MANUEL JOAQUIM ALVES
ELENA VLADIMIROVNA ALVES

MÓDULO
ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA

2020

CONTEÚDO

Módulo ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA **3**
Bem-vindo ao módulo Álgebra Linear e Geometria Analítica . . . 3
Objectivos do módulo . . . 3
Recomendações para estudo . . . 4
Bibliografia . . . 4

1 Unidade I. Matrizes e operações com matrizes **5**
1.1 Introdução . . . 5
1.2 Objectivos . . . 5
1.3 Tarefas . . . 5
1.4 Exercícios . . . 5

2 Unidade II. Multiplicação e transposição de matrizes **7**
2.1 Introdução . . . 7
2.2 Objectivos . . . 7
2.3 Tarefas . . . 7
2.4 Exercícios . . . 7

3 Unidade III. Determinantes e matriz inversa **10**
3.1 Introdução . . . 10
3.2 Objectivos . . . 10
3.3 Tarefas . . . 10
3.4 Exercícios . . . 10

4 Unidade IV. Sistemas de equações lineares **13**
4.1 Introdução . . . 13
4.2 Objectivos . . . 13
4.3 Tarefas . . . 13
4.4 Exercícios . . . 14

5 Unidade V. Vectores e operações com vectores **21**
5.1 Introdução . . . 21
5.2 Objectivos . . . 21
5.3 Tarefas . . . 21
5.4 Exercícios . . . 22

6 Unidade VI. Plano e recta no espaço **25**
6.1 Introdução . . . 25
6.2 Objectivos . . . 25
6.3 Tarefas . . . 25
6.4 Exercícios . . . 25

7 Unidade VII. Programação linear e de transporte **28**
7.1 Introdução 28
7.2 Objectivos 28
7.3 Tarefas 28
7.4 Exercícios 28

8 Unidade VII. Linhas de segunda ordem **32**
8.1 Introdução 32
8.2 Objectivos 32
8.3 Tarefas 32
8.4 Exercícios 32

9 Unidade VIII. Superfícies de segunda ordem **34**
9.1 Introdução 34
9.2 Objectivos 34
9.3 Tarefas 34
9.4 Exercícios 34

Módulo ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA

Bem-vindo ao módulo Álgebra Linear e Geometria Analítica

"*...Jamais considere seus estudos como uma obrigação, mas como uma oportunidade invejável para aprender a conhecer a influência libertadora da beleza do reino do espírito, para seu próprio prazer pessoal e para proveito da comunidade à qual seu futuro trabalho pertencer.*" Albert Einstein

Desde Galileu, fundador há quatro séculos da Ciência Moderna, para compreender os segredos da Natureza é necessário matematizar o mundo real. Conhecer os segredos da Natureza sempre foi, por um lado, um meio de saciar a inquietação e a curiosidade humanas e, por outro, quase sempre foi fonte de bem-estar. Duas boas razões, portanto, para conhecer e praticar a Ciência, o que só é hoje possível fazer recorrendo à Matemática. Quem faz Matemática começa por pensar no mundo real que, por um processo de abstração, pode mais tarde substituir-se por um modelo matemático, no qual é mais fácil, agradável e até divertido elaborar.

A maioria dos modelos matemáticos usados envolvem um sistema de várias equações. Se estas equações são todas lineares, o estudo de tais sistemas pertence à uma área da Matemática chamada *Álgebra Linear.* Por exemplo, a análise "insumo–produto" é uma área proeminente da Economia que usa sistemas de equações lineares. Modelos, tais como aqueles baseados no trabalho do Nobel de Economia Wassily Leontief *The Structure of the American Economy, 1919–1939*, possuem sistemas com centenas de equações contendo centenas de incógnitas. Este modelo e outros similares foram desenvolvidos na antiga União Soviética pelo Nobel de Economia Leonid Kantorovich, com intenção de ajudar a planificar a produção de equipamento militar e outros fornecimentos durante a Segunda Guerra Mundial (1939–1945). De modo a compreender tais sistemas de equações é conveniente operar com um número de conceitos matemáticos tais como matrizes, vectores e determinantes. Estes conceitos são introduzidos neste módulo. A utilidade da Álgebra Linear alarga-se para além da sua capacidade de resolver sistemas de equações lineares. Por exemplo, na Teoria de Equações Diferenciais e com Diferenças, na Teoria de Optimização Linear e Não Linear, na Estatística e Econometria, os métodos da Álgebra Linear são largamente usados.

As aulas são teórico-práticas pelo que são compostas de: uma parte expositiva, onde são apresentados conceitos fundamentais das diferentes matérias do programa juntamente com a demonstração dos principais resultados, pretendendo-se assim que os alunos adquiram uma visão global dos temas abordados e suas interligações; uma componente prática, onde os alunos aplicarão os conhecimentos adquiridos melhorando, deste modo, a sua compreensão das matérias leccionadas.

Objectivos do módulo

No final da disciplina o estudante deve ser capaz de:

- Operar com matrizes;
- Calcular determinantes;
- Efectuar operações elementares com linhas;
- Determinar o posto duma matriz;
- Resolver sistemas usando os métodos de Cramer, exclusão de Gauss e matriz inversa;
- Operar com vectores;
- Conhecer as diferentes formas da equação do plano;
- Conhecer a equação canónica da recta no espaço;

- Modelar e resolver pelo método Simplex um problema de programação linear;
- Modelar e resolver pelo método noroeste e custo mínimo um problema de transporte;
- Conhecer as equações canónicas da elipse, hipérbole e parábola;
- Conhecer as equações canónicas do elipsóide, hiperbolóide, parabolóide, cone e cilindros.

Recomendações para estudo

O processo de ensino e aprendizagem centrado no estudante requer que você desenvolva algumas habilidades essenciais para conseguir um bom rendimento e sucesso. Essas habilidades são a autodisciplina, o gosto pela pesquisa e a motivação. De modo a tornar o estudo deste módulo mais frutífero e aprofundar os seus conhecimentos recomendamos:

1) Estabeleça um plano de estudo, determine os dias e horários para estudar e realizar as actividades;
2) Estabeleça um tempo mínimo de estudo, de acordo com o seu ritmo e suas necessidades;
3) Procure interagir com os colegas, participando nas discussões propostas, trocando informações, ideias, reflexões, descobertas e dúvidas;
4) Leia e/ou assista, com muita atenção, os parágrafos e os videos onde se explanam os conceitos teóricos;
5) Ao estudar os exemplos providos em cada unidade, pegue numa esferográfica e papel e repita todos os passos de resolução;
6) Ao deparar-se com algum conceito, definição, fórmula ou teorema estudados anteriormente, mas que esqueceu, tome nota e posteriormente procure revê-los;
7) A leitura de algumas páginas de livros recomendados deve ser feita de modo obrigatório e a resolução dos exercícios contidos nessas páginas devem ser resolvidos;
8) De tempos em tempos faça uma breve revisão dos temas abordados anteriormente;
9) Contacte o regente ou assistente do módulo sempre que precisar.

Bibliografia

[1] K. Sydsaeter, P. Hammond (com a colaboração de M. Alves), *Matemática Essencial para Análise Económica - Parte II*, Moçambique Editora, Maputo, 2004.

[2] D. Lay, *Linear Algebra and Its Applications*, Addison Wesley, New York, 2003.

[3] A. Chiang, *Matemática para Economistas*, Editora da Universidade de São Paulo, 1982.

Ensinar é lembrar aos outros que eles sabem tanto quanto você...

Typeset by LaTeX 2_ε

1 Unidade I. Matrizes e operações com matrizes

1.1 Introdução

Por *matriz* entendemos uma tabela rectangular com m linhas de igual comprimento. Nesta unidade iremos abordar os seguintes conceitos: *soma de matrizes e multiplicação de matriz por um número.*

1.2 Objectivos

No fim desta unidade didáctica o aluno será capaz de:

1) Identificar as linhas e colunas duma matriz;

2) Determinar as dimensões duma matriz;

3) Somar matrizes e multiplicar matriz por uma constante.

1.3 Tarefas

Para esta unidade o estudante deverá desenvolver as seguintes actividades:

1) No capítulo 15, do livro *Matemática Essencial para Análise Económica-Parte II*, ler as páginas 265–269.

2) No capítulo 2, do livro *Linear Algebra and Its Applications*, ler as páginas 105–108 e resolver os exercícios 1, 2, 3, 4 na página 116.

3) Assistir a aula nos sítios:

   $http://www.youtube.com/watch?v = X8LQavixpfw$

   $http://www.youtube.com/watch?v = mvfhOfOgX3o$

4) Elaborar uma lista dos principais conceitos abordados.

5) Resolver os exercícios do parágrafo 1.4 desta unidade.

1.4 Exercícios

1) Construa a matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})_{3\times 3}$, onde $a_{ii} = 1$ para $i = 1, 2, 3$ e $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

2) Determine u e v tais que $\begin{pmatrix} 1-2u+u^2 & v^2 & 3 \\ v & 2u & 5 \\ 6 & u & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & u \\ v & -3v & u-v \\ 6 & v+5 & -1 \end{pmatrix}$. **R**: $u = 3,\ v = -2$

3) Calcule $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ e $3\mathbf{A}$ se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

4) Calcule $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ e $5\mathbf{A}-3\mathbf{B}$ se

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

5) Usando as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

calcule $3\mathbf{A} + 2\mathbf{B} - 2\mathbf{C} + \mathbf{D}$.

6) Sejam $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Determine as matrizes (a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, (b) $\mathbf{A} - \mathbf{B} + \mathbf{C}$.

2 Unidade II. Multiplicação e transposição de matrizes

2.1 Introdução

As operações com matrizes introduzidas na Unidade I devem ser vistas de modo natural. A maneira como definimos a *multiplicação de matrizes* não é tão evidente. Uma motivação importante para esta definição é que ela ajuda em algumas manipulações com sistemas de equações lineares.

2.2 Objectivos

No fim desta unidade didáctica o aluno será capaz de:

1) Conhecer as condições de compatibilidade de dimensões que permite multiplicar matrizes;
2) Multiplicar matrizes;
3) Transpor matrizes.

2.3 Tarefas

Para esta unidade o estudante deverá desenvolver as seguintes actividades:

1) No capítulo 15, do livro *Matemática Essencial para Análise Económica-Parte II*, ler as páginas 269–284.
2) No capítulo 2, do livro *Linear Algebra and Its Applications*, ler as páginas 109–116 e resolver os exercícios 5, 6, 7, 8, 9, 10, 15, 16 nas páginas 116 e 117.
3) Assistir as aulas nos sítios:
   $http://www.youtube.com/watch?v=ua5lqRKStrk$
   $http://www.youtube.com/watch?v=UDmXFeZ1dxU$
   $http://www.youtube.com/watch?v=ChZ0r81Hx3k$
   $http://www.youtube.com/watch?v=F2jCoaYQ4Q0$
4) Elaborar uma lista dos principais conceitos abordados.
5) Resolver os exercícios do parágrafo 2.4 desta unidade.

2.4 Exercícios

1) Caso seja possível calcule os produtos **AB** e **BA** para as seguintes matrizes:

$$\text{(a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{(b) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\text{(c) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0, & -2, & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{(d) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2) Usando as matrizes

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}-2&4\\1&-2\end{pmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{pmatrix}2&3\\6&9\end{pmatrix},\quad \mathbf{D}=\begin{pmatrix}1&1\\1&3\end{pmatrix}$$

calcule (a) $\mathbf{AB}$ (b) $\mathbf{C}(\mathbf{AB})$.

3) Sejam $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&-3\\5&0&2\\1&-1&1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}3&-1&2\\4&2&5\\2&0&3\end{pmatrix}$ e $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}4&1&2\\0&3&2\\1&-2&3\end{pmatrix}$.

Determine as matrizes (a) $\mathbf{AB}$, (b) $\mathbf{BA}$, (c) $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ e (d) $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$.

4) Se $\mathbf{A}$ é uma matriz de ordem $m\times n$ e $\mathbf{B}$ é outra matriz tal que ambos produtos $\mathbf{AB}$ e $\mathbf{BA}$ estão definidos, quais deverão ser as dimensões de $\mathbf{B}$? Determine todas as matrizes $\mathbf{B}$ que "comutam" com $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}$ no sentido de que $\mathbf{BA}=\mathbf{AB}$.

5) Dada a função $f(x)=x^2-2x$, calcule $f(\mathbf{A})$, onde $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$. **R**: $\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

6) Dada a função $f(x)=x^2-2x$, calcule $f(\mathbf{A})$, onde $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$. **R**: $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

7) Verifique a lei distributiva $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$ se

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}2&-1&1&0\\3&-1&2&1\end{pmatrix},\qquad \mathbf{C}=\begin{pmatrix}-1&1&1&2\\-2&2&0&-1\end{pmatrix}.$$

8) Calcule o produto de matrizes $(x,\,y,\,z)\begin{pmatrix}a&d&e\\d&b&f\\e&f&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

9) Verifique, por meio da multiplicação, que $(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ se

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix},\qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix},\qquad \mathbf{C}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{pmatrix}.$$

10) Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são matrizes quadradas de dimensão n, prove que

$$\text{(a) } (\mathbf{A}+\mathbf{B})(\mathbf{A}-\mathbf{B})\neq\mathbf{A}^2-\mathbf{B}^2 \quad \text{(b) } (\mathbf{A}-\mathbf{B})(\mathbf{A}-\mathbf{B})\neq\mathbf{A}^2-2\mathbf{AB}+\mathbf{B}^2$$

com excepção de casos especiais. Determine uma condição necessária e suficiente para que a igualdade se cumpra em cada caso.

11) Calcule: (a) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&3&1\\2&0&9\\1&3&3\end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix}1,&2,&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

12) Diz-se que uma matriz quadrada $\mathbf{A}$ é *idempotente* se $\mathbf{A}^2=\mathbf{A}$. Mostre que a matriz seguinte é idempotente: $\begin{pmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{pmatrix}$.

13) Mostre que se $\mathbf{AB} = \mathbf{A}$ e $\mathbf{BA} = \mathbf{B}$, então $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são ambas idempotentes.

14) Mostre que se $\mathbf{A}$ é idempotente, então $\mathbf{A}^n = \mathbf{A}$ para todos inteiros positivos n.

15) Prove que se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, então $\mathbf{A}^2 = (a+d)\mathbf{A} - (ad - bc)\mathbf{I}_2$.

16) Transponha $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 & 3 \\ -1 & 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1, 5, 0, -1 \end{pmatrix}$.

17) Seja $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ e $\alpha = -2$. Calcule $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$, $(\mathbf{A}+\mathbf{B})'$, $(\alpha\mathbf{A})'$, $\mathbf{AB}$, $(\mathbf{AB})'$, $\mathbf{B}'\mathbf{A}'$ e $\mathbf{A}'\mathbf{B}'$.

18) Mostre que $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 13 \\ 8 & 13 & 0 \end{pmatrix}$ são simétricas.

19) Para que valores de a a matriz $\begin{pmatrix} a & a^2-1 & -3 \\ a+1 & 2 & a^2+4 \\ -3 & 4a & -1 \end{pmatrix}$ é simétrica? **R**: $a = 2$

20) O produto de duas matrizes simétricas é necessariamente uma matriz simétrica?

21) Se $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ e $\mathbf{A}_3$ são matrizes para as quais os produtos dados estão definidos, mostre que

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3)' = \mathbf{A}'_3\mathbf{A}'_2\mathbf{A}'_1.$$

Generalize para o caso do produto de n matrizes.

22) Uma matriz $\mathbf{P}$ de dimensão $n \times n$ diz-se *ortogonal* se $\mathbf{P}'\mathbf{P} = \mathbf{I}_n$. Para $\lambda = \pm 1/\sqrt{2}$, mostre que $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \lambda \\ \lambda & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ é ortogonal. Mostre que a matriz $\begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}$ de dimensão 2×2 é ortogonal se e somente se $p^2 + q^2 = 1$. Mostre que o produto de duas matrizes ortogonais de dimensão $n \times n$ é uma matriz ortogonal.

3 Unidade III. Determinantes e matriz inversa

3.1 Introdução

Vamos abordar os *determinantes*, que jogam um papel importante em diversas áreas da Matemática. Iremos, também, introduzir o conceito muito importante sobre *inversa* duma matriz quadrada e suas propriedades. As matrizes inversas jogam um grande papel na resolução de sistemas de equações lineares e na Econometria, para obter uma relação linear que se ajusta a um conjunto de dados da melhor forma possível.

3.2 Objectivos

No fim desta unidade didáctica o aluno será capaz de:

1) Calcular determinantes;
2) Aplicar as regras básicas no cálculo de determinantes;
3) Determinar matrizes inversas.

3.3 Tarefas

Para esta unidade o estudante deverá desenvolver as seguintes actividades:

1) No capítulo 16, do livro *Matemática Essencial para Análise Económica-Parte II*, ler as páginas 307–338.
2) No capítulo 3, do livro *Linear Algebra and Its Applications*, ler as páginas 185–198 e resolver os exercícios 1, 9, 13, 31, 39, 43 nas páginas 191–192 e os exercícios 1, 5, 7, 21, 30, 37, 40, 42 nas páginas 199–200.
3) Assistir as aulas nos sítios:
   $http://www.youtube.com/watch?v = dCFk3D1vdaY$
   $http://www.youtube.com/watch?v = n7qI2V2JQpA$
   $http://www.youtube.com/watch?v = wocIPHhuzZU$
   $http://www.youtube.com/watch?v = 5GQ3wL6rR - 8$
   $http://www.youtube.com/watch?v = EHHC6rDcfWo$
4) Elaborar uma lista dos principais conceitos abordados.
5) Resolver os exercícios do parágrafo 3.4 desta unidade.

3.4 Exercícios

1) Calcule os determinantes seguintes: $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3^t & 2^t \\ 3^{t-1} & 2^{t-1} \end{vmatrix}$. **R**: 18, 0, $4ab$, 6^{t-1}
2) Seja $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. Mostre que $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$.
3) Determine duas matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ de dimensão 2×2 tais que $|\mathbf{A} + \mathbf{B}| \neq |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$.

4) Calcule os seguintes determinantes: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & e & 0 \\ c & 0 & d \end{vmatrix}$. **R**: $-2,\ -2,\ adf,\ e(ad-bc)$

5) Sejam $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calcule $\mathbf{AB}$, $|\mathbf{A}|$, $|\mathbf{B}|$, $|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|$ e $|\mathbf{AB}|$.

6) Mostre que $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc + ab + ac + bc.$

7) Dada a matriz $\mathbf{A}_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ -2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix}$, calcule $|\mathbf{A}_t|$ e mostre que nunca é igual a 0. Mostre que para um certo valor de t tem-se $\mathbf{A}_t^3 = \mathbf{I}_3$.

8) Use a definição de determinante e calcule: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 11 \end{vmatrix}$. **R**: $24,\ d-a,\ 0$

9) Suponha que duas matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ de ordem $n\times n$ são ambas triangular superior. Mostre que $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$.

10) Sejam $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$. Calcule $\mathbf{AB}$, $\mathbf{BA}$, $\mathbf{A'B'}$ e $\mathbf{B'A'}$. Mostre que $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}'|$ e $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|$. É correcta a igualdade $|\mathbf{A'B'}| = |\mathbf{A}'|\cdot|\mathbf{B}'|$?

11) Seja $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Escreva $\mathbf{A}'$ e depois mostre que $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}'|$.

12) Calcule os determinantes seguintes: $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ -3 & -6 & -9 & -12 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_1 - x & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix}$.

R: $0,\ 0,\ x^4 - a_1x^3$

13) Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ duas matrizes de ordem 3×3 cujos determinantes são $|\mathbf{A}| = 3$ e $|\mathbf{B}| = -4$. Onde for possível determine os valores de $|\mathbf{AB}|$, $3|\mathbf{A}|$, $|-2\mathbf{B}|$, $|4\mathbf{A}|$, $|\mathbf{A}|+|\mathbf{B}|$ e $|\mathbf{A}+\mathbf{B}|$.

14) Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 4 \\ 2 & 1 & a^2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, calcule $\mathbf{A}^2$ e $|\mathbf{A}|$.

15) Prove que cada um dos seguintes determinantes é igual a zero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 8 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x-y & x-y & x^2-y^2 \\ 1 & 1 & x+y \\ y & 1 & x \end{vmatrix}.$$

16) Seja $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcule $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ e $|\mathbf{X}'\mathbf{X}|$.

17) Se $\mathbf{A}_a = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a^2+1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcule $|\mathbf{A}_a|$ e $|\mathbf{A}_1^6|$.

18) Mostre que o determinante duma matriz ortogonal $\mathbf{P}$ é igual a 1 ou -1.

19) Uma matriz quadrada $\mathbf{A}$ de ordem n chama-se *involutiva* se $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}_n$.

(a) Mostre que o determinante duma matriz involutiva é igual a 1 ou -1.

(b) Mostre que $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} a & 1-a^2 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$ são involutivas (para todos a).

(c) Mostre que $\mathbf{A}$ é involutiva $\iff (\mathbf{I}_n - \mathbf{A})(\mathbf{I}_n + \mathbf{A}) = \mathbf{0}$.

20) Prove que a matriz inversa de $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ é $\begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 2/3 & -1 \end{pmatrix}$.

21) Prove que a matriz inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ é $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 8/7 & -1 & 3/7 \\ -2/7 & 0 & 1/7 \end{pmatrix}$.

22) Determine os valores de a e b de modo que $\mathbf{A}$ seja a matriz inversa de $\mathbf{B}$ se

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ a & 1/4 & b \\ 1/8 & 1/8 & -1/8 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

R: $a = -3/4,\ b = 3/4$

23) Dada a matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcule $|\mathbf{A}|$, $\mathbf{A}^2$ e $\mathbf{A}^3$. Mostre que $\mathbf{A}^3 - 2\mathbf{A}^2 + \mathbf{A} - \mathbf{I} = \mathbf{0}$, onde $\mathbf{I}$ é a matriz unidade de ordem **3** e $\mathbf{0}$ é a matriz nula. Mostre que $\mathbf{A}$ possui inversa e $\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{A} - \mathbf{I})^2$.

24) Seja $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Calcule $\mathbf{A}\mathbf{A}'$, $|\mathbf{A}\mathbf{A}'|$ e $(\mathbf{A}\mathbf{A}')^{\mathbf{-1}}$.

4 Unidade IV. Sistemas de equações lineares

4.1 Introdução

A maioria dos modelos matemáticos usados envolvem um *sistema de várias equações*. Abordaremos vários métodos de resolução de sistemas de equações lineares.

4.2 Objectivos

No fim desta unidade didáctica o aluno será capaz de:

1) Investigar a consistência dum sistema de equações lineares;

2) Resolver sistemas aplicando os métodos de Cramer, matriz inversa e exclusão de Gauss;

3) Modelar problemas conducentes a sistemas de equações lineares.

4.3 Tarefas

Para esta unidade o estudante deverá desenvolver as seguintes actividades:

1) Nos capítulos 15 e 16, do livro *Matemática Essencial para Análise Económica-Parte II*, ler as páginas 261–264, 273, 284–289, 332–333, 338–345.

2) Nos capítulos 1, 2 e 3, do livro *Linear Algebra and Its Applications*, ler as páginas 1–10, 14–25, 40–45, 50–54, 57–62, 92–99, 152–156, 201–206 e resolver os exercícios 1, 9, 13, 31, 39, 43 nas páginas 191–192 e os exercícios 1, 2, 3, 4 na página 10, exercícios 1 e 2 na página 24, exercícios 1, 2 na página 47, exercícios 1 e 2 na página 54, exercícios 1 e 2 na página 62, exercícios 1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12 nas páginas 99–101, exercícios 1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11 e 15 nas páginas 156–157, exercícios 1, 2, 3, 4, 5, 6, 11 e 12 nas páginas 209–210.

3) Assistir as aulas nos sítios:

   $http://www.youtube.com/watch?v = Etc33cIF78c$

   $http://www.youtube.be/watch?v = Tq1JIG5X4xo$

   $http://www.youtube.com/watch?v = NzI2Vippzt0$

   $http://www.youtube.com/watch?v = KCql0KMpSKU$

   $http://www.youtube.co/watch?v = PSomLSfgNbUCached$

   $http://www.youtube.com/watch?v = xMnifaOPLKE$

   $http://www.youtube.com/watch?v = I1kexTz5GTM$

   $http://www.nme.com/nme - video/youtube/id/S2_tTWiRLrg$

4) Elaborar uma lista dos principais conceitos abordados.

5) Resolver os exercícios do parágrafo 4.4 desta unidade.

4.4 Exercícios

1) Sejam x_1, y_1, x_2 e y_2 valores constantes e consideremos a seguinte equação com incógnitas a, b, c e d:

$$\begin{aligned} ax_1^2 + bx_1y_1 + cy_1^2 + d &= 0 \\ ax_2^2 + bx_2y_2 + cy_2^2 + d &= 0 \end{aligned}$$

Será este sistema linear em ordem a a, b, c e d?

2) T. Haavelmo inventou um modelo da economia dos EUA para os anos 1929–1941 baseado nas seguintes equações:

$$\begin{aligned} c &= 0.712y + 95.05 \\ s &= 0.158(c+x) - 34.30 \\ y &= c + x - s \\ x &= 93.53 \end{aligned}$$

Aqui x denota o investimento total, y é a renda disponível, s é a poupança total das firmas e c é o consumo total. Escreva o sistema de equações na forma canónica quando as variáveis aparecem na ordem x, y, s c.

3) Escreva o sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

na forma matricial.

4) Numa empresa trabalham 40 empregados (homens e mulheres). Cada homem ganha 50 contos por dia e cada mulher 30 contos. Os empregados recebem conjuntamente 1600 contos. Usando o método de substituição, diga quantos homens e mulheres trabalham na empresa. **R**: $(20, 20)$

5) Use a regra de Cramer e resolva o seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned} 3x - y &= 8 \\ x - 2y &= 5 \end{aligned}$$

em ordem a (e.o.a) x e y. Verifique a resposta obtida por meio de substituição.

6) Use a regra de Cramer e resolva o seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned} x + 3y &= 1 \\ 3x - 2y &= 14 \end{aligned}$$

em ordem a (e.o.a) x e y.

7) Use a regra de Cramer e resolva o seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned} ax - by &= 1 \\ bx + ay &= 2 \end{aligned}$$

em ordem a (e.o.a) x e y.

8) Use o método de exclusão de Gauss e determine Y e C se

$$Y = C + I_0 + G_0, \quad C = a + bY,$$

onde Y é o produto nacional e C é o consumo privado. Os símbolos I_0 (investimento privado), G_0 (consumo público e investimento), a e b representam constantes, com $b < 1$.

9) Use o método de exclusão de Gauss e resolva o sistema de equações

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 &= -6 \end{aligned}$$

R: $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$

10) Use o método de exclusão de Gauss e resolva o sistema de equações

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 \qquad\quad &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

R: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

11) Use o método de exclusão de Gauss e resolva o sistema de equações

$$\begin{aligned} x + 3y - 2z &= 1 \\ 3x - 2y + 5z &= 14 \\ 2x - 5y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

R: $x = 1,\ y = 2,\ z = 3$

12) Considere o macro modelo descrito por três equações

$$Y = C + A_0, \qquad C = a + b(Y - T), \qquad T = d + tY,$$

onde Y é a renda, C é o consumo, T é o imposto da receita, A_0 é a despesa autónoma (exógena) constante e a, b, d e t são todos parâmetros positivos. Determine os valores de equilíbrio das variáveis endógenas Y, C e T:

(a) por meio de eliminações sucessivas ou substituição;

(b) escrevendo as equações na forma matricial e aplicando as regras de Cramer.

13) Uma firma produz dois tipos de produtos A e B. Para a produção de 1 unidade de A usam-se 3 unidades de K (capital) e 2 unidades de L (força de trabalho) e para a produção de 1 unidade de B usam-se 2 unidades de K e 3 unidades de L. Sabendo que se encontram armazenadas 6000 unidades de K e 6000 unidades de L, determine as quantidades de A e B que se devem produzir, usando o método da matriz inversa. **R**: $(320, 320)$

14) Utilizando o método da matriz inversa resolva o sistema

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 3 \\ 3x - 4y &= 5 \end{aligned}$$

15) Seja $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$. Mostre que $\mathbf{A}^3 = \mathbf{I}$. Use este resultado e determine $\mathbf{A}^{-1}$.

16) Os preços de equilíbrio para três mercados são dados pelo sistema

$$\begin{array}{rcrcrcr} 11P_1 & - & P_2 & - & P_3 & = & 31 \\ -P_1 & + & 6P_2 & - & 2P_3 & = & 26 \\ -P_1 & - & 2P_2 & + & 7P_3 & = & 24 \end{array}$$

Determine o preço de equilíbrio para cada mercado. **R**: $(4, 7, 6)$

17) Usando o método da matriz inversa, determine a solução de equilíbrio para o seguinte modelo de mercado:

$$\begin{array}{rcrcrcr} Q_{d_1} & = & 8 & - & 12P_1 & + & 28P_2 \\ Q_{s_1} & = & 4 & + & 8P_1 & + & 12P_2 \\ Q_{d_2} & = & 24 & + & 12P_1 & - & 12P_2 \\ Q_{s_2} & = & 18 & + & 6P_1 & + & 12P_2, \end{array}$$

onde Q_{d_i} é a quantidade procurada da i-ésima mercadoria, Q_{s_i} é a quantidade ofertada da i-ésima mercadoria, P_i é o preço da i-ésima mercadoria, $i = 1, 2$. **R**: $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{8}\right)$

18) Usando as fórmulas de Cramer, determine a solução de equilíbrio para o seguinte modelo de mercado:

$$\begin{aligned} Q_{d_1} &= 3 - 5P_1 + 8P_2 + 2P_3 \\ Q_{s_1} &= 2 + 2P_1 + 3P_2 + P_3 \\ Q_{d_2} &= 4 + 6P_1 - 3P_2 + 2P_3 \\ Q_{s_2} &= 3 + 3P_1 + 2P_2 + P_3 \\ Q_{d_3} &= 7 + 10P_1 + 7P_2 - 12P_3 \\ Q_{s_3} &= 3 + 3P_1 + 2P_2 + 4P_3, \end{aligned}$$

onde Q_{d_i} é a quantidade procurada da i-ésima mercadoria, Q_{s_i} é a quantidade ofertada da i-ésima mercadoria, P_i é o preço da i-ésima mercadoria, $i = 1, 2, 3$. **R**: $(1, 1, 1)$

19) Use o método de exclusão de Gauss, determine a solução de equilíbrio para o seguinte modelo de mercado:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} Q_{d_1} & = & 2 & - & 3P_1 & + & 7P_2 & + & P_3 \\ Q_{s_1} & = & 1 & + & 2P_1 & + & 3P_2 & + & P_3 \\ Q_{d_2} & = & 4 & + & 2P_1 & - & 2P_2 & + & 4P_3 \\ Q_{s_2} & = & 3 & + & P_1 & + & 2P_2 & + & 2P_3 \\ Q_{d_3} & = & 5 & + & 2P_1 & + & 3P_2 & - & P_3 \\ Q_{s_3} & = & 6 & + & P_1 & + & P_2 & + & P_3, \end{array}$$

onde Q_{d_i} é a quantidade procurada da i-ésima mercadoria, Q_{s_i} é a quantidade ofertada da i-ésima mercadoria, P_i é o preço da i-ésima mercadoria, $i = 1, 2, 3$. **R**: $(1, 1, 1)$

20) Use o método de exclusão de Gauss e resolva o sistema:

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= -5 \\ 2x - y + z &= -6 \\ x - y - 3z &= -3 \end{aligned}$$

R: $x = 1,\ y = -2,\ z = 2$

21) Use o método de exclusão de Gauss e resolva o sistema:

$$\begin{aligned} x + y \qquad\quad &= 3 \\ x \qquad + z \qquad &= 2 \\ y + z + u &= 6 \\ y \qquad + u &= 1 \end{aligned}$$

R: $x = -3,\ y = 6,\ z = 5,\ u = -5$

22) Use o método de exclusão de Gauss e prove que o sistema de equações

$$\begin{aligned} 3x_1 + \ \ x_2 \qquad\quad &= b_1 \\ x_1 - \ \ x_2 + 2x_3 &= b_2 \\ 2x_1 + 3x_2 - \ \ x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

possui uma única solução para quaisquer valores de b_1, b_2 e b_3.

23) Prove que o sistema homogéneo de equações

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= 0 \\ bx + cy + az &= 0 \\ cx + ay + bz &= 0 \end{aligned}$$

possui uma solução não trivial se e somente se $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$.

24) Considere um modelo *insumo–produto* de Leontief com 3 sectores, nomeadamente sector A da agricultura, sector B da indústria e sector C de serviços. Sabe-se que:

(a) para produzir 1 unidade no sector A precisa-se 50 unidades de A, 70 unidades de B e 280 unidades de C;

(b) para produzir 1 unidade no sector B precisa-se 200 unidades de A, 350 unidades de B e 150 unidades de C;

(c) para produzir 1 unidade no sector C precisa-se 15 unidades de A, 230 unidades de B e 600 unidades de C.

Suponha que a procura final nos sectores A, B e C são 235, 350 e 445 unidades, respectivamente. Modele o sistema de Leontief para esta economia.

25) Uma dada economia possui três indústrias: pescas, florestas e construção de barcos. Para produzir 1 tonelada de peixe requer-se α serviço de barcos, para produzir 1 tonelada de madeira requer-se β toneladas de peixe e para produzir 1 barco requer-se γ toneladas de madeira. Suponhamos que d_1, d_2 e d_3 é a demanda final por peixe, madeira e barcos. Modele o problema de insumo-produto de Leontief.

26) Sabe-se que o modelo *insumo-produto* de Leontief é dado pela equação matricial $\vec{Q} = A\vec{Q} + \vec{d}$, onde $\vec{Q}$ é o nível de produção que deve satisfazer a demanda dada $\vec{d}$, sendo A a matriz técnica dos insumos. Usando o método da matriz inversa determine a procura total $\vec{Q} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$ para as indústrias 1, 2, sendo a matriz dos coeficientes técnicos $A = \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$ e o vector procura $\vec{d} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$. **R**: $(1, 1)$

27) Determine a procura total X para as indústrias 1, 2, 3, sendo a matriz dos coeficientes técnicos

$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.1 \\ 0.5 & 0.2 & 0.6 \\ 0.1 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$$

e o vector procura $\begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 60 \end{pmatrix}$. **R**: $(321.85, 403.97, 237.09)$

28) Forneça uma prova matemática para o facto de que se ζ é uma solução particular de um sistema linear não homogéneo e ζ_0 é a solução do respectivo sistema linear homogéneo associado, então $\zeta+\zeta_0$ é a solução geral do sistema não homogéneo.

29) Dado o sistema

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ tx & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & tz & = & 0, \end{array}$$

determine o(s) valor(es) de t de modo que existam soluções diferentes de $x = y = z = 0$. **R**: $t = 1 \vee t = 2$

30) Considere uma economia dividida num sector agrícola (A) e num sector industrial (I). Para produzir 1 unidade no sector A precisa-se $1/6$ unidades de A e $1/4$ unidades de I. Para produzir 1 unidade no sector I precisa-se $1/4$ unidades de A e $1/4$ unidades de I. Suponha que a procura final em cada um dos sectores são 60 unidades. Escreva o sistema de Leontief para esta economia. Determine o número de unidades produzidas em cada sector de modo a satisfazer a demanda final. **R**: $x = 320/3$, $y = 1040/9$

31) Considere um modelo *insumo–produto* com 3 sectores. O sector 1 é de indústria pesada, o sector 2 é de indústria ligeira e o sector 3 é de agricultura. Suponha que a matriz dos coeficientes técnicos está dada na tabela:

	Indústria pesada	Indústria ligeira	Agricultura
Unidades de bens da indústria pesada	$a_{11} = 0.1$	$a_{12} = 0.2$	$a_{13} = 0.1$
Unidades de bens da indústria ligeira	$a_{21} = 0.3$	$a_{22} = 0.2$	$a_{23} = 0.2$
Unidades de bens agrícolas	$a_{31} = 0.2$	$a_{32} = 0.2$	$a_{33} = 0.1$

Suponha que a demanda final para os três bens é igual a 85, 95 e 20 unidades, respectivamente. Se x_1, x_2 e x_3 denotam o número de unidades que devem ser produzidas nos três sectores, escreva o sistema de Leontief para o problema. Verifique que $x_1 = 150$, $x_2 = 200$ e $x_3 = 100$ é solução.

32) Dada a matriz

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

determine o seu posto (rank). **R**: 2

33) Dado o sistema

$$\begin{aligned} 5x+8y+6z &= 7 \\ 3x+5y+4z &= 5 \\ 7x+9y+4z &= 1 \\ 2x+3y+2z &= 2, \end{aligned}$$

verifique se ele é consistente e determine as soluções caso sua resposta seja afirmativa. **R**: $(-5+2t, 4-2t, t)$

34) Dado o sistema

$$\begin{array}{ccccccccccc} x & + & 3y & + & 5z & + & 7u & + & 9w & = & 1 \\ x & - & 2y & + & 3z & - & 4u & + & 5w & = & 2 \\ 2x & + & 11y & + & 12z & + & 25u & + & 22w & = & 4 \\ & & 5y & + & 2z & + & 11u & + & 4w & = & -1, \end{array}$$

verifique se ele é consistente e determine as soluções caso sua resposta seja afirmativa. **R**: *Inconsistente*

35) Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Calcule o seu determinante $|A|$. **R**: -2

(b) Verifique que

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 7 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c) Use o resultado da alínea b) e resolva o sistema

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 2 \\ x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ 4x & + & y & + & 2z & = & 0 \end{array} \quad \mathbf{R}: \left(-\frac{5}{2}, -1, -\frac{11}{2}\right)$$

36) Usando o método de eliminação de Gauss resolva o sistema

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ 3x_1 + 5x_2 &= 5 \end{aligned}$$

R: $x_1 = 5,\ x_2 = -2$

37) Usando o método de eliminação de Gauss resolva o sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

R: $x_1 = (2/5)t,\ x_2 = (3/5)t,\ x_3 = t,$ *onde* t *é um real arbitrário*

38) Usando o método de eliminação de Gauss resolva o sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

R: $x_1 = 20/9,\ x_2 = -1/3,\ x_3 = 22/9$

39) Discuta as possíveis soluções do sistema

$$\begin{aligned} x + \ y - \ z \ &= 1 \\ x - \ y + 2z \ &= 2 \\ x + 2y + az \ &= b \end{aligned}$$

para diferentes valores de a e b, usando a eliminação de Gauss.

40) Determine os valores de c para os quais o sistema

$$\begin{aligned} 2w + \ x + 4y + 3z \ &= 1 \\ w + 3x + 2y - \ z \ &= 3c \\ w + \ x + 2y + \ z \ &= c^2 \end{aligned}$$

possui solução e determine a solução para estes valores de c. **R**: *Para* $c = 1$ *e para* $c = -2/5$ *a solução é:* $x = 2c^2 - 1 + t$, $y = s$, $z = t$, $w = 1 - c^2 - 2s - 2t$, *onde* s *e* t *são reais arbitrários*

5 Unidade V. Vectores e operações com vectores

5.1 Introdução

Uma vez que os *vectores* são tipos especiais de matrizes, as operações algébricas introduzidas para matrizes são igualmente válidas para vectores. Os vectores, ao contrário das matrizes, são fáceis de interpretar geometricamente. Realmente, a palavra "vector" é originária do Latim e foi usada no sentido de "portador" e "passageiro". Em particular, a palavra está relacionada ao acto de mover uma pessoa ou objecto dum lugar para outro.

5.2 Objectivos

No fim desta unidade didáctica o aluno será capaz de:

1) Definir vector e operar com vectores;

2) Determinar os produtos escalar, vectorial e misto de vectores;

3) Decompor um vector numa base.

5.3 Tarefas

Para esta unidade o estudante deverá desenvolver as seguintes actividades:

1) No capítulo 15 do livro *Matemática Essencial para Análise Económica-Parte II*, ler as páginas 290–298.

2) No capítulo 4 do livro *Linear Algebra and Its Applications*, ler as páginas 215–222, 237–239, 246–248 e resolver os exercícios 1, 2, 3, 5, 8, 12 na página 223, exercícios 1, 2, 3, 4 na página 243, exercícios 1, 2 e 3 na página 253.

3) Assistir as aulas nos sítios:

   $http://www.youtube.com/watch?v = HdJNt2C11T4$

   $http://www.youtube.com/watch?v = tN2UJaI6Ce4$

   $http://www.youtube.com/watch?v = 15Kut7cNuvM$

   $http://www.youtube.com/watch?v = tNK7Kg976Wg$

   $http://www.youtube.com/watch?v = CMAS1Ciiyc8$

   $http://www.youtube.com/watch?v = r5VpH2sWn2s$

   $http://www.youtube.com/watch?v = Rx_W KhSK55s$

   $http://www.youtube.com/watch?v =_J 44nR51PX4$

   $http://www.andremachado.org/2011/05/produto - misto$

4) Elaborar uma lista dos principais conceitos abordados.

5) Resolver os exercícios do parágrafo 5.4 desta unidade.

5.4 Exercícios

1) Dados os vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, esboce o vector $0.5\vec{a} - 3\vec{b}$.

2) Calcule $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $2\vec{a}+3\vec{b}$ e $-5\vec{a}+2\vec{b}$ se $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. **R**: $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 13 \\ 10 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -4 \\ 13 \end{pmatrix}$

3) Sejam $\vec{a} = \{1, 2, 2\}$, $\vec{b} = \{0, 0, -3\}$ e $\vec{c} = \{-2, 4, -3\}$. Ache:
$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}, \qquad \vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c}, \qquad 3\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}, \qquad -\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}.$$

4) Se $3\{x, y, z\} + 5\{-1, 2, 3\} = \{4, 1, 3\}$, determine x, y e z. **R**: $x = 3$, $y = -3$, $z = -4$

5) Se $\vec{x} + \vec{0} = \vec{0}$, quais as componentes de $\vec{x}$? E se $0\vec{x} = \vec{0}$?

6) Sejam $\vec{a} = \{5, -1\}$ e $\vec{b} = \{-2, 4\}$. Efectue as operações $\vec{a}+\vec{b}$ e $-\frac{1}{2}\vec{a}$, ilustrando com vectores cujos inícios se encontram na origem.

7) Expresse o vector $\vec{a} = \{4, -11\}$ como uma combinação linear de $\vec{b} = \{2, -1\}$ e $\vec{c} = \{1, 4\}$. **R**: $\vec{a} = 3\vec{b} - 2\vec{c}$

8) Resolva a equação vectorial $4\vec{x} - 7\vec{a} = 2\vec{x} + 8\vec{b} - \vec{a}$ para $\vec{x}$ em termos de $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

9) Dados os vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, verifique se os vectores $\vec{p}_1 = \vec{a} - 2\sqrt{3}\,\vec{b}$ e $\vec{p}_2 = -\sqrt{3}\,\vec{a} + 6\vec{b}$ são colineares.

10) Dados três vectores $\vec{a} = \{3, -1\}$, $\vec{b} = \{1, -2\}$ e $\vec{c} = \{-1, 7\}$, defina a decomposição do vector $\vec{p} = \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ segundo a base $\vec{a}$, $\vec{b}$.

11) Determine as coordenadas do vector $\vec{b}$, se sabemos que ele tem sentido oposto do vector $\vec{a} = 5\vec{i} - 4\vec{j} + 2\sqrt{2}\,\vec{k}$ e o seu módulo é 5. **R**: $\vec{b} = \{-25/7, 20/7, -10\sqrt{2}/7\}$

12) O vector $\vec{a}$ forma com os eixos coordenados OX e OY os ângulos $\alpha = 60^o$ e $\beta = 120^o$, respectivamente. Determine as suas coordenadas, se o seu módulo é 2. **R**: $\vec{a} = \{1, -1, \sqrt{2}\}$ *ou* $\vec{a} = \{1, -1, -\sqrt{2}\}$

13) Se $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, calcule $(\vec{a}, \vec{a})$, $(\vec{a}, \vec{b})$ e $(\vec{a}, \vec{a}+\vec{b})$. Verifique que $(\vec{a}, \vec{a}) + (\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{a}+\vec{b})$. **R**: 5, 2, 7

14) Calcule o produto escalar dos vectores $3\vec{a} - 2\vec{b}$ e $\vec{a} + 2\vec{b}$, se os vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ formam o ângulo $\alpha = 2\pi/3$ e $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$. **R**: -61

15) Uma companhia de construção civil possui uma encomenda para a fabricação de várias casas de três tipos diferentes: 5 do tipo A, 7 do tipo B e 12 do tipo C. Escreva um vector 3-dimensional $\vec{x}$ cujas coordenadas dão o número de casas de cada tipo. Suponha que em madeira cada casa do tipo A necessita de 20 unidades, cada casa do tipo B necessita 18 unidades e cada cada do tipo C necessita 25 unidades. Escreva o vector $\vec{u}$ que dá as diferentes quantidades de madeira necessárias para uma casa de cada tipo A, B e C. Usando o produto interno (também se diz produto escalar) $(\vec{u}, \vec{x})$, calcule a quantidade total de madeira. **R**: 526

16) Demonstre que o vector $\vec{p} = (\vec{a}, \vec{c})\vec{b} - (\vec{a}, \vec{b})\vec{c}$ é ortogonal ao vector $\vec{a}$.

17) Calcule o valor do ângulo entre os vectores $\vec{p} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ e $\vec{q} = \vec{a} + 5\vec{b}$, onde $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são vectores unitários mutuamente perpendiculares. **R**: $\pi/4$

18) Dados os vectores $\vec{a} = \{4, -2, -4\}$ e $\vec{b} = \{6, -3, 2\}$, determine o produto escalar dos vectores $2\vec{a} - 3\vec{b}$ e $\vec{a} + 2\vec{b}$. **R**: -200

19) Dados os vértices do triângulo $A(-1,-2;4)$, $B(-4;-2;0)$ e $C(3;-2;1)$, determine o seu ângulo interno no vértice B. **R**: $\pi/4$

20) Para que valores de x o produto escalar de $(x, x-1, 3)$ e $(x, x, 3x)$ é igual a 0? **R**: $x = 0$ *ou* $x = -4$

21) O vector $\vec{x}$ é perpendicular aos vectores $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ e $\vec{b} = 18\vec{i} - 22\vec{j} - 5\vec{k}$ e forma com o eixo OY um ângulo agudo. Determine as suas coordenadas, sabendo que $|\vec{x}| = 14$. **R**: $\vec{x} = \{-4, -6, 12\}$

22) Determine o produto escalar dos vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ que são colineares e com sentidos opostos, se $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$. **R**: -3

23) Determine o módulo do vector $\vec{a} = -\vec{m} + 2\vec{n}$, onde $\vec{m}$ e $\vec{n}$ são vectores unitários e o ângulo formado entre estes vectores é $\pi/4$. **R**: $\sqrt{5 - 2\sqrt{2}}$

24) Uma firma produz $z_1, z_2, \ldots, z_n$ quantidades de n diferentes mercadorias usando como matéria prima as quantidades $x_1, x_2, \ldots, x_n$ das mesmas n mercadorias. Para cada i–ésima mercadoria ($i = 1, \ldots, n$), definimos $y_i = z_i - x_i$ como a produção líquida da i–ésima mercadoria e p_i é o preço da i–ésima mercadoria. Seja $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ (o **vector de matéria prima**), $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ (o **vector de produção líquida**) e $\vec{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ (o **vector de produção**). Calcule a receita da firma e os seus custos. Mostre que o lucro da firma é dado pelo produto escalar $(\vec{p}, \vec{y})$.

25) Que ângulo formam os vectores unitários $\vec{s}$ e $\vec{t}$, se sabemos que os vectores $\vec{p} = \vec{s} + 2\vec{t}$ e $\vec{q} = 5\vec{s} - 4\vec{t}$ são mutuamente perpendiculares? **R**: $\pi/3$

26) Calcule a área S do paralelogramo construído nos vectores $\vec{AB} = \vec{m} + 2\vec{n}$ e $\vec{AD} = \vec{m} - 3\vec{n}$, se $|\vec{m}| = 5$, $|\vec{n}| = 3$, $\alpha = \pi/6$, onde α é o ângulo formado entre os vectores $\vec{m}$ e $\vec{n}$. **R**: $75/2$

27) Determine as coordenadas do vector $(2\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b}$, se $\vec{a} = \{3, -1, -2\}$, $\vec{b} = \{1, 2, -1\}$. **R**: $\{10, 2, 14\}$

28) Calcule a área S do paralelogramo contruído nos vectores $\vec{a} = \{8, 4, 1\}$ e $\vec{b} = \{2, -2, 1\}$. **R**: $18\sqrt{2}$

29) Determine a área S do triângulo constrúído nos vectores $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$ e $\vec{b} = 5\vec{j} - 7\vec{k}$. **R**: $\sqrt{195}/2$

30) Dados os vectores $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{k}$ e $\vec{c} = \vec{j} - \vec{k}$, ache o vector $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$. * **R**: $-\vec{i} - \vec{j}$

31) Demonstre a identidade $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a}, \vec{c})(\vec{b}, \vec{d}) - (\vec{a}, \vec{d})(\vec{b}, \vec{c})$.

32) Verifique se os vectores $\vec{p} = \{2, -1, 2\}$, $\vec{q} = \{1, 2, -3\}$ e $\vec{s} = \{3, -4, 7\}$ são complanares.

33) Sejam $\vec{a} = \{1, 2, 2\}$, $\vec{b} = \{0, 0, -3\}$ e $\vec{c} = \{-2, 4, -3\}$. Calcule $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ e $|\vec{c}|$. **R**: 3, 3 *e* $\sqrt{29}$

34) Sejam $\vec{a} = \{1, 2, 1\}$ e $\vec{b} = \{-3, 0, -2\}$. Determine os números reais x_1 e x_2 tais que $x_1\vec{a} + x_2\vec{b} = \{5, 4, 4\}$. Prove que não existem números reais x_1 e x_2 que satisfazem $x_1\vec{a} + x_2\vec{b} = \{-3, 6, 1\}$. **R**: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$

35) Verifique quais destes pares de vectores são ortogonais: $\{1, 2\}$ e $\{-2, 1\}$; $\{1, -1, 1\}$ e $\{-1, 1, -1\}$; $\{a, -b, 1\}$ e $\{b, a, 0\}$.

36) Para que valores de x os vectores $\{x, -x-8, x, x\}$ $\{x, 1, -2, 1\}$ são ortogonais? **R**: 4 *ou* -2

37) Mostre que o conjunto H de todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ da forma $(3s, 2 + 5s)$ não é um espaço vectorial.

38) Seja V o conjunto de pontos do primeiro quadrante do plano xy.

    (a) Se u e v pertencem a V, a soma $u + v$ pertence a V?

    (b) Determine um vector específico u de V e um escalar c tal que cu não pertence a V.

39) Seja H o conjunto de pontos do plano que satisfazem a desigualdade $x^2 + y^2 \leq 1$. Mostre que H não é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

40) Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -5 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ e seja $u = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Determine se u pertence ao espaço nulo de A.

41) Determine se $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ pertence ao espaço nulo de $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -3 \\ 6 & -2 & 0 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

42) Determine o espaço nulo de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

43) Verifique se o conjunto $W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} : a + b + c = 2 \right\}$ é um espaço linear.

44) Verifique se o conjunto $W = \left\{ \begin{pmatrix} -a + 2b \\ a - 2b \\ 3a - 6b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ é um espaço linear.

45) Seja $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^2$, onde $T(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix}$. Mostre que T é uma transformação linear.

6 Unidade VI. Plano e recta no espaço

6.1 Introdução

A superfície mais elementar é o *plano*. O plano no espaço $Oxyz$ pode ser dado de diferentes formas. Para cada uma delas corresponde um determinado tipo de equação. Da intersecção de dois planos resulta uma *recta*.

6.2 Objectivos

No fim desta unidade didáctica o aluno será capaz de:

1) Definir a equação geral do plano;

2) Determinar o ângulo formado por dois planos e determinar as condições de paralelismo e perpendicularidade;

3) Definir a equação geral da recta no espaço;

4) Determinar o ângulo entre uma recta e um plano.

6.3 Tarefas

Para esta unidade o estudante deverá desenvolver as seguintes actividades:

1) No capítulo 15 do livro *Matemática Essencial para Análise Económica-Parte II*, ler as páginas 301–304.

2) Assistir as aulas nos sítios:
   $http://www.youtube.com/watch?v=D1YC4bmgxtE$
   $http://www.youtube.be/watch?v=xI-0ybM93fE$
   $http://www.youtu.be/watch?v=24bq4mL1n-4$
   $http://www.youtube.co/watch?v=_d ENz2i8nPE$
   $http://www.youtube.co/watch?v=L5-iGg0OUn0$

3) Elaborar uma lista dos principais conceitos abordados.

4) Resolver os exercícios do parágrafo 6.4 desta unidade.

6.4 Exercícios

1) Determine todas as normais ao plano $3x - y + 5 = 0$.

2) Escreva, na forma coordenada, a equação do plano $(\vec{r}, \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}) + 1 = 0$.

3) Como se situam os pontos $A(3, -2, 0)$, $B(1, 1, 1)$ e $C(1, -2, 1)$ em relação ao plano $3x + 5y - 2z + 1 = 0$?

4) Deduza a equação do plano que passa pelo ponto $M(1, -1, 2)$ e paralelo ao plano OXY. **R**: $z = 2$

5) Deduza a equação do plano que passa pelo ponto $M(4, -1, 2)$, paralelo ao eixo OX e passa pela origem. **R**: $2y + z = 0$

6) Deduza a equação do plano que passa pelos pontos $M(7,2,-3)$ e $N(5,6,-4)$ e paralelo ao eixo OX. **R**: $y+4z+10=0$

7) Determine os pontos de intersecção do plano $2x-y+3z-6=0$ com os eixos coordenados. **R**: $(3,0,0)$, $(0,-6,0)$ *e* $(0,0,2)$

8) Componha a equação do plano que passa pelo ponto $M(3,2,4)$ e que intersecta os eixos coordenados em segmentos de igual medida.

9) Componha a equação do plano que passa pelo ponto $M(1,2,-1)$ e é perpendicular ao vector $\vec{n}=\{1,1,2\}$.

10) Dados os pontos $M_1(1,2,-1)$ e $M_2(0,3,1)$ componha a equação do plano que passa pelo ponto M_1 e é perpendicular ao vector M_1M_2. **R**: $x-y-2z-1=0$

11) Escreva a equação do plano que passa pelo ponto $M(1,0,-1)$ e é paralelo aos vectores $\vec{a}=5\vec{i}+\vec{k}$ e $\vec{b}=\vec{j}-\vec{k}$. **R**: $(\vec{r}-\vec{i}+\vec{k},-\vec{i}+5\vec{j}+5\vec{k})=0$

12) Componha a equação do plano que passa pelos pontos $M_1(1,-1,2)$ e $M_2(3,0,-3)$ e é paralelo ao vector $\vec{a}=\{2,1,-1\}$. **R**: $x-2y-3=0$

13) Componha a equação do plano sabendo seus três pontos $A(1,-3,2)$, $B(5,1,-4)$ e $C(2,0,3)$.

14) Reduza para a forma normal a equação $\sqrt{3}(x-1)+(y+10+\sqrt{3})=0$. **R**: $-(\sqrt{3}/2)x-y/2-5=0$

15) Reduza para a forma normal a equação $(\vec{r},\vec{i}+\sqrt{2}\vec{j}+\vec{k})-10=0$ e determine os ângulos que forma o seu vector normal com os eixos coordenados. **R**: $(\vec{r},\vec{i}/2+\vec{k}/2)-5=0$, $\alpha=\pi/3$, $\beta=\pi/4$, $\gamma=\pi/3$

16) Calcule a distância do ponto $M_0(1,2,-3)$ até ao plano $(\vec{r},5\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k})+4=0$. **R**: 0

17) Escreva a equação do plano que se encontra a mesma distância de dois planos paralelos $3x+2y-z-3=0$ e $3x+2y-z-1=0$. **R**: $3x+2y-z-2=0$

18) Determine o ângulo formado pelos planos $(\vec{r},3\vec{j}-\vec{k})=0$ e $(\vec{r},2\vec{j}+\vec{k})-1=0$. **R**: $\pi/4$

19) Estabeleça como estão situados entre si os planos $\sqrt{2}x-y+3z+\sqrt{2}=0$, $2x-\sqrt{2}y+3\sqrt{2}z+2=0$.

20) Estabeleça como estão situados entre si os planos $(\vec{r},3\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})+2=0$, $(\vec{r},6\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k})+3=0$.

21) Estabeleça como estão situados entre si os planos $(\vec{r},2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k})+1=0$, $(\vec{r},\vec{i}-\vec{j}-\vec{k})+2=0$.

22) Componha a equação do plano que passa por $M(-2,7,3)$ e é paralelo a $(\vec{r},\vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k})-1=0$. **R**: $(\vec{r},\vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k})+15=0$

23) Componha a equação do plano que passa pelo ponto $M(3,4,0)$ e é perpendicular a dois planos $x+y+5z-9=0$ e $2x+y+2z+1=0$. **R**: $3x-8y+z+23=0$

24) Componha a equação do plano que passa pelos pontos $M_1(1,-1,-2)$ e $M_2(3,1,1)$ e perpendicular ao plano $(\vec{r},\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k})-5=0$. **R**: $(\vec{r}-\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k},3\vec{j}-2\vec{k})=0$

25) Dada a recta

$$\begin{cases} 2x-3y-3z-9=0 \\ x-2y+z+3=0 \end{cases}$$

escreva-a na forma canónica. **R**: $x/9=y/5=z+3$

26) Uma recta é dada pela equação $\vec{r}=\vec{i}+2\vec{k}+(2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k})t$. Escreva esta equação na forma canónica. **R**: $(x-1)/2=y/-1=(z-2)/-1$

27) Componha a equação da recta que passa pelos pontos $M_1(1,-1,3)$ e $M_2(1,1,-1)$. **R**: $(x-1)/0 = (y+1)/-2 = (z-3)/4$

28) Componha a equação da recta que passa pelo ponto $M(2,-1,0)$ e paralela ao vector $\vec{s} = \{3,-5,1\}$. **R**: $(x-2)/3 = (y+1)/(-5) = z/1$

29) Componha a equação da recta que passa pelo ponto $M(2,0,1)$ e paralela a recta $x = -1+t,\ y = 2+2t,\ z = -t$. **R**: $x = 2+t,\ y = 2t,\ z = 1-t$

30) Calcule o ângulo formado pelas rectas

$$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 3x+y-5z+1=0 \\ 2x+3y-8z+3=0. \quad \mathbf{R}:\ \pi/2 \end{cases}$$

31) Pela recta $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-2}{3}$ faça passar um plano, paralelo à recta $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-3}{-3}$. **R**: $x-y-z+4=0$

32) Componha a equação da recta que passa pelo ponto $M(1,1,1)$ e perpendicular aos vectores $\vec{s_1} = 2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$ e $\vec{s_2} = 3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$. **R**: $(x-1)/5 = (y-1)/(-1) = (z-1)/(-7)$

33) Verifique se o plano $4x-8y+17z-8=0$ pertence ao feixe de planos $\alpha(5x-y+4z-1)+\beta(2x+2y-3z+2)=0$.

7 Unidade VII. Programação linear e de transporte

7.1 Introdução

Nesta unidade abordaremos o *problema de programação linear e de transporte*. Além disso, veremos os métodos Simplex, noroeste e do custo mínimo.

7.2 Objectivos

No fim desta unidade didáctica o aluno será capaz de:

1) Modelar problemas de programação linear;
2) Resolver problemas de programação linear pelo método Simplex;
3) Modelar problemas de transporte;
4) Resolver problemas de transporte usando os métodos noroeste e custo mínimo.

7.3 Tarefas

Para esta unidade o estudante deverá desenvolver as seguintes actividades:

1) Assistir as aulas na internet sobre o a matéria.
2) Elaborar uma lista dos principais conceitos abordados.
3) Resolver os exercícios do parágrafo 7.4 desta unidade.

7.4 Exercícios

1) Esboce o semi-plano definido pela desigualdade $2x_1 + 3x_2 - 12 \leq 0$.
2) Esboce a região de soluções do sistema de inequações:

$$x - 1 \geq 0, \quad y - 1 \geq 0, \quad x + y - 3 \geq 0, \quad 6x + 7y - 42 \leq 0.$$

3) Esboce a região de soluções do sistema de inequações:

$$x_1 \geq 0, \quad x_1 + x_2 - 2 \geq 0, \quad x_1 - x_2 + 1 \leq 0, \quad x_1 \leq 2. *$$

4) Usando o método gráfico, maximize a forma linear $L = 2x_1 + 2x_2$, sujeita às restrições $3x_1 - 2x_2 + 6 \geq 0$, $3x_1 + x_2 - 3 \geq 0$, $x_1 \leq 3$. **R**: $L_{max} = 21$, para $(x_1, x_2) = (3, 7.5)$
5) Usando o método gráfico, minimize a forma linear $L = 12x_1 + 4x_2$, sujeita às restrições $x_1 + x_2 \geq 2$, $x_1 \geq \dfrac{1}{2}$, $x_2 \leq 4$, $x_1 - x_2 \geq 0$. **R**: $L_{min} = 12$, para $(x_1, x_2) = (0.5, 1.5)$

6) Modele e resolva graficamente o problema seguinte: uma empresa pode fabricar dois produtos (1 e 2). Na fabricação do produto 1 a empresa gasta nove horas-homem e três horas-máquina (a tecnologia utilizada é intensiva em mão-de-obra). Na fabricação do produto 2 a empresa gasta uma hora-homem e uma hora-máquina (a tecnologia é intensiva em capital). Sendo x_1 e x_2 as quantidades fabricadas dos produtos 1 e 2 e sabendo-se que a empresa dispõe de 18 horas-homem e 12 horas-máquina e ainda que os lucros dos produtos são 4 e 1 respectivamente, quanto deve a empresa fabricar de cada produto para obter o maior lucro possível? **R**: $\pi_{max} = 13$, para $(x_1, x_2) = (1, 9)$

7) Para manter a sua saúde, uma pessoa necessita preencher certos requisitos de consumo diário de diversos tipos de nutrientes. Suponhamos, por exemplo, que apenas três tipos de nutrientes sejam necessários: cálcio, proteína e calorias. Suponhamos também que a dieta da pessoa em questão consista apenas de dois alimentos, carne e ovos, cujos preços por unidade são 6 USD e 2 USD, respectivamente. O requisito mínimo diário de cálcio, proteína e calorias é 20 unidades, 15 unidades e 10 unidades respectivamente. Cada unidade de carne contém 10 unidades de cálcio, 5 unidades de proteína e 2 unidades de calorias, enquanto que cada unidade de ovos contém 4 unidades de cálcio, 5 unidades de proteína e 6 unidades de calorias. Modele o problema sobre a combinação dos dois alimentos que satisfaz o requisito diário e gera o custo mínimo. Escreva este modelo na forma matricial.

8) Dado o problema de programação linear

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & \pi = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \\ \\ \text{sujeito às restrições} & 3x_1 + x_2 \leq 10 \\ & x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 8 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{array}$$

transforme-o na forma padrão e escreva o modelo na forma matricial.

9) Dado o problema de programação linear

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & C = x_1 + 6x_2 + 2x_3 \\ \\ \text{sujeito às restrições} & x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ & x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 12 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{array}$$

transforme-o na forma padrão e escreva o problema na forma matricial.

10) Dado o problema de programação linear

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & Z = 100x_1 + 200x_2 \\ \\ \text{sujeito às restrições} & 4x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ & 8x_1 + 8x_2 \leq 16 \\ & 2x_2 \leq 10 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

resolva utilizando primeiro o método gráfico e depois o método Simplex. **R**: $Z_{max} = 400$ no ponto $(0, 2)$

11) Usando o método Simplex, maximize a função objectivo do lucro $\pi = 4x_1 + 3x_2$, sujeita às restrições $x_1 + x_2 \leq 4,\ 2x_1 + x_2 \leq 6,\ x_i \geq 0,\ i = 1, 2.$ **R**: $\pi_{max} = 14$ no ponto $(2, 2)$

12) Usando o método Simplex, maximize a função objectivo do lucro $\pi = 4x_1 + 3x_2$, sujeita às restrições $x_1 + x_2 \leq 5,\ 3x_1 + 2x_2 \leq 12,\ x_i \geq 0,\ i = 1, 2.$ * **R**: $\pi_{max} = 17$ no ponto $(2, 3)$

13) Dado o problema

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & \pi = 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 \\[1em] \text{sujeito às restrições} & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 19 \end{pmatrix} \\[1em] \text{e} & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{array}$$

resolva utilizando o método Simplex. **R**: $\pi_{max} = 34$ no ponto $(4, 0, 2)$

14) Uma firma produz duas linhas de produtos, I e II, numa fábrica que possui três departamentos de produção: corte, mistura e embalagem. O equipamento em cada departamento pode funcionar durante 8 horas por dia. O processo de produção decorre do seguinte modo: a) O produto I é cortado e depois embalado. Cada tonelada desse produto consome 30 minutos da capacidade de corte e 20 minutos da capacidade de embalagem; b) O produto II é misturado e depois embalado. Cada tonelada deste produto consome 60 minutos da capacidade de mistura e 40 minutos de embalagem. Os produtos I e II são vendidos aos preços USD 40 e USD 30 por tonelada, respectivamente. Estes últimos valores são os lucros por tonelada. Modele o problema e determine a combinação de níveis de produção que a firma deve escolher para maximizar o lucro total. **R**: $\pi_{max} = 760,\ (x_1, x_2) = (16, 4)$

15) Dado o problema

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & \pi = 13x_1 + x_2 \\[1em] \text{sujeito às restrições} & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & 4x_1 + 3x_2 \leq 14 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

formule o seu problema dual.

16) Dado o problema

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & C = Q_1 + 3Q_2 \\[1em] \text{sujeito à restrição} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} \\[1em] \text{e} & Q_1,\ Q_2 \geq 0 \end{array}$$

formule o seu problema dual.

17) Passe para a forma dual e, usando o método Simplex, minimize a forma linear $L = 2000x_1 + 1000x_2$, sujeita às restrições $3x_1 + x_2 \geq 40,\ 2x_1 + 2x_2 \geq 60,\ x_1,\ x_2 \geq 0$. **R**: $L_{min} = 35000$

18) Passe para a forma dual e, usando o método Simplex, minimize a forma linear $L = 2x_1 + x_2$, sujeita às restrições $3x_1 + x_2 \geq 3,\ 4x_1 + 3x_2 \geq 6,\ x_1 + 2x_2 \geq 3,\ x_1,\ x_2 \geq 0$. **R**: $L_{min} = 12/5$

19) Passe para a forma dual e, usando o método Simplex, minimize a forma linear $L = 4x_1 + 12x_2 + 18x_3$, sujeita às restrições $x_1 + 3x_3 \geq 3,\ 2x_2 + 2x_3 \geq 5,\ x_1,\ x_2,\ x_3 \leq 0$. * **R**: $L_{min} = 36$

20) Usando o método Simplex, minimize o custo $C = Q_1 + 4Q_2$ sujeito às restrições $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}$ **R**: $C_{min} = 8$

21) Usando o método Simplex, minimize $C = 12Q_1 + 42Q_2$ sujeito às restrições $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$
R: $C_{min} = 45$

22) Em duas refinarias A e B encontram-se depositadas 150 e 90 toneladas de gasolina, respectivamente. As estações de serviço I, II e III precisam de 60, 70 e 110 toneladas de gasolina, respectivamente. O preço de transporte, de uma tonelada de gasolina, da refinaria A para as estações I, II e III é 6, 10 e 4 USD, respectivamente, e da refinaria B para as estações I, II e III é 12, 2 e 8 USD, respectivamente. Usando os métodos noroeste e do custo mínimo, faça o plano optimal de transporte de gasolina de modo que o custo de transporte seja mínimo. **R**: $C = 1860$, $x_{11} = 60$, $x_{12} = 70$, $x_{13} = 20$, $x_{23} = 90$ pelo método noroeste e $C = 1060$, $x_{13} = 110$, $x_{11} = 40$, $x_{21} = 20$ pelo método do custo mínimo.

23) Em dois armazéns A e B estão armazenados 90 toneladas de farinha cada. As padarias I, II e III precisam das mesmas quantidades de farinha. O preço de transporte, de uma tonelada de farinha, do armazém A para as padarias I, II e III é 1, 3 e 5 USD, respectivamente, e do armazém B para as padarias I, II e III é 2, 5 e 4 USD, respectivamente. Usando os métodos noroeste e do potencial, faça o plano optimal de transporte de farinha de modo que o custo de transporte seja mínimo. * **R**: $C = 540$, $x_{11} = 60$, $x_{12} = 30$, $x_{22} = 30$, $x_{23} = 60$ pelo método noroeste e $C = 540$, $x_{11} = 60$, $x_{12} = 30$, $x_{22} = 30$, $x_{23} = 60$ pelo método do custo mínimo.

24) Na reserva de três estações ferroviárias A, B e C existem 60, 80 e 100 vagões, respectivamente. Usando os métodos noroeste e do potencial, componha o plano optimal de deslocação destes vagões para quatro pontos de abastecimento de pão, se para o ponto I são necessários 40 vagões, para o ponto II são necessários 60 vagões, para o ponto III são necessários 80 vagões e para o ponto IV são necessários 60 vagões. O preço de deslocação de um vagão da estação A para os respectivos pontos de abastecimento é 1, 2, 3 e 4 USD, da estação B é 4, 3, 2 e 0 USD e da estação C é 0, 2, 2 e 1 USD. **R**: $C = 420$, $x_{11} = 40$, $x_{12} = 20$, $x_{22} = 40$, $x_{23} = 40$, $x_{33} = 40$, $x_{34} = 60$ pelo método noroeste e $C = 280$, $x_{12} = 60$, $x_{23} = 20$, $x_{24} = 60$, $x_{31} = 40$, $x_{33} = 60$ pelo método do custo mínimo.

25) Uma fábrica possui três sectores de produção A, B e C e quatro armazéns I, II, III e IV. O sector A produz 30 000 peças, o sector B produz 40 000 peças e o sector C produz 20 000 peças. A capacidade dos armazéns é 20 000 peças para o armazém I, 30 000 peças para o armazém II, 30 000 peças para o armazém III e 10 000 peças para o armazém IV. O preço de transporte de A para os armazéns I, II, III e IV é 2, 3, 2 e 4 USD por cada mil peças, de B para os armazéns I, II, III e IV é 3, 2, 5 e 1 USD e de C para os armazéns I, II, III e IV é 4, 3, 2 e 6 USD. Usando os métodos noroeste e do potencial, componha o plano optimal de transporte das peças de modo que os custos sejam mínimos. * **R**: $C = 290$, $x_{11} = 20$, $x_{12} = 20$, $x_{23} = 20$, $x_{33} = 10$, $x_{34} = 10$ pelo método noroeste e $C = 210$, $x_{13} = 30$, $x_{22} = 30$, $x_{24} = 10$, $x_{31} = 20$ pelo método do custo mínimo.

8 Unidade VII. Linhas de segunda ordem

8.1 Introdução

Nesta unidade estudaremos as propriedades geométricas da *elipse, hipérbole e parábola*, que representam linhas resultantes da *intersecção do cone com o plano* que não passa pelo seu vétice. Estas linhas frequentemente encontramos em diversas questões da ciência. Por exemplo, o movimento dum ponto material sob influência dum campo central duma força de atracção decorre segundo uma dessas linhas.

8.2 Objectivos

No fim desta unidade didáctica o aluno será capaz de:

1) Determinar as equações canónicas da elipse, hipérbole e parábola;
2) Investigar a forma da elipse, hipérbole e parábola a partir das suas equações canónicas;
3) Reduzir a equação geral duma linha de segunda ordem para a forma canónica.

8.3 Tarefas

Para esta unidade o estudante deverá desenvolver as seguintes actividades:

1) Assistir as aulas nos sítios:
   $http://www.youtube.com/watch?v = TSQI49vA35g$
   $http://www.youtube.ng/watch?v = PySiSQ2hDe8$
2) Elaborar uma lista dos principais conceitos abordados.
3) Resolver os exercícios do parágrafo 7.4 desta unidade.

8.4 Exercícios

1) Reduza à forma canónica a equação da circunferência $x^2+y^2+2x-10y+1=0$. **R**: $(x+1)^2+(y-5)^2=25$
2) Que linha define a equação $x^2+y^2+10x-4y+29=0$? **R**: *Ponto* $(-5,2)$
3) Escreva a equação da circunferência que passa pelos pontos $A(0,2)$, $B(1,1)$ e $C(2,-2)$. **R**: $x^2+y^2+6x+4y-12=0$
4) Escreva a equação da tangente à circunferência $x^2+y^2=5$ no ponto $M(1,-2)$. **R**: $x-2y-5=0$
5) Escreva a equação da circunferência $x^2+2x+y^2-6y-6=0$ na forma paramétrica. **R**: $x=-1+4\cos t$, $y=3+4\sin t$, *onde* $0 \le t < 2\pi$
6) Escreva a equação da circunferência $x^2+y^2=ax$ no sistema de coordenadas polares. **R**: $\rho = a\cos\theta$, *onde* $0 \le \theta < 2\pi$
7) Dada a equação da elipse $25x^2+169y^2=4225$, calcule o comprimento dos seus semi-eixos, determine as coordenadas dos focos. **R**: $a=13$, $b=5$, $F_1(0,-12)$, $F_2(0,12)$, $e=12/13$, $x=\pm 169/12$, $d=169/6$

8) Escreva a equação canónica da elipse simétrica em relação à origem do sistema coordenado, cujos focos se encontram no eixo das ordenadas e cuja distância entre as directrizes é igual a 9 e a distância entre os focos é 4. **R**: $(x^2/5) + (y^2)/9 = 1$

9) Determine a condição para a qual a recta $Ax+By+C=0$ é tangencial à elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. **R**: $A^2a^2+B^2b^2=C^2$

10) Escreva a equação da tangente à elipse $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ no ponto $M(-1,3/2)$. **R**: $x-2y+4=0$

11) Dada a equação da hipérbole $7x^2-9y^2=63$, calcule o comprimento dos semi-eixos, as coordenadas dos focos e a excentricidade. **R**: $a=3,\ b=\sqrt{7},\ c=4,\ F_1(0,-4),\ F_2(0,4),\ e=4/3$

12) Escreva a equação da hipérbole cujos focos se encontram no eixo OY simetricamente em relação à origem do sistema coordenado e a distância entre as directrizes é 8, a excentricidade é $\sqrt{5}/2$. **R**: $(-x^2/5)+(y^2/20)=1$

13) Pela hipérbole $\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{9}=1$ passe uma tangente ao ponto $M(2,0)$. **R**: $3x+2y-6=0$ *e* $-3x+2y+6=0$

14) Pela hipérbole $\dfrac{x^2}{15}-\dfrac{y^2}{6}=1$ passe uma tangente ao ponto perpendicular à recta $x-2y=0$. **R**: $y=-2x\pm\sqrt{54}$

15) Determine as coordenadas do foco e a equação da directriz da parábola $y^2=8x$. Calcule o comprimento do raio focal do ponto $M(2,4)$. **R**: $p=4,\ F(2;0),\ x=-2,\ r=4$

16) Escreva a equação da parábola simétrica em equação ao eixo OY com centro na origem do sistema coordenado e que passa pelo ponto $B(1,-2)$. **R**: $x^2=-y/2$

17) Na parábola $y^2=\dfrac{9x}{2}$ determine o ponto que se encontra a uma distância $d=9,125$ até à directriz. **R**: $(8,6)$ *e* $(8,-6)$

18) Pelo ponto $M(5,-7)$ passe uma tangente à parábola $y^2=8x$. **R**: $x+y+2=0$ *e* $2x+5y+25=0$

19) Pela parábola $y^2=12x$ passe uma tangente paralela à recta $3x-y+5=0$. **R**: $y=3x+1$

20) Classifique a equação $4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$, reduza-a à forma canónica e esboce a linha. **R**: *Elipse*

21) Classifique a equação $4x^2-25y^2+50y-24x+89=0$, reduza-a à forma canónica e esboce a linha. **R**: *Hipérbole*

22) Classifique a equação $9x^2-16y^2-36x+32y+20=0$, reduza-a à forma canónica e esboce a linha. **R**: *Hipérbole*

23) Classifique a equação $4y^2-8y-2x-1=0$, reduza-a à forma canónica e esboce a linha. **R**: *Parábola*

24) Reduza a equação $x^2+2xy+y^2-3x-6y+3=0$ à forma canónica e classifique a linha. **R**: *Elipse*

25) Reduza a equação $4x^2-4xy+y^2+4x-2y+1=0$ à forma canónica e classifique a linha. **R**: *Par de rectas coincidentes*

9 Unidade VIII. Superfícies de segunda ordem

9.1 Introdução

Nesta unidade abordaremos a noção e principais tipos de *superfícies de segunda ordem*. Além disso, mostraremos os métodos de investigação de tais superfícies.

9.2 Objectivos

No fim desta unidade didáctica o aluno será capaz de:

1) Determinar as equações canónicas da elipsóide, hipérbolóide, parabolóide, cone e cilindro;

2) Investigar a forma da elipsóide, hipérbolóide, parabolóide, cone e cilindro a partir das suas equações canónicas;

3) Reduzir a equação geral duma superfície de segunda ordem para a forma canónica.

9.3 Tarefas

Para esta unidade o estudante deverá desenvolver as seguintes actividades:

1) Assistir as aulas nos sítios:
   $http://www.youtube.com/watch?v = BOC1xV8l - qs$
   $http://www.youtube.com/watch?v = ulvlmMTcPVM$

2) Elaborar uma lista dos principais conceitos abordados.

3) Resolver os exercícios do parágrafo 8.4 desta unidade.

9.4 Exercícios

1) Determine as coordenadas do centro e o raio da esfera dada pela equação $x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y + 1 = 0$. **R**: $(1/2, -1)$, $R = 1/2$

2) Componha a equação da esfera que passa pelos pontos $A(1, 2, -4)$, $B(1, -3, 1)$ e $C(2, 2, 3)$ e cujo o centro se situa no plano XOY. **R**: $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + 9z^2 = 26$

3) Classifique a superfície dada pela equação $x^2 + y^2 = 4$.

4) Classifique a superfície dada pela equação $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.

5) Classifique a superfície dada pela equação $x^2 - y^2 = 1$.

6) Classifique a superfície dada pela equação $y^2 = 2x$.

7) Qual o sentido geométrico da equação $x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 12yz + 6xz + 4xy - 4x - 8y - 12z + 3 = 0$? **R**: *Par de planos*

8) Reduza à forma canónica a equação da superfície $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 - 8x - 18y - 72z + 13 = 0$. **R**: $(x - 1)^2/9 + (y - 1)^2/4 + (z - 1)^2 = 1$

9) Reduza à forma canónica a equação da superfície $x^2-y^2-4x+8y-2z=0$. **R**: $(x-2)^2-(y-4)^2=2(z-6)$

10) Reduza à forma canónica a equação da superfície $4x^2-y^2+4z^2-8x+4y+8z+4=0$. **R**: $4(x-1)^2-(y-2)^2+4(z+1)^2=0$

11) Mostre que o elipsóide $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ admite a forma paramétrica

$$x=a\cos u\sin v, \quad y=b\cos u\sin v, \quad z=c\sin u.$$

12) Determine o corte cilíndrico do hiperbolóide $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$.