UNIVERSIDADE EDUARDO MONDLANE
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E INFORMÁTICA

LÓGICA E TEORIA DE CONJUNTOS

Teoria e Prática.
Para estudantes dos cursos do DMI

Maputo, 2020

Introdução

Lógica, ou, mais exactamente, **Lógica Matemática** é um ramo da Matemática que estuda os princípios e métodos para distinguir proposições válidas e das não válidas, os princípios e métodos das demonstrações e questões dos fundamentos da matemática.

A **Teoria de Conjuntos** um ramo da Matemática que estuda as propriedades gerais dos conjuntos de elementos de qualquer natureza que tenham qualquer tipo de propriedade comum. Estudam-se operações básicos entre conjuntos, relações e funções, na forma mais geral, independentemente das operações e propriedades algébricas ou geométricas entre elementos dos conjuntos.

Os princípios básicos da Lógica e da teoria das demonstrações, sem dúvida, englobam todas as areas da Matemática, tais como Álgebra, Análise, Geometria, Matemática Discreta e etc. De outro lado, nas todas as áreas da Matemática, estudam-se os objectos matemáticos, que, em primeiro lugar, estão os conjuntos, e em segundo, são dotados das operações e propriedades adicionais (algébricas, geométricas e etc.).

Sendo assim, o conhecimento da disciplina tem muita importância para especialistas de todas as especialidades do DMI.

O presente manual é preparado na base do manual do Prof. Doutor *Sergei Labovskiy*:

[1] Sergey Labovskiy, *Introdução a lógica e teoria de conjuntos*, Maputo, DMI, 2010.

Também foi significativamente utilizado o manual do Prof. Doutor *Nguyen Cong Hoan*:

[2] Nguyen Cong Hoan, *Lógica e Teoria de Conjuntos*, lições para os cursos Estatística, Informática e Matemática, Maputo, DMI, 2013.

Em particular, o Capitulo IV e inteiramente retirado de [2].

Nas várias perguntas nos usamos também manuais, textos de apoio, exercícios e testes do Prof. Doutor *Vladimir Bessonov* e Prof. Doutor *Alexandre Kalashnikov*.

Agradeço ao Professor Doutor *Andrey Shindyapin*, aos Doutorandos *Manuel dos Santos Nhangumbe*, *Tome Eduardo Sicuaio*, *Stefane Draiva Saize*, so Mestre *Alex José Carlos Marime* e ao Licenciado *Boaventura Maxlhope* pelas observações e o melhoramento do texto!

Estudo frutífera e fascinante de Lógica e Teoria de Conjuntos!

Prof. Doutor Yury Nepomnyashchikh
Fevereiro de 2020

Conteúdo

Tema I

Lógica

Capítulo 1

Proposições

1.1 Proposições

Em matemática nós temos *proposições* diferentes. Aqui são alguns:

$$A = \{\text{o numero 100 é divisível por 4}\}$$
$$B = \{\text{três é menor do que cinco}\}$$
$$C = \{\text{2 é única raiz da equação } x^2 - 4 = 0\}$$

Logo podemos notar que as proposições A e B são *verdadeiras* mas a proposição C é *falsa*. A proposição B podia ser exprimida usando símbolos matemáticos:

$$B = \{3 < 5\}.$$

Nem cada frase é proposição, por exemplo, as frases a seguir não são proposições:

1. o número 0.000000001 é muito pequeno,
2. existe um numero o quadrado do qual é igual a 2?
3. $x > 2$,
4. $x + 5 = 12$.

Cada proposição tem um dos *valores de verdade*: verdade ou falso (V ou F). Então uma frase é proposição se em princípio pode ser resolvida a questão se a proposição é verdadeira ou falsa:

- Qualquer proposição é verdadeira ou é falsa
- Nenhuma proposição pode ser verdadeira ou falsa ao mesmo tempo (Lei de contradição).
- Uma frase não é proposição se não é possível resolver a questão de verdade.

1.2 Negação ($\neg$)

A partir de cada proposição A pode-se obter uma proposição por meio de negação. A *negação* da A tem a designação

$$\neg A.$$

Por exemplo para proposições A, B, C mencionadas em cima vamos ter as negações

$$\neg A = \{\text{o numero 100 não é divisível por 4}\}$$
$$\neg B = \{\text{três não é menor do que cinco}\}$$
$$\neg C = \{\text{2 não é única raiz da equação } x^2 - 4 = 0\}$$

Em casos simples para obter uma negação é suficiente substituir 'é' por 'não é'. O valor de verdade da negação é oposto ao valor de verdade da proposição inicial.

A	B	C	$\neg A$	$\neg B$	$\neg C$
V	V	F	F	F	V

- Entre as duas proposições A e $\neg A$ uma é verdadeira mas a outra é falsa.
- A negação dupla $\neg\neg A$ é verdadeira se e somente se A é verdadeira

Observamos que para a negação de uma proposição A nos vários manuais em vez da designação $\neg A$ usa-se a notação $\sim A$.

1.3 Conectivos disjunção ($\vee$) e conjunção ($\wedge$)

Para analisar proposições de estrutura mais complexa vamos usar símbolos de conexão ou conectivos:

Símbolo	Sentido
$\vee$	ou
$\wedge$	e

Sejam P e Q duas proposições. Vamos escrever $P \vee Q$ para exprimir $\{P \text{ ou } Q\}$ e $P \wedge Q$ em vez de $\{P \text{ e } Q\}$. A expressão

$$P \vee Q$$

diz-se *disjunção* e

$$P \wedge Q$$

é *conjunção* das proposições P e Q.

Exemplo 1.1. Analisar as frases:

1. O João sai da casa e não volta.
2. Não vai chover e vamos à praia.
3. Vai chover ou vamos à praia.

Análise:

1. Sejam
$$P = \{\text{O João sai da casa}\}$$
e
$$Q = \{\text{O João volta}\}.$$
Então, a proposição pode ser representada:
$$P \wedge \neg Q.$$

2. Sejam

$$A = \{\text{Vai chover}\}, \; B = \{\text{Vamos a praia}\}$$

Usando A e B podemos representar a proposição

$$\neg A \wedge B.$$

3. Neste caso temos

$$A \vee B.$$

Mas neste último caso a proposição não nega o caso quando ambas as proposições são verdadeiras. Isto é, pode acontecer chuva mas apesar disso vamos a praia.

Então, o valor de verdade para $\wedge$ e $\vee$ pode ser determinado da *tabela de verdade*

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$
F	F	F	F
F	V	F	V
V	F	F	V
V	V	V	V

1.4 Equivalência das proposições

A negação da proposição

$$Q = \{\text{Não vai chover e vamos à praia}\}.$$

pode ser formulada: não é verdade que não vai chover e vamos à praia. Representando usando conectivos vamos ter

$$\neg Q = \neg(\neg C \wedge P).$$

Então, $\neg Q$ é verdadeira se pelo menos uma das proposições $\neg A$ ou B é falsa, isto é se uma das negações $\neg\neg A$ ou $\neg B$ é verdadeira, ou é verdadeira a proposição

$$C \vee \neg P.$$

O resultado podemos representar assim

$$\neg(\neg C \wedge P) \text{ é equivalente a } C \vee \neg P.$$

Então, a negação agora pode ser formulada:

Vai chover ou não vamos à praia.

Como uma generalização do exemplo acima temos a equivalência das proposições

$$\neg(A \wedge B) \;\Leftrightarrow\; \neg A \vee \neg B.$$

O exemplo apresentado mostre a importância da seguinte definição.

Definição 1.1. Duas proposições P e Q dizem-se *equivalentes* se têm as mesmas colunas na tabela da verdade.

O símbolo de equivalência de duas proposições usa-se $\Leftrightarrow$ ou $\equiv$. Como uma generalização do exemplo acima temos a equivalência das proposições

$$\neg(A \wedge B) \;\Leftrightarrow\; \neg A \vee \neg B.$$

A última equivalência podemos confirmar por meio da tabela de verdade

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
F	F	F	V	V	V	V
F	V	F	V	V	F	V
V	F	F	V	F	V	V
V	V	V	F	F	F	F

Note que a terceira e a sétima colunas são idênticas.

Observamos que em alguns manuais as proposições equivalentes chamam-se *logicamente idênticas.*

1.5 Conectivos condicional ($\rightarrow$) e bicondicional ($\leftrightarrow$)

Para criar fórmulas proposicionais usam-se mais dois conectivos $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ que são determinados por meio da tabela de verdade

A	B	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
F	F	V	V
F	V	V	F
V	F	F	F
V	V	V	V

O conectivo $\rightarrow$ diz-se *condicional.* O resultado da fórmula $A \rightarrow B$ é verdade se no caso A for verdade, a proposição B logo deve ter o valor verdade. O conteúdo da formula $A \rightarrow B$ pode ser descrito também pela uma das seguintes frases:

– se A é verdadeira, então B é verdadeira
(mais brevemente, se A, então B)
– de A segue B;
– B quando A;
– para que B seja verdadeira é suficiente que A seja verdadeira
(mais brevemente, para B é suficiente A);
– para que A seja verdadeira é necessário que B seja verdadeira
(mais brevemente, para A é necessário B).

O conectivo $\leftrightarrow$ diz-se *bicondicional.* O conteúdo da formula $A \leftrightarrow B$ pode ser descrito pela uma das seguintes frases:

– A é verdadeira se e somente se B é verdadeira
(mais curto, A sse B);
– A quando e só quando B;
– para A é necessário e suficiente B;

Vamos pensar sobre a frase: de A segue B e ao mesmo tempo de B segue A. É claro isto significa que A sse B é verdade (independentemente dos valores de verdade de A e B). Isto significa que das proposições $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ e $A \Leftrightarrow B$ são equivalentes:

$$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \;\Leftrightarrow\; A \Leftrightarrow B.$$

Recomendamos demonstrar esta equivalência usando a tabela de verdade.

Exemplo 1.2. Analisar as frases:

1. Se não vai chover, então vamos à praia.

2. Vamos à praia sse não vai chover.

Análise: Sejam

$$C = \{\text{Vai chover}\} \quad \text{e} \quad P = \{\text{Vamos à praia}\}.$$

1. A primeira proposição pode ser representada:

$$\neg C \to P.$$

Observamos que se C é falsa (abbr., F), i.é. se não vai chover), então $\neg C \to P$ é verdadeira (abbr. V) somente quando P é V (exactamente vamos passar à praia). Mas se C é V, i.e. vai chover, então da frase não implica nada sobre passagem para a praia. Portanto, se C é V, então $\neg C \to P$ é V, independentemente do valor de verdade da proposição P.

Este raciocínio da lógica habituada ou intuitiva está em conformidade com a definição do conectivo $\to$ para o que vemos com a ajuda da tabela de verdade

C	P	$\neg C$	$\neg C \to P$
F	F	V	F
F	V	V	V
V	F	F	V
V	V	F	V

2. A segunda proposição pode ser representada:

$$P \leftrightarrow \neg C.$$

Observamos que esta proposição é verdadeira, quando P é V (vamos a praia) e C é falsa (não vai chover), ou quando P é F (não vamos a praia) e C é V (vai chover).

Este raciocínio da lógica habituada ou intuitiva está em conformidade com a definição do conectivo $\leftrightarrow$ para o que vemos com a ajuda da tabela de verdade

C	P	$\neg C$	$P \leftrightarrow \neg C$
F	F	V	F
F	V	V	V
V	F	F	V
V	V	F	F

Observações Na Lógica, os conectivos $\to$ e $\leftrightarrow$ não têm as denominações únicas. Nos chamamos *condicional* o conectivo $\to$, mas em vários manuais, por exemplo em [1], é chamado pelo *implicação*. Nos chamamos *bicondicional* o conectivo $\leftrightarrow$, mas em vários manuais, por exemplo em [1], é chamado pelo *equivalência*. O motivo é para não misturar com a implicação $\Rightarrow$ e a equivalência $\Leftrightarrow$, entre fórmulas proposicionais (veja o seguintes parágrafos).

Observamos também, que nos definimos conectivos $\to$ e $\leftrightarrow$ directamente pela tabela de verdade. Mas nos vários manuais, como em [2], estes conectivos são definidos por meio das proposições equivalentes. Assim, se escrever de maneira curta, em [2] é colocado, pela definição,

$$p \to q \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \neg(p \wedge \neg q),$$
$$p \leftrightarrow q \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (p \to q) \wedge (q \to p)$$

É claro que neste caso as tabelas de verdade para $\to$ e $\leftrightarrow$ são mesmas que acima, só não como definições, mas como resultados obtidos das equivalências acima. De outro lado, usando a definição pela tabela, temos as fórmulas da definição alternativa usar leis da Álgebra de Lógica. Para entender melhor de que se trata, apresentamos uma analogia geométrica simples. O quadrado pode ser definido como um losango com todos os ângulos rectos, e também como um rectângulo com todos os lados iguais. O resultado é a mesma figura geométrica.

1.6 Fórmulas proposicionais

Usando conectivos podemos construir novas proposições a partir das *variáveis proposicionais*. Por exemplo,

$$P = (A \vee \neg B) \wedge C$$

é uma proposição representada por meio da fórmula com as variáveis proposicionais A, B, C. Vamos dizer P é *proposição composta* ou *fórmula proposicional* que depende das variáveis proposicionais A, B e C. Pode-se escrever $P = P(A, B, C)$.

A tabela de verdade para a formula proposicional P é

A	B	C	$\neg B$	$A \vee \neg B$	$\mathcal{E}$
F	F	F	V	V	F
F	F	V	V	V	V
F	V	F	F	F	F
F	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	F
V	F	V	V	V	V
V	V	F	F	V	F
V	V	V	F	V	V

Nos usamos na tabela acima a ordem dos valores de verdade para variáveis proposicionais A, B, C começando de F, como no manual [1], mas pode-se usar ordem começando de V, como no manual [2]. Às vezes o valor de verdade V designa-se por 1 e o valor de verdade F designa-se por 0:

A	B	C	$\neg B$	$A \vee \neg B$	$\mathcal{E}$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	1

1.7 Tautologia. Contradição

Definição 1.2 (tautologia). Uma proposição composta chama-se *tautologia* quando é verdadeira para todos os valores de verdade das variáveis proposicionais.

Se $P = \{\text{Hoje está chover}\}$, então $P \vee \neg P = \{\text{Hoje está chover ou não está chover}\}$ é, evidentemente, sempre verdadeira.

Definição 1.3 (contradição). Uma proposição composta chama-se *contradição* quando é falsa para todos os valores de verdade das vaiáveis proposicionais.

Por exemplo, $T = P \wedge \neg P$ é F, independentemente se variável proposicional P é V ou F. De facto,

P	$\neg P$	$T = P \wedge \neg P$
F	V	F
V	F	F

Se $P = \{\text{Hoje está chover}\}$, então $P \wedge \neg P = \{\text{Hoje está chover e não está chover}\}$ é, evidentemente, sempre falsa.

Vamos sempre usar a letra T para tautologia, e a letra C para contradição.

1.8 Implicação. Equivalência

Definição 1.4 (implicação). Sejam P e Q duas proposições compostas. Se a proposição condicional $P \to Q$ e uma tautologia, a essa proposição á chamada *implicação* e é denotada por $P \Rightarrow Q$ (lê-se: de P implica Q).

Por exemplo, $A \Rightarrow A \vee B$. De facto, da tabela de verdade

A	B	$A \vee B$	$A \to A \vee B$
F	F	F	V
F	V	V	V
V	F	V	V
V	V	V	V

segue que $A \to A \vee B$ é uma tautologia. Segundo definição do conectivo condicional, uma implicação $P \Rightarrow Q$ significa que Q tem o valor V na tabela de verdade sempre quando P é V (mas também Q pode ser V ou não para algumas linhas onde P é F!).

Definição 1.5 (equivalência). Sejam P e Q duas proposições compostas. Se a proposição bicondicional $P \leftrightarrow Q$ e uma tautologia, a essa proposição á chamada *equivalência* e é denotada por $P \Leftrightarrow Q$ ou $P \equiv Q$ (lê-se: P é equivalente Q).

Se $P \Leftrightarrow Q$ dizem que as proposições (formulas proposicionais) P e Q são equivalentes.

Consideremos o exemplo do parágrafo 1.3: $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$. De facto, da tabela de verdade

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$
F	F	F	V	V	V
F	V	F	V	V	F
V	F	F	V	F	V
V	V	V	F	F	F

$\neg A \vee \neg B$	$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
V	V
V	V
V	V
F	V

segue que $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ é uma tautologia. Segundo definição do conectivo bicondicional, uma equivalência $P \Leftrightarrow Q$ significa a coincidência na tabela de verdade das colunas dos valores de verdade das proposições P e Q.

A última observação mostra que as Definições 1.1 e 1.5 estão em concordância e têm o mesmo significado. Mais ainda, o conteúdo das Definições 1.4 e 1.5 de maneira simbólica pode ser escrito na forma:

$$P \Rightarrow Q \textit{ pela definção, significa } P \to Q \equiv T$$
$$P \Leftrightarrow Q \textit{ pela definção, significa } P \leftrightarrow Q \equiv T$$

Observação. Realmente, para implicação $P \Rightarrow Q$ é possível usadas as mesmas denominações que para condicional $A \to B$, tais como

- de A segue B;
- B quando A;
- para B é suficiente A

e outras. Mas a denominação

$\boxed{A \text{ implica } B}$

vamos usar exclusivamente para o caso especial de $A \to B$ o que é $A \Rightarrow B$.

Analogamente, para equivalência $P \Leftrightarrow Q$ é possível usar as mesmas denominações que para bicondicional $A \leftrightarrow B$, tais como

- A sse B;
- para A é necessário e suficiente B

e outras. Mas a denominação

$\boxed{A \text{ eqivalente } B}$

vamos usar exclusivamente para o caso especial de $A \leftrightarrow B$ o que é $A \Leftrightarrow B$.

1.9 Leis de álgebra de lógica

As implicações e as equivalências principais que são suficientes para demonstrar todas as implicações e equivalências da Lógica chamam-se *Leis de Álgebra de Lógica* ou *Leis de Álgebra de Proposições* ou *Regras de Influência.*

As Leis de Álgebra de Lógica podem ser demonstradas pelas tabelas de verdade, mas também algumas delas podem ser deduzidas de outras por um raciocínio dedutivo. Vamos considerar os métodos de demonstração das Leis, mais geral, das implicações e equivalências de Lógica, na seguinte Secção. Agora, apresentemos sem demonstração, as Leis de Álgebra de Lógica principais. Nas leis p, q, r, s significam proposições arbitrárias e T, C a tautologia e a contradição, respectivamente.

1. Lei de Adição

$$p \Rightarrow p \vee q$$

2. Leis de Simplificação

$$p \wedge q \Rightarrow p, \qquad p \wedge q \Rightarrow q$$

3. Silogismo disjuntivo

$$(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q$$

4. Dupla negação

$$\neg\neg p \Leftrightarrow p$$

5. Leis de Idempotência

$$p \vee p \Leftrightarrow p, \qquad p \wedge p \Leftrightarrow p$$

6. Leis de Identidade

$$\begin{array}{ll} p \vee T \Leftrightarrow T, & p \vee C \Leftrightarrow p, \\ p \wedge T \Leftrightarrow p, & p \wedge C \Leftrightarrow C \end{array}$$

7. Leis de Complemento

$$\begin{array}{ll} p \vee \neg p \Leftrightarrow T, & p \wedge \neg p \Leftrightarrow C \\ \neg T \Leftrightarrow C, & \neg C \Leftrightarrow T \end{array}$$

8. Leis de Tautologia e de Contradição

$$p \Rightarrow T, \qquad C \Rightarrow P$$

9. Leis comutativas

$$\begin{array}{c} p \vee q \Leftrightarrow q \vee p \\ p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p \\ p \leftrightarrow q \Leftrightarrow q \leftrightarrow p \end{array}$$

10. Leis associativas

$$\begin{array}{c} (p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r) \\ (p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r) \end{array}$$

11. Leis distributivas

$$\begin{array}{c} p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{array}$$

12. Leis de Morgan

$$\begin{array}{c} \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q \\ \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \end{array}$$

13. Leis de Condicional 1

$$\begin{array}{c} p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q \\ p \to q \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q) \end{array}$$

14. Lei de Bicondicional

$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$$

15. Lei contrapositiva

$$p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p$$

16. Redução ao absurdo

$$p \to q \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \to C$$

17. Leis transitivas

$$\begin{array}{c} (p \to q) \wedge (q \to r) \Rightarrow (p \to r) \\ (p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) \Rightarrow (p \leftrightarrow r) \end{array}$$

18. Leis de Condicional 2

$$\begin{array}{c} (p \to r) \wedge (q \to r) \Leftrightarrow (p \vee q) \to r \\ (p \to q) \wedge (p \to r) \Leftrightarrow p \to (q \wedge r) \end{array}$$

19. Dilemas construtivos

$$\begin{array}{c} (p \to q) \wedge (r \to s) \Rightarrow (p \vee r) \to (q \vee s) \\ (p \to q) \wedge (r \to s) \Rightarrow (p \wedge r) \to (q \wedge s) \end{array}$$

20. Dilemas destrutivos

$$\begin{array}{c} (p \to q) \wedge (r \to s) \Rightarrow (\neg q \vee \neg s) \to (\neg p \vee \neg r) \\ (p \to q) \wedge (r \to s) \Rightarrow (\neg q \wedge \neg s) \to (\neg p \wedge \neg r) \end{array}$$

21. Modus Ponens

$$(p \to q) \wedge p \Rightarrow q$$

22. Modus Tollens

$$(p \to q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$$

23. Lei de Exportação

$$(p \wedge q) \to r \Leftrightarrow p \to (q \to r)$$

24. Leis de Absorção

$$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p, \qquad p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$$

Observação [2]. A regra de Modus Ponens (modo que afirma), pode ser entendida como: sendo p e q proposições, "se p então q" e p são ambas Verdadeiras, então podemos concluir que q e Verdadeira. Analogamente, a regra modus tollens (modo que nega) significa: sendo p e q proposições, "se p então q"' é Verdadeira e q é Falsa, então podemos concluir que p e Falsa.

1.10 Ordem de conectivos

Todos nós sabemos que existe ordem de aplicação das operações algébricas nas expressões algébricas. Por exemplo, em vez de $a + (b(c^d))$ escrevemos $a + bc^d$, porque entre as operações "soma", "produto"e "exponenciação", primeiro, a operação de exponenciação é executada, depois a operação do produto e, finalmente, a operação da soma.

De modo análogo, na Álgebra de Lógica existe ordem de realização das operações lógicas (conectivos) nas fórmulas proposicionais.

1. A negação $\neg$ é sempre a primeira operação que está executada nas fórmulas proposicionais sem parênteses.

Assim, em vez de $(\neg p) \wedge q$ pode ser escrito mais simplesmente $\neg p \wedge q$, tal que

$$\neg p \wedge q \ \Leftrightarrow \ (\neg p) \wedge q \ \not\Leftrightarrow \ \neg(p \wedge q).$$

2. A conjunção $\wedge$ e disjunção $\vee$ têm a mesma prioridade de ordem. Estes conectivos são executados depois de negação.

3. A condicional $\rightarrow$ e bicondicional $\leftrightarrow$ também têm a mesma prioridade de ordem. Estes conectivos são executados depois de negação, conjunção e disjunção.

Por exemplo,

$$p \rightarrow \neg q \vee r \ \Leftrightarrow \ p \rightarrow (\neg q \vee r) \ \Leftrightarrow \ p \rightarrow ((\neg q) \vee r)$$

mas

$$(p \rightarrow \neg q) \vee r \ \not\Leftrightarrow \ p \rightarrow \neg q \vee r \ \not\Leftrightarrow \ p \rightarrow \neg(q \vee r).$$

4. A implicação $\Rightarrow$ e a equivalência $\Leftrightarrow$, tal como suas negações $\not\Rightarrow$ e $\not\Leftrightarrow$, sempre são aplicadas as proposições compostas, por isso, pela sua natureza tem a ordem depois de cinco conectivos $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.

Realmente, a esta regra é aplicada para todas as Leis de Álgebra de Lógica. Por exemplo, uma das leis comutativas $p \vee q \ \Leftrightarrow \ q \vee p$ é mesma que $(p \vee q) \ \Leftrightarrow \ (q \vee p)$ mas preferimos a primeira notação (sem parênteses).

5. Nas fórmulas proposicionais onde várias proposições (variáveis proposicionais ou proposições compostas) são ligadas pelo mesmo conectivo ($\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ ou $\leftrightarrow$), sem parênteses, a ordem de execução e sempre da esquerda para a direita. Por exemplo,

$$p \wedge \neg q \wedge r \ \Leftrightarrow \ (p \wedge \neg q) \wedge r,$$

$$a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n \ \Leftrightarrow \ (\ldots(a_1 \vee a_2) \vee \ldots \vee a_{n-1}) \vee a_n,$$

$$\neg p \rightarrow q \rightarrow r \rightarrow s \wedge t \ \Leftrightarrow \ (((\neg p) \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow (s \wedge t),$$

$$p \leftrightarrow q \leftrightarrow r \ \Leftrightarrow \ (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r.$$

6. Analogamente, nas fórmulas proposicionais onde as proposições são ligadas pelos conectivos da mesma prioridade de ordem, sem parênteses, a ordem de execução e sempre da esquerda para a direita. Por exemplo,

$$p \vee q \wedge \neg r \vee s \ \Leftrightarrow \ ((p \vee q) \wedge \neg r) \vee s,$$

$$p \leftrightarrow q \rightarrow r \ \Leftrightarrow \ (p \leftrightarrow q) \rightarrow r \ \not\Leftrightarrow \ p \leftrightarrow (q \rightarrow r).$$

No entanto, para evitar confusão, recomenda-se sempre colocar cuidadosamente os parênteses nessas expressões!

7. Uma sequência de implicações ou equivalências entre fórmulas proposicionais F_i entende-se no sentido diferente. Assim,

$$F_1 \Rightarrow F_2 \Rightarrow F_3$$

significa que têm lugar duas implicações

$$F_1 \Rightarrow F_2 \quad \text{e} \quad F_2 \Rightarrow F_3 \tag{1.1}$$

Analogamente,

$$F_1 \Leftrightarrow F_2 \Leftrightarrow F_3$$

significa que têm lugar duas equivalências

$$F_1 \Leftrightarrow F_2 \quad \text{e} \quad F_2 \Leftrightarrow F_3 \tag{1.2}$$

Notemos que pelas leis transitivas e pelas definições de $\Rightarrow$ e $\Leftrightarrow$: de (1.1) decorre a implicação

$$F_1 \Rightarrow F_3,$$

e de (1.2) decorre a equivalência

$$F_1 \Leftrightarrow F_3.$$

Nestas propriedades é baseado o método de raciocínio dedutivo que será considerado na Secção 2.2.

1.11 Exercícios

Os exercícios 1–6, 8 são da ficha do doutor Bessonov:

1. Indique as frases que são proposições:
   (a) A cidade de Paris é a capital de Moçambique
   (b) Um quadrilátero é um losango
   (c) A área de superfície da esfera do raio R é igual a $4\pi R^2$
   (d) Todos os triângulos são semelhantes
   (e) Todo homem tem dois filhos
   (f) $x^2 + 2x + 1 = 0$
   (g) $3^3 - 3 \cdot 10 + 3 \geq 0$
   (h) $A = \{0, 1, 3, 5\}$

2. Formule negações para as proposições seguintes:
   (a) O rio Zambeze banha a cidade de Maputo
   (b) 36 é divisível por 6
   (c) $4 > -1$
   (d) $6 \leq 2$

3. Indique quais das proposições em pares seguintes são negações uma da outra (explique, porquê):
   (a) $5 > 1$ e $5 < 1$
   (b) $3 \leq 5$ e $3 > 5$

(c) {Todos os números primos são pares} e {Todos os números primos são impares}

(d) {Todos os números primos são impares} e {Existe um número primo que é par}

(e) {Existem números irracionais} e {Todos os números são racionais}

4. Determine os valores de verdade das proposições seguintes:

   (a) 7 é um número primo e 9 é um número primo

   (b) 7 é um número primo ou 9 é um número primo

   (c) $2 \cdot 2 = 4$ e $2 \cdot 2 \leq 5$ e $2 \cdot 2 \geq 4$

   (d) Se 12 é divisível por 6 então 12 é divisível por 3

   (e) Se 11 é divisível por 6 então 11 é divisível por 3

   (f) 12 é divisível por 6 sse 12 é divisível por 3

5. Determine os valores de verdade das variáveis proposicionais a, b, ..., sabendo o valor de verdade das proposições a seguir:

   (a) $a \wedge (2 \cdot 2 = 4)$, V

   (b) $b \wedge (2 \cdot 2 = 4)$, F

   (c) $c \vee (2 \cdot 2 = 5)$, V

   (d) $d \vee (2 \cdot 2 = 5)$, F

   (e) $e \wedge (2 \cdot 2 = 5)$, F

   (f) $f \to (2 \cdot 2 = 5)$, F

   (g) $g \leftrightarrow (2 \cdot 2 = 5)$, V

   (h) $h \leftrightarrow (2 < 3)$, V

   (i) $i \leftrightarrow (2 > 3)$, V

   (j) $j \leftrightarrow (2 < 3)$, F

   (k) $k \leftrightarrow (2 > 3)$, F

   (l) se 4 é numero par então l, V

   (m) se m, então 4 é numero par, V

   (n) se 4 é numero par então n, F

   (o) se p, então 4 é numero par, F

6. Determine se for possível o valor de verdade das expressões seguintes (seja $\lambda(P)$ o valor de verdade da P)

   (a) $(a \to b) \to c$, $\lambda(c) = 1$,

   (b) $a \wedge (b \to c)$, $\lambda(b \to c) = 0$,

   (c) $a \vee (b \to c)$, $\lambda(b) = 0$,

   (d) $\neg(a \vee b) \leftrightarrow (\neg a \to \neg b)$, $\lambda(a) = 1$,

   (e) $(a \wedge b) \to (a \vee c)$, $\lambda(a) = 0$.

7. Determine os valores de verdade das variáveis proposicionais P_i sabendo os valores de verdade das proposições compostas G_i:

Proposição	Valor de verdade
$G_1 \equiv (P_1 \wedge (3 > 1)) \vee \neg P_1$	Verdadeiro
$G_2 \equiv \neg P_2 \leftrightarrow (2^3 = 5)$	Falso
$G_3 \equiv P_3 \to (\neg P_3 \vee (5 \leq 3))$	Falso
$G_4 \equiv (\neg P_4 \wedge (3 \leq 3)) \to P_4$	Verdadeiro
$G_5 \equiv (P_5 \wedge (1 < 5)) \leftrightarrow \neg P_5$	Verdadeiro
$G_6 \equiv (\neg P_6 \to (1 > 5)) \vee P_6$	Falso
$G_7 \equiv (P_7 \to (2 > 3)) \wedge \neg P_7$	Verdadeiro
$G_8 \equiv P_8 \to (\neg P_8 \vee (2 < 3))$	Falso
$G_9 \equiv (\neg P_9 \to P_9)) \vee \neg P_9$	Verdadeiro

Apresente os resultados na tabela por sinal $\times$.

	só V	só F	V ou F	nenhum
P_1				
P_2				
P_3				
P_4				
P_5				
P_6				
P_7				
P_8				
P_9				

Respostas: Designando as colunas da tabela a partir de "só V" por 1,2,3,4 obtemos as respostas: 3,2,1,1,4,2,2,4,3.

8. Construía as tabelas de verdade para as expressões dadas:

   (a) $P \wedge \neg Q$

   (b) $\neg(P \to Q)$

   (c) $P \to (Q \vee R)$

   (d) $(P \to Q) \vee (P \to R)$

9. Construía as tabelas de verdade:

   (a) $(a \to b) \to ((a \to \neg b) \to \neg a)$,

   (b) $((a \wedge \neg b) \to \neg b) \to (a \to b)$,

   (c) $a \wedge (b \to (\neg a \vee \neg b))$,

   (d) $((a \to b) \to b) \to b$.

10. Analise as proposições usando uma forma simbólica (Exercícios na pagina 8 (Cong, Lógica e Teoria de Conjuntos)):

   (a) Não ocorre que eu seja seu amigo (A)

   (b) Se ela é uma gata, então ela tem quatro pernas (G,P)

   (c) O preço do arroz aumenta se e somente se o suprimento de arroz não atende à demanda (P,S)

   (d) Ou os grandes laboratórios reduzem os preços ou o governo intervirá (L,G)

(e) Se a exportação de carne aumentar ou se a produção pecuária decair, então o custo de vida subirá (E, P, C)

11. No Domingo um estudante decidiu resolver a tarefa de Álgebra, ir ao cinema, visitar um museu e, também, se não chover, ir jogar futebol na praia.

    Em que caso podemos dizer que o programa do estudante não foi realizado? Resolver o problema sem usar as fórmulas de lógica, mas depois, com as formulas.

12. Seja dada a proposição P.
    1) Escreva a proposição P na forma simbólica usando os símbolos sugeridos.
    2) Escreva a negação da proposição P na forma simbólica e simplifique até a forma que contém negações só antes das variáveis proposicionais.
    3) Escreva a negação da proposição P em palavras (sem símbolos).

    Considere as seguintes variantes de P:

    (a) No Domingo vou visitar o meu amigo, além disso, vou estudar lógica ou jogar futebol (A,L,F).

    (b) No Sábado vou visitar o meu amigo ou estudar lógica ou jogar futebol (A,L,F).

    (c) Se vai chover, ele vai estudar a lógica, mas se não vai chover, ele vai para ocean (C,L,O).

    (d) Amanha, vou estudar lógica ou vou telefonar para amiga e convidar para cinema (L,A,C).

    (e) Estarei feliz se e somente se vou compreender bem lógica ou álgebra (F,L,A).

    (f) Se vou tomar muito cerveja, então não vou entender lógica ou álgebra (C,L,A).

    (g) Se vou tomar muito vinho, então não vou entender lógica nem álgebra (V,L,A).

13. Analise as proposições usando uma forma simbólica:

    (a) Se a Neide tiver crédito no telefone celular, então ela vai telefonar para amigas, se não tiver crédito então ela vai mandar mensagens.
    Resolução. Sejam

    $$C = \{\text{a Neide tiver credito}\}$$
    $$T = \{\text{vai telefonar para amigas}\}$$
    $$M = \{\text{vai mandar mensagens}\}$$

    A primeira ideia

    $$(C \to T) \wedge (\neg C \to M),$$

    mas esta solução não é certa. De facto, se a Neide não tem credito, então não pode telefonar e neste caso se C é F e T e M são é V a fórmula tem que ter o valor F. Mas a substituição directa destes valores da verdade das variáveis proposicionais à fórmula escrita dá-nos a vol de verdade V! Por isso, é correcto descrever a situação por meio da uma das fórmulas:

    $$(C \to T) \wedge (\neg C \to (\neg T \wedge M)) \text{ ou}$$
    $$(C \to T) \wedge (\neg C \to \neg T) \wedge (T \vee M) \text{ ou}$$
    $$(C \leftrightarrow T) \wedge (T \vee M)$$

    Os estudantes podem verificar a equivalência das fórmulas usando a tabela de verdade.

    (b) O Hélio foi convidado para passar todo o Sábado na casa do tio que vive longe. Se o Hélio acordar cedo, vai apanhar o transporte e vai passar o Sábado com seu tio, mas se o Hélio acordar tarde, vai perder o transporte e vai aproveitar o dia para cortar o cabelo e estudar Lógica.

    (c) A Célia vai cozinhar caril de cabrito e fazer uma sobremesa, que, se houver ovos, vai ser um bolo, mas se não houver, vai ser gelatina.

Capítulo 2

Demonstração das leis de álgebra de lógica. Formas normais.

2.1 Método da tabela de verdade

O método é baseado nas definições da Secção 1.8:

$$F_1 \Rightarrow F_2 \textit{ pela definção, significa } F_1 \to F_2 \equiv T$$
$$F_1 \Leftrightarrow F_2 \textit{ pela definção, significa } F_1 \leftrightarrow F_2 \equiv T$$

Então, para demonstrar uma Lei na forma de uma implicação $F_1 \Rightarrow F_2$ é suficiente construir a tabela de verdade para a proposição $F_1 \to F_2$ e verificar que coluna da tabela que corresponde a esta proposição contém todos os valores verdadeiros.

Para demonstrar uma Lei na forma de uma equivalência $F_1 \Leftrightarrow F_1$, em outras palavras, para demonstrar a equivalência das fórmulas proposicionais F_1 e F_2 é suficiente construir a tabela de verdade para a proposição $F_1 \leftrightarrow F_2$ e verificar que a coluna da tabela que corresponde a esta proposição contém todos os valores verdadeiras (ou que colunas das fórmulas F_1 e F_2 coincidem).

Exemplo 2.1. Demonstrar a lei de exportação

$$(p \wedge q) \to r \Leftrightarrow p \to (q \to r)$$

usando o método da tabela de verdade.

Resolução:

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to r$	$q \to r$	$p \to (q \to r)$
F	F	F	F	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V
F	V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	V	V	V	V	V	V

Observamos que colunas dos valores de verdade das proposições $(p \wedge q) \to r$ e $p \to (q \to r)$ coincidem. Daqui concluímos que estas proposições são equivalentes.

Exemplo 2.2. Demonstrar a lei de silogismo disjuntivo

$$(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q$$

usando o método da tabela de verdade.

Resolução:

p	q	$p \vee q$	$\neg p$	$(p \vee q) \wedge \neg p$	$(p \vee q) \wedge \neg p \to q$
F	F	F	V	F	V
F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V
V	V	V	F	F	V

Da tabela implica que $(p \vee q) \wedge \neg p \to q \Leftrightarrow T$, o que significa que a lei $(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q$ está demonstrada.

2.2 Método de raciocínio dedutivo para simplificação e para demonstração de equivalência das fórmulas proposicionais

Simplificar uma fórmula proposicional significa achar uma formula que é equivalente a formula dada e é mais simples. Então, o problema de simplificação é um caso particular do problema da demonstração de equivalências das fórmulas proposicionais.

Método de raciocínio dedutivo da demonstração de equivalência das fórmulas proposicionais P e Q consiste da sequência das fórmulas $P = F_1, F_2, \ldots, F_n = Q$ tais que a cada uma das fórmulas a partir da segunda é equivalente à fórmula precedente, i.e. $F_{i-1} \Leftrightarrow F_i$, e a cada uma destas equivalências segue directamente de uma das Leis da Álgebra de Lógica 1-21 apresentadas no parágrafo 1.9. Neste raciocínio usa-se a regra

Regra: se $F_1 \Leftrightarrow F_2$ e se $F_2 \Leftrightarrow F_3$, então $F_1 \Leftrightarrow F_3$.

Agora, vamos esclarecer a ideia do método por meio de um exemplo, e depois vamos continuar a descrição do método.

