

Formelsammlung

July 9, 2018

Contents

1	Bayes'scher Ansatz	3
1.1	Entscheidungsregionen	3
1.1.1	Ungleiche Klassifizierungswahrscheinlichkeit	3
1.1.2	Fehlklassifizierung	3
1.1.3	Umformung	3
1.1.4	pq-Formel	4
1.2	Zurückweisung	4
2	Lineare Klassifikatoren	5
2.1	Fisher Diskriminante	5
2.2	Lineare Kleinste Quadrate	6
3	Perceptron	6
3.1	Bestimmung der Diskriminanzfunktion	6
3.1.1	Bestimmung der nächsten Diskriminanzfunktion	7
4	Hough-Transformation	7
5	Abstandsmaße	7
6	Lösungen für Probeklausur	8
6.1	ProbeKlausur Muster SS17	8
6.1.1	Aufgabe 1	8
6.1.2	Aufgabe 2	8
6.1.3	Aufgabe 3	10
6.1.4	Aufgabe 4	11
6.1.5	Aufgabe 5	11
6.2	Prüfungs SS17	12
6.2.1	Aufgabe 1	12
6.2.2	Aufgabe 2	12

1 Bayes'scher Ansatz

1.1 Entscheidungsregionen

Bei gleicher Klassifizierungswahrscheinlichkeit gilt

$$p(x|C_1) = p(x|C_2)$$

$$p(x|C_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu_i)^2}{\sigma_i^2}}$$

1.1.1 Ungleiche Klassifizierungswahrscheinlichkeit

Wenn eine Klasse wahrscheinlicher ist so gilt

$$p(C_1) \cdot p(x|C_1) = p(x|C_2) \cdot p(C_2)$$

$$\frac{p(C_1)}{p(C_2)} \cdot \frac{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} = e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} - \frac{1}{2} \frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}}$$

$\frac{p(C_1)}{p(C_2)}$ definieren wir als \mathcal{P} . Als Reziproke von \mathcal{P} bezeichnen wir \mathcal{P}' . Bei gleichen Wahrscheinlichkeiten $p(C_{1/2}) = 0,5$ ist $\mathcal{P} = 1$ und kann ignoriert werden.

1.1.2 Fehlklassifizierung

Wenn eine Verlustmatrix V gegeben ist so wird die Gewichtung der Fehlklassifikation pro Klasse berücksichtigt über

$$V_{1,2} \cdot p(x|C_1) = p(x|C_2) \cdot V_{2,1}$$

$$\frac{V_{1,2}}{V_{2,1}} \cdot \frac{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} = e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} - \frac{1}{2} \frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}}$$

$\frac{V_{1,2}}{V_{2,1}}$ definieren wir als \mathcal{V} . Bei gleicher Verlustgewichtung $V_{(1/2),(2/1)} = x$ ist $\mathcal{V} = 1$ und kann ignoriert werden.

1.1.3 Umformung

Mit diesen Parametern kann die Formel wie folgt umgeformt werden

$$\ln(\mathcal{P} \cdot \mathcal{V} \cdot \frac{\sqrt{\sigma_2^2}}{\sqrt{\sigma_1^2}}) = \frac{-\frac{1}{2}(x-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} - \frac{-\frac{1}{2}(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} \quad (1)$$

$$\sigma_2^2 \cdot \sigma_1^2 \cdot \ln(\mathcal{P} \cdot \mathcal{V} \cdot \frac{\sqrt{\sigma_2^2}}{\sqrt{\sigma_1^2}}) = -\frac{1}{2} \cdot \sigma_1^2 (x - \mu_2)^2 - \frac{1}{2} \cdot \sigma_2^2 (x - \mu_1)^2 \quad (2)$$

$$= \sigma_1^2 (x^2 - 2\mu_2 x + \mu_2^2) - \sigma_2^2 (x^2 - 2\mu_1 x + \mu_1^2) \quad (3)$$

$$= (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \cdot x^2 + (-\mu_2 \sigma_1^2 + \mu_1 \sigma_2^2) 2x + \sigma_1^2 \mu_2^2 - \sigma_2^2 \mu_1^2 \quad (4)$$

$$0 = (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \cdot x^2 + (-\mu_2 \sigma_1^2 + \mu_1 \sigma_2^2) 2x + \sigma_1^2 \mu_2^2 - \sigma_2^2 \mu_1^2 + 2 \cdot \sigma_2^2 \cdot \sigma_1^2 \cdot \ln(\mathcal{P} \cdot \mathcal{V} \cdot \frac{\sqrt{\sigma_2^2}}{\sqrt{\sigma_1^2}}) \quad (5)$$

