Hafta Matematik Uygulamaları-I

Matris ve Uygulamaları-I

Matrisler

Matris, nesnelerin dikdörtgensel bir biçemde düzenlenmesidir. Matris içine konulan öğelere, matrisin öğeleri ya da bileşenleri diyeceğiz. Matrisler günlük yaşamda çok kullanılan varlıklardır. Örneğin, bir tren istasyonunda trenlerin hareket saatlerini gösteren tablo bir matristitr. Bir lokantada müşteriye sunulan yemek listesi bir matristir. Bir sınıf listesi bir matristir.

Örnekler:

$$A = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}$$

matrisi 1×1 tipinden bir matristir. Tek bileşeni (öğe) 1 dir.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 8 & -9 & 6 \end{pmatrix}$$

matrisinin 2 satırı ve 3 kolonu vardır. 2×3 tipinden bir matristir.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & -5 & 6 \\ 7 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisinin 3 satırı ve 3 kolonu vardır. 3×3 tipindendir.

Satır ve Kolon

Birden çok bileşeni olan matrislerde, yatay doğrultuda ve aynı hizada yer alan bileşenlerden oluşan kümeye *satır*, düşey doğtultuda ve aynı hizada yer alan bileşenlerden oluşan kümeye de *kolon* (sütun) denilir. Örneğin, iki satırı ve üç kolonu olan

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

matrisi 2×3 tipinde olan bir matristir. Birinci sıradaki bileşenleri $\{-1, 3, 7\}$ dir. Bunlardan oluşaşan küme matrisin birinci satırıdır. $\{2, -4, -3\}$ kümesi matrisin ikinci satırıdır.

$\{-1, 2\}$ kümesi matrisin birinci kolonu, $\{3, -4\}$ kümesi matrisin ikinci kolonu, $\{7, -3\}$ kümesi matrisin üçüncü kolonudur.

m, n doğal sayılar olmak üzere m satırı ve n kolonu olan matris

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}, \ldots, a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}, \ldots, a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{n3}, \ldots, a_{mn} \end{pmatrix}$$

biçemindedir. Buna $m \times n$ tipi matris denilir. Bazen ( ) parantezi yerine [ ] parantezi de kullanılabilir:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}, \ldots, a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}, \ldots, a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{n3}, \ldots, a_{mn} \end{bmatrix}$$

matrisinin m satırı ve n kolonu vardır. Bu tür matrislere $m \times n$ tipindendir diyeceğiz, İleride matrisin her satırını ve her kolonunu birer *vektör* olarak inceleyeceğiz.

Matrisin Bileşenleri

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}, \ldots, a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}, \ldots, a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{n3}, \ldots, a_{mn} \end{pmatrix}$$

matrisini oluşturan a_{ij} öğelerinin her birisi maatrisin bir bileşenidir. Bazen bunlara matrisin ögeleri de denilir. A matrisinin i-inci satırı ile j-inci kolonu içinde yer alan ögeyi $[A]_{ij}$ ya da a_{ij} simgesiyle göstereceğiz.

A matrisinin i-inci satırı ile j-inci kolonu içinde yer alan ögeye bileşenini $[A]_{ij}$ ya da a_{ij} simgesiyle göstereceğiz.

Örneğin,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 3 & 6 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

matrisi için

$$\begin{array}{lll} a_{11} = 1 & a_{12} = 2 & a_{13} = 5 \\ a_{21} = -3 & a_{22} = 3 & a_{23} = 6 \\ a_{31} = 7 & a_{32} = 5 & a_{33} = 2 \end{array}$$

olur.

Matris Türleri

Karesel Matris

Satır sayısı kolon sayısına eşit olan matrise karesel matris ya da kare matris denilir.

Örnek:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 3 & 6 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

matrisi 3×3 tipinden bir karesel matristir.

Sıfır Matris

Bütün bileşenleri 0 olan matrise *sıfır matris* denilir:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisi 3×3 tipinden sıfır matristir.

Teorem:

1. Bir matrisin sıfır matrisi ile toplamı matrisi değiştirmez.
2. Bir matristen sıfır matrisi çıkarılırsa matris değişmez.
3. Bir matrisin sıfır matrisi ile çarpımı sıfır matrisine eşittir.

olur. Başka bir deyişle aynı tipten matrislerde *sıfır matrisi* toplamanın birim öğesidir. Çarpma tanımlı ise, sıfır matrisi çarpma işleminin yutanıdır. Gerçekten, toplama ve çarpma kurallarını kullanarak

$$A + O = O + A$$
$$A - O = A$$
$$A.O = O.A = O$$

olduğu kolayca görülür.

Örnekler:

$$A \pm O = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A$$

olduğu matrislerin toplamından görülür. Benzer olarak matrislerin çarpımı tanımından,

$$A.O = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

ve

$$O.A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

olur.

Kare Matrisin Köşegenleri

Sol üst köşeden sağ alt köşeye giden doğrultu üzerindeki bileşenler, kare matrisin *asal* (birincil) köşegenini oluşturur. Sağ üst köşeden sol alt köşeye giden doğrultu üzerindeki bileşenler, kare matrisin *yedek* (ikincil) köşegenini oluşturur.

Birim Matris

Asal köşegen üzerindeki bileşenleri 1 e eşit olan, öteki bütün bileşenleri 0 olan kare matrise birim matris denilir. Örneğin,

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisi 3×3 tipinden *birim* matristir.

Teorem 18.2. *Birim matris ile çarpıldığında çarpılan matris değişmez.*

Başka bir deyişle çarpım tanımlı olduğunda birim matris çarpma işleminin *birim öğesi* gibi davranır.

Örnekler:

$$A.I = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & -1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & -1 \end{pmatrix} = A$$

olduğu matrislerin çarpımından görülür. Benzer olarak,

$$I.A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & -1 \end{pmatrix} = A$$

Matrisin Devriği

Transpose of a Matrix

A bir kare matris olsun. Bileşenlerinin asal köşegene göre simetrilerinin alınmasıyla elde edilen matrise A nın e*devriği* (transpose) denilir ve A^T ile gösterilir:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 3 & 6 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{matrisinin devriği} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 2 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrisin devriği kavramının vektörel işlemlerde çok işe yaradığını ileride göreceğiz. Şimdilik bir kolon ile bir satırın çarpımını göstermekle yetineceğiz.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left((x_1, x_2, \ldots, x_n)\right)^T$$

Simetrik Matris

Devriği kendisine eşit olan metrise simetrik matris denilir:

$$A^T = A$$

Anti Simetrik Matris

Devriği kendisinin ters işaretlisine eşit olan metrise anti simetrik matris denilir:

$$A^T = -A$$

$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ bir matris 2×2 türünde ters simetrik matristir.

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ bir matrisi 3×3 türünde ters simetrik matristir.

Ters Matris

Bmatrisinin A matrisiyle soldan ve sağdan çarpımları birim matris oluyorsa, B matrisine A matrisinin çarpmaya göre tersidir, ya da kısaca tersi'dir denilir:

$$AB = I = BA$$

Amatrisinin tersi A^{-1} ile gösterilir. Buna göre, yukarıdaki eşitlikler

$$AA^{-1} = I = A^{-1}A$$

biçimini alır.

Üçgensel Matris

Karesel matrisin asal köşegeninin altında kalan bütün bileşenleri sıfıra eşitse, matrise üst köşegenel matris denilir. Benzer olarak, karesel matrisin asal köşegeninin üstünde kalan bütün bileşenleri sıfıra eşitse, matrise alt köşegenel matris denilir.

Örnekler:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

matrisi üst köşegenel matris,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 3 & 0 \\ 6 & -2 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

matrisi alt köşegenel matristir.

Matrisin İzi (trace)

Asal köşegen üzerindeki bileşenlerinin toplamına matrisin izi (trace) denilir.

Örnek:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 & 4 \\ -2 & 4 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 & 0 \\ 7 & -2 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

matrisinin izi

$$iz(A) = tr(A) = 3 + 4 + (-1) + 8 = 14$$

olur.

Matris İşlemleri

Sayı kümeleri üzerinde yaptığımız toplama, çıkarma ve bölme işlemleri matrisler üzerinde çok kısıtlı olarak yapılabilir.

Satır ve kolon sayıları karşılıklı olarak eşit olan matrislere aynı tipten matrisler denilir.

