Matematik Uygulamaları- II

4.Hafta-Matrisler

Aşağıda verilen **A**, **B** ve **C** matrisleri için $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ve $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^T$ u bulunuz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -7 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = [7, -8, -9]$$

Verilen matrisler için $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$ olduğunu gösteriniz.

$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ ve $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}4 & 5\\ 6 & -7\end{bmatrix}$ için $(\mathbf{BA})^T=\mathbf{A}^T\mathbf{B}^T$ olduğunu gösteriniz.

Bloklanmış Matris

Eğer bir matris, satırları ve kolonları arasına çizilen yatay ve dikey doğrularla daha küçük matrislere bölünmüşse böyle bir matrise *bloklanmış* matris denir. Aşağıdaki matrisin bloklarını belirleyiniz.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

A, en az bir bloklama doğrusu kullanarak $2^5 - 1 = 31$ değişik şekilde bloklanabilir. Her iki satır ve her iki kolon arasına bir doğru yerleştirerek **A** yı oniki 1×1 matrise böleriz,

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c:c:c:c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hdashline 0 & 0 & 5 & 6 \\ \hdashline 7 & 8 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

Birinci ve ikinci satır arasına bir doğru ve ikinci ile üçüncü kolon arasına bir diğer doğru yerleştirirsek aşağıdaki bloklamayı oluştururuz:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hdashline 0 & 0 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -1 & -2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{E} & \mathbf{F} \end{bmatrix}$$

Burada

$$\mathbf{B} = [1,2] \quad \mathbf{C} = [3,4] \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Üçüncü bir bloklama, **A** nın üçüncü ve dördüncü kolonu arasına bir doğru yerleştirerek oluşturulabilir. O zaman **A**=[**G**, **H**] olur, burada

Matris Tersi Özellikleri

Özelik 4.1: Tekil olmayan bir matrisin tersi tektir.

Özelik 4.2: Eğer **A** tekil değilse, o zaman $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$.

Özelik 4.3: Eğer **A** ve **B** tekil değilse, o zaman $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

Özelik 4.4: Eğer **A** tekil değilse, $\mathbf{A}^T$ de tekil değildir. Ayrıca, $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$.

Aşağıdaki matrisin

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ -0.25 & 0.25 \end{bmatrix}$$

verilen matrislerden herhangi birinin tersi olup olmadığını belirleyiniz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Verilen matrisleri sırayla inceleyeceğiz.

$$\mathbf{AG} = \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ -0.25 & 0.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisi birim matris olmadığından **G**, **A** nın tersi değildir.

B kare değildir, bu yüzden tersi yoktur. Özel durumda, **BG** çarpımı tanımsızdır.

C için, matris çarpımıyla,

$$\mathbf{CG} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ -0.25 & 0.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$\mathbf{GC} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ -0.25 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

böylece **G**, **C** nin tersidir.

G ve **D** aynı boyutta değildir, bu nedenle birbirlerinin tersi olamazlar.

19.1 Determinatlar

1×1 **Matrislerin determinantı**

A matrisi en basit 1×1 tipinde bir matris olsun. Tek bileşeni sayı olan bu tip matrislerin determinantı, bileşen sayısıdır.

$$A = [12]$$

matrisi 1×1 tipinde olan bir matristir ve determinantı $|A| = 12$ olur. Benzer olarak,

$$A = (-12)$$

matrisi 1×1 tipinde olan bir matristir ve determinantı $|A| = -12$ olur.

2×2 **Matrislerinin determinantı**

A matrisi 2×2 tipinden bir matris olsun:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

2×2 tipinden olan bu matrisin determinantı $|A| = (-1)(-4) - (3)(2) = -2$ biçiminde tanımlanır. Genel olarak,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

gibi 2×2 tipinden olan bir matrisin deteminantı

$$|A| = ab - cd$$

olarak tanımlanır.

3×3 Matrislerinin determinantı

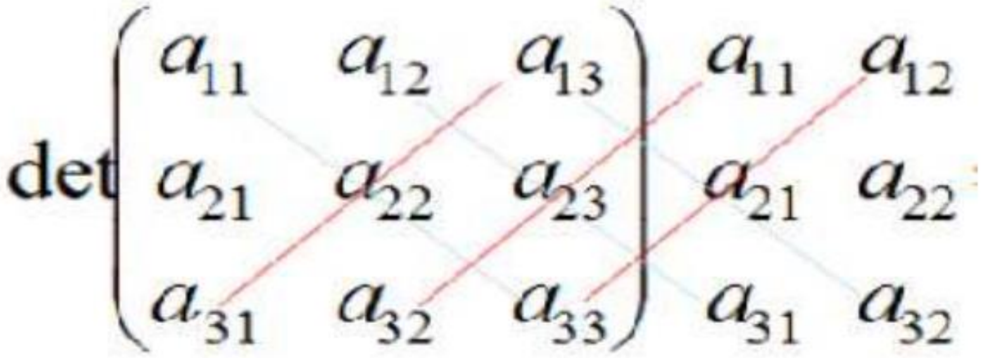
A matrisi 3×3 tipinden bir matris olsun:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

3×3 tipinden olan bu matrisin determinantı

biçiminde tanımlanır. genel olarak,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$



Şekil 19.1: Sarrus Yöntemi

gibi 3×3 tipinden olan bir matrisin determinantı

$$
\begin{aligned}
det(A) &= |A| \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
&- (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})
\end{aligned}
$$

olarak tanımlanır. Ancak bu tanım öncekilere göre biraz daha karmaşıktır. Bu karmaşıklığı yoketmek için daha basit bir yollar izlenebilir. izlenebilecek yollardan birisi, 3×3 tipinden matrislerin determinantını bulmaya yarayan Sarrus yöntemidir. Oldukça pratik olan bu yöntemi öğrenmek kolaydır.

KAPADOKYA ÜNİVERSİTESİ
Akıl - Ahlak - Adalet - Adap

Sarrus Yöntemi

3×3 tipinden A matrisinin sağ yanına birinci ve ikinci kolon bileşenlerini Şekilde görüldüğü gibi ekleyelim. Sonra $a_{11} a_{22} a_{33}$ asal köşegeni ile onun üstünde ve ona paralel çizgilerle gösterilen öğelerin çarpımlarının toplamını yazalım. Benzer olarak, ($a_{31} a_{22} a_{13}$ yedek köşegeni ile onun altında ve ona paralel çizgilerle gösterilen öğelerin çarpımlarının toplamını yazalım. Sonra birinci toplamdan ikinciyi çıkaralım. Çıkan sayı, verilen matrisin deterinantıdır (bkz. Şekil 19.1).

Sarrus yönetimi 3×3 tipinden matrislerin determinantlarını bulurken pratik kolaylık sağlar. Ama daha büyük boyutlu matrislere uygulanamaz. O nedenle, her tipten matrislere uygulanabilecek genel bir yönteme gereksinim vardır.

Laplace Yöntemi

Minör

$n \times n$ tipinden

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}, \dots, a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}, \dots, a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}, \dots, a_{nn} \end{pmatrix}$$

matrisinin herhangi bir a_{ij} bileşeninin *minör*ü şöyle tanımlanır:

i-inci satır le j-inci kolon atılır. Geri kalan matrisin determinantı a_{ij} bileşenine karşılık gelen *minör*'dür. Buna göre, yukardaki A matrisinin a_{ij} bileşenine karşılık gelen minör

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & \square & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & \square & \cdots & a_{2n} \\ & & & \cdots & & & \\ \square & \square & \square & \cdots & \square & \cdots & \square \\ & & & \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & \square & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

biçimindeki matrisin determinantıdır. Onu

$$min(a_{ij}) = M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & \square & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & \square & \cdots & a_{2n} \\ & & & \cdots & & & \\ \square & \square & \square & \cdots & \square & \cdots & \square \\ & & & \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & \square & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

biçiminde gösterelim. Tabii, minörü yazarken, yukarıda bileşenleri $\square$ ile gösterilen i-inci satır ile j-inci kolonun silineceğini unutmayacağız.

örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 10 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

matrisinin ikinci satırındaki bileşenlerin minörlerini bulalım. Önce A matrisini

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

matrisi gibi gibi düğünürsek, bu matrisin ikinci satırındaki bileşenlerine göre minörleri şöyle bulunur:

$a_{21} = 3$ bileşeninin minörü, a_{21} bileşenin bulunduğu 2. satır ve 1. kolon atılınca geri kalan 2×2 matrisinin determinantıdır:

$$min(a_{21}) = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Bu determinantın değeri

$$= 2.4 - 3.3 = 8 - 9 = -1$$

olur. Benzer olarak, $a_{22} = 1$ bileşenini minörü, a_{22} bileşenin bulunduğu 2. satır ve 2. kolon atılınca geri kalan 2×2 matrisinin determinantıdır:

$$min(a_{21}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Bu determinantın değeri

$$= 6.4 - 3.10 = 24 - 30 = -6$$

olur. Son olarak, $a_{23} = 1$ bileşeninin minörü, a_{23} bileşenin bulunduğu 2. satır ve 3. kolon atılınca geri kalan 2×2 matrisinin determinantıdır:

$$min(a_{13}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Bu determinantın değeri

$$= 6.3 - 2.10 = 18 - 20 = -2$$

olur.

$$min(a_{21}) = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Bun determinantın değeri

$$= 3.3 - 1.10 = 9 - 10 = -1$$

olur.

Örnek:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

matrisinin determinatını Sarrus yöntemiyle ya da Laplace yöntemiyle hesaplayabiliriz:

Sarrus Yöntemiyle Hesap:

Laplace Yöntemiyle Hesap:

KAPADOKYA ÜNİVERSİTESİ
Akıl - Ahlak - Adalet - Adap

İŞARETLİ MİNÖRLERLE AÇILIM

Bir **A** kare matrisinin deter*minantı*, det **A** veya |**A**| ile gösterilir ve bir skalardır. Eğer matris, elemanlarının bir dizini olarak yazılırsa, o zaman matrisin determinantı, köşeli parantez düz parantez ile değiştirilerek belirtilir. 1×1 matrisler için,

$$\det \mathbf{A} = |a_{11}| = a_{11}$$

2×2 matrisler için,

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

dir. $n > 2$ için $n \times n$ matrislerin determinantı, aşağıda gösterildiği gibi bir indirgeme işlemi ve minörleri ile işaretli minörleri kullanan bir açılımla hesaplanır.

Bir **A** $n \times n$ matrisinin M_{ij} *minörü*, **A** dan i–yinci kolon ve j-yinci satır tümüyle çıkarıldığında kalan $(n-1) \times (n-1)$ alt matrisin determinantıdır.

Örnek 5.1 Aşağıdaki **A** matrisi için,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

birinci satır elemanlarının minörleri, sırası ile,

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 4(8) - 5(7) = -3$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 0(7) - 1(6) = -6$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1(5) - 2(4) = -3$$

bulunur.

Bir **A** $n \times n$ matrisinin A_{ij} *işaretli minörü*, ilgili minör cinsinden

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

olarak tanımlanır. Şimdi herhangi i veya j ($i, j = 1, 2, \ldots, n$) için,

$$\det \mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj}$$

olur. Herbir i için, *(5.1)* deki birinci toplam, **A** nın i–yinci satırı boyunca bir açılım; herbir j için, ikinci toplam da **A** nın j–yinci kolonu boyunca bir açılımı gösterir. Eğer varsa, birçok sıfır barındıran bir satır veya kolonun seçimi det **A** nın hesaplanmasını büyük miktarda kolaylaştı-

Aşağıdaki matrislerin determinantlarını hesaplayınız.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Aşağıdaki matrisin determinantını,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -5 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

(*a*) İlk satır, (*b*) ilk kolon, ve (*c*) ikinci kolon boyunca açarak hesaplayınız.

Aşağıdaki matrisin determinantını,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -5 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

(*a*) İlk satır, (*b*) ilk kolon, ve (*c*) ikinci kolon boyunca açarak hesaplayınız.

Aşağıdaki matrisin determinantını,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -2 & 7 & 6 \\ 5 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$

(*a*) İkinci satır ve (*b*) üçüncü kolon boyunca açarak hesaplayınız.

Soru: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ $\det A = ?$

$\det A = 1.A_{11} + 2.A_{12} + 0.A_{13} = A_{11} + 2A_{12} = -14 + 2.(-4)$

$= -14 - 8$

$= -22$ //

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1.(-12-2) = -14$ //

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -1.(4-0) = -4$

KAPADOKYA ÜNİVERSİTESİ
Akıl - Ahlak - Adalet - Adap

DETERMİNANT ÖZELLİKLERİ

① Bir matriste tamamen 0'dan oluşan satır veya sütun bulunursa o matrisin determinantı 0 dır.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = ? \quad 0$$

(2) Bir matriste bir satır veya sütun, başka bir satır veya sütunun aynısı veya katı ise determinant 0 olur.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 15 \\ 2 & 1 & 10 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 7 & -3 \\ -2 & -4 & 2 & -8 \end{vmatrix} = 0$$

Bir matriste iki satır veya iki sütun yer değiştirirse determinantın işareti değişir.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = 10 \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & k \\ d & e & f \end{vmatrix} = ? \quad -10$$

Bir matrisin bir satırı veya bir sütunu bir sayı ile çarpılırsa determinant ta o sayı ile çarpılmalıdır.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = 10 \qquad \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = 2.10 = 20$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = 10 \qquad \begin{vmatrix} a & b & 3c \\ d & e & 3f \\ g & h & 3k \end{vmatrix} = 3.10 = 30$$

KAPADOKYA ÜNİVERSİTESİ
Akıl - Ahlak - Adalet - Adap

Bir satır bir başka satıra eklenir veya çıkarılırsa, bir satır bir sayı ile çarpılıp diğer bir satıra eklenir veya çıkarılırsa determinant değişmez.

Soru: $\begin{vmatrix} 2010 & 2011 \\ 2012 & 2013 \end{vmatrix} = ?$ $\begin{vmatrix} \cancel{2010} & \cancel{2011} \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$

$4020 - 4022 = -2$ //

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = 10$ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d+a & e+b & f+c \\ g-3a & h-3b & k-3c \end{vmatrix} = ?\ 10$ //

$$\det(A.B) = \det A . \det B \;//$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} \;//$$

$$\det(A^{T}) = \det A$$

$$\det(A^{n}) = (\det A)^{n}$$

$$\det(k.A) = k^{\text{satırsayısı}} . \det A = k^{n} . \det A$$

Soru: $\det A = 3$ $\det B = 5$ $A \Rightarrow 3\times 3$

$B \Rightarrow 3\times 3$

a) $\det(A.B) = ?$ $3.5 = 15$ //

b) $\det(A^{-1}) = ?$ $\dfrac{1}{\det A} = \dfrac{1}{3}$

c) $\det(B^{T}) \longrightarrow 5$ //

d) $\det(A^{4}) = ?$ $(\det A)^{4} = 3^{4} = 81$ //

e) $\det(2A) = 2^{3}.\det A = 8.3 = 24$ //