$$x(t)=-\frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{2}t\sin t+C_5e^t+C_6e^{-t}$$

12　n 階非同次線型 ODE に対する定数変化法

目標 未知関数 $x=x(t)$ に対する

$$(\mathrm{o}):x^{(n)}+P_{n-1}(t)x^{(n-1)}+\cdots+P_1(t)x'+P_0(t)x=0\qquad(P_0,\ldots,P_{n-1}\text{は与えられた関数})$$

の n 個の解 $\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t)$ でその Wronskian

$$W[\varphi_1,\ldots,\varphi_n](t)=\begin{vmatrix}\varphi_1&\cdots&\varphi_n\\\varphi_1'&\cdots&\varphi_n'\\\vdots&&\vdots\\\varphi_1^{(n-1)}&\cdots&\varphi_n^{(n-1)}\end{vmatrix}\neq 0$$

となるもの (従って $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}$ は 1 次独立となり (o) の解空間 ($\cong\mathbb{R}^n$) の基底をなす) が分かったとする．このとき $Q(t)\neq 0$ に対する非同次方程式

$$(*):x^{(n)}+P_{n-1}(t)x^{(n-1)}+\cdots+P_1(t)x'+P_0(t)x=Q(t)\qquad(Q(t)\text{与えられた関数})$$

の一般解を求めたい.
方針: (o) の一般解

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i \varphi_i(t) \qquad (C_1, \ldots, C_n \text{は任意定数})$$

において C_i を関数 $C_i(t)$ に代えて (定数を変化させて)

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i(t)\varphi_i(t)$$

が $(*)$ を満たすように $C_1(t), \ldots, C_n(t)$ を決めたい.

$$x' = \sum_i (C_i\varphi_i)' = \sum_i C_i'\varphi_i + \sum_i C_i\varphi_i'$$

ここで (このままでは任意性が大きすぎるので)C_i $(i = 1, \ldots, n)$ に

$$\sum_i C_i'\varphi_i = 0$$

という条件を課す．すると

$$x' = \sum_i C_i\varphi_i'$$

となり

$$x'' = \sum_i \left(C_i\varphi_i'\right) = \sum_i C_i'\varphi_i' + \sum_i C_i\varphi_i''$$

となる．ここでさらに

$$\sum_i C_i'\varphi_i' = 0$$

という条件を課す．すると

$$x'' = \sum_i C_i\varphi_i''$$

となる．(以下同様)
$x^{(n-1)}$ において

$$\sum_i C_i'\varphi_i^{(n-2)} = 0$$

という条件を課すと

$$x^{(n-1)} = \sum_i C_i\varphi_i^{(n-1)}$$

となる．すると

$$x^{(n)} = \sum_i C_i'\varphi_i^{(n-1)} + \sum_i C_i\varphi_i^{(n)}$$

となり，このとき

$$
\begin{aligned}
& x^{(n)}+P_{n-1}(t)x^{(n-1)}+\cdots+P_1(t)x'+P_0(t)x \\
=& \sum_i C_i\varphi_i^{(n-1)}+\sum_i C_i\left(\varphi^{(n)}+P_{n_1}(t)\varphi_i^{(n-1)}+\cdots+P_1(t)\varphi_i'+P_0(t)\varphi_i\right)=\sum_i C_i'\varphi_i^{(n-1)}\left(\varphi_1,\dots,\varphi_n\text{は(o)の解}\right)
\end{aligned}
$$

となるので，これが (∗) の右辺の $Q(t)$ になればよい．

$C_1,\dots,C_n$ に課される条件をまとめると

$$
\begin{cases}
\sum_i C_i'\varphi_i = 0 \\
\sum_i C_i'\varphi_i' = 0 \\
\quad\vdots \\
\sum_i C_i'\varphi_i^{(n-2)} = 0 \\
\sum_i C_i'\varphi_i^{(n-1)} = Q(t)
\end{cases}
$$

即ち，

$$
\begin{pmatrix}
\varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\
\varphi_1' & \cdots & \varphi_n' \\
\vdots & & \vdots \\
\varphi_1^{(n-2)} & \cdots & \varphi_n^{(n-2)} \\
\varphi_1^{(n-1)} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
c_1' \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n'
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ Q(t)
\end{pmatrix}
$$

となる．従って

$$
\begin{pmatrix}
c_1' \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n'
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\
\varphi_1' & \cdots & \varphi_n' \\
\vdots & & \vdots \\
\varphi_1^{(n-1)} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}
\end{pmatrix}^{-1}
\begin{pmatrix}
0 \\ \vdots \\ 0 \\ Q(t)
\end{pmatrix}
$$

が求まり，この各成分を積分すると $C_1(t),\dots,C_n(t)$ が求まる．

注 $\sum_i C_i'\varphi_i = 0, \sum_i C_i'\varphi_i' = 0$ の条件を課さないといけない，という必然性はないが，こうすることで $C_1(t),\dots,C_n(t)$ がうまく求まるというのが定数変化法 (しかもこの方法をより一般の連立線型 ODE の場合にも拡張できる)．

Cramer の公式 ($n\times n$ 行列 $A=\left(a_{ij}\right)$ の $\det A\neq 0$ のとき連立 1 次方程式 $A\vec{\mathbf{x}}=\vec{\mathbf{b}}$ の解 $\vec{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ が

$$
x_j = \frac{1}{\det A}
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & \boxed{} & \cdots & a_{n1} \\
\vdots & \cdots & \vec{\mathbf{b}} & \cdots & \vdots \\
a_{1n} & \cdots & \boxed{} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

で与えられる．) を使うと

$$C_j(t) = \int \frac{1}{W[\varphi_1, \dots, \varphi_n](t)} \begin{vmatrix} \varphi_1 & & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ Q(t) \end{matrix}} & & \varphi_n \\ \varphi_1' & & & & \varphi_n' \\ \vdots & \cdots & & \cdots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & & & & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \mathrm{d}t$$

とも書ける．

例

$$(*) : \left(D^2 + 1\right)x = \frac{1}{\cos t}$$

のとき

$$(\mathrm{o}) : \left(D^2 + 1\right)x = 0$$

の一般解は

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$

$\varphi_1(t) = \cos t, \varphi_2(t) = \sin t$ とおく．ここで C_i を $C_i(t)$ に代えて

$$x(t) = \sum_{i=1}^{2} C_i(t)\varphi_i(t)$$

が $(*)$ を満たすように $C_1(t), C_2(t)$ を決めたい．そのためには

$$\begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos t} \end{pmatrix}$$

を満たせばよい．

$$\begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\sin t}{\cos t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

この各成分を積分:

$$\begin{cases} C_1(t) = \displaystyle\int \frac{-\sin t}{\cos t}\,\mathrm{d}t = \log\left|\cos t\right| + C_1 & (C_1 \text{は任意定数}) \\ C_2(t) = \displaystyle\int 1\,\mathrm{d}t = t + C_2 & (C_2 \text{は任意定数}) \end{cases}$$

従って $(*)$ の一般解は

$$\begin{aligned} x(t) &= (\log|\cos t| + C_1)\cos t + (t + C_2)\sin t \\ &= (\log|\cos t|)\cos t + t\sin t + (C_1\cos t + C_2\sin t) \end{aligned}$$

Qustion

$$(\mathrm{o}) : x^{(n)} + P_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + P_1(t)x' + P_0(t)x = 0$$

の n 個の 1 次独立な解 $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(n)$ が求まるのはどういうときか？

- $n=1$ のときは 1 階線型なので OK
- 一般の n でも定数係数 $\left(P_i(t)=a_i(\text{定数})\right)$ となるときは (o) の特性方程式

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

  が解ければ OK
- しかし，一般の場合には (o) の解空間の基底 $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(n)$ を求めるような一般的な方法はない．

定数係数の場合に帰着できるものとして

12.1 Euler 型 ODE

未知関数 $x=x(t)$

$$t^n x^{(n)} + b_{n-1}t^{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + b_1 t x' + b_0 x = 0 \ \left(b_0, \ldots, b_{n-1}\text{は与えられた関数，即ち}P_i(t)=t^{-n}\left(b_i t^i\right)\right)$$

[解き方] $t=e^s$ とおいて変数を t から s に変換する：

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}e^s}{\mathrm{d}s} = e^s = t$$

なので

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \left(t\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)x$$

となって

$$t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}$$

と書ける．

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}s^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}x\right) \\
&= \left(t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\left(t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x\right) \\
&= t\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + t\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x\right) \\
&= t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + t^2 + \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}
\end{aligned}$$

となるので

$$t^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}s^3} &= \left(t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\left(t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + t^2\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right) \\
&= t\left(\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} + t\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right) + \left(2t\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + t^2\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$= t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 3t^2\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + t^3\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3}$$

となるので，

$$t^3\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3} = \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}s^3} - 3\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} + 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}$$

以下同様にすると一般に

$$t^k\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k} + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}s^{k-1}}\text{の定数係数の 1 次結合}\right)$$

となるので

$$(\mathrm{o}) : \left(t^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} + b_{n-1}t^{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + b_1t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + b_0\right)x = 0$$

を $x = x(s)$ に対する定数係数の n 階同次線型 ODE に直せる．特に $n = 2$ のとき

$$t^2\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + b_1t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + b_0x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right)x + b_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}x + b_0x = 0$$

即ち，

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} + (b_1 - 1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} + b_0\right)x(s) = 0$$

となる．

例

$$(\mathrm{o}) : t^2x'' + tx' + 4x = 0 \ (b_1 = 1, b_0 = 4)$$

のとき，
$t = e^s$ とおくと，

$$(\mathrm{o}) \ \Leftrightarrow \ \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} + (1 - 1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} + 4\right)x(s) = 0$$

即ち

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}s^2} + 4x = 0$$

となり，これの特性方程式は $\lambda^2 + 4 = 0$ で，その解は $\lambda = \pm 2i$． $e^{\pm 2is} = e^{\pm i(2s)}$ を作り $\cos(2s), \sin(2s)$ に代える．(o) の一般解は

$$x(s) = C_1\cos(2s) + C_2\sin(2s)$$

ここで $t = e^s$ より $s = \log t$． これは

$$x(t) = C_1\cos(2\log t) + C_2\sin(2\log t)$$

と書ける．

$$(*) : t^2x'' + tx'4x = 1$$

を定数変化法で解く．(o) の一般解

$$x(s) = C_1\cos(2s) + C_2\sin(2s)$$

において C_i を $C_i(s)$ に代えて

$$x(s) = C_1(s)\cos(2s) + C_2(s)\sin(2s)$$

の形で (∗) を満たすように $C_1(s), C_2(s)$ を求める ($\varphi_1(s) = \cos(2s), \varphi_2(s) = \sin(2s)$ とおく). そのためには

$$\begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2s) & -\frac{1}{2}\sin(2s) \\ \sin(2s) & \frac{1}{2}\cos(2s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を満たせばよい. これより

$$\begin{aligned} C_1' &= -\frac{1}{2}\sin(2s) \\ C_2' &= \frac{1}{2}\cos(2s) \end{aligned}$$

と求まり, これらを s で積分して

$$\begin{aligned} C_1(s) &= \int \left(-\frac{1}{2}\sin(2s)\right) \mathrm{d}s = \frac{1}{4}\cos(2s) + C_1 \\ C_2(s) &= \int \frac{1}{2}\cos(2s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{4}\sin(2s) + C_2 \end{aligned}$$

従って (∗) の一般解は

$$\begin{aligned} x(s) &= \left(\frac{1}{4}\cos(2s) + C_1\right)\cos(2s) + \left(\frac{1}{4}\sin(2s) + C_2\right)\sin(2s) \\ &= \frac{1}{4} + C_1\cos(2s) + C_2\sin(2s) \end{aligned}$$

t の関数として書くと

$$x(t) = \frac{1}{4} + C_1\cos(2\log t) + C_2\sin(2\log t)$$

13 定数変化法 (一般の連立線型 ODE の場合)

復習 未知関数 $x = x(t)$ に対する n 階非同次線型 ODE

$$(*) : x^{(n)} + P_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + P_1(t)x' + P_0(t)x = Q(t) \quad (P_0, \ldots, P_{n-1}, Q\text{は与えられた関数}, Q(t) \neq 0)$$

に対しては,

$$x^{(n)} + P_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + P_1(t)x' + P_0(t)x = 0 \quad (\text{同次方程式})$$

の n 個の解 $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ で

$$W[\varphi_1, \ldots, \varphi_n](t) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \cdots & \varphi_n' \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

となるものが求まれば, (∗) の一般解として

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i(t)\varphi_i(t)$$

で $C_1(t),\ldots,C_n(t)$ が

$$\begin{pmatrix} C_1' \\ \vdots \\ C_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \cdots & \varphi_n' \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ Q(t) \end{pmatrix}$$

を満たすものとして与えられた．これを連立 ODE として書き直す．

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & 0 & 1 \\ -P_0(t) & \cdots & \cdots & \cdots & -P_{n-1}(t) \end{pmatrix}, \vec{\mathbf{b}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ Q(t) \end{pmatrix}$$

とおいて $(*)$ と (o) を

$$(*) : \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t} = A(t)\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{b}}(t),\ (\mathrm{o}) : \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t} = A(t)\vec{\mathbf{x}}$$

と各々書き直すと，(o) の n 個の 1 次独立な解として $\vec{\mathbf{v}}_\mathbf{i}(t) = \begin{pmatrix} \varphi_i(t) \\ \varphi_i'(t) \\ \vdots \\ \varphi_i^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \quad (i = 1,\ldots,n)$ で

$$\det\left(\vec{\mathbf{v}}_\mathbf{1}(t),\cdots,\vec{\mathbf{v}}_\mathbf{n}(t)\right) \neq 0$$

となるものが得られ，$(*)$ の一般解は

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{v}}_\mathbf{1}(t) & \cdots & \vec{\mathbf{v}}_\mathbf{n}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ \vdots \\ C_n(t) \end{pmatrix}$$

と書け，$V(t) = \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{v}}_\mathbf{1}(t) & \cdots & \vec{\mathbf{v}}_\mathbf{n}(t) \end{pmatrix}$ とおくと，$\begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$ は

$$\begin{pmatrix} C_1' \\ \vdots \\ C_n' \end{pmatrix} = V(t)^{-1}\vec{\mathbf{b}}(t)$$