1.1.4 pq-Formel

Benötigt einen Ausdruck der Form $x^2 + px + q = 0$. Um die pq-Formel $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$ anzuwenden muss der Term mit $/ \div (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)$ umgeformt werden

1.2 Zurückweisung

$$p(C_1|x) \geq \theta$$

$$p(C_1|x) = \frac{p(C_1) \cdot p(x|C_1)}{p(x)}$$

$$p(x) = p(C_1) \cdot p(x|C_1) + p(C_2) \cdot p(x|C_2)$$

$$\frac{p(C_1) \cdot p(x|C_1)}{p(C_1) \cdot p(x|C_1) + p(C_2) \cdot p(x|C_2)} \geq \theta$$

Dieser Ausdruck hat die Form $\frac{A}{A+B}$ was umgeformt werden kann in $\frac{1}{1+\frac{B}{A}}$

$$\frac{1}{1 + \frac{p(C_2) \cdot p(x|C_2)}{p(C_1) \cdot p(x|C_1)}} \geq \theta$$

$$1 \geq \theta \left(1 + \frac{p(C_2) \cdot p(x|C_2)}{p(C_1) \cdot p(x|C_1)} \right) \quad (6)$$

$$\frac{1}{\theta} \geq 1 + \mathcal{P}' \cdot \frac{p(x|C_2)}{p(x|C_1)} \quad (7)$$

$$\frac{1}{\theta} - 1 \geq \mathcal{P}' \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}}} \quad (8)$$

$$\frac{1}{\theta} - 1 \geq \mathcal{P}' \cdot \frac{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} + \frac{1}{2} \frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}} \quad (9)$$

Nun kann analog zu 1 der Term weiter umgeformt werden zu

$$0 = (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \cdot x^2 + (-\mu_2 \sigma_1^2 + \mu_1 \sigma_2^2) 2x + \sigma_1^2 \mu_2^2 - \sigma_2^2 \mu_1^2 + 2 \cdot \sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2 \cdot \ln\left(\left(\frac{1}{\theta} - 1\right) \cdot \mathcal{P}' \cdot \frac{\sqrt{\sigma_2^2}}{\sqrt{\sigma_1^2}}\right)$$

Nun muss für $p(C_2|x)$ dies Analog geschehen

$$\frac{p(C_2) \cdot p(x|C_2)}{p(C_1) \cdot p(x|C_1) + p(C_2) \cdot p(x|C_2)} \geq \theta$$

$$\frac{1}{1 + \frac{p(C_1) \cdot p(x|C_1)}{p(C_2) \cdot p(x|C_2)}} \geq \theta$$

$$\frac{1}{\theta} \geq 1 + \mathcal{P} \cdot \frac{p(x|C_1)}{p(x|C_2)}$$

$$\frac{1}{\theta} - 1 \geq \mathcal{P} \cdot \frac{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \cdot e^{-\frac{\frac{1}{2}(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{\frac{1}{2}(x-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}}$$

$$0 = (\sigma_2^2 - \sigma_1^2) \cdot x^2 + (-\mu_1 \sigma_2^2 + \mu_2 \sigma_1^2) 2x + \sigma_2^2 \mu_1^2 - \sigma_1^2 \mu_2^2 + 2 \cdot \sigma_1^2 \cdot \sigma_2^2 \cdot \ln\left(\left(\frac{1}{\theta} - 1\right) \cdot \mathcal{P} \cdot \frac{\sqrt{\sigma_1^2}}{\sqrt{\sigma_2^2}}\right)$$

2 Lineare Klassifikatoren

Klassifizieren eines Vektors V wird durch Wenn $V = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ so kann die Gleichung gegen null gesetzt werden und dieses Ergebniss ist die Diskriminanzfunktion.

$$-w^{*T} \cdot V - w_0 \quad (10)$$

Das Signum des Ergebnisses gibt die Klassifizierung an.