Exemplo 2.3. Simplificar a fórmula

$$P \vee (Q \wedge \neg P).$$

Solução:

$$\begin{array}{lll} & P \vee (Q \wedge \neg P) & \\ \Leftrightarrow & (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg P) & \text{(lei distributiva)} \\ \Leftrightarrow & (P \vee Q) \wedge T & \text{(lei de complemento)} \\ \Leftrightarrow & P \vee Q & \text{(lei de identidade)} \end{array}$$

Observamos que a regra acima tem uma analogia intuitiva com a 2^a lei transitiva 16 e pode ser escrita na forma:

$$(F_1 \Leftrightarrow F_2) \wedge (F_2 \Leftrightarrow F_3) \vdash (F_1 \Leftrightarrow F_3) \qquad (2.1)$$

O símbolo $\vdash$ significa *implica logicamente* ou *deduz-se* e chama-se *símbolo de dedução*. De facto, é quase mesma lei 16, mas só usada no outro nível: em vez de conectivo condicional $\leftrightarrow$, torna-se uma equivalência $\Leftrightarrow$, e em vez de implicação $\Rightarrow$, torna-se uma dedução $\vdash$. A expressão (2.1) serve como método de resolução do seguinte problema: a partir da fórmula F_1 e por meio de duas equivalências lógicas *deduzir* a fórmula F_3 que é equivalente à fórmula inicial F_1.

A formula (2.1) pode ser generalizada para:

$$(F_1 \Leftrightarrow F_2) \wedge (F_2 \Leftrightarrow F_3) \wedge \ldots \wedge (F_{n-1} \Leftrightarrow F_n) \\ \vdash (F_1 \Leftrightarrow F_n).$$

O método de demonstração correspondente pode ser apresentado no esquema:

$$\begin{array}{lll} & F_1 & \\ \Leftrightarrow & F_2 & \text{(justificação)} \\ \Leftrightarrow & F_3 & \text{(justificação)} \\ & \ldots & \\ \Leftrightarrow & F_n & \text{(justificação)} \end{array}$$

onde *justificação* significa o uso de uma ou várias leis de Álgebra de Lógica.

O método de demonstração da equivalência lógica de duas fórmulas proposicionais F_1 e F_n descrito chama-se *método de dedução* ou *raciocínio dedutivo* (veja [H]).

De facto, a simplificação da fórmula no Exemplo 2.3 é realizada pelo método de raciocínio dedutivo.

Uma aplicação importante do método de raciocínio dedutivo é a demonstração das leis de Álgebra de Lógica a partir das outras leis, já conhecidas.

Então temos dois métodos de transformação das fórmulas proposicionais e de demonstração das Regras de Influência:

1) o método usando a tabela de verdade;

2) o método do raciocínio dedutivo.

O método usando a tabela de verdade é melhor para fórmulas simples. Por exemplo, a lei $p \wedge T \Leftrightarrow p$ é facilmente demonstra-se por meio da tabela de verdade.

Ao contrário, o método de raciocínio dedutivo mais úteis para fórmulas e para leis complicadas. Se, por exemplo, queriam demonstrar uma lei "nova" contendo 5 variáveis proposicionais e 10 conectivas, o número dos símbolos V e F da tabela de verdade é $2^5 \cdot 10 = 320$! É claro que neste caso é mais racional usar raciocínio dedutivo.

Exemplo 2.4. Demonstrar a lei de exportação

$$(p \wedge q) \rightarrow r \Leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

usando o raciocínio dedutivo.

Resolução: 1^0 *método.*

$$\begin{array}{lll} & p \rightarrow (q \rightarrow r) & \\ \Leftrightarrow & p \rightarrow \neg(q \wedge \neg r) & \text{(lei de condicional 1)} \\ \Leftrightarrow & \neg(p \wedge \neg\neg(q \wedge \neg r)) & \text{(lei de condicional 1)} \\ \Leftrightarrow & \neg(p \wedge (q \wedge \neg r)) & \text{(negação dupla)} \\ \Leftrightarrow & \neg((p \wedge q) \wedge \neg r) & \text{(lei associativa)} \\ \Leftrightarrow & (p \wedge q) \rightarrow r & \text{(lei de condicional 1)} \end{array}$$

Observamos, que da lei comutativa para conectivo bicondicional segue que as leis $F_1 \Leftrightarrow F_2$ e $F_2 \Leftrightarrow F_1$ são equivalentes, então é possível considerar com sendo a mesma lei. Então, na demonstração nos deduzimos da proposição da parte direita da lei de exportação à proposição na parte esquerda.

2^0 *método.*

$$\begin{array}{lll} & p \rightarrow (q \rightarrow r) & \\ \Leftrightarrow & p \rightarrow (\neg q \vee r) & \text{(lei de condicional 1)} \\ \Leftrightarrow & \neg p \vee (\neg q \vee r) & \text{(lei de condicional 1)} \\ \Leftrightarrow & (\neg p \vee \neg q) \vee r & \text{(lei associativa)} \\ \Leftrightarrow & \neg((p \wedge q) \vee r) & \text{(lei de Morgan)} \\ \Leftrightarrow & (p \wedge q) \rightarrow r & \text{(lei de condicional 1)} \end{array}$$

2.3 Raciocínio dedutivo para implicações

Para demonstrar leis da Álgebra de Lógica na forma de uma implicação lógica $F_1 \Rightarrow F_2$ é possível usar o raciocínio dedutivo, que é análogo ao raciocínio dedutivo para equivalências.

É claro, que se são válidas duas implicações $F_1 \Rightarrow F_2$ e $F_2 \Rightarrow F_3$, então, segundo 1^a lei transitiva, é válida também a implicação $F_1 \Rightarrow F_3$. Simbolicamente, temos

$$(F_1 \Rightarrow F_2) \wedge (F_2 \Rightarrow F_3) \vdash (F_1 \Rightarrow F_3) \qquad (2.2)$$

De facto, é quase mesma lei 16, mas só usada, no nível mais alto, analogamente à fórmula (2.1). A fórmula (2.2) serve como raciocínio dedutivo para o seguinte problema: a partir da fórmula F_1 e por meio das duas implicações lógicas *deduzir* a fórmula F_3, para obter a implicação $F_1 \Rightarrow F_3$.

A formula (2.2) pode ser generalizada para:

$$(F_1 \Rightarrow F_2) \wedge (F_2 \Rightarrow F_3) \wedge \ldots \wedge (F_{n-1} \Rightarrow F_n) \\ \vdash (F_1 \Rightarrow F_n). \qquad (2.3)$$

A demonstração de uma implicação lógica $F_1 \Rightarrow F_n$ do método de raciocínio dedutivo pode ser apresentada pela esquema:

$$\begin{array}{lll} & F_1 & \\ \Rightarrow & F_2 & \text{(justificação)} \\ \Rightarrow & F_3 & \text{(justificação)} \\ & \ldots & \\ \Rightarrow & F_n & \text{(justificação).} \end{array} \qquad (2.4)$$

É claro que este raciocínio será correcto, se em vez de algumas implicações $\Rightarrow$ ficam equivalências $\Leftrightarrow$.

Exemplo 2.5. Demonstrar a lei de silogismo disjuntivo

$$(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q$$

usando o raciocínio dedutivo.

Resolução:

$$\begin{array}{lll} & (p \vee q) \wedge \neg p & \\ \Leftrightarrow & \neg p \wedge (p \vee q) & \text{(lei comutativa)} \\ \Leftrightarrow & (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge q) & \text{(lei distributiva)} \\ \Leftrightarrow & C \vee (\neg p \wedge q) & \text{(leis comut. e de compl.)} \\ \Leftrightarrow & (\neg p \wedge q) \vee C & \text{(lei comutativa)} \\ \Leftrightarrow & \neg p \wedge q & \text{(lei de identidade)} \\ \Rightarrow & q & \text{(lei de simplificação)} \end{array}$$

Então, a lei $(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q$ é demonstrada.

2.4 Formas normais disjuntiva e conjuntiva

Sejam a, b, c variáveis proposicionais. As expressões

$$a \wedge b \wedge c,\ \neg a \wedge b \wedge \neg c,\ a \wedge \neg b \wedge c, \dots$$

vamos chamar *conjunções elementares*. Consideremos uma definição em geral.

Definição 2.1. Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n$ variáveis proposicionais. Seja $x_i = a_i$ ou $x_i = \neg a_i$ onde $i = 1, 2, \dots, n$. Neste caso, a conjunção

$$x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n$$

diz-se uma conjunção elementar.

Definição 2.2. Uma disjunção $C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_k$ diz-se *forma normal disjuntiva* (ou FND) se $C_1, C_2, \dots C_k$ são conjunções elementares diferentes.

Por exemplo,

$$F_1 = (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c)$$

é uma forma normal disjuntiva.

Analogamente pode ser considerada uma forma normal conjuntiva (FNC) que é uma conjunção de disjunções elementares, por exemplo

$$F_2 = (a \vee \neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee c) \wedge (a \vee b \vee c).$$

Consideremos as tabelas de verdade para F_1 e F_2:

a	b	c	F_1	F_2
F	F	F	F	F
F	F	V	V	V
F	V	F	F	F
F	V	V	F	V
V	F	F	F	V
V	F	V	V	V
V	V	F	F	F
V	V	V	V	V

Desta tabela podemos concluir que os valores V na tabela de uma FND correspondem aos termos que são conjunções elementares. Por exemplo, o primeiro termo

$$a \wedge \neg b \wedge c$$

é verdadeiro sse a tem o valor V, b tem o valor F, c tem o valor V.

Então, para obter uma FND a partir da tabela de verdade, podemos usar o segundo algoritmo:
1. Consideremos todas as linhas que possuem V na última coluna;
2. Construímos para cada uma destas linhas as *conjunções elementares* correspondentes: tomamos $x_i = a_i$ para todas a_i *Verdadeiras* e $x_i = \neg a_i$ para todas a_i *Falsas* (veja a tabela abaixo);
3. Escrevemos a *disjunção* destas conjunções elementares.

a	b	c	F_1	
F	F	F	F	
F	F	V	V	$\neg a \wedge \neg b \wedge c$
F	V	F	F	
F	V	V	F	
V	F	F	F	
V	F	V	V	$a \wedge \neg b \wedge c$
V	V	F	F	
V	V	V	V	$a \wedge b \wedge c$

Então (segundo ponto 3),

$$F_1 = (\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c)$$

Para uma FNC temos correspondência entre valores falsos, i.e., F_2 tem o valor F que corresponde às disjunções elementares. Por exemplo, o primeiro termo

$$a \vee \neg b \vee c$$

é falso sse a tem o valor F, b tem o valor V, c tem o valor F.

Então, para obter uma FNC a partir da tabela de verdade, podemos usar o segundo algoritmo:
1. Consideremos todas as linhas que possuem F na última coluna;
2. Construímos para cada uma destas linhas as *disjunções* correspondentes: tomamos $x_i = a_i$ para todas a_i *Falsas* e $x_i = \neg a_i$ para todas a_i *Verdadeiras* (veja a tabela abaixo);
3. Escrevemos a *conjunção* destas disjunções.

a	b	c	F_2	
F	F	F	F	$a \vee b \vee c$
F	F	V	V	
F	V	F	F	$a \vee \neg b \vee c$
F	V	V	V	
V	F	F	V	
V	F	V	V	
V	V	F	F	$\neg a \vee \neg b \vee c$
V	V	V	V	

Então (segundo ponto 3),

$$F_2 = (a \vee b \vee c) \wedge (a \vee \neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee c).$$

Teorema 2.1. *Cada fórmula proposicional tem as formas FND e FNC equivalentes à mesma.*

Então, podemos concluir que cada fórmula do cálculo proposicional pode ser representada por meio das operações de negação, conjunção e disjunção.

De facto, dos algoritmos apresentados segue a resposta positiva do Problema de Post (Emil Leon Post, 1888–1995), veja [2]. Apresentemos esta resposta na forma seguinte:

Teorema 2.2 (Post). *Para cada proposição composta (que depende de um número finito das variáveis proposicionais livres) definida por tabela de verdade existe uma fórmula proposicional que a determina.*

Observamos também, que para cada fórmula proposicional a FND equivalente é determinada unicamente, ao menos a ordem das conjunções elementares e a ordem das variáveis proposicionais na cada conjunção elementar. Analogamente, para FNC.

Finalmente, notemos, que para Contradição que depende de n variáveis proposicionais, o número k das conjunções elementares na FND $C_1 \vee \ldots \vee C_k$ é zero, tal que coloquemos, pela definição, que a FND de C é a mesma C. Analogamente, pela definição, a FNC para uma Tautologia T é mesma T.

Como exemplos, apresentemos as FND e FNC para T e C no caso de duas variáveis proposicionais x e y:

$$\begin{array}{ll}
T \Leftrightarrow (\neg x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y) \vee (x \wedge y) & \\
 & \text{(FND)} \\
C \Leftrightarrow C & \text{(FND)} \\
T \Leftrightarrow T & \text{(FNC)} \\
C \Leftrightarrow (x \vee y) \wedge (x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y) & \\
 & \text{(FNC)}
\end{array}$$

2.5 FND e FNC. Exemplos

Exemplo 2.6. Para a fórmula $\neg(x \wedge z) \wedge (x \to y)$ ache FND e FNC.

Resolução: Designando a fórmula dada por p, achamos a tabela de verdade para p:

x	y	z	$x \wedge z$	$\neg(x \wedge z)$	$x \to y$	p
F	F	F	F	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
V	F	V	V	F	F	F
V	V	F	F	V	V	V
V	V	V	V	F	V	F

Depois, usando algoritmos descritos na Secção 2.4, obtemos a seguinte tabela (os estudantes podem escrever duas últimas colunas à direita da tabela acima, mas a concepção do manual não permite fazer isto):

x	y	z	p	para FND	para FNC
F	F	F	V	$\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z$	
F	F	V	V	$\neg x \wedge \neg y \wedge z$	
F	V	F	V	$\neg x \wedge y \wedge \neg z$	
F	V	V	V	$\neg x \wedge y \wedge z$	
V	F	F	F		$\neg x \vee y \vee z$
V	F	V	F		$\neg x \vee y \vee \neg z$
V	V	F	V	$x \wedge y \wedge \neg z$	
V	V	V	F		$\neg x \vee \neg y \vee \neg z$

Então, a FND de p é:

$$(\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge z) \vee$$
$$(\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z).$$

A FNC de p é:

$$(\neg x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee \neg z).$$

Observação. É possível achar a FND e FNC de p também por raciocínio dedutivo, mas como regra, para as FND e FNC este método é pior (mais complicado) do que o método de uso a tabela de verdade.

Exemplo 2.7. Ache as tabelas de verdade para as seguinte fórmulas proposicionais:

a) $F_1 = (a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge c)$,

b) $F_2 = (x \vee \neg y \vee z \vee \neg t) \wedge (\neg x \vee y \vee z \vee t)$.

Resolução: Primeiro, notemos que é possível encontrar as tabelas de verdade do método directo. No entanto, é mais racional usar a correspondência entre FND e FNC e a tabela de verdade, descrito na Secção 2.4.

a) A fórmula F_1 representa-se a disjunção de três conjunções, sendo duas deles são conjunções elementares. Usamos dois métodos de construção da tabela de verdade.

1^0 *método.* Obtemos a FND de F_1 e depois usamos ideias da correspondência entre FND e tabela de verdade. Para obter a FND é suficiente achar a conjunção elementar que é logicamente equivalente à conjunção $\neg a \wedge c$. Do raciocínio dedutivo obtemos

$$\begin{array}{lll}
 & \neg a \wedge c & \\
\Leftrightarrow & (\neg a \wedge c) \wedge T & \text{(lei de identidade)} \\
\Leftrightarrow & (\neg a \wedge c) \wedge (b \vee \neg b) & \text{(lei de compl.)} \\
\Leftrightarrow & ((\neg a \wedge c) \wedge b) \vee & \\
 & ((\neg a \wedge c) \wedge \neg b) & \text{(lei distributiva)} \\
\Leftrightarrow & (\neg a \wedge b \wedge c) \vee & \\
 & (\neg a \wedge \neg b \wedge c) & \text{(leis com. e ass.)}
\end{array}$$

Então, a FND de F_1 é

$$(a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \vee$$
$$(\neg a \wedge b \wedge c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c).$$

A tabela de verdade da fórmula F_1 é

a	b	c	F_1
F	F	F	F
F	F	V	V
F	V	F	F
F	V	V	V
V	F	F	F
V	F	V	V
V	V	F	V
V	V	V	F

A proposição F_1 é V, quando uma das conjunções elementares é V. A primeira conjunção elementar $a \wedge b \wedge \neg c$ é Verdadeira se as variáveis livres a, b e c têm valores de verdade V, V e F, respectivamente (sétima de 8 linhas). Analogamente consideram-se três outras conjunções elementares.

2^0 *método.* Construímos a tabela directamente da forma de F_1 usando a sua representação na forma de disjunção de três conjunções (seja a última conjunção não é elementar).

A primeira conjunção $a \wedge b \wedge \neg c$ é verdadeira sse a, b e c são V, V e F, respectivamente (sétima linha da tabela).

A segunda conjunção $a \wedge \neg b \wedge c$ é verdadeira sse a, b e c são V, F e V, respectivamente (sexta linha da tabela).

A terceira conjunção $\neg a \wedge c$ é verdadeira sse a e c são F e V, respectivamente, mas b é qualquer (segunda e quarta linhas da tabela).

Então obtemos a mesma tabela que que foi obtida do 1^0 método.

b) A fórmula F_2 já tem a FNC. A tabela de verdade é:

x	y	z	t	F_2
F	F	F	F	V
F	F	F	V	V
F	F	V	F	V
F	F	V	V	V
F	V	F	F	V
F	V	F	V	F
F	V	V	F	V
F	V	V	V	V
V	F	F	F	F
V	F	F	V	V
V	F	V	F	V
V	F	V	V	V
V	V	F	F	V
V	V	F	V	V
V	V	V	F	V
V	V	V	V	V

Notemos que dois valores Falsos estão nas linhas que correspondem as disjunções elementares Falsas. A primeira disjunção elementar $x \vee \neg y \vee z \vee \neg t$ é Falsa se as variáveis livres x, y, z e t têm valores de verdade F, V, F e V, respectivamente. Analogamente considera-se a segunda disjunção elementar. Nas outras $16 - 2 = 14$ linhas o valor de verdade de F_2 é V.

2.6 Exercícios

1. Usando o raciocínio dedutivo simplifique as seguintes fórmulas:

   (a) $\neg b \wedge (a \to \neg(a \to b))$
   (b) $(\neg b \to \neg(b \to a)) \wedge \neg b$
   (c) $(a \to b) \wedge (\neg b \to a)$
   (d) $(a \to b) \to \neg a$
   (e) $(\neg a \to \neg b) \to a$
   (f) $a \leftrightarrow (a \vee b)$
   (g) $(a \leftrightarrow b) \wedge a$
   (h) $(a \wedge (\neg a \vee b)) \to b$
   (i) $(a \to b) \to (a \wedge b)$
   (j) $p \to (\neg q \vee p)$
   (k) $(p \wedge q) \to p$
   (l) $(p \vee q) \to \neg p$
   (m) $\neg(\neg a \vee b) \to ((a \to \neg b) \to a)$
   (n) $\neg(\neg a \wedge \neg b) \vee ((a \to b) \wedge a)$
   (o) $((a \to b) \wedge (b \to a)) \vee (a \vee b)$
   (p) $(a \to b) \wedge (b \to \neg a) \wedge (c \to a)$
   (q) $(a \wedge c) \vee (a \wedge \neg c) \vee (b \wedge c) \vee (\neg a \wedge b \wedge c)$
   (r) $\neg((a \to b) \wedge (b \to \neg a))$

   Respostas: (a) $\neg b$; (b) C; (c) b; (d) $\neg a \vee \neg b$; (e) $a \vee b$; (f) $a \vee \neg b$; (g) $a \wedge b$; (h) T; (i) a; (j) T; (k) T; (l) $\neg p$.

2. Usando o método de raciocínio dedutivo, ache uma fórmula equivalente na qual o sinal de negação $\neg$ pode ficar só imediatamente antes de variáveis proposicionais (por exemplo, pode ser $\neg x$, $\neg z$, mas não pode ser $\neg(x \vee y)$):

   (a) $\neg((x \wedge y) \vee \neg z)$
   (b) $x \wedge ((x \wedge y) \vee \neg(y \wedge z) \vee \neg(y \vee (\neg t \wedge z)))$
   (c) $\neg(x \to y)$

3. Transforme cada uma das fórmulas para forma que entre conectivos lógicos contém só negação e disjunção:

   (a) $(x \to y) \to (y \wedge z)$
   (b) $(\neg x \wedge \neg y) \to (x \wedge y)$
   (c) $((\neg x \wedge \neg y) \vee z) \to (z \wedge \neg y)$

4. Ache a negação de cada uma das seguintes fórmulas e apresente na forma que pode ter o sinal de negação $\neg$ só imediatamente antes das variáveis:

   (a) $x \leftrightarrow y$
   (b) $(x \wedge (y \vee \neg z)) \vee (\neg x \wedge y)$
   (c) $((\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee r) \wedge \neg f \wedge \neg u \wedge \neg w$
   (d) $(((\neg x \wedge (\neg y \vee z)) \vee p) \wedge \neg q) \vee (\neg r \wedge (s \vee \neg t))$
   (e) $((x \wedge (\neg y \vee (\neg z \wedge p))) \vee \neg q) \wedge r$

5. Para cada uma das fórmulas seguintes ache as FND e FNC:
   (a) $\neg((b \to \neg a) \to a)$
   (b) $(p \leftrightarrow \neg r) \wedge q$
   (c) $\neg(\neg x \vee y) \to \neg z$
   (d) $\neg(y \to z) \wedge (x \vee z)$
   (e) $(\neg x \wedge y) \to \neg(x \to z)$
   (f) $(x \to y) \to z$
   (g) $(x \wedge \neg z) \to (x \leftrightarrow y)$
   (h) $((x \to y) \to (z \to \neg x)) \to (\neg y \to \neg z)$
   (i) $(x \leftrightarrow y) \wedge \neg(z \to t)$
   (j) $(x \vee (y \wedge \neg z)) \wedge (x \vee z)$

6. Para cada uma das seguintes proposições, apresente a tabela de verdade, constituída apenas das colunas de variáveis proposicionais e da proposição resultante (sem o uso das colunas auxiliares para as sub-fórmulas):
   (a) $(\neg x \vee y \vee \neg z) \wedge (y \vee z)$
   (b) $x \vee (x \wedge \neg y \wedge z)$
   (c) $(x \wedge \neg y \wedge z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y)$
   (d) $(x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y)$
   (e) $x \wedge \neg y \wedge z \wedge \neg t \wedge \neg s$

Capítulo 3

Predicados

3.1 Predicados

A expressão $x + 5 = 12$ não é proposição porque contém uma incógnita, mas se substituirmos o x nesta expressão vamos ter uma proposição. Vamos chamar tais expressões *proposições indeterminadas* ou *predicados*. Mais exemplos de predicados:

$$\begin{aligned} P(x) &= \{x \text{ é um número primo}\} \\ D(x) &= \{x > 10\} \\ E(x, y) &= \{x \text{ é divisível por } y\} \\ R(x, y) &= \{x \text{ é irmão do } y\} \end{aligned}$$

Como podemos ver os predicados podem depender de uma ou varias incógnitas ou *variáveis livres*. As proposições $P(7)$, $D(20)$, $E(24, 8)$ são verdadeiras, enquanto as $P(91)$, $D(10)$, $E(6, 4)$ são falsas.

Um predicado $A(x)$ é definido correctamente, se é definido o conjunto que pode tomar a variável livre x. Este conjunto chama-se *conjunto universal*. Os conjuntos serão considerados no Tema II. Agora é preciso compreender só conceito do conjunto e a designação $x \in U$: x pertence ao conjunto U, ou x é um elemento do conjunto U.

Assim para predicados $P(x)$, $D(x)$ acima apresentados o conjunto universal pode ser o conjunto de números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ ou o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$. Para o predicado $E(x, y)$ é o conjunto dos pares ordenados (x, y) dos números naturais (ou inteiros). Para o predicado $R(x, y)$ o conjunto universal é o conjunto de todas as pessoas de mundo (ou de todas as pessoas duma país).

3.2 Quantificador universal ($\forall$)

O sinal $\forall$ denomina-se *quantificador universal*.

Seja $P(x)$ um predicado definido sobre o conjunto universal U. A expressão

$$\forall x P(x) \quad \text{ou} \quad (\forall x \in U)\ P(x) \tag{3.1}$$

significa a proposição: *qualquer que seja (para todo o) elemento x do conjunto U a proposição $P(x)$ é verdadeira.*

Exemplo 3.1. Consideremos uma frase que com frequência aparece em raciocínios em matemática: a expressão $n^3 - n$ é divisível por 3 qualquer que seja número natural n. Para representar a expressão podemos introduzir o predicado

$$D(n) = \{\text{a expressão } n^3 - n \text{ é divisível por } 3\}$$

definido sobre o conjunto universal $U = \mathbb{N}$. O facto que $D(n)$ é verdadeiro para todos os números naturais exprima-se por meio de quantificador universal $\forall$ (para todos):

$$\forall n D(n)$$

A proposição $\forall n D(n)$ é verdadeira se e somente se $D(n)$ é verdadeira qualquer que seja o número natural n. Pode ser demonstrado que a proposição $\forall n D(n)$ verdadeira (veja Teorema A da Secção 4.3).

Exemplo 3.2. Consideremos a proposição

$$(\forall n \in \mathbb{Z})\ P(n),$$

onde

$$P(n) = \{\text{se } n \text{ é primo então } n \text{ é ímpar}\}.$$

Esta proposição é falsa porque $P(2)$ é falsa.

3.3 Conceitos de implicação e de equivalência generalizados

No capítulo 1 foi definida a implicação $P \Rightarrow Q$ para duas proposições compostas P e Q como uma proposição condicional $P \to Q$ quando essa proposição é uma tautologia. De facto, as proposições compostas podem ser consideradas como predicados.

Por exemplo, consideremos o silogismo disjuntivo $(a \vee b) \wedge \neg a \Rightarrow b$. Consideremos o conjunto universal U constituído das pares das proposições (a, b) e os predicados P e Q definidos por

$$P(a, b) = \{(a \vee b) \wedge \neg a\}, \quad Q(a, b) = \{b\}.$$

Então, a implicação $(a \vee b) \wedge \neg a \Rightarrow b$, ou seja na forma abreviada $P \Rightarrow Q$, pela definição, é a proposição

$$(\forall (a, b) \in U)\ P(a, b) \to Q(a, b).$$

Em geral, sejam P e Q predicados sobre o conjunto universal U.

A *implicação*

$$P \Rightarrow Q$$

(P implica Q) é uma proposição definida por

$$(\forall x \in U)\ P(x) \to Q(x).$$

Analogamente, a *equivalência*

$$P \Leftrightarrow Q$$

(P e Q são equivalentes) é uma proposição definida por

$$(\forall x \in U)\ P(x) \leftrightarrow Q(x).$$

O conceitos de implicação e de equivalência generalizadas serão usados no seguinte capítulo (na análise da estrutura de teorema).

3.4 Quantificador existencial ($\exists$)

O sinal $\exists$ denomina-se *quantificador existencial.*

Seja $P(x)$ um predicado definido sobre o conjunto universal U. A expressão

$$\exists x P(x) \quad \text{ou} \quad (\exists x \in U)\ P(x) \tag{3.2}$$

significa a proposição: *existe elemento x do conjunto U tal que a proposição $P(x)$ é verdadeira*, ou *existe pelo menos um $x \in U$ tal que a proposição $P(x)$ seja verdadeira* ou *a proposição $P(x)$ é verdadeira pala algum $x \in U$.*

Por exemplo, a proposição

$$\exists x\{x^2 + 1 = 0\}$$

sobre conjunto universal $\mathbb{R}$ é falsa, enquanto

$$\exists x\{x^2 - 4 = 0\}$$

é verdadeira.

Exemplo 3.3. Representar a frase *a equação $ax^2+bx+c=0$ tem pelo menos uma raiz* usando quantificadores se for necessário.

Resolução:

$$\exists x(ax^2 + bx + c = 0)$$

3.5 Variáveis livres

Nem todas as variáveis que ocorrem dentro do sinal de um quantificador têm funções iguais. Por exemplo, a expressão

$$\forall x(ax^2 + bx + c > 0)$$

têm três variáveis incógnitas ou livres a, b, c, mas a variável x serve para o quantificador $\forall$. O resultado é um predicado que depende das a, b, c, isto é

$$P(a, b, c) = \forall x(ax^2 + bx + c > 0).$$

Observamos que $P(a, b, c)$ não é uma proposição composta, porque as variáveis livres não são variáveis proposicionais, mas são números reais. Observamos que, por exemplo, $P(1, 5, 2)$ é uma proposição F, visto que $\Delta = b^2 - 4ac = 17 > 0$, e respectivamente a equação $x^2 - 5x + 2$ tem raises reais.

Agora, consideremos a outra expressão composta (o conjunto universal é $\mathbb{R}$):

$$Q = \{\ \forall b \exists a \exists c \forall x(ax^2 + bx + c > 0)\ \} \tag{3.3}$$

A expressão pode ser lido assim: qualquer que seja número real b existem números reais a e c tais que para todo numero real x tem lugar a desigualdade $ax^2 + bx + c > 0$. O predicado não contém as variáveis livres, então é uma proposição.

Encontramos o valor de verdade desta proposição. Da Matemática Básica segue que $\forall x(ax^2 + bx + c > 0)$ sse

$$(a > 0\ \wedge\ \Delta = b^2 - 4ac < 0)\ \vee\ (a = b = 0\ \wedge c > 0).$$

É evidente que $\forall b$ existem a e c reais para os quais é valida esta última proposição (é possível escolher a e c positivos tais que $4ac > b^2$). Então, a proposição Q é verdadeira.

3.6 Leis de Morgan:

Teorema 3.1 (leis de Morgan)**.** *Para qualquer predicado $P(x)$ tem lugar:*

$$\neg \exists x P(x) \Leftrightarrow \forall x \neg P(x)$$
$$\neg \forall x P(x) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x)$$

Demonstração. É claro que a frase "não existe x tal que $P(x)$ é V"significa que "para todo o x a proposição $P(x)$ é F". Mas a esta última proposição significa que "$\forall x$ a proposição $\neg P(x)$ é V". Analogamente demonstra-se a segunda equivalência. □

Exemplo 3.4. Escreva a negação proposição Q definido por (3.3) na forma simbólica que não contem o sinal de negação $\neg$.

Resolução: Aplicando quatro vezes Teorema 3.1 e uma vez lei de Morgan do Capítulo 1, obtemos

$$\begin{aligned}
& \neg(\forall b \exists a \exists c \forall x(ax^2 + bx + c > 0)) \\
\Leftrightarrow\ & \exists b \neg(\exists a \exists c \forall x(ax^2 + bx + c > 0)) \\
\Leftrightarrow\ & \exists b \forall a \neg(\exists c \forall x(ax^2 + bx + c > 0)) \\
\Leftrightarrow\ & \exists b \forall a \forall c \neg(\forall x(ax^2 + bx + c > 0)) \\
\Leftrightarrow\ & \exists b \forall a \forall c \exists x \neg(ax^2 + bx + c > 0)) \\
\Leftrightarrow\ & \exists b \forall a \forall c \exists x(ax^2 + bx + c \leq 0)
\end{aligned}$$

Então, $\neg Q = \{\ \exists b \forall a \forall c \exists x(ax^2 + bx + c \leq 0)\ \}$.

Teorema 3.2. *Para qualquer predicado $P(x)$ tem lugar:*

$$\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$$
$$\exists x(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow \exists x P(x) \vee \exists x Q(x).$$

A demonstração do Teorema 3.2 oferece-se aos estudantes como um exercício.

Observação. A proposições

$$\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \quad \text{e} \quad \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$$

não são equivalentes, mesmo que as proposições

$$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \quad \text{e} \quad \forall x P(x) \vee \forall x Q(x).$$

Este facto confirma-se por meio do exemplo: o universal é o conjunto de números reais, $P(x) = \{x \geq 0\}$, $Q(x) = \{x < 0\}$.

3.7 Exercícios

1. Os predicados a seguir são definidos sobre o conjunto $\mathbb{N}$ de todos os números naturais:

$$\begin{aligned} I(n) &\equiv \{n^2 = n + 1\} \\ M(n) &\equiv \{n > 1\} \\ P(n) &\equiv \{n(n+1) \text{ é par}\} \\ Q(n) &\equiv \{n^2 > 3\} \end{aligned}$$

   Quais das proposições são verdadeiras?

   (a) $\forall n I(n)$
   (b) $\forall n M(n)$
   (c) $\forall n P(n)$
   (d) $\exists n I(n)$
   (e) $\exists n M(n)$
   (f) $\exists n P(n)$
   (g) $\exists n(M(n) \wedge P(n))$
   (h) $\exists n(M(n) \vee P(n))$
   (i) $\forall n(M(n) \wedge P(n))$
   (j) $\forall n(M(n) \vee P(n))$
   (k) $\forall n(M(n) \rightarrow Q(n))$
   (l) $\exists n(M(n) \rightarrow Q(n))$

2. Construir as negações das proposições consideradas no exercício precedente usando as leis de Morgan. Analisar o resultado obtido.

3. Analise as formas lógicas das frases:

   (a) Um dos estudantes da turma não conseguiu fazer o trabalho.
   (b) Qualquer coisa neste mercado é muito cara ou tem defeitos
   (c) Ninguém é perfeito
   (d) A Laura gosta de qualquer pessoa que não gosta da Maria

4. Discute o significado das proposições. São verdadeiras ou falsas? O universal é o conjunto $\mathbb{N}$ de todos os números naturais.

   (a) $\forall x \exists y(x < y)$
   (b) $\exists y \forall x(x < y)$
   (c) $\exists x \forall y(x < y)$
   (d) $\forall y \exists x(x < y)$
   (e) $\exists x \exists y(x < y)$
   (f) $\forall x \forall y(x < y)$

5. Analise a forma lógica das frases a seguir. O universal é $\mathbb{R}$. Indique as variáveis livres.

   (a) Cada número maior do que x é maior do que y.
   (b) Para qualquer a a equação $ax^2 + 4x - 2 = 0$ tem pelo menos uma solução se e somente se $a \geq -2$.
   (c) Todas as soluções da inequação $x^3 - 3x < 3$ são menores do que 10.
   (d) Se existe um número x tal que $x^2 + 5x = w$ e existe um número y tal que $4 - y^2 = w$, então w pertence ao intervalo $[-10; 10]$.

6. São as proposições seguintes verdadeiras ou falsas? O universal é $\mathbb{N}$

   (a) $\forall x \exists y(2x - y = 0)$
   (b) $\exists y \forall x(2x - y = 0)$
   (c) $\forall x \exists y(x - 2y = 0)$
   (d) $\forall x(x < 10 \rightarrow \forall y(y < x \rightarrow y < 9))$
   (e) $\exists y \exists x(y + x = 100)$
   (f) $\forall x \exists y(y > x \wedge \exists z(y + z = 100))$

7. O universal é $\mathbb{N}$. Para cada uma das seguintes proposições:
   1) Escreva a proposição em palavras e verifique se é verdadeira ou falsa;
   2) Escreva a negação da proposição dada na forma simbólica e reduza usando a lei de Morgan.

   (a) $\forall x \exists y \forall z(x + y \geq 3z)$
   (b) $\forall z \forall x \exists y(x + y \geq 3z)$
   (c) $\exists x \forall y \exists z(x + y \geq 3z)$
   (d) $\forall y \exists z \exists x(x + y \geq 3z)$
   (e) $\forall x \exists y \forall z(z < y < x)$
   (f) $\exists x \forall y \exists z(z < y < x)$
   (g) $\forall y \exists z \exists x(z < y < x)$
   (h) $\forall z \forall x \exists y(z < y < x)$
   (i) $\forall x \exists y \forall z(x > y \vee x > z)$
   (j) $\exists x \forall y \exists z(x > y \vee x > z)$
   (k) $\forall y \exists z \exists x(x > y \vee x > z)$
   (l) $\forall z \forall x \exists y(x > y \vee x > z)$

8. Escreve as negações dos seguintes predicados e simplifique:

   (a) Qualquer pessoa tem um vizinho que não gosta de ninguém
   (b) $\forall y > 0 \exists x(ax^2 + bx + c = y)$

9. São as seguintes proposições verdadeiras ou falsas? O conjunto universal é $\mathbb{N}$
   (a) $\forall x(x < 7 \to \exists a \exists b \exists c(a^2 + b^2 + c^2 = x))$
   (b) $\exists! x((x-4)^2 = 9)$
   (c) $\exists! x((x-4)^2 = 25)$
   (d) $\exists x \exists y((x-4)^2 = 25 \wedge (y-4)^2 = 25)$

10. Seja $T(x, y)$ significa $\{x \text{ é professor do } y\}$. Analise o significado dos seguintes predicados:
   (a) $\exists! y T(x, y)$
   (b) $\exists x \exists! y T(x, y)$
   (c) $\exists! x \exists y T(x, y)$
   (d) $\exists y \exists! x T(x, y)$
   (e) $\exists! x \exists! y T(x, y)$
   (f)
$$\exists x \exists y \Big(T(x, y) \wedge \neg \exists u \exists v \big(T(u, v) \wedge (u \neq x \vee v \neq y)\big)\Big)$$

11. Negue as seguintes declarações e expresse o resultado em forma de uma declaração positiva:
   (a) Todo aquele que é formando em matemática tem um amigo que precisa de ajuda com a tarefa de casa
   (b) $\forall a \forall b \forall c((b^2 - 4ac \geq 0) \to \exists x(ax^2 + bx + c = 0))$
   (c) $\forall x(P(x) \to Q(x))$

12. Indique as variáveis livres nos predicados dados. Analise os predicados como definições sobre o conjunto universal dos números naturais. Quais são essas definições?
   (a) $\exists y(x = y^2)$
   (b) $\exists z(x = yz)$
   (c) $x > 1 \wedge \neg \exists y \exists z(x = yz \wedge y < x \wedge z < x)$

13. O conjunto universal é $\mathbb{R}$. Escreva a frase na forma simbólica. É a frase uma proposição ou é um predicado? No caso de proposição, verifique se é verdadeira ou falsa, mas no caso de predicado indique as varáveis livres.
   (a) Para qualquer a a equação $x^2 + ax + 1 = 0$ tem pelo menos uma solução se e somente se $a \geq 2$.
   (b) Qualquer que seja a, a equação $x^2 + ax + b = 0$ tem pelo menos uma solução.
   (c) Para qualquer a a equação $x^2 + ax + 1 = 0$ tem pelo menos uma solução se e somente se $|a| \geq 2$.
   (d) Se $a < 2$, então a equação $x^2 + ax + 1 = 0$ não tem soluções.
   (e) Existe pelo menos uma solução da equação $ax^2 + bx + c = 0$.
   (f) Se exisir pelo menos uma solução da equação $x^2 + ax + 1 = 0$, então $|a| > 1$.
   (g) Existe b tal que para todos os a a equação $x^2 + ax + b = 0$ tem pelo menos uma solução.
   (h) Para algum a a equação $ax^2 + bx + c = 0$ tem solução para todo b.
   (i) Quaisquer que sejam a e b, a equação $x^2 + ax + b = 0$ tem pelo menos uma solução se e somente se $a^2 \geq 4b$.
   (j) Qualquer que seja a, a equação $x^2 + ax + b = 0$ tem solução para algum b.
   (k) Para algum b, a equação $x^2 + ax + b = 0$ tem solução para todo a.
   (l) Existe c tal que a equação $ax^2 + bx + c = 0$ não tem soluções.