を積分したものとして

$$\begin{pmatrix} C_1(t) \\ \vdots \\ C_n(t) \end{pmatrix} = \int^t V(s)^{-1}\vec{\mathbf{b}}(s)\,\mathrm{d}s \quad (\text{不定積分})$$

と求まり，

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = V(t)\begin{pmatrix} C_1(t) \\ \vdots \\ C_n(t) \end{pmatrix} = \int^t V(t)V(s)^{-1}\vec{\mathbf{b}}(s)\,\mathrm{d}s$$

と書けることになる (不定積分に現れる任意定数は初期値 $\vec{\mathbf{x}}(t)$ が与えられると定まる．)

この定式化を一般の連立線型 ODEにも拡張するため，まず $\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{i}}(t) = \begin{pmatrix} \varphi_i(t) \\ \varphi_i'(t) \\ \vdots \\ \varphi_i^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$ と $V(t) = \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{1}}(t) & \cdots & \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}(t) \end{pmatrix}$ と $V(t)V(s)^{-1}$ を一般の場合に定式化する．

14　基本行列と解核行列

未知関数 $\vec{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ に対する同次線型 ODE

$$(\mathrm{o}) : \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t} = A(t)\vec{\mathbf{x}}(t) \quad \left(A(t) = \left(a_{ij}(t)\right)\text{は各成分}a_{ij}(t)\text{が連続関数の}n\times n\text{行列}\right)$$

をまず考える．(o) の n 個の解 $\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{1}}(t), \ldots, \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}(t)$ を横に並べて $V(t) = \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{1}}(t) & \cdots & \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}(t) \end{pmatrix}$ $\left(n\times n\text{行列}\right)$ と書き，ここで仮定 $\det(V(t)) \neq 0$を満たすとする．(すると $\left\{\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{1}}, \ldots, \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}\right\}$ は (o) の解空間 ($\simeq \mathbb{R}^n$) の基底をなす) このとき

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{1}}}{\mathrm{d}t} & \cdots & \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t)\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{1}} & \cdots & A(t)\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}} \end{pmatrix} = A(t)\begin{pmatrix} \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{1}} & \cdots & \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}} \end{pmatrix} = A(t)V(t)$$

となる．逆に $n\times n$ 行列 $V(t)$ が $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = A(t)V(t)$ を満たし $\det(V(t)) \neq 0$ のとき $V(t)$ を $\begin{pmatrix} \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{1}}(t) & \cdots & \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}(t) \end{pmatrix}$ と書き，上の計算を逆にたどると，この $\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{1}}(t), \ldots, \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}(t)$ は (o) の n 個の 1 次独立な解となる．そこで

定義　各成分が C_1 級の $n\times n$ 行列 $V(t) = \left(v_{ij}(t)\right) = \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{1}}(t) & \cdots & \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}(t) \end{pmatrix}$ で $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = A(t)V(t), \det(V(t)) \neq 0$ を満たすものを (o) の基本行列という．

$X(t) = \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}(t) & \cdots & \vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{n}}(t) \end{pmatrix}, Y(t) = \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{y}}_{\mathbf{1}}(t) & \cdots & \vec{\mathbf{y}}_{\mathbf{n}}(t) \end{pmatrix}$ が共に (o) の基本行列のとき $\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}(t), \cdots, \vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{n}}(t)$ は (o) の解空間の基底をなすので各 $\vec{\mathbf{y}}_{\mathbf{k}}(t)$　$(k = 1, \ldots, n)$ はこれらの 1 次結合として

$$\vec{\mathbf{y}}_{\mathbf{k}}(t) = \sum_{j=1}^{n} C_{jk}\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{j}}(k) = \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}(t) & \cdots & \vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{n}}(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{1k} \\ \vdots \\ C_{nk} \end{pmatrix} \quad (\text{各}C_{jk}\text{は定数})$$

と書け，

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{y}}_{\mathbf{1}}(t) & \cdots & \vec{\mathbf{y}}_{\mathbf{n}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}(t) & \cdots & \vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{n}}(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix} = X(t)C \quad (C\text{の各成分は定数})$$

と書けて $\det X(t) \neq 0, \det Y(t) \neq 0$ より $\det C \neq 0$ を満たす．逆に $\det C \neq 0$ のとき $X(t)C$ は

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(X(t)C) &= \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}C \\ &= A(t)(X(t)C) \\ \det(X(t)C) &= \det(X(t))\det C \neq 0 \end{aligned}$$

となって (o) の基本行列となる．(o) の基本行列 $V(t)$ に対して$\underline{R(t,s) = V(t)V(s)}$を (o) の解核行列 (resolvent kernel) という．

注　$R(t,s)$ は $V(t)$ の取り方によらずに定まる

$\because$ (o) の任意の基本行列 $Y(t)$ は $V(t)C \quad (\det C \neq 0)$ と書けたので

$$Y(t)Y(s)^{-1} = (V(t)C)(V(t)C)^{-1} = V(t)CC^{-1}V(s)^{-1} = V(t)V(s)^{-1}$$

となる． □

$\vec{\mathbf{x}}(t)$ が (o) の解 $\Rightarrow$ $\vec{\mathbf{x}}(t) = R(t,s)\vec{\mathbf{x}}(s)$ が成り立つ．(即ち $R(t,s)$ は解 $\vec{\mathbf{x}}$ の「時刻 s から時刻 t への時間発展」を与える

$\because$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R(t,s)\vec{\mathbf{x}}(s)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(V(t)V(s)^{-1}\vec{\mathbf{x}}(s)\right) = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}(t)V(s)^{-1}\vec{\mathbf{x}}(s) = A(t)\big(R(t,s)\vec{\mathbf{x}}(s)\big)$$

となるので, $\vec{\mathbf{x}}(t)$ と $R(t,s)\vec{\mathbf{x}}(s)$ は共に (o) の解となり, $t = s$ でどちらも $\vec{\mathbf{x}}(s)$ となる $\left(\Leftarrow R(s,s) = V(s)V(s)^{-1} = I\right)$. 従って (o) の解の一意性により

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = R(t,s)\vec{\mathbf{x}}(s)$$

となる． □

従って初期値問題

$$\text{(o)}: \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t} = A(t)\vec{\mathbf{x}}$$
$$\vec{\mathbf{x}}(t_0) = \vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{0}} \in \mathbb{C}^n$$

の一般解は

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = R(t,t_0)\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{0}}$$

で与えられ，(o) の一般解は $R(t,t_0)\begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$ の形に書ける．

15　非同次連立線型 ODE に対する定数変化法

$$(*): \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t} = A(t)\vec{\mathbf{x}}(t) + \vec{\mathbf{b}}(t)$$
$$\vec{\mathbf{x}}(t_0) = \vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{0}}$$

の解は

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = R(t,t_0)\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{0}} + \int_{t_0}^{t} R(t,s)\vec{\mathbf{b}}(s)\,\mathrm{d}s$$

で与えられる．

∵

$$(\mathrm{o}) : \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t} = A(t)\vec{\mathbf{x}}$$

の一般解 $\vec{\mathbf{x}}(t) = R(t, t_0)\vec{\mathbf{C}}$ の $\vec{\mathbf{C}}$ を $\vec{\mathbf{C}}(t)$ で代えて

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = R(t, t_0)\vec{\mathbf{C}}(t)$$

を $(*)$ に代入して $(*)$ を満たすように $\vec{\mathbf{C}}(t)$ を決める．

$$\begin{cases} (*)\text{の (左辺)} : \dfrac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(R(t, t_0)\vec{\mathbf{C}}(t)\Big) & \Big(R(t, t_0) = V(t)V(t_0)^{-1}\Big) \\ \qquad = \left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(t)\right)V(t_0)^{-1}\vec{\mathbf{C}}(t) + R(t, t_0)\dfrac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{C}}}{\mathrm{d}t}(t) & \left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(t) = A(t)V(t)\right) \\ \qquad = A(t)R(t, t_0)\vec{\mathbf{C}}(t) + R(t, t_0)\dfrac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{C}}}{\mathrm{d}t}(t) & \\ (*)\text{の (右辺)} : A(t)\vec{\mathbf{x}}(t) = A(t)\Big(R(t, t_0)\vec{\mathbf{C}}(t)\Big) + \vec{\mathbf{b}}(t) & \end{cases}$$

従って

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow R(t, t_0)\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{C}}}{\mathrm{d}t}(t) = \vec{\mathbf{b}}(t) \\ &\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{C}}}{\mathrm{d}t}(t) = R(t, t_0)^{-1}\vec{\mathbf{b}}(t) = R(t_0, t)\vec{\mathbf{b}}(t) \qquad \left(R(t, t_0)^{-1} = \left(V(t)V(t_0)^{-1}\right)^{-1} = V(t_0)V(t)^{-1} = R(t_0, t)\right) \end{aligned}$$

両辺積分して

$$\vec{\mathbf{C}}(t) = \vec{\mathbf{C}}(t_0) = \int_{t_0}^{t} R(t_0, s)\vec{\mathbf{b}}(s)\,\mathrm{d}s$$

ここで

$$\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{x}}(t_0) = R(t_0, t_0)\vec{\mathbf{C}}(t_0) \quad (R(t_0, t_0) = I)$$

なので

$$\vec{\mathbf{C}}(t) = \int_{t_0}^{t} R(t_0, s)\vec{\mathbf{b}}(s)\,\mathrm{d}s$$

となる．このとき

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{x}}(t) &= R(t, t_0)\vec{\mathbf{C}}(t) \\ &= R(t, t_0)\left(\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{0}} + \int_{t_0}^{t} R(t_0, s)\vec{\mathbf{b}}(s)\,\mathrm{d}s\right) \\ &= R(t, t_0)\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{0}} + R(t, t_0)\int_{t_0}^{t} R(t_0, s)\vec{\mathbf{b}}(s)\,\mathrm{d}s \qquad \left(R(t, t_0)R(t_0, s) = V(t)V(t_0)^{-1}V(t_0)V(s)^{-1} = V(t)V(s)^{-1} = R(t, s)\right) \\ &= R(t, t_0)\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{0}} + \int_{t_0}^{t} R(t, s)\vec{\mathbf{b}}(s)\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

□

[補足]

$$\text{(o)} : \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t} = A(t)\vec{\mathbf{x}}$$

の基本行列

$$V(t) = \left(v_{ij}(t)\right) = \left(\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{1}}(t) \quad \cdots \quad \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}(t)\right)$$

の行列式

$$W\left[\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{1}}, \ldots \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}\right](t) = \det\left(V(t)\right)$$

を $W(t)$ と書くと $W(t)$ は

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \mathrm{tr}\left(A(t)\right)W(t) \tag{$*$}$$

を満たす．(但し $n \times n$ 行列 $B = \left(b_{ij}\right)$ の

$$\mathrm{tr}\, B = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} \quad \left(B\text{の対角成分の和 (trace)}\right)$$

注　これが言えると $W(t)$ は

$$\frac{W'}{W} = \mathrm{tr}\, A(t)$$

となり，両辺積分して

$$\log|W| = \int \mathrm{tr}\left(A(t)\right)\mathrm{d}t + C$$
$$|W| = e^{\int \mathrm{tr}\left(A(t)\right)\mathrm{d}t + C} = e^{C} e^{\int \mathrm{tr}\left(A(t)\right)\mathrm{d}t}$$

となって

$$W(t) = W(t_0)_{t_0}^{t} \int \mathrm{tr}\left(A(t)\right)\mathrm{d}t$$

を満たす．従ってある t_0 で

$$W(t_0) \neq 0 \Rightarrow \text{全ての}t\text{で}W(t) \neq 0$$

が成り立ち

$$\text{(o)の}n\text{個の解がある}t_0\text{で (ベクトルとして)1 次独立} \Rightarrow \text{各}t\text{で 1 次独立}$$

となる．

$\because$ $(*)$ を示す．$\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ は n 文字の並び替え (置換) とする．

$$W(t) = \det\left(v_{ij}(t)\right) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) v_{1,\sigma(1)}(t) \cdots v_{n,\sigma(n)}(t)$$

の両辺を t で微分:

$$\begin{aligned} W'(t) &= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma)\left\{v'_{1,\sigma(1)} v_{2,\sigma(2)} \cdots v_{n,\sigma(n)} + v_{1,\sigma(1)} v'_{2,\sigma(2)} \cdots v_{n,\sigma(n)} + \cdots + v_{1,\sigma(1)} \cdots v_{n-1,\sigma(n-1)} v'_{n,\sigma(n)}\right\} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) v'_{1,\sigma(1)} v_{2,\sigma(2)} \cdots \sum_{\sigma \in S_n} v_{n,\sigma(n)} + \cdots + \mathrm{sign}(\sigma) v_{1,\sigma(1)} \cdots v_{n-1,\sigma(n-1)} v'_{n,\sigma(n)} \end{aligned}$$

$$
= \begin{vmatrix} v'_{11} & \cdots & v'_{1n} \\ v_{21} & \cdots & v_{2n} \\ & \vdots & \\ v_{n1} & \cdots & v_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ v'_{21} & \cdots & v'_{2n} \\ & \vdots & \\ v_{n1} & \cdots & v_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & \cdots & v_{2n} \\ & \vdots & \\ v'_{n1} & \cdots & v'_{nn} \end{vmatrix}
$$

ここで

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}}\left(= \begin{pmatrix} v_{1k} \\ \vdots \\ v_{nk} \end{pmatrix} \right) = A(t)\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{k}}
$$

より，その第 i 成分は

$$
\begin{aligned}
v'_{ik} &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) v_{jk} \\
&= a_{i1}v_{1k} + \cdots + a_{in}v_{nk}
\end{aligned}
$$

となるので，各項

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ & \vdots & \\ v'_{i1} & \cdots & v'_{in} \\ & \vdots & \\ v_{n1} & \cdots & v_{nn} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}v_{11} + \cdots + a_{in}v_{n1} & \cdots & a_{i1}v_{1n} + \cdots + a_{in}v_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}v_{11} & \cdots & a_{i1}v_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{in}v_{n1} & \cdots & a_{in}v_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nn} \end{vmatrix} \\
&= a_{i1} \begin{vmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + a_{ii} \begin{vmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{i1} & \cdots & v_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + a_{in} \begin{vmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nn} \end{vmatrix} \\
&= a_{ii} W(t) \qquad \left(W(t) = \begin{vmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{i1} & \cdots & v_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nn} \end{vmatrix} \right)
\end{aligned}
$$