2.1 Fisher Diskriminante

Berechnen des Klassenmittelpunktes μ der Klasse i

$$\mu_i = \frac{1}{|i|} \left(\sum_{k \in C_i} x_k \right)$$

Berechnen der Kovarianz zwischen den Klassen

$$S_B = (\mu_2 - \mu_1)(\mu_2 - \mu_1)^T$$

Berechnen der Gesamtkovarianz innerhalb der Klassen

$$S_W = \sum_{k \in C_1} (x_k - \mu_1)(x_k - \mu_1)^T + \sum_{k \in C_2} (x_k - \mu_2)(x_k - \mu_2)^T$$

$$w^* = S_w^{-1}(\mu_2 - \mu_1)$$

$$w_0^* = w^{*T} \frac{1}{N} (N_1 \mu_1 + N_2 \mu_2)$$

wobei N die Anzahl aller Klassifizierten Vektoren und N_i die Anzahl der Vektoren die in der Klasse i ist

Über 10 kann nun die Diskriminanzfunktion bestimmt oder Punkte Klassifiziert werden.

2.2 Lineare Kleinste Quadrate

Erweitern von w in höhere Dimension

Berechnung der Diskriminanzfunktion w^*

$$w^* = (X X^T)^{-1} X t^T$$

Über 10 kann nun die Diskriminanzfunktion bestimmt oder Punkte Klassifiziert werden.

3 Perceptron

Überführung des Inputs in höher Dimensionales Problem $x \in R^{D+1}$

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \dots \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & \dots \\ \vdots & & & & \end{pmatrix}$$

3.1 Bestimmung der Diskriminanzfunktion

zum Zeitpunkt t

$$\begin{aligned} g &= w^T x + w_0 \cdot 1 \\ &= \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + w_0 \cdot 1 \\ &= \begin{pmatrix} w_0 & w_1 & w_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ 0 &= w(t)^T * \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{11}$$

Durch einsetzen kann auch die Klassifikation eines Punktes bestimmt werden.

3.1.1 Bestimmung der nächsten Diskriminanzfunktion

$$w(t+1) = w(t) - \rho(t) \frac{\partial}{\partial w} J(w)|_{w=w(t)}$$

$$\frac{\partial}{\partial w} J(w)|_{w=w(t)} = \sum_{k \in Y} -t_k \cdot x_k$$

wobei Y die Menge aller falsch klassifizierten Punkte beschreibt.

4 Hough-Transformation

$r(\rho) = \cos(\rho) \cdot x_1 + \sin(\rho) \cdot x_2$ wobei ρ die Abtaste ist.

5 Abstandsmaße

d_1 = manhattan Abstand. Definiert durch $d_1 = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$
 d_2 = euklidischer Abstand. Definiert durch $d_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

6 Lösungen für Probeklausur

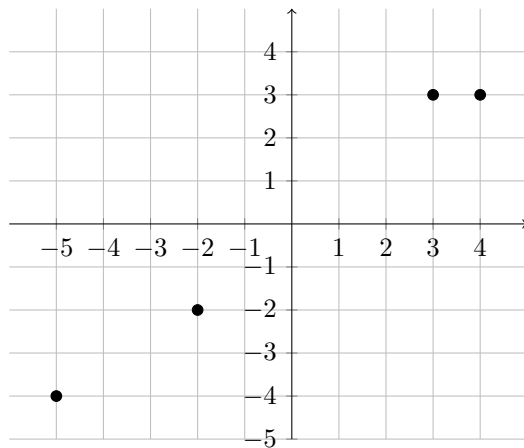
6.1 ProbeKlausur Muster SS17

6.1.1 Aufgabe 1

- a:
- b: $x_1 = 1,07449, x_2 = 8,06836$
- c: $x_1 = 0,590907, x_2 = 8,55195$
- d: $x_1 = 1,00744, x_2 = 8,13541$
- e:
 $p(C_1|x) : x_1 = 0,8805, x_2 = 8.26236$
 $p(C_2|x) : x_1 = 1,2799, x_2 = 7,8629$

6.1.2 Aufgabe 2

- a:

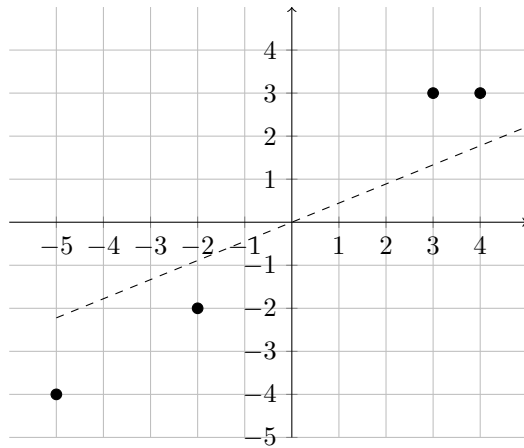


• b:

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} -3.5 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$S_w = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$w^* = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix} \quad w_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



• c:

$$w^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{8}{27} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad w_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

• d:

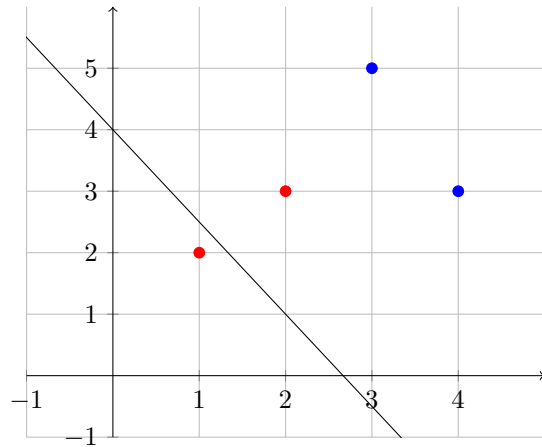
$$w^* \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - w_0$$

$$\text{Fischer:} = -1$$

$$\text{KLQ:} = -\frac{2}{277}$$

6.1.3 Aufgabe 3

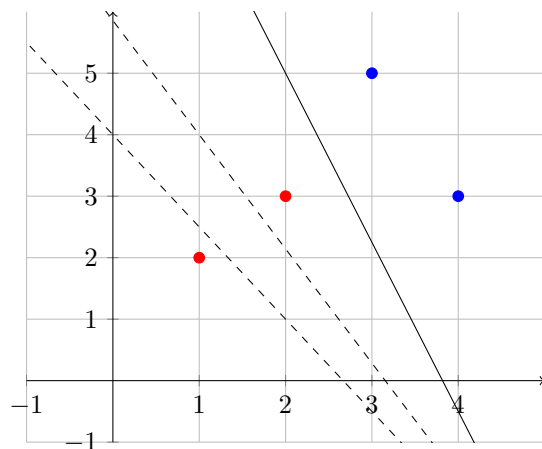
• a:



• b:

$$w(1) = \begin{pmatrix} 4.1 \\ -1.3 \\ -0.7 \end{pmatrix}$$

$$w(2) = \begin{pmatrix} 4.2 \\ -1.1 \\ -0.4 \end{pmatrix}$$



• c: Der Algorithmus endet sobald alle Punkte richtig Klassifiziert werden. Die Schrittweite bestimmt dabei wie schnell/langsam sich die Gerade im Raum bewegt. Bei einer zu großen Schrittweite kann unter Umständen

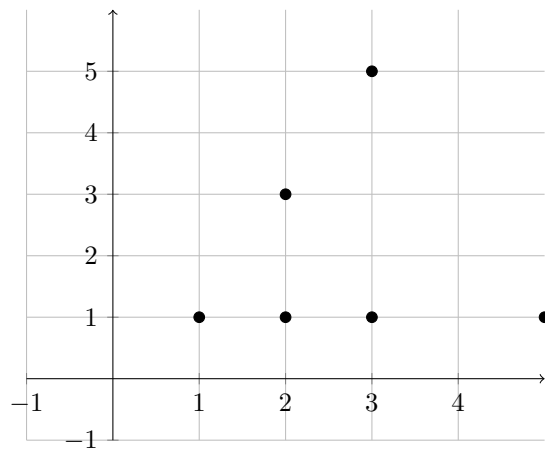
keine richtige Klassifizierung gefunden werden. Wird die Schrittweite zu klein gewählt so dauert die Berechnung unnötig lang.

- d: $w(2)^T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{7}{10}$

$\text{sig}(-\frac{7}{10})$ ist negativ deswegen würde der Punkt auf $-$ Klassifiziert werden.

6.1.4 Aufgabe 4

- a:



- b:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$-\frac{2\pi}{3}$	-1.366	-1.866	-3.59	-2.37	-5.83	-3.37
$-\frac{\pi}{3}$	-0.366	0.134	-1.59	0.63	-2.83	1.63
0	1	2	2	3	3	5
$\frac{\pi}{3}$	1.366	1.866	3.59	2.37	5.83	3.37
$\frac{2\pi}{3}$	0.366	-0.134	1.59	-0.63	2.83	-1.63

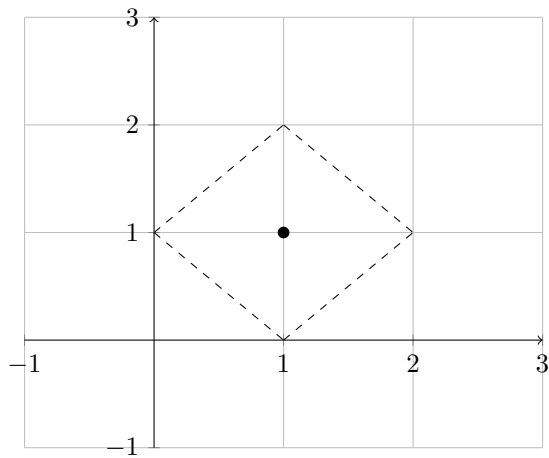
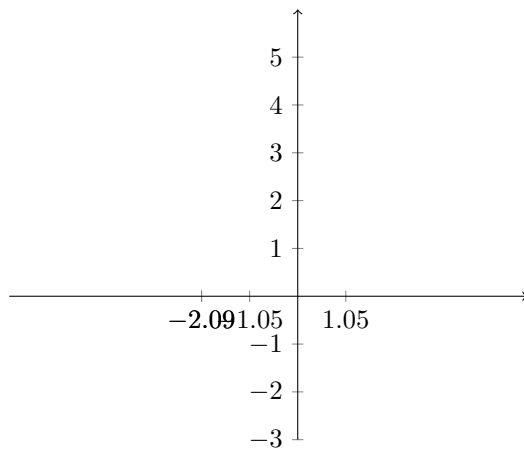
6.1.5 Aufgabe 5

- a

- $a1 = \sqrt{5}$
- $a2 = 3$
- $a3 = \sqrt{5}$

- b

- c d_{max}



6.2 Prüfungs SS17

6.2.1 Aufgabe 1

6.2.2 Aufgabe 2

- a

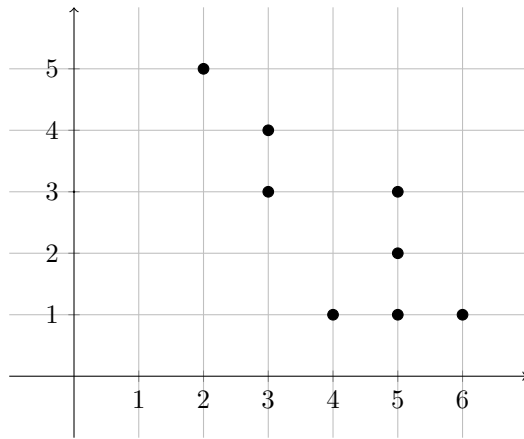
- b

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix}$$

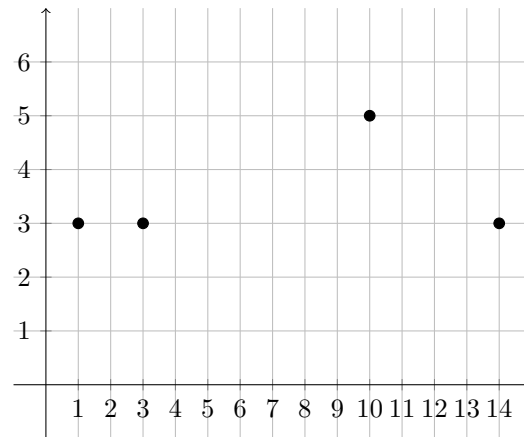
$$S_w = \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$w^* = \begin{pmatrix} 6 \\ 12\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad w_0 = 85.75$$

- c



- d: 1 und zweiter Punkt tauschen



Aufgabe c:

