Coordenadas Cartesianas

Tienen su origen gracias a Rene Descartes, filosofo, matemático y físico francés que relacionó la geometría de Euclides con el álgebra usando una representación bidimensional.

Diferentes formas de expresar una coordenada

Un punto en coordenadas polares, cilíndricas o esféricas se puede dar de infinitas maneras.

Por ejemplo

La coordenada polar $P\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$ = $P\left(-2,\ \frac{\pi}{3}+\ \pi\right)$ = $P\left(-2,\ \frac{\pi}{3}+\ n\pi\right)$

La coordenada cilíndrica $\left(4,\frac{\pi}{2},6\right) = \left(-4,\frac{\pi}{2}+\pi,6\right) = \left(-4,\frac{\pi}{2}+n\pi,6\right)$

La coordenada esférica $(4, 200°, 90°) = (4, -160°, 90°)$

En estos tres tipos de coordenadas el ángulo puede ser negativo o positivo, además este se puede expresar en grados o radianes.

Si desea, en CorPhy puede especificar si desea manejar grados o radianes y a su vez, si maneja ángulos de 0° a 360° o de 0° a ±180°.

CorPhy por defecto maneja el ángulo de 0° a 360°. Por ello, a continuación, se mencionan una serie de condiciones para obtener correctamente el ángulo.

Condiciones para obtener correctamente el ángulo θ en la conversión

Al convertir una coordenada 2D o 3D no siempre se obtiene directamente el ángulo (θ) que se fija en el plano XY, sino que se debe hacer algunas operaciones demás de acuerdo con el signo de las componentes **X** y **Y**.

Condiciones para obtener el ángulo θ de una coordenada polar

El ángulo de una coordenada polar se puede de expresar de dos maneras, las cuales se presentan a continuación:

1. **Cuando el ángulo se expresa hasta ±180°**.
   a. Si las componentes son positivas, el ángulo será el obtenido.
   b. Si las componentes son negativas, el resultado obtenido deberá ser sumado a -180°.
   c. Si la componente **x** es positiva y la componente **y** es negativa, el ángulo será el valor obtenido.
   d. Si la componente **x** es negativa y la componente **y** es positiva, se suma el valor obtenido a 180° (realizándose una resta).

2. **Cuando el ángulo es expresado de [0°, 360°].** Se aplica las mismas condiciones que se describen a continuación para la conversión de coordenadas esféricas y cilíndricas.

Condiciones para obtener el ángulo θ de una coordenada esférica o cilíndrica.

a. Si ambas componentes son positivas el ángulo será el obtenido.
b. Si ambas componentes son negativas se suma el valor obtenido a 180°.
c. Si la componente **x** es negativa y la componente **y** es positiva se suma el valor obtenido (negativo) a 180° (realizándose una resta).
d. Si la componente en **x** es positiva y la componente en **y** es negativa se suma el valor obtenido (negativo) a 360° (realizándose una resta).

Condiciones para obtener el ángulo φ de una coordenada esférica

Hay dos fórmulas para hallar el ángulo φ.

Para la fórmula que emplea $\tan^{-1}$ se tiene en cuenta que, si el ángulo es negativo, se debe sumar a 180° (se realiza una resta), de lo contrario el ángulo será el obtenido.

Para la fórmula que emplea $\cos^{-1}$ no se tiene en cuenta ninguna consideración. El ángulo será el obtenido.

Ejemplos y fórmulas de conversión

Fórmulas para convertir a Coordenada Polar

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Los ejemplos de a continuación se dan con el ángulo θ de 0° a 360°

Ejemplos de conversión de coordenadas cartesianas a polares

Ejemplo 1: Convertir la coordenada cartesiana (4,3)

Aplicar la fórmula para el radio $\boldsymbol{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$

$$\mathrm{r} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

Aplicar la fórmula para el ángulo $\boldsymbol{\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}}$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{3}{4} = 36{,}86$$

Se obtiene la solución P (r, θ)

Coordenada polar P (5, 36.87)

Ejemplo 2**:** Convertir la coordenada cartesiana (-2,-5)

Aplicar la fórmula para el radio $\boldsymbol{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{29} = 5.38$$

Aplicar la fórmula para el ángulo $\boldsymbol{\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}}$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{-5}{-2} = \tan^{-1}\frac{5}{2} = 68.19°$$

Se aplica la condición **b** para obtener correctamente el ángulo

$$\theta = 180° + 68.19°$$

θ = 248.19°

Se obtiene la solución P(r, θ)

Coordenada polar P (5.38, 248.19°)

Ejemplo 3: Convertir la coordenada cartesiana (4,-2)

Aplicar la fórmula para el radio $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$r = \sqrt{(4)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5} = 4.47$$

Aplicar la fórmula para el ángulo $\boldsymbol{\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}}$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{-2}{4} = \tan^{-1} -\frac{1}{2} = -\ 26.5°$$

Se aplica la condición **d** para obtener correctamente el ángulo

$$\theta = 360° + (-26.5°)$$

$$\theta = 333.5°$$

Se obtiene la solución P(r, θ)

Coordenada polar P (4.47, 333.5°)

Fórmulas para convertir a Coordenada Cilíndrica

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

Z = Z

Ejemplos de conversión de coordenadas cartesianas a Cilindricas

Ejemplo 1: Convertir la coordenada cartesiana (-10, -2,12)

Aplicar la fórmula para el radio $\boldsymbol{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$

$$r = \sqrt{(-10)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{26} = 10.2$$

Aplicar la fórmula para el ángulo $\boldsymbol{\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}}$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{-2}{-10} = \tan^{-1}\frac{1}{5} = 11.3°$$

Se aplica la condición **b** debido a que las componentes son negativas.

