Contents

1 Algebre e Algebre induttive **2**

1.1 Introduzione e definizione 2

1.2 Lemma di Lambek 4

1.2.1 Precisazione sulla notazione 4

1.3 Algebra induttiva di alberi binari 5

1.4 Esercizi 5

2 Linguaggi di espressioni **8**

2.1 Introduzione 8

2.2 Linguaggio ***Exp*** 9

2.2.1 Operatore ***let***, variabili *libere e legate* 9

2.3 Semantica operazionale di *Exp* 10

2.3.1 Semantica operazionale "***lazy***" 11

2.3.2 Semantica *lazy* con *scoping statico* 12

3 Linguaggio *Fun* **13**

1 Algebre e Algebre induttive

1.1 Introduzione e definizione

Definizione 1.1 (Assiomi di Peano)**.**

I. $\varnothing \in \mathbb{N}$

II. se $n \in \mathbb{N} \implies \sigma(n) \in \mathbb{N}$

III. $\nexists n \quad t.c. \quad \sigma(n) = \varnothing$

IV. $\forall m, n \quad \sigma(m) = \sigma(n) \implies n = m$

V. $\forall S \subseteq \mathbb{N}$ (se $\varnothing \in S$ e $n \in S \implies \sigma(n) \in S) \implies S = \mathbb{N}$

Il quinto assioma è equivalente all'induzione, ovvero: sia P una proprietà su $\mathbb{N}$, se $P(0)$ e si assume sia vera fino ad n, quindi $P(n)$ se si dimostra che $P(n+1)$ è vero allora P è vera per ogni n. Attraverso questi assiomi abbiamo costruito la "struttura" dei numeri naturali, che non sono altro che un caso particolare di algebra. La definizione di peano quindi è un modo per definire un'**algebra induttiva**. Le algebre sono degli insiemi dotati di operazioni definite sugli elementi dell'insieme stesso, nel caso delle algebre eterogenee vengono coinvolti anche parametri esterni. Le operazioni definite in questi insiemi hanno il codominio nell'insieme stesso, consideriamo ad esempio la seguente algebra:

Esempio 1.2. Sia A l'insieme dotato di un operazione γ definita come segue:

$$\gamma : A \times K \to A$$

dove K è una collezione di elementi diversa da A. Anche l'operazione $\eta : K \to A$ che non prende elementi da A può essere un'operazione valida.

Definizione 1.3. Un insieme S si dice chiuso rispetto ad un'operazione γ se:

1. $a \in S \implies \gamma(a) \in S$
2. $a_1, a_2, \ldots, a_k \in S \implies \gamma(a_1, a_2, \ldots a_k) \in S$
3. Preso $m \in M$ e $a_1, a_2 \in S \implies \gamma(m, a_1, a_2) \in S$

(nel (3) m può essere un qualunque elemento di M)

Definizione 1.4. Un'algebra (A, γ), dove γ rappresenta una famiglia di operazioni $\{\gamma_i\}$, si dice induttiva quando:

1. Tutte le γ_i sono iniettive.
2. Le γ_i hanno immagini disgiunte.
3. $\forall S \subseteq A$ se S è chiuso rispetto a tutte le γ_i allora $S = A$.

L'insieme A è chiamato *insieme sottostante* all'algebra e rappresenta il codominio di ogni operazione $\gamma_i \in \gamma$.

Quindi $\mathbb{N}$ è solo un caso particolare di algebra induttiva definita su gli interi positivi, dotata dell'operazione σ e dell'operazione $\varnothing$. Quest'ultima merità un piccolo approfondimento, infatti il terzo assioma di Peano impone che $\varnothing$ non sia immagine di alcun $\sigma(n)$, abbiamo quindi bisogno di definire un'operazione speciale che mappa nello zero:

$$\varnothing : \mathbb{1} \to \mathbb{N}$$

Dove $\mathbb{1}$ denota l'insieme banale (o $\mathbb{N}^0$ ovvero un insieme composto da un solo elemento). La definizione di algebra induttiva ci serve per definire una collezione di oggetti in cui si esclude tutto ciò che non è possibile costruire a partire dalle operazioni definite.

Esempio 1.5 (Algebra di liste)**.** Definiamo L l'insieme delle liste ordinare di interi e una famiglia di operazioni γ_L formata da due operazioni, *cons*, *empty*, diciamo che (L, γ_L) è un'algebra induttiva. Definiamo *cons* come l'operazione che dato un naturale e una lista, aggiunge quel numero in coda alla lista:

$$cons(n, (n_1, \ldots, n_q)) = (n, n_1, \ldots, n_q)$$

empty invece è l'operazione con dominio in $\mathbb{1}$ che mappa nella lista vuota (). Quindi *cons* e *empty* rispettano gli assiomi di algebra induttiva, in particolare: le immagini sono disgiunte, le operazioni sono iniettive e non esistono sotto-algebre chiuse per *cons* e *empty*. Grazie alla struttura induttiva appena costruita possiamo definire l'operazione *append*, che prende due liste e le unisce. Ecco un esempio di definizione ricorsiva:

$$append((), l) = l$$
$$append(cons(n, l), l') = cons(n, append(l, l')) \qquad \text{con } n \in \mathbb{N} \text{ e } l, l' \in L$$

Esempio 1.6. (Booleani) sia $\mathbb{B} = \{True, False\}$ e siano t, f due operazioni:

$$t : \mathbb{1} \to \mathbb{B}$$

$$f : \mathbb{1} \to \mathbb{B}$$

Quindi $t(\mathbb{1}) = True$ e $f(\mathbb{1}) = False$, da questa definizione segue che $(\mathbb{B}, \{f, t\})$ è un algebra induttiva.

Teorema 1.7. *Un algebra induttiva è finita se e solo se i costruttori hanno solo parametri esterni.*

Un esempio banale è $\mathbb{B}$ (1.8).

1.2 Lemma di Lambek

1.2.1 Precisazione sulla notazione

La segnatura algebrica delle operazioni di un'algebra è rappresentata da un'isieme I, di nomi di funzione e per ogni $i \in I$ corrisponde un $\alpha_i \geq 0$, che indica il numero di parametri che l'operazione prende dall' insieme sottostante all' algebra, e un vettore $\mathbf{K_i} = (K_{i1}, \ldots, K_{iq})$, contente i domini da cui vengono presi i paramentri esterni per l'operazione, quindi la dimensione del vettore rappresenta il numero dei parametri esterni. Due segnature di due algebre sono equivalenti se è possibile ottenere l'una dall'altra semplicemente scambiando gli insiemi sottostanti all'algebra nei singoli costruttori.

Esempio 1.8. Consideriamo (A, f_A) e (B, f_B), con $f_A : A \times K \to A$ e $f_B : B \times K \to B$, le due algebre hanno la stessa segnatura perché è possibile ottenere f_A semplicemente sostituendo in f_B B con A. Quindi l'equivalenza di segnature è semplicemente un'equivalenza nella "forma" di ogni costruttore dell'algebra.

Definizione 1.9. $h : (A, \gamma_A) \to (B, \gamma_B)$ è un omomorfismo di algebre se per ogni $i \in I$

$$h(\gamma_{A_i}(a_1, \ldots a_{\alpha_i}, k_1, \ldots, k_{\beta_i})) = \gamma_{B_i}(h(a_1), \ldots, h(a_{\alpha_i}), k_1, \ldots, k_{\beta_i}).$$

Un omomorfismo bigettivo è chiamato *isomorfismo.*

Teorema 1.10. *Siano (A, γ_A) un'algebra induttiva e (B, γ_B) un'algebra (non necessariamente induttiva), con operazioni con la stessa segnatura, allora esiste un unico omomorfismo h:*

$$h : (A, \gamma_A) \to (B, \gamma_B)$$

Esempio 1.11. Consideriamo l'algebra induttiva dei naturali e $(\mathbb{B}, true, not)$, dove $not(true) = false$ e $not(false) = true$. Per il teorema (1.10) esiste un unico omomorfismo di algebre $h : \mathbb{N} \to \mathbb{B}$ definito come :

$$h(\varnothing) = True$$

$$h(\sigma(n)) = not(h(n))$$

Lemma 1.12 (Lambek)**.** *Due algebre induttive con stessa segnatura sono isomorfe.*

Dimostrazione. Siano A e B due algebre induttive, per (**1.11**) esiste un unico omomorfismo $h : A \to B$ e viceversa $h' : B \to A$.

$$A \xrightarrow{h} B \xrightarrow{h'} A$$

Consiederiamo ora $h' \circ h : A \to A$, ovviamente la composizione di due omomorfismi è anch'esso un omomorfismo, per esempio la funzione identità $Id : A \to A$ è un omomorfismo da A in A. Ricordiamo che dal precedente teorema sappiamo che tale omomorfismo è unico, segue che $h' \circ h = Id$ e quindi $h' = h^{-1}$. □

Affinchè sia presente un isomorfismo è necessaria una bigezione tra gli insiemi sottostanti all'algebra, ma quest'ultima non è sufficiente a garantire l'uguaglianza nella struttura, infatti è necessario che anche le segnature siano le stesse.

Esempio 1.13. Prendiamo il caso di due insiemi di interi positivi $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}_* := \{0, 1, \ldots, *\}$, esiste certamente una mappa biettiva tra i due insiemi, ma non è possibile stabilire un isomorfismo tra le due algebre, in quanto la segnatura delle rispettive famiglie di operazioni sarà diversa.

1.3 Algebra induttiva di alberi binari

Teorema 1.14. *Ogni albero binario con n foglie ha* $2n - 1$ *nodi.*

Per dimosteare questo teorema possiamo utilizzare l'induzione completa, ma ai fini del nostro studio, risulta più istruttivo utilizzare l'*induzione strutturale* su un'algebra induttiva di alberi binari. Sia B_{tree} l'insieme di tutti gli alberi binari finiti. Dotiamo B_{tree} di due costruttori:

- $root : \mathbb{1} \to B_{tree}$, un costruttore di base che mappa nell'albero binario formato da un solo nodo.

- $branch : B_{tree} \times B_{tree} \to B_{tree}$, un costruttore che unisce due alberi binari, aggiungendo una radice e attaccando i due alberi alla radice, uno come sottoalbero destro e uno come sotto albero sinistro.

Le due operazioni rispettano gli assiomi di algebra induttiva, quindi $(B_{tree}, root, branch)$ è un'algebra induttiva. Possiamo ora applicare l'induzione sull'algebra di alberi binari, modificando l'induzione sui naturali:

$$\frac{P(0) \quad P(n) \implies P(\sigma(n))}{\forall n \quad P(n)} \to \frac{P(root) \quad P(t_1), P(t_2) \implies P(branch(t_1, t_2))}{\forall t \quad P(t)}$$

Dimostrazione (1.14). Il caso base è banale infatti $|root| = 2(1) - 1 = 1$. Applichiamo il passo induttivo e dimostriamo che, dati t_1 e t_2 due alberi binari con $|t_1| = 2n_1 - 1$, $|t_2| = 2n_2 - 1$, allora $|branch(t_1, t_2)| = 2n_1 - 1 + 2n_2 - 1 + 1 = 2(n_1 + n_2) - 1$. □

Durante la costruzione dell'algebra abbiamo specificato la presenza solo di alberi finiti, in quanto un elemento in sé infinito (in questo caso un albero), violerebbe gli assiomi di algebra induttiva. Quindi le collezioni di elementi con operazioni che contengono elementi di questo tipo vengono chiamate algebre *co-induttive*.

1.4 Esercizi

Definizione 1.15. Un costruttore è ogni γ_i appartenente alla famiglia di operazioni di un algebra (A, γ). Un costruttore di base non ha parametri presi dall'insieme sottostante all'algebra, ovvero $\alpha_i = 0$.

Esercizio 1. Dimostrare che ogni algebra induttiva non vuota ha almeno un costruttore base.

Soluzione. Sia $(A, \boldsymbol{\gamma})$, con $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$, un'algebra induttiva. Consideriamo $\varnothing \subsetneq A$, questo è chiaramente chiuso per ogni γ_i che non sia di base, quindi se supponiamo che non esistano in $\boldsymbol{\gamma}$ costruttori di base allora $(\varnothing, \boldsymbol{\gamma})$ è un algebra induttiva, andando in contrapposizione con il terzo assioma. Segue l'esistenza di almeno un costruttore base. $\square$

Esercizio 2. Mostrare che esiste un isomorfismo algebrico tra i naturali e
$P = \{0, 2, 4, \ldots\}$ dove, $0_P = 0$ e $\sigma_P(n) = n + 2$.

Soluzione. Per prima cosa verifichiamo che $(P, \varnothing_P, \sigma_P)$ sia un'algebra induttiva:

1. σ_P e $\varnothing_P : \mathbb{1} \to P$, sono chiaramente inisettive, infatti se $\sigma_P(n) = \sigma_P(m)$ e quindi $n + 2 = m + 2 \implies n = m$.
2. $\text{Im } \sigma_P \cap \text{ Im } \varnothing_P = \varnothing$
3. Chiaramente se $S \subseteq P$ è chiuso rispetto a $\varnothing_P$ e σ_P, allora S deve essere necessariamente P.

Consideriamo la funzione tra le due algebre induttive che hanno segnature equivalenti:

$$f : \mathbb{N} \to P$$

$$n \overset{f}{\longmapsto} 2n$$

Chiaramente f è bigettiva ed è anche un omomofismo, infatti

$$f(\sigma(n)) = \sigma_P(f(n))$$

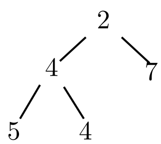
$$\varnothing = \varnothing_P$$

quindi f è un isomofismo. $\square$

Esercizio 3. Dimostrare che ogni algebra induttiva non vuota con un costruttore non base è necessariamente infinita.

Soluzione. Sia $b \in A$ l'elemento mappato dal costruttore di base β (di cui abbiamo verificato l'esistenza nell'esercizio sopra), se A è dotato anche di un costruttore non di base γ, allora $\gamma(b) = a_1$, $\gamma(a_1) = a_2$ e così via senza mai giungere ad una fine. Infatti se volessimo provare a chiudere la sequenza, ad esempio proprio con $\gamma(a_n) = b$, otterremmo delle immagini di γ e β non disgiunte contraddicendo gli assiomi di algebra induttiva, segue la non finitezza di A. $\square$

Esercizio 4. Consideriamo alberi binari con nodi etichettati da numeri naturali. Eccone uno:



Definire l'algebra induttiva *BN-trees* di questi alberi.Definire un'algebra di uguale segnatura sull'insieme S delle sequenze finite di numeri naturali in modo che la funzione $f : BN\text{-}trees \to S$ che associa a ciascun albero la sequenza di etichette ottenuta con una visita depth-first sia un omomorfismo. Applicando f all'albero dell'esempio, ci aspettiamo di ottenere la sequenza $\langle 2,4,5,4,7 \rangle$.

Soluzione. Definiamo un'estensione delle operazioni create in precedenza per l'algebra di B_{tree}:

$$branch^* : BN\text{-}tree \times BN\text{-}tree \times \mathbb{N} \to BN\text{-}tree,$$

$$root^* : \mathbb{N} \to BN\text{-}tree.$$

branch* prende in input due alberi e un intero che etichetterà la radice; *root** invece prende un intero n e crea la radice etichettata con n. In modo del tutto analogo definiamo sull'insieme S l'operazione di concatenazione di due serie numeriche s_1, s_2 di lunghezza dispari che restituisca una serie dispari:

$$\mathcal{C} : S \times S \times \mathbb{N} \to S$$

$$\mathcal{C}(s, s', n) \mapsto \langle n, s_1, \ldots, s_k, s'_1, \ldots, s'_q \rangle$$

$$\Lambda : \mathbb{N} \to S$$

$$\Lambda(n) \mapsto \langle n \rangle$$

Come conseguenza del *lemma di Lambek* (1.12) esiste ed è unico l' omomorfismo $f : B\text{-}tree \to S$. Consideriamo la sequenza $s = \langle s_1 \ldots s_k \rangle$ generata visitando con una DFS l'albero $t \in B\text{-}tree$, quindi $f(t) = s$. In particolare f è un omomorfismo di algebre

$$f(branch(t_1, t_2, a)) = \mathcal{C}(f(t_1), f(t_2), a) \tag{1}$$

$$f(root^*(n)) = \Lambda(n) \tag{2}$$

La (1) è giustificata dal fatto che la *depth-first* visita l'albero da sinistra a destra, e quindi la sequenza risultante avrà inizialmente a (la radice del nuovo albero prodotto da *branch*) $f(t_1)$ ed infine $f(t_2)$. $\square$

2 Linguaggi di espressioni

2.1 Introduzione

Definizione 2.1. Sia L un linguaggio, un insieme di stringhe generate dalla grammatica

$$M, N ::= 1|2|...|M + N|M * N.$$

Esempio 2.2. Ad esempio $3 + 5$,$3 * 5$ e $4 * 5 + 2$ sono delle espressioni di L.

Introduciamo la funzione $eval : L \to \mathbb{N}$, per valutare la sintassi delle espressioni:

$$eval(n) = n$$

$$eval(M + N) = eval(M) + eval(N)$$

$$eval(M * N) = eval(M) * eval(N)$$

Possiamo definire la funzione *eval* per casi, ma non è stato definito un modo univoco per valutare delle espressioni come "$\mathbf{5} + \mathbf{4} * \mathbf{3}$", viene svolta prima la $*$ o il $+$?
Per come è stato costruito il linguaggio L dotato delle operazioni $+$ e $*$ non può essere un'algebra induttiva. Per disambiguare queste espressioni dobbiamo riformulare il linguaggio in modo da renderlo un algebra induttiva. Per iniziare dobbiamo dare una rappresentazione di senso univoco alle espressioni del tipo "$\mathbf{5} + \mathbf{4} * \mathbf{3}$", scriviamo più formalemente:

$$\mathbf{1} : \mathbb{1} \to L$$

$$\mathbf{2} : \mathbb{1} \to L$$

$$\vdots$$

$$times : L \times L \to L$$

$$plus : L \times L \to L$$

Allora $(L, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots, times, plus)$ è un'algebra induttiva. Quindi l'*eval* di "$\mathbf{5} + \mathbf{4} * \mathbf{3}$" può essere:

$$eval(\text{"}\mathbf{5} + \mathbf{4} * \mathbf{3}\text{"}) = \begin{cases} eval(times(plus(\mathbf{5}(\epsilon), \mathbf{4}(\epsilon)), \mathbf{3}(\epsilon))) \\ eval(plus(\mathbf{5}(\epsilon), times(\mathbf{4}(\epsilon), \mathbf{3}(\epsilon)))) \end{cases}$$

Pur essendo quella definita sopra la notazione corretta, utilizzarla per le nostre valutazioni risulterebbe inutilmente complessa, per questo motivo faremo uso della classica notazione con le parentesi per definire le precedenze. Ad esempio

$$plus(\mathbf{5}(\epsilon), times(\mathbf{4}(\epsilon), \mathbf{3}(\epsilon))) = 5 + (4 * 3).$$

2.2 Linguaggio *Exp*

Definiamo il linguaggio ***Exp*** costituito da espressioni di somma e *let*:

$$M, N ::= k|x|M + N| \text{ let } x = M \text{ in } N$$

dove k sono le costanti ed appartengono all'insieme dei valori $Val = \{1, 2, ...\}$; x sono le variabili in $Var = \{x, y, z, \dots\}$ ed M, N in termini di linguaggio in Exp.

2.2.1 Operatore *let*, variabili *libere e legate*

L'operatore *let* derivante dalla sintassi SML, indicato con $let\ x = M\ in\ N$ e con segnatura:

$$let : Var \times Exp \times Exp \to Exp$$

In questo modo definiamo una variabile locale x inizializzata al valore dell' espressione M, ed un corpo N che può contenre un riferimento ad x. Ad esempio

$$let\ x = 4\ in\ x + x$$

verrà valutata assegnando alla variabile x il valore 4, sommando $x+x$ e restituisce 8. Una variabile è *libera* in un termine T quando non compare in nessun N, sottotermine di T, della forma $let\ x = M\ in\ N$. Ogni occorrenza di x in N viene detta *legata* alla dichiarazione di x nel termine $let\ x = M\ in\ N$. Definiamo induttivamente la funzione $free : Exp \to \mathcal{P}(Var)$, che restituisce l'insieme delle variabili che occorrono libere in un'espressione :

$$free(k) = \varnothing$$

$$free(x) = \{x\}$$

$$free(M + N) = free(M) \cup free(N)$$

$$free(let\ x = M\ in\ N) = free(M) \cup (free(N - \{x\}))$$

A questo proposito definiamo lo *scoping* di una variabile come l'insieme delle regole che determinano la visibilità di una variabile all'interno del programma. Per *scope* di una variabile invece, si intende la porzione di programma in cui la variabile può essere riferita.

Esempio 2.3. Consideriamo le due espressioni in ***Exp***:

$$\text{let } x = M \text{ in let } y = N \text{ in } L \qquad (I)$$

$$\text{let } y = (\text{let } x = M \text{ in } N) \text{ in } L \qquad (II)$$

Se procediamo alla valutazione di (I) e (II), le due espressioni sembrerebbero essere equivalenti, quindi se le intercambiassimo all'interno di uno stesso programma, questo dovrebbe produrre lo stesso risultato. Ciò non succede nell'espressione qui sotto se valutata:

$$\text{let } x = 1 \text{ in [let } x = M \text{ in let } y = N \text{ in } L] \qquad (I')$$

$$\text{let } x = 1 \text{ in [let } y = (\text{let } x = M \text{ in } N) \text{ in } L] \qquad (II')$$

In questo caso (I') vale 6, mentre (II') vale 4.

2.3 Semantica operazionale di Exp

Il precedente esempio ci porta a riflettere sull'esistenza di un modo per dimostrare l'equivalenza di due programmi. Quest'ultimo è un compito molto più difficile rispetto alla dimostrazione della "non equivalenza", la quale solitamente necessità solo di un controesempio. Dobbiamo definire una **semantica operazionale** per il linguaggio ***Exp*** affinché sia possibile assegnare un significato alle sue operazioni. Assumeremo, con un'ipotesi semplificata, che il **significato** di un'espressione sia semplicemente il suo valore. Quello che intendiamo creare è un sistema formale con regole di inferenza simile a quello logico, che ci consenta di derivare delle conseguenza a partire da delle premesse iniziali. Per definire in modo formale una semantica operazionale è necessario fornire alcune nozioni preliminari.

Definizione 2.4. Una funzione f si dice **parziale** se può essere definita solo per un sottoinsieme del suo dominio, ed è indicata con la seguente notazione

$$f : D \rightharpoonup C.$$

f viene detta **parziale finita**, se il sottoinsieme del dominio per cui è definita è finito (scritta con $\overset{fin}{\rightharpoonup}$).

Definizione 2.5. Un *ambiente* è un'associazione tra variabili in Var e valori in Val, formalmente definiamo una funzione *parziale finita*

$$Env : Var \overset{fin}{\rightharpoonup} Val$$

Definizione 2.6. Siano E_1, E_2 sono due ambienti, allora la loro composizione (E_1E_2) è quell'ambiente che se applicato ad una variabile risulta:

$$(E_1E_2)x = \begin{cases} E_2(x) & \text{se definito} \\ E_1(x) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quindi per prima cosa si controlla se x è definito nell'ambiente E_2, se non definito controlla E_1.

Esempio 2.7. $(E_1E_2)(y) = (\{(x,2)(y,3)\}\{(y,4)\})(y) = 4$

Osservazione 2.8. Ricordiamo inoltre la forma di una regola logica:

$$\frac{premessa_1 \ldots premessa_k}{conseguenza} \quad \text{(condizione laterale\ldots)}$$

Risulta necessario sviluppare un insieme di regole che mi permettano, a partire da delle condizioni iniziali, di derivare dei sequenti come $E \vdash M \rightsquigarrow v$ dove, come specificato precedentemente, E è una funzione parziale Env, M è un termine di Exp e v è un valore in Val.

Definizione 2.9. La semantica operazionale di Exp è definita come una relazione

$$\rightsquigarrow \subseteq Env \times Exp \times Val$$

ovvero una relazione tra Env ed Exp che restituisce un valore in Val. Diamo ora una costruzione induttiva delle regole della relazione "$\rightsquigarrow$":

- *Regola della costante*: $E \vdash k \rightsquigarrow k$
- *Regola della variabile*: $E \vdash x \rightsquigarrow v$ (se $E(x) = v$)
- *Regola del plus*:

$$\frac{E \vdash M \rightsquigarrow v \quad E \vdash N \rightsquigarrow u}{E \vdash M + N \rightsquigarrow w} \qquad \text{(se } w = u + v\text{)}$$

- *Regola del let*:

$$\frac{E \vdash M \rightsquigarrow v \quad E(x, v) \vdash N \rightsquigarrow v'}{E \vdash let\ x = M\ in\ N \rightsquigarrow v'}$$

  dove con $E(x, v)$ componiamo l'ambiente E con l'associazione tra x e v.

Osservazione 2.10. Le premesse in una regola logica non hanno un ordine da seguire, da questo possiamo dedurre che la funzione *plus* sia commutativa. Ovviamente questo non è vero in ogni linguaggio, ad esempio

```
x + (x++) != (x++) + x (Java)
```

Per come è stata costruito il *let*, si potrebbe pensare che provochi una modifica all'ambiente, e che quindi sia importante tenere conto dell'ordine con cui viene eseguito, in realtà non è così. Infatti la dichiarazione fatta nel *let* è limitata all'espressione in M o N che sono fatte al suo interno, di conseguenza creeremo solo variabili locali.

Esempio 2.11. La valutazione delle espressioni attraverso la semantica operazionale appena definita viene detta valutazione *eager* ovvero, valuta le espressioni appena le incontra. Diamone la prova utilizzando le regole di derivazione sulla seguente espressione (*la valutazione parte dal basso e va verso l'alto*):

$$\cfrac{\varnothing \vdash 1 \rightsquigarrow 1 \quad \cfrac{(x,1) \vdash x \rightsquigarrow 1 \quad \cfrac{(x,1)(y,1) \vdash 2 \rightsquigarrow 2 \quad (x,1)(y,1)(x,2) \vdash y \rightsquigarrow 1}{(x,1)(y,1) \vdash let\ x = 2\ in\ y \rightsquigarrow 1}}{(x,1) \vdash let\ y = x\ in\ let\ x = 2\ in\ y \rightsquigarrow 1}}{\varnothing \vdash let\ x = 1\ in\ let\ y = x\ in\ let\ x = 2\ in\ y \rightsquigarrow 1}$$

Con le regole definite l'espressione è valutata 1, ma nel caso in cui la valutezione fosse stata *lazy* avremmo ottenuto come risultato 2, questo perché l'espressione viene valutata solo quando dev'essere utilizzata.

2.3.1 Semantica operazionale "*lazy*"

Per ottenere una valutazione *lazy* è necessario modificare la *Regola del let* e la *Regola della variabile*:

- *Regola del let modificata*:

$$\frac{E(x, M) \vdash N \rightsquigarrow v}{E \vdash let\ x = M\ in\ N \rightsquigarrow v}$$

  dove $E(x, M)$ indica la composizione dell'ambiente E con l'associazione della variabile x all'espressione non valutata M.

- *Regola della variabile modificata*

$$\frac{E \vdash M \rightsquigarrow v}{E \vdash x \rightsquigarrow v} \quad (\text{se } E(x) = M)$$

In questo modo dobbiamo valutare una certa espressione M solo se è richiesto il suo valore.

2.3.2 Semantica *lazy* con *scoping statico*

La modifica delle regole oltre a cambiare il tipo di valutazione, sta cambiando anche lo *scoping* del linguaggio. Infatti con la valutazione *eager* lo scoping era *statico*, ma con l'introduzione delle regole *lazy* lo scoping è diventato *dinamico*. Per ottenere una semantica *lazy statica* dobbiamo modificare ulteriormente le regole:

$$[let]_{LS} \quad \frac{E(x, M, E) \vdash N \rightsquigarrow v}{E \vdash let\ x = M\ in\ N \rightsquigarrow v}$$
$$[var]_{LS} \quad \frac{E' \vdash M \rightsquigarrow v}{E \vdash x \rightsquigarrow v} \quad (\text{se } E(x) = (M, E'))$$

Quello che stiamo facendo è tenere conto dell'ambiente E in cui inizialmente abbiamo l'associazione (x, M), quindi è necessario estendere la funzione Env:

$$Env : Var \overset{fin}{\rightharpoonup} Exp \times Env \quad (I)$$

La (I) è chiamata *equazione ricorsiva di domini*, la soluzione dell'equazione è ogni insieme X per cui

$$X : Var \overset{fin}{\rightharpoonup} Exp \times X$$

in particolare possiamo avere una soluzione con *ambienti alti*, ovvero una serie di ambienti infinitamente annidati; altrimenti avremo degli *ambienti bassi*. Risulta chiaro che un ambiente *alto* ad esempio

$$E = \{(x, \{(x, \{(x, \{\dots\} \dots)\}$$

non terminerà mai la valutazione di x nel caso in cui ne avesse bisogno. Nel caso dello *scoping statico* tengo conto dell'ambiente in cui ho eseguito una determinata associazione; se invece lo *scoping* è *dinamico* utilizzo l'ambiente attuale per eseguire la valutazione.

Osservazione 2.12. La valutazione *lazy* non è sempre più efficiente di quella *eager*, infatti ogni volta che avremo bisogno di un valore, se utilizziamo la *laziness* dobbiamo ricalcolarlo per ogni occorrenza. Ad esempio

$$let\ x = M\ in\ x + x + x + x + x$$

se M è un termine complesso, la valutazione *lazy* è estremamente inefficiente.

Esempio 2.13. Valutiamo la seguente espressione con la semantica *lazy statica*:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varnothing \vdash 3 \rightsquigarrow 3}{E \vdash x \rightsquigarrow 3}\;(E(x) = (3, \varnothing))}{E'' = E'(x, 5, E') \vdash y \rightsquigarrow 3}\,(E''(y) = (x, E))}{E' = E(y, x, E) \vdash let\ x = 5\ in\ y \rightsquigarrow 3}}{E = (x, 3, \varnothing) \vdash let\ y = x\ in\ let\ x = 5\ in\ y \rightsquigarrow 3}}{\varnothing \vdash let\ x = 3\ in\ let\ y = x\ in\ let\ x = 5\ in\ y \rightsquigarrow 3}$$

La valutazione sarebbe stata la stessa se avessimo utilizzato le regole della sematinca *eager*.

Definizione 2.14. Un ambiente *eager* E si dice *equivalente* ad un ambiente *lazy statico* E', se per ogni variabile x, con $E(x) = v$, esistono M ed E'' tali che $E'(x) = (M, E'')$ e $E'' \vdash M \rightsquigarrow v$.

Teorema 2.15.

$$E \vdash M \rightsquigarrow_E v \iff E' \vdash M \rightsquigarrow_{LS} v$$

ovvero le semantiche lazy statica e eager sono equivalenti se e solo se E, E' *non sono ambienti alti.*

3 Linguaggio *Fun*

Il linguaggio Fun estende il linguaggio Exp con la nozione di $funzione$, quindi possiamo aggiungere al precedente linguaggio le seguenti clausole:

$$fn\ x \implies M|MN,$$

quindi

$$MN ::= k|x|M + N|let\ x = M\ in\ N|\ fn\ x \implies M|MN$$

Successivamente mostreremo che le clausole definite nel linguaggio Exp, ad eccezione delle *variabili* non sono necessarie in Fun. L'operazione fn ha segnatura:

$$fn : Var \times Fun \to Fun$$

Osservazione 3.1. L'operazione fn prende una sola variabile in input, per costruire "funzioni a più variabili" possiamo comporre più operatori fn

$$fn\ x_1 \implies (fn\ x_2 \implies \ldots (fn\ x_k \implies M)$$

Per comodità la notazione sopra sarà equivalente a $fn\ x_1 \ldots x_k \implies M$.

Esempio 3.2. $fn\ xy \Rightarrow x + y$, nella scrittura completa $fn\ x \Rightarrow fn\ y \Rightarrow x + y$. Utilizzando la clausola $fn\ x \Rightarrow MN$ stiamo applicando M ad N, ad esempio

$$(fn\ xy \to yx)(fn\ x \Rightarrow x + 1)(fn\ x \Rightarrow x)3$$

In questo caso a la prima funzione a partire da sinistra inverte x ed y, applicando la funzione successore ad y e ad x la funzione identica, successivamente passo 3 alla funzione successore ottenendo 4.