となって

$$
W'(t) = \sum_{i=1}^{n} (a_{ii}W(t)) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii} \right) W(t) = \mathrm{tr}\,(A(t))W(t)
$$

となる． □

16　行列の指数関数

(定数係数の場合の基本行列の 1 つの求め方) 未知関数 $\vec{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ に対する

$$(\mathrm{o}) : \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t} = A\vec{\mathbf{x}} \quad (\text{但し}A\text{は各成分が定数の}n \times n\text{行列})$$

を考える．

$$f(x) = e^x$$

の $x = 0$ まわりでの Taylor 展開

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

の真似をして

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} \left(= I + \frac{At}{1!} + \frac{(At)^2}{2!} + \cdots \right)$$

とおく ($e^{tA}, \exp(tA)$ とも書く)．このとき

主張 各 $t \in \mathbb{R}$ に対して e^{At} は収束し，$n \times n$ 行列になる．しかも

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{At}\right) = Ae^{At}$$

を満たす．

方針 $n \times n$ 行列全体の集合

$$M_{n,n}(\mathbb{C}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \mid \text{各} a_{ij \in \mathbb{C}} \right\}$$

とおき，これを $\mathbb{C}^{n^2}$ と同一視してその Euclid の長さを

$$\|A\| = \left(\sum_{i,j=1}^{n} \left|a_{ij}\right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

とおく．(注 $A = (\vec{\mathbf{a}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{a}}_n)$ と書くと $\|A\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \left|\vec{\mathbf{a}}_i\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ とも書ける．)

このとき

$$(\star) : \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(At)^k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|At\|^k \left(= e^{\|At\|} \right)$$

を言いたい．

例　($\star$) が言えると

- 「絶対収束級数は収束する」(級数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ に対して $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ が収束 $\Rightarrow$ $\sum_k a_k$ も収束) と同様にして $\sum_k \frac{1}{k!}(At)^k$ の収束が言える ($\leftarrow \mathbb{C}^{n^2}$ の「完備性」を使う)(Cauthy 列は収束)

- 「項別微分定理」($\sum_k b_k x^k$ が絶対収束 $\Rightarrow$ $\left(\sum_k b_k x^k\right)' = \sum_k \left(b_k x^k\right)'$) と同様にして

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(At)^k\right)' &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k!}(At)^k\right)' \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}k(At)^{k-1}A \\ &= A\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}(At)^{k-1} \\ &= A\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}(At)^m && \left(k-1=m\text{とおく}\right)\end{aligned}$$

となって

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{At}\right) = Ae^{At}$$

が成り立つ．($\star$) を言うには

$$\|A+B\| \le \|A\| + \|B\| \tag{1}$$

$$\|AB\| \le \|A\|\|B\| \tag{2}$$

を言えばよい．

$\because$ 1,2 が言えると極限としての級数についても

$$\begin{aligned}\left\|I + \frac{1}{1!}(At) + \frac{1}{2!}(At)^2 + \cdots\right\| &\le \|I\| + \frac{1}{1!}\|At\| + \frac{1}{2!}\left\|(At)^2\right\| + \cdots && (\because 1) \\ &\le \|I\| + \frac{1}{1!}\|At\| + \frac{1}{2!}\|At\|^2 + \cdots\end{aligned}$$

となって ($\star$) を得る． □

  - 1 は $\mathbb{C}^{n^2}$ での三角不等式に他ならない (略)
  - 2 を言う．

$\because$ まず $A = \left(a_{ij}\right), \vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ に対して

$$\begin{aligned}\left|A\vec{\mathbf{x}}\right| &= \left|\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j\end{pmatrix}\right| \\ &= \left(\sum_{i=1}^n\left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right|\right)^{\frac{1}{2}} && \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = \begin{pmatrix}a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}\text{(内積) と思う}\right) \\ &\le \left(\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n\left|a_{ij}\right|^2\right)\left|\vec{\mathbf{x}}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} && \left(\text{Schwarz の不等式}\left|\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}\right|^2 \le \left|\vec{\mathbf{a}}\right|^2\left|\vec{\mathbf{b}}\right|^2\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}|\vec{\mathbf{x}}| \\
&= \|A\|\|\vec{\mathbf{x}}\|
\end{aligned}
$$

が言える．さらに $B = \begin{pmatrix}\vec{\mathbf{b_1}} & \cdots \vec{\mathbf{b_n}}\end{pmatrix}$ と書くと

$$
\begin{aligned}
\|AB\| &= \left(\sum_{j=1}^{n}\left|A\vec{\mathbf{b_{ij}}}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sum_{j=1}^{n}\left(\|A\|\left|\vec{\mathbf{b_{ij}}}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} && \left(\left|A\vec{\mathbf{b}}\right| \leq |A|\left|\vec{\mathbf{b}}\right|\right) \\
&= \|A\|\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\vec{\mathbf{b_{ij}}}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} && \left(\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\vec{\mathbf{b_{ij}}}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|B\|\right) \\
&= \|A\|\|B\|
\end{aligned}
$$

となって 2 が言える． □

注 $\vec{\mathbf{x_0}} \in \mathbb{C}^n$ に対して

$$
\begin{cases}
\left(e^{At}\cdot\vec{\mathbf{x_0}}\right)' = \left(e^{A}t\right)'\vec{\mathbf{x_0}} = Ae^{At}\vec{\mathbf{x_0}} = A\left(e^{At}\vec{\mathbf{x_0}}\right) \\
\qquad\qquad = e^{A_0}\vec{\mathbf{x_0}} = I\vec{\mathbf{x_0}} = \vec{\mathbf{x_0}}
\end{cases}
$$

となるので (o) の初期値問題

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t} = A\vec{\mathbf{x}} \\
\vec{\mathbf{x}}(0) = \vec{\mathbf{x_0}}
\end{cases}
$$

の (唯一の) 解が

$$
\vec{\mathbf{x}}(t)\ e^{At}\vec{\mathbf{x_0}}
$$

で与えられる ((o) の一般解は $\vec{\mathbf{x}}(t) = e^{At}\begin{pmatrix}C_1\\ \vdots \\ C_n\end{pmatrix} = e^{At}\vec{\mathbf{C}}$ の形になる ($C_1,\ldots,C_n$ は任意定数)).

非同次方程式

$$
(*) : \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t} = A\vec{\mathbf{x}} + b(t)
$$

に対しては前回の定数変化法が適用できて (*) の初期値問題

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t} = A\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{b}} \\
\vec{\mathbf{x}}(0) = \vec{\mathbf{x_0}}
\end{cases}
$$

の解が

$$
\vec{\mathbf{x}}(t) = e^{At}\vec{\mathbf{x_0}} + \int_0^t e^{A(t-s)}\vec{\mathbf{b}}(s)\,\mathrm{d}s
$$

で与えられる．

注 A の成分が定数でなく，$A = A(t)$ となるときも $e^{A(t)t}$ は定義できるが

$$e^{A(t)t} = (A(t)t)' e^{A(t)t} = A'(t)te^{A(t)t} + A(t)e^{A(t)}$$

となるので役に立たない (実数係数でないときの基本行列を求めるのは難しい)

16.1 e^{At} の具体的な計算法

■A が対角化可能 (ある $n \times n$ 正則行列 P により $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ($\lambda_1, \dots, \lambda_n$ は A の n 個の固有値)) のとき

$$A = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}P^{-1}$$

となるので

$$\begin{aligned}
A^k &= \left(P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}P^{-1}\right)\left(P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}P^{-1}\right)\cdots\left(P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}P^{-1}\right) \\
&= P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}^k P^{-1} = P\begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}P^{-1}
\end{aligned}$$

となって

$$\begin{aligned}
e^{At} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(At)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P\left(\frac{t^k}{k!}\begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \lambda_n^k & \end{pmatrix}\right)P^{-1} \\
&= P\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t^k}{k!}\begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}\right)P^{-1} \\
&= P\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_n t)^k}{k!} \end{pmatrix}P^{-1} \\
&= P\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix})P^{-1}
\end{aligned}$$

と求まる．(注 ここでは P^{-1} を求めないといけない)

■A が対角化可能でないとき　A を Jordan 標準形

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & \text{\huge 0} \\ & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & \boxed{J_l} \end{pmatrix}$$

にして各 Jordan block J_k の $e^{J_k t}$ が求まれば

$$e^{At} = P\begin{pmatrix} \boxed{e^{J_1 t}} & & \text{\huge 0} \\ & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & \boxed{e^{J_l t}} \end{pmatrix}P^{-1}$$

と求まる．そこで $m \times m$ 行列 $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \text{\huge 0} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \text{\huge 0} & & & \lambda \end{pmatrix}$ の e^{Jt} を求める．

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & & \text{\huge 0} \\ & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \text{\huge 0} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \text{\huge 0} & & & 0 \end{pmatrix} = \lambda I + N$$

と書くと

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \text{\huge 0} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ \text{\huge 0} & & & & 0 \end{pmatrix}, N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & & \text{\huge 0} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & \ddots & 0 \\ \text{\huge 0} & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

$k \geq m$ に対して $N^k = O$ となるので

$$\begin{aligned} e^{Nt} &= I + \frac{1}{1!}(Nt) + \frac{1}{2!}(Nt)^2 + \cdots + \frac{1}{(m-1)!}(Nt)^{m-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^m}{(m-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ & & & \ddots & \frac{t}{1!} \\ \text{\huge 0} & & & & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となって

$$\begin{aligned} e^{Jt} &= e^{(\lambda I + N)t} \\ &= e^{\lambda t} e^{Nt} & \left(AB = BA \text{なら} e^{A+B} = e^A e^B \text{が成立}\right) \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & \frac{te^{\lambda t}}{1!} & \frac{t^2e^{\lambda t}}{2!} & \cdots & \frac{t^m e^{\lambda t}}{(m-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2e^{\lambda t}}{2!} \\ & & & \ddots & \frac{te^{\lambda t}}{1!} \\ \text{\huge 0} & & & & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

と求まる.

注 $e^{\lambda t}$ は対角成分に A が対角化可能であってもなくても $e^{\lambda_1 t, \dots, e^{\lambda_m t}}$ が並ぶ上三角行列となるので

$$\det\left(e^{At}\right) = e^{\lambda_1 t} \cdots e^{\lambda_m t} \neq 0$$

となって e^{At} は正則となる.

例 $n = 2$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + N$$

のとき

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

で

$$\begin{aligned} e^{Jt} &= e^{(\lambda I + N)t} = e^{\lambda I t} e^{Nt} = e^{\lambda t}\left(I + \frac{Nt}{1!} + \frac{(Nt)^2}{2!} + \cdots\right) \\ &= e^{\lambda t}\left(I + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる.

17 Jordan 標準形の求め方

$n \times n$ 行列 A の n 個の固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_r$(各 Λ_i の重複度 $m_i, m_1 + \cdots + m_r = n$) とするとき

$$A\text{が対角化可能} \Leftrightarrow \text{各}i = 1, \cdots, r\text{に対して}\lambda_i\text{の固有空間}V(\lambda_i) = \left\{\vec{\mathbf{y}} \in \mathbb{C}^n \mid A\vec{\mathbf{y}} = \lambda_i \vec{\mathbf{y}}\right\}\text{の} \dim_{\mathbb{C}} V(\lambda_i) = m_i$$

このとき

$$\mathbb{C}^n = V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_r)$$

となった. A が対角化可能でないときは $V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_r)$ では全体の $\mathbb{C}^n$ に足りない. 残りはどこにあるか？

実は各固有値 λ_i に対して

$$W(\lambda_i) = \left\{\vec{\mathbf{y}} \in \mathbb{C}^n \mid \text{ある自然数}N\text{に対して}(A - \lambda_i I)^N \vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{0}}\right\}$$

とおくと ($W(\lambda_i)$ を A の λ_i に対する一般化された固有空間という)

$$\dim_{\mathbb{C}} W(\lambda_i) = m_i$$

となり
$$\mathbb{C}^n = W(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus W(\lambda_r)$$
が成り立つ (プリント参照). ここである N としては m_i ととれる. $n \times n$ 行列 B に対し
$$\operatorname{Ker} B = \left\{ \vec{\mathbf{y}} \in \mathbb{C}^n \mid B\vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{0}} \right\} \quad \left(B\text{の}\underline{\text{核}}\text{(kernel)}\right)$$
とおくとき
$$V(\lambda_1) = \operatorname{Ker}(A - \lambda_i I) \subseteq \operatorname{Ker}\left((A - \lambda_i I)^2\right) \subseteq \cdots \subseteq \operatorname{Ker}\left((A - \lambda_i I)^{m_i}\right) = W(\lambda_i)$$
となり $\operatorname{Ker}(A - \lambda_i I) \subseteq \operatorname{Ker}\left((A - \lambda_i I)^2\right) \subseteq \cdots \subseteq \operatorname{Ker}\left((A - \lambda_i I)^{m_i}\right)$ の次元の違いから A の Jordan 標準形が定まる.