Matrislerin Toplamı

Aynı tipten olan iki matris toplanabilir. $A = (a_{ij})$ ve $B = (b_{ij})$ matrislerinin toplamı, aynı indisli bileşenlerinin toplamından oluşur.

$$[A]_{ij} + [B]_{ij} = [A + B]_{ij} = (a_{ij} + b_{ij})$$

Örneğin,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -3 & 6 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 9 \\ -1 & 3 & -4 \\ 5 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

Toplama işlemi yer değişebilir

$$A + B = B + A$$

Matrislerde Çıkarma

$$[A]_{ij} - [B]_{ij} = [A - B]_{ij} = (a_{ij} - b_{ij})$$

Örneğin,

$$\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ -3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -9 & 2 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - B \neq B - A$$

Matrisin Sayı ile Çarpımı

A matrisinin λ sayısı ile çarpımı matrisin her bileşeninin λ sayısı ile çarpımıdır.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13},\dots,a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{i1} & a_{12} & a_{i3},\dots,a_{in} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{n3},\dots,a_{mn} \end{pmatrix} \text{ ise } \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13},\dots,a_{1n} \\ \vdots & & \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \lambda a_{i3},\dots,\lambda a_{in} \\ \vdots & & \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \lambda a_{n3},\dots,\lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanır.

Örnek:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ ise } 3A = 3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.1 & 3.2 \\ 3.3 & 3.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

olur.

Matrislerin Çarpımı

$A \times B = C$ çarpımında A nın i-inci satırın bileşenlerinin B nin j-inci kolonunun bileşenleriyle karşılıklı çarpımlarının toplamı, çarpımın c_{ij} bileşimine eşit olur.

Matrislerin çarpımı, matrisin bir sayı ile çarpımından farklıdır. Satır vektörlerinin kolon vektörleriyle skalar (dot products) çarpımından esinlenerek, matrislerin çarpımına *noktasal çarpı*m (dot product) da denilir. Bu kitapta *matris çarpımı* terimini kullanacağız.

Sayılarda yaptığımız gibi, matris çarpımını $A \times B$, $A.B$ ya da AB simgelerinden birisiyle göstereceğix.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \\ C_{31} & C_{32} \end{bmatrix}$$

$c_{11} = 1.4 + 2.1 = 4 + 2 = 6$
$c_{12} = 1.3 + 2.2 = 3 + 4 = 7$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ C_{21} & C_{22} \\ C_{31} & C_{32} \end{bmatrix}$$

$c_{21} = 2.4 + 0.1 = 8 + 0 = 8$
$c_{22} = 2.3 + 0.2 = 6 + 0 = 6$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 6 \\ C_{31} & C_{32} \end{bmatrix}$$

$c_{31} = 3.4 + 1.1 = 12 + 1 = 13$
$c_{32} = 3.3 + 1.2 = 9 + 2 = 11$

$$A.B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 6 \\ 13 & 11 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+2 & 2+2 & 2+4 & 3+6\\ 3+4 & 154 & & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}3 & 4 & 6 & 9\\ 7 & 10 & 14 & 21\\ 11 & 16 & 22 & 23\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}7 & 8\\ 9 & 10\\ 11 & 12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & 4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 5 & 1\\ 4 & -2 & 0\\ 1 & 6 & 2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 4 & 1\\ 1 & -4 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}18 & 20 & 13\\ -2 & 0 & 10\\ 21 & 18 & 13\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3 & 4 & 2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}13 & 9 & 7 & 15\\ 8 & 7 & 4 & 6\\ 6 & 4 & 0 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}83 & 63 & 37 & 75\end{pmatrix}$$

Önerme 18.3. *Çarpma işlemi yer değişemez (noncommutative).*

$$A \times B \neq B \times A$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$$

Önerme 18.4. *Çarpma işlemi şu özelikleri sağlar:*

1. $(AB)C = A(BC)$ (Birleşme (associative))
2. $(A+B)C = AC + BC$ (sağdan dağılma (distributive)
3. $C(A+B) = CA + CB$ (sağdan dağılma)
4. $OA = AO = O$ (O sıfır matris)

18.9 Matrislerin Çarpımının Devriği

Teorem 18.3. *Çarpımın devriği matrislerin devriklerinin çarpımına eşittir.*

$$AB = C \Rightarrow (AB)^T = C^T = B^T A^T \tag{18.1}$$

Teorem 18.3, ikiden çok matrisin çarpımı için de geçerlidir. Örneğin,

$$(ABCD)^T = (CD)^T(AB)^T = (D^TC^T)(B^TA^T) = D^TC^TB^TA^T$$

eşitliği kolayca sağlanabilir. Bunu genelleştirmek istersek,

$$(A_1A_2\ldots A_n)^T = A_n^TA_{n-1}^T\ldots A_1^T$$

eşitliği yazılabilir.

Örnek

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{matrisleri verilsin.}$$

Kare Matrisin Kuvveti

A bir kare matris ise A matrisini kendisiyle art arda çarpabiliriz. Sayılarda yaptığımız gibi, matrisin kuvvetleri için de

$$A = A,\ A.A = A^2,\ A.A.A = A^3,\ \dots A.A.\dots A = A^n$$

simgelerini kullanırız.