14. Mostre que a lei de negação
$$\neg \forall x P(x) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x)$$
pode ser deduzida a partir da outra lei
$$\neg \exists x P(x) \Leftrightarrow \forall x \neg P(x)$$

15. Mostre que
$$\exists x(P(x) \to Q(x)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \to \exists x Q(x).$$

Capítulo 4

Teoremas e demonstrações

No presente capitulo será discutido em detalhes o que é que um Teorema e qual é a sua estrutura, serão considerados os métodos básicos da demonstração de teoremas. A matéria é preparada na base do manual [1]. É claro que o tema tem uma grande importância para todos so ramos de Matemática.

4.1 Estrutura do teorema

Qualquer *teorema* tem duas partes: *premissa* e *conclusão*. Se descrever de palavras habituadas, a premissa (sinónimo: a hipótese) é uma condição ou conjunto das condições que são dados. A conclusão (sinónimo: a tese) é uma asserção segue da premissa.

Como regra, o conteúdo de um *teorema* é: da premissa implica a conclusão.

Demonstrar dum teorema significa *demonstrar* que da premissa implica a conclusão, de outras palavras, *deduzir* a conclusão da premissa. Vamos esclarecer os termos introduzidos e a estrutura do teorema por meio dos exemplos concretos.

Consideremos o teorema de Pitágoras. Seja ABC um triângulo rectângulo. Se c é hipotenusa e a e b são catetos, então

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Notemos, que a relação entre os catetos e a hipotenusa é verdadeira por causa da condição que o triângulo é rectângulo. Então, a premissa e a conclusão podem ser representadas por meio das proposições indeterminadas (predicado)

$$P = \{ABC \text{ é triângulo rectângulo}\}$$

e

$$Q = \{c^2 = a^2 + b^2\}$$

respectivamente. Nestas designações o teorema pode ser exprimida pela implicação

$$P \Rightarrow Q.$$

Realmente, deve ser indicada correspondência entre os ângulos (ou os vértices) e os lados opostos: $C \mapsto c$, $A \mapsto a$, $B \mapsto b$.

Mais precisamente, P e Q são predicados definidos sobre o conjunto de todos os triângulos, isto é, são $P(\Delta)$ e $Q(\Delta)$ onde Δ simboliza um triângulo. A proposição $P(\Delta) \to Q(\Delta)$ é verdadeira para triângulo qualquer, i.e. a proposição

$$\forall \Delta (P(\Delta) \to Q(\Delta))$$

é verdadeira.

O exemplo a seguir tem a mesma estrutura lógica. Seja n um número natural. Se n não é múltiplo de 3 então $n^2 - 1$ é múltiplo de 3. A premissa é

$$P = \{n \text{ não é múltiplo de } 3\}$$

e a conclusão é

$$Q = \{n^2 - 1 \text{ é múltiplo de } 3\}.$$

A estrutura completa da proposição é

$$\forall n (P(n) \to Q(n)).$$

Então, em forma geral um teorema tem a estrutura

$$\forall x (P(x) \to Q(x)). \tag{4.1}$$

Apesar disso para analisar os teoremas vamos omitir o x e quantificador universal e representar os teoremas na forma da implicação

$$P \Rightarrow Q, \tag{4.2}$$

em concordância com a definição de implicação na secção 3.3. Esta implicação pode ser exprimida

se P então Q

ou

de P segue Q.

Existem outros métodos para exprimir o mesmo facto. Diz-se que P é uma *condição suficiente* para Q, mas Q é uma *condição necessária* para P.

A forma de expressão pode ser um pouco diferente, mas o significado é sempre o mesmo: é a implicação (4.2).

Exemplo 4.1. Consideremos as proposições (indeterminadas)

$$A(x) = \{\text{o número } x \text{ é múltiplo de } 4\}$$
$$B(x) = \{\text{o último digito do } x \text{ é par}\}$$

Neste caso tem lugar o teorema $A \Rightarrow B$. Este teorema pode ser escrita na forma: a condição B é uma condição *necessária* para A, isto é, *para que x seja múltiplo de 4 é* ***necessário*** *que o último digito do x seja par.*

O teorema $A \Rightarrow B$ pode ser também escrita na forma equivalente: a condição A é uma condição *suficiente* para B, isto é,

para que o último digito dum número inteiro x seja par é ***suficiente*** *que o x seja múltiplo de 4.*

No entanto, no teorema presente a condição B ainda não garante que o número x seja múltiplo de 4, isto é, B não é condição suficiente para A.

Analogamente, existem números pares para os quais não é válido A, isto é, A não é condição necessária para B.

Notemos que omitir o quantificador $\forall x$ na formulação do teorema pode-se só sabendo o significado e importância do quantificador. Por exemplo, a proposição

$$\text{\textit{As diagonais de paralelogramo são perpendiculares}} \tag{4.3}$$

não é verdadeira. Representemos este 'teorema' na forma

$$A \Rightarrow B$$

onde

$$A(Q) = \{\text{o quadrilátero } Q \text{ é um paralelogramo}\}$$
$$B(Q) = \{\text{as diagonais do } Q \text{ são perpendiculares}\}.$$

A implicação $A(Q) \to B(Q)$ não é teorema, porque é um predicado com variável livre Q que pode ter valor verdadeiro (se Q é um losango) ou falso (se Q é um paralelogramo que diferente do losango). Mas se adicionar o quantificador universal, obteremos uma proposição (4.3), que é falsa:

$$\forall Q\ (A(Q) \to B(Q)).$$

Esta última proposição diz que as diagonais de *qualquer* paralelogramo são perpendiculares que não é verdade.

4.2 Teoremas recíproco, contrário e contra-recíproco

Seja $A \Rightarrow B$ um teorema. O teorema

$$B \Rightarrow A$$

diz-se *reciproco* em relação ao primeiro. Claro que um dos teoremas (ou ambos) pode ser falso enquanto o outro é verdadeiro.

Notemos que o teorema recíproco tem a forma exacta:

$$\forall x\ (B(x) \to A(x)).$$

Exemplo 4.2. Sejam

$$A(Q) = \{\text{o quadrilátero } Q \text{ é um losango}\}$$
$$B(Q) = \{\text{as diagonais de } Q \text{ são perpendiculares}\}.$$

O teorema $A \Rightarrow B$ significa:

As diagonais de losango são perpendiculares,

mas o recíproco é:

Se as diagonais de um quadrilátero são perpendiculares então o quadrilátero é losango.

Claro que o teorema $A \Rightarrow B$ é verdadeiro mas o teorema recíproco $B \Rightarrow A$ é falso.

No caso quando os teoremas $A \Rightarrow B$ e $B \Rightarrow A$ são verdadeiras temos a equivalência

$$A \Leftrightarrow B.$$

De cada uma das A e B decorre a outra. Neste caso cada das condições é necessária e suficiente para outra. Podem ser usadas as formulações:

1. Para que A seja verdadeira é necessário e suficiente a condição B,
2. A é verdadeira se e somente se é verdadeira B,

e outras equivalentes.

Mais uma vez notemos que a formulação exacta tem a forma

$$\forall x(A(x) \leftrightarrow B(x)).$$

Se num teorema $A \Rightarrow B$ substituir por suas negações, vamos ter um teorema *contrário* em relação ao inicial:

$$\neg A \Rightarrow \neg B.$$

O teorema contrário ao recíproco $\neg B \Rightarrow \neg A$ é *contra-recíproco.*

Seja $A \Rightarrow B$ o teorema considerada no exemplo 4.2. O teorema contrário tem a forma

Se um quadrilátero não é losango então as diagonais do quadrilátero não são perpendiculares.

O teorema contra-recíproco:

Se as diagonais de um quadrilátero não são perpendiculares então o quadrilátero não é losango.

Por causa das equivalência

$$A \Rightarrow B\ \equiv\ \neg B \Rightarrow \neg A$$

o teorema contra-recíproco é verdadeiro se e somente se o teorema inicial é verdadeiro. Nesta equivalência é baseado um dos métodos de demonstração descrito abaixo.

Notemos que, analogamente, o teorema recíproco é equivalente ao teorema contrário:

$$B \Rightarrow A\ \equiv\ \neg A \Rightarrow \neg B.$$

Exemplo 4.3. Consideremos seis teoremas:

Teorema 1. A soma de duas funções contínuas é uma função contínua.

Teorema 2. Se duas funções são contínuas então a soma deles também é uma função contínua.

Teorema 3. Se as funções f e g são contínuas, então a função $f+g$ é contínua.

Teorema 4. Uma função representável na forma de soma de duas funções contínuas é contínua.

Teorema 5. Se uma função é a soma de duas funções contínuas então essa função é contínua.

Teorema 6. Se $h = f + g$ onde f e g são funções contínuas, então a função h também é contínua.

Primeiro, observamos que todos os seis teoremas 1-6 são equivalentes entre si e representa-se versões textuais diferentes de uma teorema fundamental da Análise Matemática. Também, é claro do contexto, que as funções tem que ser definidos no mesmo domínio J que pode ser, por exemplo, um dos intervalos $]a, b[$, $[a, b]$, $]a, \infty[$, $[a, \infty[$ ou $\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$. Para simplificação da formulação foram omitidas as palavras em relação a este domínio J, mas é evidente do contexto de que se trata.

Apesar do facto que teoremas 1-6 são equivalentes, as suas formalizações $P \Rightarrow Q$ são diferentes! Nos teoremas 1-3 o objecto é um par das funções contínuas, e conclui-se que a soma deles é contínua. Mas nos teoremas 4-6 o objecto é uma função contínua e considera-se a sua continuidade na condição de representação na forma de soma das funções contínuas. Mais precisamente:

Em relação aos Teoremas 1-3, o conjunto universal U é conjunto dos pares das funções (f, g) definidas num intervalo,

$$\begin{aligned} A(f,g) &= \{f \text{ e } g \text{ são funções contínuas}\}, \\ B(f,g) &= \{f+g \text{ e função contínua}\}. \end{aligned}$$

Os Teoremas 1-3 na forma simbólica são:

$$\forall (f,g) \in U(A(f,g) \to B(f,g)).$$

O teorema recíproco aos Teoremas 1-3 é

$$\forall (f,g) \in U(B(f,g) \to A(f,g)),$$

ou pelas palavras: se a soma $f+g$ de suas funções é contínua, então as funções f e g são contínuas. É evidente que este teorema é *Falso*.

Em relação aos Teoremas 4-6, O conjunto universal V é o conjunto das funções definidas num intervalo.

$$\begin{aligned} P(h) &= \{h = f+g \text{ onde } f \text{ e } g \text{ são contínuas}\}, \\ Q(h) &= \{h \text{ é função contínua}\}. \end{aligned}$$

Os Teoremas 4-6 na forma simbólica são:

$$\forall h \in V(P(h) \to Q(h)).$$

O teorema recíproco aos Teoremas 4-6 é

$$\forall h \in V(Q(h) \to P(h)),$$

ou pelas palavras: qualquer função contínua é representável na forma de duas funções contínuas. É evidente que este teorema é *Verdadeiro*.

4.3 Métodos de demonstração directos

4.3.1 Demonstração de $\forall x\ P(x)$

Consideremos o seguinte

Teorema A. Para todo número natural $n^3 - n$ é múltiplo de 3.

Usando as designações

$$\begin{aligned} N(n) &= \{n \text{ é número natural}\}, \\ P(n) &= \{n^3 - n \text{ é múltiplo de } 3\} \end{aligned}$$

o teorema A pode ser escrita na forma

$$\forall n\ (N(n) \to P(n))$$

Mas o mesmo teorema admite uma forma equivalente

$$\forall x \in \mathbb{N}\ P(x).$$

Se do contexto é claro que o conjunto universal é o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, na forma mais curta

$$\forall x\ P(x)$$

Mesmo que no exemplo considerado, na maioria dos teoremas é preciso demonstrar a veracidade de uma proposição da forma $\forall x P(x)$.

Uma demonstração pode começar com a frase:

$$\boxed{\text{Seja } x \text{ um elemento arbitrário.}}$$

Por exemplo, demonstramos o teorema A. Podemos raciocinar:

Demonstração. Seja n um número natural. Temos $n^3 - n = (n-1)n(n+1)$ é produto de três números inteiros não negativos consecutivos. Um entre estes números é múltiplo de 3. Por isso o produto é também múltiplo de 3. □

Então, o esquema de demonstração é:

$$\frac{\text{Seja } x \text{ um elemento qualquer}}{\text{Demonstrar } P(x)}$$

4.3.2 Demonstração de $P \Rightarrow Q$.

A forma $P \Rightarrow Q$ é realmente $\forall x(P(x) \to Q(x))$. Vamos ter o esquema:

$$\frac{\text{Seja } x \text{ um elemento qualquer}}{\text{Demonstrar } P(x) \to Q(x)}$$

Isto é,

$$\frac{\text{Sejam } x \text{ um elemento qualquer e } P(x)}{\text{Demonstrar } Q(x)}$$

Consideremos um exemplo concreto.

Teorema B. Se $x > 2$, então $x^2 > 4$.

Subentende-se que deve ser demonstrado:

$$\forall x \in \mathbb{R}\ (x > 2 \to x^2 > 4).$$

Segundo ao considerado na forma geral, podemos raciocinar assim: Sejam x um número real qualquer e $x > 2$. é preciso demonstrar que $x^2 > 4$. Agora, apresentemos a mesma demonstração.

Demonstração. Seja x um número real tal que $x > 2$. Como ambas partes desta desigualdade são positivas podemos elevar ao quadrado, conservando o sinal $>$. Temos $x^2 > 2^2$. Então, $x^2 > 4$. $\square$

4.3.3 Teoremas na forma de equivalência

Consideremos um teorema na forma da equivalência

$$P \Leftrightarrow Q$$

1^0 método

Demonstrar $P \Leftrightarrow Q$, segundo a lei de equivalência, é mesma coisa que demonstrar a proposição

$$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P).$$

isto é, ambas implicações $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$.

Consideremos um exemplo concreto.

Teorema C. A equação $x^2 + 2x + a = 0$ tem raises reais se e somente se $a \leq 1$.

Designando

$$P = \{x^2 + 2x + a = 0 \text{ tem raises reais}\},$$
$$Q = \{a \leq 1\}$$

escrevemos o teorema C na forma

$$P \Leftrightarrow Q$$

Subentende-se que deve ser demonstradas ambas implicações $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$, para cada uma das quais pode ser usado o método da secção precedente.

Demonstração. 1. $\Rightarrow$ Seja a equação $x^2 + 2x + a = 0$ tem raises reais. Então, o discriminate da equação é não-negativo, isto é $\Delta \geq 0$. Calculando

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot a = 4 - 4a$$

temos a desigualdade $4 - 4a \geq 0$. Resolvendo esta inequação, obtemos $4 \geq 4a \Rightarrow 1 \geq a \Rightarrow a \leq 1$.

2. $\Leftarrow$ Seja $a \leq 1$. Então, temos $4a \leq 4$ e, consecutivamente, $\Delta = 4 - 4a \geq 0$. Então, a equação $x^2 + 2x + a = 0$ tem raises reais. $\square$

Apresentemos outras formas da demonstração do teorema C, que, pelo seu conteúdo, não têm a diferença da demonstração acima, mas que são interessantes como conhecimento de linguagem matemática correcta.

Demonstração. Necessidade. Seja a equação $x^2 + 2x + a = 0$ tem raises reais. Então, o discriminate da equação é não-negativo, isto é $\Delta \geq 0$. Calculando

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot a = 4 - 4a$$

temos a desigualdade $4 - 4a \geq 0$. Resolvendo esta desigualdade, obtemos $4 \geq 4a \Rightarrow 1 \geq a \Rightarrow a \leq 1$.

Suficiência. Seja $a \leq 1$. Então, temos $4a \leq 4$ e, consecutivamente, $\Delta = 4 - 4a \geq 0$. Então, a equação $x^2 + 2x + a = 0$ tem raises reais. $\square$

Observamos que nesta forma da demonstração sempre trata-se da necessidade ou da suficiência de Q para P, que no nosso exemplo corresponde à forma do teorema: para que a equação $x^2 + 2x + a = 0$ tenha raises reais é necessário e suficiente que seja $a \leq 1$. Se mudar o teorema C para seu contra-recíproco "$a \leq 1$ *se e somente se a equação* $x^2 + 2x + a = 0$ *tem raises reais*", então pode ser realizada a mesma demonstração com a troca das palavras *Necessidade* e *Suficiência*.

Demonstração. Seja a equação $x^2 + 2x + a = 0$ tem raises reais. Então, o discriminate da equação é não-negativo, isto é $\Delta \geq 0$. Calculando

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot a = 4 - 4a$$

temos a inequação $4 - 4a \geq 0$. Resolvendo esta inequação, obtemos $4 \geq 4a \Rightarrow 1 \geq a \Rightarrow a \leq 1$.

Reciprocamente, seja $a \leq 1$. Então, temos $4a \leq 4$ e, consecutivamente, $\Delta = 4 - 4a \geq 0$. Então, a equação $x^2 + 2x + a = 0$ tem raises reais. $\square$

Esta forma da demonstração mesmo que duas precedentes contém duas partes: demonstração de $P \Rightarrow Q$ e de $Q \Rightarrow P$.

2^0 método

As vezes, para demonstrar um teorema na forma da equivalência $P \Leftrightarrow Q$, não é obrigatório partir a equivalência em duas implicações. A demonstração pode ser apresentada na forma de uma sequência das equivalências cada uma das quais é conhecida (por exemplo, pelos teoremas conhecidos). Esquematicamente, o método tem a forma

$$P = F_1 \Leftrightarrow F_2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow F_n = Q$$

e tem analogia intuitiva com o raciocínio dedutivo para equivalências considerado na Secção 2.2. Apresentemos a demonstração do teorema C deste método.

Demonstração. Sabe-se que a equação $x^2 + 2x + a = 0$ tem raises reais se e somente se o discriminante da equação $\Delta = 4 - 4a$ é maior ou igual a zero. Mas, como é evidente, $4 - 4a \geq 0$ se e somente se $a \leq 1$. O teorema está demonstrado. $\square$

4.3.4 Vários casos na premissa

Consideremos um teorema $P \Rightarrow Q$ onde a premissa P se representa a disjunção das condições $P = P_1 \vee P_2$ tal que, pelo conteúdo, não é possível (ou é complicado) realizar a demonstração simultaneamente para o caso da condição P_1 e para o caso P_2. Segundo a lei de condicional 2 de Álgebra de Lógica,

$$(P_1 \vee P_2) \Rightarrow Q \;\equiv\; (P_1 \Rightarrow Q) \wedge (P_2 \Rightarrow Q)$$

Então, para demonstrar o teorema $(P_1 \vee P_2) \Rightarrow Q$ é é suficiente demonstrar cada uma das implicações

$$P_1 \Rightarrow Q \quad \text{e} \quad P_2 \Rightarrow Q$$

Mais geral, para demonstrar um teorema $P \Rightarrow Q$ no qual

$$P = P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_n$$

é suficiente demonstrar cada uma das implicações:

$$\begin{gathered} P_1 \Rightarrow Q, \\ P_2 \Rightarrow Q, \\ \ldots \\ P_n \Rightarrow Q. \end{gathered}$$

Consideremos um exemplo concreto.

Teorema D. Demonstrar que $|x+1| \leq |x|+1$ qualquer que seja o número real x.

Temos $P(x) \Leftrightarrow P_1(x) \vee P_2(x) \vee P_3(x)$ onde

$$\begin{aligned} P(x) &= \{x \text{ é um número real}\} \\ P_1(x) &= \{x < -1\} \\ P_2(x) &= \{-1 \leq x < 0\} \\ P_3(x) &= \{x \geq 0\} \end{aligned}$$

Então, o teorema D será demonstrado, se serão demonstradas separadamente três implicações:

$$\begin{array}{ccc} x < -1 & \Rightarrow & |x+1| \leq |x|+1, \\ -1 \leq x < 0 & \Rightarrow & |x+1| \leq |x|+1, \\ x \geq 0 & \Rightarrow & |x+1| \leq |x|+1, \end{array}$$

A mesma demonstração pode ser apresentada na seguinte forma.

Demonstração. 1. Se $x < -1$, então

$$|x+1| = -x-1 = |x|-1 < |x|+1.$$

2. Se $-1 \leq x < 0$, então

$$|x+1| = x+1 = -|x|+1 < |x|+1.$$

3. Se $x \geq 0$, então

$$|x+1| = x+1 = |x|+1.$$

□

4.4 Métodos de demonstração indirectos

4.4.1 Uso do teorema contra-recíproco

O método é baseado sobre a equivalência

$$P \Rightarrow Q \;\equiv\; \neg Q \Rightarrow \neg P$$

do teorema dado e do teorema contra-recíproco. Em vez do teorema dado pode ser demonstrado o teorema contra-recíproco de um dos métodos directos descritos na secção precedente. Apresentemos um exemplo.

Teorema E. Se $x^2 \geq x$, então $x \geq 1$ ou $x \leq 0$.

Observamos que

$$\begin{gathered} \neg(x \geq 1 \vee x \leq 0) \Leftrightarrow 0 < x < 1, \\ \neg(x^2 \geq x) \Leftrightarrow x^2 < x. \end{gathered}$$

O teorema contra-recíproca do teorema E é: se $0 < x < 1$, então $x^2 < x$. A demonstração deste contra-recíproco é mais fácil do que a demonstração directa do teorema E. Então, a demonstração do teorema E pode ser apresentado na seguinte forma:

Demonstração. É suficiente demonstrar

$$0 < x < 1 \Rightarrow x^2 < x.$$

Seja $0 < x < 1$. Multiplicando esta desigualdade por x (que é positivo!) vamos ter $0 < x^2 < x$. □

4.4.2 Redução ao absurdo

O método de *redução ao absurdo* ou, o que é mesmo, o método de *dedução de uma contradição*) é baseado sobre lei de redução ao absurdo da Álgebra de Lógica:

$$P \Rightarrow Q \;\equiv\; (P \wedge \neg Q) \Rightarrow C$$

onde C é uma contradição. O mesmo método, na sua realização, de facto em vez equivalência acima usa a implicação

$$P \wedge ((P \wedge \neg Q) \Rightarrow C) \text{ implica } Q$$

que deduz-se facilmente das leis de redução ao absurdo, de Modos Ponens e comutativa.

Então, esquematicamente, a ideia do método da dedução da uma contradição é:

$$\begin{array}{l} \underline{\text{Seja } P. \text{ Suponhamos que } \neg Q} \\ \text{Então, } C. \\ \text{Contradição obtida implica } Q. \end{array}$$

Consideremos dois exemplos concretos.

Teorema F. Se $x + a = 10$ e $a > 12$, então $x < -2$.

Observamos que

$$P = \{x + a = 12 \wedge a > 12\}, \; Q = \{x < -2\}.$$

Demonstração. Sejam $x + a = 10$ e $a > 12$.

Suponhamos que a desigualdade $x < -2$ não é válido, isto é $x \geq -2$. Das desigualdades $a > 12$ e $x \geq -2$ segue

$$a + x > 12 - 2 = 10$$

o que contradiz a condição $x + a = 10$.

Contradição obtida implica $x < -2$. □

Teorema G. O conjunto P dos números primos é infinito.

Demonstração. Método de redução ao absurdo. Suponhamos que P é finito. Apresentamos P na forma da lista

$$P = \{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$$

Então, o número

$$m = n_1 n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$$

é múltiplo de cada dos números do conjunto P. Portanto, $m+1$ não é múltiplo de nenhum número primo, e, respectivamente, é primo. De outro lado, $m+1$ é maior do que cada elemento de P, então não pode ser primo. Contradição obtida implica que P é infinito. □

4.4.3 Exclusão de variantes

A ideia do método de *exclusão de variantes* da demonstração dum teorema de forma

$$P \Rightarrow Q$$

consiste em escolha de uma proposição R tal que $Q \vee R \equiv T$ (é uma tautologia) e é conseguível demonstrar a implicação $P \Rightarrow \neg R$. O método é baseado na implicação

$$p \wedge (q \vee r) \wedge (p \to \neg r) \;\Rightarrow\; q \tag{4.4}$$

Demonstremos (4.4). Primeiro, provemos

$$a \wedge (b \to c) \Rightarrow (a \wedge b) \to (a \wedge c). \tag{4.5}$$

Temos

$$\begin{array}{lll} & a \wedge (b \to c) & \\ \Leftrightarrow & (\neg a \vee a) \wedge (b \to c) & \text{(ident, compl, comut.)} \\ \Leftrightarrow & (a \to a) \wedge (b \to c) & \text{(lei de condicional 1)} \\ \Rightarrow & (a \wedge b) \to (a \wedge c) & \text{(dilema constritivo)} \end{array}$$

Depois, temos

$$\begin{array}{lll} & p \wedge (q \vee r) \wedge (p \to \neg r) & \\ \Leftrightarrow & (r \vee q) \wedge ((p \to \neg r) \wedge p) & \text{(leis comut. e assoc.)} \\ \Rightarrow & (r \vee q) \wedge \neg r & \text{(Mod.Ponens e (4.5))} \\ \Rightarrow & q & \text{(silogismo disjuntivo)} \end{array}$$

Generalizamos a ideia do método de demonstração do teorema descrita no primeiro parágrafo.

Suponhamos que P e as proposições $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$ são escolhidas de modo que sejam

$$\begin{gathered} Q_1 \vee Q_2 \vee \ldots \vee Q_n \Leftrightarrow T, \\ Q = Q_2 \vee \ldots \vee Q_n \text{ e} \\ P \Rightarrow \neg Q_1. \end{gathered}$$

Então, Q.

O esquema deste método para $n = 3$ é:

$$\frac{P,\ Q_1 \vee Q_2 \vee Q_3 \Leftrightarrow T,\ P \Rightarrow \neg Q_1}{Q_2 \vee Q_3} \tag{4.6}$$

Consideremos um exemplo.

Teorema H. Se n não é múltiplo de 3, então $n^2 - 1$ é múltiplo de 3.

Demonstração. Seja n um número natural que não é múltiplo de 3. Entre os três números $n-1$, n, $n+1$ um é múltiplo de 3. Mas n não é. Daqui um dos números $n-1$ ou $n+1$ é múltiplo de 3. Então, o produto $(n-1)(n+1)$ também é múltiplo de 3. Observando que $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$ concluímos que o teorema está demonstrado. □

De facto, a demonstração apresentado foi realizada através do método de exclusão de variantes. Para analisar isto, introduzimos o predicado

$$Q(n) = \{n \text{ é múltiplo de } 3\}.$$

Claro que

$$Q(n-1) \vee Q(n) \vee Q(n+1) \Leftrightarrow T,$$

É preciso demonstrar

$$P \Rightarrow Q(n-1) \vee Q(n+1)$$

onde $P = \neg Q(n)$. Segundo o esquema (4.6) pode ser excluída $Q(n)$.

4.5 Dedução (raciocínio dedutivo)

O método usa-se para demonstração de teoremas na forma de uma implicação ou de uma equivalência das formulas proposicionais e, realmente, foi considerado na Secção 2. Agora, apresentemos a demonstração de um teorema concreto, para guardar as capacidades de realização do raciocínio dedutivo, de um lado, e para entender a ligação com a secção presente, de outro.

Teorema I. Seja $P \to (Q \to R)$. Então, $\neg R \to (P \to \neg Q)$.

É claro que o conteúdo do teorema I é a seguinte implicação:

$$P \to (Q \to R) \;\Rightarrow\; \neg R \to (P \to \neg Q). \tag{4.7}$$

Demonstração.

$$\begin{array}{lll} & P \to (Q \to R) & \\ \Leftrightarrow & \neg P \vee (\neg Q \vee R) & \text{(lei de cond. 1)} \\ \Leftrightarrow & R \vee (\neg P \vee \neg Q) & \text{(leis com. e assoc.)} \\ \Leftrightarrow & \neg\neg R \vee (\neg P \vee \neg Q) & \text{(dupla negação)} \\ \Leftrightarrow & \neg R \to (P \to \neg Q) & \text{(lei de cond. 1)} \end{array}$$

□

Observamos que de facto nos demonstramos o teorema mais forte do que o teorema I, isto é, a equivalência das proposições $P \to (Q \to R)$ e $\neg R \to (P \to \neg Q)$.

Na prática, a dedução na demonstração dos teoremas pode ser realizada não obrigatoriamente do método formal, mas do método misto, usando frases simbólicos e raciocínio de palavras. Esta forma, as vezes, é mais confortável, porque pode esclarecer os passos da forma simbólica. Assim, apresentemos a demonstração do teorema I nesta forma, que essencialmente, é semelhante a segunda demonstração.

Demonstração. Seja $P \to (Q \to R)$. É preciso demonstrar $\neg R \to (P \to \neg Q)$.

Seja $\neg R$. É suficiente demonstrar $P \to \neg Q$. Mas para isso raciocinamos: seja P. Agora o objectivo é demonstrar $\neg Q$. Então, temos a esquema

$$\frac{P \to (Q \to R),\ \neg R,\ P}{\text{Demonstrar } \neg Q} \tag{4.8}$$

Das proposições $P \to (Q \to R)$ e P deduzimos, pelo lei de Modus Ponens, a proposição $Q \to R$.

Agora, da veracidade das proposições $Q \to R$ e $\neg R$ segue, pela lei de Modos Tollens, a proposição $\neg Q$. $\square$

Observamos que na seguinte secção o teorema I será considerado como um argumento, e será realizado o método formal de demonstração de validade deste argumento.

4.6 Teoremas e linguagem matemática

A teoria do qualquer ramo de Matemática representa-se um sistema das definições e Axiomas (afirmações que colocamos, pela definição, sem demonstração) e um sistema dos Teoremas. Cada um deles pode ser demonstrada por dedução das Definições, dos Axiomas e dos Teoremas, já demonstrados.

A palavra *Teorema* é palavra geral. Como regra, nas várias áreas de Matemática para teoremas usam-se títulos diferentes, tais como

Lema, Teorema, Corolário, Afirmação, Proposição, Propriedade, Asserção, Argumento, e etc.

Se um livro de qualquer ramo de Matemática tem Lemas, Teoremas, Proposições, Corolários, então a palavra *Teorema* tem sentido estreito, e usa-se para uma afirmação ou proposição, que tem um sentido principal, grande e importante neste ramo. Dentro um ramo junto com Teoremas podem ser considerados as Afirmações, Proposições, Propriedades.

Os títulos *Proposição* e *Afirmação* usados numa área junto com *Teorema* significam uma asserção nesta área, que é importante, mas não tanto principal como *Teorema*.

Um *Lema* significa, como regra, uma asserção auxiliar para demonstrar um Teorema ou uma Proposição.

Um *Corolário* é uma asserção que segue de um Teorema (ou de uma Proposição), é logicamente ligado com este Teorema e pode ser deduzido do teorema directamente, ou por meio do raciocínio não tão complicado, como a demonstração do mesmo Teorema.

A palavra *Propriedade* usa-se, como regra, junto com objecto matemático para que aplicado "Propriedade do objecto matemático A". Por exemplo, no tema "Funções continuas" de Análise Matemática o título *Propriedade 2.1.5* significa um teorema (no sentido geral) que se representa uma o várias propriedades das funções contínuas.

4.7 Exercícios

1. Forme a premissa e a conclusão e represente na forma $A \Rightarrow B$ os teoremas:
   (a) As diagonais de paralelogramo dividem-se no ponto de intersecção em partes congruentes.
   (b) Para quaisquer positivos a e b
   $$\ln(ab) = \ln a + \ln b.$$
   (c) Cada número inteiro que termina por dois zeros é divisível por 4.
2. Indique qual das duas afirmações decorre da outra. Formule o teorema usando os termos *é necessário que* e os termos *é suficiente que* (duas variantes):
   (a) $A = \{\text{o número } x \text{ é igual a zero}\}$, $B = \{\text{o produto } xy \text{ é igual a zero}\}$.
   (b) $A = \left\{\begin{array}{l}\text{as rectas } l_1 \text{ e } l_2 \text{ estão situadas}\\ \text{no mesmo plano}\end{array}\right\}$, $B = \{\text{as rectas } l_1 \text{ e } l_2 \text{ são paralelas}\}$.
   (c) $A = \{a^2 \neq 0\}$, $B = \{a > 0\}$.
3. Formule o teorema $A \Rightarrow B$ e o teorema reciproco. Indique os casos quando o teorema recíproco é verdadeiro:
   (a) $A = \{\text{o triângulo } \triangle \text{ é isósceles}\}$, $B = \left\{\begin{array}{l}\text{duas medianas do triângulo } \triangle\\ \text{são congruentes}\end{array}\right\}$.
   (b) $A = \{\text{o quadrilátero } Q \text{ é losango}\}$, $B = \left\{\begin{array}{l}\text{as diagonais do quadrilátero } Q\\ \text{dividem os ângulos em partes}\\ \text{congruentes}\end{array}\right\}$.
   (c) $A = \{\text{o número } a \text{ é múltiplo de } 9\}$, $B = \left\{\begin{array}{l}\text{a soma dos dígitos do } a \text{ é múl-}\\ \text{tiplo de } 3\end{array}\right\}$.
4. Formule o teorema recíproco em relação ao teorema de Pitágoras.
5. Quais dos seguintes teoremas são verdadeiros? Indique os teoremas recíproco e contrário para cada proposição:

(a) Se cada parcela é múltipla de 11, então e a soma é múltipla de 11.

(b) Se nenhuma parcela não é múltipla de 11, então e a soma não é múltipla de 11.

(c) Se pelo menos uma parcela é múltipla de 11, então e a soma é múltipla de 11.

(d) Se a soma é múltipla de 11, então cada parcela é múltipla de 11.

(e) Se a soma não é múltipla de 11, então nenhuma parcela não é múltipla de 11.

(f) Se a soma não é múltipla de 11, então pelo menos uma parcela não é múltipla de 11.

6. Para os 'teoremas' seguintes:
1) Destaque a premissa, conclusão e o conjunto, onde as são definidas.
2) Formule o teorema usando o termo *é necessário que*. Também, formule o teorema usando o termo *é suficiente que*.
3) Formule três teoremas: o teorema reciproco, o teorema contrário e o teorema contra-reciproco para o teorema dado.
4) Quais dos quatro teoremas (dado, recíproco, contrário e contra-recíproco) são verdadeiros, quais são falsos.

(a) Se $x > y$ e $z < y$, então $z < x$.

(b) Se um triângulo é equilátero, então pelo menos um dos seus ângulos internos mede 60^0.

(c) A soma de ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180^0.

(d) As diagonais de paralelogramo dividem-se em partes congruentes.

(e) Se $x > 2$, então $1/x < 0{,}5$.

(f) Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a)f(b) < 0$, então existe um ponto $x \in (a,b)$ em que $f(x) = 0$.

(g) Se duas rectas a e b são paralelas a terceira c, então $a \parallel b$.

(h) Qualquer número natural divisível por 4 é um número par.

(i) Se $a \geq b$ e c é um número positivo, então $ac \geq bc$.

(j) Uma sucessão numérica convergente é limitada.

(k) A soma de duas funções contínuas é uma função contínua.

(l) Para todo numero real a negativo $\sqrt{a^2} = -a$.

(m) O gráfico de qualquer função ímpar é simétrico em relação à origem de coordenadas.

(n) O gráfico de qualquer função par é simétrico em relação ao eixo de ordenadas.

(o) Se um número natural a é múltiplo de 10, então o último dígito de a é 0 ou 5.

(p) Pelo menos dois ângulos dum triângulo isosceles são congruentes.

(q) Se uma proposição p é falsa, então a proposição $p \to q$ é verdadeira.

(r) Para quaisquer proposições p e q, se $p \vee q$ é falsa, então p é falsa.

7. Demonstre o teorema usando três métodos: um dos métodos directos, o método de uso do teorema contra-recíproco e o método da dedução de uma contradição (redução ao absurdo). Que método é mais conveniente?

(a) Se $x^2 - 2x > 0$, então $x < 0$ ou $x > 2$.

(b) Se $x^2 > 4$, então $|x| > 2$.

(c) Se $(x-1)(x-3) < 0$, então $1 < x < 3$.

(d) Se $x^2 - x = 6$, então $x \neq 1$.

(e) Se $x^2 - x = 6$, então $x < 5$.

(f) Seja $2x + y > 0$. Se $x < -3$, então $y > 6$.

(g) Seja $xy = x^2 + y^2$. Então, $x \neq 0$ implica $y \neq 0$.

(h) Seja $xy = x^2 + y^2$. Então, $x = 0$ implica $y = 0$.

(i) Suponhamos que $x + y = 2x - 3y$. Se x e y não são zeros simultaneamente, então $y \neq 0$.

(j) Se $x^2 \neq x^3$, então $x \neq 1$.

8. Seja x um número real e $x \neq 0$. Demonstre que se $\frac{\sqrt[3]{x}+5}{x^2+6} = \frac{1}{x}$, então $x \neq 8$.

9. Seja $3x + 2y \leq 5$. Se $x > 1$, então $y < 1$. Demonstre.

10. Demonstre que se $x^2 + y = 13$ e $y \neq 4$, então $x \neq 3$.

11. Suponhamos $P \to Q$ e $R \to \neg Q$ são verdadeiras. Demonstre que $P \to \neg R$ é verdadeira.

12. Suponhamos P é verdadeira. Demonstre que $Q \to \neg(Q \to \neg P)$ é verdadeira.

13. Seja $y + x = 2y - x$ e x e y não são zeros ao mesmo tempo. Demonstre que $y \neq 0$.

14. Sejam x e y números reais. Demonstre que se $x^2 y = 2x + y$, então se $y \neq 0$ então $x \neq 0$.

Capítulo 5

Demonstração de validade de argumento

No presente capítulo vamos analisar um tipo especial do teorema chamado *Argumento*, que é escrito nos termos de Lógica das Proposições, e demonstrar os argumentos usando terminologia da Álgebra de Proposições. Vamos considerar a *demonstração de validade* dos argumentos, por um esquema formal da Lógica de Proposições, de um lado, e usando ideias gerais da teoria das demonstrações, de outro. Na preparação do capítulo foi usado materia do manual [2].

5.1 Argumento

Se um teorema é escrito em termos da Lógica de Proposições, ou considera-se de ponto da vista da demonstração formal usando Lógica, este teorema denomina-se *argumento*.

Diz-se que um argumento é *válido* se da premissa que, como regra, se representa uma conjunção das proposições (que são hipóteses) implica uma proposição que é conclusão.

A esquema geral da demonstração de validade é:

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n \vdash P$$

onde H_i são hipóteses e P é a proposição que é conclusão. Mais uma vez, queria chamar atenção que $\vdash$ é o símbolo de dedução, e a mesma expressão pode se ler:

$$H_1, \ldots, H_n \textit{ implica (segue, deduza-se) } P.$$

Exemplo 5.9. Consideremos um argumento, constituído da sucessão das seguintes proposições:

1. Se ele estuda **m**edicina, então prepara-se para ganhar uma boa **r**enda. (M, R)

2. Se ele estuda **a**rtes, então prepara-se para viver **b**em. (A, B)

3. Se ele prepara-se para ganhar uma boa **r**enda ou para viver **b**em, então suas **d**espesas de estudos não são desperdiçadas. (R, B, D)

4. Suas **d**espesas de estudos são desperdiçadas. (D)

5. Então, ele não estuda nem **m**edicina e nem artes. (M, A)

Em parênteses são escritas as designações das proposições. Por exemplo, a proposição D é definido pela igualdade $D = \{$suas despesas de estudos são desperdiçadas$\}$.

O argumento considerado pode ser simbolizado como:

$$\begin{array}{lll} H1. & M \to R & \text{(Hipótese 1)} \\ H2. & A \to B & \text{(Hipótese 2)} \\ H3. & (R \vee B) \to \neg D & \text{(Hipótese 3)} \\ H4. & D & \text{(Hipótese 4)} \\ \hline \vdash & \neg M \wedge \neg A & \text{(Conclusão)} \end{array} \tag{5.1}$$

Para estabelecer a validade deste argumento por meio de uma tabela de verdade, precisaríamos de uma tabela com $2^5 = 32$ linhas. Então, nos preferimos demonstrar este argumento, usando raciocínio dedutivo.

5.2 Demonstração formal de validade

A demonstração de validade de um argumento por raciocínio dedutivo denomina-se *demonstração formal de validade*. Abaixo, esclarecemos este termo, apresentando a definição exacta, mas começamos de uma pequena discussão sobre raciocínio dedutivo aplicado para um argumento.

Segundo (2.3), a demonstração por raciocínio dedutivo representa-se um número finito dos passos consecutivos, tal que cada passo é uma implicação $F_{i-1} \Rightarrow F_i$ (da proposição F_{i-1}, já demonstrado, deduza-se uma proposição nova F_i), sendo que no primeiro passo F_1 é premissa e no último passo a parte direita F_n da implicação é a conclusão P. Notemos que em cada passo, para deduzir F_i, pode ser necessário usar juntamente com F_{i-1} também algumas hipóteses e algumas proposições F_i dos passos precedentes. Então, modificamos o esquema (2.4) e escrevemos o esquema universal para quaisquer argumentos:

$$\begin{array}{ll} & F_1 \\ \Rightarrow & F_1 \wedge F_2 \\ \Rightarrow & F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \\ & \ldots \\ \Rightarrow & F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_{n-1} \\ \vdash & F_n \end{array} \tag{5.2}$$

onde $F_1 = H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n$ e $F_n = P$.

No entanto, na prática da demonstração de validade, como regra, o uso formal da esquema (5.2) não é racional. De facto, para dedução da proposição F_i num passo, podem ser usados só algumas das hipóteses H_j e algumas das proposições F_k com $k < i$, e não obrigatoriamente todas! É conveniente, em cada passo concreto, marcar os números das linhas anteriores (incluindo linhas das hipóteses) cujas proposições são usadas para dedução de F_i e também a lei de Álgebra de Lógica usado para dedução de F_i. Então, a demonstração de validade para um argumento, é conciso expressar pelo seguinte esquema:

$$
\begin{array}{rll}
1. & H_1 & \text{(Hip.)} \\
2. & H_2 & \text{(Hip.)} \\
 & \dots & \\
n. & H_n \vdash P & \text{(Hip.} \vdash \text{Conclusão)} \\
n+1. & F_1 & \text{(linhas; lei)} \\
n+2. & F_2 & \text{(linhas; lei)} \\
 & \dots & \\
n+m. & P & \text{(linhas, lei)}
\end{array}
\tag{5.3}
$$

Então, listamos as hipóteses H_i e as proposições deduzidas F_i em uma coluna com a justificação de cada passo numa coluna ao lado. Para fácil influência, é conveniente enumerar as hipóteses e colocar a conclusão P à direita da última hipótese, separada desta por sinal de dedução $\vdash$ que indica que todas as proposições acima e uma à esquerda são hipóteses. Abaixo da linha com conclusão estão linhas com proposições deduzidas consecutivamente das proposições que ficam acima (excepto a conclusão). Na justificação (linhas; lei) de cada uma destas linhas escrevemos os números das linhas onde estão as proposições usadas para dedução da proposição na linha actual e a lei de Álgebra de Lógica usada nesta dedução. Na última linha está a proposição que é conclusão.

Definição 5.1. Uma *demonstração formal de validade* de um argumento é uma sequência das proposições cada uma das quais é ou uma hipótese do argumento ou segue de proposições antecedentes pela uma lei (ou várias leis) de Álgebra de Lógica, terminando com a conclusão do argumento.

Observação. Nos vários manuais, em vez do símbolo $\vdash$ usa-se símbolo $\therefore$ ou $/\therefore$ (veja [2]).

Apresentemos a demonstração formal de validade para o argumento (5.1) do Exemplo 5.9 (i.e. demonstração de validade pelo esquema (5.3):

$$
\begin{array}{rll}
1. & M \to R & \text{(Hip.)} \\
2. & A \to B & \text{(Hip.)} \\
3. & (R \lor B) \to \neg D & \text{(Hip.)} \\
4. & D \vdash \neg M \land \neg A & \text{(Hip.} \vdash \text{Conclusão)} \\
5. & \neg\neg D & \text{(4; Dupla Negação} \\
6. & \neg(R \lor B) & \text{(3, 5; Modus Tollens)} \\
7. & \neg R \land \neg B & \text{(6; de Morgan)} \\
8. & \neg R & \text{(7; Simplificação)} \\
9. & \neg B & \text{(7; Simplificação)} \\
10. & \neg M & \text{(1, 8; Modus Tollens)} \\
11. & \neg A & \text{(2, 9; Modus Tollens)} \\
12. & \neg M \land \neg A & \text{(10, 11; Def. de } \land)
\end{array}
\tag{5.4}
$$

Para melhor compreensão, discutimos detalhadamente sobre linha 5. Da disjunção das proposições $(R \lor B) \to \neg D$ e D que estão nas linhas 3 e 4, respectivamente, implica $\neg(R \lor B)$, pela lei Modus Tollens (lei 24 no parágrafo 1.7 acima). Realmente, os papeis das proposições p e q na lei de Modus Tollens $(p \to q) \land \neg q \Rightarrow \neg p$ desempenham $R \lor B$ e $\neg D$, respectivamente.

5.3 Demonstrações de validade directa e indirecta

A demonstração de validade de um argumento pelo esquema (5.3) denomina-se *demonstração de validade directa*. Realmente, é método directo de demonstração de um teorema (veja a Secção 4.3).

No entanto, na demonstração de validade de um argumento pode ser usado o método de dedução de uma contradição, baseado na lei de *redução ao absurdo*

$$p \to q \Leftrightarrow (p \land \neg q) \to C$$

que foi discutido na Secção 4.4.1.

A demonstração de validade por redução ao absurdo chama-se *demonstração de validade indirecta*. Um esquema formal da demonstração de validade indirecta é:

$$
\begin{array}{rll}
1. & H_1 & \text{(Hip.)} \\
2. & H_2 & \text{(Hip.)} \\
 & \dots & \\
n. & H_n \vdash P & \text{(Hip.} \vdash \text{Conclusão)} \\
n+1. & \neg P & \text{(Demonstração Indirecta)} \\
n+2. & P_1 & \text{(linhas; lei)} \\
n+3. & P_2 & \text{(linhas; lei)} \\
 & \dots & \\
k. & C & \text{(Contradição)}
\end{array}
$$

Consideremos, de novo, o argumento do Exemplo 5.9. A demonstração de validade directa para este argumento é (5.4). Apresentemos a demonstração de validade indirecta para o mesmo argumento:

$$
\begin{array}{rll}
1. & M \to R & \text{(Hip.)} \\
2. & A \to B & \text{(Hip.)} \\
3. & (R \lor B) \to \neg D & \text{(Hip.)} \\
4. & D \vdash \neg M \land \neg A & \text{(Hip.} \vdash \text{Conclusão)} \\
5. & \neg(\neg M \land \neg A) & \text{(Demonstração Indirecta)} \\
6. & \neg\neg M \lor \neg\neg A & \text{(5; de Morgan))} \\
7. & M \lor A & \text{(6; Dupla Negação))} \\
8. & (M \lor A) \to (R \lor B) & \text{(1, 2; Dilema Construtivo)} \\
9. & R \lor B & \text{(7, 8; Modus Ponens)} \\
10. & \neg D & \text{(3, 9; Modus Ponens)} \\
11. & D \land \neg D \equiv C & \text{(4, 10; Contradição)}
\end{array}
$$

Observamos, que as vezes é possível numa linha da demonstração formal usar duas leis, como foi feito na linha 6 do exemplo.

5.4 Regra úteis na demonstração de validade

Regra. Seja uma hipótese ou uma linha depois de sinal $\vdash$ contém a proposição

$$P(a_1, a_2, \ldots, a_n) \tag{5.5}$$

onde a_i são proposições (em geral, compostas). Se b é uma proposição, e pela uma lei conhecida $a_1 \Leftrightarrow b$ ou pela uma hipótese do argumento $a_1 \leftrightarrow b$, então na demonstração de validade depois da linha (5.5) pode ser escrita a linha que contém a proposição

$$P(b, a_2, \ldots, a_n).$$

A regra segue, evidentemente, das definições do conectivo de bicondicional e da equivalência das proposições.

Apresentemos dos exemplos simples da demonstração de validade que utilizam essa regra, sendo que em vez da citação da Regra vamos citar a definição de $\leftrightarrow$ ou $\Leftrightarrow$.

Exemplo 5.10. Dê uma demonstração uma demonstração de validade para o seguinte argumento:

$$A \vee (B \to A)$$
$$B \vdash A$$

Resolução: Usamos a demonstração directa:

1.	$A \vee (B \to A)$	(Hip.)
2.	$B \vdash A$	(Hip. $\vdash$ Conclusão)
4.	$A \vee (\neg B \vee A)$	(1; Cond.1 e Def. de $\Leftrightarrow$)
5.	$\neg B \vee A$	(4; Comut., Assoc. e Idemp.)
6.	$\neg\neg B$	(2; Dupla negação)
7.	A	(5, 6; Silogismo disjuntivo)

Exemplo 5.11. Dê a demonstração de validade do seguinte argumento. Se Miau é um gato e Cléo um peixinho, então Fido não é um cachorro. Fido é um cachorro ou Miau e Cléo gostam de nadar. Miau é um gato se e somente se Cléo é um peixinho. Logo, se Miau é um gato, Miau gosta de nadar.

Resolução: Primeiro, escrevemos o argumento simbolicamente usando os símbolos MG,CP,FC,MN,CN. Depois, realizamos a demonstração de validade indirecta deste argumento.

1.	$MG \wedge CP \to \neg FC$	(Hip.)
2.	$FC \vee (MN \wedge CN)$	(Hip.)
3.	$FC \leftrightarrow CP$ $\vdash MG \to MN$	(Hip. $\vdash$ Conclusão)
4.	$\neg(MG \to MN)$	(Demonstração Indirecta)
5.	$\neg\neg(MG \wedge \neg MN)$	(4; Condicional 1)
6.	$MG \wedge \neg MN$	(5; Dupla Negação)
7.	MG	(6; Simplificação)
8.	$\neg MN$	(6; Simplificação)
9.	$MG \wedge MG \to \neg FC$	(1, 3; Comut., Def. de $\leftrightarrow$)
10.	$MG \to \neg FC$	(9; Idemp., Def. de $\Leftrightarrow$)
11.	$\neg FG$	(7, 10; Modus Ponens)
12.	$MN \wedge CN$	(2, 11; Silogismo Disjunt.)
13.	MN	(12; Simplificação)
14.	$MN \wedge \neg MN \equiv C$	(13, 8; Contradição)

5.5 Exemplos de demonstrações de validade

Os dois primeiros exemplos do manual [2], o terceiro da Secção 4.5 acima.

Exemplo 5.12. Dê uma demonstração directa e uma demonstração indirecta de validade para o seguinte argumento:

$$p \vee q \to r$$
$$s \to p \wedge u$$
$$q \vee s \vdash r$$

Resolução: a) A demonstração de validade directa:

1.	$p \vee q \to r$	(Hip.)
2.	$s \to p \wedge u$	(Hip.)
3.	$q \vee s \vdash r$	(Hip. $\vdash$ Conclusão)
4.	$(q \vee s) \vee p$	(3; Adição)
5.	$(p \vee q) \vee s$	(4; Comut. e Assoc.)
6.	$(p \vee q) \vee s$ $\to r \vee (p \wedge u)$	(1, 2; Dilema Constr.)
7.	$r \vee (p \wedge u)$	(5, 6; Modus Ponens)
8.	$(r \vee p) \wedge (r \vee u)$	(7; Distributiva)
9.	$r \vee p$	(8; Simplificação)
10.	$(r \vee p) \vee q$	(9; Adição)
11.	$(p \vee q) \vee r$	(10; Comut. e Assoc.)
12.	$\neg(p \vee q) \vee r$	(1; Condicional 1)
13.	$r \vee ((p \vee q) \wedge \neg(p \vee q))$	(11, 12; Comut., Distr.)
14.	$r \vee C$	(13; Complemento)
15.	r	(14; Identidade)

b) A demonstração de validade indirecta:

1.	$p \vee q \to r$	(Hip.)
2.	$s \to p \wedge u$	(Hip.)
3.	$q \vee s \vdash r$	(Hip. $\vdash$ Conclusão)
4.	$\neg r$	(Demonstração Indirecta)
5.	$\neg(p \vee q)$	(1, 4; Modus Tollens)
6.	$\neg p \wedge \neg q$	(5; de Morgan)
7.	$\neg p$	(6; Simplificação)
8.	$\neg q$	(6; Simplificação)
9.	s	(3, 8; Silogismo Disjuntivo)
10.	$p \wedge u$	(2, 9; Modus Ponens)
11.	p	(10; Simplificação)
12.	$p \wedge \neg p \equiv C$	(7, 11; Contradição)

Na nossa opinião, para o argumento do Exemplo 5.12 é mais racional o método da demonstração de validade indirecta.

Exemplo 5.13. Dê uma demonstração directa e uma demonstração indirecta de validade para o argumento abaixo, usando os símbolos sugeridos.

Wilson será eleito presidente do Centro Académico ou ambos, Hélio e Lúcio serão eleitos vice-presidentes do Centro Académico. Se Wilson for eleito presidente do Centro Académico ou Hélio for eleito vice, então David encaminhará um protesto. Portanto, Wilson será eleito presidente do Centro Académico ou David encaminhará um protesto (W, H, L, D).

Resolução: Primeiro, escrevemos o argumento simbolicamente

$$W \vee (H \wedge L)$$
$$W \vee H \to D \vdash W \vee D$$

a) A demonstração de validade directa:

1.	$W \vee (H \wedge L)$	(Hip.)
2.	$W \vee H \to D \vdash W \vee D$	(Hip. $\vdash$ Conclusão)
3.	$(W \vee H) \wedge (W \vee L)$	(1; Distr.)
4.	$W \vee H$	(3; Simplificação)
5.	D	(2, 4; Modus Ponens)
6.	$D \vee W$	(5; Adição)
7.	$W \vee D$	(8; Comut.)

b) A demonstração de validade indirecta:

1.	$W \vee (H \wedge L)$	(Hip.)
2.	$W \vee H \to D \vdash W \vee D$	(Hip. $\vdash$ Conclusão)
3.	$\neg(W \vee D)$	(Demonstração Indirecta)
4.	$\neg W \wedge \neg D$	(3; de Morgan)
5.	$\neg W$	(4; Simplificação)
6.	$\neg D$	(4; Simplificação)
7.	$H \wedge L$	(1, 5; Silogismo Disj.)
10.	H	(7; Simplificação)
11.	$\neg(W \vee H)$	(2, 6; Modus Tollens)
12.	$\neg W \wedge \neg H$	(11; de Morgan)
13.	$\neg H$	(12; Simplificação.)
14.	$H \wedge \neg H \equiv C$	(10, 13; Contradição)

Exemplo 5.14. Consideremos de novo o Teorema H considerado na Secção 4.5, mas agora como um argumento, e vamos demonstrar a validade deste argumento.

Teorema H. Seja $P \to (Q \to R)$. Demonstrar que $\neg R \to (P \to \neg Q)$.

Análise: a) Primeiro, escrevemos o argumento simbolicamente

$$P \to (Q \to R) \vdash \neg R \to (P \to \neg Q) \qquad (5.6)$$

a) A demonstração de validade directa para o argumento (5.6):

1.	$P \to (Q \to R)$	
	$\vdash \neg R \to (P \to \neg Q)$	(Hip. $\vdash$ Conclusão)
2.	$\neg P \vee (\neg Q \vee R)$	(1; duas vezes de Cond. 1)
3.	$\neg R \vee (\neg P \vee \neg Q)$	(2; Comut. e Assoc.)
4.	$\neg\neg R \vee (\neg P \vee \neg Q)$	(3; Dupla Negação)
5.	$\neg R \to (P \to \neg Q)$	(3; duas vezes de Cond. 1)

É claro que esta demonstração é mesma que primeira demonstração da Secção 4.5, só apresentada na forma da demonstração de validade de argumento.

b) A demonstração de validade indirecta para o argumento (5.6):

1.	$P \to (Q \to R)$	
	$\vdash \neg R \to (P \to \neg Q)$	(Hip. $\vdash$ Conclusão)
2.	$\neg(\neg R \to (P \to \neg Q))$	(Dem. Indirecta)
3.	$\neg R \wedge \neg(P \to \neg Q)$	(2; de Condicional 1)
4.	$\neg R$	(3; Simplificação)
5.	$\neg(P \to \neg Q)$	(3; Simplificação)
6.	$P \wedge \neg\neg Q$	(5; de Condicional 1)
7.	P	(6; Simplificação)
8.	$\neg\neg Q$	(6; Simplificação)
9.	Q	(8; Negação dupla)
10.	$Q \to R$	(7, 1; Modus Ponens)
11.	R	(10, 9; Modus Ponens)
12.	$R \wedge \neg R \equiv C$	(11, 4; Contradição)

Agora, mesmo que na terceira demonstração da Secção 4.5, reduzimos (na base da lei de exportação) o teorema H para o teorema

Sejam $P \to (Q \to R)$, $\neg R$ e P. Demonstrar $\neg Q$.

Escrevamos o último teorema como o argumento

1.	$P \to (Q \to R)$	(Hip.)	
2.	$\neg R$	(Hip.)	(5.7)
3.	$P \vdash \neg Q$	(Hip. $\vdash$ Conclusão)	

c) A demonstração de validade directa do argumento (5.7) é:

1.	$P \to (Q \to R)$	(Hip.)
2.	$\neg R$	(Hip.)
3.	$P \vdash \neg Q$	(Hip. $\vdash$ Conclusão)
4.	$Q \to R$	(3, 1; Modus Ponens)
5.	$\neg Q$	(4, 2; Modus Tollens)

d) A demonstração de validade indirecta é para o argumento (5.7):

1.	$P \to (Q \to R)$	(Hip.)
2.	$\neg R$	(Hip.)
3.	$P \vdash \neg Q$	(Hip. $\vdash$ Conclusão)
4.	$\neg\neg Q \equiv Q$	(Demonstração Indirecta)
5.	$Q \to R$	(3, 1; Modus Ponens)
6.	R	(5, 4; Modus Ponens)
7.	$R \wedge \neg R \equiv C$	(6, 2; Contradição)

Conclusão. Demonstramos o teorema dado de quatro métodos de demonstração formal de um argumento. É visto que os últimos dois deles são aplicados para o argumento reduzido (5.7). Então, para escrever um teorema como um argumento, existem várias possibilidades equivalentes, alguns deles podem ser mais racionais.

5.6 Exercícios

Os exercícios abaixo são do manual [2] e duma ficha do Prof. Alfio Martini publicada no Internet. Nos exercícios o símbolo C é usado para algumas propriedades que não são obrigatoriamente as contradições.

Para cada um dos seguintes argumentos, dê uma demonstração directa e uma demonstração indirecta de validade.

1.
$$A \lor (B \land C)$$
$$B \to D$$
$$C \to E$$
$$\neg A \vdash C$$

2.
$$B \lor (C \to E)$$
$$B \to D$$
$$\neg D \to (E \to A)$$
$$\neg D \vdash C \to A$$

3.
$$(A \lor B) \to (A \to D \land E)$$
$$A \land D \vdash E \lor F$$

4.
$$A \lor B$$
$$\neg B \lor C \vdash A \lor C$$

5.
$$B \lor C \to B \land A$$
$$\neg B \vdash \neg C$$

6.
$$B \to \neg S$$
$$D \land \neg P \to S$$
$$D \land B \vdash P$$

7.
$$A \land B \to C$$
$$(A \to C) \to D$$
$$\neg B \lor E \vdash B \to D \land E$$

Resolução: Apresentemos as demonstrações pelos métodos directo e indirecto.

a) A demonstração de validade directa.

No presente exercício é difícil encontrar a resolução. Caso conclusão complicada, é bem analisar esta condição. No exercício, pela lei de condicional 1, a conclusão é equivalente a $\neg B \lor (D \land E)$, ou usando lei de distribuição, temos $(\neg B \lor D) \land (\neg B \lor E)$. Mas o segundo membro desta conjunção representa-se a última hipótese, então é suficiente demonstrar $\neg B \lor D$. Então, já sabemos como usar a última hipótese. Mas como usar as primeiras duas. Podemos procurar obter na primeira hipótese a expressão $A \to C$ (usando lei de Exportação ou sequência de outras leis). Agora, usando a ideias descritas, apresentemos a mesma demonstração:

1.	$A \land B \to C$	(Hip.)
2.	$(A \to C) \to D$	(Hip.)
3.	$\neg B \lor E \vdash B \to D \land E$	(Hip. $\vdash$ Conclusão)
4.	$B \land A \to C$	(1; Comut.)
5.	$B \to (A \to C)$	(4; Exportação)
6.	$B \to D$	(5, 2; Transitiva)
7.	$\neg B \lor D$	(6; Cond.1)
8.	$(\neg B \lor D) \land (\neg B \lor E)$	(3, 7; Def de $\land$)
9.	$\neg B \lor (D \land E)$	(8; Distributiva)
10.	$B \to D \land E$	(9; Cond.1)

b) A demonstração de validade indirecta.

Apresentemos duas demonstrações: primeira, usando parcialmente ideias e alguns passos da demonstração directa (em particular, a lei de Exportação), e segunda, sem usar a lei de Exportação.

1.	$A \land B \to C$	(Hip.)
2.	$(A \to C) \to D$	(Hip.)
3.	$\neg B \lor E \vdash B \to D \land E$	(Hip. $\vdash$ Concl.)
4.	$\neg(B \to D \land E)$	(Dem.Indir.)
5.	$\neg\neg(B \land \neg(D \land E))$	(4; Cond.1b)
6.	$B \land \neg(D \land E)$	(5; Dupla neg.)
7.	$B \land (\neg D \lor \neg E)$	(6; de Morgan)
8.	$(B \land \neg D) \lor (B \land \neg E)$	(7; Distr.)
9.	$\neg(B \land \neg E)$	(3; Dupla neg., de Morgan)
10.	$B \land \neg D$	(8, 9; Comut., Silog. disj.)
11.	$B \land A \to C$	(1; Comut.
12.	$B \to (A \to C)$	(11; Exportação)
13.	$B \to D$	(12, 2; Transitiva)
14.	$\neg(B \land \neg D)$	(6; Cond.1b)
15.	Contradição	(10, 14; Contr.)

1.	$A \land B \to C$	(Hip.)
2.	$(A \to C) \to D$	(Hip.)
3.	$\neg B \lor E \vdash B \to D \land E$	(Hip. $\vdash$ Concl.)
4.	$\neg(B \to D \land E)$	(Dem.Indir.)
5.	$\neg\neg(B \land \neg(D \land E))$	(4; Cond.1b)
6.	$B \land \neg(D \land E)$	(5; Dupla neg.)
7.	$B \land (\neg D \lor \neg E)$	(6; de Morgan)
8.	$(B \land \neg D) \lor (B \land \neg E)$	(7; Distr.)
9.	$\neg(B \land \neg E)$	(3; Dupla neg., de Morgan)
10.	$B \land \neg D$	(8, 9; Comut., Silog. disj.)
11.	B	(10; Simplif.
12.	$\neg D$	(10; Simplif.)
13.	$\neg(A \to C)$	(12, 2; Modos Tollens)
14.	$\neg\neg(A \land \neg C)$	(13; Cond.1b)
15.	$A \land \neg C$	(14; Dupla neg.)
16.	A	(15; Simplif.)
17.	$\neg C$	(15; Simplif.)
18.	$A \land B$	(11, 16; Def de $\land$)
19.	$\neg(A \land B)$	(1, 17; Modus Tollens)
20.	Contradição	(18, 19; Contr.)

Fim da resolução do Exercício 7.

Na demonstração de validade dos seguintes argumentos, use os símbolos sugeridos.

8. Se a população cresce rapidamente e a produção permanece constante, então os preços sobem. Se os preços sobem, então o governo controla os preços. Se sou rico, então não me preocupo com o aumento dos preços. Não é verdade que não sou rico. O governo não controla os preços ou preocupo-me com aumento dos preços. Portanto, não é verdade que a população cresce rapidamente e a produção permanence constante.
(P: a população cresce rapidamente, C: a produção permanence constante, S: os preços sobem, G: o governo controla os preços, R: eu sou rico, A: eu preocupo-me com o aumento dos preços).

9. Se Wilson ou Alberto ganha, então Lúcio e Susana choram. Susana não está chorada. Portanto, Alberto não ganhou.

(W: Wilson ganha, A: Alberto ganha, L: Lúcia chora, S: Susana chora).

10. Se eu me escrevo neste curso e estudo bastante, então tiro boas notas. Se tiro boas notas, fico feliz. Não estou feliz. Portanto, não me inscrevi neste curso ou não estudei bastante.
(I: inscrevo-me neste curso, E: estudo bastante, B; tiro boas notas, F: estou feliz).

11. Hoje é um fim de semana se e somente se hoje é Sábado ou Domingo. Portanto, hoje é um fim de semana, desde que hoje é Sábado. (F,S,D)

12. Hoje é um fim de semana se hoje é Sábado ou Domingo. Mas hoje não é um fim de semana. Portanto, hoje não é Sábado e hoje não é Domingo. (F,S,D)

13. Hoje é um fim de semana somente se hoje é Sábado ou domingo. Hoje não é Sábado. Hoje não é Domingo. Portanto, hoje não é um fim de semana. (F,S,D)

14. A proposta de auxílio está no correio. Se os arbitros a receberem até sexta-feira, eles a analisarão. Portanto, eles a analisarão, porque se a proposta estiver no correio, eles a receberão até sexta-feira. (C,S,A)

15. Miau não é, ao mesmo tempo, um gato e um cachorro. Miau é um gato. Logo, Miau não é um cachorro. (G,C)

16. Se Miau caça, ele apanha ratos. Se ele não dorme bastante, então ele caça. Se ele não apanha ratos, ele não dorme bastante. Logo, Miau apanha ratos. (C,R,D)

17. Se Arlindo está doente, Mathias não vai à escola. Se Mathias está doente, Arlindo não vai à escola. Arlindo e Mathias vão à escola. Logo, nem Arlindo nem Mathias estão doentes. (AD,MD,AE,ME)

18. Se a Lua gira em torno da Terra e a Terra gira em torno do Sol, então Copérnico tinha razão. Se Copérnico tinha razão, então Ptolomeu não tinha razão. A Terra gira em torno do Sol. Logo, se a Lua gira em torno da Terra, Ptolomeu não tinha razão. (LT,TS,C,P)

19. Se meu cliente é culpado, então a faca estava na gaveta. Ou a faca não estava na gaveta ou Jason Pritchard viu a faca. Se a faca não estava lá no dia 10 de Outubro, então segue que Jason Pritchard não viu a faca. Além disso, se a faca estava lá em 10 de Outubro, então a faca estava na gaveta e também o machado estava no celeiro. Mas todos nós sabemos que o machado não estava no celeiro. Portanto, senhoras e senhores presentes no Juri, meu cliente é inocente. (C,F,J,O,M)

Capítulo 6

Indução matemática

6.1 Introdução. Exemplo

Indução matemática é um dos métodos de *demonstração* de teoremas e outras proposições matemáticas. Indução pode servir para descobrir um resultado, mas isto não é indução matemática, é raciocínio indutivo informal.

A ideia do método pode ser interpretada de maneira seguinte. Seja A um subconjunto do conjunto $\mathbb{N}$ de todos os números naturais. Sabe-se que

1. $1 \in A$.
2. $n \in A \to n+1 \in A$

O que é que podemos dizer relativamente ao conjunto A? Claro que $2 \in A$, porque

$$1 \in A \wedge (1 \in A \to 2 \in A).$$

Intuitivamente é claro que $A = \mathbb{N}$. O exemplo abaixo é baseado sobre a mesma ideia.

Exemplo 6.1. Consideremos as igualdades:

$$\begin{aligned} 1+2 = 3 = 2^2 - 1 \\ 1+2+4 = 7 = 2^3 - 1 \\ 1+2+4+8 = 15 = 2^4 - 1 \end{aligned}$$

Aparece uma hipótese que

$$1+2+4+\cdots+2^n = 2^{n+1} - 1. \tag{6.1}$$

Seja a ultima igualdade um predicado $P(n)$. Então, as proposições $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$ são verdadeiras. Demonstremos a implicação $P(n) \to P(n+1)$. Suponhamos que $P(n)$, isto é, (6.1) é verdadeira, e demonstremos que

$$1+2+4+\cdots+2^n+2^{n+1} = 2^{n+2} - 1.$$

Segundo a suposição o lado esquerdo podemos transformar

$$\begin{aligned} 1+2+4+\cdots+2^n+2^{n+1} &= 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} \\ &= 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1. \end{aligned}$$

Então, é demonstrada a implicação

$$P(n) \to P(n+1),$$

para qualquer $n \geq 1$. Podemos representar este facto por meio da série infinita das implicações:

$$\begin{aligned} &P(1) \to P(2) \\ &P(2) \to P(3) \\ &P(3) \to P(4) \\ &\quad\ldots \\ &P(n) \to P(n+1) \\ &\quad\ldots \end{aligned}$$

Mas a primeira proposição $P(1)$ é verdadeira e permite afirmar que a segunda $P(2)$ é verdadeira também. Essa, por sua vês, garante veracidade da $P(3)$, etc. Intuitivamente claro que $P(n)$ é verdadeira para qualquer número natural.

6.2 Princípio da indução matemática

Seja dado um *predicado* P definido no conjunto de números naturais $\mathbb{N}$, tal que para qualquer n natural fixo $P(n)$ se representa a proposição que pode ser verdadeira ou falsa. Sob certas condições é preciso demonstrar que a proposição $P(n)$ é verdadeira qualquer que seja n natural, i.e.

$$\forall (n \in \mathbb{N})\ P(n).$$

A demonstração que utiliza *o princípio da indução matemática* consiste em dois passos, base (B) e passo indutivo (I):

(B) Demonstrar que a proposição dada é válida para $n = 1$;

(I) A partir da suposição que a proposição é válida para $n = k$ mostrar que a suposição é válida e para $n = k+1$ (qualquer que seja $k \in \mathbb{N}$).

O considerado podemos resumir por meio do teorema:

Teorema 6.1 (Princípio de Indução Matemática (PIM))**.** *Vamos supor que*

(B) $P(1)$ *é verdadeira;*

(I) $P(k) \to P(k+1)$ *qualquer que seja* $k \in \mathbb{N}$.

Então a proposição $P(n)$ é verdadeira qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

O teorema 6.1 pode ser demonstrado na base de um *princípio de escolha.*

O princípio de elemento mínimo:

> Qualquer subconjunto não vazio do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais tem o mínimo elemento.

Demonstração do teorema 6.1. Seja $P(n)$ um predicado definido sobre $\mathbb{N}$ e obedecendo às condições (B) e (I) do teorema 6.1. Designemos por $E \subset \mathbb{N}$ o conjunto de todos os valores de n para os quais $P(n)$ é falso. Precisamos de demonstrar que $E = \emptyset$. Suponhamos ao contrário que E não é vazio. Conforme ao princípio o conjunto E tem o elemento mínimo, n_0. O n_0 é diferente de 1, porque $P(1)$ é verdadeira. Como n_0 é o mínimo, temos $P(n_0 - 1)$ é verdadeira, mas $P(n_0)$ é falso. Mas isto contradiz à implicação $P(k) \to P(k+1)$ para $k = n_0 - 1$. A contradição obtida permite afirmar que $E = \emptyset$. $\square$

Exemplo 6.2. Notemos que as seguintes igualdades

$$1 + 2 = \frac{2 \cdot 3}{2},\ 1 + 2 + 3 = \frac{3 \cdot 4}{2},\ 1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4 \cdot 5}{2}.$$

são válidas. Este facto pode sugerir uma hipótese indutiva

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{6.2}$$

Ainda não sabemos se para todos os valores de n a relação (6.2) é verdadeira ou não. Não é possível verificar a relação (6.2) para todos os valores de $n \in \mathbb{N}$.

Para demonstrar vamos usar o teorema 6.1. Verifiquemos que para $n = 1$ esta proposição é válida. De facto $n = 1$ torna (6.2) em igualdade $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$. No segundo passo (passo da indução) *suponhamos* que para $n = k$ a proposição é válida, isto é,

$$1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Baseando nesta hipótese demonstremos que para $n = k + 1$ a proposição será válida também, isto é,

$$1 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Temos

$$\underbrace{1 + 2 + \ldots + k}_{\text{suposição}} + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1$$
$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Segundo o PIM, a igualdade (6.2) está demonstrada.

Exemplo 6.3. Encontrar a soma

$$s_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1).$$

Notemos que o n-ésimo lugar ocupa o número $2n-1$ (que é possível demonstrar por meio da mesma indução). Consideremos os cálculos:

$$\begin{array}{ll} n = 1 & 1 \\ n = 2 & 1 + 3 = 4 \\ n = 3 & 1 + 3 + 5 = 9 \\ n = 4 & 1 + 3 + 5 + 7 = 16 \\ \cdots & \cdots \end{array}$$

Aparece a suposição (indução informal) que a soma s_n é igual a n^2. Agora vem etapa da demonstração. Seja $P(n) = \{1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2\}$.

(B) $P(1) = \{1 = 1^2\}$ é verdadeira.

(I) Suponhamos que (Hipótese) $P(k) = \{1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2\}$ é verdadeira. Temos que demonstrar $P(k + 1)$ (Tese). Usando hipótese, obtemos

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) + (2k+1) &= (k+1)^2 \\ &= k^2 + (2k+1) = (k+1)^2. \end{aligned}$$

Então $P(k + 1)$ é verdadeira. Pelo PIM,

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

6.3 Princípio de indução generalizado

Teorema 6.2 (PIM generalizado)**.** *Seja $m \in \mathbb{N}$. Suponhamos que*

(B) $P(m)$ é verdadeira;

(I) $P(k) \to P(k + 1)$ qualquer que seja $k \in \{m, m + 1, \ldots\}$.

Então, a proposição $P(n)$ é verdadeira qualquer que seja $n \in \{m, m + 1, \ldots\}$.

Exemplo 6.4. Demonstre que

$$2^n > n^2$$

qualquer que seja $n \geq 5$.

Demonstração. Seja

$$P(n) = \{2^n > n^2\}.$$

É preciso demonstrar $P(n)$ $(\forall n \geq 5)$. Usamos o PIM generalizado.

(B) $P(5) = \{2^5 > 5^2\}$ é verdadeira.

(I) Hipótese: $P(k) = \{2^k > k^2\}$ é verdadeira.

Temos que demonstrar

$$P(k+1) = \{2^{k+1} > (k+1)^2\}.$$

Usando hipótese obtemos

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k^2 = k^2 + k^2. \tag{6.3}$$

Observamos que qualquer que seja $k \geq 5$ tem lugar a desigualdade

$$k^2 > 2k+1$$

Daqui e de (6.3) obtemos

$$2^{k+1} > 2^k + 2^k > k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2.$$

Então $P(k+1)$ é verdadeira. Pelo PIM generalizado, $P(n)$ é verdadeira qualquer que seja $n \geq 5$. □

Exemplo 6.5. Demonstrar a lei de Morgan generalizada

$$\neg(a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n) \Leftrightarrow \neg a_1 \wedge \neg a_2 \wedge \ldots \wedge \neg a_n \quad (n = 2, 3, \ldots),$$

sendo $a_1, a_2, \ldots a_n$ são proposições.

Demonstração. Deve-se demonstrar $P(n)$ qualquer que seja $n = 2, 3, \ldots$

(B) $P(2) \equiv \{\neg(a_1 \vee a_2) \Leftrightarrow \neg a_1 \wedge \neg a_2\}$ é verdadeira, pela lei de Morgan.

(I) Hipótese:

$$P(k) = \{\neg(a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_k) \Leftrightarrow \neg a_1 \wedge \neg a_2 \wedge \ldots \wedge \neg a_k\}$$

é verdadeira. Temos que demonstrar

$$P(k+1) = \{\neg(a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_{k+1}) \Leftrightarrow \neg a_1 \wedge \neg a_2 \wedge \ldots \wedge \neg a_{k+1}\}.$$

Designamos por a a proposição $a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_k$. Temos que

$$\begin{array}{lll} & \neg(a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_{k+1}) & \\ \Leftrightarrow & \neg(a \vee a_{k+1}) & \\ \Leftrightarrow & \neg a \wedge \neg a_{k+1} & \text{(Lei de Morgan)} \\ \Leftrightarrow & (\neg a_1 \wedge \neg a_2 \wedge \ldots \wedge \neg a_k) \wedge \neg a_{k+1} & \text{(Hip.)} \\ \Leftrightarrow & \neg a_1 \wedge \neg a_2 \wedge \ldots \wedge \neg a_{k+1} & \text{(Lei Assoc).} \end{array}$$

Então, $P(k+1)$ é verdadeira.

Pelo PIM generalizado, $P(n)$ é verdadeira $\forall n \in \{2, 3, \ldots\}$. □

6.4 O princípio fraco de indução matemática

As vezes não é possível usar o princípio indicado. Mas pode ajudar o seguinte teorema.

Teorema 6.3 (PIM fraco)**.** *Suponhamos que*

(B) *$P(1)$ é verdadeira;*

(I) *$P(1) \wedge P(2) \wedge \ldots \wedge P(k) \to P(k+1)$ qualquer que seja $k \in \{1, 2, \ldots\}$.*

Então, a proposição $P(n)$ é verdadeira para todos os números n naturais.

Formulemos agora uma generalização do PIM fraco, usando a ideia do Teorema 6.2.

Teorema 6.4. *Suponhamos que*

(B) *$P(m)$ é verdadeira;*

(I) *$P(m) \wedge P(m+1) \wedge \ldots \wedge P(k) \to P(k+1)$ qualquer que seja $k \in \{m, m+1, \ldots\}$.*

Então, a proposição $P(n)$ é verdadeira para todos os números $n \in \{m, m+1, \ldots\}$.

Exemplo 6.6. Demonstrar que qualquer número natural $n \geq 2$ é possível desenvolver em produto de números primos.

Demonstração. Seja $P(n)$ uma proposição: o número n é possível desenvolver em produto de primos.

(B) $P(2)$ é verdadeira, evidentemente. O produto contém um único factor 2

(I) Hipótese $P(2), \ldots P(k)$ são verdadeiras, sendo $k \geq 2$.

Tese: $P(k+1)$ é verdadeira.

Na demonstração de veracidade de $P(k+1)$ consideremos dois casos.

a) Seja $k+1$ um número primo. Neste caso $k+1$ é o produto de um só factor $k+1$ (que é um número primo), então $P(k+1)$ é verdadeira.

b) Seja $k+1$ um número composto. Então, $k+1 = i \cdot j$ para alguns números naturais i, j que satisfazem a condição $1 < i, j < k+1$. Segundo a Hipótese, $P(i)$ e $p(j)$ são verdadeiras, logo, os números i e j são produtos de números primos, i.e. $i = a_1 \cdot \cdots \cdot a_m$ e $j = b_1 \cdot \cdots \cdot b_l$ onde $a_1, \ldots a_m, b_1, \ldots b_l$ são primos. Daqui,

$$k+1 = a_1 \cdot \cdots \cdot a_m b_1 \cdot \cdots \cdot b_k$$

é produto de números primos.

Portanto, $P(k+1)$ é verdadeira.

Pelo PIM (Teorema 6.4), qualquer número natural $n \geq 2$ é possível desenvolver em produto de números primos. □

6.5 O princípio de indução com várias condições na base

Existe mais uma generalização do princípio de indução matemática que usa várias condições na parte base, que é úteis, por exemplo, na Matemática Discreta para demonstrar regularidades de sucessões definidas recursivamente.

Teorema 6.5. *Seja $m \in \mathbb{N}$. Suponhamos que*

(B) *$P(1), P(2), \ldots, P(m)$ são verdadeiras;*

(I) $P(1) \wedge P(2) \wedge \ldots \wedge P(k+m-1) \to P(k+m)$ *qualquer que seja* $k \in \{1, 2, \ldots\}$.

Então, a proposição $P(n)$ é verdadeira para qualquer número n natural.

Exemplo 6.7. Sejam $s_1 = 2$, $s_2 = 4$ e $s_{n+2} = s_n + s_{n+1} + 2^n$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Demonstre que $s_n = 2^n$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. É preciso demonstrar $P(n) = \{s_n = 2^n\}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. Apliquemos o Teorema 6.5 para $m = 2$.

(B) $P(1) = \{s_1 = 2^1\}$ e $P(2) = \{s_2 = 2^2\}$ são verdadeiras.

(I) Hipótese: $P(1), P(2), \ldots P(k+1)$ são verdadeiras para $k \geq 1$.

Tese: $P(k+2) = \{s_{k+2} = 2^{k+2}\}$ é verdadeira.

Usando a condição e a hipótese obtemos

$$s_{k+2} = s_k + s_{k+1} + 2^k = 2^k + 2^{k+1} + 2^k = 2^k + 2 \cdot 2^k + 2^k = 2^2 \cdot 2^k = 2^{k+2}.$$

Então, $P(k+2)$ é verdadeira.

Pelo PIM (Teorema 6.5), $s_n = 2^n$ qualquer que seja número natural n. □

Notemos, que na correcção de alguns exercícios dos testes de anos anteriores foi utilizado o princípio de indução com várias condições na base na seguinte forma:

Teorema 6.5′ *Suponhamos que*

(B) $P(1), P(2), \ldots, P(m)$ *são verdadeiras;*

(I) $P(1) \wedge P(2) \wedge \ldots \wedge P(k) \to P(k+1)$ *qualquer que seja* $k \in \{m, m+1, \ldots\}$.

Então, a proposição $P(n)$ é verdadeira para qualquer número n natural.

É claro que este princípio é apenas reformulação do Teorema 6.5. Na nossa opinião, o princípio na forma do Teorema 6.5 é mais conveniente na resolução de exercícios.

6.6 Exercícios

1. Demonstrar que para todos $n \in \mathbb{N}$
   (a) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$,
   (b) $1 + a + a^2 + \ldots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \quad (a \neq 1)$
   (c) $n^5 - n$ é divisível por 10
   (d) $11^n - 4^n$ é divisível por 7
2. Demonstrar para $\forall n \in \mathbb{N}$
   (a) $5^n - 4n - 1$ é divisível por 16
   (b) $5^{n+1} + 2 \cdot 3^n + 1$ é divisível por 8
   (c) $n! \geq 2^{n-1}$
   (d) $8^{n+2} + 9^{2n+1}$ é divisível por 73
   (e) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$
   (f) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \geq \sqrt{n}$
   (g) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \leq 2\sqrt{n} - 1$
   (h) $a^n - 1 \geq n(a-1) \quad (a > 0)$
3. Demonstrar a lei distributiva generalizada
$$a \vee (b_1 \wedge b_2 \wedge \ldots \wedge b_n) \Leftrightarrow (a \vee b_1) \wedge (a \vee b_2) \wedge \ldots \wedge (a \vee b_n) \quad (n = 2, 3, \ldots),$$
   sendo $a, b_1, \ldots b_n$ são proposições.
4. Demonstrar a lei transitiva generalizada
$$(a_1 \to a_2) \wedge (a_2 \to a_3) \wedge \ldots \wedge (a_{n-1} \to a_n) \Rightarrow (a_1 \to a_n) \qquad (n = 2, 3, \ldots),$$
   sendo $a_1, a_2, \ldots a_n$ são proposições.

Para cada um dos seguintes exercícios, dado um teorema:

a) formule o princípio de indução matemática que pode ser usado na demonstração do teorema;

b) demonstre o teorema usando o princípio formulado na alínea a).

5. *Teorema.* Para todo número natural $n \geq 5$ tem lugar a desigualdade $\sum_{j=1}^{n} \frac{3}{j^2} < n$. Na prova, pode ser útil $3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{9} + \frac{3}{16} + \frac{3}{25} \approx 4{,}39$.
6. *Teorema.* Tem lugar $\frac{10 \cdot 2^n}{n!} < 1$ para todo número natural n que é maior do que cinco.
7. *Teorema.* $2^n < (n-2)!$ para todo número natural n que é maior ou igual do que 8.
8. *Teorema.* $(4/3)^n > n$ para todo número natural n que é maior ou igual do que 7.
9. *Teorema.* Sejam $a_1 = 7$, $a_2 = 10$ e $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. Então, $a_n = 3n + 4$ qualquer que seja número natural n.
10. *Teorema.* Sejam $a_1 = 3$, $a_2 = 9$ e $a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. Então, $a_n = 3^n$ qualquer que seja número natural n.
11. *Teorema.* Sejam $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ e $a_{n+2} = 2 + (n+1)^2 + a_{n+1} - a_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. Então, $a_n = n^2$ qualquer que seja número natural n.
12. *Teorema.* Sejam $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ e $a_{n+2} = \frac{(n+2)a_{n+1}^2}{(n+1)a_n}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. Então, $a_n = n!$ qualquer que seja número natural n.

Tema II

Conjuntos

Capítulo 7

Conceito de conjunto. Operações sobre conjuntos

7.1 Conceito de conjunto

O conceito de *conjunto* surgiu em matemática como resultado de abstracção. Isto permite falar de coisas diferentes de um ponto de vista, não considerar faces não necessárias numa investigação concreta. Usam-se diferentes sinónimos do conjunto, são famílias, classes, sistemas, colecções. Mas os sinónimos servem só para diversidade, realmente pode ser usado único termo, conjunto. O conjunto é composto de objectos que vamos chamar *elementos* do conjunto ou *pontos* do conjunto.

Em matemática cada conjunto pode ter designação, por exemplo, por uma letra. Seja F o conjunto dos dígitos usados para escrever números. Para dizer que 2, 7, etc. são elementos do conjunto F usa-se notação

$$2 \in F,\ 7 \in F, \ldots$$

Notemos que

$$12 \notin F,\ -1 \notin F.$$

O símbolo $\notin$ usa-se para dizer que um objecto não é elemento do conjunto considerado.

7.2 Métodos de representação de conjuntos

7.2.1 Lista

O primeiro método para determinar um conjunto é formar uma *lista* de todos os elementos (ou listar os elementos)

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\},$$
$$B = \{a, b, c\},$$
$$C = \{(1, 2), (5, -1), (30, 0), (0, 0), (-13, 8)\}.$$

O conjunto B contem os 3 objectos (ou elementos), o conjunto C consiste dos 5 objectos que são pares ordenados de números inteiros.

Discutiremos um momento da notação. A ordem na lista dos elementos não tem importância. Por exemplo, o conjunto $D = \{5, 7, 8\}$ pode ser representado

$$D = \{7, 5, 8\} = \{8, 7, 5\} = \{5, 8, 7\}.$$

Mais, a formulação
"seja $A = \{x, y, z\}$ um conjunto de três números naturais"
pressupõe que os números x, y, z são diferentes. Mas em geral pode acontecer que o conjunto $\{x, y, z\}$ pode ter 2 elementos e pode ter único elemento, isto é, vamos assumir a notação $A = \{2, 2, 5\} = \{2, 5\} = \{5, 2\}$.

Pode-se usar o símbolo $'\ldots'$ (etc.) para conjuntos grandes ou infinitos

$$\mathbb{N}_{100} = \{1, 2, 3, \ldots, 100\},\ D_3 = \{3, 6, 9, \ldots\}$$

Este método pressupõe um *algoritmo* de formação de elementos do conjunto. Por exemplo, para verificar se o número 36 pertence ao conjunto D_3 ou não, é preciso cumprir várias adições $3 + 3 = 6,\ 6 + 3 = 9,\ 9 + 3 = 12, \ldots$ ate obter ou não o elemento necessário. Mas o algoritmo sugere outra ideia, que o conjunto contém todos os números múltiplos de 3. Então, existe outro método para definir um conjunto.

7.2.2 Propriedade característica

Um conjunto pode ser dado por meio de uma *propriedade característica*. Os conjuntos $\mathbb{N}_{100}$ e D_3 considerados em cima pode-se descrever de maneira seguinte

$$\mathbb{N}_{100} = \{n \colon n \text{ é natural}, n \leq 100\},$$
$$D_3 = \{n \colon n \text{ é natural e múltiplo de } 3\}$$

São consideradas as condições necessárias e suficientes para verificar se um número x é elemento do conjunto $\mathbb{N}_{100}$ ou não. Por exemplo, $1.5 \notin \mathbb{N}_{100}$ porque 1.5 não é número natural, $200 \notin \mathbb{N}_{100}$ porque $200 \not\leq 100$. Mas $81 \in \mathbb{N}_{100}$ porque 81 satisfaz a ambas condições (é natural e é menor ou igual do que 100).

Consideremos mais exemplos:

$$D_2 = \{n \colon n \text{ é natural e é par}\} = \{2, 4, 6, \ldots\},$$

$$E = \{x \colon 1 \leq x < 3\} = [1, 3[,$$

$$G = \{t \mid t \text{ é primo},\ 10 < t < 20\} = \{11, 13, 17, 19\}.$$

Em chavetas o primeiro objecto é uma variável todos os valores da qual formam o conjunto. A variável é seguida pelo símbolo $':'$ ou pelo símbolo $'|'$. A segunda parte contém uma ou várias condições necessárias e suficientes para verificar se um elemento pertence ao conjunto. Em geral, a definição de um conjunto M pala sua propriedade característica tem a forma

$$M = \{x \colon P(x)\}$$

onde $P(x)$ um predicado. M é conjunto de tais x que a proposição $P(x)$ seja verdadeira (seja válida a propriedade $P(x)$).

Em Matemática usam-se várias formas da definição por meio de uma propriedade característica. Em vez de uma variável no primeiro lugar pode ser posta parte das condições ou uma expressão. Assim,

$$M = \{x \in X \colon P(x)\}$$

significa: M é o conjunto de tais elementos x do conjunto X (pertencentes ao conjunto X) que seja válida $P(x)$.

$$M = \{f(x) \colon P(x)\}$$

significa: M é conjunto de tais valores de $f(x)$ que seja válida $P(x)$.

Consideremos, como exemplo, várias formas correctas da definição (ou da representação) do conjunto D_2 de números naturais pares:

$$\begin{aligned} D_2 &= \{2, 4, 6, \ldots\} \\ &= \{n \colon n \text{ é natural e é par}\} \\ &= \{n \colon n \in \mathbb{N} \text{ é par}\} \\ &= \{n \in \mathbb{N} \colon n \text{ é par}\} \\ &= \{n \colon (\exists k \in \mathbb{N}) n = 2k\} \\ &= \{n \colon n = 2k,\ k \in \mathbb{N}\} \\ &= \{2n \colon n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

7.3 Conjuntos numéricos básicos

O conjunto

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

é conjunto dos números *naturais.*

O conjunto

$$\mathbb{Z}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

é conjunto dos números *inteiros não negativos.*

O conjunto

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$$

é conjunto dos números *inteiros.*

O conjunto

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \colon m \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{N} \right\}$$

é conjunto dos números *racionais.*

Por $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, como é habituado nos todos os ramos da Matemática vamos designar o conjunto dos números *reais* e *complexos*, respectivamente.

Os números reais que não racionais chamam-se *irracionais.* O conjunto de números irracionais designa-se por $\mathbb{I}$.

Os exemplos nos números irracionais são os números notáveis π, e, também $\sqrt{2}$, $\sqrt[9]{3 - \sqrt{5}}$, $\pi^2 - 15$.

Da Teoria de Números é conhecido que qualquer número real é representável na forma de uma fracção decimal infinita, sendo que esse numero é racional se e somente se é representável na forma de uma fracção decimal periódica.

Por exemplo, o número $1 \in \mathbb{Q}$ é representável na forma de uma fracção decimal periódica de dois métodos:

$$1 = 1.(0) = 1.000\ldots \text{ ou}$$
$$1 = 0.(9) = 0.999\ldots,$$

o número $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ é representável na forma de uma fracção periódica de um método:

$$\frac{1}{3} = 0.(3) = 0.333\ldots,$$

mas o número irracional π é representável so na forma de uma fracção decimal não-periódica.

A natureza dos números irracionais não admite a determinação exacta de todos os dígitos na forma de fracção não-periódica, mas admite uma aproximação decimal desses números, que, com ajuda dos computadores modernos, pode ser muito boa! Por exemplo,

$$\pi \approx 3.14159265358979323846264338327 95$$

7.4 Conjuntos finitos e infinitos. Conjuntos equivalentes

Existem conjuntos finitos e infinitos, por exemplo o conjunto de todos os números naturais $\mathbb{N}$ é infinito. Designemos por $\mathbb{P}$ o conjunto de todos os números primos,

$$\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots\}. \tag{7.1}$$

O conjunto $\mathbb{P}$ é infinito (veja Teorema G na Secção 4.4.2).

Usa-se o símbolo especial $\emptyset$ para o *conjunto vazio* que não tem elementos.

Para um conjunto finito A usa-se a notação $|A|$ para o número dos elementos do A. Por exemplo, se $A = \{a, b, c, d, e\}$, $|A| = 5$. Para mostrar, que $|A| = |B|$ é suficiente e necessário estabelecer uma *correspondência biunívoca* entre estes conjuntos.

Diz-se que dois conjuntos são *equivalentes* se é possível estabelecer uma correspondência biunívoca. Então, podemos dizer que dois conjuntos finitos A e B têm o mesmo número de elementos, se A e B são equivalentes.

Para conjuntos infinitos pode acontecer que o conjunto pode ser equivalente à sua parte própria. Por exemplo, o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é equivalente ao subconjunto dos números pares

$$D_2 = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}.$$

Isto é impossível para conjuntos finitos.

Um conjunto que é equivalente ao conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, diz-se *enumerável*, mas existem conjuntos que não são *enumeráveis*. Por exemplo, é possível mostrar que o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ não é enumerável. Mas o conjunto $\mathbb{Q}$ de todos os números racionais é enumerável. Mais detalhadamente os conjuntos enumeráveis vamos considerar no Tema IV.

7.5 Inclusão. Conjunto universal. Conjunto de conjuntos

7.5.1 Inclusão ($\subset$)

Sejam A e B dois conjuntos. Se cada um dos elementos $x \in A$ é também elemento do conjunto B diz-se que A é um subconjunto do B, ou que o conjunto A é contido no conjunto B, e escreve-se

$$A \subset B.$$

A ultima relação $A \subset B$ diz-se *inclusão*.

Por exemplo, temos uma sequência de inclusões:

$$\{2,3,5\} \subset \mathbb{P} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

7.5.2 Conjunto universal

Frequentemente num problema consideram-se só subconjuntos de um conjunto U dado, que se chama *conjunto universo* ou *conjunto universal*. Por exemplo, as figuras diferentes no plano podem ser consideradas como subconjuntos dos pontos do plano. Neste caso o plano pode ser considerado como conjunto universal. O conjunto de todos os números reais usa-se em análise matemática como conjunto universal para estudar funções de uma variável real.

Seja dado um conjunto universal denotado por U. Neste caso o termo "um conjunto" significa "um subconjunto do conjunto U, de outras palavras, $A \subset U$.

7.5.3 Conjunto de conjuntos

Seja M um conjunto. Usa-se designação $\mathcal{P}(M)$ para o conjunto de todos os subconjuntos de M. Por exemplo, seja $M = \{a,b,c\}$. O conjunto $\mathcal{P}(M)$ contem 8 elementos

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}.$$

A operação $\mathcal{P}$ pode ser aplicada duas vezes:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\})) &= \mathcal{P}(\{\emptyset,\{1\}\}) \\ &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{1\}\}, \{\emptyset,\{1\}\}\}.\end{aligned}$$

Teorema 7.1. *Para qualquer conjunto M*

$$|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}.$$

7.5.4 Diferença dos sentidos de $\in$ e $\subset$

Observamos, que na Teoria de Conjuntos (mesmo em todos ramos da Matemática) é preciso utilizar os símbolos $\in$, $\notin$, $\subset$, e $\not\subset$ de modo exacto!

1) $x \in A$ significa *"x é elemento do conjunto A"* ou *"o elemento x pertence ao conjunto A"*. Às vezes, em dependência do contexto da frase, é correcto ler *"x pertencendo ao A"* ou mais curto *"x do conjunto A"*. Por exemplo, $\forall x \in [0,1]\ x^2 + x > 0$ pode-se ler como *para qualquer ponto x do segmento* $[0,1]$ *tem lugar a desigualdade* $x^2 + x > 0$. Em alguns textos matemáticos pode-se ver a expressão da forma $A \ni x$ cujo significado é mesmo que $x \in A$.

2) $x \notin A$ significa *"x não é elemento do conjunto A"* ou *"o elemento x não pertence ao conjunto A"*.

3) $A \subset B$ significa *"A é subconjunto do conjunto B"* ou *"o conjunto A está contido em B"*. A descrição da expressão de palavras também depende do contexto. Por exemplo, *dado intervalo aberto* $\Delta \subset [0,1]$ *consideremos ...* entende-se como *dado intervalo aberto* Δ *contido no segmento* $[0,1]$ *consideremos ...* Em alguns textos matemáticos pode-se ver a expressão da forma $B \supset A$ cujo significado é mesmo que $A \subset B$.

4) $A \not\subset B$ significa *"A não é subconjunto do conjunto B"* ou *"o conjunto A não está contido em B"*. É claro que $A \not\subset B$ é equivalente a condição que os conjuntos A e B^c intersectam.

Exemplo 7.6. Sejam $A = \{1,2,3\}$ e $\Omega = \{\{1\},\{1,2\}\}$. Então, é correcto escrever $1 \in A$, $5 \notin A$, $A \ni 3$, $A \subset \mathbb{N}$, $A \supset \{1\}$, $A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$, $\{1\} \in \mathcal{P}(A)$, $\Omega \subset \mathcal{P}(A)$, $\Omega \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$. Mas é **completamente incorrecto** escrever, por exemplo, $1 \subset A$, $\{1\} \in A$, $\Omega \in \mathbb{N}$, $\{1\} \subset \mathcal{P}(A)$ (porque?).

7.6 Operações sobre conjuntos

7.6.1 Complemento

Uma das três operações de conjunto básicas é a operação de complemento. Apresentemos a definição exacta.

Definição 7.1. Seja U um conjunto universal. Seja A um conjunto. O conjunto constituído de todos os elementos de U que não são elementos de A, chama-se *complemento* do conjunto A e designa-se A^c (nos manuais diferentes também usam-se designações $\overline{A}$ e cA).

A mesma definição na forma simbólica é:

$$A^c \stackrel{\text{def}}{=} \{x \colon x \notin A\}.$$

Exemplo 7.7. Se $\mathbb{R}$ é conjunto universo, então o complemento do conjunto de números racionais é o conjunto de números irracionais, isto é $\mathbb{Q}^c = \mathbb{I}$.

Observamos que conceito do complemento tem sentido somente quando é definido o conjunto universo. Os complementos de um conjunto podem ser diferentes se considerar os conjuntos universos diferentes.

Exemplo 7.8. Seja $A = \{3, 4, 5, \ldots\}$. Se considerar o conjunto universo $\mathbb{N}$ temos $A^c = \{1, 2\}$, mas se considerar o conjunto universo $\mathbb{Z}$ temos $A^c = \{0, \pm 1, \pm 2, -3, -4, \ldots\}$.

7.6.2 União e intersecção ($\cup$ e $\cap$)

Definimos duas operações básicas sobre conjuntos: união e intersecção.

Definição 7.2. Sejam A, B conjuntos. O conjunto constituído de todos os elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos A ou B chama-se *união* dos conjuntos A e B e designa-se

$$A \cup B$$

A mesma definição na forma simbólica é:

$$A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \colon x \in A \vee x \in B\}.$$

Definição 7.3. Sejam A, B conjuntos. O conjunto constituído de todos os elementos que pertencem aos ambos conjuntos A e B chama-se *intersecção* dos conjuntos A e B e designa-se

$$A \cap B$$

A mesma definição na forma simbólica é:

$$A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \colon x \in A \wedge x \in B\}.$$

Exemplo 7.9. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3, 4\}$. Então,

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}, \qquad A \cap B = \{2, 3\}.$$

Exemplo 7.10. Sejam $A = [0, 2]$ e $B =]1, 3[$. Então,

$$A \cup B = [0, 3[, \qquad A \cap B =]1, 2].$$

Definição 7.4. Diz-se que dois conjuntos A e B *intersectam* se $A \cap B \neq \emptyset$. Diz-se que dois conjuntos A e B *não intersectam* ou *são disjuntos* se $A \cap B = \emptyset$.

7.6.3 Diferença e diferença simétrica ($\smallsetminus$ e $\triangle$)

Consideremos mais duas operações que podem ser definidos de dois métodos equivalentes: independentemente das operações básicas e por meio destas operações.

Definição 7.5. Sejam A, B conjuntos. O conjunto constituído de todos os elementos do A que não são elementos de B, chama-se *diferença* dos conjuntos A e B e designa-se

$$A \smallsetminus B$$

A mesma definição na forma simbólica é:

$$A \smallsetminus B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \colon x \in A \wedge x \notin B\}.$$

É claro que a operação diferença pode ser exprimida por meio das operações complemento e intersecção:

$$A \smallsetminus B = A \cap B^c.$$

Definição 7.6. Sejam A, B conjuntos. O conjunto constituído de todos os elementos que pertencem a um desses conjuntos e não pertencem a outro, chama-se *diferença simétrica* dos conjuntos A e B e denota-se por

$$A \triangle B$$

A mesma definição na forma abreviada é:

$$A \triangle B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \colon (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}.$$

Daqui segue directamente a definição formal da diferença simétrica:

$$A \triangle B = (A \smallsetminus B) \cup (B \smallsetminus A)$$

Exemplo 7.11. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3, 4\}$. Então,

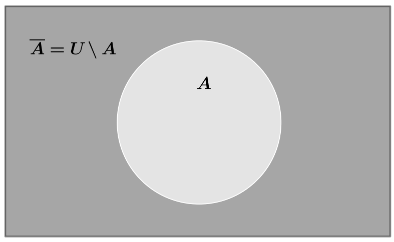
$$A \smallsetminus B = \{1\}, \qquad B \smallsetminus A = \{4\},$$
$$A \triangle B = \{1, 4\}.$$

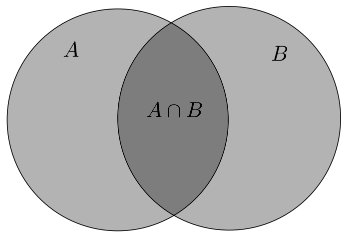
Exemplo 7.12. Sejam $A = [0, 2]$ e $B =]1, 3[$. Então,

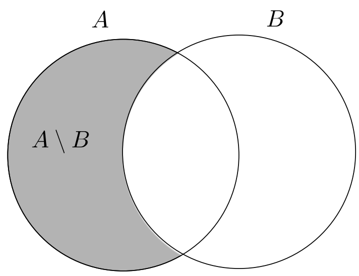
$$A \smallsetminus B = [0, 1], \qquad B \smallsetminus A =]2, 3[,$$
$$A \triangle B = [0, 1] \cup]2, 3[.$$

7.6.4 Diagramas de Venn

Como visualização das operações de conjuntos consideram-se diagramas chamadas *Diagramas de Venn*.

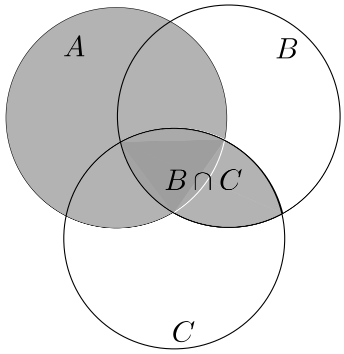






Exemplo 7.13. Visualize por meio do diagrama de Venn o conjunto $A \cup (B \cap C)$.

Resolução:



7.7 Lógica e teoria de conjuntos

7.7.1 Definição das operações sobre conjuntos usando conectivos

Como já foi dido, as operações sobre conjuntos definidas acima na forma de descrição, podem ser definidas de maneira simbólica usando Lógica (veja [2]). Assim,

$$A \subset B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x(x \in A \to x \in B),$$

$$A^c \overset{\text{def}}{=} \{x \colon x \notin A)\} = \{x \colon \neg(x \in A)\},$$

$$A \cup B \overset{\text{def}}{=} \{x \colon x \in A \vee x \in B\},$$

$$A \cap B \overset{\text{def}}{=} \{x \colon x \in A \wedge x \in B\},$$

$$A \smallsetminus B \overset{\text{def}}{=} \{x \colon x \in A \wedge \neg(x \in B)\}$$

$$A \triangle B \overset{\text{def}}{=} \{x \colon (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}.$$

A expressão simbólica da operação de diferença simétrica acima apresentada, não é única. Vejamos que

$$M \triangle N = \{x \colon \neg(x \in M \leftrightarrow x \in N)\}$$

Demonstremos a esta proposição.

$$\begin{array}{lll}
 & x \in M \triangle N & \\
\Leftrightarrow & x \in (M \smallsetminus N) \cup (N \smallsetminus M) & (\text{def. } \triangle) \\
\Leftrightarrow & x \in (M \smallsetminus N) \vee x \in (N \smallsetminus M) & (\text{def. } \cup) \\
\Leftrightarrow & (x \in M \wedge \neg(x \in N)) \vee & \\
 & \qquad (x \in N \wedge \neg(x \in M)) & (\text{def. } \smallsetminus) \\
\Leftrightarrow & \neg(x \in M \to x \in N) \vee & (\text{leis de Cond.1} \\
 & \qquad \neg(x \in N \to x \in M) & \quad \text{e Dupla Negação}) \\
\Leftrightarrow & \neg((x \in M \to x \in N) \wedge & \\
 & \qquad (x \in N \to x \in M)) & (\text{de Morgan}) \\
\Leftrightarrow & \neg(x \in M \leftrightarrow x \in N) & (\text{lei de Bicond.})
\end{array}$$

7.7.2 Relação entre conjuntos e predicados

Cada predicado (veja a Secção 3.1) é definido sobre um conjunto U que é o domínio do predicado. O conjunto

$$V_P = \{x \colon P(x)\}$$

diz-se *conjunto de verdade* do predicado $P(x)$.

Por outro lado, a cada conjunto A corresponde um predicado

$$P(x) = \{x \in A\}$$

tal que o conjunto de verdade do $P(x)$ coincide com o A.

Por exemplo, ao conjunto de todos os números primos corresponde o predicado

$$P(x) = \{x \text{ é um número primo}\}.$$

Daqui podemos concluir que existe vínculo forte entre predicados e conjuntos.

Sejam $P(x)$ e $Q(x)$ dois predicados com o mesmo domínio U. Então,

1. O conjunto de verdade do predicado $\neg P(x)$ é o complemento do conjunto de verdade do predicado $P(x)$:
$$V_{\neg P} = U \smallsetminus V_P.$$
2. O conjunto de verdade do predicado $P(x) \vee Q(x)$ é a união dos conjuntos de verdade de $P(x)$ e $Q(x)$:
$$V_{P \vee Q} = V_P \cup V_Q.$$
3. O conjunto de verdade do predicado $P(x) \wedge Q(x)$ é a intersecção dos conjuntos de verdade de $P(x)$ e $Q(x)$:
$$V_{P \wedge Q} = V_P \cap V_Q.$$

Então, destas relações podemos concluir que todas as leis de álgebra de proposições têm uma reflexão na teoria de conjuntos, aos conectivos correspondem as operações sobre conjuntos:

$$\begin{array}{l}
\vee \rightleftarrows \cup \\
\wedge \rightleftarrows \cap \\
\neg \rightleftarrows \text{complemento}
\end{array}$$

7.8 Exercícios

1. Seja $A = \{x, y, z\}$, $5 \in A$, $6 \in A$, $8 \in A$.
   (a) É possível encontrar os valores de x, y, z?
   (b) É possível encontrar os valores de x, y, z, sabendo que $x < y < z$?
2. Represente o conjunto A na forma de uma lista. Determine $|A|$.
   (a) $A = \{(-1)^n \colon n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{2, 3, -5\}\}$
   (b) $A = \{x \in \mathbb{N} \colon 4 < x < 12\}$
   (c) $A = \{n \in \mathbb{N} \cap [-1, 20] \colon n \text{ é primo}\}$
   (d) $A = \{n \in \mathbb{N} \smallsetminus [8, \infty[\colon n \text{ não é primo}\}$
   (e) $A = \{m \in \mathbb{N} \colon m < 9 \text{ é } m \text{ é divisor de } 64\}$
   (f) $A = \{3k \colon k \in \mathbb{Z} \cap] - 3, 4[\}$
   (g) $A = \{2n \colon 1 < n < 10 \text{ e } n \text{ é par}\}$
   (h) $A = \{(-2)^n \colon n \in \mathbb{Z} \cap [-2, 3]\}$

(i) $A = \mathcal{P}(\{a,b,c\}) \setminus \mathcal{P}(\{a,b\})$

(j) $A = \mathcal{P}(\{a,b,c\}) \cap \mathcal{P}(\{a,c,d,e\})$

(k) $A = \{(-1)^n : n \in \mathbb{Z} \setminus \{2,3,-5\}\}$

(l) $A = \mathcal{P}(\{a,b,c,d\}) \setminus \{\emptyset\}$

(m) $A = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a,b\}))$

3. Visualize por meio do diagrama de Venn os seguintes conjuntos: $A\cap B\cap C$, $A\cap(B\cup C)$, $(B\cup A)\cap C$, $A\setminus(B\cap C)$, $A\setminus(B\cup C)$, $A\cup(B\setminus C)$, $A\setminus(B\setminus C)$, $(A\setminus B)\setminus C$, $A\cup B\cup C$, $A\triangle(B\cap C)$, $A\triangle(B\cup C)$, $A\cap(B\triangle C)$, $A\cup(B\triangle C)$, $A\setminus(B\triangle C)$, $(A\setminus B)\triangle C$, $(A\triangle B)\triangle C$.

4. Encontrar os conjuntos

(a) $A\cup B$, $\quad A\cap C$

(b) $(A\cup B)\cap C^c$

(c) $A\setminus B$, $\quad C\setminus D$

(d) $B\triangle D$

e achar algumas representações dos conjuntos A, B, C, D usando propriedades características se

(a) O conjunto universal U é o conjunto de todos os números naturais,

$$
\begin{aligned}
A &= \{1,3,5,7,9,11\}\\
B &= \{2,3,5,7,11\}\\
C &= \{3,6,9,12\}\\
D &= \{2,4,8\}
\end{aligned}
$$

(b) $U=\mathbb{R}$, i.e. $\mathbb{R}$ é universo, $A=[0,2]$, $B=]3,5]$, $C=]2,\infty)$, $D=\{1,4\}$.

5. Seja $U=\{1,2,\ldots,9\}$ o conjunto universal, e sejam $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{2,4,5,6,8\}$, $D=\{1,4,8,9\}$. Encontre (liste) os seguintes conjuntos:

(a) $D^c\cup(A\setminus B)$

(b) $A^c\cap(B\cup D)$

(c) $D\triangle(A^c\cap B)$

(d) $(A\triangle B)\triangle D)$

(e) $((D\cup A)\cap B)^c$

6. Sejam $A=[-3,5[$, $B=[0,1]$ e $C=[-2,2[$. Esboce na recta numérica e escreva analiticamente o conjunto $(A\cap B)\cup C$.

7. Sejam $A=[0,\infty[$, $B=]-2,0]$ e $C=[-3,4]$. Marque na recta numérica e escreva analiticamente o conjunto $(A\setminus B)\cap C$.

8. Sejam $A=[1,5]$, $B=]1,8]$ e $C=]-\infty,0[$. Marque na recta numérica e escreva analiticamente o conjunto $(A\cup B)\setminus C$.

9. Sejam $A=[0,1[$, $B=[-1,5]$ e $C=[-3,9[$. Marque na recta numérica e escreva analiticamente o conjunto $(A\cup B)\cap C$.

10. Sejam $A=[-1,5]$, $B=[-2,0]$ e $C=[-1,4[$. Marque na recta numérica e escreva analiticamente o conjunto $(A\setminus B)\setminus C$.

11. Sejam $A=[0,\infty[$, $B=[5,\infty[$ e $C=[2,3]$. Marque na recta numérica e escreva analiticamente o conjunto $(A\triangle B)\cup C$.

12. Sejam $A=[0,1[$, $B=[2,5]$ e $C=]-9,9[$. Marque na recta numérica e escreva analiticamente o conjunto $(A\cap C)\triangle B$.

13. Achar uma representação dos conjuntos a seguir usando uma propriedade característica:

$$M=\{1,4,9,16,25,\ldots\}$$

$$
\begin{aligned}
P = \{&\text{Mercúrio, Vénus, Terra, Marte,}\\
&\text{Júpiter, Saturno, Urânio, Neptuno}\}
\end{aligned}
$$

14. Suponhamos que o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ é o conjunto universo. Listar os conjuntos

(a) $A=\{n\colon n^2<50\}$,

(b) $B=A\cap P$ onde P é o conjunto de todos os números primos.

(c) $C=\{n\colon n<20, n \text{é múltiplo de } 3\}$

(d) $D=A\setminus C$

15. Sejam F e G os conjuntos das raízes reais das equações $f(x)=x^3-3x^2+4x-12=0$ e $g(x)=x^2-5x+6=0$ respectivamente. Achar

(a) o conjunto das raízes reais da equação $f(x)g(x)=0$

(b) o conjunto das raízes reais da equação $f(x)^2+g(x)^2=0$

(c) o conjunto das raízes reais da equação $f(x)/g(x)=0$

16. Seja $U=\mathbb{N}\cup\{0\}$ o conjunto universo e

$$A=\{m^2+2n^2\colon m,n\in U\}.$$

Note que

$$A=\{p\colon \text{existem } m \text{ e } n \text{ tais que } p=m^2+2n^2\}$$

Verifique que $0,1,2,3,4,6,8,9\in A$, mas $5,7\notin A$.

17. Seja F o conjunto de todas as raízes da equação $f(x)=0$. O complemento F^c é o conjunto das soluções da $f(x)\neq 0$? Ou não? Pressupõe-se que o conjunto universal é $\mathbb{R}$.

18. Representar o conjunto $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a\}))$ na forma de uma lista.

19. Seja $\mathbb{N}$ o conjunto universo. Achar os conjuntos de verdade dos predicados

(a) $S(n)\equiv\{n \text{ é primo}\}$

(b) $P(n) \equiv \{n \text{ é um número par}\}$
(c) $A(n) \equiv \{n^2 < 100\}$
(d) $S(n) \wedge A(n)$
(e) $S(n) \vee A(n)$
(f) $\neg S(n)$
(g) $P(n) \to S(n)$
(h) $P(n) \leftrightarrow S(n)$

20. Determine as operações sobre conjuntos correspondentes às operações:

(a) Condicional $\to$
(b) Bicondicional $\leftrightarrow$

21* Entre todos os matemáticos cada sétimo é filósofo, entre todos os filósofos cada décimo é matemático. O que é maior, o número dos matemáticos ou filósofos?

Resposta: filósofos

22* Sobre uma circunferência são marcados 2010 pontos brancos e um ponto vermelho. Consideremos todos polígonos possíveis com vértices nesses pontos. Que número maior, o número dos polígonos com ponto vermelho ou sem ponto vermelho?

Resposta: com ponto vermelho

23* Entre dos 40 estudantes de uma turma 32 estudantes têm o livro *Lógica*, 21 estudantes têm o livro *Análise* e 15 estudantes têm ambos os livros. Quantos estudantes não têm nenhum livro dos dois?

Resposta: 2

24* Numa escola há 100 alunos. 65 alunos estudam Matemática, 45 estudam Electrónica, 42 estudam Direito, 20 estudam Matemática e Electrónica, 25 estudam Matemática e Direito e 15 estudam Electrónica e Direito. Quantos alunos estudam as três disciplinas? E só Electrónica?

Resposta: 8, 18

25* Numa sala há 12 homens. Alguns deles dizem sempre verdade, mas outros sempre mentira. Todos disseram uma frase. O primeiro disse: "Não existe nenhum homem que diz verdade", o segundo: "Não há mais do que um homem verdadeiro", o terceiro: "Não há mais de dois homens que dizem verdade", e etc, o décimo segundo: 'Não há mais de onze homens verdadeiros.' Determinar qual deles pertence ao conjunto de pessoas verdadeiras.

Resposta: $7^o, 8^o, \ldots, 12^o$

26* O professor deu a classe uma tarefa intrincada. Como resultado, quantidade dos meninos que resolveram a tarefa era igual ao número das meninas que não a resolveram. O que é maior, o número dos alunos que resolveram a tarefa ou o número das meninas?

Resposta: igual

Capítulo 8

Leis de teoria de conjuntos

8.1 Demonstração de inclusão e de identidade de conjuntos

Notemos que *para demonstrar a inclusão* $A \subset B$ é suficiente para qualquer $x \in A$ mostrar que $x \in B$ (i.e. demonstrar $x \in A \Rightarrow x \in B$). A forma simbólica da demonstração tem alguma analogia do raciocínio dedutivo.

Exemplo 8.2. Demonstrar que $(A \cup B) \cap A^c \subset B$.

Demonstração. Deve-se mostrar que $x \in (A \cup B) \cap A^c \Rightarrow x \in B$. Temos

$$\begin{array}{lll} & x \in (A \cup B) \cap A^c & \\ \Leftrightarrow & (x \in A \vee x \in B) \wedge \neg(x \in A) & (\text{def. } \cup, \cap, A^c) \\ \Rightarrow & x \in B & (\text{silogismo disj.}) \end{array}$$

Definição 8.1. Diz-se que os conjuntos A e B são *iguais* se são constituídos dos mesmos elementos, isto é

$$A = B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

Teorema 8.1. $A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A)$.

Demonstração.

$$\begin{array}{lll} & (A \subset B) \wedge (B \subset A) & \\ \Leftrightarrow & \forall x (x \in A \to x \in B) \wedge & \\ & \quad \forall (x \in B \to x \in A) & (\text{def. } \subset) \\ \Leftrightarrow & \forall x ((x \in A \to x \in B) \wedge & \\ & \quad (x \in B \to x \in A)) & (\text{teorema 3.2}) \\ \Leftrightarrow & \forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B) & (\text{lei bicond.}) \\ \Leftrightarrow & A = B & (\text{def. } =) \end{array}$$

□

Pelo Teorema 8.1, para demonstrar a igualdade de conjuntos $A = B$ é preciso demonstrar duas inclusões $A \subset B$ e $B \subset A$. Então, é preciso demonstrar duas implicações: $x \in A \Rightarrow x \in B$ e $x \in A \Rightarrow x \in B$, ou separadamente, ou, quando isto é possível, demonstrar juntos, isto é

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B.$$

Como na Álgebra, a igualdade de conjuntos que é válida para quaisquer conjuntos que estão na parte esquerda e direita da igualdade, chama-se *identidade* de conjuntos. Uma identidade de conjuntos e caso particular de *lei* da teoria de conjuntos. Uma *lei* pode ter a forma da inclusão (como no Exemplo 8.2) ou a forma de identidade (como nos exemplos abaixo)

Exemplo 8.7. Demonstrar que $A \setminus B = A \cap B^c$.

Demonstração.

$$\begin{array}{lll} & x \in A \setminus B & \\ \Leftrightarrow & x \in A \wedge \neg(x \in B) & (\text{def. } \setminus) \\ \Leftrightarrow & x \in A \wedge x \in B^c & (\text{def. complemento}) \\ \Leftrightarrow & x \in A \cap B^c & (\text{def. } \cap) \end{array}$$

Exemplo 8.8. Mostrar $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Demonstração.

$$\begin{array}{lll} & x \in A \triangle B & \\ \Leftrightarrow & x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) & (\text{def. de } \triangle) \\ \Leftrightarrow & (x \in A \wedge x \notin B) \vee & \\ & \quad (x \in B \wedge x \notin A) & (\text{def. de } \setminus, \cup) \\ \Leftrightarrow & (x \in A \vee x \in B) \wedge & \\ & \quad (x \notin B \vee x \in B) \wedge & \\ & \quad (x \in A \vee x \notin A) \wedge & \\ & \quad (x \notin B \vee x \notin A) & (\text{lei distr.}) \\ \Leftrightarrow & (x \in A \vee x \in B) \wedge T \wedge & \\ & \quad T \wedge \neg(x \in B \wedge x \in A) & (\text{Compl., Morgan}) \\ \Leftrightarrow & (x \in A \vee x \in B) \wedge & \\ & \quad \neg(x \in A \wedge x \in B) & (\text{Ident.,Comut.}) \\ \Leftrightarrow & x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B & (\text{def. de } \cup, \cap) \\ \Leftrightarrow & x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B) & (\text{def. de } \setminus) \end{array}$$

Exemplo 8.9. Mostrar $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

Demonstração.

$$\begin{array}{lll} & x \in A \setminus (A \cap B) & \\ \Leftrightarrow & x \in A \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B) & (\text{def. de } \cap, \setminus) \\ \Leftrightarrow & x \in A \wedge (x \notin A \vee x \notin B) & (\text{Morgan.}) \\ \Leftrightarrow & (x \in A \wedge x \notin A) \vee & \\ & (x \in A \wedge x \notin B) & (\text{distr.}) \\ \Leftrightarrow & C \vee (x \in A \wedge x \notin B) & (\text{lei de Compl.}) \\ \Leftrightarrow & x \in A \wedge x \notin B & (\text{lei de Ident.}) \\ \Leftrightarrow & x \in A \setminus B & (\text{def. de } \setminus) \end{array}$$

Exemplo 8.10. Demonstrar

$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C).$$

Demonstração.

$$\begin{array}{lll} & x \in (A \cap B) \smallsetminus (A \cap C) & \\ \Leftrightarrow & (x \in A \wedge x \in B) \wedge & \\ & \neg(x \in A \wedge x \in C) & \text{(def. de } \cap, \smallsetminus) \\ \Leftrightarrow & (x \in A \wedge x \in B) \wedge & \\ & (x \notin A \vee x \notin C) & \text{(Morgan.)} \\ \Leftrightarrow & ((x \in A \wedge x \in B) \wedge x \notin A) \vee & \\ & ((x \in A \wedge x \in B) \wedge x \notin C) & \text{(distr.)} \\ \Leftrightarrow & (Contr. \wedge x \in B) \vee & \\ & (x \in A \wedge (x \in B \wedge x \notin C)) & \text{(Com,Ass,Cont)} \\ \Leftrightarrow & x \in A \wedge (x \in B \wedge x \notin C) & \text{(leis de Ident.)} \\ \Leftrightarrow & x \in A \cap (B \smallsetminus C) & \text{(def. de } \cap, \smallsetminus) \end{array}$$

Recomendação: Interpretar e sentir as igualdades dos exemplos por meio dos diagramas de Venn.

8.2 Leis de álgebra de conjuntos

Suponhamos que todos os conjuntos são subconjuntos de um conjunto U dado (conjunto universal). A seguir são apresentadas as fórmulas que podem ser usadas como fórmulas básicas. Usando essas fórmulas podemos realizar transformações algébricas de maneira análoga como fazem-se transformações em álgebra de números. Pode-se demonstrar que o sistema apresentado é completo, isto é, pode ser tomado como um sistema de axiomas na base do qual podia ser deduzida uma fórmula qualquer. O sistema apresentado não é único, existem outros sistemas equivalentes.

1. Leis comutativas
   (a) $A \cup B = B \cup A$,
   (b) $A \cap B = B \cap A$
2. Leis associativas
   (a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,
   (b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3. Leis distributivas
   (a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
   (b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4. $A \cup A = A, \qquad A \cap A = A$
5. (a) $A \cup \emptyset = A$
   (b) $A \cup U = U$
   (c) $A \cap \emptyset = \emptyset$
   (d) $A \cap U = A$
6. $(A^c)^c = A$
7. $A \cup A^c = U, \qquad A \cap A^c = \emptyset$
8. $U^c = \emptyset, \quad \emptyset^c = U$
9. Leis de Morgan
   (a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,
   (b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
10. $A \smallsetminus B = A \cap B^c$
11. $A \triangle B = (A \cup B) \smallsetminus (A \cap B)$
12. $A \smallsetminus B = A \smallsetminus (A \cap B) = (A \cup B) \smallsetminus B$
13. $(A \cap B) \smallsetminus C = A \cap (B \smallsetminus C)$
14. $A \cup B = A \cup (B \smallsetminus A) = (A \smallsetminus B) \cup B = (A \cap B) \cup (A \triangle B)$

As leis 1-14 representam-se identidades dos conjuntos mais importantes. Um dos métodos de demonstração das leis foi apresentado na secção anterior. Vamos repetir este método e considerar um outro método de demonstração.

1^0 *método* (de raciocínio dedutivo). Para demonstrar a lei (identidade) da forma $A = B$ é suficiente demonstrar

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B.$$

do método de raciocínio dedutivo usando definições das operações de conjuntos e leis da Álgebra Lógica.

Observamos que este método foi usado para demonstração das leis 10, 11 e 12(1) nos Exemplos 8.7–8.8. Demonstramos, como exemplo, também a primeira lei de Morgan:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

Demonstração.

$$\begin{array}{lll} & x \in (A \cup B)^c & \\ \Leftrightarrow & \neg(x \in A \vee x \in B) & \text{(def. de compl., } \cup,) \\ \Leftrightarrow & \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B) & \text{(Morgan)} \\ \Leftrightarrow & x \in A^c \cap B^c & \text{(def. de compl., } \cap,) \end{array}$$

2^0 *método* (de transformações). A lei da forma $A = B$ demonstra-se pela cadeia (sequência) finita das identidades

$$A = M_1 = M_2 = \ldots = M_n = B$$

onde a cada passo deduzimos com base de uma lei de Teoria de Conjuntos, já conhecida.

Como exemplo, demonstramos a lei 11

$$A \triangle B = (A \cup B) \smallsetminus (A \cap B)$$

do método de transformações (veja a demonstração do método de raciocínio dedutivo no Exemplo 8.8).

Demonstração.

$$\begin{array}{lll} & A \triangle B & \\ = & (A \smallsetminus B) \cup (B \smallsetminus A) & \text{(def. de } \triangle,) \\ = & (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) & \text{(lei 10)} \\ = & (A \cup B) \cap (A \cup A^c) \cap & \\ & (B^c \cup B) \cap (B^c \cup A^c) & \text{(lei distr. duas vezes)} \\ = & (A \cup B) \cap U \cap U & \\ & \cap (A^c \cup B^c) & \text{(leis comut. e 7)} \\ = & (A \cup B) \cap (A \cap B)^c & \text{(leis 4,5 e de Morgan)} \\ = & (A \cup B) \smallsetminus (A \cap B) & \text{(lei 10)} \end{array}$$

A identidade do Exemplo 8.10

$$A \cap (B \smallsetminus C) = (A \cap B) \smallsetminus (A \cap C)$$

também demonstramos do método das transformações de dois modos diferentes:
Demonstração 1.

$$\begin{array}{lll} & (A\cap B)\setminus(A\cap C) & \\ = & (A\cap B)\cap(A\cap C)^c & \text{(lei 10)} \\ = & (A\cap B)\cap(A^c\cup C^c) & \text{(lei de Morgan)} \\ = & ((A\cap B)\cap A^c)\cup((A\cap B)\cap C^c) & \text{(distr.)} \\ = & (B\cap\emptyset)\cup(A\cap(B\cap C^c)) & \text{(leis com.,ass. e 7)} \\ = & A\cap(B\cap C^c) & \text{(leis 5)} \\ = & A\cap(B\setminus C) & \text{(lei 10)} \end{array}$$

Demonstração 2.

$$\begin{array}{lll} & A\cap(B\setminus C) & \\ = & (A\cap B)\setminus C & \text{(lei 13)} \\ = & (A\cap B)\setminus(A\cap B\cap C) & \text{(lei 12)} \\ = & A\cap(B\setminus(A\cap B\cap C)) & \text{(lei 13)} \\ = & A\cap(B\setminus(B\cap(A\cap C))) & \text{(leis com. e ass.)} \\ = & A\cap(B\setminus(A\cap C)) & \text{(lei 12)} \\ = & (A\cap B)\setminus(A\cap C) & \text{(lei 13)} \end{array}$$

Observação. O método de raciocínio dedutivo é mais universal do que método das transformações, mas, quando é possível usar o segundo, ele é, como regra, mais racional do que primeiro.

Exemplo 8.11. (Exercício 9(a) em [L]). Demonstrar

$$A\cap(B\triangle C)=(A\cap B)\triangle(A\cap C).$$

Demonstração.

$$\begin{array}{lll} & A\cap(B\triangle C) & \\ = & A\cap((B\setminus C)\cup(C\setminus B)) & \text{(def. de }\triangle) \\ = & (A\cap(B\setminus C))\cup(A\cap(C\setminus B)) & \text{(lei distr.)} \\ = & ((A\cap B)\setminus(A\cap C))\cup & \\ & \quad((A\cap C)\setminus(A\cap B)) & \text{(Ex. 8.10)} \\ = & (A\cap B)\triangle(A\cap C) & \text{(def. de }\triangle) \end{array}$$

8.3 Exercícios

1. Demonstre que

$$A\subset B\Leftrightarrow A\cup B=B\Leftrightarrow A\cap B=A.$$

Resolução: Temos uma proposição na forma de duas equivalências, mas não na forma de uma identidade ou de uma inclusão de conjuntos. Então, é preciso de demonstrar cada uma das equivalências, não apenas aplicando os esquemas formais do primeiro ou do segundo método descritos na parte teórica, estes esquemas vamos usar só nos alguns passos da demonstração. Observamos, que intuitivamente ambas equivalências são evidentes (basta olhas os diagramas de Venn correspondentes). Antes da realizar a demonstração, vamos formular a provar dois lemas auxiliares cuja veracidade intuitivamente é evidente

Lema 1. $A\subset A\cup B$ e $B\subset A\cup B$.

Demonstração.

$$\begin{array}{lll} & x\in A & \\ \Rightarrow & x\in A\vee x\in B & \text{(lei de adição)} \\ \Leftrightarrow & x\in A\cup B & \text{(def. de }\cup) \end{array}$$

A segunda inclusão segue da primeira e da lei comutativa: $A\cup B=B\cup A$. □

Lema 2. $A\cap B\subset A$ e $A\cap B\subset B$.

Demonstração.

$$\begin{array}{lll} & x\in A\cap B & \\ \Leftrightarrow & x\in A\wedge x\in B & \text{(def. de }\cap,) \\ \Rightarrow & x\in A & \text{(lei de simplificação)} \end{array}$$

A segunda inclusão segue da primeira e da lei comutativa: $A\cap B=B\cap A$. □

I. Demonstramos $A\subset B\Leftrightarrow A\cup B=B$.

1) Primeiro, provamos $A\subset B\Rightarrow A\cup B=B$.

Seja $A\subset B$.

(a) A inclusão $B\subset A\cup B$ segue do Lema 1.

(b) Demonstramos à inclusão $A\cup B\subset B$ do método de raciocínio dedutivo (é conveniente usar a linguagem matemática mista, e não apenas esquema formal).

Seja $x\in A\cup B$. Então, pela definição $x\in A$ ou $x\in B$.

Caso 1. Seja $x\in A$. Da inclusão $A\subset B$ segue $(x\in A)\to(x\in B)$. Então (pelo lei de modus Ponens) $x\in B$.

Caso 2. Seja $x\in B$. A proposição $x\in B$ é imediata.

A inclusão $A\cup B\subset B$ está demonstrada.

Das inclusões em (a) e (b) segue $A\subset B\Rightarrow A\cup B=B$.

2) Em segundo, provamos $A\cup B=B\Rightarrow A\subset B$.

Seja $A\cup B=B$.

Demonstramos a inclusão $A\subset B$ usando o método do raciocínio dedutivo (esquema formal).

$$\begin{array}{lll} & x\in A & \\ \Rightarrow & x\in A\cup B & \text{(Lema 1)} \\ \Leftrightarrow & x\in B & \text{(porque }A\cup B=B) \end{array}$$

Das implicações demonstradas em 1) e 2) segue $A\subset B\Leftrightarrow A\cup B=B$.

II. Demonstramos $A\subset B\Leftrightarrow A\cap B=A$. Assim, segundo lei de transitividade, a proposição do exercício será demonstrada completamente. Queremos oferecer os próprios alunos de realizar a prova. Esta prova é análoga da demonstração da primeira equivalência, com o uso do Lema 2 em vez do Lema 1.

2. Demonstre que $A\subset B^c$ se e somente se os conjuntos A e B são disjuntos.

3. Demonstre que $A\setminus B=A$ se e somente se os conjuntos A e B são disjuntos.

4. Demonstre que $A\triangle B=\emptyset$ se e somente se $A=B$.

5. Demonstre que para quaisquer conjuntos A, B, C:
   (a) $A^c \setminus B = (A \cup B)^c$
   (b) $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$
   (c) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$
   (d) $(A \triangle B)^c = (A \cap B) \cup (A \cup B)^c$
   (e) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
   (f) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
   (g) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
   (h) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$

6. É verdade que a igualdade é válido para quaisquer subconjuntos A, B, C de um conjunto universo U? No caso *sim* demonstre, mas no caso *não* apresente um contra-exemplo.
   (a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$
   (b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$
   (c) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
   (d) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$
   (e) $A \setminus (B \setminus A) = A$
   (f) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$
   (g) $A \setminus (A \setminus B) = B$
   (h) $A^c \setminus B^c = B \setminus A$
   (i) $A \cup (B \triangle C) = (A \cup B) \triangle (A \cup C)$
   (j) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
   (k) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
   (l) $\mathcal{P}(A \setminus B) = \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$

   Resposta. não, não, não, não, sim, sim, não, sim, não, sim, não, não

7. Demonstrar as leis de Morgan

8. Provar a generalização da lei de Morgan

$$(A \cap B \cap C)^c = A^c \cup B^c \cup C^c$$

9. Demonstrar as seguintes leis:
   (a) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$
   (b) $A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (B \triangle C)$
   (c) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$

   Resolução do Exercício 9b. Primeiro, demonstramos três proposições auxiliares nos quais os conjuntos são arbitrários.

   Proposição A. $A \cap B \subset A$.

   Veja a prova do Lema 2 na resolução do exercício 1.

   Proposição B.

$$(A \subset C) \wedge (B \subset D) \Rightarrow A \cup B \subset C \cup D.$$

   Demonstração. Seja $(A \subset C) \wedge (B \subset D)$. Seja $x \in A \cup B$. Então, $(x \in A) \vee (x \in B)$.

   1^o *caso.* Seja $x \in A$. Como $A \subset C$ temos $x \in C$. Então, $x \in C \cup D$.

   2^o *caso.* Seja $x \in B$. Como $B \subset D$ temos $x \in D$. Então, $x \in C \cup D$.

   Proposição C. $A \setminus B \subset (A \setminus C) \cup (C \setminus B)$.

   Demonstração.

$$\begin{array}{lll}
 & A \setminus B & \\
= & A \cap B^c & \text{(lei 10)} \\
= & A \cap B^c \cap (C \cup C^c) & \text{(leis 7,5)} \\
= & ((A \cap B^c) \cap C) \cup ((A \cap B^c) \cap C^c) & \text{(distr.)} \\
= & ((A \cap C^c) \cap B^c) \cup ((C \cap B^c) \cap A) & \text{(comut. e ass.)} \\
\subset & (A \cap C^c) \cup (C \cap B^c) & \text{(Prop. A,B)} \\
= & (A \setminus C) \cup (C \setminus B) & \text{(lei 10)}
\end{array}$$

   Agora, demonstramos a inclusão do Exercício 8b.

$$\begin{array}{lll}
 & A \triangle B & \\
= & (A \setminus B) \cup (B \setminus A) & \text{(def. de } \triangle) \\
\subset & ((A \setminus C) \cup (C \setminus B)) \cup & \\
 & ((B \setminus C) \cup (C \setminus A)) & \text{(Prop. C,B)} \\
= & ((A \setminus C) \cup (C \setminus A)) \cup & \\
 & ((B \setminus C) \cup (C \setminus B)) & \text{(comut. e ass.)} \\
= & (A \triangle C) \cup (A \triangle C) & \text{(def. de } \triangle)
\end{array}$$

Capítulo 9

Produto directo. Famílias indexadas.

9.1 Produto directo ou cartesiano

Sejam S e T dois conjuntos arbitrários. Consideremos um par ordenado (s,t) onde $s \in S$, $t \in T$ são elementos arbitrários destes conjuntos. O conjunto de todos os pares ordenados chama-se produto directo (ou cartesiano) e designa-se

$$S \times T = \{(s,t)\colon s \in S \wedge t \in T\}.$$

Se $S = T$ escreve-se também $S \times S = S^2$.

Exemplo 9.1. Sejam $S = \{1,2,3,4\}$, $T = \{a,b,c\}$. Produto $S \times T$ consiste das 12 pares ordenados:

$$\begin{array}{cccc} (1,a) & (2,a) & (3,a) & (4,a) \\ (1,b) & (2,b) & (3,b) & (4,b) \\ (1,c) & (2,c) & (3,c) & (4,c). \end{array}$$

Exemplo 9.2. Sejam $M = [0,1]$, $N = (0,2)$. O produto $M \times N$ é o conjunto

$$\{(x,y)\colon 0 \le x \le 1, 0 < y < 2\}.$$

Então, podemos imaginar este conjunto geometricamente como o rectângulo com os lados 1 e 2. Notemos que dos lados direita e esquerda o rectângulo é fechado, mas em cima e em baixo é aberto.

Em caso geral $S \times T \ne T \times S$.

Para o número de elementos do conjunto S usa-se a designação $|S|$. É claro que

$$|S \times T| = |S| \cdot |T|.$$

Generalização:

$$\begin{aligned} &S_1 \times \ldots \times S_n \\ &\quad = \{(s_1, s_2, \ldots, s_n)\colon s_k \in S_k,\ k = 1,2,\ldots,n\}. \end{aligned}$$

No caso

$$S_1 = S_2 = \ldots = S_n = S$$

usa-se designação

$$S \times S \times \ldots \times S = S^n.$$

9.2 Famílias indexadas de conjuntos

Na preparação da materia do presente paragrafo foi usado manual [2] e manual
http://ltodi.est.ips.pt/amati-sem2/sebentas/Logica_TC.pdf

Definição 9.1. Seja I um conjunto. Suponhamos que a cada $i \in I$ associamos um conjunto A_i. Diz-se que

$$\{A_i\colon i \in I\}$$

é uma *família indexada de conjuntos*, sendo I o *conjunto dos índices.*

Uma família de conjuntos diz-se *não vazia* se o conjunto dos índices for não vazio (mas não impede que um dos elementos da família seja o conjunto vazio).

O conjunto dos indexes pode ser finito ou infinito, e, respectivamente, a mesma família indexada de conjuntos indexados é familia finita ou infinita.

1. No caso da familia finita é confortável como um conjunto de índices usar os primeiros números naturais, a partir de 1. Por exemplo, a familia de n conjuntos diferentes pode ser indexada por meio do conjunto de índices $I = \{1,2,\ldots,n\}$, tal que a família tem a forma

$$\{A_i\colon i = 1,2,\ldots,n\} = \{A_i\colon i = \overline{1,n}\}.$$

Exemplo 9.3. Indexar a família de conjuntos

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \mathbb{N}, \mathbb{Z}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$$

(onde $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$) pode-se da seguinte maneira:

$$\mathcal{F} = \{A_i\colon i = 1,2,3,4,5,6\}$$

onde $A_1 = \emptyset$, $A_2 = \mathbb{N}$, $A_3 = \mathbb{Z}_0$, $A_4 = \mathbb{Z}$, $A_5 = \mathbb{Q}$ e $A_6 = \mathbb{R}$.

Notemos que a nossa família indexada satisfaz a propriedade:

$$A_i \subset A_{i+1}$$

Em geral, uma família indexada de conjuntos que satisfaz a esta propriedade, chama-se família *monótona.* É claro que é possível indexar a família $\mathcal{F}$ de outra maneira (neste caso obtemos a família não monótona).

2. Para indexar uma família de conjuntos infinita usam-se vários conjuntos dos índices. Se a família é enumerável (existe correspondência biunívoca entre elementos da família e $\mathbb{N}$), então, como regra, usam-se conjuntos dos índices $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_0$ ou $\mathbb{Z}$ (mas não sempre só estes!).

Exemplo 9.4. A cada $n \in \mathbb{N}$ associemos o cubo $C_n = [0, n]^3$ (faça o esboço!). Obtemos assim a família indexada
$$\{C_n : n \in \mathbb{N}\}.$$
Notemos que esta família é monótona.

Exemplo 9.5. A cada $n \in \mathbb{Z}_0$ associemos o conjunto $A_n = \{-n, n\}$. Obtemos assim a família indexada
$$\{\{-n, n\} : n \in \mathbb{Z}_0\}$$
que tem o número enumerável de conjuntos, um dos quais só tem um elemento, o conjunto $A_0 = \{0\}$, sendo todos os restantes dois elementos (que são simétricos um de outro, segundo interpretação na recta numérica).

Exemplo 9.6. A cada $n \in \mathbb{Z}$ associemos o conjunto $U_n = \left[n, n + 2^{-|n|}\right)$. Obtemos assim a família indexada
$$\mathcal{A} = \{U_n : n \in \mathbb{Z}\}$$

Notemos, que a família $\mathcal{A}$ satisfaz a propriedade
$$A_i \cap A_j = 0 \quad (i \neq j).$$

Em geral, se os conjuntos de uma família satisfazem a esta propriedade, dizem que os conjuntos da família são *disjuntos dois a dois*. Neste caso a mesma família chama se *disjunta*.

Exemplo 9.7. A cada $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ associemos o subconjunto $D_{m,n} = [m, 2m] \times [n, 2n]$ do conjunto $\mathbb{R}^2$ (rectângulo fechado, faça o esboço!). Obtemos assim a família indexada
$$\{D_{m,n} : m, n \in \mathbb{N}\} = \{D_{m,n} : (m, n) \in \mathbb{N}^2\}$$
(indexada por meio dos índices *duplos*).

3. Apresentemos um exemplo da família indexada de conjuntos que não é enumerável.

Exemplo 9.8. A cada $r > 0$ associemos o conjunto $B_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < r^2\}$. Obtemos assim a família indexada
$$\{B_r : r \in (0, \infty)\}$$
constituída de todos os círculos abertos com centros na origem das coordenadas.

9.2.1 Generalização das operações de união e intersecção

Definição 9.2. Seja $\mathcal{F}$ uma família arbitrária de conjuntos. Define-se a *união* desta família, que se denota por
$$\cup\mathcal{F} \quad \text{ou} \quad \cup_{A\in F} A \quad \text{ou} \quad \bigcup_{A\in F} A,$$
do seguinte modo:
$$\bigcup_{A\in F} A = \{x : \exists(A \in \mathcal{F})\ x \in A\}$$
(o conjunto dos elementos cada um dos quais pertence, pelo menos, a um conjunto da família $\mathcal{F}$).

No caso da família indexada $\{A_i : i \in I\}$ para união desta família (união de todos os conjuntos da família) usa-se também a designação
$$\bigcup_{i\in I} A_i.$$
É claro que
$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x : \exists(i \in I)\ x \in A_i\}$$
Em particular, quando $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, pode-se usar as designações
$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n,$$
e quando $I = \mathbb{N}$ as designações
$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$$

Definição 9.3. Seja $\mathcal{F}$ uma família arbitrária de conjuntos. Define-se a *intersecção* desta família, que se denota por
$$\cap\mathcal{F} \quad \text{ou} \quad \cap_{A\in F} A \quad \text{ou} \quad \bigcap_{A\in F} A,$$
do seguinte modo:
$$\bigcap_{A\in F} A = \{x : \forall(A \in \mathcal{F})\ x \in A\}$$
(o conjunto dos elementos cada um dos quais pertence a todos conjuntos da família $\mathcal{F}$).

No caso da família indexada $\{A_i : i \in I\}$ para intersecção desta família (intersecção de todos os conjuntos da família) usa-se também a designação
$$\bigcap_{i\in I} A_i.$$
É claro que
$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x : \forall(i \in I)\ x \in A_i\}$$
Em particular, quando $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, pode-se usar as designações
$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n,$$
e quando $I = \mathbb{N}$ as designações
$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \ldots$$

Teorema 9.1. *Para qualquer família indexada de conjuntos $\{A_i : i \in I\}$ são válidas as seguintes proposições:*
$$\forall(i \in I) \quad A_i \subset B \quad \Leftrightarrow \quad \bigcup_{i\in I} A_i \subset B,$$
$$B \subset \bigcap_{i\in I} A_i \quad \Leftrightarrow \quad \forall(i \in I) \quad B \subset A_i.$$

Exemplo 9.9. Para família $\{\{-n, n\} : n \in \mathbb{Z}_0\}$ do Exemplo 9.5 temos
$$\bigcup_{n=0}^{\infty}\{-n, n\} = \mathbb{Z}, \quad \bigcap_{n=0}^{\infty}\{-n, n\} = \emptyset.$$

Exemplo 9.10. Demonstre que $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n},1\right]=]0,1]$.

Resolução. Sejam $A_n=\left[\frac{1}{n},1\right]$ $(n\in\mathbb{N})$. É claro que $A_n\subset]0,1]$ qualquer que seja $n\in\mathbb{N}$. Pelo Teorema 9.1,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset]0,1]. \tag{9.1}$$

Reciprocamente, seja $x\in]0,1]$. Então, existe $m\in\mathbb{N}$ (suficientemente grande) tal que $\frac{1}{m}<x$. Temos que $x\in A_m$. Pela definição da união, $x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$. Pela definição da inclusão,

$$]0,1]\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n. \tag{9.2}$$

Das inclusões (9.1) e (9.2) implica a igualdade que queriam demonstrar.

9.2.2 Leis generalizadas

Algumas leis de álgebra de conjuntos admitem generalização para famílias de conjuntos. Apresentamos estas leis conservando a numeração da Secção 6.6 de [L].

Sejam U conjunto universo e B um subconjunto de U. Seja $\{A_i\ i\in I\}$ uma família de conjuntos arbitrária. Observamos, primeiro, que para uniões e intersecções das famílias de conjuntos são válidas leis comutativa e associativa (a formulação destas leis é evidente).

3* Leis distributivas generalizadas

(a) $B\cup\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)=\bigcap_{i\in I}(B\cup A_i)$

(b) $B\cap\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)=\bigcup_{i\in I}(B\cap A_i)$

9* Leis de Morgan generalizadas

(a) $\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)^c=\bigcap_{i\in I}A_i^c$

(b) $\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)^c=\bigcup_{i\in I}A_i^c$

Demonstração da lei 9*(a).

$$\begin{array}{lll}
 & x\in\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)^c & \\
\Leftrightarrow & \neg\left(x\in\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)\right) & \text{(def. de compl.)}\\
\Leftrightarrow & \neg\exists(i\in I)\ x\in A_i & \text{(def. de }\cup)\\
\Leftrightarrow & \forall(i\in I)\ x\notin A_i & \text{(Morgan)}\\
\Leftrightarrow & \forall(i\in I)\ x\in A_i^c & \text{(def. de compl.)}\\
\Leftrightarrow & x\in\bigcap_{i\in I}A_i^c & \text{(def. de }\cap)
\end{array}$$

9.3 Exercícios

1. Sejam $A=\{a,b,c\}$, $B=\{a,b,d\}$
   (a) Formar uma lista de todos os elementos dos conjuntos $A\times A$, $A\times B$
   (b) Formar uma lista de todos os elementos do conjunto $\{(x,y)\in A\times B\colon x=y\}$

2. Represente o conjunto na forma de uma lista. Determine $|A|$.
   (a) $A=(\mathbb{N}\cap[1,3])\times(\mathbb{Z}\cap[-2,-1])$
   (b) $A=(\mathbb{Z}\cap]-2,3])^2$

3. Sejam $A=[0,2]$, $B=[2,3[$, $C=]1,2[$. Achar e construir os produtos directos
$$A\times B,\ (A\setminus C)\times(B\setminus C).$$

4. Sejam $A=[0,3]$, $B=[1,4]$. Construir o conjunto
$$\{(x,y)\in A\times B\colon y>x^2\}.$$

5. Sejam $A=\{a,b,c\}$, $B=\{3,5\}$, $C=\{4,5\}$. Achar
   (a) $A\times(B\cup C)$
   (b) $A\times(B\cap C)$
   (c) $(A\times B)\cup(A\times C)$
   (d) $(A\times B)\cap(A\times C)$

6. Seja $U=\{1,2,\ldots,9\}$ o universo, e sejam $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{2,4,5,6,8\}$, $D=\{1,4,8,9\}$. Encontre (liste) os seguintes conjuntos:
   (a) $(A\cap B)\times D$
   (b) $(A\setminus D)\times B$
   (c) $(A\times B)\setminus D^2$
   (d) $(A\setminus B)\times D^c$
   (e) $(D\times B)\cap A^2$
   (f) $A^2\triangle B^2$
   (g) $(A\cap B)\times(D\setminus A)$

7. Sejam $A=[-3,5[$, $B=[0,1]$ e $C=[-2,2[$. Esboce no plano cartesiano e escreva analiticamente sem o uso das operações de conjuntos diferentes de $\times$ e $\cup$, o conjunto $(A\times B)\cap(C\times A)$.

8. Sejam $A=[1,5]$, $B=]1,8]$ e $C=]-\infty,0[$. Esboce no plano cartesiano e escreva analiticamente sem o uso das operações de conjuntos diferentes de $\times$ e $\cup$, o conjunto $(B\times B)\cap(A\times C)$.

9. Sejam $A=[-1,5]$, $B=[-2,0]$ e $C=[-1,4[$. Esboce no plano cartesiano e escreva analiticamente sem o uso das operações de conjuntos diferentes de $\times$ e $\cup$, o conjunto $(A\times A)\setminus(B\times B)$.

10. Sejam $A=]1,5[$, $B=[-3,0]$ e $C=[-1,\infty[$. Esboce no plano cartesiano e escreva analiticamente sem o uso das operações de conjuntos diferentes de $\times$ e $\cup$, o conjunto $(A\times B)\setminus(B\times A)$.

11. Sejam $A=[-5,5[$, $B=]1,8]$ e $C=]-1,1[$. Esboce no plano cartesiano e escreva analiticamente sem o uso das operações de conjuntos diferentes de $\times$ e $\cup$, o conjunto $(A\times B)\triangle(B\times B)$.

12. Sejam $A = [-1, 3]$, $B = [1, 5]$ e $C = \{0, 1, 2\}$. Esboce no plano cartesiano e escreva analiticamente sem o uso das operações de conjuntos diferentes de $\times$ e $\cup$, o conjunto $(A \times B) \triangle (B \times A)$.

13. Sejam $A = [0, 1[$, $B = [2, 5]$ e $C =]-9, 9[$. Esboce no plano cartesiano e escreva analiticamente sem o uso das operações de conjuntos diferentes de $\times$ e $\cup$, o conjunto $(B \times B) \setminus (A \times C)$.

14. Seja $A = B \cap C$. Mostrar que

    (a) $A \times A = (B \times B) \cap (C \times C)$

    (b) $A \times A = (B \times C) \cap (C \times B)$

15. Demonstre a lei:

    (a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

    (b) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

    (c) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$

    (d) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$

    (e) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$

    (f) $A \times (B \triangle C) = (A \times B) \triangle (A \times C)$

    (g) $(A \cap B)^2 = A^2 \cap B^2$

    (h) $(A \cap B)^2 = (A \times B) \cap (B \times A)$

16. Demonstre ou refute (dando um contra-exemplo):

    (a) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$

    (b) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$

    (c) $A^2 \setminus B^2 = (A \setminus B)^2$

17. Num baile todos os cavalheiros dançavam com exactamente três senhoras, e cada senhora dançava com exactamente três pretendentes. Prove que os números das senhoras e dos senhores eram iguais.

    Sugestão. Use a noção do produto cartesiano.

18. Descreve geometricamente o produto directo de um segmento a uma circunferência.

19. Sejam $A_1 = \{a, b, c, d\}$, $A_2 = \{b, c, d\}$, $A_3 = \{a, b, c\}$ e $A_4 = \{a, b\}$. Encontre os conjuntos $\cup_{n=1}^{4} A_n$ e $\cap_{n=1}^{4} A_n$.

    Resposta. A_1, $\{b\}$.

20. Sejam $M_n = \{1, 2, \dots n\}$ $(n \in \mathbb{N})$. Encontre os conjuntos

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n^c, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n^c$$

    (o conjunto universo é $\mathbb{N}$).

    Resposta. $\mathbb{N}$, $\{1\}$, $\mathbb{N} \setminus \{1\}$, $\emptyset$.

21. Simplificar (escrever sem operações $\cap$ e $\cup$) os seguintes conjuntos:

    (a) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left]0, \frac{1}{n}\right[$

    (b) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[0, \frac{1}{n}\right]$

    (c) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[0, \frac{1}{n}\right]$

    (d) $\bigcup_{n=1}^{\infty} [2^{-n}, 1 - 2^{-n}]$

    (e) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left]-\frac{1}{n^2}, 3 + \frac{1}{n+5}\right[$

    (f) $\bigcap_{n=1}^{9} \left[0, \frac{1}{n}\right]$

    (g) $\bigcup_{n=2013}^{\infty} [-n, \ln n]$

    (h) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{1}{n}, 3 + \frac{3}{n}\right]$

    (i) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{1}{n}, 3 + \frac{3}{n}\right[$

    Resposta. $\emptyset$, $\{0\}$, $[0, 1]$, $]0, 1[$, $[0, 3]$, $\left[0, \frac{1}{9}\right]$, $\mathbb{R}$, $]1, 6]$, $[2, 3]$.

22. Demonstrar as leis distributivas generalizadas.

23. Demonstrar as seguintes leis usando o método das transformações:

    (a) $B \setminus (\cup_{i \in I} A_i) = \cap_{i \in I} (B \setminus A_i)$,

    (b) $B \setminus (\cap_{i \in I} A_i) = \cup_{i \in I} (B \setminus A_i)$.

Tema III

Relações e Funções

Capítulo 10

Relações

10.1 Predicados de duas variáveis

Seja $P(x, y)$ um predicado de dias variáveis proposicionais x e y definidas sobre os conjuntos A e B respectivamente (tal que $x \in A$ e $y \in B$).

O conjunto de verdade

$$V_P = \{(x, y) \colon P(x, y)\}$$

é um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$. Predicados de duas variáveis podem ser determinados por meio de diferentes relações. Por exemplo a relação de desigualdade $x < y$ determina o predicado "menor"

$$M(x, y) \equiv \{x < y\},$$

a relação de divisibilidade

$$a \text{ é um divisor do } b$$

determina o predicado

$$D(a, b) \equiv \{a \text{ é um divisor do } b\}.$$

Notemos que $D(5, 15)$ e $D(5, 5)$ são proposições verdadeiras, mas $D(15, 5)$ e $D(3, 5)$ são falsas.

Exemplo 10.1. Achar o conjunto de verdade do predicado $M(x, y)$.

O conjunto de verdade do predicado $M(x, y)$ definido sobre o produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é o conjunto

$$V_M = \{(x, y) \colon x < y\}.$$

Este conjunto pode ser representado geometricamente por meio do semiplano situado por cima da recta $y = x$.

Nos exemplos considerados uma relação determina um predicado de duas variáveis. Mais, o predicado tem um conjunto de verdade que descreve o predicado completamente. Podemos notar que o conjunto de verdade do predicado descreve completamente e a relação dada.

10.2 Relação

O vínculo entre conjuntos, predicados e relações sugere introduzir uma definição de relação qualquer usando conjuntos.

Definição 10.1 (Relação)**.** Sejam A e B dois conjuntos. Qualquer subconjunto $R \subset A \times B$ diz-se *relação de A para B.*

Notemos que R pode ser chamada *relação binária.*

A relação R determina o predicado

$$R(x, y) \equiv \{(x, y) \in R\}$$

tal que o conjunto de verdade do predicado coincide com o conjunto R.

Exemplo 10.2. Seja U um conjunto universal. Consideremos a relação de inclusão $\subset$. Para dois conjuntos A e B a relação $A \subset B$ pode ser verdadeira ou falsa. Os conjuntos A e B são elementos do $\mathcal{P}(U)$. O conjunto

$$\{(A, B) \colon A \subset B\} \subset \mathcal{P}(U) \times \mathcal{P}(U)$$

é a relação de inclusão.

Mais uma relação $\in$ pode ser representada por meio do conjunto

$$\{(x, A) \colon x \in A\} \subset U \times \mathcal{P}(U).$$

Exemplo 10.3. A relação de paralelismo $\parallel$ sobre o conjunto C de todas as rectas do plano é o conjunto

$$\{(a, b) \colon a \parallel b\} \subset C \times C.$$

Definição 10.2 (Domínio)**.** Seja R uma relação de A para B. O *domínio* da R é o conjunto

$$\mathrm{Dom}(R) = \{x \in A \colon \exists y \in B((x, y) \in R)\}$$

Definição 10.3 (Imagem)**.** Seja R uma relação de A para B. A *imagem* da R é o conjunto

$$\mathrm{Im}(R) = \{y \in B \colon \exists x \in A((x, y) \in R)\}$$

Definição 10.4 (Relação inversa)**.** Seja R uma relação de A para B. A relação inversa da R é a relação de B para A designada por R^{-1} e definida pela fórmula

$$R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \colon (x, y) \in R\}$$

Por exemplo, a relação inversa para a relação de desigualdade "é menor"é a relação "é maior". Se

$$M = \{(x, y) \colon x < y\}$$

então

$$M^{-1} = \{(x, y) \colon x > y\}.$$

Definição 10.5 (Composição de relações)**.** Sejam R uma relação de A para B e S uma relação de B para C. A composição $S \circ R$ das relações R e S é

$$S \circ R = \{(x,z) \in A \times C \colon \\ \exists y \in B((x,y) \in R \wedge (y,z) \in S)\}$$

Teorema 10.1. *Sejam $R \subset A \times B$, $S \subset B \times C$, $T \subset C \times D$ relações binárias. Então:*

1. $(R^{-1})^{-1} = R$
2. $\mathrm{Dom}(R^{-1}) = \mathrm{Im}(R)$
3. $\mathrm{Im}(R^{-1}) = \mathrm{Dom}(R)$
4. $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$
5. $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$

Exemplo 10.4. Sejam S o conjunto de todos os estudantes, R o conjunto dos quartos, P o conjunto de todos os professores e C o conjunto de todas as cadeiras. Sejam $L \subset S \times R$, $E \subset S \times C$ e $T \subset C \times P$ as relações definidas a seguir

$$L = \{(s,r) \colon \text{o estudante } s \text{ vive no quarto } r\}$$
$$E = \{(s,c) \colon \text{o estudante } s \text{ faz a cadeira } c\}$$
$$T = \{(c,p) \colon \text{a cadeira } c \text{ é ministrada pelo professor } p\}$$

1. Descrever os domínios das relações L, E, T
2. Descrever as relações
   (a) E^{-1}
   (b) $E \circ L^{-1}$
   (c) $E^{-1} \circ E$
   (d) $E \circ E^{-1}$
   (e) $T \circ (E \circ L^{-1})$
   (f) $(T \circ E) \circ L^{-1}$

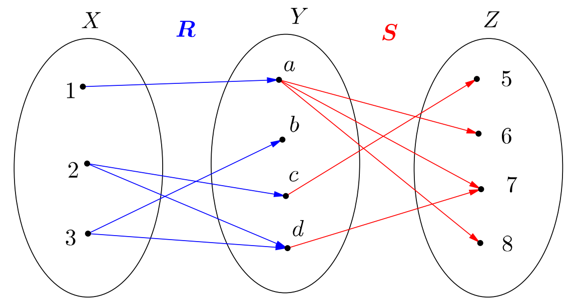
10.3 Interpretações geométricas

No caso de conjuntos finitos A e B as relações de A para B podem ser representadas por meio de diagramas, onde a cada $(x,y) \in R$ corresponde um arco orientado que sai de um ponto do A e chega a um ponto do B.

As relações de A para A podem ser chamadas relações em A. Neste caso uma relação $R \subset A \times A$ pode ser representado por meio de um grafo orientado em A.

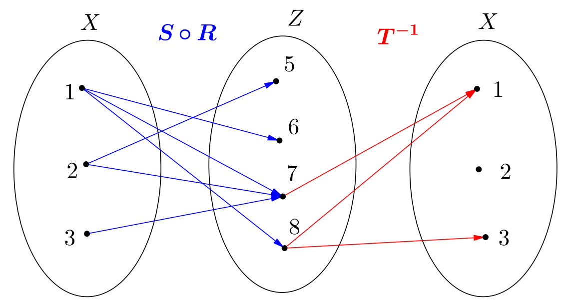
Exemplo 10.5. Sejam $X = \{1,2,3\}$, $Y = \{a,b,c,d\}$, $Z = \{5,6,7,8\}$, e as relações $R \subset X \times Y$ e $S \subset Y \times Z$, $T \subset X \times Z$ são $R = \{(1,a),(2,c),(2,d),(3,b),(3,d)\}$, $S = \{(a,6),(a,7),(a,8),(c,5),(d,7)\}$ e $T = \{(1,8),(1,7),(3,8)\}$. Construindo os diagramas, ache a relação $T^{-1} \circ (S \circ R)$.

Resolução: Como os conjuntos X, Y, Z são finitos, é cómodo usar o método de diagramas.



Pelo diagrama, $S \circ R = \{(1,6),(1,7),(1,8),(2,5),(2,7),(3,7)\}$.

Observando que $T^{-1} = \{(8,1),(7,1),(8,3)\}$, construímos o diagrama para achar a composição resultante:



Pelo diagrama, $T^{-1} \circ (S \circ R) = \{(1,1),(1,3),(2,1),(3,1)\}$.

10.4 Notação

Seja $R \subset A \times B$ uma relação. Se $x \in A$ e $y \in B$ são relacionados segundo a relação R usa-se a notação

$$(x,y) \in R.$$

Mas isto não é cómodo para relações de desigualdade $x < y$, paralelismo ou perpendicularidade de rectas $a \parallel b$, $a \perp b$, inclusão de conjuntos $A \subset B$, etc. Vamos aceitar também a notação

$$x \, R \, y$$

ou introduzir um símbolo especial para cada uma relação considerada.

10.5 Relações com algumas propriedades

Definição 10.6 (Relação de identidade)**.** Seja A um conjunto. A relação

$$i_A = \{(x,y) \in A^2 \colon x = y\},$$

ou seja (na forma equivalente)

$$i_A = \{(x,x) \colon x \in A\},$$

chama-se *relação de identidade* em A.

É fácil ver que qualquer que seja relação $R \subset A \times B$ têm lugar as igualdades

$$R \circ i_A = R, \quad \text{e} \quad i_B \circ R = R.$$

Definição 10.7. Seja R uma relação de A para A. A relação R diz-se:
a) *reflexiva* (R) se

$$(x, x) \in R$$

qualquer que seja $x \in A$;
b) *simétrica* (S) se

$$(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$$

ou seja

$$\forall x, y \in A\ ((x, y) \in R \to (y, x) \in R).$$

c) *transitiva* (T) se

$$(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$$

d) *anti-simétrica* (AS) se

$$(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y$$

Exemplo 10.6. a) A relação de identidade i_A é reflexiva, simétrica, transitiva e anti-simétrica, isto é (R), (S), (T) e (AS).

b) A relação de paralelismo $a \parallel b$ de rectas e a relação

$$\{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \colon m - n \text{ é múltiplo de } 3\}$$

são reflexivas, simétricas, transitivas mas não é anti-simétricas, isto é (R), (S), (T) e $\neg$(AS).

c) A relação de perpendicularidade $a \perp b$ de rectas é $\neg$(R), (S), $\neg$(T) e $\neg$(AS).

d) A relação $x < y$ de desigualdade dos números reais é $\neg$(R), $\neg$(S), (T) e (AS).

e) A relação $x \leq y$ de desigualdade não estrita dos números reais é (R), $\neg$(S), (T) e (AS).

Teorema 10.2. *Seja $R \subset A \times A$ uma relação.*

1. *R é reflexiva se e somente se $i_A \subset R$.*
2. *R é simétrica se e somente se $R = R^{-1}$.*
3. *R é transitiva se e somente se $R \circ R \subset R$.*
4. *R é anti-simétrica se e somente se $R \cap R^{-1} \subset i_A$.*

Definição 10.8. Uma relação $R \subset A \times A$ é chamada *relação de equivalência* se é reflexiva, simétrica e transitiva.

Definição 10.9. Uma relação $R \subset A \times A$ é chamada *relação de ordem parcial* se é reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

É claro que as relações das alíneas a) e b) do Exemplo 10.6 são relações de equivalência, as relações das alíneas a) e e) do Exemplo 10.6 são relações de ordem parcial.

Observamos que a teoria de relação de equivalência e a teoria da relação de ordem parcial são duas áreas próprias da teoria de conjuntos, actualmente muito desenvolvidas, que são aplicáveis nos vários ramos da Matemática Pura. A consideração detalhada desses classes das relações fica fora do programa da disciplina.

10.6 Exercícios

1. Achar os domínios e as imagens das relações definidas a seguir.

   (a) $m < n$ no conjunto $\mathbb{N}$, isto é,

   $$M = \{(m, n) \colon m < n\}.$$

   (b) Sobre o conjunto $\mathbb{Z}$, m é divisor de n, i.e.,

   $$D = \{(m, n) \colon \exists k (km = n)\}.$$

   (c) Seja P o conjunto de todas as pessoas.

   $$\{(p, q) \in P \times P \colon p \text{ é o pai ou a mãe do } q\}$$

   (d) P é o mesmo conjunto,

   $$\{(p, q) \in P \times P \colon \text{a pessoa } p \text{ é irmão do } q\}$$

   (e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y > x^2\}$

   (f) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y^2 = 1 - \dfrac{2}{x^2 + 1}\right\}$

2. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$,

   $$R = \{(1, 4), (1, 5), (2, 5), (3, 6)\}$$

   e

   $$S = \{(4, 5), (4, 6), (5, 4), (6, 6)\}.$$

   Note que $R \subset A \times B$ e $S \subset B \times B$. Determine as relações usando diagramas:

   (a) $S \circ R$
   (b) $S \circ S$
   (c) $S \circ S^{-1}$
   (d) $S^{-1} \circ R$
   (e) $R^{-1} \circ S$

3. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$, $C = \{6, 7, 8\}$

   $$R = \{(1, 7), (3, 6), (3, 7)\}$$

   e

   $$S = \{(4, 7), (4, 8), (5, 6)\}.$$

   Note que $R \subset A \times C$ e $S \subset B \times C$. Determine as relações usando diagramas:

   (a) $S^{-1} \circ R$
   (b) $R^{-1} \circ S$

4. Sejam $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$ e $Z = \{5, 6, 7, 8\}$. Sejam as relações $R \subset X \times Y$, $S \subset Y \times Z$ e $T \subset X \times Z$ definidas por

   $$R = \{(1, a), (2, c), (2, d), (3, b), (3, d)\},$$
   $$S = \{(a, 6), (a, 7), (a, 8), (c, 5), (d, 7)\},$$
   $$T = \{(1, 5), (3, 6), (3, 8)\}.$$

   Construindo os diagramas, determine as seguintes relações (ou mostre que a relação não existe):

(a) $T^{-1} \circ (S \circ R)$
(b) $R \circ (T^{-1} \circ S)$
(c) $S^{-1} \circ (R \circ T)$
(d) $S \circ (R \circ T^{-1})$
(e) $S^{-1} \circ (T \circ R^{-1})$
(f) $R^{-1} \circ (S^{-1} \circ T)$
(g) $T \circ (R \circ S)$

5. Apresente o esboço e ache o domínio e o contra-domínio da relação $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definida por:

   (a) $R = \{(x, y) \colon 0 < y < x\}$
   (b) $R = \{(x, y) \colon x < y < 2x\}$
   (c) $R = \{(x, y) \colon 3x < y < x\}$
   (d) $R = \{(x, y) \colon y - 1 = |x|\}$
   (e) $R = \{(x, y) \colon x^2 + y^2 < 1\}$
   (f) $R = \{(x, y) \colon x^2 + y^2 \geq 1\}$
   (g) $R = \{(x, y) \colon xy = 1\}$
   (h) $R = \{(x, y) \colon |y| > x^2 + 1\}$
   (i) $R = \{(x, y) \colon 1 < x < y\}$
   (j) $R = \{(x, y) \colon xy \neq 0\}$
   (k) $R = \{(x, y) \colon y < \ln x\}$
   (l) $R = \{(x, y) \colon y > \cos x\}$

6. Sejam L e E as relações definidas no exemplo 10.4. Descrever as relações:

   (a) $L^{-1} \circ L$
   (b) $E \circ (L^{-1} \circ L)$

7. Seja $D_r \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$D_r = \{(x, y) \colon |x - y| < r\}.$$

   Então D_r é uma relação em R. Encontrar

$$D_r \circ D_s.$$

8. Demonstrar a parte 3 do teorema 10.1 a partir das partes 1 e 2.

9. Sejam R e S relações de A para B. As seguintes proposições são verdadeiras ou falsas? Justificar por demonstrações ou contra-exemplos

   (a) $R \subset \mathrm{Dom}(R) \times \mathrm{Im}(R)$
   (b) Se $R \subset S$ então $R^{-1} \subset S^{-1}$
   (c) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$

10. Sejam $R \subset A \times B$ e $S \subset B \times C$, $T \subset B \times C$. As seguintes proposições são verdadeiras ou falsas? Justificar por demonstrações ou contra-exemplos

   (a) Se $S \subset T$ então $S \circ R \subset T \circ R$
   (b) $(S \cap T) \circ R \subset (S \circ R) \cap (T \circ R)$
   (c) $(S \cap T) \circ R = (S \circ R) \cap (T \circ R)$
   (d) $(S \cup T) \circ R = (S \circ R) \cup (T \circ R)$

11. Demonstrar o teorema 10.2.

12. Verifique se as relações são (R), (S), (T), (AS)? Quais das relações são de equivalência e quais são de ordem parcial?

   (a) a relação R_a de paralelismo $a \parallel b$ no conjunto de todas as rectas no espaço;
   (b) a relação R_b de perpendicularidade $a \perp b$ no conjunto de todas as rectas no espaço;
   (c) $R_c = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \colon |m - n| \leq 1\}$
   (d) $R_d = \{((m, n), (k, l)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2 \colon m - n = k - l\}$;
   (e) $R_e = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \colon m - n \text{ é múltiplo de } 4\}$;
   (f) $R_f = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \colon \exists k \in \mathbb{Z} \left(m = 2^k n\right)\}$;
   (g) $R_g = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \colon m^2 = n^2\}$;
   (h) $A = \{a, b, c\}$, $R_h \subset A \times A$, $R = \{(a, a), (b, a), (b, b), (b, c), (c, c)\}$;
   (i) $R_i = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \colon |x| \leq |y|\}$;
   (j) $R_j = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \colon |x| < |y| \vee x = y\}$;
   (k) $R_k = \{((x, y), (t, s)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \colon x + y \leq t + s\}$;
   (l) $R_l = \{(A, B) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \colon A \subset B\}$.

Capítulo 11

Funções

11.1 Definição de função

Função ou aplicação f de um conjunto X para um outro (ou o mesmo) conjunto Y é uma regra (ou um algoritmo) que permite a partir de qualquer valor $x \in X$ encontrar um único valor $y \in Y$.

A descrição apresentada não é completamente clara, porque o próprio conceito de algoritmo precisa de uma definição.

Vamos construir a definição necessária na base da noção de relação:

Definição 11.1. Seja F uma relação de X para Y. A relação F é chamada *função de X em Y* se para qualquer $x \in X$ existe único $y \in Y$ tal que $(x, y) \in F$. Ou seja

$$\forall x \in X \exists! y \in Y ((x, y) \in F).$$

Neste caso as definições de domínio e contradomínio introduzidas para relações podem ser usadas para funções.

Notemos que o conjunto X é o *domínio* da função F. Usa-se notação

$$F \colon X \to Y \tag{11.1}$$

e diz-se que F actua de X em Y.

Sejam $f \colon X \to Y$ e $x \in X$. O único valor y tal que $(x, y) \in f$ diz-se valor da função f no ponto x. Escreve-se

$$y = f(x).$$

Então, $f(x)$ é um elemento do conjunto Y e

$$\boxed{y = f(x) \Leftrightarrow (x, y) \in f} \tag{11.2}$$

Exemplo 11.1. Sejam $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $f \subset A \times B$,

$$f = \{(a, 2), (b, 4), (c, 2)\}.$$

A relação f satisfaz à definição de função,

$$f \colon A \to B$$

e

$$f(a) = 2,\ f(b) = 4,\ f(c) = 2.$$

Exemplo 11.2. Consideremos um exemplo de geometria. Sejam p_1 e p_2 dois planos[1] paralelos e l uma recta que intersecta ambos os planos. Consideremos a relação $S \subset p_1 \times p_2$,

$$S = \{(M, N) \colon \text{a recta } MN \text{ é paralela à } l\}.$$

A relação S é função,

$$S \colon p_1 \to p_2$$

e

$$N = S(M).$$

A função S realiza uma projecção paralela (em geral, não ortogonal) do plano p_1 sobre o plano p_2.

11.2 Composição de funções

Teorema 11.1. *Suponhamos que $f \colon X \to Y$ e $g \colon Y \to Z$. Então, a relação $g \circ f \subset X \times Z$ é uma função de X em Z definida pela fórmula*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Demonstração. g e f são relações. Segundo à definição da composição das relações

$$g \circ f = \{(x, z) \colon \exists y ((x, y) \in f \wedge (y, z) \in g)\}.$$

Seja $x \in X$ arbitrário e fixo. É necessário (e suficiente) demonstrar que existe único $z \in Z$ tal que

$$(x, z) \in g \circ f.$$

Notemos que tal z existe: $z = g(f(x))$. De fato, se $y = f(x)$, então

$$(x, y) \in f \wedge (y, z) \in g.$$

Daqui $(x, z) \in g \circ f$.

Suponhamos que existe mais um $z_1 \in Z$ tal que $(x, z_1) \in g \circ f$. Para esse z_1 existe um y_1:

$$(x, y_1) \in f \wedge (y_1, z_1) \in g.$$

Daqui $y_1 = f(x)$, $z_1 = g(y_1) = g(f(x)) = z$. □

Os teoremas 11.1 e 10.1 implica directamente:

[1] vamos considerar os planos como conjuntos de pontos

Teorema 11.2 (associatividade da composição). *Sejam dadas três funções $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ e $h : Z \to T$. Então, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.*

Exemplo 11.3. Sejam $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^2, \; g(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$

Achar as funções $g \circ f$ e $f \circ g$ e comprar.

Resolução. Temos

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \frac{x^2}{x^4+1},$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2 = \frac{x^2}{x^4+2x^2+1}.$$

É claro que

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

Por meio do exemplo considerado concluímos que, mesmo que no caso das relações, a composição de funções é uma operação não comutativa.

11.3 Funções injectivas, sobrejectivas, bijectivas

Definição 11.2 (Injecção). Uma função $f \colon X \to Y$ é chamada *injectiva* (ou *injecção*) se

$$\neg \exists x_1 \exists x_2 (f(x_1) = f(x_2) \wedge x_1 \neq x_2)$$

ou, o que é o mesmo,

$$\forall x_1 \forall x_2 (f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2)$$

ou

$$\forall x_1 \forall x_2 (x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)).$$

Se existem dois argumentos $x_1 \neq x_2$ com valores iguais a função não é injectiva.

Definição 11.3 (Sobrejecção). Uma função $f \colon X \to Y$ é chamada *sobrejectiva* (ou *sobrejecção*) se

$$\operatorname{Im}(f) = Y$$

ou, o que é o mesmo,

$$\forall y \in Y \exists x \in X (y = f(x)).$$

Observação. Para qualquer função $f : X \to Y$ é habituado dizer que f é uma função (ou actua) de X <u>em</u> Y, mas caso de f sobrejectiva também dizem-se que f é uma função (ou actua) de X <u>para</u> Y. Então, em diferença das relações, no caso de funções o conectivo de linguagem "para" pode ser usado exclusivamente no caso das funções sobrejectivas.

Definição 11.4 (Bijecção). Uma função $f \colon X \to Y$ é chamada *bijectiva* (ou *bijecção*, ou *correspondência biunívoca*) se é injectiva e sobrejectiva.

As propriedades de injectividade, sobrejectividade e bijectividade de uma função admitem descrição equivalente nos termos das equações.

Teorema 11.3. *Seja $f \colon X \to Y$. Consideremos a equação*

$$f(x) = y \tag{11.3}$$

em relação à incógnita $x \in X$.

1. *A função f é injectiva se e somente se qualquer que seja parte direita $y \in Y$ a equação (11.3) admite no máximo uma solução (a equação tem a propriedade de unicidade de solução).*
2. *A função f é sobrejectiva se e somente se qualquer que seja parte direita $y \in Y$ a equação (11.3) tem pelo menos uma solução (a equação tem a propriedade de existência de solução).*
3. *A função f é bijectiva sé e somente se qualquer que seja parte direita $y \in Y$ a equação (11.3) tem uma única solução (existência e unicidade de solução).*

As propriedades de injectividade, sobrejectividade e bijectividade de uma função $f : X \to Y$ no caso particular, quando $X, Y \subset \mathbb{R}$ também admitem uma interpretação geométrica.

Teorema 11.4. *Seja $X, Y \subset \mathbb{R}$ e $f \colon X \to Y$.*

1. *A função f é injectiva se e somente se qualquer que seja $b \in Y$ a recta horizontal $y = b$ tem nó máximo um ponto comum com o gráfico da função $y = f(x)$.*
2. *A função f é sobrejectiva se e somente se qualquer que seja $b \in Y$ a recta horizontal $y = b$ e o gráfico da função $y = f(x)$ têm pelo menos um ponto comum.*
3. *A função f é bijectiva se e somente se qualquer que seja $b \in Y$ a recta horizontal $y = b$ e o gráfico da função $y = f(x)$ têm exactamente um ponto comum.*

Exemplo 11.4. Seja

$$f(x) = x^2 \tag{11.4}$$

1. A função $f : [0, \infty[\to [0, \infty[$ definida pela fórmula (11.4) é bijectiva.
2. A função $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ definida pela fórmula (11.4) é injectiva mas não é sobrejectiva.
3. A função $f : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ definida pela fórmula (11.4) é sobrejectiva mas não é injectiva.
4. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pela fórmula (11.4) não é injectiva nem sobrejectiva.

11.4 Funções inversas

Seja $f \colon X \to Y$. A relação inversa f^{-1} sempre existe:

$$f^{-1} = \{(y, x) \colon (x, y) \in f\} = \{(y, x) \colon y = f(x)\}.$$

Definição 11.5. Uma função $f : X \to Y$ diz-se *inversível* se a relação inversa f^{-1} é uma função de Y em X.

Para uma função inversível $f : X \to Y$ a função $f^{-1} : Y \to X$ é chamada *função inversa* de f.

A definição 11.5 a o teorema 10.1 implica directamente:

Teorema 11.5. *1. Se $f : X \to Y$ é uma função inversível então a função inversa $f^{-1} : Y \to X$ existe e é única.*

2. Se $f : X \to Y$ uma função inversível, então a função f^{-1} também é inversível e $(f^{-1})^{-1} = f$.

3. Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ funções inversíveis, então a composição $g \circ f : X \to Z$ também é uma função inversível, sendo que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Os teorema principais da presente secção são os seguintes critérios de invisibilidade de uma função.

Teorema 11.6. *Uma função $f \colon X \to Y$ é inversível se e somente se é uma função bijectiva.*

Antes da formulação do segundo critério notemos que a relação de identidade $i_X = \{(x, x) \colon x \in X\}$ é uma função inversível e defina-se por $i_X(x) = x$.

Teorema 11.7. *Uma função $f \colon X \to Y$ é inversível se e somente se existe uma função $g : Y \to X$ tal que*

$$g \circ f = i_X, \quad f \circ g = i_Y, \tag{11.5}$$

ou, o que é o mesmo,

$$g(f(x)) = x \quad (\forall x \in X), \quad f(g(y)) = y \quad (\forall y \in Y).$$

Mais ainda, no caso (11.5) *temos $f^{-1} = g$.*

Observação 1. Nas algumas áreas da Matemática uma função inversível $f : X \to X$ chama-se *transformação* do conjunto X.

Observação 2. Nas algumas áreas da Matemática uma função $f : X \to Y$ chama-se inversível se é apenas injectiva. Neste caso a função inversa que denotemos por f_1^{-1} defina-se como função de $\operatorname{Im} f$ para X que satisfaz as condições:

$$f_1^{-1}(f(x)) = x \ (\forall x \in X), \quad f(f_1^{-1}(y)) = y \ (\forall y \in \operatorname{Im} f).$$

A justificação desta definição é o seguinte: se redefinir à função f, ou seja consider a função $f_1 : X \to \operatorname{Im} f$ definida por $f_1(x) = f(x)$ $(x \in X)$, então f_1 já será injectiva e sobrejectiva, logo será inversível com a inversa $f_1^{-1} : \operatorname{Im} f \to X$ no sentido da definição 11.5.

Mas se a função f não é injectiva, então, já é principalmente impossível redefinir a f de modo que a relação inversa seja uma função.

Nós sempre vamos usar as noções de função inversível e de função inversa no sentido da definição 11.5.

11.5 Imagem e pré-imagem de conjunto

Da definição de imagem de relação vamos ter a seguinte forma de imagem de função:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(f) &= \{y \colon \exists x (y = f(x))\} \\ &= \{f(x) \colon x \in X\}. \end{aligned} \tag{11.6}$$

Introduz-se também a imagem de um conjunto.

Definição 11.6 (Imagem)**.** Seja $f \colon X \to Y$ uma função e $A \subset X$. O conjunto

$$f(A) = \{f(x) \colon x \in A\} \equiv \{y \colon \exists x \in A(y = f(x))\}.$$

diz-se imagem do conjunto A pela função f (ou sob a função f).

No exemplo 11.1 $f(A) = \{2, 4\}$ e $f(\{a, c\}) = \{2\}$.

Teorema 11.8 (propriedades de imagem)**.** *Seja $f : X \to Y$ uma função, $A, A_1, A_2 \subset X$ e $A_i \subset X$ $(i \in I)$ onde I algum conjunto de índices (finito ou infinito). Então, são válidas as seguintes proposições:*

(a) *$f(\emptyset) = \emptyset$ e $f(X) = \operatorname{Im}(f)$;*

(b) *Se f é injectiva e $f(A_1) = f(A_2)$, então $A_1 = A_2$;*

(c) *$f\left(\cup_{i\in I} A_i\right) = \cup_{i\in I} f(A_i)$;*

(d) *$f\left(\cap_{i\in I} A_i\right) \subset \cap_{i\in I} f(A_i)$;*

(e) *Se f é injectiva, então $f\left(\cap_{i\in I} A_i\right) = \cap_{i\in I} f(A_i)$;*

(f) *$f(A_1 \setminus A_2) \supset f(A_1) \setminus f(A_2)$;*

(g) *Se f é injectiva, então $f(A_1 \setminus A_2) = f(A_1) \setminus f(A_2)$.*

Definição 11.7 (Pré-imagem)**.** Seja $f \colon X \to Y$ uma função e $B \subset Y$. O conjunto

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \colon f(x) \in B\}.$$

chama-se pré-imagem (ou imagem inversa, ou imagem recíproca) do conjunto B pela função f (ou sob a função f).

No exemplo 11.1 $f^{-1}(\{1, 2\}) = \{a, c\}$.

Teorema 11.9 (propriedades de pré-imagem)**.** *Seja $f : X \to Y$ uma função, $B, B_1, B_2 \subset Y$ e $B_i \subset Y$ $(i \in I)$ onde I algum conjunto de índices (finito ou infinito). Então, são válidas as seguintes proposições:*

(a) *$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ e $f^{-1}(Y) = f^{-1}(\operatorname{Im}(f)) = X$;*

(b) *Se f é sobrejectiva e $f^{-1}(B_1) = f^{-1}(B_2)$, então $B_1 = B_2$;*

(c) *$f^{-1}\left(\cup_{i\in I} B_i\right) = \cup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$;*

(d) *$f^{-1}\left(\cap_{i\in I} B_i\right) = \cap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$;*

(e) *$f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$;*

Teorema 11.10 (propriedades de imagem e pré-imagem). *Seja $f : X \to Y$ uma função, $A \subset X$ e $B \subset Y$. Então, são válidas as seguintes proposições:*

(a) $f^{-1}(f(A)) \supset A$;

(b) *Se f é injectiva, então* $f^{-1}(f(A)) = A$;

(c) $f(f^{-1}(B)) \subset B$;

(d) *Se f é sobrejectiva, então* $f(f^{-1}(B)) = B$.

Observação. Recomendemos demonstrar as proposições dos Teoremas 11.8, 11.9 e 11.10 (veja exercícios 22-28 abaixo). Notemos que inclusões $\supset$ e $\supset$ desses teoremas, em geral, não é possível alterar para igualdades! A construção dos contra-exemlos correspondentes é parte do exercício 28.

11.6 Exercícios

11.6.1 Exercícios (secção 11.1)

1. Para as relações seguintes indicar se são funções ou não:

   (a) $A = B = \{1,2,3\}$, $f, g, h \subset A \times B$,
   $$f = \{(1,1),(1,2),(1,3)\}$$
   $$g = \{(1,1),(2,1),(3,1)\}$$
   $$h = \{(1,1),(2,1)\}$$

   (b) $f_1, f_2, f_3 \subset I \times I$, onde $I = [-5,5]$,
   $$f_1 = \{(x,y) \colon x^2 + y^2 = 25\}$$
   $$f_2 = \{(x,y) \colon x^2 + y^2 = 25, x \geq 0\}$$
   $$f_3 = \{(x,y) \colon x^2 + y^2 = 25, y \leq 0\}$$
   $$f_4 = \{(x,y) \colon x^2 + y^2 = 25, xy \geq 0\}$$
   $$f_5 = f_4 \smallsetminus \{(0,5)\}$$

   (c) Sejam C o conjunto de todas as cidades, N o conjunto de todos os países, $L \subset C \times N$,
   $$L = \{(c,n) \colon \text{a cidade } c \text{ é do pais } n\}$$

   (d) Sejam P o conjunto de todas as pessoas, $C \subset P \times P$,
   $$C = \{(p,q) \colon p \text{ é progenitor do } q\}.$$

   (e) Sejam P o conjunto de todas as pessoas, $D \subset P \times \mathcal{P}(P)$,
   $$D = \{(p,x) \colon \\ x \text{ é o conjunto de todos os filhos do } p\}.$$

2. Verifique que $f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,
   $$f = \{(x,y) \colon xy = 1 \vee (x = y = 0)\}$$
   é uma função. Encontre os valores $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$.

3. Seja $A = \{2,3,4,\ldots\}$. Seja
   $$a \mid b = \{a \text{ é divisor do } b\}.$$
   Verifique que a relação $M \subset A \times A$,
   $$M = \{(x,d) \colon d \mid x \wedge \forall d_1(d_1 < d \to \neg(d_1 \mid x))\}$$
   é função. Encontre os valores
   $$M(10), M(101), M(1001).$$

4. Verifique que a relação de identidade $i_A \subset A \times A$,
   $$i_A = \{(x,x) \colon x \in A\}$$
   é uma função.

5. Sejam $A = \{1,2,3\}$, $B = \mathcal{P}(A)$ e $f \colon B \to B$ defina-se por
   $$f(X) = A \smallsetminus X.$$
   Ache $f(\{1,3\})$.

6. Sejam $A = B = [-2,2]$. Consideremos as relações $f, g \subset A \times B$ definidas por $f = \{(x,y) \colon x - y = 1\}$ e $g = \{(x,y) \colon x - y \leq 1\}$. Verifique (justificando) se as relações f e g são funções de A em B ou não. Para aquelas que são funções, calcule o valor da função no ponto -1.

7. Sejam $A = B = [-1,1]$. Consideremos as relações $f, g \subset A \times B$ definidas por $f = \{(x,y) \colon x^2 + y = 1,\ x \geq 0\}$ e $g = \{(x,y) \colon x^2 + y = 1,\ y \leq 0\}$. Verifique (justificando) se as relações f e g são funções de A em B ou não. Para aquelas que são funções, calcule o valor da função no ponto 0.

8. Sejam $A = B = [-3,3]$. Consideremos as relações $f, g \subset A \times B$ definidas por $f = \{(x,y) \colon x^2 + y = 1,\ x \leq 0,\ y \geq 0\}$ e $g = \{(x,y) \colon x^2 + y = 1,\ y < 0\}$. Verifique (justificando) se as relações f e g são funções de A em B ou não. Para aquelas que são funções, calcule o valor da função no ponto 2.

9. Sejam $A = B = \mathbb{R}$. Consideremos as relações $f, g \subset A \times B$ definidas por $f = \{(x,y) \colon x = \cos y\}$ e $g = \{(x,y) \colon y = \cos x\}$. Verifique (justificando) se as relações f e g são funções de A em B ou não. Para aquelas que são funções, calcule o valor da função no ponto π.

10. Sejam $A = \mathbb{N}^2$ e $B = \mathbb{N}$ e seja $a|b = \{a \text{ é divisor do } b\}$. Consideremos a relação $f \subset A \times B$ definida por $f = \{((x,y),d) \colon d|x \wedge d|y \wedge \forall d_1(d_1 > d \to \neg(d_1|x \wedge d_1|y))\}$. Verifique (justificando) se a relação f é uma função de A em B ou não. Caso *sim* calcule o valor de f no ponto $(12,15)$.

11. Sejam $A = \mathbb{N}^2$ e $B = \mathbb{N}$ e seja $a|b = \{a \text{ é divisor do } b\}$. Consideremos a relação $f \subset A \times B$ definida por $f = \{((x,y),m) \colon x|m \wedge y|m \wedge \forall m_1(m_1 < m \to \neg(x|m_1 \wedge y|m_1))\}$. Verifique (justificando) se a relação f é uma função de A em B ou não. Caso *sim* calcule o valor de f no ponto $(6,8)$.

12. Sejam $A = B = \mathbb{N} \cup \{0\}$ e seja $a \equiv b \pmod{m}$ significa que $a - b$ é múltiplo de m. Consideremos a relação $f \subset A \times B$ definida por $f = \{(x, y) \colon x \equiv y \pmod{3} \wedge y \in \{0, 1, 2\}\}$. Verifique (justificando) se a relação f é uma função de A em B ou não. Caso *sim* calcule o valor de f no ponto 5.

13. Sejam $A = B = \mathbb{N} \cup \{0\}$ e seja $a \equiv b \pmod{m}$ significa que $a - b$ é múltiplo de m. Consideremos a relação $f \subset A \times B$ definida por $f = \{(x, y) \colon \neg(x \equiv y \pmod{3}) \wedge (y \in \{7, 8, 9\})\}$. Verifique (justificando) se a relação f é uma função de A em B ou não. Caso *sim* calcule o valor de f no ponto 0.

14. Sejam $A = \mathbb{R}$ e $B = \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Consideremos as relações $f, g \subset A \times B$ definidas por $f = \{(x, D) \colon x \in D\}$ e $g = \{(x, D) \colon D = [x - 1, x + 1]\}$. Verifique (justificando) se as relações f e g são funções de A em B ou não. Para aquelas que são funções, calcule o valor da função no ponto 0.

15. Sejam $A = \mathbb{Z}$ e $B = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$. Consideremos as relações $f, g \subset A \times B$ definidas por $f = \{(n, M) \colon M = \{-n, n\}\}$ e $g = \{(n, M) \colon n \notin M\}$. Verifique (justificando) se as relações f e g são funções de A em B ou não. Para aquelas que são funções, calcule o valor da função no ponto 3.

16. Sejam $A = B = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Consideremos as relações $f, g \subset A \times B$ definidas por $f = \{(C, D) \colon C \subset D$ e $g = \{(C, D) \colon C = \mathbb{N} \setminus D\}$. Verifique (justificando) se as relações f e g são funções de A em B ou não. Para aquelas que são funções, calcule o valor da função no ponto $\{1, 2, 3\}$.

17. Seja P conjunto de todas as pessoas. Consideremos as relações $f, g \subset P \times P$ definidas por $f = \{(p, q) \colon p \text{ é o pai ou a mãe do } q\}$ e $g = \{(p, q) \colon q \text{ é o pai do } p\}$. Verifique (justificando) se as relações f e g são funções de P em P ou não.

18. Sejam A conjunto te todas as rectas num plano, e P um ponto fixo deste plano. Consideremos as relações $f, g \subset A \times A$ definidas por $f = \{(a, b) \colon b \parallel a\}$ e $g = \{(a, b) \colon a \perp b \wedge (b \text{ passa pelo ponto } P)\}$. Verifique (justificando) se as relações f e g são funções de A em B ou não.

11.6.2 Exercícios (secções 11.2-11.4)

1. Seja
$$a \bmod b$$
o resto de divisão de a por b. Seja $f \colon A \to A$, onde $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$,
$$f(x) = x^2 \bmod 6.$$
Achar $f \circ f$.

2. Verifique as proposições do Exemplo 11.4 na base do Teorema 11.3, analisando a equação $x^2 = y$ de dois métodos: analiticamente e graficamente, isto é, usando o Teorema 11.4.

3. Seja $f \colon A \to A$, $A = \mathbb{R} \setminus \{1\}$,
$$f(x) = (x + 1)/(x - 1).$$
   (a) Mostre que f é bijectiva.
   (b) Mostre que $f \circ f = i_A$.

4. Seja $f \colon R \to R$ definida pela
$$f(x) = \frac{2x + 5}{3}.$$
Mostrar que f é bijectiva e achar f^{-1}.

5. Sejam $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$
   (a) f é injectiva?
   (b) f é sobrejectiva?

6. Seja $A = R \setminus \{2\}$,
$$f(x) = \frac{3x}{x - 2}.$$
Mostrar que $f \colon A \to \mathrm{Im}(f)$ é bijectiva. Achar f^{-1}.

7. Sejam $c \neq 0$, $f \colon \mathbb{R} \setminus \{-d/c\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (ax + b)/(cx + d)$
   (a) f é injectiva?
   (b) f é sobrejectiva?

8. Sejam $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad g(x) = 2x - 1.$$
Achar as fórmulas para $f \circ g$ e $g \circ f$

9. Sejam $f \colon A \to B$ e $g \colon B \to A$. Suponhamos que $g \circ f = i_A$. É possível afirmar que $g = f^{-1}$?

10. Sejam dadas duas funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
1) Verifique se a função f é injectiva.
2) Verifique se a equação $f(x) = y$ tem solução para todo y.
3) Verifique se a função g é sobrejectiva.
4) Verifique se equação $g(x) = y$ pode ter no máximo uma única solução para todo y.
5) Escolha as funções bijectivas e encontre as suas inversas.
6) Determine as funções $f \circ g$ e $g \circ f$ e deduza se eles são iguais.
Considere os seguintes pares das funções f e g:
   (a) $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = 2x + 1$
   (b) $f(x) = \arctan x$ e $g(x) = 1 - x$
   (c) $f(x) = 3 - 2x$ e $g(x) = e^x$
   (d) $f(x) = \sin x$ e $g(x) = x^3$
   (e) $f(x) = |x|$ e $g(x) = x^5 - 1$
   (f) $f(x) = 2 - x$ e $g(x) = 3^x - 1$
   (g) $f(x) = 5$ e $g(x) = (x - 1)^3$
   (h) $f(x) = x \cos x$ e $g(x) = -5x$

(i) $f(x) = 2x^2$ e $g(x) = -\pi x + 8$

(j) $f(x) = (x+1)^4$ e $g(x) = -2x + 3$

(k) $f(x) = \sqrt{|x|}$ e $g(x) = x + \pi$

(l) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ e $g(x) = 1 - x^7$

(m) $f(x) = 3x - 5$ e $g(x) = |x| - 5$

(n) $f(x) = e^{-x^2}$ e $g(x) = 1 - 2x$

(o) $f(x) = 5\sin(x+1)$ e $g(x) = (x+2)^5$

(p) $f(x) = x^2 - 2x + 1$ e $g(x) = -2x + 1$

(q) $f(x) = \ln(x^2+1)$ e $g(x) = x^3 + 1$

11. Responda as perguntas 1)-4) para funções f e g definidas pelas expressões nas alíneas do exercício anterior, mas agora f e g são consideradas como funções de $[1,2]$ em $\mathbb{R}$. Que alíneas têm conclusões diferentes das conclusões correspondentes do exercícios anterior?

11.6.3 Exercícios (secção 11.5)

1. Seja $X = \{1,2,3,4,5\}$ e a função $f : X \to X$ definida pela tabela. Determine a imagem do conjunto A pela função f e a preimagem de A pela função f.

(a)

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	4	2	3	2	4

, $A = \{2,3\}$.

(b)

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	1	1	3	3	4

, $A = \{1,3,5\}$.

(c)

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	5	4	3	2	1

, $A = \{1,4\}$.

(d)

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	2	3	3	4	5

, $A = \{1,2,3,5\}$.

(e)

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	1	2	3	3	3

, $A = \{3,5\}$.

(f)

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	4	2	4	1	3

, $A = \{4\}$.

(g)

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	4	4	4	4	4

, $A = \{2,3\}$.

(h)

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	3	3	3	4	4

, $A = \{2,3,5\}$.

(i)

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	5	3	3	3	3

, $A = \{1,5\}$.

2. Sobre o conjunto $U = \{0,1,2,3,4,5\}$ é definida a função $f\colon U \to U$ segundo a formula $f(x) = x^2 \bmod 6$. Encontrar as imagens e pré-imagens $f(U)$, $f^{-1}(U)$, $f(B)$, $f^{-1}(B)$ onde $B = \{2,3,5\}$. Resolver a equação $f(x) = x$.

3. Sejam $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ e $f\colon A \to A$ a função definida pela fórmula $f(x) = x^2 \bmod 8$. Achar um elemento $x \in f(A)$ tal que $x \notin f^{-1}(\{x\})$.

4. Seja $f\colon A \to \mathbb{R}$ onde $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a função definida por $f(x) = x + 1/x$. Achar $f([2,3])$, $f(A)$, $f^{-1}([0,+\infty))$.

5. Seja dada a função $f : [0,9] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 1$. Ache $f([1,2])$ e $f^{-1}([-1,5[)$.

6. Seja dada a função $f : [0,9] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x - 1$. Ache $f([0,2])$ e $f^{-1}([-1,\infty[)$.

7. Seja dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sin x$. Ache $f([0,\pi])$ e $f^{-1}(]-\infty,0[)$.

8. Seja dada a função $f : [-9,9] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x| - 1$. Ache $f(]-1,0])$ e $f^{-1}([0,2[)$.

9. Seja dada a função $f : [0,9] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x+1)^2$. Ache $f([2,3])$ e $f^{-1}([1,\infty[)$.

10. Seja dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x$. Ache $f(]1,2[)$ e $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{1\})$.

11. Seja dada a função $f : [0,9] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + 1$. Ache $f([3,4])$ e $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

12. Seja dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2^x$. Ache $f(]0,1])$ e $f^{-1}(]0,\infty[)$.

13. Seja dada a função $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln x$. Ache $f([1,\infty[)$ e $f^{-1}(]-\infty,1])$.

14. Seja dada a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$. Ache $f(]0,1])$ e $f^{-1}(]-1,0[)$.

15. Seja dada a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -\frac{1}{x}$. Ache $f(]0,1])$ e $f^{-1}(]0,\infty[)$.

16. Seja dada a função $f : [0,9] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 5$. Ache $f([1,2])$ e $f^{-1}([-1,5])$.

17. Seja dada a função $f : [-9,9] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Ache $f(]-9,9[\setminus[0,1])$ e $f^{-1}(\{-9,4\})$.

18. Seja dada a função $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x + 2$. Ache $f([1,\infty])$ e $f^{-1}(\{0,1\})$.

19. Seja dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -\cos x$. Ache $f([9,\infty[)$ e $f^{-1}(\{-1,0,1\})$.

20. Seja dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \arctan x$. Ache $f([0,1[)$ e $f^{-1}([-1,\infty[)$.

21. Seja dada a função $f : [0,9] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x - 5|$. Ache $f([5,9])$ e $f^{-1}([-2,2[)$.

22. Demonstrar que se $X_1 \subset X_2$ então
$$f(X_1) \subset f(X_2).$$
A proposição reciproca é verdadeira?

23. Seja $f\colon A \to B$. Demonstrar que $\forall X \subset A$
$$X \subset f^{-1}(f(X)).$$
Construir um exemplo com $X \neq f^{-1}(f(X))$ Indicação. Sejam
$$A = \{a,b,c,d\},\ B = \{1,2,3,4\}.$$
Pode ser considerada a função $f\colon A \to B$,

x	a	b	c	d
$f(x)$	2	4	2	1

24. Seja $f\colon A \to B$, $Y_1, Y_2 \subset B$, $Y_1 \subset Y_2$. Demonstrar que se $f^{-1}(Y_1) = f^{-1}(Y_2)$ então
$$(Y_2 \setminus Y_1) \cap f(A) = \emptyset.$$

25. Demonstrar as seguintes propriedades da operação pré-imagem (directamente, não citando ao teorema 11.9):
   (a) $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$
   (b) $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$
   (c) $f^{-1}(X^c) = \left(f^{-1}(X)\right)^c$

26. Sejam $f\colon A \to B$, $X \subset A$, $Y \subset B$. Demonstrar que
$$X \subset f^{-1}(Y) \Leftrightarrow f(X) \subset Y.$$

27. Sejam $f\colon A \to B$, $X \subset A$, $Y \subset B$. Mostrar que as implicações
   (a) $X \supset f^{-1}(Y) \Rightarrow f(X) \supset Y$
   (b) $f(X) \supset Y \Rightarrow X \supset f^{-1}(Y)$

   são falsas.

28. Demonstre ou refute, dando um contra-exemplo, a seguinte afirmação:
   (a) Se $f : X \to Y$ é uma função, $A, B \subset X$ e $f(A) = f(B)$, então $A = B$.
   (b) Se $f : X \to Y$ é uma função e $A \subset X$, então $f^{-1}(f(A)) = A$.
   (c) Se $f : X \to Y$ é uma função e $A \subset X$, então $A \subset f^{-1}(f(A))$.
   (d) Se $f : X \to Y$ é uma função e $B \subset Y$, então $f(f^{-1}(B)) = B$.
   (e) Se $f : X \to Y$ é uma função e $B \subset Y$, então $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
   (f) Se $f : X \to Y$ é uma função injectiva e $A \subset X$, então $f^{-1}(f(A)) = A$.
   (g) Se $f : X \to Y$ é uma função sobrejectiva e $B \subset Y$, então $f(f^{-1}(B)) = B$.
   (h) Se $f : X \to Y$ é uma função injectiva, $A, B \subset X$ e $f(A) = f(B)$, então $A = B$.
   (i) Se $f : X \to Y$ é uma função, $A, B \subset Y$ e $f^{-1}(A) = f^{-1}(B)$, então $A = B$.
   (j) Se $f : X \to Y$ é uma função sobrejectiva, $A, B \subset Y$ e $f^{-1}(A) = f^{-1}(B)$, então $A = B$.
   (k) Se $f : X \to Y$ é uma função e $A, B \subset X$, então $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.
   (l) Se $f : X \to Y$ é uma função injectiva e $A, B \subset X$, então $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.
   (m) Se $f : X \to Y$ é uma função e $A, B \subset Y$, então $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.
   (n) Se $f : X \to Y$ é uma função e $A, B \subset X$, então $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
   (o) Se $f : X \to Y$ é uma função injectiva e $A, B \subset X$, então $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
   (p) Se $f : X \to Y$ é uma função e $A, B \subset Y$, então $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
   (q) Se $f : X \to Y$ é uma função e $A, B \subset X$, então $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
   (r) Se $f : X \to Y$ é uma função e $A, B \subset Y$, então $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
   (s) Se $f : X \to Y$ é uma função e $A, B \subset X$, então $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Sugestão: F,F,V,F,V,V,V,V,F,V,F,V,V,F,V,V,V,V,V.

Tema IV

Conjuntos enumeráveis e não enumeráveis

Lição 10 Capítulo 4

Conjuntos Enumeráveis e Não Enumeráveis

A definição de Dedekind, de conjunto infinito, é usada na discussão de propriedades de conjuntos finitos e infinitos. Será demonstrado, dentre outras coisas, que conjuntos enumeráveis são os menores, em tamanho, dentre os conjuntos infinitos.
Propriedades e exemplos, de conjuntos enumeráveis e de conjuntos não enumeráveis, são dadas.

§ 4.1 Conjuntos Finitos e Infinitos

Em geral, mencionamos informalmente que um conjunto finito é um conjunto que contém apenas uma quantidade finita de elementos; embora este conceito possa ser transformado em uma definição matemática mais precisa, daremos preferência a uma definição alternativa (Definição 4.1), formulada por Dedekind.
Sabemos, que o conjunto N, dos números naturais, é um conjunto infinito. Seja $N_P = \{2; 4; 6; ... \}$ o conjunto de todos os números naturais pares. Como foi mostrado ao leitor, no Problema 8, Exercícios 3.6.1, existe uma correspondência um-a-um entre o conjunto N e seu subconjunto próprio N_P.
Em outras palavras, acontece que:

"*Uma parte é tão numerosa quanto o todo*."

Esta propriedade estranha (de um conjunto infinito) incomodou muitos matemáticos, inclusive Georg Cantor. Foi Richard Dedekind (1831-1916) que tornou esta propriedade a característica definidora de um conjunto infinito. A seguinte definição foi dada por Dedekind em 1888.

Definição 4.1 Um conjunto X é *infinito* quando possui um *subconjunto próprio* X_0, $X_0 \subsetneq X$, tal que existe uma correspondência um-a-um entre X e X_0 . Um conjunto é *finito* se não for infinito.

Observação 4.1. Em outras palavras, um conjunto X *é infinito se e somente se existe uma injecção* $f : X \to X$ tal que f(X) é um *subconjunto próprio* de X, $f(X)=X_0 \subsetneq X$.
Logo, o conjunto N de números naturais é um conjunto infinito tomando $f(n) = 2n$, $f(N)=N_p \subsetneq N$.

Exemplo 4.1 O conjunto Ø e os conjuntos *unitários* (Um conjunto unitário é um conjunto que consiste de um único elemento) são finitos.
Resolução. Como o conjunto vazio não possui nenhum subconjunto próprio, o conjunto vazio é finito. Seja {a} um conjunto unitário qualquer. Como o único subconjunto próprio de {a} é o conjunto vazio, e não há nenhuma correspondência biunívoca entre {a} e Ø, {a} é necessariamente finito.

Teorema 4.1

(a) Todo superconjunto, de um conjunto infinito, é infinito.
(b) Todo subconjunto, de um conjunto finito, é finito.

Demonstração.
(a) Seja X um conjunto infinito e seja Z um superconjunto de X e $Z \neq X$, i.e., $X \subsetneq Z$. Então, pela Definição 4.1 (Observação 1), existe uma injecção $f : X \to X$ tal que $f(X) \neq X$, $f(X)=X_0 \subsetneq X$.

Defina uma função $g : Z \to Z$ por $g(z) = \begin{cases} f(y) & se \;\; y \in X \\ z & se \;\; z \in Z - X \end{cases}$

Deixamos ao leitor verificar que a função $g : Z \to Z$ é injectora e que $g(Z) \neq Z$.

Segue então, pela Definição 4.1, que Z é infinito.

(b) Seja X um conjunto finito e seja Y um subconjunto de X , i.e., $Y \subset X$.

Para demonstrar que Y é finito, supomos o contrário, que Y é infinito. Então, por (a), o conjunto X deve ser infinito. Isto é uma contradição. Portanto, o conjunto Y é finito. □

Teorema 4.2 Seja $g : X \to Y$ uma correspondência um-a-um. Se o conjunto X é infinito, então Y é infinito.

Demonstração. Como X é infinito, pela Definição 4.1, existe uma injecção $f : X \to X$ tal que $f(X) \neq X$, $f(X)=X_0 \subsetneq X$. Como $g : X \to Y$ é uma correspondência um-a-um, também o é $g^{-1} : Y \to X$ (Teorema 3.14, Capítulo 3). Temos agora o seguinte diagrama de injecções:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] & Y \\ X \arrow[u, "f"] & Y \arrow[l, "g-1"] \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

Consequentemente, a composição $h = g \circ f \circ g^{-1} : Y \to Y$ de injecções é uma injecção [Problema 7, Exercícios 3.7.1].

Finalmente, temos

$$h(Y) = (g \circ f \circ g^{-1})(Y) = (g \circ f)(g^{-1}(Y)) = (g \circ f)(X) = g(f(X))$$

e $g(f(X)) \neq Y$, porque $f(X) \neq X$. $h(Y)=Y_0=g[f(X)]=g(X_0)$.

Logo, $h(Y) \neq Y$ e $h(Y)$ é um subconjunto próprio de Y, $h(Y) \subsetneq Y$, e portanto Y é infinito. □

Corolário 4.1 Seja $g : X \to Y$ uma correspondência um-a-um. Se o conjunto X é finito, então Y é finito.

Demonstração. Como exercício. □

Teorema 4.3 Seja X um conjunto infinito e seja $x_0 \in X$. Então $X- \{x_0\}$ é infinito.

Demonstração. Pela Definição 4.1, existe uma injecção $f : X \to X$ tal que $f(X) \subsetneq X$.

Há todos dois casos a serem considerados: (1) $x_0 \in f(X)$, ou (2) $x_0 \in X - f(X)$.

Em cada caso, devemos construir uma injecção $g : X- \{x_0\} \to X- \{x_0\}$, tal que $g(X- \{x_0\}) \neq (X- \{x_0\})$.

Caso 1. $x_0 \in f(X)$.

Existe um elemento x_1 em X tal que $f(x_1) = x_0$. Uma função $g : X- \{x_0\} \to X- \{x_0\}$ pode agora ser definida por

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & se \ \ x \neq x_1 \\ x_2 & se \ \ x = x_1 \in X - \{x_0\} \end{cases}$$

em que x_2 é um elemento do conjunto não vazio $X - f(X)$, arbitrariamente fixado.

Segue que $g : X- \{x_0\} \to X- \{x_0\}$ é injectora e que $g(X- \{x_0\}) = f(X- \{x_0 ; x_1\}) \cup \{x_2\} \neq X- \{x_0\}$

Portanto, $X- \{x_0\}$ é infinito neste caso.

Caso 2. $x_0 \in X - f(X)$.

Defina a função

$$g : X- \{x_0\} \to X- \{x_0\} \ \text{ por } \ g(x) = f(x) \ \text{ para todo } \ x \in X- \{x_0\}.$$

Como $f : X \to X$ é injectora, também o é $g : X- \{x_0\} \to X- \{x_0\}$. Finalmente,

$$g(X- \{x_0\}) = f(X) - \{f(x_0)\} \neq X- \{x_0\}$$

Portanto, em qualquer caso, $X- \{x_0\}$ é infinito. □

Denotação. No que segue, denotaremos por N_k, $k \in N$, o conjunto de todos os números naturais de 1 até k; isto é, $N_k = \{1; 2; ... ;k\}$.

Como uma aplicação do Teorema 4.3, mostramos no seguinte exemplo que cada N_k é finito.

Exemplo 4.2 Para cada $k \in N$, o conjunto N_k é finito.

Demonstração. Demonstraremos isto pelo princípio de indução matemática.

(B) Pelo Exemplo 4.1, a afirmação é verdadeira para k = 1.

(I) Agora, suponha que o conjunto N_k é finito para algum número natural k.

Considere o conjunto $N_{k+1} = N_k \cup \{k+1\}$.

Se N_{k+1} for infinito, então, pelo Teorema 4.3, $N_{k+1} - \{k+1\} = N_k$ será um conjunto infinito, o que contradiz a hipótese de indução. Logo, se N_k é finito, então N_{k+1} é finito. Portanto, pelo princípio de indução matemática, o conjunto N_k é finito para cada $k \in N$. □

Na verdade, existe uma *conexão íntima* entre um conjunto finito não vazio e um conjunto N_k.

Teorema 4.4 Um conjunto X é *finito* se e somente se X = Ø ou X está em correspondência um-a-um com algum N_k.

Demonstração.

Condição suficiente: Se X é vazio ou está em correspondência um-a-um com algum N_k, então, pelo Corolário do Teorema 4.2, e Exemplos 4.1 e 4.2, o conjunto X é finito.

Condição necessária: Para mostrar a recíproca, mostramos, equivalentemente, sua contrapositiva:

Se X ≠ Ø e X não está em correspondência um-a-um com nenhum N_k, então X é infinito.

Podemos tomar um elemento x_1 de X, e ter novamente $X - \{x_1\}$ não vazio; pois, caso contrário, teríamos $X = \{x_1\}$ em correspondência com N_1, uma contradição com a hipótese sobre X.

Continuando desta maneira, suponhamos que escolhemos elementos $x_1, x_2..., x_k$ de X. Então $X - \{ x_1, x_2..., x_k \}$ não vazio; caso contrário, teremos $X = \{ x_1, x_2..., x_k \}$ em correspondência um-a-um com N_k, uma contradição com nossa hipótese sobre X.

Logo, podemos sempre escolher um elemento x_{k+1} de $X - \{x_1, x_2..., x_k\}$.

Então, por indução matemática, para todo número natural n, existe um subconjunto próprio $\{x_1, x_2..., x_k\}$ de X. Denotemos o conjunto dos x_n's escolhidos por Y . Então a função

$$f : Y \to Y - \{x_1\}, \text{ definida por } f(x_k) = x_{k+1} \text{ para todo } k \in N,$$

estabelece uma correspondência um-a-um entre Y e seu subconjunto próprio Y- $\{x_1\}$. Portanto, pela Definição 4.1, Y é infinito e portanto, pelo Teorema 4.1, X é infinito. □

Observação 4.2. Mencionaremos aqui que o Teorema 4.4 sugere uma definição alternativa de conjuntos finitos e infinitos. Podemos definir *um conjunto como sendo finito se e somente se ele é vazio ou está em correspondência um-a-um com algum N_k, e sendo infinito se e somente se não é finito*. Desta definição alternativa, nossa Definição 4.1 pode ser demonstrada como um teorema. Entretanto, isto requereria mais ou menos o mesmo montante de trabalho requerido pela nossa presente abordagem.

Exercícios 4.1

1. Complete a demonstração do Teorema 1.
2. Seja $g : X \to Y$ uma correspondência um-a-um. Demonstre que se X é finito, então Y é finito.
3. Demonstre que os conjuntos R, Q e Z são infinitos.
4. Demonstre que se A é um conjunto infinito, então $A \times A$ também o é.
5. Demonstre que se A e B são conjuntos infinitos, então $A \cup B$ é um conjunto infinito.

6. Demonstre que a reunião de um número finito de conjuntos finitos é um conjunto finito.
7. Sejam A e B dois conjuntos tais que $A \cup B$ é infinito. Demonstre que ao menos um dos dois conjuntos A e B é infinito.
8. Demonstre a seguinte generalização do Teorema 4.3: Se Y é um subconjunto finito de um conjunto infinito X, então X - Y é infinito.

§ 4.2 Equipotência de conjuntos

Dois conjuntos finitos X tem o mesmo número de elementos se e somente se existe uma correspondência um-a-um $f : X \to Y$. Embora a frase "*mesmo número de elementos*" não se aplique aqui se X e Y são infinitos, parece natural pensar que dois conjunto infinitos, que estejam em correspondência um-a-um, tem o mesmo tamanho.
Formalizaremos esta intuição como segue:

Definição 4.2 Dois conjuntos X e Y dizem-se *equipotentes*, facto denotado por $X \sim Y$ ou seja cardX = cardY, quando existe uma correspondência um-a-um $f : X \to Y$.

Obviamente, todo conjunto é equipotente a si mesmo, $X \sim X$.
Além disso, como a inversa de uma correspondência um-a-um é uma correspondência um-a-um (Teorema 3.14), $X \sim Y$ se e somente se $Y \sim X$.

Convenção Importante. Convencionaremos que o símbolo ↜

$\boxed{f : X \rightsquigarrow Y \text{ significará "} f : X \to Y \text{ é uma correspondência um-a-um e portanto } X \sim Y \text{"}}$.

Usando esta notação conveniente, a primeira metade do Problema 9, Exercícios 3.7 pode ser reenunciado como: Se $f : X \rightsquigarrow Y$ e $g : Y \rightsquigarrow Z$, então $g \circ f : X \rightsquigarrow Z$.

Assim podemos demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 4.5 Seja Ω um conjunto de subconjuntos de um universo U e seja $\mathcal{R}$ uma relação em Ω dada por: $X\mathcal{R}Y$ se e somente se X e Y são membros de Ω e $X \sim Y$. Então $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência em Ω.

$$(X,Y) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow X \in \Omega \wedge Y \in \Omega \wedge (X \sim Y)$$

Demonstração. Exercício.

No seguinte exemplo, os símbolos]0; 1[e] -1; 1[denotam intervalos (abertos) de números reais.

Exemplo 4.3
(a)]0; 1[~] -1; 1[.
(b)] -1; 1[~ R, e R ~]0; 1[.

Resolução. (a) A função f:]0; 1[→] -1; 1[, dada por $f(x) = 2x - 1$, é uma correspondência um-a-um. Portanto,]0; 1[~] -1; 1[.

(b) A função trigonométrica g:] -1; 1[→ R, dada por $g(x) = tg(\frac{\pi x}{2})$, é uma correspondência um-a-um; portanto] -1; 1[~ R. (?)

(?) O leitor deveria verificar esta Asserção em (b) esboçando um gráfico de $g(x) = tg(\frac{\pi x}{2})$.

Uma demonstração rigorosa pode ser obtida verificando-se as seguintes duas observações:
(i) g:]-1; 1[→ R é contínua, e ilimitada, tanto superiormente como inferiormente.
(ii) $g'(x) = (\frac{\pi}{2}) \sec^2(\frac{\pi x}{2}) > 0$, $\forall$ x, então g é estritamente crescente.
Como a "relação" de equipotência é transitiva,]0; 1[~] -1; 1[e] -1; 1[~ R implicam]0; 1[~ R.

Teorema 4.6 Sejam X, Y , Z e W conjuntos com $X \cap Z = \emptyset$, $Y \cap W = \emptyset$, e sejam $f : X \leadsto Y$ e $g : Z \leadsto W$. Então $f \cup g: (X \cup Z) \leadsto (Y \cup W)$.

Demonstração. Como $f : X \to Y$ e $g : Z \to W$ são funções com $X \cap Z = \emptyset$, pelo Teorema 3.8, do Capítulo 3, $f \cup g : X \cup Z \to Y \cup W$ é uma função. Deixaremos ao leitor a demonstração de que esta última função é uma correspondência um-a-um. □

Teorema 4.7 Sejam X, Y , Z e W conjuntos tais que X ~ Y e Z ~ W. Então $X \times Z \sim Y \times W$.

Demonstração. Sejam $f : X \leadsto Y$ e $g : Z \leadsto W$. Definamos a função $h = f \times g : X \times Z \to Y \times W$, por $h(x,z) = (f \times g)(x, z) = (f(x), g(z))$ para todo $(x, z) \in X \times Z$.
Pedimos ao leitor demonstrar que esta última função é uma correspondência um-a-um. □

Examinando os vários conjuntos finitos $N_k = \{1; 2; 3; ... ; k\}$, conforme k cresce, e notando que os conjuntos infinitos Z, Q, e R (veja Problema 3, Exercícios 4.1) são superconjuntos de N, parece que o "menor" conjunto infinito é o conjunto N de todos os números naturais, ou qualquer conjunto que seja equipotente a N. Aprenderemos em breve, na Secção 4.4, que nem todos os conjuntos infinitos são equipotentes a N.

Definição 4.3: **(a)** Um conjunto X diz-se *enumerável* quando X ~ N.
(b) Um conjunto *contável* é um conjunto finito ou enumerável.

Nota. Seja X um conjunto enumerável.

1º Então existe uma correspondência biunívoca (um-a-um) $f : N \leadsto X$. Se denotamos
$$f(1) = x_1;\ f(2) = x_2;\ f(3) = x_3;\ ... ;\ f(k) = x_k;\ ...$$
então X pode ser denotado alternativamente por $\{x_1; x_2; x_3; ... ;x_k ; ... \}$; as reticências (...) são usadas para indicar que os elementos são *etiquetados* em uma ordem definida, conforme indicado pelos índices.
É uma explicação para o termo "contável ou enumerável" .

2º Para um conjunto finito, é teoricamente possível contar seus elementos e o termo é adequado. Muito embora a contagem de facto de todos os elementos de um conjunto enumerável $X = \{x_1; x_2; x_3; ... ;x_k; ... \}$ seja impossível, o conjunto X está em correspondência biunívoca com os números de contagem, os números naturais.

Teorema 4.8 Todo *subconjunto infinito*, de um conjunto enumerável, é enumerável.

Demonstração. Seja Y um subconjunto infinito de um conjunto enumerável
$$X = \{x_1; x_2; x_3; ... ;x_k; ... \}.$$
Seja n_1 o menor índice para o qual $x_{n_1} \in Y$, e seja n_2 o menor índice para o qual $x_{n_2} \in Y - \{x_{n_1}\}$.
Tendo definido $x_{n_{k-1}}$, seja n_k o menor índice tal que

$$x_{n_k} \in Y - \{ x_{n_1}; x_{n_2}; ... ; x_{n_{k-1}} \}.$$

Um tal n_k sempre existe pois Y é infinito, o que garante que $Y - \{ x_{n_1}; x_{n_2}; ... ; x_{n_{k-1}} \} \neq \emptyset$ para cada $k \in N$. Além disso, este algoritmo esgota todos os elementos de Y.
Deste modo, construímos uma correspondência um-a-um f : Y $\leadsto$ N, sendo $f(k) = x_{n_k}$ para cada $k \in N$.
Portanto, Y é enumerável. □
Uma demonstração mais curta, porém menos intuitiva, do Teorema 4.8, é indicada no Problema 10 ao final desta secção.
O seguinte corolário é uma consequência imediata da Definição 4.3 e do Teorema 4.8.

Corolário 4.2 Todo subconjunto de um conjunto contável é contável.
Demonstração. Exercício.

Mais exemplos e propriedades de conjuntos enumeráveis são dados na próxima secção.

Exercícios 4.2

1. Complete a demonstração do Teorema 6.
2. Complete a demonstração do Teorema 7.
3. Demonstre que se X e Y são dois conjuntos, então $X \times Y \sim Y \times X$.
4. Demonstre que se $(X - Y) \sim (Y - X)$ então $X \sim Y$.
5. Demonstre a seguinte generalização do Teorema 4.6: Seja $\{ A_\gamma : \gamma \in \Gamma \}$ e $\{ B_\gamma : \gamma \in \Gamma \}$ duas famílias de conjuntos disjuntos, tal que $A_\gamma \sim B_\gamma$ para cada $\gamma \in \Gamma$. Então, $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \sim \bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma$.
6. Demonstre que se X é um conjunto enumerável e Y é um subconjunto finito de X, então X - Y é enumerável. [Compare com o Problema 8, Exercícios 4.1]
7. Demonstre que se X é um conjunto enumerável e Y é um conjunto finito, então $X \cup Y$ é enumerável.
8. Demonstre que o conjunto $N_\mathbf{p}$, de todos os números naturais pares, e o conjunto $N_\mathbf{i}$, de todos os números naturais ímpares, são enumeráveis.
9. Seja A um conjunto não vazio, e seja $2^\mathbf{A}$ o conjunto das funções de A no conjunto {0; 1}. Demonstre que $P(A) \sim 2^\mathbf{A}$.
10. Sejam X um conjunto enumerável e Y um subconjunto infinito de X. Seja g : X $\leadsto$ N, e seja h: Y → N a função definida por h(y) = número de elementos em $\{1; 2; 3; ... ; g(y)\} \cap g(Y)$
    Demonstre que h é uma correspondência um-a-um e que portanto Y é enumerável.

§ 4.3 Propriedades de Conjuntos Enumeráveis

O conjunto $N_\mathbf{p}$ de todos os números naturais pares e o conjunto $N_\mathbf{i}$ de todos os números naturais ímpares são enumeráveis (Problema 8, Exercícios 4.2). Como a reunião $N_\mathbf{p} \cup N_\mathbf{i}$ (= N) destes dois conjuntos enumeráveis é enumerável, o próximo teorema deveria ser previsível.

Teorema 4.9 A *união* de dois conjuntos enumeráveis é enumerável.

Demonstração. Sejam A e B dois conjuntos enumeráveis. Mostraremos que $A \cup B$ é enumerável nos dois casos seguintes:
<u>Caso 1</u>. $A \cap B = \emptyset$.
Como $A \sim N$ e $N \sim N_\mathbf{p}$, temos $A \sim N_\mathbf{p}$. De modo semelhante, temos $B \sim N_\mathbf{i}$.

Consequentemente, pelo Teorema 4.6, temos $(A \cup B) \sim (N_p \cup N_i) = N$, o que demonstra que $A \cup B$ é enumerável.

Caso 2. $A \cap B \neq \emptyset$.

Seja $C = B - A$. Então $A \cup C = A \cup B$ e $A \cap C = \emptyset$; o conjunto $C \subset B$ é ou finito ou enumerável [Corolário 4.2 do Teorema 4.8]. Se C é finito, pelo Problema 7 dos Exercícios 4.2, $A \cup C$ é enumerável, e se C é enumerável, então $A \cup C$ é enumerável, pelo caso 1 acima.

Portanto, o conjunto $A \cup B$ é enumerável. □

Corolário 4.3 Sejam $A_1;A_2; \ldots ;A_n$ conjuntos enumeráveis. Então $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ é enumerável.

Demonstração. A demonstração é deixada ao leitor, como um exercício.

Pedimos ao leitor verificar o próximo exemplo.

Exemplo 4.4 O conjunto Z de todos os inteiros é enumerável.

Teorema 4.10 O conjunto $N \times N$ é *enumerável*.

Demonstração. Considere a função $f : N \times N \to N$ dada por $f(j; k) = 2^j 3^k$ para todo $(j; k) \in N \times N$. Esta função é injectora, de modo que

$$N \times N \sim f(N \times N) \subset N:$$

Como $N \times N$ é infinito, $f(N \times N)$ também o é. Pelo Teorema 4.8, $f(N \times N)$ é enumerável e portanto $N \times N$ é enumerável. □

Corolário 4.4 Para cada $k \in N$, seja A_k um conjunto enumerável satisfazendo $A_j \cap A_k = \emptyset$ para todo $j \neq k$. Então $\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k = \bigcup_{k \in N} A_k$ é *enumerável*.

Nota. Este resultado é verdadeiro sem a hipótese "$A_j \cap A_k = \emptyset$ para todo $j \neq k$." Veja Problema 7.

Demonstração. Para cada $k \in N$, seja $f_k : N \to N \times \{k\}$ uma função ao dada por $f_k(j) = (j; k)$ para todo $j \in N$. Claramente, cada $f_k : N \to N \times \{k\}$ é uma correspondência um-a-um. Ou seja, $N \sim N \times \{k\}$. Como $A_k \sim N$ e $N \sim N \times \{k\}$ para cada $k \in N$, temos $A_k \sim N \times \{k\}$ para cada $k \in N$. Segue então, do Problema 5 dos Exercícios 4.2, que

$$\bigcup_{k \in N} A_k \sim \bigcup_{k \in N} N \times \{k\}.$$

Mas o conjunto

$$\bigcup_{k \in N} N \times \{k\} = N \times N$$

é igual ao conjunto enumerável $N \times N$. Portanto, $\bigcup_{k \in N} A_k$ é enumerável. □

Exemplo 4.5 O conjunto Q de todos os números racionais é *enumerável*.

Demonstração. Representaremos cada número racional de maneira única como p/q, sendo $p \in Z$, $q \in N^*$ e o máximo divisor comum de p e q igual a 1. Seja Q_+ o conjunto de tais elementos com $p/q > 0$, e seja $Q_- = \{ -p/q : p/q \in Q_+\}$.

Então $Q = Q_+ \cup \{0\} \cup Q_-$. É evidente que $Q_+ \sim Q_-$. Portanto, para mostrar que Q é enumerável, é suficiente mostrar que Q_+ é enumerável. Para este propósito, consideramos a função $f : Q_+ \to N \times N$, dada por $f(p/q) = (p; q)$. Como esta função é injectora, temos $Q_+ \sim f(Q_+) \subset N \times N$. Como Q_+, como um superconjunto de N, é infinito, $f(Q_+)$ é um subconjunto infinito do conjunto enumerável $N \times N$.

Portanto, $f(Q_+)$ é enumerável e consequentemente Q_+ é enumerável. □

O próximo teorema indica que os conjunto enumeráveis são, em um certo sentido, os menores em "tamanho" dentre os conjuntos infinitos.

Teorema 4.11 Todo conjunto *infinito* contém um subconjunto *enumerável*.

Demonstração. Seja X um conjunto infinito qualquer. Então $X \neq \emptyset$, de modo que podemos escolher um elemento, digamos x_1, no conjunto X. A seguir, seja x_2 um elemento em $Y - \{x_1\}$. De modo semelhante, escolha um elemento x_3 do conjunto não vazio $X - \{x_1; x_2\}$. Tendo assim definido x_{k-1}, escolhemos um elemento x_k no conjunto $X - \{x_1; x_2; ... ; x_{k-1}\}$. Tal x_k existe para cada $k \in N$, porque X é infinito, o que garante que $X - \{x_1; x_2; ... ; x_{k-1}\} \neq \emptyset$ para todo $k \in N$.

O conjunto $\{x_k : k \in N\}$ é um subconjunto enumerável de X, e a demonstração está completa. □

Exercícios 4.3

1. Demonstre a asserção do Exemplo 4.3: O conjunto Z de todos os inteiros é enumerável.
2. Demonstre o Corolário 4.3 do Teorema 4.9.
3. Demonstre que a união de um número finito de conjuntos contáveis é contável.
4. Demonstre que se A e B são conjuntos enumeráveis, então também o é $A \times B$.
   Em particular, $Z \times N$, $Z \times Z$, e $Q \times Q$ são enumeráveis.
5. Encontre uma função injectora $f : Q \to Z \times N$ e dê uma demonstração alternativa para o Exemplo 4.5.
6. Demonstre que o conjunto dos círculos no plano cartesiano, tendo raios racionais e centros em pontos com ambas as coordenadas racionais, é enumerável.
7. Demonstre que se para cada $k \in N$, B_k é um conjunto enumerável, então $\bigcup_{k \in N} B_k$ é enumerável.

4.4 Conjuntos Não Enumeráveis

Todos os conjuntos infinitos que vimos até agora são enumeráveis. Isto pode levar o leitor a indagar se todos os conjuntos infinitos são enumeráveis. É comummente pensado que Georg Cantor tentou demonstrar que todo conjunto infinito é enumerável, quando iniciou seu desenvolvimento da teoria dos conjuntos. Entretanto, ele surprendeu-se demonstrando que existem conjuntos não enumeráveis.

Teorema 4.12 O intervalo aberto $]0; 1[$ de números reais é um conjunto *não enumerável*.

Demonstração. Expressemos primeiramente cada número x, $x < 0 < 1$, como uma expansão decimal na forma $0,x_1x_2x_3 ...$, com $x_n \in \{0; 1; 2; ... ; 9\}$ para cada n.

Por exemplo, $1/3 = 0,333...$, $\sqrt{2}/2 = 0,707106...$. De modo a ter uma única expressão, para aqueles números com uma expansão decimal finita, tais como $1/4 = 0,25$, concordaremos em subtrair 1 do último dígito e acrescentar 9's, de modo que

$$1/4 = 0,24999... \text{, e não } 0,25000... .$$

Sob este acordo, dois números no intervalo $]0; 1[$ são iguais se e somente se os dígitos correspondentes, de suas expansões decimais, são idênticos. Assim, se dois tais números, $x = 0,x_1x_2x_3 ...$ e $y = 0,y_1y_2y_3 ...$ tem uma casa decimal, digamos a k-ésima casa decimal, tal que $x_k \neq y_k$, então $x \neq y$.

Este é um ponto crucial sobre o qual nossa demonstração se apoia.
Agora, suponha que o conjunto]0; 1[é enumerável. Então existe uma correspondência um-a-um $f : N \rightsquigarrow\ ]0; 1[$. Portanto, podemos listar todos os elementos de]0; 1[como segue:

$$
\begin{array}{l}
f(1) = 0,a_{11}a_{12}a_{13}\ldots \\
\qquad\quad \backslash \\
f(2) = 0,a_{21}a_{22}a_{23}\ldots \\
\qquad\qquad \backslash \\
f(3) = 0,a_{31}a_{32}a_{33}\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \backslash\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \backslash\ldots \\
f(k) = 0,a_{k1}a_{k2}a_{k3}\ldots a_{kk}\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \backslash\ldots
\end{array}
$$

em que cada $a_{jk} \in \{0; 1; 2; \ldots ; 9\}$.
Construiremos um número $z \in\ ]0; 1[$, que não pode ser encontrado na lista acima de f(k)'s. Esta contradição implicará que nossa suposição prévia de que]0; 1[é enumerável estava errada, e que portanto]0; 1[é não enumerável.

Seja $z = 0,z_1z_2z_3\ldots$ definido por $z_k = 0$, se $a_{kk} \neq 0$, e $z_k = 1$ se $a_{kk} = 0$, para cada $k \in N$.

O número $z = 0,z_1z_2z_3\ldots$ claramente satisfaz $0 < z < 1$; mas

$$
\begin{array}{l}
z \neq f(1) \text{ pois } z_1 \neq a_{11}, \\
z \neq f(2) \text{ pois } z_2 \neq a_{22}, \ldots \text{, e de modo geral} \\
z \neq f(k) \text{ pois } z_k \neq a_{kk}, \text{ para todo } k \in N.
\end{array}
$$

Portanto, $z \notin f(N) =\ ]0; 1[$.
Temos então a contradição prometida, e a demonstração está completa. □

Corolário 4.5 O conjunto R dos números reais *é não enumerável*.

Demonstração. Fizemos a demonstração, no Exemplo 4.3(b), de que $R \sim\ ]0; 1[$. Agora,]0; 1[é não enumerável; portanto seu conjunto equipotente R também é não enumerável. (veja Problema 1). □

Exemplo 4.6 O conjunto de todos os números irracionais é *não enumerável*.

Demonstração. Demonstramos, no Exemplo 4.5, que o conjunto Q dos números racionais é enumerável. O conjunto dos números irracionais é, por definição, o conjunto R – Q.
É fácil ver que R – Q é um conjunto infinito. Para mostrar que R – Q é não enumerável, supomos o contrário, que R – Q é enumerável. Segue então que a união $(R- Q) \cup Q = R$ é enumerável (Teorema 4.9). Isto contradiz o corolário do Teorema 12. Portanto o conjunto R – Q dos números irracionais é não enumerável. □

Notas. (1) O método de demonstração usado no Teorema 4.12 é chamado método diagonal de Cantor, porque foi criado por Cantor e a construção do número chave

$$z = 0,z_1z_2z_3\ldots$$

na demonstração, é baseada nos dígitos $a_{11}; a_{22}; a_{33}; \ldots$ na diagonal principal da tabela (*) de dígitos. Esta demonstração, embora possa não ser apreciada pelo iniciante, revela a *engenhosidade* de Cantor.

(2) A existência de conjuntos não enumeráveis mostra que existem classes de conjunto infinitos. Na verdade, como o leitor verá no próximo capítulo, existe uma *abundância* de "classes de equipotência" de conjunto infinitos.

Exercícios 4.4

1. Sejam A e B dois conjuntos equipotentes. Demonstre que se A é não enumerável, então B é não enumerável.
2. Demonstre que todo superconjunto de um conjunto não enumerável é não enumerável.
3. Usando o resultado do Problema 2, acima, dê uma demonstração alternativa do corolário do Teorema 4.12.
4. Demonstre que o conjunto dos números irracionais entre 0 e 1 é não enumerável.