例 $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ のとき

- $\underline{A\text{ の固有値}}$:
$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 4 \\ -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 1) - 4 \times (-1) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$
より $\lambda_1 = 1$ (重複度 2)
- $\underline{V(\lambda_1)}$:
$$(\lambda_1 I - A)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{0}}$$
を解く.
$$1I - A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
より
$$(1I - A)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{0}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{0}} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 - 2y_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s \\ s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s\text{は任意})$$
従って
$$V(\lambda_1) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}}$$
となって
$$\dim_{\mathbb{C}} V(\lambda_i) = 1 < 2 = (\lambda_i\text{の重複度})$$
で A は対角化可能でない.
- $\underline{\operatorname{Ker}\left((A - \lambda_1 I)^2\right)}$:
$$(A - \lambda_1 I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 0$$
より
$$\operatorname{Ker}\left((A - \lambda_1 I)^2\right) = \mathbb{C}^2.$$
このとき
$$\operatorname{Ker}\left((A - \lambda_1 I)^2\right) \backslash V(\lambda_1) \ni \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{p}}_{\mathbf{2}}$$

とおいて

$$(A-\lambda_1 I)\vec{\mathbf{p_2}}=\vec{\mathbf{p_1}}$$

とおくと

$$\vec{\mathbf{p_1}}=V(\lambda_1)\backslash\left\{\vec{\mathbf{0}}\right\}$$

となり $\left\{\vec{\mathbf{p_1}},\vec{\mathbf{p_2}}\right\}$ は 1 次独立で $P=\left(\vec{\mathbf{p_1}},\vec{\mathbf{p_2}}\right)$ は正則となる．すると

$$\begin{cases} A\vec{\mathbf{p_1}}=\lambda_1\vec{\mathbf{p_1}} \\ A\vec{\mathbf{p_2}}=\vec{\mathbf{p_1}}+\lambda_1\vec{\mathbf{p_2}} \end{cases} \qquad (\leftarrow\vec{\mathbf{p_1}}\text{の定め方})$$

より

$$\begin{aligned} AP&=A\begin{pmatrix}\vec{\mathbf{p_1}} & \vec{\mathbf{p_2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A\vec{\mathbf{p_1}} & A\vec{\mathbf{p_2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1\vec{\mathbf{p_1}} & \vec{\mathbf{p_1}}+\lambda_1\vec{\mathbf{p_2}}\end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix}\vec{\mathbf{p_1}} & \vec{\mathbf{p_2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \end{aligned}$$

従って

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad (=J\text{とおく})$$

このとき

$$e^{At}=Pe^{Jt}P^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\left(e^t\begin{pmatrix}1 & t \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}2 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}=e^t\begin{pmatrix}2t+1 & -4t \\ t & -2t+1\end{pmatrix}$$

と求まる．

17.1　3×3 行列で対角化可能でない場合

λ_i が $n\times n$ 行列 A の重複度 m_i の固有値のとき固有空間

$$V(\lambda_i)=\left\{\vec{\mathbf{x}}\in\mathbb{C}^n \mid A\vec{\mathbf{x}}=\lambda_i\vec{\mathbf{x}}\right\}=\mathrm{Ker}\,(A-\lambda_i I)$$

と一般化された固有空間

$$W(\lambda_i)=\left\{\vec{\mathbf{x}}\in\mathbb{C}^n \mid \text{ある自然数}N\left(=m_i\text{でよい}\right)\text{に対して}(A-\lambda_i)^N\vec{\mathbf{x}}=\vec{\mathbf{0}}\right\}=\mathrm{Ker}\,((A-\lambda_i I)^{m_i})$$

について

$$V(\lambda_i)\subset W(\lambda_i).$$

例　1.$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 3\end{pmatrix}$のとき

- <u>A の固有値</u>:

$$\begin{aligned} \det(\lambda I-A)&=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -2 \\ -3 & \lambda-1 & 3 \\ 2 & 0 & \lambda-3\end{vmatrix} \\ &=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1 & -2 \\ 0 & \lambda-1 & 3 \\ \lambda-1 & 0 & \lambda-3\end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= (\lambda-3)^2(\lambda-1) + 0 + (-3)(\lambda-1) - \left\{-2(\lambda-1)^2 + 0 + 0\right\}$$
$$= (\lambda-1)\left\{\lambda^2 - 6\lambda + 9 - 3 + 2(\lambda-1)\right\} = (\lambda-1)(\lambda-2)^2$$

より

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 & (\text{重複度}1) \\ \lambda_2 = 2 & (\text{重複度}2) \end{cases}$$

- $\underline{V(\lambda_1)}$:

$$(\lambda_1 I - A)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{0}}$$

を解く.

$$1I - A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より

$$(1I - A)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{0}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{0}}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 - y_3 & = 0 \\ y_2 + 2y_3 & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ -2s \\ s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s\text{は任意})$$

$\vec{\mathbf{p_1}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおく.

$$V(\lambda_1) = \left\langle \vec{\mathbf{p_1}}^{(1)} \right\rangle_{\mathbb{C}}$$

で

$$\dim_{\mathbb{C}} V(\lambda_1) = 1$$

- $\underline{V(\lambda_2)}$:

$$2I - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より

$$(2I - A)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{0}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{0}}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 - \frac{1}{2}y_3 & = 0 \\ y_2 + \frac{3}{2}y_3 & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t}{2} \\ -\frac{3}{2}t \\ t \end{pmatrix} = \frac{t}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (t\text{は任意})$$

$$\therefore\ V(\lambda_2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}}$$

従って

$$\dim_{\mathbb{C}} V(\lambda_2) = 1 < 2 = (\lambda_2\text{の重複度})$$

となって A は対角化可能でない.

- $\underline{\mathrm{Ker}\left((A-\lambda_2 I)^2\right)}$:

$$(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より

$$(A-2I)^2\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{0}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{0}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_2 + \frac{3}{2}y_3 & = 0 \\ 0 & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -\frac{3}{2}u \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2}u \\ u \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{u}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (t, u\text{は任意})$$

$$\therefore\ W(\lambda_2) = \mathrm{Ker}\left((A-\lambda_2 I)^2\right) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}}$$

従って

$$V(\lambda_2) \subsetneq W(\lambda_2)$$

このときは $\mathrm{Ker}\left((A-\lambda_2 I)^2\right)\backslash V(\lambda_2) \ni \vec{\mathbf{p_2}}^{(2)}$ を 1 つとり $(A-\lambda_2 I)\vec{\mathbf{p_2}}^{(2)} = \vec{\mathbf{p_1}}^{(1)}$ とおく. すると $\vec{\mathbf{p_1}}^{(2)} \in V(\lambda_1)\backslash\left\{\vec{\mathbf{0}}\right\}, \vec{\mathbf{p_1}}^{(2)}, \vec{\mathbf{p_2}}^{(2)}$ は 1 次独立で

$$W(\lambda_1) = \left\langle \vec{\mathbf{p_1}}^{(2)}, \vec{\mathbf{p_2}}^{(2)} \right\rangle_{\mathbb{C}}$$

となる. このとき

$$\begin{aligned} A\vec{\mathbf{p_1}}^{(2)} &= \lambda_2\vec{\mathbf{p_1}}^{(2)} \\ A\vec{\mathbf{p_2}}^{(2)} &= \vec{\mathbf{p_1}}^{(2)} + \lambda_2\vec{\mathbf{p_2}}^{(2)} \qquad \left(\vec{\mathbf{p_1}}^{(1)} = (A-\lambda_2 I)\vec{\mathbf{p_2}}^{(2)}\right) \end{aligned}$$

となるので,

$$A\left(\vec{\mathbf{p_1}}^{(2)}, \vec{\mathbf{p_2}}^{(2)}\right) = \left(A\vec{\mathbf{p_1}}^{(2)}, A\vec{\mathbf{p_2}}^{(2)}\right)\left(\lambda_2\vec{\mathbf{p_1}}^{(2)}, \vec{\mathbf{p_1}}^{(2)} + \lambda_2\vec{\mathbf{p_2}}^{(2)}\right) = \left(\vec{\mathbf{p_1}}^{(2)}, \vec{\mathbf{p_2}}^{(2)}\right)\begin{pmatrix} \lambda_2 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

となる．今の場合

$$\vec{\mathbf{p}}_{\mathbf{2}}{}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ととると

$$\vec{\mathbf{p}}_{\mathbf{1}}{}^{(2)} = (A - 2I)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

となる．このとき

$$P = \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{p}}_{\mathbf{1}}{}^{(1)} & \vec{\mathbf{p}}_{\mathbf{1}}{}^{(2)} & \vec{\mathbf{p}}_{\mathbf{2}}{}^{(2)} \end{pmatrix} \quad \left(\vec{\mathbf{p}}_{\mathbf{1}}{}^{(1)}, \vec{\mathbf{p}}_{\mathbf{1}}{}^{(2)}, \vec{\mathbf{p}}_{\mathbf{2}}{}^{(2)} \text{は 1 次独立}\right)$$

とおくと，P は正則で，この P により

$$\begin{aligned} AP &= \begin{pmatrix} A\vec{\mathbf{p}}_{\mathbf{1}}{}^{(1)} & A\vec{\mathbf{p}}_{\mathbf{1}}{}^{(2)} & A\vec{\mathbf{p}}_{\mathbf{2}}{}^{(2)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1\vec{\mathbf{p}}_{\mathbf{1}}{}^{(1)} & \lambda_2\vec{\mathbf{p}}_{\mathbf{1}}{}^{(2)} & \vec{\mathbf{p}}_{\mathbf{1}}{}^{(2)} + \lambda_2\vec{\mathbf{p}}_{\mathbf{2}}{}^{(2)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{p}}_{\mathbf{1}}{}^{(1)} & \vec{\mathbf{p}}_{\mathbf{1}}{}^{(2)} & \vec{\mathbf{p}}_{\mathbf{2}}{}^{(2)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \\ &= P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので，

$$P^{-1}AP = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \quad (\text{Jordan 標準形})$$

となる．

例 2.$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 7 & 6 \\ 0 & -6 & -5 \end{pmatrix}$ のとき

- $\underline{A \text{ の固有値}}$:

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 7 & -6 \\ 0 & 6 & \lambda + 5 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)\begin{vmatrix} \lambda - 7 & -6 \\ 6 & \lambda + 5 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)^3 \end{aligned}$$

より

$$\lambda_1 = 1 \quad (\text{重複度 } 3)$$

- $\underline{V(\lambda_1)}$:

$$1I - A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -6 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より

$$
\begin{aligned}
(1I-A)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{0}} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{0}} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y_2 + y_3 & = 0 \\ 0 & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ -t \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s, t \text{は任意})
\end{aligned}
$$

従って

$$
\dim_{\mathbb{C}} V(\lambda_1) = 2 < 3 = (\lambda_1 \text{の重複度})
$$

となって A は対角化可能でない.

- $\underline{\mathrm{Ker}\left((A-\lambda_1 I)^2\right)}$:

$$
(A-1I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & -6 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & -6 & -6 \end{pmatrix} = O
$$

より

$$
\mathrm{Ker}\left((A-\lambda_1 I)^2\right)(= W(\lambda_1)) = \mathbb{C}^3
$$

従って

$$
V(\lambda_1) \subsetneq W(\lambda_1)
$$

となる. このときは $\mathrm{Ker}\left((A-\lambda_1 I)^2\right) \backslash V(\lambda_1) \ni \vec{\mathbf{p}}_3$ を 1 つとり $(A-\lambda_1 I)\vec{\mathbf{p}}_3 = \vec{\mathbf{p}}_2$ とおくと $\vec{\mathbf{p}}_2 \in V(\lambda_1) \backslash \left\{\vec{\mathbf{0}}\right\}$ となる．今,

$$
\dim_{\mathbb{C}} V(\lambda_1) = 2
$$

なので

$$
V(\lambda_1) = \left\langle \vec{\mathbf{p}}_1, \vec{\mathbf{p}}_2 \right\rangle_{\mathbb{C}}
$$

となる $\vec{\mathbf{p}}_1$ を 1 つとる．すると $\vec{\mathbf{p}}_1, \vec{\mathbf{p}}_2, \vec{\mathbf{p}}_3$ は 1 次独立となり

$$
\begin{aligned}
A\vec{\mathbf{p}}_1 &= \lambda_1 \vec{\mathbf{p}}_1 && \left(V(\lambda_1) = \left\langle \vec{\mathbf{p}}_1, \vec{\mathbf{p}}_2 \right\rangle_{\mathbb{C}}\right) \\
A\vec{\mathbf{p}}_2 &= \lambda_1 \vec{\mathbf{p}}_2 && \left(V(\lambda_1) = \left\langle \vec{\mathbf{p}}_1, \vec{\mathbf{p}}_2 \right\rangle_{\mathbb{C}}\right) \\
A\vec{\mathbf{p}}_3 &= \vec{\mathbf{p}}_2 + \lambda_1 \vec{\mathbf{p}}_3 && (\vec{\mathbf{p}}_2 = (A-\lambda_1 I)\vec{\mathbf{p}}_3)
\end{aligned}
$$

となるので，$P = \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{p}}_1 & \vec{\mathbf{p}}_2 & \vec{\mathbf{p}}_3 \end{pmatrix}$ は正則で，この P によって

$$
\begin{aligned}
AP &= A\begin{pmatrix} \vec{\mathbf{p}}_1 & \vec{\mathbf{p}}_2 & \vec{\mathbf{p}}_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A\vec{\mathbf{p}}_1 & A\vec{\mathbf{p}}_2 & A\vec{\mathbf{p}}_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1\vec{\mathbf{p}}_1 & \lambda_1\vec{\mathbf{p}}_2 & \vec{\mathbf{p}}_2 + \lambda_1\vec{\mathbf{p}}_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{p}}_1 & \vec{\mathbf{p}}_2 & \vec{\mathbf{p}}_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$= P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので,

$$P^{-1}AP = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{(Jordan 標準形)}$$

を得る．今の場合 $\vec{\mathbf{p_3}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ととると $\vec{\mathbf{p_2}} = (A - 1I)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$ となり $\vec{\mathbf{p_1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ととればよい．

例 3.$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -6 & -1 & -1 \\ -5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ のとき

- $\underline{A\text{ の固有値}}$:

$$\begin{aligned}
\det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda + 2 & -1 & -2 \\ 6 & \lambda + 1 & 1 \\ 5 & -3 & \lambda - 6 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda + 2)(\lambda + 1) + 36 - 5 - \{-10(\lambda + 1) - 6(\lambda - 6) - 3(\lambda + 2)\} \\
&= \lambda^3 - 3\lambda^2 - 16\lambda - 12 + 31 + 19\lambda - 20 = (\lambda - 1)^3
\end{aligned}$$

より

$$\lambda_1 = 1 \quad (\text{重複度 } 3)$$

- $\underline{V(\lambda_1)}$:

$$\begin{aligned}
1I - A &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 6 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 5 & 6 \\ 5 & -3 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 3 & -1 & -2 \\ 5 & -3 & -5 \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & -16 & -20 \\ 0 & -28 & -35 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} \\ 0 & -28 & -35 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
(1I - A)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{0}} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{0}} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 - \frac{1}{4}y_3 & = 0 \\ y_2 + \frac{5}{4}y_3 & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s}{4} \\ -\frac{5}{4}s \\ s \end{pmatrix} = \frac{s}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (s\text{は任意})
\end{aligned}$$

従って

$$V(\lambda_1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}}$$

で

$$\dim_{\mathbb{C}} V(\lambda_1) = 1 < 3 = \left(\lambda_1 \text{の重複度}\right)$$

となるので A は対角化可能でない.

