Appunti di:

Processi stocastici

A.A. 2024/2025

Sapienza Università di Roma
Dipartimento di Scienze Matematiche per l'intelligenza artificiale

Autore: Carboni Francesco

Contents

1 Catene di Markov omogenee

Sia $\mathcal{S}$ un insieme finito di stati e $X_1, X_2, ...$ una successione di variabili aleatorie tali che

$$X_i : \Omega \to \mathcal{S}$$

Ogni X_i dipende solo dalla variabile aleatoria che la precede nella sequenza, ovvero X_{i-1}, questo si traduce in:

$$\mathbb{P}(X_k = x_k | X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots X_{k-1} = x_{k-1}) = \mathbb{P}(X_k = x_k | X_{k-1} = x_{k-1})$$

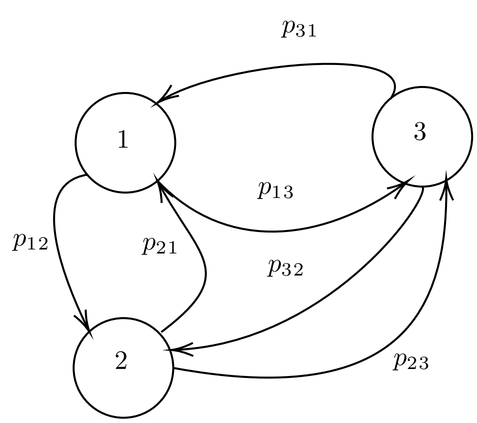
Per alleggerire la notazione scriveremo $p_{ij} = \mathbb{P}(X_k = i | X_{k-1} = j)$ per indiacare la **probabilità di transizione**, possiamo immaginare le MC come una serie di stati in $\mathcal{S}$, dove p_{ij} rappresenta la probabilità di passare dallo stato j allo stato i. Per semplificare lo studio delle Catene di Markov possiamo aggiungere l'ipotesi, almeno per il momento, che la probabilità di transizione non dipenda dal dal tempo k, ovvero p_{ij} è uguale per ogni X_k. Catene di Markov di questo tipo vengono chiamate **omogenee** e possono essere descritte da una matrice $P \in \mathfrak{M}_{n,n}(I)$ chiamata matrice di transizione:

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

dove per ogni riga vale $\sum_j p_{ij} = 1$. Lo stato iniziale X_0 della catena può essere definito in due modi:

- si sceglie in modo deterministico $X_0 = i$.
- Si utilizza un vettore di probabilità $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2 \dots q_n)$, e si sceglie in modo aleatorio lo stato iniziale.

Una catena di Markov è formata da un'insieme di stati e da una funzione di probabilità che regola i passaggi da uno stato all'altro, ed è proprio in questo che differisce da una macchina a stati deterministica, potendo essere pensata come una macchina a stati stocastica. Oltre alla matrice di transizione una catena di Markov omogenea trova una rappresentazione anche in un grafo orientato, dove i vertici sono gli stati di $\mathcal{S}$ e gli archi sono pesati con p_{ij}.



Esempio 1.1. Consideriamo un sistema di due bit collegati ai lanci di una moneta con la seguente legge: se la moneta da testa viene flippato il primo bit, altrimenti viene flippato il secondo. Assumiamo inoltre che la moneta non sia truccata e quindi

$$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}.$$

La matrice di transizione che ne deriva è

$$P = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} [00] & [01] & [10] & [11] \end{array} \\ \begin{array}{c} [00] \\ [01] \\ [10] \\ [11] \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ è il vettore di probabilità iniziale, dove q_1 indica la probabilità di iniziare da $[00]$. Calcoliamo la probabilità che da un $[ij]$ stato di partenza ottenga tutte le altre configurazioni al primo passo:

- $\mathbb{P}(X_1 = [00]) = \frac{1}{2}(q_2 + q_3)$
- $\mathbb{P}(X_1 = [01]) = \frac{1}{2}(q_1 + q_4)$
- $\mathbb{P}(X_1 = [10]) = \frac{1}{2}(q_1 + q_4)$
- $\mathbb{P}(X_1 = [11]) = \frac{1}{2}(q_2 + q_3)$

Quindi l'analisi del primo passo del processo sarà:

$$\text{passo } 1 \to (\frac{1}{2}(q_2 + q_3), \frac{1}{2}(q_1 + q_4), \frac{1}{2}(q_1 + q_4), \frac{1}{2}(q_2 + q_3))$$

Il calcolo svolto per ottenere il vettore probabilità del primo passo non è altro che il prodotto vettore per matrice $\boldsymbol{q} \cdot P$. Da questa osservazione segue che possiamo ridurre la computazione di ogni passo ad un prodotto del vettore risultante dal passo precedente per la matrice di transizione, che rimane invariata.

$$\boldsymbol{q_1} = \boldsymbol{q} \cdot P$$

$$\boldsymbol{q_2} = \boldsymbol{q_1} \cdot P = \boldsymbol{q} \cdot P^2$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{q_n} = \boldsymbol{q_{n-1}} \cdot P = \boldsymbol{q} \cdot P^n$$

Osservazione 1.2. Se la matrice P è diagonalizzabile, ovvero è simile ad una matrice diagonale, allora P può essere scritta come $P = U^{-1}DU$, dove D è la matrice diagonale. Grazie alla diagonalizzazione abbiamo un modo più semplice per calcolare le potenze di matrici, infatti

$$P^n = (U^{-1}DU)(U^{-1}DU) \cdots (U^{-1}DU) = U^{-1}D^nU$$

ma la potenza della matrice diagonale è $D^n = (a_{ij}^n)$.

Definizione 1.3. Sia P una matrice quadrata, p_{ij} gli elementi della matrice dove $p_{ij} \in [0, 1]$ e $\sum_j p_{ij} = 1$, allora P è detta *matrice stocastica*.

Esempio 1.4. Consideriamo il processo dell'esempio precedente, consideriamo solo i passi pari del processo, per analizzare i passi del processo dobbiamo calcolare la probabilità di andare da $i \to j$ in due passi.

$$\sum_k p_{ik} p_{kj} \to \text{probabilità di andare da i a j in due passi}$$

La nuova matrice di transizione $P' = (\sum_k p_{ik} p_{kj})$ è stocastica.

Esempio 1.5. Consideriamo ora due MC sullo stesso $\mathcal{S}$:

$$P \to \text{passi pari}$$

$$Q \to \text{passi dispari}$$

Possiamo rappresentare il processo come un alternanza delle matrici stocastiche P e Q

$$\boldsymbol{q}PQPQP\ldots$$

Allo stesso modo possiamo considerare $PQ = R$ con $r_{ij} = \sum_k p_{ik} q_{kj}$, ottenendo comunque una matrice stocastica R, quindi il prodotto di matrici stocastiche è una matrice stocastica.

Osservazione 1.6. Chiamiamo $p_{ij}^{(n)}$ la probabilità di transizione per andare dallo stato i allo stato j, nell'esempio precedente (**1.4**) abbiamo calcolato la probabilità $i \to j$ saltando di due passi

$$p_{ij}^{(2)} = \sum_{k \in \mathcal{S}} p_{ik} p_{kj}.$$

Nel caso generale abbiamo che

$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k \in \mathcal{S}} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}$$

in modo equivalente ma facendo riferimento direttamente alle matrici di transizione:

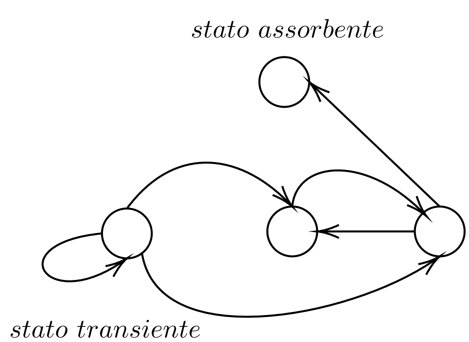
$$P^{(m+n)} = P^{(m)} \cdot P^{(n)}.$$

Questa equazione prende il nome di *equazione di Chapman-Kolmogorov*, ricordiamo però che questa è solo una versione semplificata delle equazioni perchè stiamo lavorando su MC omogenee.

1.1 Stati assorbenti e transienti

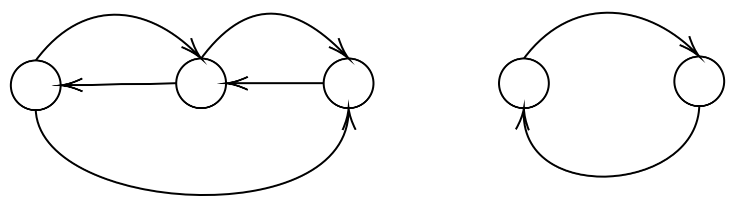
Una serie di risultati interessanti nascono dall'ipotesi di eseguire la MC per molto tempo, e chiedersi quale sia la probabilità che si finisca in un determinato stato.

Definizione 1.7. Uno stato i è detto assorbente se $p_{ii} = 1$, ovvero una volta entrato in quello stato non potrà più uscirne. Uno stato j è detto *transiente*, se una volta che il processo lo abbandona, questo non vi ritornerà più.



Ovviamente essendo una macchina stocastica non può esistere la definizione di stati su cui passeremo un numero finito di volte, se continuiamo il processo per infinito tempo. Da queste semplici definizioni osserviamo, che se una MC ha uno o più stati assorbenti e continuiamo il processo per un tempo indeterminato, allora o si finisce in uno degli stati assorbenti, o ci sono più stati che vengono visitati infinite volte.

Esempio 1.8. Consideriamo la MC rappresentata dal grafo non connesso qui sotto:



formalmente questa è un'unica catena di Markov ma, se ne scriviamo la matrice di transizone, sarà una matrice divisa a blocchi.

$$\left(\begin{array}{c|c} MC_1 & 0 \\ \hline 0 & MC_2 \end{array}\right)$$

Sia $\mathcal{S} = \{1, ..., k, k+1, ...n\}$ l'insieme degli stati, dove gli stati da 1 a k sono rappresentati nel sottografo di sinistra, mentre quelli da $k+1$ ad n a destra. Non essendo i due grafi connessi, una volta che finiremo in uno dei due la probabilità di arrivare ad uno qualunque degli stati dell'altro sarà 0, per questo possiamo rinormalizzare il vettore delle probabilità solo su quelle che riguardano il singolo sottografo:

$$\text{per } 1 \leq i \leq k \quad \mathbf{q}' = \left(\frac{q_i}{\sum_{i=0}^{k} q_i}\right) \qquad \text{per } k+1 \leq i \leq n \quad \mathbf{q}'' = \left(\frac{q_i}{\sum_{i=k+1}^{n} q_i}\right)$$

1.2 Distribuzione invariante

Sia $p^{(n)} = \boldsymbol{q}P^n$, supponiamo che $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{q}P^n = \boldsymbol{\pi}$, quindi se lasciamo proseguire il processo per un tempo illimitato questo si stabilizza e il limite è proprio $\boldsymbol{\pi}$. Inoltre se $\boldsymbol{\pi}$ è il limite otteniamo che

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{q}P^n = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{q}P^{n+1} = (\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{q}P^n)P = \boldsymbol{\pi}P$$

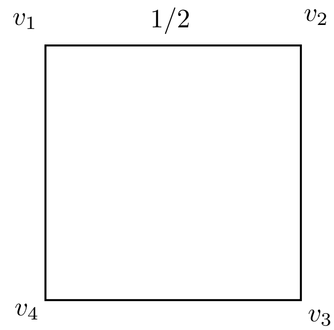
$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}P.$$

Allora $\boldsymbol{\pi}$ è un autovettore sinistro di P, e viene chiamato **distribuzione invariante**. In altre parole, la distribuzione $\boldsymbol{\pi}$ resta invariata sotto l'evoluzione della catena di Markov. In questo caso, $\boldsymbol{\pi}$ rappresenta una situazione stazionaria in cui, anche se il sistema evolve nel tempo, la distribuzione complessiva degli stati rimane costante.

Teorema 1.9 (Frobenius)**.** *Una matrice stocastica ha sempre un autovalore uguale ad 1.*

1.3 Catene di Markov periodiche

Consideriamo la figura qui sotto con quattro vertici , dove da ogni vertice è possibile muoversi solo verso quelli adiacenti con una probabilità $p = \frac{1}{2}$. Chiamiamo inoltre $\boldsymbol{\mu^{(0)}} = (1, 0, 0, 0)$ il vettore che indica lo stato iniziale (in questo caso scegliamo arbitrariamente di partire da v_1).



$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, P^3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Se si continuano i calcoli otterremo ciclicamente le stesse matrici, in particolare per ogni $k \geq 1$

$$P^{2k} = P^2$$

$$P^{2k+1} = P$$

Allo stesso modo vedremo cambiare il vettore delle probabilità $\boldsymbol{\mu^{(n)}}$, che per come è stato scelto sarà sempre uguale alla prima riga di P^n. Catene di Markov con questo tipo di comportamento vengono chiamate *catene periodiche*, in questo caso il *periodo* della catena è uguale a 2. Una caratteristica fondamentale delle catene di questo tipo è che possiamo sempre risalire allo stato di partenza, o comunque ad un insieme di stati iniziali compatibili con il periodo. Cosa che invece non possiamo dire nel caso in cui siano *aperiodiche*, infatti le MC per definizione non hanno memoria. Nonostante il calcolo delle matrici di transizione sia agevolato dal periodo, le catene periodiche non convergono mai ad una distribuzione limite: essendo periodica non si fermerà mai in un singolo stato e continuerà ad oscillare in modo indeterminato tra i d stati che compongono il periodo. Questa importante proprietà motiva la rimozione della periodicità da una MC.

Osservazione 1.10. Affinché una catena di Markov sia periodica è necessario che $p_{ii} = 0$, quindi per rendere la stessa aperiodica sarà sufficiente che

$$p_{ii} = q$$

$$p_{ij} = p_{ij}(1 - q) \qquad \text{con } q \in (0, 1]$$

Possiamo applicare (1.10) all'esempio precedente aggiungendo ad ogni vertice la probabilità $q = 1/2$, di restare in quello stesso stato , e $p' = pq$ per andare in uno dei vertici adiacenti.