θ = 180° + 11.3°

θ = 191.3°

Z será la misma

Z = 12

Se obtiene la solución (r, θ, z)

Coordenada Cilíndrica (10.2, 191.3°,12)

Ejemplo 2: Convertir la coordenada cartesiana (-12.5, 6,-5)

Aplicar la fórmula para el radio $\boldsymbol{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$

$$r = \sqrt{(-12.5)^2 + (6)^2} = \frac{\sqrt{769}}{2} = 13.86$$

Aplicar la fórmula para el ángulo $\boldsymbol{\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}}$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{6}{-12.5} = -\ 25.64°$$

Se aplica la condición **c**, la primera componente negativa y la segunda positiva

θ = 180° + (-25.64°)

θ = 154.36°

Z será la misma, en este caso Z significa profundidad

Z = -5

Se obtiene la solución (r, θ, z)

Coordenada Cilíndrica (13.86, 154.36°, -5)

Ejemplo 3: Convertir la coordenada cartesiana (1, -1,15)

Aplicar la fórmula para el radio $\boldsymbol{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$

$$r = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} = 1.41$$

Aplicar la fórmula para el ángulo $\boldsymbol{\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}}$

$$\theta = \tan^{-1} -1 = -45°$$

Se aplica la condición **d**, la primera componente positiva y la segunda negativa

θ = 360° + (-45°)

θ = 315°

Z será la misma

Z = 15

Se obtiene la solución (r, θ, z)

Coordenada Cilíndrica ($\sqrt{2}$, 315°, 15)

Fórmulas para convertir a Coordenada Esférica

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} = \cos^{-1}\frac{z}{r}$$

Ejemplos de conversión de coordenadas Cartesianas a Esféricas

Ejemplo 1: Convertir la coordenada cartesiana (10, -5,-15)

Aplicar la fórmula para el radio $\boldsymbol{r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

$$\mathrm{r} = \sqrt{(10)^2 + (-5)^2 + (-15)^2} = 5\sqrt{14} = 18.7$$

Aplicar la fórmula para el ángulo $\boldsymbol{\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}}$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{-5}{10} = \tan^{-1} -\frac{1}{2} = -26.56°$$

Se aplica la condición **d**, primera componente positiva, segunda negativa.

θ = 360° + (-26.56°)

θ = 333.44°

Aplicar la fórmula para el ángulo $\varphi = \tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} = \cos^{-1}\frac{z}{r}$

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{\sqrt{10^2+(-5)^2}}{(-15)} = -36.69°$$

Se aplica la condición

$\varphi = 180° + (-36.69) = 143.31°$ O se aplica la otra fórmula↓

$$\varphi = \cos^{-1} -\frac{15}{18.7} = 143.33°$$

Se obtiene la solución (r, θ, φ)

Coordenada Esférica (18.7, 333.44°,143.3°)

Ejemplo 2: Convertir la coordenada cartesiana (-25, -5, 27)

Aplicar la fórmula para el radio $\boldsymbol{r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

$$\mathrm{r} = \sqrt{(-25)^2 + (-5)^2 + (27)^2} = 37.13$$

Aplicar la fórmula para el ángulo $\boldsymbol{\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}}$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{-5}{-25} = \tan^{-1}\frac{1}{5} = 11.3°$$

Se aplica la condición **b**, ambas componentes negativas. Se suma a 180°

θ = 180° + 11.3°

θ = 201.3°

Aplicar la fórmula para el ángulo $\varphi = \tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} = \cos^{-1}\frac{z}{r}$

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{\sqrt{(-25)^2+(-5)^2}}{27} = \tan^{-1}\frac{5\sqrt{26}}{27} = 43.35°$$

O se aplica la otra fórmula↓

$$\varphi = \cos^{-1} -\frac{27}{37.13} = 43.35°$$

Se obtiene la solución (r, θ, φ)

Coordenada Esférica (37.13, 201.3°,43.35°)

Ejemplo 3: Convertir la coordenada cartesiana (8, 12, -10)

Aplicar la fórmula para el radio $\boldsymbol{r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

$$\mathbf{r} = \sqrt{(8)^{\mathbf{2}} + (12)^2 + (-10)^2} = 37.13$$

Aplicar la fórmula para el ángulo $\boldsymbol{\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}}$

$$\boldsymbol{\theta} = \tan^{-1}\frac{-5}{-25} = \tan^{-1}\frac{1}{5} = 11.3°$$

Se aplica la condición **b**, ambas componentes negativas. Se suma a 180°

θ = 180° + 11.3°

θ = 201.3°

Aplicar la fórmula para el ángulo $\varphi = \tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} = \cos^{-1}\frac{z}{r}$

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{\sqrt{(-25)^2+(-5)^2}}{27} = \tan^{-1}\frac{5\sqrt{26}}{27} = 43.35°$$

O se aplica la otra fórmula↓

$$\varphi = \cos^{-1} -\frac{27}{37.13} = 43.35°$$

Se obtiene la solución (r, θ, φ)

Coordenada Esférica (37.13, 201.3°,43.35°)