- $\underline{\mathrm{Ker}\left((A-\lambda_1 I)^2\right)}$:

$$(A-1I)^2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -6 & -2 & -1 \\ -5 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -6 & -2 & -1 \\ -5 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 3 \\ 35 & -5 & -15 \\ -28 & 4 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{aligned}
(A-1I)^2\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{0}} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{0}} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 - \frac{1}{7}y_2 - \frac{3}{7}y_3 & = 0 \\ 0 & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7}s + \frac{3}{7}t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s}{7} \\ s \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = \frac{s}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \left(s, t\text{は任意}\right)
\end{aligned}$$

従って

$$\mathrm{Ker}\left((A-\lambda_1 I)^2\right) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}}$$

で

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ker}\left((A-\lambda_1 I)^2\right) = 2$$

で全体ではない.

- $\underline{\mathrm{Ker}\left((A-\lambda_1 I)^3\right)}$:

$$(A-1I)^3 = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 3 \\ 35 & -5 & -15 \\ -28 & 4 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -6 & -2 & -1 \\ -5 & 3 & 5 \end{pmatrix} = O$$

となって

$$\mathrm{Ker}\left((A-\lambda_1 I)^3\right)(= W(\lambda_1)) = \mathbb{C}^3$$

従って

$$V(\lambda_1) \subsetneq \mathrm{Ker}\left((A-\lambda_1 I)^2\right) \subsetneq \mathrm{Ker}\left((A-\lambda_1 I)^3\right) = W(\lambda_1) = \mathbb{C}^3$$

となる．このときは $\mathrm{Ker}\left((A-\lambda_1 I)^3\right) \backslash \mathrm{Ker}\left((A-\lambda_1 I)^2\right) \ni \vec{\mathbf{p}}_3$ を 1 つとり

$$(A-\lambda_1 I)\vec{\mathbf{p}}_3 = \vec{\mathbf{p}}_2$$

$$(A-\lambda_1 I)^2\vec{\mathbf{p_3}} = (A-\lambda_1 I)\vec{\mathbf{p_2}} = \vec{\mathbf{p_1}}$$

とおくと

$$\vec{\mathbf{p_2}} \in \mathrm{Ker}\left((A-\lambda_1 I)^2\right)\backslash V(\lambda_1)$$
$$\vec{\mathbf{p_1}} \in V(\lambda_1)\backslash\left\{\vec{\mathbf{0}}\right\}$$

となって $\vec{\mathbf{p_1}}, \vec{\mathbf{p_2}}, \vec{\mathbf{p_3}}$ は 1 次独立となる．このとき

$$\begin{aligned} A\vec{\mathbf{p_1}} &= \lambda_1\vec{\mathbf{p_1}} \\ A\vec{\mathbf{p_2}} &= \vec{\mathbf{p_1}} + \lambda_1\vec{\mathbf{p_2}} \\ A\vec{\mathbf{p_3}} &= \vec{\mathbf{p_2}} + \lambda_1\vec{\mathbf{p_3}} \end{aligned}$$

となるので，$P = \begin{pmatrix}\vec{\mathbf{p_1}} & \vec{\mathbf{p_2}} & \vec{\mathbf{p_3}}\end{pmatrix}$ は正則で

$$\begin{aligned} AP &= \begin{pmatrix}A\vec{\mathbf{p_1}} & A\vec{\mathbf{p_2}} & A\vec{\mathbf{p_3}}\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\lambda_1\vec{\mathbf{p_1}} & \vec{\mathbf{p_1}}+\lambda_1\vec{\mathbf{p_2}} & \vec{\mathbf{p_2}}+\lambda_1\vec{\mathbf{p_3}}\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\vec{\mathbf{p_1}} & \vec{\mathbf{p_2}} & \vec{\mathbf{p_3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1\end{pmatrix} \\ &= P\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad \text{(Jordan 標準形)}$$

を得る．

注 3 × 3 行列で対角化できない patterns は例 1,2,3 のいずれかになる．

1. 固有値が λ_1 (重複度 1), λ_2 (重複度 2) で
$$V(\lambda_2) \subsetneq \mathrm{Ker}\left((A-\lambda_2 I)^2\right) = W(\lambda_2)$$
2. 固有値が λ_1 (重複度 3) で
$$V(\lambda_1) \subsetneq \mathrm{Ker}\left((A-\lambda_1 I)^2\right) = W(\lambda_1) = \mathbb{C}^3$$
3. 固有値が λ_1 (重複度 3) で
$$V(\lambda_1) \subsetneq \mathrm{Ker}\left((A-\lambda_1 I)^2\right) \subsetneq \mathrm{Ker}\left((A-\lambda_1 I)^3\right) = W(\lambda_1) = \mathbb{C}^3$$

18 射影行列を利用した行列の指数関数の計算

$n \times n$ 行列 A の相異なる固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$，各 λ_i の重複度を m_i $(m_1 + \cdots + m_r = n)$ とするとき $(\det(\lambda I - A) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{m_r})$，$\lambda_i$ に対する一般化された固有空間

$$W(\lambda_i) = \left\{\vec{\mathbf{y}} \in \mathbb{C}^n \mid \text{ある自然数}N\left(=m_i\text{でよい}\right)\text{に対して}(A-\lambda_i)^N\vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{0}}\right\}(\mathrm{Ker}\,((A-\lambda_i I)^{m_i}))$$

に対して

$$\dim_{\mathbb{C}} W(\lambda_i) = m_i$$
$$\mathbb{C}^n = W(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus W(\lambda_r)$$

となった．これは「各 $\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{C}^n$ が

$$\vec{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{r} \vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{i}} \quad \left(\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{i}} \in W(\lambda_i)\right)$$

と唯一通りに表される」を意味する．そこで

$$\mathbb{C}^n \ni \vec{\mathbf{x}} \longmapsto \vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{i}} \in W(\lambda_i)$$

という写像をP_iとすると P_i は線形写像となり $n \times n$ 行列で表されて

$$\begin{cases} \mathrm{rank}\,(P_i) = m_i \\ P_i^2 = P_i \quad \left(\because \vec{\mathbf{x}} \overset{P_i}{\longmapsto} \vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{i}} = \vec{\mathbf{0}} + \cdots + \vec{\mathbf{0}} + \vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{0}} + \cdots + \vec{\mathbf{0}} \overset{P_i}{\longmapsto} \vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{i}}\right) \\ \vec{\mathbf{x}} = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{i}} = \sum_{i=1}^{r} \left(P_i \vec{\mathbf{x}}\right) = \left(\sum_{i=1}^{r} P_i\right)\vec{\mathbf{x}} \text{より} \sum_{i=1}^{r} P_i = I \end{cases}$$

この P_i を $W(\lambda_i)$ への射影行列という．P_i を使うと e^{At} を簡単に求めることができる:

$$\begin{aligned} e^{At}\vec{\mathbf{x}} &= e^{At}\left(\sum_{i=1}^{r} P_i \vec{\mathbf{x}}\right) = \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i I t + (A - \lambda_i I)t} P_i \vec{\mathbf{x}} \\ &= \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i t} e^{(A-\lambda_i I)t} P_i \vec{\mathbf{x}} \\ &= \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i t}\left\{I + \frac{(A-\lambda_i I)}{1!}t + \frac{(A-\lambda_i I)^2}{2!}t^2 + \cdots\right\} P_i \vec{\mathbf{x}} \\ &= \sum_{i=1}^{r} \left(e^{\lambda_i t}\left\{I + \frac{(A-\lambda_i I)}{1!}t + \cdots + \frac{(A-\lambda_i I)^{m_i-1}}{(m_i-1)!}t^{m_i-1}\right\} P_i\right)\vec{\mathbf{x}} \quad \left(P_i\vec{\mathbf{x}} \in W(\lambda_i)\text{なので}(A-\lambda_i I)^{m_i}\left(P_i\vec{\mathbf{x}}\right) = \vec{\mathbf{0}}\right) \end{aligned}$$

となるので，P_i が求まれば

$$e^{At} = \sum_{i=1}^{r} e^{\lambda_i t}\left\{I + \frac{(A-\lambda_i I)}{1!}t + \cdots + \frac{(A-\lambda_i I)^{m_i-1}}{(m_i-1)!}t^{m_i-1}\right\} P_i$$

と求まる．

18.1 P_i の求め方

方針 A の固有多項式

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$$

を $\Phi(\lambda)$ と書いて

$$\frac{1}{\Phi(\lambda)} = \frac{1}{(\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}}$$

を部分分数に分解する:

$$\frac{1}{\Phi(r)} = \sum_{i=1}^{r} \frac{\big(\lambda の (m_i - 1) 次式\big)}{(\lambda - \lambda_i)^{m_i}}$$

とし，$f_i(\lambda) = \big(\lambda の (m_i - 1) 次式\big)$ とおく．この両辺に $\Phi(\lambda)$ をかけると

$$1 = \sum_{i=1}^{r} f_i(\lambda)(\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_{i-1})^{m_{i-1}} (\lambda - \lambda_{i+1})^{m_{i+1}} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r} \quad \big(\lambda の多項式\big)$$

となる．この λ に A を代入すると

$$I = \sum_{i=1}^{r} f_i(A)(A - \lambda_1 I)^{m_1} \cdots (A - \lambda_{i-1} I)^{m_{i-1}} (A - \lambda_{i+1} I)^{m_{i+1}} \cdots (A - \lambda_r I)^{m_r}$$

となる．このとき 主張

$$P_i = f_i(A)(A - \lambda_1 I)^{m_1} \cdots (A - \lambda_{i-1} I)^{m_{i-1}} (A - \lambda_{i+1} I)^{m_{i+1}} \cdots (A - \lambda_r I)^{m_r}$$

となる．

$\because$

$$\begin{aligned} &(A - \lambda_i I)^{m_i} \{f_i(A)(A - \lambda_1 I)^{m_1} \cdots (A - \lambda_{i-1} I)^{m_{i-1}} (A - \lambda_{i+1} I)^{m_{i+1}} \cdots (A - \lambda_r I)^{m_r}\}\vec{\mathbf{x}} \\ =& f_i(A)\Phi(A)\vec{\mathbf{x}} \quad \big(\text{Cayley-Hamilton の定理より} \Phi(A) = 0\big) \\ =& \vec{\mathbf{0}} \end{aligned}$$

より

$$f_i(A)(A - \lambda_1 I)^{m_1} \cdots (A - \lambda_{i-1} I)^{m_{i-1}} (A - \lambda_{i+1} I)^{m_{i+1}} \cdots (A - \lambda_r I)^{m_r} \vec{\mathbf{x}} \in W(\lambda_i)$$

となり

$$I\vec{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{r} \{f_i(A)(A - \lambda_1 I)^{m_1} \cdots (A - \lambda_{i-1} I)^{m_{i-1}} (A - \lambda_{i+1} I)^{m_{i+1}} \cdots (A - \lambda_r I)^{m_r}\}\vec{\mathbf{x}}$$

より

$$\sum_{i=1}^{r} \{f_i(A)(A - \lambda_1 I)^{m_1} \cdots (A - \lambda_{i-1} I)^{m_{i-1}} (A - \lambda_{i+1} I)^{m_{i+1}} \cdots (A - \lambda_r I)^{m_r}\} = I$$

と分解されるので

$$\{f_i(A)(A - \lambda_1 I)^{m_1} \cdots (A - \lambda_{i-1} I)^{m_{i-1}} (A - \lambda_{i+1} I)^{m_{i+1}} \cdots (A - \lambda_r I)^{m_r}\} = P_i$$

となる． $\square$

例 $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ のとき

$$\Phi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 3 \\ -2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 4) - (-3) \cdot 2 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

より A の固有値は

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{\Phi(\lambda)} = \frac{1}{(\lambda-1)(\lambda-2)} = \frac{a}{\lambda-1} + \frac{b}{\lambda-2} \quad (a, b\text{は定数})$$

とおくと

$$1 = a(\lambda-2) + b(\lambda-1) = (a+b)\lambda + (-2a-b)$$

より

$$\begin{cases} a+b=0 \to b=-a \\ -2a-b=1 \to -2a+a=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}$$

となって

$$\frac{1}{\Phi(\lambda)} = \frac{-1(=f_1(\lambda))}{\lambda-1} + \frac{1(=f_2(\lambda))}{\lambda-2}$$

と分解される．

射影行列を求める．

$$\begin{cases} P_1 = f_1(A)(A-\lambda_2 I) = (-1)(A-2I) = 2I - A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \\ P_2 = f_2(A)(A-\lambda_1 I) = 1(A-1I) = -\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \end{cases} \qquad (P_2 = I - P_1\text{としてもよい})$$

従って

$$\begin{aligned} e^{At} &= \sum_{i=1}^{2} e^{\lambda_i t}\{I+O\}P_1 \\ &= e^{1t}IP_1 + e^{2t}IP_2 \\ &= e^{t}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + e^{2t}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(すると $\vec{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ に対する

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t} = A\vec{\mathbf{x}} \\ \vec{\mathbf{x}}(0) = \vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{0}} \end{cases}$$

の解が

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = e^{At}\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{0}} = \left\{ e^{t}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + e^{2t}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \right\}\vec{\mathbf{x}}_{\mathbf{0}}$$

と求まる)

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ の e^{At} を求める．

- A の固有値:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 \\ -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-3) - 1(-1) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2$$

より

$$\lambda_1 = 2 \quad (\text{重複度 } 2)$$

$$\frac{1}{\Phi(\lambda)} = \frac{1(= f_1(\lambda))}{(\lambda-2)^2}$$

$$P_1 = f_1(A)I = I$$

$$\begin{aligned}
e^{At} &= e^{\lambda_1 It} e^{(A-\lambda_1 I)t} \\
&= e^{\lambda_1 t}\left\{I + \frac{(A-\lambda_1 I)}{1!}t + \frac{(A-\lambda_1 T)^2(= O)}{2!} + \cdots\right\}P_1 \\
&= e^{2t}\left\{I + \frac{(A-2I)}{1!}t\right\} \\
&= e^{2t}\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}t\right\} \\
&= e^{2t}\begin{pmatrix}1-t & -t\\ t & 1+t\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

例 $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & 1 & -3\\ -2 & 0 & 3\end{pmatrix}$(前章の例 1) のとき

$$\Phi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda-1)(\lambda-2)^2 \quad \bigl(\lambda_1 = 1\,(\text{重複度 }1), \lambda_2 = 2\,(\text{重複度 }2)\bigr)$$

となったので,

$$\frac{1}{\Phi(\lambda)} = \frac{a(= f_1(\lambda))}{\lambda-1} + \frac{b\lambda + c(= f_2(\lambda))}{(\lambda-2)^2}$$

とおくと

$$1 = a(\lambda-2)^2 + (b\lambda+c)(\lambda-1) = (a+b)\lambda^2 + (-4a-b+c)\lambda + (4a-c)$$

より

$$\begin{cases} a+b = 0 \to b = -a \\ -4a-b+c = 0 \to -3a+c = 0, c = 3a \\ 4a-c = 1 \to a = 1, b = -a = -1, c = 3a = 3 \end{cases}$$

従って

$$\begin{cases} f_1(\lambda) = 1 \\ f_2(\lambda) = -\lambda+3 \end{cases}$$

となる．すると

$$\begin{aligned}
P_1 &= f_1(A)(A-\lambda_2 I)^2 \qquad\qquad (f_1(A) = I) \\
&= \left(\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & 1 & -3\\ -2 & 0 & 3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\right)^2 \\
&= \begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 3 & -1 & -3\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 3 & -1 & -3\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}0 & -2 & -2\\ 0 & 4 & 6\\ 0 & -2 & -3\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$P_2 = f_2(A)(A-\lambda I) \quad (f_2(A) = -A+3I)$$

を計算してもよいが

$$P_1 + P_2 = I$$

より

$$P_2 = I - P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

従って

$$\begin{aligned}
e^{At} &= e^{\lambda_1 t}\{I+O\}P_1 + e^{\lambda_2 t}\left\{I + \frac{(A-\lambda_2 t)}{1!}P_2\right\} \\
&= e^t\begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} + e^{2t}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}t\right\}P_2 \\
&= e^t\begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} + e^{2t}\begin{pmatrix} 1-t & t & 2t \\ 3t & 1-t & -3t \\ -2t & 0 & 1+t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\
&= e^t\begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} + e^{2t}\begin{pmatrix} 1-t & 2-t & 3-t \\ 3t & -3+3t & -6+3t \\ -2t & 2-2t & 4-2t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

19　線型 ODE のまとめ

定数係数n階線型 ODE $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = Q(t)$	$\subset$	定数係数連立線型 ODE $\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t} = A\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{b}}(t) \quad \big(A = (a_{ij})$は定数行列$\big)$
$\cap$		$\cap$
n階線型 ODE $y^{(n)} + P_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + P_1(t)y' + P_0(t)y = Q(t)$	$\subset$	連立線型 ODE $\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t} = A(t)\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{b}}(t)$

ここで

$$\vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & 0 & 1 \\ -P_0(t) & \cdots & \cdots & \cdots & -P_{n-1}(t) \end{pmatrix}$$

これらは (右辺) を 0 にした同次方程式の解空間の基底[*2] が求まれば定数変化法で一般解が求まる．
$\boxed{\text{左上}}$では特性方程式

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

の解が求まればよい．$\boxed{\text{右上}}$では A の固有値，(一般化された) 固有空間が分かればよい．

$$\left(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0\right)y = 0$$

[*2] 上の行では求め方があるが，下の行については一般論はない

の特性方程式

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

は $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \text{\Large 0} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \text{\Large 0} & & & 0 \\ -a_0 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ に対する固有方程式

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

に他ならない.

$\because$ $\lambda I - A = B = \left(b_{ij}\right)$ とおく.

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & & & \text{\Large 0} \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & \lambda & -1 \\ a_0 & \cdots & \cdots & a_{n-2} & \lambda \pm a_{n-1} \end{vmatrix} \quad (\text{第}n\text{行に関して展開})$$

$$= b_{n1}\tilde{b_{n1}} + \cdots + b_{nn}\tilde{b_{nn}} \quad \left(\tilde{b_{ij}} = (-1)^{i+j}\det\left(B\text{から i 行と j 列を除いたもの}\right)\right)$$

$$= a_0(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} -1 & & & \text{\Large 0} \\ \lambda & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & \lambda & -1 \end{vmatrix} + a_1(-1)^{n+2}\begin{vmatrix} \lambda & & & & \text{\Large 0} \\ & -1 & & & \\ & \lambda & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & \lambda & -1 \end{vmatrix}$$

$$+ \cdots + a_{n-2}(-1)^{n+(n-1)}\begin{vmatrix} \lambda & -1 & & & \text{\Large 0} \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & -1 & \\ & & & \lambda & \\ \text{\Large 0} & & & & -1 \end{vmatrix} + (\lambda + a_{n-1})(-1)^{n+n}\begin{vmatrix} \lambda & -1 & & \text{\Large 0} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ \text{\Large 0} & & & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{n-2}\lambda^{n-2} + (\lambda + a_{n-1})\lambda^{n-1}$$

$$= \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

□

20　ODE の解の存在と一意性

目標 未知関数

$$\begin{array}{cccc} \vec{\mathbf{x}}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & \Psi & & \Psi \\ & t & \longmapsto & \vec{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

に関する ODE

$$(*) \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t} = f\big(t, \vec{\mathbf{x}}(t)\big) \\ \vec{\mathbf{x}}(t_0) = \vec{\mathbf{x}}_0 \end{cases} \qquad (f: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n)$$

に対して f に「適切な条件」(Lipschitz 条件) を課したとき $(*)$ の解が唯一つ存在を言う．
まず，$(*)$ を書き直す:$f\big(t, \vec{\mathbf{v}}\big)$ を連続としたとき

$$\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(t) \text{が} (*) \text{の解} \Leftrightarrow \vec{\mathbf{x}}(t) \text{は} (**) : \vec{\mathbf{x}}(t) = \vec{\mathbf{x}}_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, \vec{\mathbf{x}}(s)\big)\,\mathrm{d}s \text{ を満たす}$$

$\because$ $\Rightarrow$: $\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}s}(s)$ を $s = t_0$ から $s = t$ まで積分すると

$$\vec{\mathbf{x}}(t) - \vec{\mathbf{x}}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}s}(s)\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} f\big(s, \vec{\mathbf{x}}(s)\big)\,\mathrm{d}s \quad (\because (*))$$

となって $(**)$ を満たす．
$\Leftarrow$:

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = \vec{\mathbf{x}}_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, \vec{\mathbf{x}}(s)\big)\,\mathrm{d}s$$

の両辺を t で微分すると

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{t_0}^{t} f\big(s, \vec{\mathbf{x}}(s)\big)\,\mathrm{d}s\right) = f\big(t, \vec{\mathbf{x}}(t)\big).$$

また

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = \vec{\mathbf{x}}_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, \vec{\mathbf{x}}(s)\big)\,\mathrm{d}s$$

の両辺に $t = t_0$ を代入:

$$\vec{\mathbf{x}}(t_0) = \vec{\mathbf{x}}_0 + \int_{t_0}^{t_0} f\big(s, \vec{\mathbf{x}}(s)\big)\,\mathrm{d}s = \vec{\mathbf{x}}_0$$

従って $\vec{\mathbf{x}}(t)$ は $(*)$ を満たす． □

そこで，ベクトル値関数 $\vec{\mathbf{x}}$ に対して新たな関数 $\Phi\big(\vec{\mathbf{x}}\big)$ を

$$\big(\Phi\big(\vec{\mathbf{x}}\big)\big)(t) = \vec{\mathbf{x}}_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, \vec{\mathbf{x}}(s)\big)\,\mathrm{d}s$$

で定めると

$$\vec{\mathbf{x}} \text{が} (**) \text{を満たす} \Leftrightarrow \Phi\big(\vec{\mathbf{x}}\big) = \vec{\mathbf{x}} \text{となる}$$

$\Phi\big(\vec{\mathbf{x}}\big) = \vec{\mathbf{x}}$ を満たすような $\vec{\mathbf{x}}$ を写像 Φ の不動点(fixed point) という．

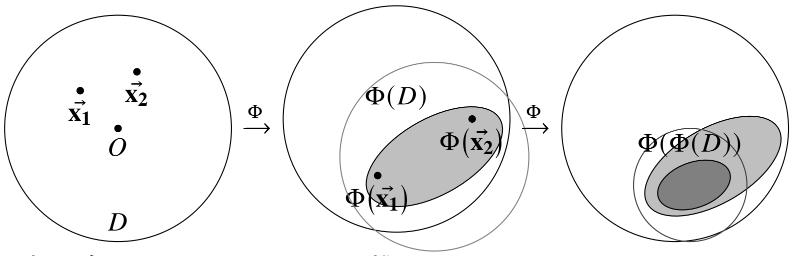
20.1　Φ の不動点はどうすれば見つかるか

例　$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ とし，

$$\begin{cases} D = \left\{\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 \mid \left|\vec{\mathbf{x}} \leq 1\right|\right\} \text{に対して} \Phi(D) \subseteq D \\ \text{ある定数} 0 < c < 1 \text{があって任意の} \vec{\mathbf{x}}_1, \vec{\mathbf{x}}_2 \in D \text{に対して} \left|\Phi(\vec{\mathbf{x}}_1) - \Phi(\vec{\mathbf{x}}_2)\right| \leq \left|\vec{\mathbf{x}}_1 - \vec{\mathbf{x}}_2\right| \end{cases}$$

を満たすとする (このような $\Phi : D \to D$ を縮小写像という)．このとき

$$D \xrightarrow{\Phi} \Phi(D) \xrightarrow{\Phi} \Phi(\Phi(D))\left(\phi^2(D)\right) \xrightarrow{\Phi} \cdots$$

を繰り返すと 

$\xrightarrow{\Phi}$ $\cdots(\Phi(D)$ は半径 $c(<1)$ のある円板に含まれる ($\Phi(0)$ からの距離 $\leq c$)) となって $c^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ なので $\Phi^n(D)$ は $n \to \infty$ で D 内のある 1 点 $\vec{\mathbf{x}}_\infty$ に縮む．この点 $\vec{\mathbf{x}}_\infty \in D$ に関しては $\Phi(\vec{\mathbf{x}}_\infty) = \vec{\mathbf{x}}_\infty$ となるので，

$\Phi : D \to D$ が縮小写像なら，Φ の不動点 $\in D$ が唯一つ存在となる．

以上のことを $\mathbb{R}^2$ の代わりに関数のなす空間に対して行いたい:

設定　閉区間 $I \subset \mathbb{R}$ に対して

$$C^0(I, \mathbb{R}^n) = \left\{\vec{\mathbf{x}} : I \to \mathbb{R} \mid \vec{\mathbf{x}} \text{の各成分は連続関数}\right\}$$

とおき，(注 これは関数の和とスカラー倍に関して ∞ 次元のベクトル空間をなす)

$\vec{\mathbf{x}} \in C^0(I, \mathbb{R})$ の「長さ」(C^0-norm) を

$$\|\vec{\mathbf{x}}\| = \max_{t \in I} \left|\vec{\mathbf{x}}(t)\right|$$

で定める ($1 \cdot 1$ は $\mathbb{R}^n$ での長さ)

このとき $C^0(I, \mathbb{R}^n)$ の任意の Cauthy 列($\|\varphi_m - \varphi_l\| \xrightarrow[m,l\to\infty]{} 0$ となる $\{\varphi_m\} \underset{m=1,2}{\subset} C^0(I, \mathbb{R}^n)$) はある $\mathit{\Phi}_\infty \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ に収束する (これを $C^0(I, \mathbb{R}^n)$ の完備性という)

$\because$

$$\begin{aligned} \|\varphi_m - \varphi_l\| \xrightarrow[m,l\to\infty]{} 0 &\Rightarrow \text{各} t \in I \text{で} |\varphi_m(t) - \varphi_l(t)| \xrightarrow[m,l\to\infty]{} 0 \\ &\Rightarrow \text{各} t \in I \text{で} \{\varphi_m(t)\}_{m=1,2} \text{はある} r_\infty \in \mathbb{R}^n \text{に収束} \qquad \left(C^0 \text{の完備性}\right) \end{aligned}$$

この r_∞ を $\varphi_\infty(t)$ を書くと $\varphi_m(t)$ は $\varphi_\infty(t)$ に I 上一様収束する ($\sup_{t\in I} |\varphi_m(t) - \varphi_\infty(t)| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ となる)

このとき「連続関数の一様収束極限は連続関数になる」により φ_∞ は I 上で連続．すなわち $\varphi_\infty \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ となる． □

20.2 f に課す条件 (Lipschitz 条件)

定義 $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \left(\ni (t, \vec{\mathbf{v}})\right)$ に対して $f(t, \vec{\mathbf{v}})$ が R 上 $\vec{\mathbf{v}}$ に関して (一様)Lipschitz 条件を満たす.
$\Leftrightarrow$ ある定数 $k > 0$ (Lipschitz constant という) があって各 $(t, \vec{\mathbf{v}}_1), (t, \vec{\mathbf{v}}_2)$ に対して

$$\left|f\left(t, \vec{\mathbf{v}}_1 - f\left(t, \vec{\mathbf{v}}_2\right)\right)\right| \leq k\left|\vec{\mathbf{v}}_1 - \vec{\mathbf{v}}_2\right|$$

を満たす (注 (右辺) は t に依らない)

例 $n = 1, R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ が有界閉集合で f が R 上 C^1-級
$\Rightarrow t$ を固定すると平均値の定理により

$$\frac{f\left(t, \vec{\mathbf{v}}_1 - f\left(t, \vec{\mathbf{v}}_2\right)\right)}{\vec{\mathbf{x}}_1 - \vec{\mathbf{x}}_2} = \frac{\partial f}{\partial v}(t, w)$$

となる．点 w が v_1 と v_2 の間に少なくとも 1 つあるので

$$\max_{(t,v)\in R}\left|\frac{\partial f}{\partial v}(t, v)\right| = k$$

とおくと

$$|f(t, v_1) - f(t, v_2)| \leq k|v_1 - v_2|$$

となって f は R 上 v に関して Lipschitz 条件を満たす.

このとき

定理 $R = \left\{(t, \vec{\mathbf{v}}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid |t - t_0| \leq a, \left|\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{x}}_0\right| \leq b\right\}$(有界閉集合) とし,

$$\begin{array}{cccc} f: & R & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & (t, \vec{\mathbf{v}}) & \longmapsto & f(t, \vec{\mathbf{v}}) \end{array}$$

は連続かつ R 上 $\vec{\mathbf{v}}$ について Lipschitz 条件を満たすとする．ここで $f(t, \vec{\mathbf{v}}) \leq M \quad \left((t, \vec{\mathbf{v}}) \in R\right)$ として

$$\alpha = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}(> 0)$$

とおくと，$[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ 上で定義された

$$(*)\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t} = f\left(t, \vec{\mathbf{x}}(t)\right) \\ \vec{\mathbf{x}}(t_0) = \vec{\mathbf{x}}_0 \end{cases}$$

の解 $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(t)$ が唯一つ存在

注 (t を $[t_0 - a, t_0 + a]$ ではなく $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ 上に制限する理由)

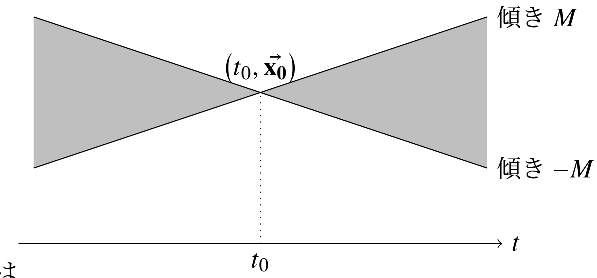
$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t} = f(t, \vec{\mathbf{x}})$$

より

$$\left|\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t}\right| = \left|f(t, \vec{\mathbf{x}})\right| \leq M \quad \left(\left|\text{傾き}\right| \leq M\right)$$

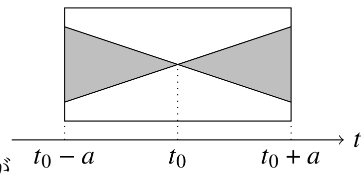
となるので

$$\left|\vec{\mathbf{x}}(t)-\vec{\mathbf{x}}(t_0)\right|=\left|\int_{t_0}^{t}\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}s}(s)\,\mathrm{d}s\right|\leq\left|\int_{t_0}^{t}M\,\mathrm{d}s\right|=M|t-t_0|$$

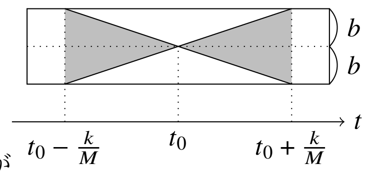


となって解は の中に入る．

ここで R の形が



ならよいが



なら t が

$$|t-t_0|\leq\frac{b}{M}$$

を超えると解 $\vec{\mathbf{x}}(t)$ が R の外に出る可能性があり，R の外では Lipschitz 条件が保証されないので何も言えなくなる．

20.2.1　定理を示す

$\because$ まず，十分小な $\varepsilon>0$ を固定 (実は $\frac{1}{2k}-\varepsilon>0$ ならよい)

$$\hat{\alpha}=\min\left\{a,\frac{b}{M},\frac{1}{2k}-\varepsilon\right\},\qquad\left(\frac{1}{2k}-\varepsilon\text{は}\Phi\text{を縮小写像にするため}\right)$$
$$I=[t_0-\hat{\alpha},t_0+\hat{\alpha}],$$
$$D=\left\{\vec{\mathbf{x}}\in C^0(I,\mathbb{R}^n)\mid\text{各}t\in I\text{に対して}\left|\vec{\mathbf{x}}(t)-\vec{\mathbf{x}}_\mathbf{0}\right|\leq b\right\}\subset C^0(I,\mathbb{R}^n)$$

とおき，(注 この D は $C^0(I,\mathbb{R}^n)$ の閉部分集合で，D 内の点列の $\lim t\subset D$ となる)

$$\big(\Phi(\vec{\mathbf{x}})\big)(t)=\vec{\mathbf{x}}_\mathbf{0}+\int_{t_0}^{t}f\big(s,\vec{\mathbf{x}}(s)\big)\,\mathrm{d}s$$

とする．このとき

claim 1 $\Phi(D)\subseteq D$

$\because$ $\vec{\mathbf{x}}\in D, t\in I$ に対して

$$\begin{aligned}\left|\big(\Phi(\vec{\mathbf{x}})\big)(t)-\vec{\mathbf{x}}_\mathbf{0}\right|&=\left|\int_{t_0}^{t}f\big(s,\vec{\mathbf{x}}(s)\big)\,\mathrm{d}s\right|\\&\leq\left|\int_{t_0}^{t}\left|f\big(s,\vec{\mathbf{x}}(s)\big)\right|\mathrm{d}s\right|\\&\leq\left|\int_{t_0}^{t}M\,\mathrm{d}s\right|\qquad(*)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq M|t-t_0| \\
&\leq M\hat{\alpha} \leq M\frac{b}{M} = b
\end{aligned}
$$

((∗) について

$\vec{\mathbf{x}} \in D, t \in I$ より

$$|s-t_0| \leq |t-t_0| \Rightarrow s \in I \Rightarrow \left|\vec{\mathbf{x}}(s) - \vec{\mathbf{x}}_0\right| \leq b$$

より

$$\left(s, \vec{\mathbf{x}}(s)\right) \in R$$

従って

$$\left|f\left(s, \vec{\mathbf{x}}(s)\right)\right| \leq M$$

) 従って $\Phi(D) \subseteq D$. □

claim 2 $\Phi : D \to D$ は縮小写像

∵ $\vec{\mathbf{x}}_1, \vec{\mathbf{x}}_2 \in D$ に対して

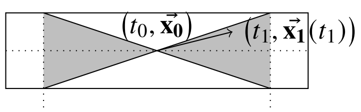
$$
\begin{aligned}
\left\|\Phi(\vec{\mathbf{x}}_1) - \Phi(\vec{\mathbf{x}}_2)\right\| &= \max_{t\in I}\left|\int_{t_0}^{t} f\left(s, \vec{\mathbf{x}}_1(s)\right) - f\left(s, \vec{\mathbf{x}}_2(s)\right) \mathrm{d}s\right| \\
&\leq \max_{t\in I}\left|\int_{t_0}^{t} \left|f\left(s, \vec{\mathbf{x}}_1(s)\right) - f\left(s, \vec{\mathbf{x}}_2(s)\right)\right| \mathrm{d}s\right| \\
&\leq \max_{t\in I}\left|\int_{t_0}^{t} k\left|\vec{\mathbf{x}}_1 - \vec{\mathbf{x}}_2(s)\right| \mathrm{d}s\right| && (f\text{-Lipschitz}) \\
&\leq k\left\|\vec{\mathbf{x}}_1 - \vec{\mathbf{x}}_2\right\|(I\text{の幅}) && \left(\left|\vec{\mathbf{x}}_1 - \vec{\mathbf{x}}_2(s)\right| < \left\|\vec{\mathbf{x}}_1 - \vec{\mathbf{x}}_2\right\|(s\text{によらない})\right) \\
&= 2k\hat{\alpha}\left\|\vec{\mathbf{x}}_1 - \vec{\mathbf{x}}_2\right\| && \left((I\text{の幅}) = 2\hat{\alpha}\right) \\
&= c\left\|\vec{\mathbf{x}}_1 - \vec{\mathbf{x}}_2\right\| && \left(2k\hat{\alpha} \leq 1 - 2k\varepsilon = c\text{とおく}\right)
\end{aligned}
$$

ここで $k > 0, \varepsilon > 0, \frac{1}{2k} - \varepsilon > 0$ より $0 < c < 1$ となるので Φ は縮小写像 □

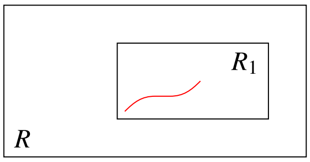
従って $C^0(I, \mathbb{R}^n)$ の完備性，$D \subset C^0(I, \mathbb{R}^n)$ が閉部分集合により，$\Phi : D \to D$ の不動点 $\vec{\mathbf{x}}_\infty \in D$ が唯一つ存在.

解の延長

$$\hat{\alpha} = \min\left\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{2k} - \varepsilon\right\} \lneq \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} = \alpha$$



のとき となる $(t_1, \vec{\mathbf{x}}_1(t_1))$ $\left(|t_1 - t_0| < \frac{1}{2k} - \varepsilon\right)$ を 1 つとり，この点を中心に



を考えて，上と同じ議論を行うと t_0 が t_1 に代わった分だけ，解 $\vec{\mathbf{x}}(t)$ の定義域が延びる．この操作を左右に有限回行うと $\frac{1}{2k} - \varepsilon$ で切られた分が回復できて $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ にまで解 $\vec{\mathbf{x}}(t)$ が延長できる. □

20.2.2　定理の適用例

$f\left(t, \vec{\mathbf{v}}\right) = A(t)\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{b}}(t) \quad \left(A(t) = \left(a_{ij}(t)\right) : n \times n\text{行列}, \vec{\mathbf{b}}(t)\text{の各成分が連続}\right) \Rightarrow f\text{は}R\text{上}\vec{\mathbf{v}}\text{に関して}$ Lipschitz

$\because$ t を固定．$A(t) \in \mathbb{C}^{n^2}$ と思ったときの norm

$$\|A(t)\| = \left(\sum_{i,j=1}^{n} \left|a_{ij}(t)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

を考え,

$$\max_{|t-t_0|\le a} \|A(t)\| = k$$

とおくと

$$\left|A(t)\vec{\mathbf{v}}\right| \le \|A(t)\|\left|\vec{\mathbf{v}}\right|$$

なので

$$\left|f\left(t, \vec{\mathbf{v}}_1\right) - f\left(t, \vec{\mathbf{v}}_2\right)\right| = \left|A(t)\vec{\mathbf{v}}_1 - A(t)\vec{\mathbf{v}}_2\right| \le \|A(t)\|\left|\vec{\mathbf{v}}_1 - \vec{\mathbf{v}}_2\right| \le k\left|\vec{\mathbf{v}}_1 - \vec{\mathbf{v}}_2\right|$$

□

従って

$$(*) \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t} = f\left(t, \vec{\mathbf{x}}(t)\right) \\ \vec{\mathbf{x}}(t_0) = \vec{\mathbf{x}}_0 \end{cases} \qquad (f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n)$$

の解の存在と一意性が成り立つ.

21　ODE の解の初期値に関する連続性

主張　$f\left(t, \vec{\mathbf{v}}\right) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が $R = \left\{\left(t, \vec{\mathbf{v}}\right) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid |t - t_0| \le a, \left|\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{x}}_0\right| \le b\right\}$ 上で連続かつ $\vec{\mathbf{v}}$ に関して Lipschitz(ある定数 $k > 0$ があって $\left(t, \vec{\mathbf{v}}_1\right), \left(t, \vec{\mathbf{v}}_2\right) \in R \Rightarrow \left|f\left(t, \vec{\mathbf{v}}_1 - f\left(t, \vec{\mathbf{v}}_2\right)\right)\right| \le k\left|\vec{\mathbf{v}}_1 - \vec{\mathbf{v}}_2\right|$) のとき

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t} = f\left(t, \vec{\mathbf{x}}(t)\right) \\ \vec{\mathbf{x}}(t_0) = \vec{\mathbf{x}}_0 \end{cases}$$

の (ただ一つの) 解を $\vec{\mathbf{x}}\left(t; \vec{\mathbf{x}}_0\right)$ と書くと $\vec{\mathbf{x}}\left(t; \vec{\mathbf{x}}_0\right)$ は $\vec{\mathbf{x}}_0$ に関して連続

準備　Gronwall の補題 定数 $C \ge 0, k > 0$ で，関数 $\varphi(t)$ が $t_0 \le t \le t_0 + a$ で連続で $\varphi(t) \ge 0$ となるとき，もし各 $t \in [t_0, t_0 + a]$ で

$$\varphi(t) \le C + k\int_{t_0}^{t} \varphi(s)\,\mathrm{d}s$$

を満たす.

$\Rightarrow$ 各 $t \in [t_0, t_0 + a]$ で

$$\varphi(t) \le Ce^{k(t-t_0)}$$

が成り立つ.

$\because$

$$\Phi(t) = C + k\int_{t_0}^{t} \varphi(s)\,\mathrm{d}s$$

とおくと

$$\Phi'(t) = k\varphi(t)$$

となり

$$\Phi'(t) = k\varphi(t) \le k\Phi(t)$$

となる．従って

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\Phi(t)e^{-k(t-t_0)}\right) &= \Phi'(t)e^{-k(t-t_0)} + \Phi(t)\left(e^{-k(t-t_0)}\right)' \qquad \left(\left(e^{-k(t-t_0)}\right)' = -ke^{-k(t-t_0)}\right)\\ &= e^{-k(t-t_0)}(\Phi'(t) - k\Phi(t)) \le 0\end{aligned}$$

となって $\Phi(t)e^{-k(t-t_0)}$ は単調減少となる．ゆえに

$$\Phi(t)e^{-k(t-t_0)} \le \Phi(t_0)e^{-k(t_0-t_0)} = \Phi(t_0) = C$$

となって

$$\Phi(t) \le Ce^{k(t-t_0)}$$

を得る．

主張を示す．

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t} &= f\left(t, \vec{\mathbf{x}}_0\right)\\ \vec{\mathbf{x}}(t_0) &= \vec{\mathbf{x}}_\mathbf{0}\end{cases} \Leftrightarrow \vec{\mathbf{x}}(t) - \vec{\mathbf{x}}_\mathbf{0} = \int_{t_0}^{t} f\left(s, \vec{\mathbf{x}}(s)\right)\mathrm{d}s$$

であった ($\because$ 前章) ので初期値が $\vec{\mathbf{x}}_\mathbf{i}$ の解 $\vec{\mathbf{x}}\left(t, \vec{\mathbf{x}}_\mathbf{i}\right)$ $(i = 1, 2)$ に対して

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{x}}\left(t; \vec{\mathbf{x}}_\mathbf{1}\right) - \vec{\mathbf{x}}\left(t; \vec{\mathbf{x}}_\mathbf{2}\right) &= \left(\vec{\mathbf{x}}_\mathbf{1} + \int_{t_0}^{t} f\left(s, \vec{\mathbf{x}}\left(s; \vec{\mathbf{x}}_\mathbf{1}\right)\right)\mathrm{d}s\right) - \left(\vec{\mathbf{x}}_\mathbf{2} + \int_{t_0}^{t} f\left(s, \vec{\mathbf{x}}\left(s; \vec{\mathbf{x}}_\mathbf{2}\right)\right)\mathrm{d}s\right)\\ &= \left(\vec{\mathbf{x}}_\mathbf{1} - \vec{\mathbf{x}}_\mathbf{2}\right) + \int_{t_0}^{t} \left\{f\left(s, \vec{\mathbf{x}}\left(s; \vec{\mathbf{x}}_\mathbf{1}\right)\right) - f\left(s, \vec{\mathbf{x}}\left(s; \vec{\mathbf{x}}_\mathbf{2}\right)\right)\right\}\mathrm{d}s\end{aligned}$$

となる．ここで

$\underline{t \ge t_0 \text{ のとき}}$

$$\begin{aligned}\left|\vec{\mathbf{x}}\left(t; \vec{\mathbf{x}}_\mathbf{1}\right) - \vec{\mathbf{x}}\left(t; \vec{\mathbf{x}}_\mathbf{2}\right)\right| &\le \left|\vec{\mathbf{x}}_\mathbf{1} - \vec{\mathbf{x}}_\mathbf{2}\right| + \int_{t_0}^{t} \left|f\left(s, \vec{\mathbf{x}}\left(s; \vec{\mathbf{x}}_\mathbf{1}\right)\right) - f\left(s, \vec{\mathbf{x}}\left(s; \vec{\mathbf{x}}_\mathbf{2}\right)\right)\right|\mathrm{d}s\\ &= C + k\int_{t_0}^{t} \left|\vec{\mathbf{x}}\left(s; \vec{\mathbf{x}}_\mathbf{1}\right) - \vec{\mathbf{x}}\left(s; \vec{\mathbf{x}}_\mathbf{2}\right)\right|\mathrm{d}s\end{aligned}$$

ただし，$C = \left|\vec{\mathbf{x}}_\mathbf{1} - \vec{\mathbf{x}}_\mathbf{2}\right|$ とおき，解 $\vec{\mathbf{x}}\left(t, \vec{\mathbf{x}}_\mathbf{i}\right)$ が $t_0 \le s \le t$ で $\left(s, \vec{\mathbf{x}}\left(s; \vec{\mathbf{x}}_\mathbf{i}\right)\right) \in R$ となるような t_0 に十分近い t のみ考える．

$$\left|f\left(s, \vec{\mathbf{x}}\left(s; \vec{\mathbf{x}}_\mathbf{1}\right)\right) - f\left(s, \vec{\mathbf{x}}\left(s; \vec{\mathbf{x}}_\mathbf{2}\right)\right)\right| \le \left|\vec{\mathbf{x}}\left(s; \vec{\mathbf{x}}_\mathbf{1}\right) - \vec{\mathbf{x}}\left(s; \vec{\mathbf{x}}_\mathbf{2}\right)\right|$$

ここで

$$\varphi(t) = \left|\vec{\mathbf{x}}\left(t; \vec{\mathbf{x}}_\mathbf{1}\right) - \vec{\mathbf{x}}\left(t; \vec{\mathbf{x}}_\mathbf{2}\right)\right|$$

とおくと $\varphi(t) \geq 0$ で Gronwall の仮定を満たすので

$$\varphi(t) \leq Ce^{k(t-t_0)}$$

<u>$t \leq t_0$ のとき</u>s の代わりに $(-s)$ を考えると，同様に

$$\varphi(t) \leq Ce^{k((-t)-(-t_0))} = Ce^{k(t-t_0)}$$

となる．

　これらは

$$\left|\vec{\mathbf{x}}(t;\vec{\mathbf{x}}_1) - \vec{\mathbf{x}}(t;\vec{\mathbf{x}}_2)\right| \leq \left|\vec{\mathbf{x}}_1 - \vec{\mathbf{x}}_2\right| e^{k|t-t_0|}$$

を意味し，各 t で

$$\vec{\mathbf{x}}_1 - \vec{\mathbf{x}}_2 \to 0 \Rightarrow \vec{\mathbf{x}}(t;\vec{\mathbf{x}}_1) - \vec{\mathbf{x}}(t;\vec{\mathbf{x}}_2) \to 0$$

が成り立ち，$\vec{\mathbf{x}}(t;\vec{\mathbf{x}}_0)$ は $\vec{\mathbf{x}}_0$ に関して連続となる． □

注　ODE の解の初期値に関する微分可能性 ($f(t,\vec{\mathbf{v}})$ が $\vec{\mathbf{v}}$ に関して C^r-級 $(r \geq 1) \Rightarrow$ 解 $\vec{\mathbf{x}}(t;\vec{\mathbf{x}}_0)$ は $\vec{\mathbf{x}}_0$ に関して C^r-級) も言える．

21.1　相平面

　$n = 2$ の場合

$$(*) : \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t} = A\vec{\mathbf{x}}(t) \quad \left(\vec{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{x}}_1(t) \\ \vec{\mathbf{x}}_2(t) \end{pmatrix}, A\text{は各成分が定数の}2\times 2\text{行列}\right)$$

の解 $\vec{\mathbf{x}}(t)$ の軌道を (x_1, x_2)-平面 (<u>相平面</u>という) 上に描きたい．簡単のため<u>仮定</u>A の 2 つの固有値 λ_1, λ_2 は共に $\neq 0$ とする．(→ $(*)$ の解 $\vec{\mathbf{x}}(t) = \vec{\mathbf{0}}$ の近くには動かない解軌道はない)
A はある 2×2 正則行列 $P = \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{p}}_1 & \vec{\mathbf{p}}_2 \end{pmatrix}$ によって

$$P^{-1}AP = \begin{cases} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \to \underline{\text{Case 1}} \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \to \underline{\text{Case 2}} \end{cases}$$

と出来た．この P を使って

$$P^{-1}\vec{\mathbf{x}}(t) = \vec{\mathbf{X}}(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = P\vec{\mathbf{X}}(t)$$

より

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t} = A\vec{\mathbf{x}} \Leftrightarrow P\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{X}}}{\mathrm{d}t} = AP\vec{\mathbf{X}} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{X}}}{\mathrm{d}t} = P^{-1}AP\vec{\mathbf{X}}$$

となる．

注

$$\vec{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix}\vec{\mathbf{e_1}} & \vec{\mathbf{e_2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}$$
$$= P\vec{\mathbf{X}}(t) = \begin{pmatrix}\vec{\mathbf{p_1}} & \vec{\mathbf{p_2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1(t)\\X_2(t)\end{pmatrix}$$
$$= X_1(t)\vec{\mathbf{P_1}} + X_2(t)\vec{\mathbf{p_2}}$$

となって $\vec{\mathbf{p_1}}$ 方向が X_1 軸方向となる.

Case 1 のとき

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1 X_1\\\lambda_2 X_2\end{pmatrix}$$

より,

$$\vec{\mathbf{X}}(t) = \begin{pmatrix}C_1 e^{\lambda_1 t}\\C_2 e^{\lambda_2 t}\end{pmatrix} \quad (C_1, C_2\text{は任意定数})$$

となるので解軌道 $\left\{\vec{\mathbf{x}}(t) \mid t \in \mathbb{R}\right\}$ は

1. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ で
   (a) $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ のとき

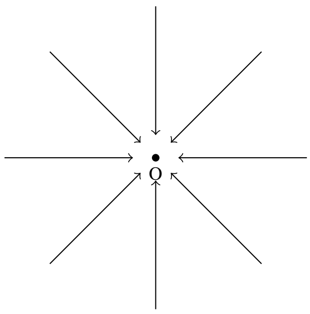


図 1　$\lambda_1 = \lambda_2$ のとき

or

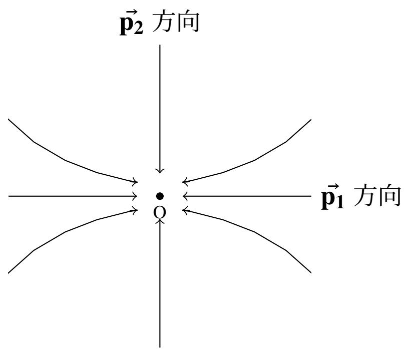


図 2　$|\lambda_1| < |\lambda_2|$ のとき

   $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ のとき, $t \to \infty$ で $e^{\lambda_1 t}$ より $e^{\lambda_2 t}$ の方が速く 0 に近づく.
   (b) $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ のとき
   $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ のとき, $t \to -\infty$ で $e^{\lambda_1 t} \gg e^{\lambda_2 t}$
   (c) λ_1, λ_2 が異符号 ($\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ とする) とき
2. $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R}$ で

$$\begin{cases}\lambda_1 = p + iq\\\lambda_2 = p - iq\end{cases}$$

   ただし $p, q \in \mathbb{R}, q =\neq 0$ のとき

$$\begin{pmatrix}X_1(t)\\X_2(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}C_1 e^{\lambda_1 t}\\C_2 e^{\lambda_2 t}\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

   に対して

$$\begin{cases}Z_1(t) = \dfrac{X_1(t) + X_2(t)}{2}\\[2mm] Z_2(t) = \dfrac{X_1(t) - X_2(t)}{2i}\end{cases}$$

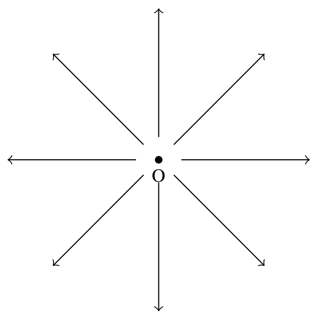


図 3　$\lambda_1 = \lambda_2$ のとき

or

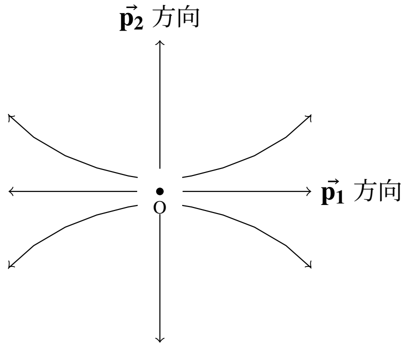
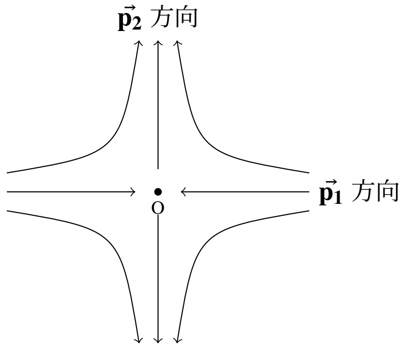


図 4　$\lambda_1 < \lambda_2$ のとき



とおくと

$$
\begin{aligned}
Z_1(t) &= \frac{1}{2}e^{pt}\left(C_1e^{iqt} + C_2e^{-iqt}\right) = e^{pt}\left\{\frac{C_1 + C_2}{2}\cos(qt) + \frac{iC_1 - iC_2}{2}\sin(qt)\right\} \\
Z_2(t) &= e^{pt}\left\{\frac{C_1 + C_2}{2}\sin(qt) + \frac{C_1 - C_2}{2i}\cos(qt)\right\}
\end{aligned}
$$

$\tilde{C_1} = \frac{C_1+C_2}{2}, \tilde{C_2} = \frac{iC_1-iC_2}{2}$ とおく．ここで $\tilde{C_1}, \tilde{C_2}$ を $\mathbb{R}$ に制限すると $\mathbb{R}^2$ 上の解軌道として

$$
\begin{cases}
Z_1(t) = e^{pt}\left\{\tilde{C_1}\cos(qt) + \tilde{C_2}\sin(qt)\right\} \\
\qquad = \sqrt{\tilde{C_1}^2 + \tilde{C_2}^2}\,e^{pt}\left\{\cos(qt)\dfrac{\tilde{C_1}}{\sqrt{\tilde{C_1}^2 + \tilde{C_2}^2}} + \sin(qt)\dfrac{\tilde{C_2}}{\sqrt{\tilde{C_1}^2 + \tilde{C_2}^2}}\right\} \\
\qquad = Ce^{pt}\cos(qt - \alpha) \quad \left(C = \sqrt{\tilde{C_1}^2 + \tilde{C_2}^2}\text{とおく}\right) \\
Z_2(t) = e^{pt}\left\{\tilde{C_1}\sin(qt) - \tilde{C_2}\cos(qt)\right\} \\
\qquad = \sqrt{\tilde{C_1}^2 + \tilde{C_2}^2}\,e^{pt}\left\{\sin(qt)\dfrac{\tilde{C_1}}{\sqrt{\tilde{C_1}^2 + \tilde{C_2}^2}} - \cos(qt)\dfrac{\tilde{C_2}}{\sqrt{\tilde{C_1}^2 + \tilde{C_2}^2}}\right\} \\
\qquad = Ce^{pt}\sin(qt - \alpha)
\end{cases}
$$

となるので

レポート課題

問 1

$x = x(t)$ に対する ODE

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{x}{t}\right)^2 + \frac{x}{t} + 1$$

を同次型の解法で解け.

問 2

$x = x(t)$ に対する

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2tx = te^{t^2-t}x^2$$

を Bernoulli 型の解法で解け.

問 3

$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ を対角化し，それを利用して $\vec{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ に対する

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t} = A\vec{\mathbf{x}}$$

を解け.

問 4

$$(*) : \left(2tx^2 + 3t^2x^3\right)\mathrm{d}t + \left(3 + 4t^2x + 5t^3x^2\right)\mathrm{d}t = 0$$

に対して，

1. $(*)$ は全微分型でないを示せ.
2. $(*)$ の積分因子を 1 つ求めて $(*)$ の一般解 $x(t)$ を与えよ.

問 5

$D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ に対して

$$D^2(D-1)^3\left(D^2 + 2D + 10\right)^2 x = 0$$

の一般解 $x(t)$ を実数値関数で与えよ.

問 6

$$\left(D^2+9\right)=2\cos(3t)-\sin(3t)$$

の一般解を与えよ.

問 7

$$\left(D^2+1\right)x=\frac{1}{(\cos t)^3}$$

の一般解を定数変化法で求めよ.

問 8

$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -8 & -7\end{pmatrix}$ に対して

1. A を Jordan 標準形に直し，それを利用して e^{At} を求めよ.
2. e^{At} を射影行列の方法で求め (注 射影行列は I になる),

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t}=A\vec{\mathbf{x}}\\ \vec{\mathbf{x}}(0)=\begin{pmatrix}-1 & 1\end{pmatrix}\end{cases}$$

の解 $\vec{\mathbf{x}}(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}$ を求めよ.