19.1 Determinatlar

1×1 Matrislerin determinantı

A matrisi en basit 1×1 tipinde bir matris olsun. Tek bileşeni sayı olan bu tip matrislerin determinantı, bileşen sayısıdır.

$$A = [12]$$

matrisi 1×1 tipinde olan bir matristir ve determinantı $|A| = 12$ olur. Benzer olarak,

$$A = (-12)$$

matrisi 1×1 tipinde olan bir matristir ve determinantı $|A| = -12$ olur.

2×2 Matrislerinin determinantı

A matrisi 2×2 tipinden bir matris olsun:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

2×2 tipinden olan bu matrisin determinantı $|A| = (-1)(-4) - (3)(2) = -2$ biçiminde tanımlanır. Genel olarak,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

gibi 2×2 tipinden olan bir matrisin deteminantı

$$|A| = ab - cd$$

olarak tanımlanır.

3×3 **Matrislerinin determinantı**

A matrisi 3×3 tipinden bir matris olsun:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

3×3 tipinden olan bu matrisin determinantı

$$det(A) = |A| = (1)(4)(5)(2) + 2.3.7 + 5.(-2).6 - (7.4.5 + 6.3.1 + 5.(-2).2) = -136$$

biçiminde tanımlanır. genel olarak,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Şekil 19.1: Sarrus Yöntemi

gibi 3×3 tipinden olan bir matrisin determinantı

$$\begin{aligned} det(A) &= |A| \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}) \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Ancak bu tanım öncekilere göre biraz daha karmaşıktır. Bu karmaşıklığı yoketmek için daha basit bir yollar izlenebilir. izlenebilecek yollardan birisi, 3×3 tipinden matrislerin determinantını bulmaya yarayan Sarrus yöntemidir. Oldukça pratik olan bu yöntemi öğrenmek kolaydır.

Sarrus Yöntemi

3×3 tipinden A matrisinin sağ yanına birinci ve ikinci kolon bileşenlerini Şekilde görüldüğü gibi ekleyelim. Sonra $a_{11}a_{22}a_{33}$ asal köşegeni ile onun üstünde ve ona paralel çizgilerle gösterilen öğelerin çarpımlarının toplamını yazalım. Benzer olarak, ($a_{31}a_{22}a_{13}$ yedek köşegeni ile onun altında ve ona paralel çizgilerle gösterilen öğelerin çarpımlarının toplamını yazalım. Sonra birinci toplamdan ikinciyi çıkaralım. Çıkan sayı, verilen matrisin deterinantıdır (bkz. Şekil 19.1).

Sarrus yönetimi 3×3 tipinden matrislerin determinantlarını bulurken pratik kolaylık sağlar. Ama daha büyük boyutlu matrislere uygulanamaz. O nedenle, her tipten matrislere uygulanabilecek genel bir yönteme gereksinim vardır.

Laplace Yöntemi

Minör

$n \times n$ tipinden

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}, \dots, a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}, \dots, a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}, \dots, a_{nn} \end{pmatrix}$$

matrisinin herhangi bir a_{ij} bileşeninin *minör*ü şöyle tanımlanır:

i-inci satır le j-inci kolon atılır. Geri kalan matrisin determinantı a_{ij} bileşenine karşılık gelen *minör*'dür. Buna göre, yukardaki A matrisinin a_{ij} bileşenine karşılık gelen minör

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & \square & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & \square & \cdots & a_{2n} \\ & & & \cdots & & & \\ \square & \square & \square & \cdots & \square & \cdots & \square \\ & & & \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & \square & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

biçimindeki matrisin determinantıdır. Onu

$$min(a_{ij}) = M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & \square & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & \square & \cdots & a_{2n} \\ & & & \cdots & & & \\ \square & \square & \square & \cdots & \square & \cdots & \square \\ & & & \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & \square & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

biçiminde gösterelim. Tabii, minörü yazarken, yukarıda bileşenleri □ ile gösterilen i-inci satır ile j-inci kolonun silineceğini unutmayacağız.

örnek:

$$A=\begin{bmatrix}6 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 1\\ 10 & 3 & 4\end{bmatrix}$$

matrisinin ikinci satırındaki bileşenlerin minörlerini bulalım. Önce A matrisini

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

matrisi gibi gibi düğünürsek, bu matrisin ikinci satırındaki bileşenlerine göre minörleri şöyle bulunur: