

G. Riccardi
D. Durante

ELEMENTI DI FLUIDODINAMICA

Un'introduzione per l'Ingegneria



Springer

ELEMENTI
DI FLUIDODINAMICA

*A Massimo,
per esserci stato così vicino
in questi difficili venti anni.*

G. Riccardi, D. Durante

Elementi di fluidodinamica

Un'introduzione per l'Ingegneria

GIORGIO RICCARDI
II Università degli Studi di Napoli
Dipartimento di Ingegneria Aerospaziale e Meccanica
Aversa (CE)
giorgio.riccardi@email.it

DANILO DURANTE
II Università degli Studi di Napoli
Dipartimento di Ingegneria Aerospaziale e Meccanica
Aversa (CE)
daniло.durante@atlavia.it

Springer-Verlag fa parte di Springer Science+Business Media

springer.com

© Springer-Verlag Italia, Milano 2006

ISBN 10 88-470-0483-7
ISBN 13 978-88-470-0483-2

Quest'opera è protetta dalla legge sul diritto d'autore. Tutti i diritti, in particolare quelli relativi alla traduzione, alla ristampa, all'uso di figure e tavole, alla citazione orale, alla trasmissione radiofonica o televisiva, alla riproduzione su microfilm o in database, alla diversa riproduzione in qualsiasi altra forma (stampa o elettronica) rimangono riservati anche nel caso di utilizzo parziale. Una riproduzione di quest'opera, oppure di parte di questa, è anche nel caso specifico solo ammessa nei limiti stabiliti dalla legge sul diritto d'autore, ed è soggetta all'autorizzazione dell'Editore. La violazione delle norme comporta sanzioni previste dalla legge.

L'utilizzo di denominazioni generiche, nomi commerciali, marchi registrati, ecc., in quest'opera, anche in assenza di particolare indicazione, non consente di considerare tali denominazioni o marchi liberamente utilizzabili da chiunque ai sensi della legge sul marchio.

Riprodotto da copia camera-ready fornita dagli Autori
Progetto grafico della copertina: Simona Colombo, Milano
Stampato in Italia: Signum, Bollate (Mi)

Prefazione

Questo testo è il risultato di alcuni anni di insegnamento della Fluidodinamica nei Corsi di Laurea in Ingegneria Aerospaziale e Meccanica, tenuto da G. R. presso la Facoltà di Ingegneria della *II* Università degli Studi di Napoli. La sistemazione degli appunti preparati per quel corso ci è apparsa necessaria, nel momento in cui abbiamo deciso di partire per una nuova avventura: studiare alcune delle applicazioni cosmologiche della Fluidodinamica.

L'idea di base di questo testo è di supportare un primo approccio, non necessariamente qualitativo, allo studio della Fluidodinamica. Tutti gli argomenti presentati fanno secondo noi parte di un primo bagaglio culturale, necessario per poter poi affrontare approfondimenti specifici. Con una modesta preparazione di Fisica Generale ed Analisi Matematica, il testo è approcciabile sia nell'ambito di un Corso di Laurea di Primo Livello, sia, a maggior ragione, in un Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria. È anche compatibile con gli attuali ordinamenti dei Corsi di Laurea in Fisica e Matematica.

Il testo è pensato suddivisibile in più parti. I capitoli dal *I* al *V* sono di base: gli argomenti trattati devono comunque essere noti nel momento in cui se ne affronta uno successivo. Parimenti va considerato di base, anche se molto più contenuto, il Capitolo *XIII*, dedicato alla presentazione di alcuni aspetti fondamentali dei flussi comprimibili. La scelta di posizionarlo come ultimo capitolo del presente testo è legata alla natura essenzialmente isocora dei tradizionali corsi di Fluidodinamica, essendo normalmente riservato un corso specifico allo studio dei flussi comprimibili. Invece, i capitoli dal *VI* al *XII* trattano di alcune applicazioni e possono quindi essere selezionati seguendo le specifiche esigenze didattiche.

Sottolineiamo una questione metodologica. Essendo questo un testo di natura introduttiva e non specialistica, preferiamo sempre analizzare un problema nella sua forma più semplice, qualora il contesto lo consenta. Vogliamo in tal modo privilegiare la comprensione delle fenomenologie di base, evitando complicazioni. Ad esempio, lo studio dei flussi attorno a corpi è presentato essenzialmente in due dimensioni. Rinunciamo in questo caso ad esporre ed

analizzare fenomeni strettamente tridimensionali, come il flusso a valle di una ala finita.

Infine, elenchiamo alcune convenzioni che saranno utilizzate nel testo. Per distinguere nell'Indice le Appendici dal testo i titoli delle Appendici saranno scritti in corsivo. Sarà sempre sottointesa la somma su indici ripetuti, a meno di un esplicito avviso contrario. Il simbolo \equiv indicherà identità, ovvero una eguaglianza che vale indipendentemente da almeno una delle variabili in gioco. Il simbolo $=:$ sarà utilizzato per definire (a secondo membro) una nuova quantità. Le dimensioni fisiche di massa, lunghezza, tempo, ... saranno indicate con \mathcal{M} , \mathcal{L} , \mathcal{T} , ..., ovvero con le corrispondenti maiuscole corsive.

Presentazione degli argomenti

Il testo si apre con una discussione della definizione di flusso come applicazione di \mathbb{R}^n ($n = 2, 3$) in sé e delle sue implicazioni topologiche. Derivando nel tempo il flusso, viene introdotto il campo di velocità nella sua rappresentazione lagrangiana $\mathbf{u}(\xi, t)$, funzione (vettoriale) della posizione ξ al tempo di riferimento ($t = 0$) e del tempo t medesimo. Utilizzando la trasformazione inversa del flusso si ottiene poi il campo di velocità nella sua rappresentazione euleriana, funzione della posizione \mathbf{x} al tempo corrente e del tempo. Associate al campo di velocità, sono introdotte differenti linee integrali: le traiettorie, le linee di corrente e le linee di fumo. Definito quindi il determinante jacobiano della trasformazione operata dal flusso, si determina la sua equazione di evoluzione nel tempo. Successivamente una analisi dell'atto di moto locale (cioè linearizzato) associato ad un flusso evidenzia una parte rigida, dipendente dalla parte antisimmetrica del tensore gradiente di velocità, ed una parte di deformazione pura, dovuta alla parte simmetrica del medesimo tensore. Una particolare attenzione è poi dedicata alle condizioni di integrabilità della forma $\mathbf{u} \cdot d\mathbf{x}$, che garantiscono l'esistenza di una funzione potenziale di velocità. Viene quindi introdotto il campo di accelerazioni nelle forme lagrangiana ed euleriana, sottolineando la natura non lineare del legame tra quest'ultima forma e la velocità. Appendici sono dedicate alla determinazione del flusso associato ad un campo di velocità di strain e ad alcuni richiami di Topologia Elementare ed Algebra Lineare.

Il capitolo *II* è dedicato alla scrittura delle equazioni del moto di un fluido, partendo dalla valutazione della derivata nel tempo dell'integrale di una funzione $f(\mathbf{x}, t)$ fatto su un volume che evolve col flusso (volume materiale). Utilizzando la forma funzionale di questa derivata vengono poi dedotte le equazioni di conservazione della massa, di bilancio della quantità di moto e del suo momento. Quest'ultima implica la simmetria del tensore degli sforzi interni al fluido. Specificando poi una relazione costitutiva lineare tra tensore degli sforzi e campo di moto si introduce il concetto di fluido Newtoniano e si ricavano le equazioni di Navier-Stokes. Infine, viene dedotto un bilancio per l'energia interna, poi specificato in termini di entalpia, entropia e temperatu-

ra. Una appendice è dedicata ad un veloce riepilogo delle equazioni di Maxwell in Termodinamica.

Il capitolo *III* è dedicato ad una rapida panoramica sui problemi di statica dei fluidi. Vengono dedotte le equazioni in un sistema non inerziale, poi applicate allo studio di flussi nei quali il fluido è in quiete in un sistema non inerziale. In particolare, si trovano soluzioni classiche per un flusso a pelo libero, in un riferimento in moto uniformemente accelerato ed in un riferimento rotante.

Come accennato sopra, dall'analisi dell'atto di moto locale emerge il ruolo particolarmente importante giocato dalla parte antisimmetrica del gradiente di velocità e quindi dalla vorticità, che ne è il vettore associato. Per questo motivo l'intero capitolo *IV* viene dedicato allo studio della dinamica della vorticità ed al legame tra vorticità e velocità, deducendo la legge di Biot-Savart in due e tre dimensioni. Vengono poi presentati alcuni modelli semplificati per lo studio della dinamica bidimensionale della vorticità.

Nel capitolo *V* vengono presentate alcune soluzioni analitiche classiche delle equazioni di Navier-Stokes, per flussi molto semplici. In particolare vengono analizzati i flussi all'interno di un tubo a sezione circolare (flusso di Poiseuille) ed attorno ad una sfera a basse velocità (di Stokes). Questo capitolo si chiude con una rapida panoramica sui flussi a potenziale.

Il capitolo *VI* è dedicato ad una prima analisi semplificata del flusso bidimensionale attorno ad un corpo, evidenziando risultati classici riguardo alla generazione della portanza su un profilo, il paradosso di d'Alembert e l'analisi basata sul potenziale complesso. Viene quindi calcolata la risultante delle sollecitazioni agenti sul corpo ed interpretata, utilizzando la dinamica della vorticità immessa dal corpo nel campo (vorticità di scia), la genesi della portanza su un profilo e della resistenza su una lastra piana. Viene quindi ricavato l'andamento asintotico della pressione, che ha una suggestiva interpretazione fisica una volta nota la risultante sul corpo, e con esso una equazione di bilancio globale dell'energia cinetica. Appendici sono dedicate alle valutazioni dei limiti dei potenziali di strato semplice e doppio ed alla simulazione numerica del flusso attorno ad un profilo di Joukowski con rilascio di vorticità.

I capitoli dal settimo all'undicesimo sono dedicati ad una trattazione introduttiva alla turbolenza. Mostrato come la natura non lineare delle equazioni del moto possa produrre soluzioni "disordinate" (ovvero estremamente sensibili al dato iniziale e fortemente irregolari), le principali caratteristiche fisiche della turbolenza vengono brevemente descritte nel capitolo *VII*.

Il successivo capitolo tratta la cinematica della turbolenza nell'ipotesi di omogeneità statistica dei campi, introducendo alcuni dei principali strumenti dell'analisi statistica utilizzati in questo ambito e sviluppando la trattazione in un sistematico parallelismo tra lo spazio fisico e quello spettrale. Tale analisi è estesa alla turbolenza isotropa nel successivo capitolo *IX*, discutendo i vincoli imposti da tale simmetria sulla forma tensoriale dei campi medi. Una appendice è dedicata agli angoli di Eulero, attraverso i quali si definisce il gruppo delle rotazioni sferiche, la cui legge di composizione viene verificata

VIII Prefazione

direttamente in termini degli angoli di Eulero. Una seconda appendice è dedicata allo studio del prodotto di riflessioni e tra rotazioni e riflessioni. Infine, una terza appendice tratta il legame tra la traccia della correlazione doppia di velocità e la funzione spettro di energia.

Il capitolo *X* è dedicato alla dinamica della turbolenza omogenea, sia nello spazio fisico che in quello spettrale. Si deducono equazioni di evoluzione per le correlazioni e per i tensori trasformati, oltre ad impostare l'analisi direttamente nello spazio di Fourier. Particolare attenzione viene posta al caso isotropo, nel quale le equazioni di evoluzione tensoriali si riducono a semplici equazioni scalari.

La parte di introduzione alla turbolenza si chiude con una breve panoramica sui metodi numerici di simulazione della turbolenza e sulle loro principali caratteristiche. Lo scopo è quello di fornire un primo orientamento, quasi un dizionario, senza alcuna pretesa di svolgere esaurientemente un argomento che di per sé occuperebbe intere biblioteche. Si accenna alle tecniche di integrazione *RANS* e *LES* e si introducono i modelli di turbolenza più comunemente adottati. È più volte sottolineato in questo ambito che l'utilizzo di tali tecniche e modelli non può prescindere dal dettagliato studio delle tecniche di discretizzazione ed integrazione numerica del problema. Ovviamente, l'analisi del problema discettizzato esula dagli scopi del presente testo.

Si passa poi allo studio del flusso bidimensionale di un fluido debolmente viscoso attorno ad un corpo, introducendo l'approssimazione di strato limite. Si discute il problema classico per una lastra piana semi-infinita ed un flusso laminare sia in assenza che in presenza di gradienti di pressione lungo la corrente, con una tecnica in grado di fornire stime asintotiche della soluzione di un problema di perturbazione singolare. Viene successivamente decritto l'approccio integrale, di enorme interesse applicativo. Si passa quindi ad analizzare lo strato limite turbolento sulla lastra piana, evidenziandone la struttura "stratificata" del campo di velocità medio e quindi il differente ruolo degli sforzi viscosi e turbolenti a diverse distanze dalla parete. Un problema analogo a quello cinematico si pone per il campo termico. Utilizzando la medesima tecnica di perturbazione singolare viene quindi affrontato il problema termico, sempre su una lastra piana semi-infinita, con particolare riguardo al caso di flusso isocoro ed a quello con numero di Prandtl unitario.

Infine, il testo si chiude con una breve panoramica su alcuni dei principali effetti della comprimibilità. Particolare enfasi viene posta sulla conseguente differente natura matematica delle equazioni del moto, discutendo un esempio classico monodimensionale in un fluido non viscoso e non conducente. Si accenna alla teoria delle caratteristiche (senza pretese di generalità), evidenziando la possibilità che tali equazioni sviluppino singolarità in un tempo finito, legata alla coalescenza delle caratteristiche e quindi alla formazione di urti. Queste discontinuità sono ovviamente conseguenza del modello matematico semplificato che viene adottato, divenendo in un fluido reale zone ad elevatissimi gradienti. La struttura dell'urto in un fluido viscoso e conducente, così come le relazioni tra le condizioni a monte ed a valle sono analizzate ripercorren-

do la soluzione classica di Becker. Il capitolo si chiude con l'analisi del flusso quasimonodimensionale omoentropico, utile per spiegare il funzionamento dei principali apparati propulsivi a getto.

Ringraziamenti

Nel terminare la presentazione di questo volume, ci è gradito ringraziare alcuni dei colleghi ed amici che ci hanno incoraggiato ed aiutato.

La nostra gratitudine va innanzitutto a Bernardo Favini ed a Filippo Maria Denaro, per il loro continuo ed importante contributo allo svolgimento di questo lavoro. Un aiuto parimenti importante e gradito è venuto in questi anni da Carmine Golia. La sua grande umanità ed il suo affetto sono alcuni dei motivi per cui amiamo essere in facoltà, nonostante il disagio di una sede del tutto isolata dal mondo civile.

Ringraziamo poi sinceramente Alfio Quarteroni per aver incoraggiato ed arricchito la stesura di questo testo con i suoi consigli. Siamo affettuosamente grati ad Alfio anche per averci regalato la sua preziosa amicizia.

Un ruolo non secondario hanno avuto nel nostro lavoro i contributi di alcuni carissimi amici: Enrico De Bernardis, Andrea Di Mascio, Alessandro Iafrati, Emilio Campana, Andrea Aprovitola, Luigi Iuspa e Francesco Scaramuzzino. A loro va il nostro sincero ringraziamento e la nostra profonda gratitudine.

Gli autori rivolgono infine il loro pensiero affettuoso e grato alla memoria di una persona indimenticabile e di un uomo di grande cultura scientifica e profonda umiltà ed onestà intellettuale, scomparso ormai da circa venti anni. La loro più grande riconoscenza va a Massimo Strani, che per pochi anni uno degli autori ha avuto la fortuna di avere vicino, ed al quale questo testo è dedicato. Da Massimo abbiamo ereditato (indegnamente) l'amore per una Fluidodinamica vista come un bellissimo gioco, in cui l'onestà intellettuale ed il rigore contano più di ogni altra qualità.

Nell'augurare una proficua lettura, gli autori sperano di essere riusciti a trasmettere il loro amore per una impostazione che si sforza di risultare soddisfacente da un punto di vista formale. Nel contempo, si assumono la piena responsabilità di ogni errore presente in questo testo e se ne scusano con il Lettore. Chiunque volesse segnalare errori, fare critiche, dare suggerimenti ed anche sollevare discussioni sulla Didattica e la Ricerca in Fluidodinamica può utilizzare il sito www.meccanicadeifluidi.it. Gli autori ringraziano in anticipo per qualunque tipo di contributo.

Un affettuoso augurio di buon lavoro.

Indice

1	Cinematica	1
1.1	Il flusso e le sue rappresentazioni	1
1.2	Il campo delle velocità	5
1.2.1	Traiettorie e costruzione del flusso	6
1.2.2	Linee di corrente	8
1.2.3	Linee di fumo	10
1.3	Evoluzione dell'elemento di volume	14
1.4	Decomposizione del gradiente di velocità	17
1.5	Il potenziale di velocità	19
1.6	Il campo delle accelerazioni	21
1.7	Curiosando in biblioteca	23
1.8	<i>Flusso generato da un campo di strain 2D</i>	27
1.9	<i>Cenni sugli spazi topologici</i>	31
1.10	<i>Richiami di Algebra Lineare</i>	33
2	Equazioni di bilancio	37
2.1	Il teorema del trasporto	37
2.2	Equazione di continuità	39
2.3	La funzione di corrente	42
2.4	Equazione della quantità di moto	45
2.5	Equazione del momento della quantità di moto	48
2.6	Relazione costitutiva: fluidi Newtoniani	49
2.7	Equazione di Bernoulli	53
2.8	L'equazione dell'energia	54
2.8.1	Equazione di bilancio per l'entropia	58
2.8.2	Equazione della temperatura	59
2.9	Curiosando in biblioteca	60
2.10	<i>Richiami sulle funzioni di stato termodinamiche</i>	65

3 Fluidi in quiete	67
3.1 Fluidi in quiete in un riferimento inerziale	67
3.2 Fluidi in quiete in riferimenti non inerziali	71
3.3 Curiosando in biblioteca	73
4 Le proprietà rotazionali del flusso	75
4.1 Equazione di Helmholtz	77
4.2 Il tubo vorticoso	80
4.3 La legge di Biot-Savart	83
4.3.1 Flusso piano	83
4.3.2 Flusso nello spazio tridimensionale	87
4.4 L'approssimazione di vortice puntiforme	90
4.4.1 Potenziale complesso	92
4.4.2 Conservazione del momento del primo ordine	95
4.4.3 La dinamica dei vortici puntiformi	98
4.4.4 Integrali primi del moto	98
4.5 L'approssimazione di curva vorticosa in un flusso piano	99
4.5.1 Definizione di curva vorticosa	100
4.5.2 Dinamica di curva vorticosa	102
4.6 Curiosando in biblioteca	106
4.7 <i>Valutazione del limite sulla curva vorticosa della velocità</i>	109
4.7.1 <i>Esistenza dell'integrale in parte principale</i>	109
4.7.2 <i>Valutazione del limite</i>	111
5 Soluzioni particolari delle equazioni di Navier-Stokes	113
5.1 Esempi di flussi a potenziale	113
5.1.1 Flusso attorno ad un cilindro circolare	114
5.1.2 Flusso in un angolo diedro	114
5.1.3 Flusso attorno ad un cilindro ellittico	116
5.2 Flussi in canali bidimensionali	119
5.3 Misura del coefficiente di viscosità di un liquido	121
5.4 Flusso all'interno di un tubo a sezione circolare	123
5.5 Flusso attorno ad una sfera	127
5.5.1 Equazioni di Navier-Stokes in coordinate sferiche	127
5.5.2 Il caso bidimensionale	131
5.5.3 Soluzione in regime di flusso di Stokes	133
5.5.4 Risultante delle sollecitazioni sulla sfera	135
5.6 Curiosando in biblioteca	136
6 Considerazioni introduttive sui flussi bidimensionali attorno a corpi	139
6.1 La portanza	140
6.2 Il paradosso di d'Alembert	143
6.3 Analisi del flusso piano con formulazioni integrali	144
6.4 Analisi del flusso piano col potenziale complesso	148

6.4.1	Flusso nel semipiano	148
6.4.2	Flusso all'esterno di un cerchio	150
6.4.3	Trasformazioni conformi	151
6.5	Il teorema di Blasius	155
6.6	La forza su un corpo immerso in un flusso piano	157
6.7	Genesi della portanza e della resistenza	161
6.8	Il momento su un corpo immerso in un flusso piano	162
6.9	Andamento asintotico della pressione	165
6.10	Bilancio di energia per il flusso piano attorno ad un corpo	167
6.11	Curiosando in biblioteca	169
6.12	<i>Valutazione del limite del potenziale di strato doppio</i>	171
6.13	<i>Valutazione del limite della derivata normale del potenziale di strato semplice</i>	175
6.14	<i>Flusso attorno ad un profilo di Joukowski</i>	177
6.14.1	<i>La trasformazione di Joukowski</i>	179
6.14.2	<i>Condizione di Kutta e generazione dei vortici puntiformi</i>	182
6.14.3	<i>La velocità di un vortice puntiforme</i>	184
6.14.4	<i>La velocità di un vortice puntiforme con il trattamento della interazione vortice-vortice</i>	185
6.14.5	<i>La risultante delle forze sul profilo</i>	185
6.14.6	<i>Alcuni risultati dalle simulazioni numeriche</i>	195
6.15	<i>Vortici puntiformi all'esterno di un cilindro rotondo</i>	197
6.15.1	<i>La forza sul corpo</i>	199
6.15.2	<i>La derivata nel tempo del momento del secondo ordine</i>	200
6.15.3	<i>Evoluzione dell'excess energy</i>	201
7	Il moto turbolento	203
7.1	Esempi di moto “ordinato” e “disordinato”	204
7.2	Regimi di flusso laminare e turbolento	206
7.3	Principali fenomenologie fisiche della turbolenza	207
7.3.1	L'interpretazione in termini di vorticità	208
7.3.2	Presenza simultanea di scale molto diverse	209
7.3.3	La turbolenza è un fenomeno dissipativo	209
8	Cinematica della turbolenza omogenea	211
8.1	Medie e correlazioni	211
8.1.1	Densità di probabilità	212
8.1.2	Media in probabilità	217
8.1.3	Correlazioni	219
8.2	La correlazione doppia di velocità	224
8.3	La funzione spettro d'energia	228
8.4	La correlazione doppia della vorticità	232
8.5	<i>Serie e trasformata di Fourier</i>	235
8.5.1	<i>Serie di Fourier e nucleo di Dirichlet</i>	235
8.5.2	<i>Trasformata di Fourier</i>	236

8.5.3 <i>Un esempio di applicazione della trasformata di Fourier</i>	239
9 La turbolenza omogenea ed isotropa	241
9.1 Gruppi di trasformazioni invarianti	242
9.1.1 Riflessioni attraverso un piano	243
9.1.2 Rotazioni piane	243
9.1.3 Rotazioni piane, traslazioni e riflessioni	244
9.1.4 Rotazioni sferiche	245
9.1.5 Rotazioni sferiche e riflessioni	245
9.2 Le proprietà di simmetria	246
9.2.1 Rotazioni sferiche e riflessioni	246
9.2.2 Rotazioni sferiche	249
9.2.3 Rotazioni piane e riflessioni	250
9.2.4 Rotazioni piane	251
9.2.5 Riflessioni	251
9.2.6 Assenza di simmetrie	253
9.3 Tensori isotropi solenoidali del primo ordine	254
9.4 Forma isotropa del tensore di correlazione doppia della velocità	255
9.5 Forma isotropa del tensore di correlazione della vorticità	260
9.6 Forma isotropa del tensore di correlazione tripla della velocità	260
9.7 <i>Alcune considerazioni sugli angoli di Eulero</i>	265
9.7.1 <i>Prodotto di due rotazioni sferiche</i>	265
9.8 <i>Riflessioni e rotazioni sferiche</i>	267
9.9 <i>Relazioni tra R ed E</i>	269
10 Cenni sulla dinamica della turbolenza	275
10.1 Dinamica delle correlazioni doppie di velocità	275
10.2 Dinamica della turbolenza omogenea ed isotropa	279
10.3 Invarianza del tensore spettro d'energia per piccoli numeri d'onda	282
10.3.1 Sviluppi per i termini di trasferimento Γ e di pressione Π	282
10.3.2 Valutazione di $\Gamma_{ijlm} + \Pi_{ijlm}$	284
10.3.3 Condizione di Loitsiansky	286
10.4 Altre considerazioni sulla dinamica della turbolenza omogenea	288
10.4.1 Ricostruzione delle statistiche nel tempo	288
10.4.2 Problema nello spazio dei numeri d'onda	289
10.5 Curiosando in biblioteca	293
11 Valutazioni semi-empiriche degli effetti della turbolenza	297
11.1 La simulazione numerica diretta (<i>DNS</i>)	297
11.2 Equazioni per il campo medio	298
11.3 Modellistica per le equazioni mediate (<i>RANS</i>)	300
11.4 La simulazione delle grandi scale (<i>LES</i>)	302
11.4.1 La funzione di filtro e l'operazione di filtraggio	303

11.4.2 Il filtraggio delle equazioni di Navier-Stokes	304
11.4.3 Cenni sugli effetti della discretizzazione	305
11.5 Curiosando in biblioteca	308
12 L'approssimazione di strato limite	311
12.1 Un esempio di perturbazione singolare $1D$	313
12.2 Strato limite su una lastra piana in una corrente uniforme	317
12.3 Strato limite su una lastra piana in una corrente non uniforme	323
12.4 Descrizione integrale dello strato limite su una lastra piana	333
12.5 Strato limite turbolento su lastra piana in una corrente laminare uniforme	338
12.6 Strato limite termico	344
12.6.1 Strato limite termico su una lastra piana in una corrente uniforme	346
12.6.2 Flusso a densità costante	348
12.6.3 Lastra piana con $Pr = 1$	353
12.7 Curiosando in biblioteca	354
12.8 <i>Uniformità per una soluzione di Falkner-Skan</i>	359
13 Flussi di fluidi comprimibili	361
13.1 La propagazione di piccoli disturbi	362
13.2 Flusso monodimensionale omoentropico	366
13.3 Flussi stazionari	373
13.4 Relazioni di salto e struttura dell'urto	374
13.4.1 Relazioni di salto	375
13.4.2 Soluzione di Becker	378
13.4.3 Calcolo numerico della soluzione di Becker	383
13.5 Flussi quasi-monodimensionali	384
13.6 Curiosando in biblioteca	387
Riferimenti bibliografici	389
Indice analitico	391

1

Cinematica

In questo capitolo viene introdotto, in forma semi-intuitiva, il concetto di *flusso* (§1.1) come trasformazione di \mathbb{R}^n ($n = 2$ o 3) in sé, cercando di evidenziare le motivazioni topologiche delle ipotesi comunemente utilizzate. Disponendo di una rappresentazione formale per il flusso, nel paragrafo 1.2 viene definito il *campo di velocità* $\mathbf{u}(x)$, funzione vettoriale della posizione x (oltre che, eventualmente, del tempo). In questo paragrafo vengono anche introdotte tre differenti linee integrali definibili a partire dal campo di velocità e di interesse non soltanto teorico, ma anche sperimentale. Nel paragrafo 1.3 viene analizzata la struttura dell'atto di moto locale indotto da un campo di velocità \mathbf{u} , attraverso la *decomposizione del gradiente di velocità* $\nabla \mathbf{u}$ nelle sue parti *simmetrica* ed *antisimmetrica*. Ne derivano semplici e suggestive interpretazioni per il rotore di \mathbf{u} e per la parte simmetrica di $\nabla \mathbf{u}$. Viene poi mostrato come, sotto particolari ipotesi, l'intero campo di velocità possa essere descritto da una funzione scalare: il *potenziale di velocità* (§1.5). Il *campo di accelerazioni* è introdotto nel paragrafo 1.6, evidenziando il carattere essenzialmente *non-lineare* del legame tra la velocità in un dato punto e l'accelerazione nel medesimo punto. Questa non-linearità è di fondamentale importanza in Fluidodinamica, come apparirà con maggiore chiarezza nei capitoli successivi.

Una breve bibliografia è infine discussa nel paragrafo 1.7.

1.1 Il flusso e le sue rappresentazioni

In questo paragrafo sarà brevemente introdotto il concetto formale di flusso, inteso come trasformazione bi-continua di \mathbb{R}^n ($n = 2$ o 3) in sé. Nel discutere le varie posizioni saranno utilizzati alcuni strumenti elementari degli spazi topologici, che per comodità del Lettore, vengono brevemente richiamati nell'appendice 1.9.

Consideriamo un aperto A_0 occupato dal fluido al tempo t_0 . Il moto di tale fluido in un intervallo di tempo $t_0 < t \leq T$ è noto se si conosce per ogni punto $\xi \in A_0$ la legge oraria del moto del punto materiale ad esso sovrapposto.

Quindi, è naturale pensare al moto di un fluido come ad una trasformazione \mathcal{F}_t di \mathbb{R}^n in sé, chiamata *flusso*, dipendente con continuità dal parametro tempo t .

Nelle ipotesi di regolarità su \mathcal{F}_t comunemente accettate, tale trasformazione risulta essere definita su¹ \overline{A}_0 : infatti la conoscenza del moto di un qualunque punto di A_0 (anche arbitrariamente vicino a ∂A_0) implica² la conoscenza del moto dei punti di ∂A_0 . Affinché possa essere un flusso, la trasformazione $\mathcal{F}_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ deve verificare le seguenti due *ipotesi geometriche* fondamentali: l'immagine $A_t = \mathcal{F}_t A_0$ di A_0 al tempo t è occupata dal medesimo fluido che era in A_0 al tempo iniziale t_0 (assunto 0 nel seguito), come è schematicamente illustrato in Fig. 1.1, ed inoltre \mathcal{F}_t sia invertibile su A_t .

In particolare, la frontiera di A_0 viene trasformata da \mathcal{F}_t nella frontiera di A_t . Occorre notare che su quest'ultima curva si preferisce non richiedere l'invertibilità del flusso, poiché soddisfare tale richiesta può complicare non poco la situazione. Per chiarire quest'ultimo punto, si consideri il flusso bidimensionale nel piano (x, y) (in seguito, semplicemente *flusso piano*) generato dall'immersione di un oggetto in un serbatoio contenente un liquido (cfr. Fig. 1.2). Al tempo $t = 0$, Fig. 1.2-a, l'oggetto sia fuori dal liquido, mentre al tempo $t = T > 0$, Fig. 1.2-b, esso vi sia completamente immerso. La frontiera di A_t è una curva³ chiusa per ogni $0 \leq t \leq T$, orientata in figura in verso antiorario.

¹ Dato l'insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$, \overline{A} è la chiusura di A , ovvero l'intersezione di tutti i chiusi contenenti A (cfr. Appendice 1.9).

² Generalmente si ammette che \mathcal{F}_t sia una trasformazione *continua* nel suo insieme di definizione (\overline{A}_0). È quindi continua in A_0 , ovvero considerato un punto $\xi \in A_0$, a cui corrisponde il punto $x = \mathcal{F}_t(\xi)$, per ogni dato $\varepsilon > 0$ è possibile trovare un numero $\delta_\varepsilon > 0$ tale che per tutti i punti $\xi' \in A_0$ che distano meno di δ_ε da ξ valga la $\|\mathcal{F}_t(\xi') - x\| < \varepsilon$ ($\|\cdot\|$ è ad esempio la norma euclidea: $\|x\| = \sqrt{x_i x_i}$).

Motiviamo l'affermazione che, in tali ipotesi, conoscere il moto dei punti di A_0 implica conoscere il moto dei punti della frontiera ∂A_0 . Consideriamo un arbitrario punto $\xi^* \in \partial A_0$ ed una qualunque successione $\{\xi_k \in A_0\}_{k=1,2,\dots}$ convergente a ξ^* (e quindi fondamentale, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists M_\varepsilon \in N \mid \forall k, h > M_\varepsilon: \|\xi_k - \xi_h\| < \varepsilon$). Essendo nota la posizione al tempo $t > 0$ dei punti $\mathcal{F}_t(\xi_k) = x_k$ per $k = 1, 2, \dots$, possiamo costruire la corrispondente successione $\{x_k\}_{k=1,2,\dots}$. Mostriamo che tale successione ammette un limite, valore da assegnare ad $\mathcal{F}_t(\xi^*)$ per prolungarla in modo continuo al punto $\xi^* \in \partial A_0$.

Essendo $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ completo, è sufficiente provare che la successione $\{x_k\}_{k=1,2,\dots}$ è fondamentale, ovvero che, scelto un numero $\varepsilon > 0$, esiste in corrispondenza a questo un numero naturale M_ε tale che per ogni $k, h > M_\varepsilon$ abbiamo $\|x_k - x_h\| < \varepsilon$. Infatti, utilizzando le notazioni precedentemente introdotte per la continuità, scegliamo il numero M_ε tale che per ogni $k, h > M_\varepsilon$ valga la $\|\xi_k - \xi_h\| < \delta_\varepsilon$, ma allora per la continuità di \mathcal{F}_t abbiamo che $\|x_k - x_h\| = \|\mathcal{F}_t(\xi_k) - \mathcal{F}_t(\xi_h)\| < \varepsilon$ e quindi la successione $\{x_k\}_{k=1,2,\dots}$ è fondamentale.

³ Una curva \mathcal{C} in \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) è una applicazione di un segmento $[a, b]$ dell'asse reale nello spazio \mathbb{R}^n :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \sigma &\mapsto x(\sigma) \end{aligned} \tag{1.1}$$

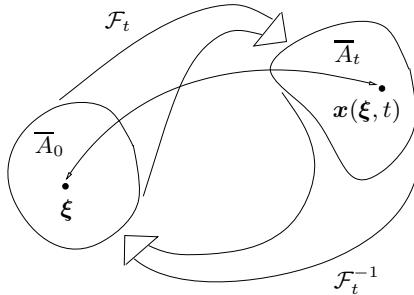


Figura 1.1. Gli insiemi aperti A_0 ed A_t sono sottoinsiemi di \mathbb{R}^n ($n = 2$ o 3) che, ai tempi 0 e t , sono occupati dal medesimo fluido. Il flusso \mathcal{F}_t trasforma l'insieme chiuso \bar{A}_0 nell'insieme chiuso \bar{A}_t : ad ogni punto $\xi \in \bar{A}_0$ corrisponde, mediante il flusso \mathcal{F}_t , un punto $x(\xi, t) \in \bar{A}_t$. Viceversa, ogni punto $x \in \bar{A}_t$ va in un punto $\xi(x, t) \in \bar{A}_0$ con la trasformazione inversa \mathcal{F}_t^{-1} . Non si può invece dire nulla sull'esistenza di tale inversa sulla frontiera di \bar{A}_t .

Si può osservare che la parte di frontiera di A_0 costituita al tempo iniziale dal pelo libero (segmento P_1P_2 in Fig. 1.2-a) viene trasformata dal flusso \mathcal{F}_T nel pelo libero (segmenti Q_1Q_2 e Q_6Q_7) unito al “taglio” operato dall’immersione dell’oggetto nel fluido (segmenti Q_2Q_3 e Q_5Q_6 , da considerare sovrapposti) ed alla frontiera dell’oggetto stesso (spezzata $Q_3Q_4Q_5$). La curva ∂A_T non è *semplice* e, se si considera un qualunque punto del “taglio” (rappresentato in figura da un cerchietto), ci si convince facilmente che esso proviene da due punti distinti del pelo libero all’istante 0 . Ciò prova la non invertibilità del flusso \mathcal{F}_t su ∂A_t . Osserviamo che la forma effettiva del “taglio” è irrilevante, in questo contesto.

L’esistenza dell’ inversa su ∂A_t potrebbe essere ripristinata se si considerasse il “taglio” composto dai due archi sovrapposti, ma distinguibili in base al verso col quale vengono percorsi. Ciascun punto sul “taglio” risulterebbe allora formato da due punti distinti, appartenenti uno all’arco Q_2Q_3 e l’altro all’arco Q_5Q_6 . Per distinguere i due punti, occorrerebbe allora specificare il verso “locale” di percorrenza di ∂A_T , oppure associare a ciascun punto di ∂A_T l’informazione topologica su una base di intorni (cfr. Appendice 1.9) di tale punto. In entrambi i casi, la definizione di flusso su ∂A_0 risulterebbe assai più complicata di quella appena introdotta.

Come è stato già accennato, oltre alle precedenti ipotesi di natura geometrica sul flusso, è necessario porre anche *ipotesi di regolarità*, al fine di poter applicare alcuni strumenti dell’Analisi Matematica. Una ipotesi che semplifi-

La variabile reale σ prende il nome di *parametro*. Eventualmente, $a = -\infty$ e/o $b = +\infty$. L’ordinamento naturale di \mathbb{R} induce un verso di percorrenza su \mathcal{C} ; la curva \mathcal{C} munita di un verso di percorrenza si chiama *curva orientata*. La curva (1.1) è *semplice* se, con al più l’eccezione dei valori a e b del parametro σ , $x(\sigma_1) = x(\sigma_2)$ implica $\sigma_1 = \sigma_2$. Infine, la curva (1.1) è *chiusa* se $x(a) = x(b)$.

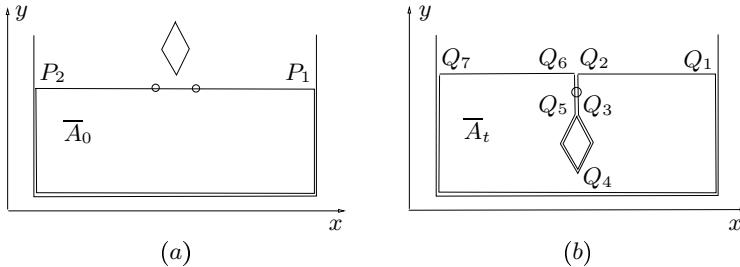


Figura 1.2. Un corpo esterno al dominio fluido (a) viene immerso completamente (b) nel liquido contenuto in un serbatoio a pelo libero. La superficie libera (identificata dal segmento P_1P_2 al tempo 0 (a) viene trasformata dal flusso, conseguente all'immersione del corpo nel liquido, nella spezzata identificata dai punti Q_1, Q_2, \dots, Q_7 al tempo T (b). Sui due archi di ∂A_t sovrapposti (Q_2Q_3 e Q_5Q_6) non esiste l'inversa del flusso.

ca grandemente il trattamento matematico del moto di un fluido consiste nel richiedere che la trasformazione \mathcal{F}_t e la sua inversa \mathcal{F}_t^{-1} siano continue, nei rispettivi insiemi di definizione \overline{A}_0 ed A_t . Questa assunzione viene poi generalmente rafforzata richiedendo l'esistenza e la continuità di tutte le derivate di \mathcal{F}_t in ξ e di \mathcal{F}_t^{-1} in x . Esistono però importanti eccezioni, che verranno discusse nel seguito, in cui si studiano flussi con proprietà di regolarità più deboli. Occorre notare che si richiede la continuità di \mathcal{F}_t anche sulla frontiera di A_0 , che non può quindi essere spezzata dalla trasformazione in più archi non connessi. Nell'esempio precedente, in ciascun punto ξ del pelo libero all'istante 0, comunque si scelga un intorno⁴ U_x del punto $x = \mathcal{F}_T \xi$ sulla curva ∂A_t , si può determinare un intorno V_ξ su ∂A_0 tale che $\mathcal{F}_T(V_\xi) \subseteq U_x$. Un esempio di trasformazione \mathcal{F}_t discontinua è dato dalla separazione di gocce di liquido da un pelo libero o dalla rottura di gocce isolate come in Fig. 1.3. In tal caso, fissato l'intorno U_x di $x = x(\xi, t) \in \partial A_t$ non è possibile trovare alcun intorno V_ξ del punto ξ tale che $\mathcal{F}_t(V_\xi) \subseteq U_x$.

Riguardo alla dipendenza dal tempo della funzione $x(\xi, t)$, che descrive la legge oraria del moto del punto materiale sovrapposto alla particella fluida in ξ al tempo 0, generalmente si considera tale funzione infinitamente derivabile in t . Questo consente, peraltro, di calcolare il campo di velocità (§1.2) e quello delle accelerazioni (§1.6), che risultano entrambe funzioni (vettoriali) continue del tempo. In particolare, essendo il campo di accelerazioni proporzionale alla forza agente sulla particella, per il tramite della legge di Newton, esso dovrà essere a sua volta una funzione infinitamente derivabile del tempo.

⁴ Data una curva $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ ed un punto $x \in \mathcal{C}$, per intorno U_x di tale punto sulla curva si intende l'arco ottenuto intersecando la curva \mathcal{C} con un intorno n -dimensionale (ad esempio sferico) del punto x , sufficientemente piccolo da far risultare tale arco un insieme connesso.

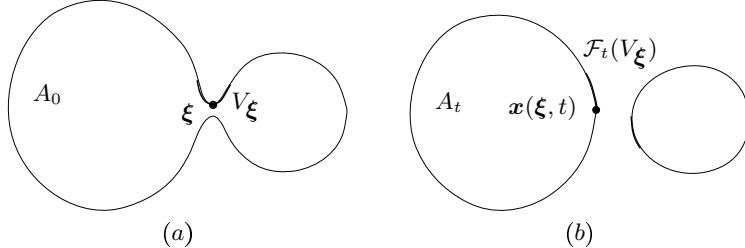


Figura 1.3. Esempio in due dimensioni di una “goccia” (a, tempo 0) che si rompe in due “gocce” più piccole (b, $t > 0$). Se chiamiamo con ξ il punto in cui la frontiera ∂A_0 si rompe, un qualunque intorno V_ξ di ξ su ∂A_0 (arco in grassetto) viene trasformato dal flusso in due archi non connessi $F_t(V_\xi)$ (in grassetto), appartenenti alle frontiere delle due gocce prodotte (componenti connesse della ∂A_t). È allora evidente che, comunque si scelga un intorno U_x del punto $x(\xi, t)$, non si riesce a trovare alcun intorno V_ξ del punto ξ tale che $F_t(V_\xi) \subseteq U_x$.

In un istante $t \geq 0$, una generica funzione f della posizione corrente $x \in A_t \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ o 3) può essere scritta come una funzione della posizione al tempo 0 e del tempo medesimo, semplicemente considerandone la funzione composta $f \circ F_t^{-1}$ con l'inversa del flusso al tempo t . Infatti, F_t^{-1} associa ad un punto $x \in A_t$ la posizione $\xi \in A_0$ occupata al tempo 0 dal punto materiale che è in x al tempo t . Conseguentemente, si parla di *rappresentazione euleriana* della funzione f , indicata con $f^{(e)}(x)$, quando questa è pensata come genuina funzione di x (posizione al tempo t), mentre si definisce *rappresentazione lagrangiana* di f la funzione $f^{(L)}(\xi, t)$, ottenuta considerando $f \circ F_t^{-1}$ e legata alla rappresentazione euleriana dalla relazione $f^{(e)}[x(\xi, t)] = f^{(L)}(\xi, t)$. Occorre infine notare che, sulla base delle ipotesi di regolarità comunemente accettate sul flusso, se $f^{(e)}(x)$ è una funzione di classe k di x , anche $f^{(L)}(\xi, t)$ risulterà essere una funzione di classe k in *entrambe le variabili* ξ e t . Quindi, in particolare, superfici e curve *regolari* in A_0 od in A_t vengono trasformati dal flusso F_t o dalla sua inversa F_t^{-1} in superfici e curve *regolari*.

1.2 Il campo delle velocità

La velocità lagrangiana di un punto materiale che è in ξ all'istante di riferimento si scrive come derivata della posizione di tale punto nel tempo:

$$\mathbf{u}^{(L)}(\xi, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(\xi, t + \Delta t) - x(\xi, t)}{\Delta t} = \partial_t x(\xi, t), \quad (1.2)$$

utilizzando la trasformazione inversa del flusso F_t^{-1} tale campo può essere valutato nella corrispondente forma euleriana:

$$\boldsymbol{u}^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{u}^{(\mathcal{L})}[\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}, t), t]. \quad (1.3)$$

Al fine di semplificare le notazioni, i suffissi “ (\mathcal{L}) ” e “ (ε) ”, che individuano le forme lagrangiana ed euleriana del campo di velocità, saranno omessi in tutti i casi in cui la forma del campo \boldsymbol{u} utilizzata è evidente dal contesto.

1.2.1 Traiettorie e costruzione del flusso

La legge oraria del moto per $t \in [0, T]$ del punto materiale che è in $\boldsymbol{\xi}$ al tempo 0 e si muove col flusso si ottiene integrando il problema differenziale ordinario di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(t) = \boldsymbol{u}^{(\varepsilon)}[\boldsymbol{x}(t), t] \\ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{\xi} \end{cases} \quad \text{traiettoria} \quad (1.4)$$

La funzione $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}, t)$ che risolve il problema (1.4), per le proprietà di regolarità assunte valide per il flusso, esiste unica ed è C^∞ in $\boldsymbol{\xi}$ e t . La soluzione del problema (1.4) per tutti i punti $\boldsymbol{\xi} \in A_0$ consente quindi di definire operativamente il flusso \mathcal{F}_t per $t \in [0, T]$.

Facciamo un primo semplice esempio, considerando un flusso isotropo. In un sistema di coordinate sferico in \mathbb{R}^n ($n = 2$ o 3) di centro nell'origine, in cui il generico vettore posizione \boldsymbol{x} sia dato dal prodotto del versore radiale $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x}/\|\boldsymbol{x}\|$ per il modulo $\|\boldsymbol{x}\| = \delta$, consideriamo il campo di velocità euleriano:

$$\boldsymbol{u}^{(\varepsilon)}(\boldsymbol{x}) = \rho(\delta) \frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}. \quad (1.5)$$

Osserviamo che, essendo tale campo puramente radiale, la direzione del vettore velocità risulta indeterminata nell'origine ($\delta = 0$). Ne segue che per $\delta \rightarrow 0^+$ la funzione $\rho(\delta)$ deve ammettere limite nullo o infinito. Assumendo dapprima $\rho(0) = 0$ e quindi $A_0 = \mathbb{R}^3$, calcoliamo il flusso \mathcal{F}_t . A tale scopo risolviamo il problema differenziale⁵ (1.4) per una condizione iniziale $\boldsymbol{\xi} = \delta_0 \boldsymbol{r}_0$ arbitraria:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\delta \boldsymbol{r}) = \dot{\delta} \boldsymbol{r} + \delta \dot{\boldsymbol{r}} = \rho(\delta) \boldsymbol{r} \\ \delta(0) \boldsymbol{r}(0) = \delta_0 \boldsymbol{r}_0. \end{cases}$$

Essendo $\dot{\boldsymbol{r}}$ ortogonale a \boldsymbol{r} , dall'equazione differenziale segue $\boldsymbol{r}(t) \equiv \boldsymbol{r}_0$ e $\dot{\delta} = \rho(\delta)$. Ne segue che la traiettoria del generico punto materiale è puramente radiale, ovvero diretta lungo la semiretta che si origina in $\mathbf{0}$ e passa per la posizione iniziale del punto medesimo. Se $\delta_0 = 0$ l'equazione $\dot{\delta} = \rho(\delta)$ fornisce $\delta \equiv 0$, mentre, se $\delta_0 \neq 0$, integrando per separazione di variabili si ha la soluzione in forma implicita:

⁵ La derivata ordinaria nel tempo verrà anche indicata con un punto, ovvero se f è una funzione del solo tempo t , \dot{f} indicherà la derivata df/dt .

$$\int_{\delta_0}^{\delta} \frac{d\eta}{\rho(\eta)} = t .$$

Il caso più semplice si ha quando $\rho(\delta) = U\delta/R$, in cui U ed R sono una velocità ed una lunghezza di riferimento. I moduli delle velocità crescono linearmente con la distanza δ dall'origine. Ne segue la soluzione $\delta(t) = \delta_0 \exp(Ut/R)$, ovvero $\mathbf{x}(\xi, t) = \xi \exp(Ut/R)$. Se $U > 0$ il flusso consiste in una espansione isotropa centrata dall'origine, mentre se $U < 0$ si ha una contrazione di tutto lo spazio verso l'origine, entrambe su scala dei tempi R/U e con andamenti esponenziali nel tempo. Se invece si considera il caso in cui $\rho(\delta) = U[1 - \exp(-\delta/R)]$, si ottiene $\delta(t) = R \log[1 + (\exp(\delta_0/R) - 1) \exp(Ut/R)]$. Si osservi che $\delta(t) \simeq \delta_0 \exp(Ut/R)$ se $\delta_0 \ll R$ e $\delta(t) \simeq \delta_0 + Ut$ se $\delta_0 \gg R$.

Se si rinuncia all'ipotesi $\rho(0) = 0$, allora $\rho \rightarrow \infty$ nello stesso limite ed è istruttivo analizzare il caso in cui $\rho(\delta) = U(R/\delta)^{n-1}$ (n è la dimensione dello spazio ambiente) ed, essendo il campo di velocità:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = UR^{n-1} \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^n} \quad (1.6)$$

singolare nell'origine, $A_0 = \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$. U è la componente radiale di velocità nei punti della superficie sferica centrata nell'origine e di raggio R . Questo campo di velocità può essere pensato generato da una sorgente (che può essere anche di intensità negativa) puntiforme posta nell'origine. Per questo flusso la *portata volumetrica* q attraverso una qualunque superficie sferica $\partial B_{\mathbf{0}}(r)$ centrata nell'origine e di raggio r :

$$q[\partial B_r(\mathbf{0})] = \int_{\partial B_r(\mathbf{0})} dS(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \quad (1.7)$$

($dS(\mathbf{x})$ è l'elemento di superficie nel punto \mathbf{x} e $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ è il versore normale uscente dalla superficie S nel medesimo punto: $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}/r$) è indipendente dal raggio r della sfera $B_{\mathbf{0}}(r)$.

- ◊ **Esercizio:** Mostrare che vale un risultato più forte: la portata volumetrica uscente dalla frontiera di un qualunque insieme aperto contenente l'origine ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$) è la stessa.

Suggerimento: verificare che $\nabla \cdot \mathbf{u} \equiv 0$ ed usare il teorema di Gauss.

Infatti, attraverso la superficie della sfera $B_{\mathbf{0}}(r)$ si misura la portata volumetrica:

$$q = \chi_n r^{n-1} \rho(r) \equiv \chi_n U R^{n-1}, \quad (1.8)$$

con $\chi_2 = 2\pi$ e $\chi_3 = 4\pi$. Integrando nel tempo l'equazione $\dot{\delta} = \rho(\delta)$ si ottiene:

$$\delta(t) = \delta_0 [1 + n(R/\delta_0)^{n-1} Ut/\delta_0]^{1/n} .$$

Se $U > 0$ il flusso consiste in una espansione isotropa, mentre se $U < 0$ non si può (a stretto rigore) parlare di flusso nel dominio $\mathbb{R} - \{\mathbf{0}\}$, almeno nell'accelerazione con la quale è stato introdotto (§ 1.1). Infatti, le particelle collassano in $\mathbf{0}$ in un tempo $t^*(\delta_0)$ finito (ad esempio, quelle che sono sulla superficie $B_{\mathbf{0}}(\delta_0)$ al tempo 0 collassano nell'origine in un tempo $t^* = -R/(nU)(\delta_0/R)^n$), accelerando da una velocità di intensità $U(R/\delta_0)^{n-1}$ ($t = 0$) ad una velocità infinita ($t = t^*$).

Un esempio molto più interessante di calcolo delle traiettorie è discusso nell'appendice 1.8.

1.2.2 Linee di corrente

Disponendo del campo di velocità ad un istante t fissato, è spesso utile considerare le curve a cui il campo di velocità è tangente. Scelto un punto \mathbf{x}_0 , la curva $\mathbf{x}_c = \mathbf{x}_c(\sigma)$ soluzione del problema differenziale:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}_c}{d\sigma}(\sigma) = \mathbf{u}^{(\varepsilon)}[\mathbf{x}_c(\sigma), t] \\ \mathbf{x}_c(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad \text{linea di corrente} \quad (1.9)$$

prende il nome di *linea di corrente*, passante per il punto \mathbf{x}_0 . Notare che il parametro σ è dimensionalmente omogeneo ad un tempo. Inoltre, per la proprietà di unicità della soluzione del sistema differenziale (1.9), in ogni punto del campo in cui $|\mathbf{u}|$ sia *finito* e *non nullo* passa una ed una sola linea di corrente. Mentre può accadere che infinite linee di corrente passino per un punto in cui $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, oppure per un punto in cui $|\mathbf{u}| \rightarrow \infty$, rimanendo indeterminata per tali vettori velocità la direzione. Un punto in cui $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ si chiama *punto di ristagno*.

- ◊ **Esercizio:** Determinare le linee di corrente per il campo di velocità (1.5). Mostrare che, una volta parametrizzate scegliendo $\sigma = t$, queste linee coincidono con le traiettorie e quindi convergono tutte nel punto $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. (1.10)

Riguardo al problema differenziale (1.9) occorre sottolineare che in esso il tempo t svolge solamente il ruolo di un parametro. Per questo, se il campo di velocità euleriano $\mathbf{u}^{(\varepsilon)}$ è una effettiva funzione del tempo (campo *non stazionario*), i due problemi differenziali (1.4) per le traiettorie e (1.9) per le linee di corrente sono essenzialmente diversi e forniscono soluzioni differenti, anche qualora si scelga $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_c(0)$. Nel contempo, se il campo di velocità non è esplilicamente funzione del tempo (campo *stazionario*), allora scegliendo $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_c(0)$ e come parametro σ lungo la linea di corrente proprio il tempo t , quest'ultima curva coincide con la corrispondente traiettoria. Ad esempio, per un campo di velocità non stazionario indotto da strain, vedi equazione (1.51) nell'appendice 1.8, le linee di corrente sono date dalle equazioni:

$$\begin{cases} x_c(\sigma) = \frac{1}{2\gamma} \left\{ [(\gamma + \chi_x)x_0 + \chi_y y_0]e^{\gamma\sigma} + [-(\gamma - \chi_x)x_0 - \chi_y y_0]e^{-\gamma\sigma} \right\} \\ y_c(\sigma) = \frac{1}{2\gamma} \left\{ [\chi_y x_0 + (\gamma - \chi_x)y_0]e^{\gamma\sigma} + [-\chi_y x_0 + (\gamma + \chi_x)y_0]e^{-\gamma\sigma} \right\} . \end{cases} \quad (1.11)$$

Facciamo altri esempi, con campi di velocità bidimensionali piani. Consideriamo il campo di velocità:

$$u \equiv u_0, \quad v(y; t) = \Omega y \sin \Omega t, \quad (1.12)$$

in cui $\Omega = 2\pi/t^*$, e determiniamo l'equazione della linea di corrente passante per il punto (x_0, y_0) , ovvero risolviamo il problema differenziale:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\sigma} = u_0 \\ \frac{dy}{d\sigma} = \Omega \sin \Omega t \quad y(\sigma) \\ x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \end{cases}$$

che implica la forma esplicita della linea di corrente ottenuta con l'eliminazione del parametro σ tra $x = x(\sigma)$ ed $y = y(\sigma)$:

$$y(x) = y_0 \exp \left[\frac{\Omega}{u_0} \sin \Omega t (x - x_0) \right]. \quad (1.13)$$

Come si può notare tale linea cambia nel tempo ed in particolare diviene una retta parallela all'asse x in tutti i tempi t che annullano il $\sin \Omega t$. Consideriamo poi il campo di velocità:

$$u(x, y; t) = \frac{\Omega^2}{u_0} xy \sin \Omega t, \quad v(y; t) = -\frac{\Omega^2}{2u_0} y^2 \cos \Omega t, \quad (1.14)$$

in cui $\Omega = 2\pi/t^*$ ed u_0 sono la pulsazione e la velocità di riferimento. La linea di corrente che passa per il punto (x_0, y_0) si calcola risolvendo il problema differenziale:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\sigma} = \frac{\Omega^2}{u_0} \sin \Omega t \quad x(\sigma)y(\sigma) \\ \frac{dy}{d\sigma} = -\frac{\Omega^2}{2u_0} \cos \Omega t \quad y^2(\sigma) \\ x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \end{cases} \quad (1.15)$$

nel quale si integra la seconda equazione per separazione di variabili e poi la prima, con la stessa tecnica. Poiché σ è omogeneo ad un tempo ed in questo caso disponiamo di una scala naturale delle frequenze (Ω), introduciamo il parametro adimensionale $\sigma' = \Omega\sigma$. La seconda equazione fornisce $y(\sigma') \equiv 0$ se $y_0 = 0$, mentre se $y_0 \neq 0$ si può integrare per separazione di variabili ottenendo:

$$y(\sigma') = \frac{y_0}{1 + \beta \cos \Omega t \sigma'} \quad (1.16)$$

in cui $\beta = \Omega y_0 / (2u_0)$, la quale include anche la soluzione per $y_0 = 0$. L'equazione (1.16) mostra che la funzione $y(\sigma')$ è costante in tutti i tempi t che annullano il $\cos \Omega t$, mentre nei rimanenti tempi diverge quando $\sigma' \rightarrow -1/(\beta \cos \Omega t)$. La prima equazione del problema (1.15) si integra utilizzando la soluzione (1.16):

$$\frac{dx}{x} = \frac{2\beta \sin \Omega t}{1 + \beta \cos \Omega t \sigma'} d\sigma' ,$$

e vanno distinti i due casi: 1) $\beta \cos \Omega t = 0$, 2) $\beta \cos \Omega t \neq 0$. Nel primo la soluzione è $x(\sigma') = x_0 \exp(2\beta \sin \Omega t \sigma')$, mentre nel secondo è $x(\sigma') = x_0 (1 + \beta \cos \Omega t \sigma')^{2 \tan \Omega t}$. Mentre nel primo caso la linea di corrente è una retta parallela all'asse delle x , nel secondo eliminando σ' tra le espressioni di $x = x(\sigma')$ e di $y = y(\sigma')$ troviamo $x/x_0 = (y_0/y)^{2 \tan \Omega t}$.

Consideriamo infine per $y \neq 0$ il campo di velocità:

$$u(x, y; t) = \Omega \left(x + 2 \frac{\Omega}{u_0} y^2 \right) + u_0 \sin \Omega t , \quad v(x, y) = u_0 \frac{x}{2y} , \quad (1.17)$$

in cui la velocità (u_0) e la pulsazione ($\Omega = 2\pi/t^*$) di riferimento sono assegnate. Dall'equazione per y :

$$\frac{dy}{d\sigma} = u_0 \frac{x(\sigma)}{2y(\sigma)} ,$$

ponendo $\eta = y^2$ ed indicando con un apice la derivazione in σ , otteniamo $x = \eta'/u_0$ e sostituendo nell'equazione per x :

$$\eta'' - \Omega \eta' - 2\Omega^2 \eta = u_0^2 \sin \Omega t ,$$

da integrare con le condizioni iniziali $\eta(0) = y_0^2$, $\eta'(0) = u_0 x_0$. Otteniamo allora le linee di corrente:

$$x(\sigma) = \frac{1}{3\Omega u_0} (\alpha e^{2\Omega\sigma} - \beta e^{-2\Omega\sigma})$$

$$y(\sigma) = \pm \frac{1}{\sqrt{6}\Omega} [(\alpha e^{2\Omega\sigma} + 2\beta e^{-2\Omega\sigma}) - 3u_0^2 \sin \Omega t]^{1/2} ,$$

in cui abbiamo posto: $\alpha(t) = 2\Omega^2 y_0^2 + 2\Omega u_0 x_0 + u_0^2 \sin \Omega t$ e $\beta(t) = 2\Omega^2 y_0^2 - \Omega u_0 x_0 + u_0^2 \sin \Omega t$. Inoltre il segno superiore vale per $y_0 > 0$ e l'inferiore per $y_0 < 0$.

1.2.3 Linee di fumo

In un campo di velocità variabile nel tempo è spesso utilizzato un terzo tipo di curva integrale che ha un importante corrispettivo sperimentale. Infatti, accade spesso che, per visualizzare un flusso, venga immesso in uno o più

punti del campo un tracciante (inchiostro o latte in acqua, fumo in aria, ...) di densità molto vicina a quella del fluido.⁶ In questo modo, iniettando tracciante per $0 \leq t \leq T$ dalla posizione \mathbf{x}_0 , si visualizzeranno le posizioni assunte per $t = T$ da tutte le particelle che sono transitate nella stazione \mathbf{x}_0 nell'intervallo di tempo esaminato. Da un punto di vista formale, se si desidera calcolare le posizioni occupate per $t = T$ da tutte le particelle transitate in \mathbf{x}_0 nell'intervallo di tempo in esame, occorre integrare il problema differenziale:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}_f}{dt}(t | \tau) = \mathbf{u}^{(\varepsilon)}[\mathbf{x}_f(t | \tau), t] & \text{per } \tau < t \leq T \\ \mathbf{x}_f(\tau | \tau) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad \text{linea di fumo} \quad (1.18)$$

in cui $\mathbf{x}_f(t | \tau)$ indica la posizione al tempo t della particella marcata al tempo τ . $\mathbf{x}_f(T | \tau)$ per $0 \leq \tau \leq T$ fornirà allora la *linea di fumo*, curva che è anche visualizzabile sperimentalmente come è schematizzato in Fig. 1.4. In generale, se il campo di velocità è non stazionario, le linee di fumo differiscono dalle traiettorie e dalle linee di corrente, mentre per un flusso stazionario, in cui il campo di velocità è funzione della sola posizione, se si sceglie $\mathbf{x}_0 = \xi$ e si parametrizza la linea di corrente con $\sigma = t$ le tre curve (1.4, 1.9, 1.18) coincidono.

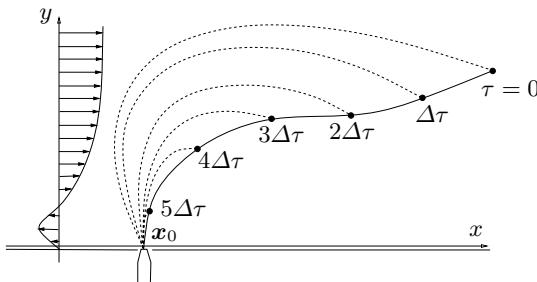


Figura 1.4. Linea di fumo (curva continua) per un flusso non stazionario su una parete piana disposta lungo l'asse x , in cui vengono immesse particelle di tracciante da un punto \mathbf{x}_0 del campo vicino alla parete. Sono disegnate le posizioni (rappresentate con il simbolo \bullet) e le traiettorie (curve tratteggiate) al tempo $T = 6\Delta\tau$ delle particelle emesse ai tempi $\tau = k\Delta\tau$ con $k = 0, 1, \dots, 5$. Al medesimo tempo $T = 6\Delta\tau$, è disegnato anche un profilo della componente x della velocità.

⁶ Questa richiesta sulla densità del fluido “tracciante” viene fatta per minimizzare l’effetto della presenza di un campo gravitazionale. Infatti, sul fluido tracciante agirà una forza (di galleggiamento) la cui intensità è proporzionale al valore della differenza tra densità del fluido e densità del tracciante. L’azione della corrispondente accelerazione può portare ad una errata descrizione del flusso.

Facciamo qualche esempio nel caso di flusso bidimensionale piano. Consideriamo il campo di velocità (1.12), per il quale la traiettoria del punto materiale che è in (x_0, y_0) al tempo τ è data per $t \geq \tau$ da:

$$x(t | \tau) = x_0 + u_0(t - \tau), \quad y(t | \tau) = y_0 \exp(\cos \Omega\tau - \cos \Omega t),$$

ponendo $t = T$ si ottengono le linee di fumo:

$$x(T | \tau) = x_0 + u_0(T - \tau), \quad y(T | \tau) = y_0 \exp(\cos \Omega\tau - \cos \Omega T),$$

curve parametrizzate in $\tau \in [0, T]$. Tali curve sono disegnate in Fig. 1.5 in corrispondenza delle scelte $T = t^*/2$ (a) e $T = t^*$ (b).

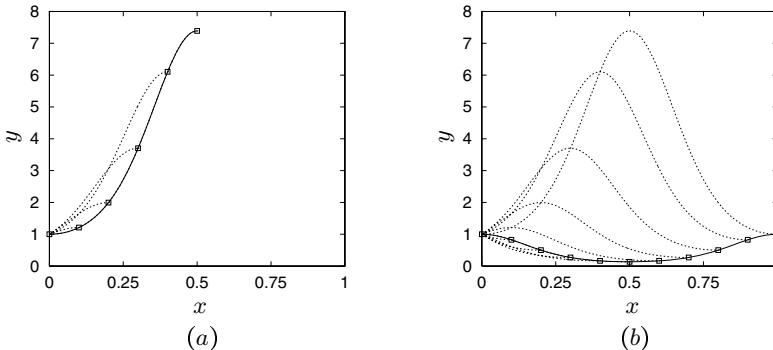


Figura 1.5. Con linee continue sono disegnate le linee di fumo passanti per il punto $x_0 = 0, y_0 = 1$ ai tempi $T = t^*/2$ (a) e $T = t^*$ (b) per il flusso generato dal campo di velocità (1.12) con $u_0 = 1$ e $t^* = 1$. Con linee tratteggiate sono inoltre riportate le traiettorie delle particelle che sono in x_0 ogni $\Delta\tau = t^*/10$. Una traiettoria ($\tau = 0$) in (a) ed una ($\tau = 5\Delta\tau$) in (b) risultano sovrapposte alle corrispondenti linee di fumo.

Consideriamo poi il campo di velocità (1.14) e determiniamo le linee di fumo passanti per il punto (x_0, y_0) . Ovviamente, se $y_0 = 0$ si ottiene subito la soluzione $x(t) \equiv x_0, y(t) \equiv y_0$. Assumendo $y_0 \neq 0$, integriamo il sistema differenziale:

$$\begin{cases} -\frac{dy}{y^2} = \frac{\Omega^2}{2u_0} \cos \Omega t \, dt \\ \frac{dx}{x} = \frac{\Omega^2}{u_0} y \sin \Omega t \, dt \\ y(\tau) = y_0, \quad x(\tau) = x_0, \end{cases} \quad (1.19)$$

in cui i parametri Ω (pulsazione di riferimento), u_0 (velocità di riferimento) ed y_0 appariranno combinati nella forma $\beta = \Omega y_0 / (2u_0)$. Al fine di semplificare la

trattazione analitica seguente, si assume inoltre $|\beta| < 1/2$. La prima equazione del sistema (1.19) fornisce:

$$y(t \mid \tau) = \frac{y_0}{1 + \beta(\sin \Omega t - \sin \Omega \tau)} . \quad (1.20)$$

Una analisi del denominatore della frazione a secondo membro della (1.20) mostra che, essendo la funzione del tempo $\sin \Omega t - \sin \Omega \tau$ compresa tra -2 e $+2$, il vincolo $|\beta| < 1/2$ assicura che tale denominatore rimanga sempre positivo. Nota la funzione $y(t)$, si può integrare, di nuovo per separazione di variabili, la seconda equazione nel sistema (1.19). Se $x_0 = 0$ si ottiene $x(t) \equiv x_0$, mentre se $x_0 \neq 0$ si ha:

$$\int_{x_0}^x \frac{dx'}{x'} = 2\Omega\beta \int_{\tau}^t dt' \frac{\sin \Omega t'}{1 + \beta(\sin \Omega t' - \sin \Omega \tau)} ,$$

assumendo $\xi = \tan \Omega t'/2$ e ponendo $\delta(\tau) = \beta/(1 - \beta \sin \Omega \tau) < 1$ si ottiene:

$$\begin{aligned} x(t \mid \tau) &= x_0 \exp \left[4 \left(\int_{\tan(\Omega\tau/2)}^{\tan(\Omega t/2)} \frac{d\xi}{\xi^2 + 1} - \int_{\tan(\Omega\tau/2)}^{\tan(\Omega t/2)} \frac{d\xi}{\xi^2 + 2\delta\xi + 1} \right) \right] \\ &= x_0 \exp \left\{ 4 \left[\frac{\Omega}{2}(t - \tau) - \frac{1}{\sqrt{1 - \delta^2}} \times \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left. \left(\arctan \frac{\tan(\Omega t/2) + \delta}{\sqrt{1 - \delta^2}} - \arctan \frac{\tan(\Omega\tau/2) + \delta}{\sqrt{1 - \delta^2}} \right) \right] \right\} . \end{aligned}$$

Consideriamo infine per $y \neq 0$ il campo di velocità (1.17) e determiniamo le linee di fumo passanti per il punto $x_0, y_0 \neq 0$ dato. Ponendo $\eta = y^2$,

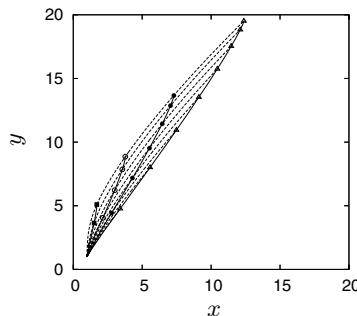


Figura 1.6. Con linee continue sono disegnate le linee di fumo passanti dal punto $x_0 = 1, y_0 = 1$, per quattro valori di T (nel verso crescente: quadrati pieni, cerchi, cerchi pieni e triangoli) per il campo di velocità (1.17). $u_0 = 2$, $t^* = 10^3$ e le linee sono ai tempi 10, 20, 30 e 40. Con linee tratteggiate sono inoltre disegnate alcune traiettorie.

dalla seconda equazione si ricava: $\dot{\eta} = u_0 x$ e sostituendo nella prima $\dot{x} = \ddot{\eta}$, $x = \dot{\eta}/u_0$ otteniamo un problema differenziale lineare del secondo ordine in η con condizioni iniziali $\eta(\tau) = y_0^2$ e $\dot{\eta}(\tau) = u_0 x_0$. La traiettoria della particella che è in (x_0, y_0) al tempo τ si ottiene, in termini dei parametri

$$\begin{aligned}\alpha'(\tau) &= \frac{1}{3} \left[y_0^2 + \frac{u_0 x_0}{\Omega} + \frac{u_0^2}{5\Omega^2} (\cos \Omega\tau + 2 \sin \Omega\tau) \right] \\ \beta'(\tau) &= \frac{1}{3} \left[2y_0^2 - \frac{u_0 x_0}{\Omega} + \frac{u_0^2}{2\Omega^2} (\sin \Omega\tau - \cos \Omega\tau) \right],\end{aligned}$$

nella forma seguente per $t \geq \tau$:

$$y(t | \tau) = \pm \left[\alpha' e^{2\Omega(t-\tau)} + \beta' e^{-\Omega(t-\tau)} + \frac{u_0^2}{10\Omega^2} (\cos \Omega t - 3 \sin \Omega t) \right]^{1/2}, \quad (1.21)$$

in cui il segno superiore vale se $y_0 > 0$, mentre l'inferiore se $y_0 < 0$. Ricordando che $x = \dot{\eta}/u_0$, otteniamo anche:

$$x(t | \tau) = \frac{\Omega}{u_0} \left[2\alpha' e^{2\Omega(t-\tau)} - \beta' e^{-\Omega(t-\tau)} - \frac{u_0^2}{10\Omega^2} (\sin \Omega t + 3 \cos \Omega t) \right]. \quad (1.22)$$

Ponendo $t = T$ nelle relazioni (1.21, 1.22) e considerando il parametro $\tau \in [0, T]$ otteniamo la linea di fumo al tempo T . In Fig. 1.6 sono disegnate quattro di queste linee a tempi T crescenti, insieme ad alcune traiettorie di particelle materiali.

1.3 Evoluzione dell'elemento di volume

Il flusso \mathcal{F}_t all'istante t può essere considerato come una trasformazione di \mathbb{R}^3 in sé, biunivoca, bicontinua ed infinitamente differenziabile. La trasformazione inversa

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_t^{-1} : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \boldsymbol{x} &\longmapsto \boldsymbol{\xi}\end{aligned}$$

consente in particolare di scrivere la misura $|\mathcal{V}_t|$ del generico volume materiale \mathcal{V}_t , ovvero di un aperto che evolve col flusso, all'istante t come:

$$|\mathcal{V}_t| = \int_{\mathcal{V}_t} dV_t = \int_{\mathcal{V}_0} dV_0 |J(\boldsymbol{\xi}, t)|, \quad (1.23)$$

dove dV_t è l'elemento di volume $dV(\boldsymbol{x})$ (corrispondentemente, l'elemento $dV(\boldsymbol{\xi})$ verrà indicato con dV_0) e J il determinante jacobiano della trasformazione realizzata dal flusso,, ovvero:

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} = \begin{vmatrix} \partial_{\xi_1} x_1 & \partial_{\xi_2} x_1 & \partial_{\xi_3} x_1 \\ \partial_{\xi_1} x_2 & \partial_{\xi_2} x_2 & \partial_{\xi_3} x_2 \\ \partial_{\xi_1} x_3 & \partial_{\xi_2} x_3 & \partial_{\xi_3} x_3 \end{vmatrix}. \quad (1.24)$$

Poiché $\mathbf{x}(\xi, 0) = \xi$ (\mathcal{F}_0 si riduce all'identità), nell'istante di riferimento si ha:

$$J(\xi, 0) \equiv 1 . \quad (1.25)$$

Dalle proprietà di regolarità del flusso \mathcal{F}_t , segue allora che, essendo inizialmente positivo e non potendo mai annullarsi, J rimane positivo per tutti i tempi. Si può quindi eliminare il simbolo di valore assoluto nell'equazione (1.23) e calcolare la derivata nel tempo del volume $|\mathcal{V}_t|$ utilizzando la rappresentazione Lagrangiana:

$$\frac{d}{dt} |\mathcal{V}_t| = \int_{\mathcal{V}_0} dV_0 \partial_t J \equiv \int_{\mathcal{V}_0} J dV_0 \frac{\partial_t J}{J} = \int_{\mathcal{V}_t} dV_t \frac{\partial_t J}{J} , \quad (1.26)$$

essendo $J dV_0 = dV_t$.

La velocità con cui varia il volume $|\mathcal{V}_t|$ è anche data dall'integrale sulla frontiera dell'aperto ($\partial\mathcal{V}_t$) della velocità normale uscente $\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}$. Per il teorema della divergenza, quest'ultimo integrale risulta essere dato da:

$$\int_{\partial\mathcal{V}_t} dS_t \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu} = \int_{\mathcal{V}_t} dV_t \nabla \cdot \mathbf{u} ,$$

avendo indicato con dS_t l'elemento di superficie sulla $\partial\mathcal{V}_t$. Ne segue utilizzando l'equazione (1.26):

$$\int_{\mathcal{V}_t} dV_t \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{d}{dt} |\mathcal{V}_t| = \int_{\mathcal{V}_t} dV_t \frac{\partial_t J}{J} ,$$

ovvero:

$$\int_{\mathcal{V}_t} dV_t \left(\frac{\partial_t J}{J} - \nabla \cdot \mathbf{u} \right) \equiv 0 .$$

Poiché la scelta del volume materiale \mathcal{V}_t è arbitraria, da una nota proprietà dell'integrale di Riemann segue che l'integrando deve essere ovunque nullo, ovvero deve valere la relazione seguente:

$$\frac{\partial_t J}{J} = \nabla \cdot \mathbf{u}$$

(1.27)

in cui la derivata nel tempo $\partial_t J$ a primo membro è fatta utilizzando la rappresentazione Lagrangiana di J (la corrispondente rappresentazione Euleriana si scriverà DJ/Dt o $D_t J$, in base alle considerazioni svolte nel paragrafo 1.6). Ne segue che la variazione relativa dello jacobiano del flusso egualgia la divergenza del campo di velocità.

Una deduzione alternativa, più formale della precedente, consiste nell'utilizzare direttamente la definizione (1.24) di J , espressa in forma indiciale:

$$J = \varepsilon_{ijk} \partial_{\xi_i} x_1 \partial_{\xi_j} x_2 \partial_{\xi_k} x_3 ,$$

la quale può essere direttamente derivata nel tempo:

$$\partial_t J = \varepsilon_{ijk} \left[\partial_{\xi_i}(\partial_t x_1) \partial_{\xi_j} x_2 \partial_{\xi_k} x_3 + \partial_{\xi_i} x_1 \partial_{\xi_j} (\partial_t x_2) \partial_{\xi_k} x_3 + \partial_{\xi_i} x_1 \partial_{\xi_j} x_2 \partial_{\xi_k} (\partial_t x_3) \right], \quad (1.28)$$

avendo permutato la derivata nel tempo con quella nella generica coordinata Lagrangiana ξ_l . Ricordando la definizione di velocità, abbiamo $\partial_t x_l = u_l$ ed inoltre, la velocità \mathbf{u} può essere pensata, utilizzando la trasformazione \mathcal{F}_t , funzione della variabile Lagrangiana $\boldsymbol{\xi}$:

$$u_l = u_l[\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t), t]$$

che, derivata nella generica coordinata Lagrangiana ξ_m , fornisce:

$$\partial_{\xi_m} u_l = \partial_{x_p} u_l \partial_{\xi_m} x_p. \quad (1.29)$$

Sostituendo le espresioni (1.29), la derivata (1.28) diviene:

$$\begin{aligned} \partial_t J &= \varepsilon_{ijk} \left[\partial_{x_p} u_1 \partial_{\xi_i} x_p \partial_{\xi_j} x_2 \partial_{\xi_k} x_3 + \partial_{\xi_i} x_1 \partial_{x_p} u_2 \partial_{\xi_j} x_p \partial_{\xi_k} x_3 + \right. \\ &\quad \left. + \partial_{\xi_i} x_1 \partial_{\xi_j} x_2 \partial_{x_p} u_3 \partial_{\xi_k} x_p \right] \\ &= \partial_{x_p} u_1 \varepsilon_{ijk} \partial_{\xi_i} x_p \partial_{\xi_j} x_2 \partial_{\xi_k} x_3 + \partial_{x_p} u_2 \varepsilon_{ijk} \partial_{\xi_i} x_1 \partial_{\xi_j} x_p \partial_{\xi_k} x_3 + \\ &\quad + \partial_{x_p} u_3 \varepsilon_{ijk} \partial_{\xi_i} x_1 \partial_{\xi_j} x_2 \partial_{\xi_k} x_p. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Nella forma (1.30) sono presenti le tre espressioni indiciali:

$$\varepsilon_{ijk} \partial_{\xi_i} x_p \partial_{\xi_j} x_2 \partial_{\xi_k} x_3, \quad \varepsilon_{ijk} \partial_{\xi_i} x_1 \partial_{\xi_j} x_p \partial_{\xi_k} x_3, \quad \varepsilon_{ijk} \partial_{\xi_i} x_1 \partial_{\xi_j} x_2 \partial_{\xi_k} x_p,$$

nelle quali tutti gli indici, eccetto p , sono saturati. Si può però considerare che se nella prima $p \neq 1$, l'espressione è nulla. Infatti è il determinante di una matrice con due righe (la prima e la seconda se $p = 2$, la prima e la terza se $p = 3$) uguali. Analogamente accade per la seconda espressione, che è nulla per $p \neq 2$, e per la terza, che è nulla per $p \neq 3$. Inoltre, per $p = 1$ la prima espressione fornisce proprio lo jacobiano, come pure la seconda per $p = 2$ e la terza per $p = 3$. Ne segue che la derivata nel tempo dello jacobiano (1.29) può essere riscritta come:

$$\partial_t J = J \left(\partial_{x_1} u_1 + \partial_{x_2} u_2 + \partial_{x_3} u_3 \right),$$

che è proprio la relazione (1.27).

◊ **Esercizio:** Dati i flussi piani:

$$\begin{cases} x = e^{\alpha t} \xi + (1 - e^{-\alpha t}) \eta \\ y = -(1 - e^{-\alpha t}) \xi + e^{-\alpha t} \eta, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \xi + \eta \sin \Omega t \\ y = -\xi \sin \Omega t + \eta, \end{cases}$$

con α ed Ω costanti reali positive assegnate, calcolare i campi di velocità lagrangiani ed euleriani, la divergenza della velocità euleriana ($\nabla \cdot \mathbf{u}$) e lo jacobiano (J) della trasformazione dalle varie variabili lagrangiane alle euleriane. Infine, verificare la relazione (1.27).

- ◊ **Esercizio:** Ripetere le operazioni svolte nell'esercizio (1.31) per i seguenti flussi tridimensionali:

$$\begin{cases} x = \xi + t\eta \\ y = -t\xi + \eta + t\zeta \\ z = t\eta + \zeta , \end{cases} \quad \begin{cases} x = \xi + (1 - e^{-\alpha t})\zeta \\ y = (1 - e^{-\alpha t})\xi + e^{\alpha t}\eta \\ z = -(1 - e^{-\alpha t})\eta + e^{-\alpha t}\zeta , \end{cases} \quad (1.32)$$

$$\begin{cases} x = \xi + \eta \sin \Omega t \\ y = \eta \cos \Omega t + (1 - \cos \Omega t)\zeta \\ z = \xi \sin \Omega t + \zeta \cos \Omega t , \end{cases} \quad \begin{cases} x = \xi + t^2\zeta \\ y = t\xi + \eta \\ z = \xi + (1 + t^2)\zeta . \end{cases}$$

1.4 Decomposizione del gradiente di velocità

Per le ipotesi di regolarità del flusso \mathcal{F}_t , il campo di velocità $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ è una funzione differenziabile della posizione \mathbf{x} . Fissato un punto \mathbf{x}^* , il campo di velocità \mathbf{u} può quindi essere sviluppato in serie di Taylor in un intorno di tale punto. In questo paragrafo, verrà analizzato lo sviluppo troncato al primo ordine:

$$i = 1, 2, 3 : \quad u_i(\mathbf{x}) \simeq u_i(\mathbf{x}^*) + \partial_{x_k} u_i(\mathbf{x}^*) (x_k - x_k^*) , \quad (1.33)$$

nella quale si è sottointesa la dipendenza dal tempo del campo di velocità e del suo gradiente:

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} u_1 & \partial_{x_2} u_1 & \partial_{x_3} u_1 \\ \partial_{x_1} u_2 & \partial_{x_2} u_2 & \partial_{x_3} u_2 \\ \partial_{x_1} u_3 & \partial_{x_2} u_3 & \partial_{x_3} u_3 \end{pmatrix} . \quad (1.34)$$

La componente (i, j) di questo tensore $(\nabla \mathbf{u})_{ij}$, relativa alla riga i ed alla colonna j nella sua rappresentazione matriciale (1.34), è data da⁷ $\partial_j u_i$, in cui l'indice di riga è relativo alla componente della velocità e quello di colonna alla direzione lungo cui questa è derivata.

Una forma particolarmente significativa dello sviluppo (1.33) può essere ottenuta decomponendo il gradiente di velocità (1.34) nelle sue parti *simmetrica* \mathbf{S} ($\mathbf{S} = \mathbf{S}^T$, dove con “ T ” si è indicato il tensore trasposto) ed *antisimmetrica* $\boldsymbol{\Omega}$ ($\boldsymbol{\Omega} = -\boldsymbol{\Omega}^T$):

$$\nabla \mathbf{u} \equiv \underbrace{\frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T]}_{\mathbf{S}} + \underbrace{\frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^T]}_{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{S} + \boldsymbol{\Omega} , \quad (1.35)$$

che, sostituita nella (1.33) scritta in forma vettoriale, fornisce:

⁷ Quando il contesto lo consentirà, la x verrà sottointesa e $\partial_{x_j} u_i$ sarà semplicemente indicata con $\partial_j u_i$.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \simeq \mathbf{u}(\mathbf{x}^*) + \mathbf{S}(\mathbf{x}^*) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}^*) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) , \quad (1.36)$$

in cui con la notazione $\mathbf{S} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$ si indica il vettore $S_{ik}(x_k - x_k^*) \mathbf{e}_i$ (\mathbf{e}_i versore dell'asse i di un riferimento cartesiano), ovvero il vettore ottenuto moltiplicando righe per colonne la matrice \mathbf{S} per il vettore colonna $\mathbf{x} - \mathbf{x}^*$.

◊ **Esercizio:** Mostrare che $\nabla \cdot \mathbf{u} = S_{ii}$ e $\nabla \times \mathbf{u} = \varepsilon_{ijk} \Omega_{kj} \mathbf{e}_i$.

In particolare, la “azione” di $\boldsymbol{\Omega}$ su un generico vettore \mathbf{y} è riducibile al prodotto vettoriale tra un vettore opportuno e \mathbf{y} . Per trovare questa forma equivalente per $\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{y}$, è necessario definire preliminarmente il vettore *vorticità*:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_i \mathbf{e}_i = \nabla \times \mathbf{u} = \varepsilon_{ilm} \partial_l u_m \mathbf{e}_i , \quad (1.37)$$

ovvero il rotore del campo di velocità \mathbf{u} . Partendo dalla espressione indiciale nell’ultimo membro dell’equazione (1.37) si può scrivere la generica componente Ω_{jk} in funzione del nuovo vettore $\boldsymbol{\omega}$. Infatti, moltiplicando per ε_{ikj} la componente ω_i e sommando su i :

$$\varepsilon_{ikj} \omega_i = \varepsilon_{ikj} \varepsilon_{ilm} \partial_l u_m = (\delta_{kl} \delta_{jm} - \delta_{km} \delta_{jl}) \partial_l u_m = \partial_k u_j - \partial_j u_k = 2\Omega_{jk} .$$

Da quest’ultima relazione si ottiene subito:

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{y} = \Omega_{jk} y_k \mathbf{e}_j = \frac{1}{2} \varepsilon_{ikj} \omega_i y_k \mathbf{e}_j = \frac{1}{2} \varepsilon_{jik} \omega_i y_k \mathbf{e}_j = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{y} , \quad (1.38)$$

che consente di riscrivere la (1.36) nella forma più significativa:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \simeq \underbrace{\mathbf{u}(\mathbf{x}^*) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}^*) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)}_{\text{moto rigido}} + \underbrace{\mathbf{S}(\mathbf{x}^*) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)}_{\text{deformazione}} \quad (1.39)$$

L’equazione (1.39) chiarisce che l’atto di moto *locale* (lo sviluppo è al primo ordine in $|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*|$) del flusso è la somma di un atto di moto rigido, con velocità di traslazione $\mathbf{u}(\mathbf{x}^*)$ e velocità angolare $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}^*)/2$, e dell’atto di moto $\mathbf{S}(\mathbf{x}^*) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$, che risulta essere un atto di moto di deformazione pura, come viene di seguito mostrato.

A questo scopo, si considera innanzitutto che la matrice delle sue componenti del tensore \mathbf{S} è *reale* e *simmetrica*, ammette quindi un sistema *ortonormale* di autovettori $\{\boldsymbol{\varepsilon}_i, i = 1, 2, 3\}$, corrispondenti agli autovalori *reali* χ_i per $i = 1, 2$ e 3 . Indicata con \mathbf{R} la matrice del cambiamento di riferimento dalla base $\{\mathbf{e}_i\}$ alla base $\{\boldsymbol{\varepsilon}_j\}$, per la quale vale $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ (è un operatore *unitario*), la rappresentazione \mathbf{S}_a dell’operatore lineare \mathbf{S} nel riferimento degli autovettori $\{\boldsymbol{\varepsilon}_i\}$ sarà data dalla relazione seguente:

$$\mathbf{S}_a = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \chi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \chi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \chi_3 \end{pmatrix} , \quad (1.40)$$

ovvero S_a è diagonale. La rappresentazione (1.40) dell'operatore S nella base dei suoi autovettori chiarisce che l'azione di S su un generico vettore y , rappresentato da $y_a = R^{-1}y$ nella base $\{\varepsilon_i\}$, consiste nel moltiplicare la componente y_{ai} per l'autovalore χ_i . Il secondo membro nella equazione (1.40) permette di collegare le due rappresentazioni S ed S_a nelle due basi. La forma di questa relazione può essere immediatamente dedotta considerando che S_a opera su componenti nel nuovo riferimento $\{\varepsilon_j\}$, mentre S su componenti nel vecchio $\{e_i\}$. Quindi, S_a è realizzato moltiplicando il vettore delle nuove componenti per R , operazione che fornisce le vecchie componenti. Su queste è poi applicato S ed il risultato, che è nel vecchio sistema di riferimento, viene riportato nel nuovo moltiplicando per R^{-1} .

Quindi, l'intorno del punto x^* considerato è allungato ($\chi_i > 0$) o accorciato ($\chi_i < 0$) nella direzione i dal campo di velocità $S \cdot (x - x^*)$, ovvero l'atto di moto $S \cdot (x - x^*)$ è di deformazione pura, come è stato anticipato. Si può anche sospettare che la somma dei tre autovalori fornisca una misura della variazione *locale* di volume. Infatti, la traccia della rappresentazione S_a è uguale a quella di S , che è $\partial_i u_i = \nabla \cdot u$. Ne segue:

$$\chi_1 + \chi_2 + \chi_3 = \nabla \cdot u , \quad (1.41)$$

che è proprio la variazione relativa locale di volume.

- ◊ **Esercizio:** Per i campi di velocità euleriani ottenuti negli esercizi (1.31, 1.32) determinare i tensori S ed Ω ed il vettore vorticità ω . Ricavare, inoltre, le direzioni principali e gli autovalori di S .

1.5 Il potenziale di velocità

Sotto opportune condizioni, la descrizione del campo di velocità $u = u(x)$ (la dipendenza dal tempo è sottointesa, poiché t svolge il ruolo di un parametro in questo contesto) associato ad un dato flusso può essere fatta in termini di una sola funzione scalare di punto $\varphi = \varphi(x)$, la quale è collegata al campo di velocità dalla relazione:

$$u = \nabla \varphi \quad (1.42)$$

ed è chiamata *potenziale di velocità*. Ovviamente, due potenziali φ' e φ'' che differiscano per una funzione del tempo forniscono il medesimo campo di velocità u . È molto vantaggioso descrivere un campo di vettori con una sola funzione scalare ed inoltre, utilizzando la rappresentazione (1.42) per la velocità, si potranno dedurre forme particolarmente utili delle equazioni del moto. In questo paragrafo saranno brevemente discusse le condizioni sotto le quali la rappresentazione (1.42) è possibile.

L'importanza della richiesta (1.42) sul campo di velocità u è nel fatto che questa implica che la forma differenziale $u \cdot dx$ è integrabile (è il differenziale

esatto $d\varphi$). Quindi l'integrale fatto sull'arco curva $\mathcal{C}[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}]$ di estremi \mathbf{x}_0 ed \mathbf{x} di tale forma:

$$\int_{\mathcal{C}[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}]} d\mathbf{x}' \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}') \quad (1.43)$$

non dipende dalla scelta di \mathcal{C} , ma solo dagli estremi \mathbf{x}_0 ed \mathbf{x} . Fissato \mathbf{x}_0 , la funzione di \mathbf{x} (1.43) fornisce proprio una possibile determinazione del potenziale di velocità φ , scegliendo cammini di integrazione $\mathcal{C}[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}]$ arbitrari. Si può quindi porre:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{C}[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}]} d\mathbf{x}' \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}') ,$$

avendo arbitrariamente fissato $\varphi(\mathbf{x}_0) = 0$. Verificata l'indipendenza dell'integrale (1.43) dal cammino di integrazione \mathcal{C} , la costruzione di una possibile funzione potenziale è allora immediata.

Ci si può allora porre la questione di determinare sotto quali condizioni l'integrale (1.43) non dipenda dal cammino di integrazione \mathcal{C} . Scelto un percorso alternativo \mathcal{C}' , l'integrale su questo nuovo percorso risulta (omettendo per brevità gli estremi \mathbf{x}_0 ed \mathbf{x}):

$$\int_{\mathcal{C}'} d\mathbf{x}' \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}') \equiv \int_{\mathcal{C}} d\mathbf{x}' \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}') + \int_{-\mathcal{C} \cup \mathcal{C}'} d\mathbf{x}' \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}') , \quad (1.44)$$

dove $-\mathcal{C}$ indica il medesimo arco di curva \mathcal{C} , percorso però da \mathbf{x} a \mathbf{x}_0 . Ciò implica che il secondo integrale al secondo membro dell'identità (1.44) è fatto su un percorso *chiuso*.

Se il circuito $\mathcal{C}'' = -\mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$ è tale che esiste una superficie \mathcal{S} che ha questo percorso come frontiera ($\partial\mathcal{S} = \mathcal{C}''$) ed è interna al campo fluido (\mathcal{C}'' è un circuito *riducibile*), allora il secondo integrale a secondo membro nell'identità (1.44) diviene in base al teorema di Stokes:

$$\int_{\mathcal{C}''} d\mathbf{x}' \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}') = \int_{\mathcal{S}} dA(\mathbf{x}') \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}') \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}') . \quad (1.45)$$

Se tale integrale risulta nullo per qualsiasi scelta della curva chiusa \mathcal{C}'' , purché riducibile, allora l'integrale di linea (1.43) è indipendente dal percorso utilizzato per congiungere i due estremi \mathbf{x}_0 e \mathbf{x} .

Se il percorso \mathcal{C}'' non ammette alcuna superficie \mathcal{S} interna al campo fluido tale che $\partial\mathcal{S} = \mathcal{C}''$, ovvero include una lacuna del campo, allora il secondo integrale a secondo membro nell'identità (1.44) assume un valore costante ed indipendente dal particolare \mathcal{C}'' . Questa costante è multipla del valore dell'integrale:

$$\int_{\mathcal{C}^*} d\mathbf{x}' \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}') = \Gamma ,$$

dove \mathcal{C}^* è una *qualsiasi* curva chiusa che contorni *una sola volta* la lacuna. Il valore Γ di tale integrale (che può essere eventualmente 0), circuitazione del campo \mathbf{u} sulla curva \mathcal{C}^* , si chiama *circolazione* attorno alla lacuna. L'integrale

(1.43) dipenderà allora, se $\Gamma \neq 0$, dal numero di giri che il percorso \mathcal{C} compie attorno alla lacuna. Se, al contempo, su ogni circuito riducibile la circolazione è nulla, il potenziale di velocità φ esiste anche in questo caso, ma diviene una funzione *polidroma*.

Accettando anche questi tipi di funzioni potenziale (peraltro di grande interesse in molte applicazioni), la condizione necessaria e sufficiente affinché l'integrale (1.43) non dipenda dal percorso \mathcal{C} su cui è fatto, ma solo dalla scelta degli estremi \mathbf{x}_0 e \mathbf{x} , è che sia nulla la circolazione su un qualsiasi circuito riducibile. In base all'equazione (1.45), condizione sufficiente ad assicurare questo fatto è quella di richiedere l'annullarsi in tutto il dominio fluido del vettore vorticità: $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} \equiv \mathbf{0}$. Un tale tipo di flusso viene chiamato *irrotazionale*, poiché in tal caso nessuna particella fluida ruota, come segue alla decomposizione locale (1.39) del campo di velocità.

- ◊ **Esercizio:** Individuare quali dei seguenti campi di velocità ammettono potenziale:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} xy \\ x - y + z \\ zy \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ -y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ -z \\ x \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} y^2 + z^2 \\ x^2 - z^2 \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} xy^2 \\ x + y + z \\ yz^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2 - z \\ y \\ xyz \end{pmatrix}.$$

Laddove possibile, calcolare una funzione potenziale $\varphi(\mathbf{x})$.

1.6 Il campo delle accelerazioni

Le proprietà di regolarità del flusso \mathcal{F}_t assunte nel § 1.1 permettono di considerare anche la derivata seconda nel tempo del vettore posizione $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, t)$, ovvero l'*accelerazione lagrangiana* della particella che al tempo di riferimento era in ξ :

$$\mathbf{a}^{(\mathcal{L})}(\xi, t) = \partial_t \mathbf{u}^{(\mathcal{L})}(\xi, t) = \partial_{tt}^2 \mathbf{x}(\xi, t). \quad (1.46)$$

Si pone allora il problema di dare una espressione euleriana della accelerazione \mathbf{a} . Poiché il campo lagrangiano delle velocità è collegato all'omologo euleriano dalla:

$$\mathbf{u}^{(\mathcal{L})}(\xi, t) = \mathbf{u}^{(\varepsilon)}[\mathbf{x}(\xi, t), t],$$

sostituendo al secondo membro della (1.46) si ha:

$$\mathbf{a}^{(\mathcal{L})}(\xi, t) = \partial_t \mathbf{u}^{(\varepsilon)}[\mathbf{x}(\xi, t), t] + u_i^{(\varepsilon)}[\mathbf{x}(\xi, t), t] \partial_{x_i} \mathbf{u}^{(\varepsilon)}[\mathbf{x}(\xi, t), t].$$

Indicando convenzionalmente con il simbolo $D\mathbf{u}/Dt$ la forma euleriana della accelerazione $\mathbf{a}^{(\mathcal{L})}$ ed utilizzando \mathcal{F}_t^{-1} , otteniamo l'espressione della accelerazione in termini euleriani:

$$\boxed{\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)} . \quad (1.47)$$

L'operazione di derivazione della forma lagrangiana e successiva rappresentazione euleriana del risultato viene definita *derivata materiale*, nome che è esteso anche all'operatore simbolico D/Dt o D_t .

Per analizzare il significato fisico dell'espressione della accelerazione (1.47) per un punto materiale che si trova alla stazione \mathbf{x} al tempo t conviene considerare due casi limite distinti. Nel primo si suppone che il campo di velocità \mathbf{u} sia *uniforme* in un intorno del punto \mathbf{x} , ovvero l'intorno di \mathbf{x} trasla rigidamente. Il secondo addendo nella (1.47) risulta in tal caso nullo ed il punto materiale accelera se vi è una variazione nel tempo della velocità di traslazione di questo intorno. Nel secondo caso limite si suppone che il campo di velocità \mathbf{u} sia *stazionario*, almeno localmente. In tal caso è il primo addendo nella (1.47) ad essere nullo ed il punto materiale accelera nel passare da un valore di velocità $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ ad un valore in generale diverso che dovrà raggiungere occupando successivamente posizioni non più sovrapposte alla stazione \mathbf{x} . Essendo dovuto dalla convezione del punto materiale, questo secondo addendo prende il nome di *termine convettivo* dell'accelerazione. In generale, le due cause di variazione della velocità del punto materiale coesistono e si ha una accelerazione sia dovuta alla non stazionarietà che alla non uniformità del campo \mathbf{u} .

Da un punto di vista strettamente formale, l'equazione (1.47) introduce un ingrediente essenziale di molti problemi fluidodinamici: la non-linearità. La presenza di un termine convettivo non trascurabile è, ad esempio, responsabile dell'insorgere di fenomeni turbolenti in molti flussi. Da sola, essa motiva di fatto la gran parte delle attività di ricerca nel settore della Fluidodinamica.

- ◊ **Esercizio:** Calcolare la derivata materiale $D_t \mathbf{u}$ per i seguenti flussi:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\xi, t) &= \begin{pmatrix} \xi \cos \Omega t - \eta \sin \Omega t \\ \xi \sin \Omega t + \eta \\ -(\xi + \eta) \sin \Omega t + \zeta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi + t^2 \eta \\ (1-t)\eta \\ t(\xi + \eta) + \zeta \end{pmatrix}, \\ &\quad \begin{pmatrix} \xi - \zeta \sin \Omega t \\ \eta \\ -\eta \sin \Omega t + \zeta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi + t^2 \zeta \\ \eta \cos \Omega t + \zeta \sin \Omega t \\ \zeta (\sin \Omega t) / (\Omega t) \end{pmatrix}, \\ &\quad \begin{pmatrix} \xi - t^2 \eta + t \zeta \\ t^3 \xi + \eta \\ \xi \sin \Omega t + (1-t) \zeta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi (\sin \Omega t) / (\Omega t) \\ \eta \cos \Omega t + t^2 \zeta \\ (\xi + \eta) \sin \Omega t + \zeta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.48)$$

e confrontarla con la derivata $\partial_{tt}^2 \mathbf{x}$. Determinare in quale intervallo di tempo ciascuna legge di trasformazione definisce un flusso.

Una forma particolarmente utile della accelerazione (1.47) è comunemente nota come *accelerazione di Lagrange* ed è basata su una riscrittura del termine

convettivo che faccia apparire esplicitamente la vorticità ω . Infatti, si ha per la componente k del solo termine convettivo:

$$u_i \partial_i u_k \equiv u_i (\partial_i u_k - \partial_k u_i) + u_i \partial_k u_i . \quad (1.49)$$

Ma, dalla definizione (1.37) del vettore vorticità:

$$\varepsilon_{jik} \omega_j = \varepsilon_{jik} \varepsilon_{jlm} \partial_l u_m = (\delta_{il} \delta_{km} - \delta_{im} \delta_{kl}) \partial_l u_m = \partial_i u_k - \partial_k u_i ,$$

che, sostituita nella (1.49) fornisce:

$$u_i \partial_i u_k \ e_k = \varepsilon_{jik} \omega_j u_i \ e_k + \partial_k \frac{u_i u_i}{2} \ e_k = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} + \nabla \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} .$$

In definitiva, l'accelerazione di Lagrange si scrive:

$$\boxed{\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \partial_t \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} + \nabla \frac{|\mathbf{u}|^2}{2}} . \quad (1.50)$$

- ◊ **Esercizio:** Scrivere le accelerazioni $D_t \mathbf{u}$ nelle corrispondenti forme di Lagrange (1.50), per i flussi di cui all'esercizio (1.48).

1.7 Curiosando in biblioteca

Gli argomenti trattati in questo capitolo sono piuttosto comuni a molti libri di Fluidodinamica. Uno dei testi maggiormente estesi è quello di Kundu e Cohen [17], che, dopo due capitoli introduttivi, nel terzo inizia col descrivere le due possibili rappresentazioni del flusso euleriana e lagrangiana (§2). Nelle pagine successive (§3) troviamo la definizione di derivata materiale e nel §4 le curve integrali del campo di velocità. La trattazione è piuttosto semplice ed intuitiva, priva di particolari approfondimenti matematici. Il libro prosegue con la deduzione del legame tra la velocità di deformazione dell'elemento di volume e la divergenza della velocità, effettuata direttamente in termini locali (§6): la trattazione prende il via da un elemento lineare ed arriva ad un elemento di volume. Le definizioni di vorticità e di circolazione sono date al §8, accompagnandole con molte illustrazioni che ne semplificano la comprensione.

Al contrario di [17], un testo che tratta questi argomenti in modo formale e rigoroso è [24]. Alle pp. 3-6 è spiegato il significato di rappresentazione lagrangiana del moto di un fluido, fornendo, in appendice, la motivazione del perché non si richieda l'invertibilità del flusso sulla frontiera del dominio trasformato. La rappresentazione euleriana è illustrata nelle pp. 7-9, fornendo la conseguente definizione di accelerazione euleriana come derivata materiale della velocità. Un cenno ad alcune curve integrali del campo di velocità (traiettorie e linee di corrente) è fatto alle pp. 12-13. Le definizioni di circolazione e di potenziale di

velocità sono riportate alle pp. 16-19, con particolare attenzione alla nozione di circuito riducibile. Un secondo testo dal carattere spiccatamente matematico è [6]. Il libro introduce alle pp. 4-5 le definizioni di derivate lagrangiana ed euleriana della velocità. Una elegante deduzione del legame tra variazione nel tempo dell'elemento di volume e divergenza della velocità si trova nelle pp. 8-10, mentre a p. 16 vengono definite alcune curve integrali del campo di velocità (linee di corrente e traiettorie). Notevole per chiarezza e ricchezza di spiegazioni è il §1.2, che inizia introducendo la vorticità e la sua relazione con la parte antisimmetrica del gradiente di velocità e prosegue col legame tra la traccia del tensore velocità di deformazione (parte simmetrica del gradiente di velocità) e la divergenza della velocità. Il testo [20] adotta un approccio molto differente da quello della gran parte dei libri di Fluidodinamica classici: infatti non utilizza la rappresentazione lagrangiana di un flusso. La definizione di circolazione viene introdotta a p. 12, mentre quella di vorticità viene data a p. 13. Nelle pp. 14-15 viene spiegato in modo intuitivo il significato di flusso irrotazionale, tramite un esempio di flusso attorno ad un corpo. Gli Autori spiegano, in sintesi, che l'ipotesi di flusso potenziale è una drastica semplificazione che può far nascere incongruenze con molte osservazioni sperimentali (ad esempio, a causa della generazione di vorticità dalle pareti di un corpo).

Uno dei testi che storicamente ha avuto più rilevanza in Fluidodinamica è quello di Lamb [19], la cui ultima edizione risale al 1932. A p. 3 viene introdotta l'operatore di derivata materiale, senza fornire particolari spiegazioni od esempi. Nel cap. 2 viene introdotto il potenziale di velocità (attenzione al fatto che φ è definito in modo che $\nabla\varphi = -\mathbf{u}$, col vantaggio che $\partial_t\varphi$ risulta concorde con la pressione). Nelle pp. 31-33 viene effettuato lo sviluppo in serie di Taylor del campo di velocità nell'intorno di un punto, illustrando la classica decomposizione dell'atto di moto locale in un moto rigido più una deformazione pura. Alcuni esempi, figure ed una chiara impostazione del problema, rendono queste pagine molto interessanti. Il libro di Batchelor [3] dedica il primo capitolo ad argomenti di base, quali l'ipotesi del continuo e richiami di Termodinamica. All'inizio del cap. 2 (§2) sono illustrate le differenze tra le rappresentazioni euleriana e lagrangiana di un flusso ed a p. 72 le curve integrali del campo di velocità. È poi introdotto l'operatore di derivata materiale. Le pp. 79-81 (§2.3) sono dedicate all'atto di moto locale e, conseguentemente, alla vorticità. La trattazione è molto chiara e precisa, ottima per un approfondimento. Nelle pp. 84-88 viene discusso il caso più generale di un flusso rotazionale, il cui campo di velocità sia, in generale, a divergenza non nulla. Il campo \mathbf{u} è decomposto nella somma di un campo (\mathbf{u}_v) solenoidale, ma con vorticità pari a $\nabla \times \mathbf{u}$, uno (\mathbf{u}_e) irrotazionale, ma con divergenza $\nabla \cdot \mathbf{u}$, ed infine di uno ($\mathbf{v} = \nabla\varphi$) a potenziale con φ armonico (e quindi solenoidale ed irrotazionale). Quest'ultimo dipende unicamente dalle condizioni a contorno. Al §2.7 si esamina il flusso irrotazionale e solenoidale, introducendo a p. 100 il potenziale di velocità, la cui monodromia viene brevemente discussa all'inizio di pagina 102, per poi essere trattata diffusamente, in particolare per domini biconnessi, nel §2.8.

Nel libro [27] si trova un primo capitolo di introduzione che, a differenza dei testi finora citati, è dedicato a richiami di calcolo vettoriale e tensoriale: ne consigliamo fortemente la lettura. La rappresentazione di un vettore in coordinate cartesiane, cilindriche e sferiche è affrontata nel §1.1, mentre il §1.2 è dedicato al calcolo vettoriale: vi si trovano le definizioni di prodotto scalare, vettoriale e misto, oltre a quelle di gradiente di un campo scalare e della divergenza di un campo vettoriale. Il paragrafo prosegue con cenni di geometria differenziale di curve, soffermandosi, in particolare, sulla terna intrinseca ad una curva e sulle definizioni di circolazione lungo una curva chiusa e di flusso attraverso una superficie. Il §1.3 riguarda l'algebra tensoriale: dopo la definizione di tensore doppio cartesiano, si introducono le operazioni di somma, prodotto scalare tra due tensori, oltre alla definizione dei tre invarianti di un tensore doppio. Ancora, nel §1.4 vengono ripresi gli operatori differenziali gradiente e divergenza, definendo il rotore di un vettore e la divergenza di un tensore. In questo modo si puntualizzano alcune proprietà (l'annullarsi della divergenza di un rotore o del rotore di un gradiente) e viene definita la vorticità. Il sottoparagrafo 1.4.1 è interamente dedicato alla definizione di derivata sostanziale, ottenuta tramite un semplice esempio. Nelle pp. 63-64 si trova la dimostrazione del teorema di Stokes. Raccomandiamo di leggere l'esempio 1.5.3, nel quale viene dedotta l'equazione di evoluzione temporale dell'elemento di volume. Il §2.3 spiega poi la differenza tra le rappresentazioni euleriana e lagrangiana di un flusso, anche utilizzando un esempio monodimensionale. Nel libro di White [37], gli argomenti sono trattati in maniera nettamente meno precisa dal punto di vista matematico, guadagnando però in semplicità d'esposizione (sono utilizzati moltissimi esempi ed, alla fine di ogni capitolo, sono presenti estese parti esercitativa). Il concetto di fluido e l'ipotesi di mezzo continuo sono ampiamente discussi nel primo capitolo (§1.2 e 1.3), mentre una breve spiegazione circa le rappresentazioni di un flusso si trova a p. 14. La definizione delle curve integrali del campo di velocità è collocata nel §1.9, quella di vorticità nel §4.8 ed, infine, a p. 248 viene introdotto il potenziale di velocità.

Esaminiamo poi brevemente alcuni testi, meno classici dei precedenti. Acheson [1] evidenzia le differenze tra le rappresentazioni euleriana e lagrangiana del flusso alle pp. 2-6, a p. 10 definisce poi la vorticità. Al termine del primo capitolo è presente un buon numero d'interessanti esercizi. Il libro di Warsi [36] è notevolmente esteso, coprendo in particolare tutti gli argomenti affrontati nel presente testo. Inizia spiegando il concetto di flusso (pp. 2-5) e le sue rappresentazioni lagrangiana ed euleriana e prosegue definendo (pp. 5-8) le accelerazioni euleriana e lagrangiana. Le linee integrali del campo di velocità vengono introdotte nel §1.8. Viene poi analizzato l'atto di moto locale (pp. 15-20), definendo la vorticità ed evidenziandone il legame con la parte rigida dell'atto di moto. In [26], gli Autori definiscono (§4.1) le curve integrali del campo di velocità ed il tubo di flusso. La nozione di vorticità ed alcuni semplici esempi di flussi vorticosi sono riportati al §4.7. In ultimo segnaliamo il testo [22], dove al §1.7 si introduce la decomposizione del gradiente di ve-

locità nelle parti simmetrica ed antisimmetrica, evidenziando come la parte simmetrica dia il contributo di deformazione pura.

La stretta connessione tra la Matematica e la Fluidodinamica ci spinge a consigliare, oltre a testi di Fluidodinamica, anche la lettura di alcuni libri di Analisi Matematica e Funzionale. Per quanto riguarda alcuni degli argomenti di Analisi Matematica consigliamo il testo [9], in particolare i capitoli 4 (nozioni introduttive sugli spazi vettoriali: definizione, prodotto scalare e vettoriale di due vettori), 5 (autovalori ed autovettori, limiti e continuità delle funzioni di variabile vettoriale) e 6 (calcolo differenziale per funzioni di più variabili). Per alcuni richiami di Analisi Funzionale, consigliamo in particolare il testo [15], il cui §1 è interamente dedicato a richiami di insiemistica (definizione di intersezione di insiemi, unione, differenza). Nelle pp. 49-50 del §2 sono presentate le nozioni fondamentali sugli spazi topologici ed le definizioni di intorni, basi d'intorni ed insieme aperto. A p. 23 si definisce l'applicazione tra due insiemi e se ne spiegano le proprietà di continuità. Il concetto di operatore lineare viene infine introdotto nelle prime pagine del capitolo 3, dove si parla inoltre di spazi di operatori e di spazi coniugati.

Approfondimenti

1.8 Flusso generato da un campo di strain 2D

Consideriamo, come secondo esempio, il flusso *bidimensionale* (il campo di velocità dipende da due sole coordinate spaziali) *piano* (il flusso è invariante per traslazioni di un piano in direzione normale al piano stesso) il cui campo di velocità nel piano (x, y) (e_z è il versore normale a tale piano) è dato da:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} u(\mathbf{x}, t) \\ v(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix} = \mathbf{M}(t) \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \chi_x(t) x + \chi_y(t) y \\ \chi_y(t) x - \chi_x(t) y \end{pmatrix} \quad (1.51)$$

in cui le quantità χ_x e χ_y (in generale funzioni del tempo) sono assegnate. Questo flusso è invariante per traslazioni nella direzione della terza coordinata (z). Il campo di velocità (1.51) è particolarmente rilevante, corrispondendo al termine lineare di una espansione in serie di McLaurin di un qualunque campo piano a divergenza ($\nabla \cdot \mathbf{u} = \partial_x u + \partial_y v$) e vorticità ($\nabla \times \mathbf{u} = e_z \nabla^\perp \cdot \mathbf{u} = (-\partial_y u + \partial_x v) e_z$) nulle, e viene chiamato campo di *strain piano*.

Se χ_x e χ_y sono costanti, il flusso si riesce a determinare analiticamente. Infatti in queste condizioni è conveniente ricercare la rotazione che diagonalizza la matrice \mathbf{M} dei coefficienti e si ruota il riferimento ottenendo un sistema disaccoppiato. Gli autovalori di \mathbf{M} sono dati da $\lambda^{(1,2)} = \pm \gamma = \pm \sqrt{\chi_x^2 + \chi_y^2}$ ed i corrispondenti autovettori (normalizzati) si scrivono:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(1)} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\gamma(\gamma - \chi_x)}} \begin{pmatrix} -\chi_y \\ -\gamma + \chi_x \end{pmatrix} \\ \mathbf{v}^{(2)} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha' \\ \sin \alpha' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\gamma(\gamma + \chi_x)}} \begin{pmatrix} -\chi_y \\ \gamma + \chi_x \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

che risultano essere ortogonali (ovvero $\alpha = \alpha' \pm \pi/2$), essendo \mathbf{M} reale e simmetrica. Costruita allora la matrice che ha come colonne le componenti dei due versori $\mathbf{v}^{(1)}$ e $\mathbf{v}^{(2)}$:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \cos \alpha' \\ \sin \alpha & \sin \alpha' \end{pmatrix},$$

questa matrice è unitaria (ovvero l'inversa è semplicemente la matrice trasposta: $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$) ed inoltre:

$$\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}, \quad (1.52)$$

che qualifica \mathbf{R} come la rotazione che diagonalizza \mathbf{M} . La relazione (1.52) è molto importante, poiché evidenzia che, nel riferimento (ξ, η) ruotato di un angolo α rispetto ad (x, y) , il campo di velocità (1.51) ha componente ξ positiva e linearmente crescente con ξ medesima e componente η negativa e linearmente decrescente con η . I coefficienti di proporzionalità tra la componente ξ e ξ e tra la componente η e $-\eta$ sono uguali. Un campo di velocità siffatto prende il nome di *campo di strain*, con intensità γ ed orientazione α . Ricavando \mathbf{M} dalla relazione precedente si ottengono

le relazioni seguenti tra i coefficienti χ_x e χ_y e l'intensità γ e l'orientazione α del campo di strain:

$$\chi_x = \gamma \cos 2\alpha, \quad \chi_y = \gamma \sin 2\alpha. \quad (1.53)$$

◊ **Esercizio:** Nel caso in cui \mathbf{R} è funzione del tempo, provare che $\dot{\mathbf{R}}^T \cdot \mathbf{R}$ è una matrice emisimmetrica. (1.54)

Nelle nuove variabili:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \mathbf{R}^T \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ x \cos \alpha' + y \sin \alpha' \end{pmatrix}$$

il sistema differenziale $\dot{\mathbf{x}} = M \cdot \mathbf{x}$ diviene $\dot{\xi} = \mathbf{R}^T \cdot \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{R}^T \cdot M \cdot \mathbf{R}) \cdot \xi$ che, essendo la matrice dei coefficienti (1.52) diagonale, si riduce alle due equazioni disaccoppiate:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = +\gamma \xi \\ \dot{\eta} = -\gamma \eta, \end{cases}$$

da integrare con condizioni iniziali $\xi(0) = \xi_0$ ed $\eta(0) = \eta_0$. Osserviamo che qualora i coefficienti χ_x , χ_y e quindi la matrice del cambiamento di coordinate \mathbf{R} fossero funzioni del tempo, $\dot{\xi} = \mathbf{R}^T \cdot \dot{\mathbf{x}} + (\dot{\mathbf{R}}^T \cdot \mathbf{R}) \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{x}$ (con $\dot{\mathbf{R}}^T \cdot \mathbf{R}$ emisimmetrica, cfr. Esercizio 1.54) e tale proiezione non è più utile. Integrando per separazione di variabili: $\xi(t) = \xi_0 \exp(+\gamma t)$, $\eta(t) = \eta_0 \exp(-\gamma t)$. Ne segue per $\mathbf{x}(t)$:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} \xi_0 \exp(+\gamma t) \\ \eta_0 \exp(-\gamma t) \end{pmatrix} = \mathbf{x}_0 \cosh \gamma t + \begin{pmatrix} x_0 \cos 2\alpha + y_0 \sin 2\alpha \\ x_0 \sin 2\alpha - y_0 \cos 2\alpha \end{pmatrix} \sinh \gamma t.$$

Nel caso in cui i coefficienti χ_x e χ_y variano nel tempo occorre procedere in modo differente. Infatti, se per un momento si interpretano le due equazioni (scalari) della traiettoria (1.4) come un sistema lineare nelle due funzioni χ_x e χ_y , si ottengono le due relazioni fondamentali:

$$\frac{x\dot{x} - y\dot{y}}{x^2 + y^2} = \chi_x, \quad \frac{x\dot{y} + y\dot{x}}{x^2 + y^2} = \chi_y,$$

che possono essere tradotte in termini di equazioni per il modulo m del vettore \mathbf{x} e per la sua fase θ :

$$\begin{cases} \frac{\dot{m}}{m} \cos 2\theta - \dot{\theta} \sin 2\theta = \gamma \cos 2\alpha \\ \frac{\dot{m}}{m} \sin 2\theta + \dot{\theta} \cos 2\theta = \gamma \sin 2\alpha, \end{cases} \quad (1.55)$$

avendo utilizzato le espressioni (1.53) per i coefficienti χ_x e χ_y . Si ricava in tal modo una equazione per la fase relativa del punto rispetto al riferimento strain ($\varepsilon = \theta - \alpha$):

$$\dot{\varepsilon} = -(\gamma \sin 2\varepsilon + \dot{\alpha}),$$

che si riscrive nella nuova variabile $z = \tan \varepsilon = \tan(\theta - \alpha)$ come:

$$\dot{z} = -[2\gamma z + \dot{\alpha}(1 + z^2)]. \quad (1.56)$$

L'equazione (1.56) si integra per separazione di variabili nei casi: I) $\dot{\alpha} = 0$, γ variabile; II) γ e $\dot{\alpha}$ costanti; III) γ e $\dot{\alpha}$ proporzionali alla medesima funzione del tempo.

Analizziamo i primi due casi (il terzo appare poco interessante). Se $\dot{\alpha} = 0$, ovvero il campo di strain non ruota, allora:

$$z(t) = z(0) e^{-2\Gamma(t)} \quad \text{con: } \Gamma(t) = \int_0^t dt' \gamma(t') > 0. \quad (1.57)$$

L'equazione (1.57) mostra che, se $\Gamma \rightarrow +\infty$ per $t \rightarrow +\infty$, allora $z \rightarrow 0$ e quindi $\theta - \alpha \rightarrow 0$ oppure $\theta - \alpha \rightarrow \pi$. In tal caso il punto materiale si muove verso l'asse principale ξ dello strain (asse di stiramento), o da valori positivi o da valori negativi di ξ . Invece, se $\Gamma \rightarrow \Gamma_\infty$ finito per $t \rightarrow +\infty$ (quindi $\gamma \rightarrow 0$ nello stesso limite in modo integrabile), allora $z \rightarrow z(0) \exp(-2\Gamma_\infty)$ e permane uno sfasamento rispetto agli assi strain. Per quanto riguarda il modulo, dal sistema (1.55) si ottiene $\dot{m}/m = \gamma \cos 2\varepsilon$ e sostituendo il valore di γ che segue dall'equazione (1.56) otteniamo l'equazione differenziale a variabili separabili seguente:

$$\frac{\dot{m}}{m} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{z} + \frac{2z}{z^2 + 1} \right) \dot{z},$$

dalla quale, sostituendo la soluzione (1.57) per $z(t)$ si ricava il corrispondente andamento nel tempo del modulo m :

$$m(t) = m(0) \sqrt{2 \cos^2 \varepsilon(0) \sinh 2\Gamma(t) + e^{-2\Gamma(t)}}. \quad (1.58)$$

Questa relazione evidenzia un fatto importante: se $\varepsilon(0) = \pi/2$ o $3\pi/2$ (ovvero il punto è inizialmente sull'asse strain η , di compressione), allora m rimane finito ed, in particolare, se $\Gamma \rightarrow +\infty$ per $t \rightarrow \infty$, allora $m \rightarrow 0$ nel medesimo limite. Per tutte le altre condizioni iniziali, da $\Gamma \rightarrow +\infty$ segue $m \rightarrow +\infty$, mentre se $\Gamma \rightarrow \Gamma_\infty$ (finito) allora anche m rimane finito nel medesimo limite.

Supponiamo invece γ e $\dot{\alpha}$ costanti, con $\dot{\alpha} \neq 0$ (altrimenti si ricade nel caso già trattato inizialmente), e separiamo le variabili nell'equazione (1.56):

$$\frac{dz}{z^2 + 2\mu z + 1} = -\dot{\alpha} dt, \quad (1.59)$$

avendo posto $\mu = \gamma/\dot{\alpha}$. Si vede subito, analizzando il denominatore della frazione a primo membro dell'equazione (1.58), che vanno considerati separatamente i due casi: 1) $|\mu| > 1$, ovvero lo strain prevale sulla rotazione ($\gamma > |\dot{\alpha}|$); 2) $|\mu| < 1$, ovvero la rotazione prevale sullo strain ($\gamma < |\dot{\alpha}|$). Ovviamente il caso in cui $\mu = \pm 1$ si riottiene da ciascuno dei due precedenti valutando opportune forme indeterminate. Nel primo caso, le radici del polinomio quadratico in z' al denominatore sono entrambe reali:

$$z_{1,2} = -\mu \pm \omega \quad \text{con: } \omega = \sqrt{\mu^2 - 1} \quad (1.60)$$

(negative se $\dot{\alpha} > 0$ e positive se $\dot{\alpha} < 0$), mentre nel secondo sono non reali e coniugate.

La soluzione del sistema (1.55) nel caso 1, ovvero $|\mu| > 1$, può essere calcolata solo una volta compresi i segni della derivata \dot{z} . Riscrivendo l'equazione (1.56) nella forma:

$$-\dot{z}/\dot{\alpha} = z^2 + 2\mu z + 1, \quad (1.61)$$

si ha che il segno di \dot{z} è concorde con quello di $\dot{\alpha}$ per tutti gli z tali che il trinomio a secondo membro è negativo, mentre è discorde per tutti gli z per i quali tale trinomio è positivo. Tenendo conto dei segni di z_1 e z_2 , si deduce la situazione rappresentata

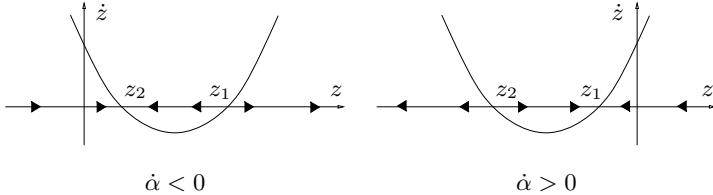


Figura 1.7. Discussione dei segni di \dot{z} basata sull'equazione (1.60). Le frecce indicano il verso in cui l'asse z è percorso nel tempo.

in Fig. 1.7, in cui le frecce mostrano il verso di percorrenza dell'asse z congruente con il segno di \dot{z} .

L'analisi della Fig. 1.7 consente di concludere che, se $\dot{\alpha} < 0$, $z \rightarrow z_2$ per $t \rightarrow \infty$, qualunque sia il dato iniziale $z(0)$. Eventualmente, se $z(0) > z_1$, z raggiunge il valore $+\infty$ (corrispondente ad $\varepsilon = +\pi/2$), per poi percorrere il semiasse da $-\infty$ a z_2 . Se, invece, $\dot{\alpha} > 0$ allora $z \rightarrow z_1$ per $t \rightarrow +\infty$. Eventualmente, nel caso in cui $z(0) < z_2$, z passa per il valore $-\infty$ (corrispondente ad $\varepsilon = -\pi/2$) e poi percorre il semiasse da $+\infty$ a z_1 . Chiarito questo punto, possiamo integrare l'equazione (1.61), avendo cura di scegliere correttamente gli estremi di integrazione. Nel caso $\dot{\alpha} < 0$, per $z(0) < z_1$ abbiamo che $z \rightarrow z_2$ senza attraversamenti dell'infinito e quindi:

$$\int_{z(0)}^{z(t)} \frac{dz'}{z'^2 + 2\mu z' + 1} = -\dot{\alpha}t ,$$

mentre per $z(0) > z_1$ abbiamo attraversamenti dell'infinito (da $+\infty$ a $-\infty$), per cui è necessario cambiare gli estremi di integrazione in:

$$\left(\int_{z(0)}^{+\infty} dz' + \int_{-\infty}^{z(t)} dz' \right) \frac{1}{z'^2 + 2\mu z' + 1} = -\dot{\alpha}t .$$

In entrambi i casi otteniamo:

$$z(t) = \frac{[z(0) - z_1]z_2 e^{-2\omega\dot{\alpha}t} - [z(0) - z_2]z_1}{[z(0) - z_1]e^{-2\omega\dot{\alpha}t} - [z(0) - z_2]} . \quad (1.62)$$

Se $\dot{\alpha} > 0$, per $z(0) > z_2$ possiamo scrivere:

$$\int_{z(0)}^{z(t)} \frac{dz'}{z'^2 + 2\mu z' + 1} = -\dot{\alpha}t ,$$

mentre se $z(0) < z_2$ abbiamo un attraversamento dell'infinito e dobbiamo invece porre:

$$\left(\int_{z(0)}^{-\infty} dz' + \int_{+\infty}^{z(t)} dz' \right) \frac{1}{z'^2 + 2\mu z' + 1} = -\dot{\alpha}t .$$

Otteniamo ancora la (1.62) che però conviene riscrivere come:

$$z(t) = \frac{[z(0) - z_2]z_1 e^{2\omega\dot{\alpha}t} - [z(0) - z_1]z_2}{[z(0) - z_2]e^{2\omega\dot{\alpha}t} - [z(0) - z_1]} , \quad (1.63)$$

al fine di evidenziare la convergenza a z_1 per $t \rightarrow +\infty$.

Analizziamo adesso ciò che accade se $|\mu| < 1$. Poniamo per brevità $\omega' = \sqrt{1 - \mu^2}$. Le due radici $z_{1,2}$ (1.60) divengono non reali ed il trinomio $z^2 + 2\mu z + 1$ è sempre positivo (sostituendo $z = \omega' \zeta - \mu$, il trinomio assume la forma $\omega'^2(\zeta^2 + 1)$ comoda per integrare). Ne segue che \dot{z} è sempre opposto a $\dot{\alpha}$. Gli attraversamenti dell'infinito divengono la regola ed il tempo T impiegato da z per percorrere l'asse reale è:

$$T = \frac{1}{|\dot{\alpha}|} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{z^2 + 2\mu z + 1} = \frac{\pi}{\sqrt{\dot{\alpha}^2 - \gamma^2}}. \quad (1.64)$$

Questo vuol dire che la fase relativa agli assi strain del punto materiale è monotonicamente crescente ($\dot{\alpha} < 0$) o decrescente ($\dot{\alpha} > 0$), ovvero il punto accumula sempre più ritardo rispetto allo strain. Introdotto il tempo necessario per passare da $z(0)$ all'infinito:

$$T_0 = \frac{1}{\sqrt{\dot{\alpha}^2 - \gamma^2}} \left(\frac{\pi}{2} \mp \arctan \frac{z(0) + \mu}{\omega'} \right), \quad (1.65)$$

in cui il segno superiore si riferisce al caso $\dot{\alpha} < 0$ e l'inferiore al caso $\dot{\alpha} > 0$, se $t < T_0$ vale la soluzione:

$$z(t) = -\mu + \omega' \tan \left(\arctan \frac{z(0) + \mu}{\omega'} - \omega' \dot{\alpha} t \right).$$

Se t è maggiore di T_0 , si considera il tempo \bar{t} ottenuto privando $t - T_0$ dei multipli di T e vale la soluzione:

$$z(t) = -\mu + \omega' \tan \left(-\omega' \dot{\alpha} \bar{t} \mp \frac{\pi}{2} \right),$$

con la solita convenzione sui segni.

Per quello che riguarda il modulo, dal sistema (1.22) segue $\dot{m}/m = \gamma \cos 2\varepsilon$ e, sostituendo il valore di γ ricavato dall'equazione (1.56), otteniamo:

$$\frac{\dot{m}}{m} = \gamma \cos 2\varepsilon = \frac{1}{4} \left(\frac{2z}{z^2 + 1} - \frac{2z + 2\mu}{z^2 + 2\mu z + 1} \right) \dot{z},$$

che può essere facilmente integrata:

$$m(t) = m(0) \left[\frac{z^2(t) + 1}{z^2(0) + 1} \right]^{1/4} \left[\frac{z^2(0) + 2\mu z(0) + 1}{z^2(t) + 2\mu z(t) + 1} \right]^{1/4}, \quad (1.66)$$

la quale prova che nel caso $|\mu| > 1$ il modulo m diverge per $t \rightarrow +\infty$ (ricordare che $z_{1,2}$ sono i due zeri del trinomio a denominatore), mentre nel caso $|\mu| < 1$ tale modulo assume un andamento periodico nel tempo, con periodo T .

1.9 Cenni sugli spazi topologici

Nello spazio \mathbb{R}^3 si è abituati ad utilizzare il concetto di intorno sferico di un punto x :

$$B_x(r) = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid |y - x| < r\},$$

(il raggio r viene di solito omesso nell'indicazione di B_x) definendo un insieme *aperto* A al modo seguente:

$$A \text{ è aperto} \Leftrightarrow \forall \mathbf{x} \in A : \exists B_{\mathbf{x}}(r) \mid B_{\mathbf{x}}(r) \subset A . \quad (1.67)$$

La "forma" sferica dell'intorno non è in realtà necessaria e questa definizione può essere generalizzata.

Tutto lo spazio \mathbb{R}^3 è ovviamente aperto e si considera tale anche l'insieme vuoto \emptyset . Si verifica subito che l'unione, anche di una quantità infinita (perfino non numerabile!), $\cup_{\alpha} A_{\alpha}$ di insiemi aperti A_{α} è un insieme aperto, visto che qualunque sia $\mathbf{x} \in \cup_{\alpha} A_{\alpha}$, \exists almeno un A_{α} tale che $\mathbf{x} \in A_{\alpha}$. Quindi $\exists B_{\mathbf{x}} \mid B_{\mathbf{x}} \subset A_{\alpha} \subset \cup_{\alpha} A_{\alpha}$. L'intersezione di un numero *finito* di aperti è aperta per lo stesso motivo, mentre nulla si può dire per l'intersezione di un numero *infinito* di aperti.

- ◊ **Esercizio:** Considerato lo spazio \mathbb{R}^1 e l'aperto $A_k = (0, 1 + 1/k)$, determinare $\cap_{k=1}^{\infty} A_k$. È aperto?

Un insieme C è *chiuso* se il suo complementare è aperto. Si verifica subito che l'unione di un numero *finito* di insiemi chiusi è chiusa e l'intersezione di un numero qualsiasi di chiusi è chiusa. La *chiusura* di un insieme $B \subset \mathbb{R}^3$ qualunque si definisce come:

$$\text{chiusura di } B = \overline{B} = \bigcap_{C \text{ chiuso} \supset B} C , \quad (1.68)$$

ovvero come l'intersezione di tutti i chiusi C contenenti B . Per quanto affermato prima, qualunque sia B , \overline{B} è un insieme chiuso.

Le nozioni esposte per \mathbb{R}^3 possono facilmente essere generalizzate ad uno spazio qualsiasi X . Si suppone infatti di avere una collezione $\tau = \{A_{\alpha}\}$ di sottoinsiemi di X che verranno chiamati *aperti*. τ verifichi le proprietà seguenti:

- 1) X e \emptyset appartengono a τ ;
- 2) l'unione di insiemi di τ appartiene a τ ;
- 3) l'intersezione di un numero *finito* di insiemi di τ appartiene a τ .

La coppia (X, τ) prende il nome di *spazio topologico* sul supporto X e con topologia τ .

Un *intorno aperto* V di un dato punto $x \in X$ è un qualunque insieme della collezione τ che contenga x . Mentre, definita con U_x la collezione degli insiemi di τ che contengono il punto x , si chiama *base di intorni aperti* del punto x nella topologia τ la sottocollezione $B_x \subset U_x$ per la quale, scelto un qualunque $V \in U_x$, esiste un insieme $B_V \in B_x$ tale che $B_V \subseteq V$.

Un altro concetto che sarà molto utile nel seguito è quello di *applicazione continua* tra spazi topologici. Dati due spazi topologici (X, τ_X) , (Y, τ_Y) ed una applicazione f :

$$f : X \longrightarrow Y ,$$

la f è *continua* nel punto $x \in X$ se, comunque si scelga un insieme $U_Y \in \tau_Y$ contenente $f(x)$, \exists un insieme $V_X \in \tau_X$ contenente x tale che $f(V_X) \subset U_Y$. Se l'applicazione f è continua in tutti i punti $x \in X$, la precedente definizione equivale alla seguente:

$$f \text{ continua} \Leftrightarrow \forall A_Y \in \tau_Y : f^{-1}(A_Y) \in \tau_X .$$

- ◊ **Esercizio:** Verificare che questa definizione si riduce a quella usuale per una funzione $y = f(x)$ di variabile reale, assumendo $X = Y = \mathbb{R}^1$ con topologia τ data dagli usuali intervalli aperti.

1.10 Richiami di Algebra Lineare

È ben nota la definizione di *spazio vettoriale* E su un campo di scalari K . Il medesimo campo di scalari K può essere pensato come spazio vettoriale (di dimensione 1) su se stesso. Un *omeomorfismo* di uno spazio vettoriale E in uno spazio vettoriale F , costruiti sullo stesso campo di scalari K , è una applicazione lineare L , ovvero una applicazione da E su F che gode della proprietà che per ogni $\alpha_{1,2} \in K$ e per ogni $\mathbf{x}_{1,2} \in E$ si ha:

$$L(\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2) = \alpha_1 L(\mathbf{x}_1) + \alpha_2 L(\mathbf{x}_2).$$

Si può allora considerare l'insieme delle applicazioni lineari L di E su K (pensato come spazio vettoriale su se stesso). Tali applicazioni prendono il nome di *forme lineari* su E e la generica forma si indica con w^* . Si dimostra subito che tale insieme è a sua volta uno spazio vettoriale sul medesimo campo K che prende il nome di *spazio duale* E^* di E .

Limitando l'analisi al caso in cui E sia finitodimensionale, esiste una base $\{\mathbf{e}_k, k = 1, \dots, n\}$ che consente di scrivere il generico vettore di E come $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$. Si noti che in tal caso l'indice sulla componente è in alto, mentre l'indice sull'elemento della base è in basso. Una base dello spazio duale è data dalle forme θ^{*h} per $h = 1, \dots, n$ tali che:

$$\theta^{*h}(\mathbf{e}_k) = \delta_k^h, \quad (1.69)$$

dove δ_k^h è l'elemento di K che assume il valore 1 se $h = k$ e quello 0 se $h \neq k$. Ne segue che anche lo spazio duale E^* è n -dimensionale, le basi $\{\mathbf{e}_k\}$ e $\{\theta^{*h}\}$ si dicono *basi duali*. La generica forma si scriverà allora come $w^* = y_i \theta^{*i}$. Si noti che in tal caso l'indice sulla componente è in basso e l'indice sull'elemento della base è in alto.

Realizzando un *cambiamento di base* in E si passa dai vettori $\{\mathbf{e}_i\}$ ai vettori $\{\mathbf{e}'_j\}$ dati da:

$$\mathbf{e}'_j = R_j^p \mathbf{e}_p, \quad (1.70)$$

in cui la matrice $n \times n$ $\mathbf{R} = (R_j^p)$ (p è l'indice di riga, j è quello di colonna) ha determinante non nullo per l'indipendenza lineare dei vettori $\{\mathbf{e}'_j\}$. Essendo anche i vettori $\{\mathbf{e}'_j\}$ una base di E , anche i vettori $\{\mathbf{e}_i\}$ potranno essere scritti come combinazioni lineari dei vettori $\{\mathbf{e}'_j\}$:

$$\mathbf{e}_i = R'_i{}^q \mathbf{e}'_q, \quad (1.71)$$

in cui anche la matrice \mathbf{R}' ha determinante non nullo. Sostituendo l'equazione (1.70) nella (1.71) e viceversa si ha:

$$\mathbf{e}_i = R'_i{}^q R_q^p \mathbf{e}_p, \quad \mathbf{e}'_j = R_j^p R'_p{}^q \mathbf{e}'_q,$$

da cui conseguono le relazioni:

$$(\delta_i^p - R'_i{}^q R_q^p) \mathbf{e}_p = \mathbf{0}, \quad (\delta_j^q - R_j^p R'_p{}^q) \mathbf{e}'_q = \mathbf{0}. \quad (1.72)$$

Poiché entrambi i sistemi sono basi in E , dalle equazioni (1.72) segue subito che:

$$R'_i{}^q R_q^p = \delta_i^p, \quad R_j^p R'_p{}^q = \delta_j^q,$$

ovvero le matrici \mathbf{R} e \mathbf{R}' sono una l'inversa dell'altra. In modo analogo si può determinare come cambiano le componenti del vettore \mathbf{x} quando è rappresentato nella nuova base $\{\mathbf{e}'_i\}$. Infatti, valgono le seguenti rappresentazioni:

$$\mathbf{x} = x^k \mathbf{e}_k = x^k (R^{-1})_k^p \mathbf{e}'_p = x'^p \mathbf{e}'_p ,$$

ed, inversamente:

$$\mathbf{x} = x'^k \mathbf{e}'_k = x'^k R_k^p \mathbf{e}_p = x^p \mathbf{e}_p .$$

Per cui, se si rappresentano le componenti di un vettore con un vettore colonna ad n elementi, la matrice del cambiamento dalle componenti x^i alle componenti x'^i è la matrice \mathbf{R}^{-1} *inversa* di quella del cambiamento di base.

È interessante ricercare quale cambiamento di riferimento corrisponda ad \mathbf{R} nella base duale. In base alla definizione (1.69), effettuando il cambiamento di riferimento \mathbf{R} si ha:

$$\delta_k^h = \theta'^{*h}(\mathbf{e}'_k) = \theta'^{*h}(R_k^q \mathbf{e}_q) = R_k^q \theta'^{*h}(\mathbf{e}_q) , \quad (1.73)$$

avendo sfruttato la condizione di dualità (1.69) e la linearità della forma θ'^{*h} . Ma la nuova base in E^* si può scrivere:

$$\theta'^{*h} = R_m^{*h} \theta^{*m} , \quad (1.74)$$

avendo utilizzato la matrice \mathbf{R}^* del cambiamento di riferimento da $\{\theta^{*i}\}$ a $\{\theta'^{*j}\}$ nel duale. Applicando ciascun elemento della nuova base, dato in (1.74) in funzione degli elementi nella vecchia, a \mathbf{e}_q e ricordando la condizione di dualità (1.69), si ha:

$$\theta'^{*h}(\mathbf{e}_q) = R_m^{*h} \theta^{*m}(\mathbf{e}_q) = R_m^{*h} \delta_q^m = R_q^{*h} . \quad (1.75)$$

Sostituendo nell'equazione (1.73) il risultato (1.75) si ottiene:

$$\delta_k^h = R_k^q R_q^{*h} . \quad (1.76)$$

Analogamente, effettuando il cambiamento di riferimento $\mathbf{R}' = \mathbf{R}^{-1}$ si ha:

$$\delta_k^h = \theta^{*h}(\mathbf{e}_k) = \theta^{*h}(R'_k \mathbf{e}'_q) = R'_k \theta^{*h}(\mathbf{e}'_q) , \quad (1.77)$$

avendo sfruttato la linearità della forma θ^{*h} . Ma la vecchia base in E^* si può scrivere effettuando il cambiamento di riferimento \mathbf{R}^* :

$$\theta^{*h} = (R^{*-1})_m^h \theta'^{*m} . \quad (1.78)$$

Applicando ciascun elemento della vecchia base, dato in (1.74) in funzione degli elementi nella nuova, ad \mathbf{e}'_q e ricordando che sulla nuova base si pone la condizione di dualità (1.69) rispetto alla nuova base di E $\{\mathbf{e}'_q\}$ si ha:

$$\theta^{*h}(\mathbf{e}'_q) = (R^{*-1})_m^h \theta'^{*m}(\mathbf{e}'_q) = (R^{*-1})_m^h \delta_q^m = (R^{*-1})_q^h . \quad (1.79)$$

Sostituendo nell'equazione (1.77) il risultato (1.79) si ottiene:

$$\delta_k^h = R'_k (R^{*-1})_q^h . \quad (1.80)$$

Dalle equazioni (1.76, 1.80) segue che $\mathbf{R}^* = \mathbf{R}^{-1}$. Quindi, ad un cambiamento di base \mathbf{R} nello spazio E corrisponde un cambiamento di base \mathbf{R}^{-1} nello spazio duale E^* . Con un ragionamento identico a quanto fatto in precedenza per $\mathbf{x} \in E$, si trova che le componenti di una forma cambiano con una matrice $(\mathbf{R}^{-1})^{-1} = \mathbf{R}$ al cambiare della base in E .

Gli spazi E ed E^* , pur essendo entrambi di dimensione n , e quindi isomorfi, non possono essere identificati a causa delle diverse leggi con cui cambiano le componenti

di un vettore nei due casi. Iterando invece la procedura che ha portato alla definizione di spazio duale, si può costruire lo spazio *bi-duale* E^{**} , cioè lo spazio delle forme lineari sulle forme lineari. Questa volta le componenti cambiano con la matrice \mathbf{R}^{-1} , ovvero nello stesso modo con cui cambiano le componenti di un vettore di E . Ne segue che E ed E^{**} possono essere identificati, in quanto esiste un isomorfismo *naturale* (\equiv che non dipende dalla base) tra i due spazi vettoriali. Questo fatto è di grande interesse per gli sviluppi seguenti: permette, infatti, di identificare un vettore di E con uno di E^{**} , ovvero con una applicazione lineare dallo spazio duale E^* sul campo K , su cui si dispone, tra l'altro, dell'ordinaria operazione di prodotto.

Si consideri ora una applicazione bilineare (lineare nei due argomenti) T del prodotto cartesiano $E \times F$ in K , con E ed F spazi vettoriali finitodimensionali sul medesimo campo K . T prende il nome di *tensores doppio covariante*. Essendo $E \times F$ l'insieme delle coppie *ordinate* di vettori (\mathbf{x}, \mathbf{y}) , con $\mathbf{x} \in E$ ed $\mathbf{y} \in F$, se $\{\mathbf{e}_i, i = 1, \dots, n\}$ è una base di E e $\{\mathbf{f}_k, k = 1, \dots, p\}$ è una base di F , i valori assunti da T su un qualunque elemento (\mathbf{x}, \mathbf{y}) di $E \times F$ dipenderanno soltanto dai valori assunti sulle $n \times p$ coppie $(\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_k)$. Infatti, dalla bilinearità di T :

$$T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x^i T(\mathbf{e}_i, \mathbf{y}) = x^i y^k T(\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_k).$$

T è quindi completamente determinato dagli $n \times p$ valori $T(\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_k)$.

Considerando l'insieme delle possibili applicazioni bilineari T da $E \times F$ a K , questo ha ancora una struttura di spazio lineare e si chiama *spazio prodotto tensoriale dei duali* E^* ed F^* , indicato spesso con $E^* \otimes F^*$. Se $w^* \in E^*$ e $v^* \in F^*$ sono due forme lineari, si definisce *forma prodotto tensoriale* delle due la applicazione bilineare di $E \times F$ in K :

$$w^* \otimes v^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = w^*(\mathbf{x}) v^*(\mathbf{y}). \quad (1.81)$$

È piuttosto ovvio, a questo punto, mostrare che se $\{\theta^{*h}\}$ e $\{\gamma^{*k}\}$ sono due basi in E^* ed F^* , duali delle basi $\{\mathbf{e}_i\}$ ed $\{\mathbf{f}_j\}$ in E ed F , $\theta^{*h} \otimes \gamma^{*k}$ è una base in $E^* \otimes F^*$, che risulta quindi essere $n \times p$ -dimensionale. Poiché si è visto che le componenti delle forme lineari variano con la stessa matrice del cambiamento di base in E ed in F , effettuando i due cambiamenti di base \mathbf{R}_E ed \mathbf{R}_F in E ed F , rispettivamente, le componenti T_{ij} del generico tensore doppio covariante $T = T_{ij} \theta^{*i} \otimes \gamma^{*j}$ cambieranno al modo seguente:

$$T'_{hk} = (R_E)_h^l (R_F)_k^m T_{lm}, \quad (1.82)$$

ovvero variano allo stesso modo delle basi in E ed F (da qui l'aggettivo *covariante* nella denominazione di T).

Analogamente, si può considerare una applicazione bilineare T del prodotto cartesiano $E^* \times F^*$ in K . Questa è completamente identificata dai valori che assume sulle coppie $(\theta^{*h}, \gamma^{*k})$ e si chiama *tensores doppio controvariante*. L'insieme di tali applicazioni bilineari forma anch'esso uno spazio vettoriale che si indica con $E^{**} \otimes F^{**}$ e che può essere identificato in modo naturale con lo spazio $E \otimes F$ *prodotto tensoriale di* E ed F . Una base sarà costituita dai prodotti tensoriali delle forme $\theta_h^{**} \otimes \gamma_k^{**}$, identificabili con i prodotti tensoriali dei vettori $\mathbf{e}_h \otimes \mathbf{f}_k$ e le componenti varieranno per cambiamenti di base in E ed F al modo seguente:

$$T'^{hk} = (R_E^{-1})_l^h (R_F^{-1})_m^k T^{lm}, \quad (1.83)$$

ovvero varieranno nel modo inverso rispetto alle basi (di qui l'aggettivo *controvariante*).

Le definizioni date sopra possono poi essere estese ai prodotti tensoriali di un numero qualunque (purché finito) di spazi o di spazi duali. Limitandosi, per semplicità, al caso in cui lo spazio vettoriale considerato è soltanto E , un tensore d'ordine r a p indici di covarianza e q indici di controvarianza (con $p + q = r$) sarà una applicazione multilineare del prodotto cartesiano

$$\left(\underbrace{(E, \dots, E)}_{p \text{ volte}}, \underbrace{E^*, \dots, E^*}_{q \text{ volte}} \right)$$

sul campo K . Le sue componenti varieranno, per un cambiamento di riferimento R in E , al modo seguente:

$$T'^{i_1, \dots, i_q}_{j_1, \dots, j_p} = R^{h_1}_{j_1} \cdot \dots \cdot R^{h_p}_{j_p} \cdot (R^{-1})^{i_1}_{k_1} \cdot \dots \cdot (R^{-1})^{i_q}_{k_q} T^{k_1, \dots, k_q}_{h_1, \dots, h_p}. \quad (1.84)$$

Utilizzando questa relazione, nota la relazione tra le vecchie e le nuove componenti di una qualsiasi quantità dipendente da un certo numero di indici al cambiare del riferimento, si può verificare se la data quantità ha o no un carattere di tensorialità, definendo nel primo caso di che tipo di tensore si tratta.

Equazioni di bilancio

Oggetto di questo capitolo sarà la deduzione di un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali che, sotto opportune ipotesi, descriva il moto del fluido. La procedura con la quale queste equazioni vengono dedotte è di per sé interessante, in quanto fa uso di bilanci integrali, che sono spesso direttamente utilizzati in molte applicazioni. Dopo aver dedotto il *teorema del trasporto*, che consentirà di scrivere le equazioni differenziali del moto (§2.1), verrà scritta l'equazione per il bilancio della massa (*equazione di continuità*, §2.2). Si mostrerà poi che, nel caso di moto piano (ovvero quando tutti i campi dipendono solo da due delle tre coordinate spaziali), questa equazione può essere implicitamente soddisfatta introducendo il campo scalare della *funzione di corrente* (§2.3), dal quale viene dedotto il campo di velocità.

Saranno poi discussi i bilanci per la *quantità di moto* (§2.4) e per il *momento della quantità di moto* (§2.5), dal quale si deduce la simmetria del tensore degli sforzi interni al fluido. Quest'ultimo viene correlato al campo di velocità di deformazione (il tensore \mathbf{S} introdotto nel paragrafo 1.4) attraverso una opportuna *relazione costitutiva* nel paragrafo 2.6. Infine viene scritta una equazione per l'*energia* (§2.8) dalla quale verrà poi dedotto un bilancio locale per l'energia cinetica e per l'energia interna.

Un breve percorso bibliografico è infine proposto nel paragrafo 2.9.

2.1 Il teorema del trasporto

Noto come il flusso \mathcal{F}_t trasforma l'elemento di volume JdV_0 (cfr. § 1.3), si può dedurre facilmente un teorema di fondamentale importanza in Fluidodinamica. Oggetto di questo teorema è la valutazione della derivata nel tempo dell'integrale su un volume materiale $\mathcal{V}_t = \mathcal{F}_t \mathcal{V}_0$ di una data funzione differenziabile $f(\mathbf{x}, t)$. Il problema è quindi di valutare la derivata seguente:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} dV(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}, t) , \quad (2.1)$$

in cui, essendo lo stesso dominio di integrazione \mathcal{V}_t variabile nel tempo, non è possibile permutare derivata ed integrale. Si noti che nella (2.1) è stato utilizzato un simbolo di derivata *ordinaria* nel tempo. Infatti, l'integrale presente nella (2.1) è una funzione del solo tempo.

La valutazione della derivata (2.1) è a questo punto agevole, se si utilizza la trasformazione inversa del flusso \mathcal{F}_t^{-1} per scrivere l'integrale sul volume materiale al tempo 0:

$$\int_{\mathcal{V}_t} dV(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathcal{V}_0} J(\boldsymbol{\xi}, t) dV_0(\boldsymbol{\xi}) f[\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t), t] . \quad (2.2)$$

In quest'ultima forma, il dominio di integrazione (\mathcal{V}_0) dell'integrale (2.1) non dipende dal tempo e si può portare all'interno dell'integrale la derivata nel tempo. Utilizzando la forma (2.2) e derivando si ha:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} dV f &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_0} J dV_0 f \\ &= \int_{\mathcal{V}_0} dV_0 [\partial_t J f + J (\partial_t f + u_i \partial_{x_i} f)] \\ &\equiv \int_{\mathcal{V}_0} J dV_0 \left(\frac{\partial_t J}{J} f + \partial_t f + u_i \partial_{x_i} f \right) . \end{aligned}$$

Nell'ultimo integrale si può ripassare in coordinate Euleriane, poiché $J dV_0 = dV$. Inoltre, la derivata nel tempo dello jacobiano si valuta con la (1.27). Se si utilizza la notazione (1.47) per la derivata materiale ($D/Dt = \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla$), la derivata (2.1) può essere scritta in definitiva:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} dV f = \int_{\mathcal{V}_t} dV \left(\frac{Df}{Dt} + f \nabla \cdot \mathbf{u} \right)} \quad (2.3)$$

Questa relazione è dovuta a O. Reynolds [1842-1912].

Per meglio comprendere il significato fisico del teorema del trasporto (2.3) si può trasformare l'integrale a secondo membro utilizzando il teorema della divergenza:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}_t} dV \left(\frac{Df}{Dt} + f \nabla \cdot \mathbf{u} \right) &= \int_{\mathcal{V}_t} dV [\partial_t f + \nabla \cdot (f \mathbf{u})] \\ &= \underbrace{\int_{\mathcal{V}_t} dV \partial_t f}_{\text{variazione di } f} + \underbrace{\int_{\partial \mathcal{V}_t} dA f \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}}_{\text{flusso di } f} \end{aligned}$$

dalla quale segue che la variazione dell'integrale (2.2) è dovuta alla variazione del valore di $f(\mathbf{x}, t)$ ad \mathbf{x} fisso ed alla variazione del volume \mathcal{V}_t , che è dato dalla $\mathcal{V}_t = \mathcal{F}_t \mathcal{V}_0$, ovvero è convetto col flusso.

- ◊ **Esercizio:** Verificare il teorema del trasporto per il flusso piano $\mathbf{x}(\xi, t) = (\xi + t\eta, -t\xi + \eta)$ con \mathcal{V}_0 cerchio di raggio r e centro nell'origine ed $f(\mathbf{x}, t) = \exp(-|\mathbf{x}|/r) \sin \Omega t$.

Suggerimento: verificare che il flusso trasforma tale cerchio in un nuovo cerchio, di raggio $r\sqrt{1+t^2}$...

2.2 Equazione di continuità

Il flusso \mathcal{F}_t è una trasformazione di \mathbb{R}^3 dipendente dal parametro t che mappa ogni punto materiale in una generica posizione ξ al tempo 0 nel punto materiale occupante la posizione $\mathbf{x}(\xi, t)$ al tempo $t \geq 0$. Come si è già discusso a riguardo della trasformazione dell'elemento di volume $dV_t = JdV_0$, un insieme aperto \mathcal{V}_0 al tempo 0 viene trasformato al tempo t in un insieme aperto (ricordare che \mathcal{F}_t^{-1} è stata assunta continua) $\mathcal{V}_t = \mathcal{F}_t\mathcal{V}_0$. Un tale insieme è stato definito *materiale*, proprio per sottolineare l'idea intuitiva che \mathcal{V}_t “ospiti lo stesso fluido” di \mathcal{V}_0 . Quando è possibile definire una scala delle lunghezze L per il flusso in esame, si è soliti definire come *particella fluida* ogni volume materiale di diametro δ molto piccolo rispetto ad L . Occorre a tale proposito sottolineare che questa definizione va posta su intervalli di tempo *limitati*, poiché nulla si può affermare sul comportamento di δ per $t \rightarrow \infty$.

Considerato allora un volume materiale \mathcal{V}_0 al tempo 0, la massa di fluido occupante tale volume deve essere conservata lungo il moto. Quindi, l'integrale seguente deve essere una costante nel tempo:

$$\int_{\mathcal{V}_t} dV(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}, t) , \quad (2.4)$$

essendo ρ la *densità* del fluido. La medesima considerazione può essere svolta per un qualunque aperto \mathcal{V}_0 e quindi la massa (2.4) deve essere costante *per una qualsiasi scelta di \mathcal{V}_0* .

Il fatto che l'integrale (2.4) è conservato lungo il moto implica che

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} dV \rho \equiv 0 ,$$

dove il simbolo \equiv significa che l'uguaglianza a 0 è verificata per tutte le possibili scelte del volume \mathcal{V}_0 e per tutti i tempi. Ne segue, utilizzando il teorema del trasporto (2.3),

$$\int_{\mathcal{V}_t} dV \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} \right) \equiv 0 . \quad (2.5)$$

Poiché la (2.5) è valida qualunque sia il dominio di integrazione \mathcal{V}_t (\mathcal{V}_0 è arbitrario), una ben nota proprietà dell'integrale consente di affermare che la

funzione integranda deve essere nulla. In tal modo si ottiene l'*equazione di continuità*:

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0} \quad (2.6)$$

Qualora si ammetta che il flusso sia stazionario, l'equazione (2.6) si riduce alla forma seguente:

$$\nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0, \quad (2.7)$$

ovvero alla richiesta che la divergenza del vettore $\rho \mathbf{u}$ sia nulla.

- ◊ **Esercizio:** Utilizzando la dinamica dello jacobiano (1.27), l'equazione di continuità (2.6) ed il fatto che $\partial_t \rho^{(\mathcal{L})} = D_t \rho^{(\varepsilon)}$, dimostrare che vale la relazione seguente:

$$J(\xi, t) \rho^{(\mathcal{L})}(\xi, t) \equiv \rho^{(\mathcal{L})}(\xi, 0).$$

Discuterne il significato fisico.

Per ricavare l'equazione (2.6), un procedimento completamente equivalente consiste nello scrivere il bilancio della massa su un volume *geometrico* \mathcal{V} , imponendo che:

$$\underbrace{\int_{\mathcal{V}} dV \partial_t \rho}_{\text{variazione locale}} = \underbrace{\int_{\partial\mathcal{V}} dA \rho \mathbf{u} \cdot (-\boldsymbol{\nu})}_{\text{flusso entrante}} \quad (2.8)$$

ovvero che l'aumento (o la diminuzione) della massa nel volume \mathcal{V} è causato da un flusso entrante (o uscente) di massa dalla frontiera $\partial\mathcal{V}$. Utilizzando il teorema di Gauss e la notazione di derivata materiale, dalla (2.8) segue ancora l'equazione di continuità (2.6), essendo arbitrario il volume *geometrico* \mathcal{V} considerato.

Utilizzando l'equazione di continuità (2.6), si può scrivere una forma semplificata del teorema del trasporto applicato a funzioni in cui sia presente il fattore ρ . Valutando la quantità sotto l'integrale a secondo membro della (2.3) per una $f = \rho g$:

$$\frac{Df}{Dt} + f \nabla \cdot \mathbf{u} = g \quad \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} \right) + \rho \frac{Dg}{Dt} = \rho \frac{Dg}{Dt},$$

dall'equazione di continuità. Ne segue la forma semplificata del teorema del trasporto per funzioni $f = \rho g$:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} dV \rho g = \int_{\mathcal{V}_t} dV \rho \frac{Dg}{Dt}} \quad (2.9)$$

La densità ρ di un fluido è funzione della temperatura T e della pressione p . Un fluido si dice *incomprimibile*, se la sua densità non varia al variare della pressione, ovvero se

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_T = 0 ,$$

in tal caso la densità ρ dipende dalla sola temperatura T . Ovviamente, al variare di quest'ultima varia anche la densità ρ . Un esempio particolarmente importante di flussi in cui ciò accade si ritrova nei problemi di convezione naturale. È a questo punto chiaro che l'incomprimibilità non implica il fatto che la densità sia costante. Un liquido è, in generale, un fluido incomprimibile, come si può verificare cercando, ad esempio, di aumentarne la densità aumentando la pressione. Al contrario, un gas deve spesso essere considerato un fluido *comprimibile*.

In un flusso *omotermo* (il campo di temperature è uniforme) di un fluido incomprimibile la densità è semplicemente trasportata dal flusso, quindi $D_t \rho = 0$. Questo non implica che la densità sia costante nello spazio e nel tempo. L'equazione di continuità (2.6) in tal caso si riduce alla:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 , \quad (2.10)$$

ovvero alla richiesta che la divergenza del campo di velocità sia nulla (campo *solenoidale*). Si osservi che questa richiesta comporta che lo jacobiano della trasformazione sia identicamente unitario, ovvero che il flusso sia *isocoro* (conserva i volumi).

In tali condizioni è spesso molto utile la nozione di *tubo di flusso*. Considerata una curva semplice e chiusa \mathcal{C} , su ogni punto della quale la velocità non risulti tangente (ed, in particolare, non si annulli), si assume che questa sia frontiera di una superficie \mathcal{S} ($\partial\mathcal{S} = \mathcal{C}$), interna al campo fluido. In tali ipotesi, per ogni tempo t si può determinare per ogni punto $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{C}$ la linea di corrente (1.9) passante per questo punto, costruendo una superficie che delimiterà un volume \mathcal{T}_f tutto interno al campo fluido chiamato “tubo di flusso”, la cui frontiera, a meno di \mathcal{S} , gode della proprietà di essere in ogni punto tangente al campo di velocità:

$$\forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{T}_f - \mathcal{S} : \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = 0 . \quad (2.11)$$

Il volume dipenderà, in generale, dal tempo, si dovrà quindi scrivere: $\mathcal{T}_f(t)$. La portata di volume che fluisce attraverso la superficie \mathcal{S} :

$$\int_{\mathcal{S}} dA \, \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}$$

è la stessa per ogni altra superficie \mathcal{S}' tale che $\partial\mathcal{S}' \subset \mathcal{T}_f$. Infatti, applicando il teorema di Gauss, la portata attraverso la nuova superficie \mathcal{S}' si scrive:

$$\int_{\mathcal{S}'} dA \, \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu} = \int_{\mathcal{S}} dA \, \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu} + \int_{\Sigma} dA \, \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu} , \quad (2.12)$$

in cui $\Sigma \subset (\partial\mathcal{T}_f - \mathcal{S})$. Ne segue, per la proprietà (2.11), che il secondo integrale a secondo membro dell'identità (2.12) è nullo, ovvero che la portata non varia qualunque sia la sezione del tubo considerata.

Notiamo che in un flusso isocoro, se il campo di densità all'istante iniziale è uniforme: $\rho(\mathbf{x}, 0) \equiv \rho_0$, allora la densità rimane costante nello spazio e nel tempo: $\rho(\mathbf{x}, t) \equiv \rho_0$. Parleremo in queste condizioni di *flusso a densità costante*.

Infine, un flusso in cui la pressione è funzione della sola densità (ed ovviamente viceversa) si dice *barotropico*. Per un flusso di questo tipo si può introdurre la quantità

$$\mathcal{P}(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp'}{\rho(p')} , \quad (2.13)$$

in cui p_0 è una pressione di riferimento, che consente di riscrivere il termine $(\nabla p)/\rho$ come $\nabla \mathcal{P}$. Si può per questo definire \mathcal{P} come *potenziale di pressione*. Notare che un flusso omotermo è barotropico ed in un flusso a densità costante $\mathcal{P}(p) = (p - p_0)/\rho_0$.

- ◊ **Esercizio:** Calcolare il potenziale di pressione \mathcal{P} (2.13) in un flusso omoentropico ($p/\rho^\gamma \equiv$ costante).

2.3 La funzione di corrente

L'equazione di continuità (2.6) si riduce nel caso stazionario alla (2.7), mentre se la densità è costante si riduce alla forma (2.10). Le equazioni (2.7, 2.10) hanno una struttura analoga, richiedendo la solenoidalità dei campi $\rho \mathbf{u}$ e \mathbf{u} , rispettivamente.

Un caso particolarmente interessante è quello di moto *piano*, caratterizzato da un campo di velocità:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = u_1(x_1, x_2)\mathbf{e}_1 + u_2(x_1, x_2)\mathbf{e}_2 , \quad (2.14)$$

avendo assunto il piano (x_1, x_2) come quello in cui si svolge il moto. Tutte le altre variabili dipendenti scalari del flusso (densità, pressione, ...) sono assunte invarianti lungo \mathbf{e}_3 .

- ◊ **Esercizio:** Determinare la forma assunta dal vettore vorticità $\boldsymbol{\omega}$ per il campo di velocità piano (2.14). (2.15)

Per questa classe di flussi, le equazioni (2.7, 2.10) possono essere verificate implicitamente introducendo un campo scalare, la *funzione di corrente*, le cui derivate forniscano le componenti del vettore $\rho \mathbf{u}$ nel primo caso (flusso stazionario) o quelle del vettore \mathbf{u} nel secondo (densità costante). Limitando l'analisi al secondo caso, che sarà poi discusso più approfonditamente nei capitoli successivi, si assume che la funzione di corrente ψ sia infinitamente derivabile e soddisfi le richieste seguenti:

$$\partial_2 \psi = u_1 , \quad -\partial_1 \psi = u_2 . \quad (2.16)$$

È allora una semplice applicazione del teorema di Schwarz sulla invertibilità delle derivate seconde miste far vedere che, se le richieste (2.16) sono soddisfatte, allora $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$.

- ◊ **Esercizio:** Verificare che una linea a $\psi \equiv$ costante è una linea di corrente (cfr. Paragrafo 1.2.2).
- ◊ **Esercizio:** Determinare una funzione di corrente per i seguenti campi di velocità bidimensionali:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \sin(\alpha x + \beta y) \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x(2\alpha y + \beta x) \\ -y(\alpha y + 2\beta x) \end{pmatrix}, \\ &\frac{1}{\alpha x + \beta y} \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \end{pmatrix}, \frac{\alpha - \beta}{(x + \beta y)^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \\ &\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2}} \begin{pmatrix} \beta^2 y \\ -\alpha^2 x \end{pmatrix}, e^{\alpha x + \beta y} \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \end{pmatrix},\end{aligned}\quad (2.17)$$

in cui α e β sono due funzioni del tempo.

Esiste una notazione che consente di abbreviare la scrittura delle condizioni (2.16). Considerato un vettore $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2$ nel piano del moto, la rotazione di $\pi/2$ in verso antiorario di questo consente di definire il vettore *ortogonale* $\mathbf{x}^\perp = -x_2 \mathbf{e}_1 + x_1 \mathbf{e}_2$. Allo stesso modo, considerato che l'operatore ∇ si riduce per tali flussi a $\nabla = \mathbf{e}_1 \partial_1 + \mathbf{e}_2 \partial_2$, si introduce l'operatore $\nabla^\perp = -\mathbf{e}_1 \partial_2 + \mathbf{e}_2 \partial_1$ e le richieste (2.16) si semplificano nella:

$$-\nabla^\perp \psi = \mathbf{u} . \quad (2.18)$$

- ◊ **Esercizio:** Verificare che, se \mathbf{f} è un campo di vettori *piano* ($\mathbf{f} = f_1(x_1, x_2) \mathbf{e}_1 + f_2(x_1, x_2) \mathbf{e}_2$), si ha:

$$\nabla \times \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_3 = \nabla^\perp \cdot \mathbf{f} . \quad (2.19)$$

A questo punto può sorgere una domanda: perché in un flusso a densità costante per richiedere che $\mathbf{u} = \nabla \varphi$ (cfr. Paragrafo 1.4) si deve verificare l'irrotationalità, mentre per richiedere $\mathbf{u} = -\nabla^\perp \psi$ non occorre specificare alcuna condizione? In verità, a prima vista le due posizioni sembrano perfettamente simmetriche. Infatti, facendo l'ortogonale di ambo i membri nell'equazione (2.18) (fare attenzione al fatto che $(\mathbf{x}^\perp)^\perp = -\mathbf{x}$) si ottiene che questa volta è l'ortogonale di \mathbf{u} a dover essere il gradiente di un campo scalare:

$$\mathbf{u}^\perp = \nabla \psi . \quad (2.20)$$

In perfetta simmetria con quanto è stato fatto per il potenziale, si analizzino le condizioni di integrabilità della forma $\mathbf{u}^\perp \cdot d\mathbf{x}$. Al solito, la richiesta sarà che su ogni circuito riducibile \mathcal{C} interno al campo fluido deve essere:

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{u}^\perp \cdot d\mathbf{x} = 0 . \quad (2.21)$$

Chiamata con \mathcal{S} una superficie orientata interna al campo fluido tale che $\partial\mathcal{S} = \mathcal{C}$ si ha, in base al teorema di Stokes ed alla (2.19), per l'integrale (2.21):

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{u}^\perp \cdot d\mathbf{x} &= \int_{\mathcal{S}} dA \, \nabla \times \mathbf{u}^\perp \cdot \boldsymbol{\nu} \\ &= \int_{\mathcal{S}} dA \, \nabla^\perp \cdot \mathbf{u}^\perp \\ &= \int_{\mathcal{S}} dA \, \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 , \end{aligned}$$

avendo tenuto conto che sulla superficie \mathcal{S} si ha $\boldsymbol{\nu} \equiv \mathbf{e}_3$. Quindi, la richiesta (2.21) è automaticamente soddisfatta per la forma (2.10) dell'equazione di continuità.

Il significato fisico della funzione di corrente è chiarito dal considerare la portata in volume che fluisce attraverso un arco di curva regolare \mathcal{C} di estremi \mathbf{x}_1 ed \mathbf{x}_2 . Questa quantità si scrive:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]} ds \, \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{u} &= - \int_{\mathcal{C}[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]} ds \, \boldsymbol{\nu} \cdot \nabla^\perp \psi \\ &= \int_{\mathcal{C}[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]} d\mathbf{x} \cdot \nabla \psi = \psi(\mathbf{x}_2) - \psi(\mathbf{x}_1) , \end{aligned}$$

in cui si è assunto il versore tangente pari a $\boldsymbol{\nu}^\perp$ lungo la \mathcal{C} . Tale quantità non è ovviamente dipendente dall'arco di curva scelto, ma dipende dai soli due punti estremi \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 . Il significato fisico della ψ è allora spiegato dalla seguente proprietà: la differenza tra i valori assunti dalla funzione di corrente in due punti (allo stesso istante) è pari al valore della portata volumetrica che fluisce tra il primo ed il secondo punto.

La funzione di corrente ψ è direttamente collegata alla componente 3 della vorticità (in questo tipo di flussi, $\boldsymbol{\omega} = \omega_3 \mathbf{e}_3$). Infatti, utilizzando la (2.20) ed il risultato (2.19) che fornisce $\omega_3 = \nabla^\perp \cdot \mathbf{u}$, si ottiene:

$$\omega_3 = \nabla^\perp \cdot \mathbf{u} = - \nabla^\perp \cdot \nabla^\perp \psi = - \nabla^2 \psi . \quad (2.22)$$

L'equazione (2.22) verrà invertita nel paragrafo 4.3, dove si studierà il legame tra velocità e vorticità nei moti piani.

- ◊ **Esercizio:** Verificare il legame (2.22) per i campi di velocità dell'esercizio (2.17).

2.4 Equazione della quantità di moto

In questo paragrafo verrà dedotta una equazione (vettoriale) per la quantità di moto, applicando al moto di un arbitrario volume materiale $\mathcal{V}_t = \mathcal{F}_t \mathcal{V}_0$ il secondo principio della dinamica: “*la derivata nel tempo della quantità di moto egualia la risultante delle forze agenti*”. Mentre è evidente che la quantità di moto associata ad un volume materiale \mathcal{V}_t si scrive:

$$\int_{\mathcal{V}_t} dV \rho \mathbf{u} ,$$

occorre invece specificare quali sono le forze agenti sul volume materiale \mathcal{V}_t . Tali sollecitazioni possono, in generale, essere suddivise in due categorie:

- *forze di volume*: agiscono in ogni punto interno all’aperto \mathcal{V}_t occupato dal fluido
- *forze di superficie*: agiscono sulla frontiera $\partial\mathcal{V}_t$ dell’aperto occupato dal fluido.

Le forze di volume vengono in generale specificate assegnando un campo di vettori $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ di forze *per unità di massa*. Passare alle forze per unità di volume è però semplice: è sufficiente moltiplicare per $\rho(\mathbf{x}, t)$: $\rho\mathbf{F}$ è il corrispondente campo di forze *per unità di volume*. Nei problemi usualmente affrontati in questo corso, tali campi di forze agenti sul fluido sono originati dalla presenza di una attrazione gravitazionale (se \mathbf{g} è l’accelerazione di gravità, ovvero la forza per unità di massa, $\rho\mathbf{g}$ è la forza di gravità per unità di volume) o di un campo di accelerazioni di trascinamento, come sarà discusso nel Cap. 3. La forza di volume risultante che agisce sul volume materiale \mathcal{V}_t è quindi data da:

$$\int_{\mathcal{V}_t} dV \rho \mathbf{F} . \quad (2.23)$$

Le forze di superficie derivano, invece, da fenomeni di scambio di quantità di moto tra strati di molecole adiacenti. Dal punto di vista macroscopico, tali forze sono rappresentate per ogni punto \mathbf{x} sulla superficie $\partial\mathcal{V}_t$ mediante un vettore $\mathbf{T}(\mathbf{x}, \nu)$, che specifica la *forza per unità di area* della superficie esercitata dal fluido occupante il semispazio verso cui punta il versore normale ν sul fluido occupante l’altro semispazio. \mathbf{T} prende il nome di *vettore degli sforzi*. È poi una conseguenza del terzo principio della dinamica (“*la somma delle forze scambiate tra due punti materiali è nulla*”), che la risultante degli sforzi agenti sul fluido nel semispazio in cui punta la normale ad opera del fluido nell’altro semispazio sarà $\mathbf{T}(\mathbf{x}, -\nu) = -\mathbf{T}(\mathbf{x}, \nu)$. La forza risultante agente sulla superficie del volume materiale \mathcal{V}_t sarà allora data dall’integrale:

$$\int_{\partial\mathcal{V}_t} dA \mathbf{T} . \quad (2.24)$$

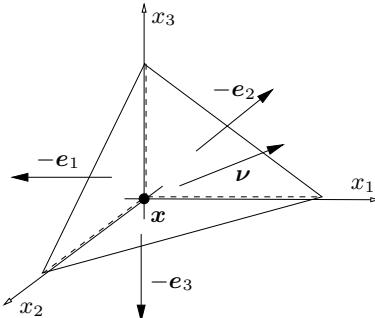


Figura 2.1. Tetraedro di Cauchy. Su ciascuna faccia è disegnato il versore normale.

Il vettore \mathbf{T} dipenderà, in generale, dall'orientazione della normale ν , come può essere dedotto utilizzando un celebre esempio dovuto a Cauchy. Si consideri un tetraedro, disegnato in Fig. 2.1, avente tre facce disposte parallelamente ai piani coordinati x_1x_2 , x_1x_3 e x_2x_3 e la quarta faccia con normale esterna ν . Le normali esterne al tetraedro sulle facce 1 (\parallel al piano x_2x_3), 2 (\parallel al piano x_1x_3) e 3 (\parallel al piano x_1x_2) saranno invece date da $-e_1$, $-e_2$ e $-e_3$, rispettivamente.

- ◊ **Esercizio:** Verificare che, se A è l'area della faccia obliqua del tetraedro, l'area A_i della faccia parallela al piano coordinato $x_i = 0$, è data da $A_i = A\nu_i$ per $i = 1, 2$ e 3 . (2.25)

Si assuma che gli spigoli del tetraedro disposti lungo gli assi coordinati si intersechino nel punto \mathbf{x} in esame ed abbiano lunghezze dell'ordine di un dato parametro δ , il quale verrà poi fatto tendere a 0. È evidente che la superficie del tetraedro è dell'ordine di δ^2 , mentre il suo volume è dell'ordine di δ^3 , ovvero di un ordine di grandezza più piccolo. Si indicherà, inoltre, con $\mathbf{T}^{(i)}$ il vettore degli sforzi agente sul piano coordinato i -esimo, mentre con \mathbf{T} rimarrà indicato il vettore degli sforzi sulla faccia obliqua del tetraedro. Si osservi che, essendo le normali uscenti sulle facce parallele ai piani coordinati del tetraedro opposte ai versori degli assi coordinati, il vettore degli sforzi sulla faccia i -esima sarà pari a $-\mathbf{T}^{(i)}$. Essendo di ordine δ^3 le variazioni di quantità di moto nel tetraedro e sviluppando in serie di Taylor attorno ad \mathbf{x} il vettore degli sforzi \mathbf{T} , la scrittura del principio fondamentale della dinamica in questo caso fornisce:

$$\frac{d}{dt}(\text{quantità di moto}) - \text{forze di volume} = \text{forze di superficie} .$$

Poiché il primo membro è di ordine δ^3 , il bilancio precedente si semplifica nella forma che segue:

$$[-\mathbf{T}^{(i)}(\mathbf{x}) + O(\delta)] A_i + [\mathbf{T}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}) + O(\delta)] A = O(\delta^3).$$

Ricordando l'esercizio (2.25), dividendo per A e facendo il limite per $\delta \rightarrow 0$ si ottiene:

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}) = \nu_i \mathbf{T}^{(i)}(\mathbf{x}). \quad (2.26)$$

Le singole componenti del vettore $\mathbf{T}^{(i)}$ possono essere immaginate come gli elementi della colonna i di una matrice $\boldsymbol{\tau}$ costruita al modo seguente:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} T_1^{(1)} & T_1^{(2)} & T_1^{(3)} \\ T_2^{(1)} & T_2^{(2)} & T_2^{(3)} \\ T_3^{(1)} & T_3^{(2)} & T_3^{(3)} \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

$\boldsymbol{\tau}$ è una matrice le cui colonne sono i vettori risultanti degli sforzi. Con la notazione (2.27) la (2.26) si riscrive:

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}) = \tau_{ki}(\mathbf{x}) \nu_i \mathbf{e}_k. \quad (2.28)$$

$\boldsymbol{\tau}$ è, in realtà, molto più di una tabella di numeri. Si mostra, infatti, che $\boldsymbol{\tau}$ è un *tensore del 2° ordine* di tipo $(1, 1)$, ovvero ad un *indice di controvarianza* ed un *indice di covarianza* (cfr. § 1.10). $\boldsymbol{\tau}$ prende il nome di *tensore degli sforzi*.

Il carattere di tensorialità della quantità $\boldsymbol{\tau}$, dipendente da due indici, può essere verificato al modo seguente. Se si effettua il cambiamento di riferimento \mathbf{R} in \mathbb{R}^3 , le nuove componenti di $\boldsymbol{\tau}$ possono essere ricavate dalla relazione ottenuta cambiando coordinate nella (2.28):

$$T'_h = \tau'_{hi} \nu'_i = \tau'_{hi} R_{iq}^{-1} \nu_q = R_{hj}^{-1} T_j = R_{hj}^{-1} \tau_{jq} \nu_q,$$

confrontando terzo e quinto membro si ottiene:

$$(R_{iq}^{-1} \tau'_{hi} - R_{hj}^{-1} \tau_{jq}) \nu_q \equiv 0,$$

che deve valere indipendentemente dalla scelta di $\boldsymbol{\nu}$. Ne segue, moltiplicando per R_{qp} e sommando su q :

$$\tau'_{hp} = R_{qp} R_{hj}^{-1} \tau_{jq} \Rightarrow \boldsymbol{\tau}' = \mathbf{R}^{-1} \boldsymbol{\tau} \mathbf{R}, \quad (2.29)$$

in termini matriciali. La (2.29) mostra che il tensore $\boldsymbol{\tau}$ è del tipo $(1, 1)$, essendo coinvolti a secondo membro sia \mathbf{R} che \mathbf{R}^{-1} .

Avendo a disposizione la relazione (2.28), che specifica la dipendenza di \mathbf{T} dall'orientamento della normale $\boldsymbol{\nu}$, e ricordando le espressioni per le risultanti delle forze di volume (2.23) e di superficie (2.24) si può scrivere per il generico volume materiale \mathcal{V}_t il secondo principio della dinamica:

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} dV \rho \mathbf{u}}_{\text{derivata della quantità di moto}} = \underbrace{\int_{\mathcal{V}_t} dV \rho \mathbf{F}}_{\text{risultante delle forze di volume}} + \underbrace{\int_{\partial \mathcal{V}_t} dA \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu}}_{\text{risultante delle forze di superficie}} \quad (2.30)$$

Applicando alla derivata della quantità di moto il teorema del trasporto semplificato (2.9) quest'ultima diviene:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} dV \rho \mathbf{u} = \int_{\mathcal{V}_t} dV \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt}. \quad (2.31)$$

Utilizzando, infine, nel secondo integrale a secondo membro della (2.30) il teorema della divergenza:

$$\int_{\partial\mathcal{V}_t} dA \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu} = e_i \int_{\partial\mathcal{V}_t} dA \tau_{ij} \nu_j = e_i \int_{\mathcal{V}_t} dV \partial_j \tau_{ij}. \quad (2.32)$$

Se si indica con $\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$ la quantità $e_i \partial_j \tau_{ij}$, sostituendo le equazioni (2.31, 2.32) nella (2.30) e tenendo conto dell'arbitrarietà della scelta del volume materiale \mathcal{V}_t , si ottiene l'*equazione della quantità di moto*:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{F}$$

(2.33)

Per utilizzare l'equazione di bilancio (2.33) occorre stabilire una *relazione costitutiva* per il fluido, ovvero definire un legame tra il tensore degli sforzi $\boldsymbol{\tau}$ e l'atto di moto locale.

Una procedura completamente equivalente a quella utilizzata per dedurre la (2.33) consiste nel fissare un volume *geometrico* \mathcal{V} e scrivere il bilancio della quantità di moto all'interno di tale volume:

$$\underbrace{\int_{\mathcal{V}_t} dV \partial_t(\rho \mathbf{u})}_{\text{variazione locale della quantità di moto}} = \underbrace{\int_{\partial\mathcal{V}_t} dA \mathbf{u} \cdot (-\boldsymbol{\nu})}_{\text{flusso entrante di quantità di moto}} \rho \mathbf{u} + \underbrace{\int_{\mathcal{V}_t} dV \rho \mathbf{F}}_{\text{risultante delle forze di volume}} + \underbrace{\int_{\partial\mathcal{V}_t} dA \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu}}_{\text{risultante delle forze di superficie}}$$

che, utilizzando l'equazione di continuità (2.6) e l'arbitrarietà del volume \mathcal{V} , fornisce nuovamente la (2.33).

2.5 Equazione del momento della quantità di moto

In analogia con quanto discusso per la quantità di moto $\rho \mathbf{u}$, si può dedurre una equazione per il suo momento fatto rispetto ad un polo fisso, per semplicità coincidente con l'origine del riferimento. In tal caso, si applica il principio: “derivata nel tempo del momento della quantità di moto = momento risultante” delle sollecitazioni di volume e di superficie. Si suppone assente una sollecitazione di momento per unità di volume, come può ad esempio verificarsi in un fluido polarizzato posto in un campo elettrico. In queste ipotesi, tale equazione per il fluido contenuto nel volume materiale \mathcal{V}_t si scrive:

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} dV \mathbf{x} \times \rho \mathbf{u}}_{\substack{\text{derivata del momento} \\ \text{della quantità di moto}}} = \underbrace{\int_{\mathcal{V}_t} dV \mathbf{x} \times \rho \mathbf{F}}_{\substack{\text{momento delle} \\ \text{forze di volume}}} + \underbrace{\int_{\partial \mathcal{V}_t} dA \mathbf{x} \times \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu}}_{\substack{\text{momento delle} \\ \text{forze di superficie}}} \quad (2.34)$$

Alla derivata a primo membro si può applicare il teorema del trasporto nella sua forma semplificata (2.9). Occorre quindi calcolare la derivata totale di $\mathbf{x} \times \mathbf{u}$:

$$\begin{aligned} D_t \mathbf{x} \times \mathbf{u} &= \mathbf{x} \times \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{e}_i u_k \partial_k (\varepsilon_{ipq} x_p u_q) \\ &= \mathbf{x} \times \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{e}_i \varepsilon_{ipq} u_k (\delta_{kp} u_q + x_p \partial_k u_q) \\ &= \mathbf{x} \times \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{x} \times \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \\ &= \mathbf{x} \times D_t \mathbf{u} . \end{aligned} \quad (2.35)$$

Per quello che riguarda il secondo integrale a secondo membro (il momento risultante delle forze di superficie) si possono applicare a tale integrale le formule di Green:

$$\begin{aligned} \int_{\partial \mathcal{V}_t} dA \mathbf{x} \times \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\nu} &= \mathbf{e}_i \int_{\mathcal{V}_t} dV \varepsilon_{ipq} \partial_k (x_p \tau_{qk}) \\ &= \mathbf{e}_i \int_{\mathcal{V}_t} dV \varepsilon_{ipq} (\tau_{qp} + x_p \partial_k \tau_{qk}) \\ &= \int_{\mathcal{V}_t} dV \mathbf{e}_i \varepsilon_{ipq} \tau_{qp} + \int_{\mathcal{V}_t} dV \mathbf{x} \times \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} . \end{aligned} \quad (2.36)$$

Utilizzando i risultati (2.35) e (2.36) nella (2.34) si ottiene, dalla arbitrarietà del volume materiale \mathcal{V}_t , la seguente *equazione del momento della quantità di moto*:

$$\mathbf{x} \times \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{x} \times \rho \mathbf{F} + \mathbf{x} \times \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{e}_i \varepsilon_{ipq} \tau_{qp} .$$

tenendo conto della equazione della quantità di moto (2.33), questa equazione fornisce semplicemente:

$$\varepsilon_{ipq} \tau_{qp} = 0 \quad (2.37)$$

per $i = 1, 2$ e 3 , ovvero la *simmetria* del tensore degli sforzi $\boldsymbol{\tau}$.

2.6 Relazione costitutiva: fluidi Newtoniani

È a questo punto necessario stabilire una *relazione costitutiva* tra il tensore degli sforzi $\boldsymbol{\tau}$ in un punto \mathbf{x} del campo fluido e l'atto di moto *locale* in \mathbf{x} del fluido. Anche ragionando soltanto in linea teorica, questa relazione non può essere arbitraria. Si deve richiedere, infatti, che risulti la medesima per qualunque osservatore mobile, ovvero che soddisfi il *principio di invarianza*:

“La medesima relazione costitutiva deve valere in un qualunque sistema di riferimento mobile, anche non inerziale.”

Si può ammettere, inoltre, che la dipendenza di τ dall'atto di moto sia del tipo:

$$\tau = \mathbf{H}(\mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}) , \quad (2.38)$$

cioè lo sforzo nel punto \mathbf{x} dipenda da $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ e dalle sue derivate spaziali prime, ovvero dal gradiente di \mathbf{u} nel punto \mathbf{x} .

Per poter applicare il principio di invarianza occorre considerare un arbitrario cambiamento di riferimento in \mathbb{R}^3 . Le coordinate $\mathbf{x}'(t)$ del generico punto materiale nel nuovo riferimento saranno date, in funzione della sua posizione $\mathbf{x}(t)$ nel vecchio, dalla relazione seguente:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}'_0 + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x} , \quad (2.39)$$

dove \mathbf{x}'_0 è la posizione nel nuovo sistema dell'origine del vecchio e $\mathbf{R}(t)$ è un cambiamento di base in \mathbb{R}^3 , da una base $\{\mathbf{e}_i\}$ ad un'altra $\{\mathbf{e}'_k(t)\}$, in generale dipendente dal tempo. In questo contesto, $\mathbf{x}'_0(t)$ e $\mathbf{R}(t)$ vengono ipotizzati infinitamente derivabili.

Derivando nel tempo la (2.39) si ottiene la velocità \mathbf{u}' nel nuovo riferimento:

$$\dot{\mathbf{x}}' = \underbrace{\dot{\mathbf{x}}'_0 + \mathbf{Q} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}}_{\begin{array}{c} \text{velocità di} \\ \text{trascinamento} \end{array}} + \underbrace{\mathbf{R}^{-1} \dot{\mathbf{u}}}_{\begin{array}{c} \text{immagine della} \\ \text{velocità relativa} \end{array}} \quad (2.40)$$

in cui $\mathbf{Q} = \dot{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{R}$ è *antisimmetrico*, poiché:

$$0 = \frac{d}{dt} (\mathbf{R}^{-1} \mathbf{R}) = \dot{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{R} + \mathbf{R}^{-1} \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T ,$$

avendo ricordato che \mathbf{R} è *unitario* e quindi l'operazione di *inversione* è equivalente a quella di *trasposizione*. Il gradiente di velocità relativa nelle nuove coordinate \mathbf{x}' si scrive considerando che, ad esempio, la derivata in x'_j della componente u'_i del campo di velocità relativa è data da:

$$\begin{aligned} \partial_{x'_j} u'_i &= R_{kj} \partial_{x_k} [Q_{ip} R_{pq}^{-1} x_q + R_{ip}^{-1} u_p] \\ &= R_{kj} [Q_{ip} R_{pk}^{-1} + R_{ip}^{-1} \partial_{x_k} u_p] \\ &= Q_{ij} + (\mathbf{R}^{-1} \nabla \mathbf{u} \mathbf{R})_{ij} , \end{aligned}$$

avendo utilizzato il fatto che $\partial_{x'_j} = R_{kj} \partial_{x_k}$ in base alla trasformazione di coordinate (2.39). Ne segue:

$$\nabla' \mathbf{u}' = \mathbf{Q} + \mathbf{R}^{-1} \nabla \mathbf{u} \mathbf{R} . \quad (2.41)$$

La traduzione formale del principio di invarianza porta quindi a richiedere per \mathbf{H} che, qualunque sia \mathbf{R} , siano vere le uguaglianze seguenti:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}(\mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}) \mathbf{R} = \mathbf{R}^{-1} \boldsymbol{\tau} \mathbf{R} \\
& = \boldsymbol{\tau}' \\
& = \mathbf{H}(\mathbf{u}', \nabla' \mathbf{u}') \\
& = \mathbf{H} \left[\dot{\mathbf{x}}_0' + \mathbf{Q} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x} + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{u}, \mathbf{Q} + \mathbf{R}^{-1} \nabla \mathbf{u} \mathbf{R} \right],
\end{aligned}$$

in cui si è utilizzata la (2.41). Pensando il $\nabla \mathbf{u}$ decomposto nella somma del tensore velocità di deformazione \mathbf{S} e del tensore vorticità $\boldsymbol{\Omega}$ (1.35), otteniamo in definitiva la richiesta su \mathbf{H} :

$$\mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{S} + \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{R} \equiv \mathbf{H} \left(\dot{\mathbf{x}}_0' + \mathbf{Q} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x} + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{u}, \mathbf{Q} + \mathbf{R}^{-1} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{R} + \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{R} \right), \quad (2.42)$$

qualunque sia il cambiamento di riferimento \mathbf{R} .

L'equazione (2.42) è la traduzione formale del principio di invarianza enunciato all'inizio di questo paragrafo e deve essere rispettata *qualunque siano* \mathbf{x}_0' e \mathbf{R} . Si osserva, però, che esiste una *particolare* classe di cambiamenti di riferimento, quelli in cui si realizzano $\dot{\mathbf{x}}_0' = -\mathbf{Q} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x} - \mathbf{R}^{-1} \mathbf{u}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{Q} = -\mathbf{R}^{-1} \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}) \mathbf{R}$ (\mathbf{Q} ed $\boldsymbol{\Omega}$ sono entrambi tensori antisimmetrici), per i quali la funzione \mathbf{H} dipende solo dal tensore velocità di deformazione \mathbf{S} . È allora lo stesso principio di invarianza che permette di concludere che \mathbf{H} può dipendere dal solo \mathbf{S} , altrimenti esisterebbero particolari cambiamenti di riferimento in cui la struttura del legame tra il tensore degli sforzi $\boldsymbol{\tau}$ e la velocità \mathbf{u} ed il suo gradiente $\nabla \mathbf{u}$ diviene differente.

L'unica vera richiesta che occorre ancora imporre su \mathbf{H} è allora che verifichi la condizione di tensorialità:

$$\mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}(\mathbf{S}) \mathbf{R} \equiv \mathbf{H}(\mathbf{R}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{R}). \quad (2.43)$$

- ◊ **Esercizio:** Verificare che un qualunque legame del tipo $\mathbf{H}(\mathbf{S}) = \mathbf{S}^k$, con k intero positivo, soddisfa la condizione di tensorialità (2.43).

Una forma di legame \mathbf{H} che soddisfa implicitamente la (2.43) è uno sviluppo in serie del tipo $\mathbf{H}(\mathbf{S}) = \chi_0 \mathbf{I} + \chi_1 \mathbf{S} + \chi_2 \mathbf{S}^2 + \dots$ in cui \mathbf{I} è il tensore unitario:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ed i coefficienti χ_k sono funzioni dei 3 *invarianti di S*:

$$\mathcal{I}_1 = \text{tr}(\mathbf{S}) = \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad \mathcal{I}_2 = \frac{1}{2} [\mathcal{I}_1^2 - \text{tr}(\mathbf{S}^2)], \quad \mathcal{I}_3 = \det(\mathbf{S}), \quad (2.44)$$

in cui con i simboli $\text{tr}(\cdot)$ e $\det(\cdot)$ sono indicati la *traccia* ed il *determinante* del tensore in argomento.

- ◊ **Esercizio:** Dimostrare che le quantità (2.44) non cambiano se si effettua un qualunque cambiamento di riferimento.

La forma di sviluppo in serie di potenze di \mathbf{S} per \mathbf{H} è stata proposta indipendentemente da Reiner e da Prager nel 1945. Occorre peraltro notare che tale forma è consistente con la richiesta che $\boldsymbol{\tau}$ sia un tensore *simmetrico*, essendo \mathbf{S}^k anch'esso un tensore simmetrico. La struttura del legame \mathbf{H} che viene comunemente utilizzata è però più semplice e si limita a considerare i termini costante e lineare dello sviluppo. Se si ammette uno sviluppo del tipo:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{H}(\mathbf{S}) = (\alpha + \lambda \nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{S}, \quad (2.45)$$

la traccia di $\boldsymbol{\tau}$ risulta:

$$3(\alpha + \lambda \nabla \cdot \mathbf{u}) + 2\mu \nabla \cdot \mathbf{u} = 3 \left[\alpha + \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \nabla \cdot \mathbf{u} \right].$$

Un fluido per il quale valga la (2.45) si chiama *Newtoniano*.

Per i fluidi Newtoniani si pone anche la relazione di Stokes:

$$\boxed{\lambda + \frac{2}{3}\mu = 0} \quad (2.46)$$

per cui τ_{ii} diviene semplicemente pari a 3α . D'altra parte, α deve essere $-p$, l'opposto della pressione, essendo l'intensità della forza per unità di superficie $\mathbf{T}(\mathbf{x}, \nu)$ in un fluido sottoposto ad un atto di moto *locale* rigido ($\mathbf{S} = 0$) pari, per definizione, a $p(\mathbf{x})$ e la sua direzione opposta alla normale ν . Utilizzando la (2.46) si può scrivere in definitiva la relazione costitutiva per il tensore degli sforzi:

$$\boxed{\boldsymbol{\tau} = - \left(p + \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{u} \right) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{S}} \quad (2.47)$$

Il coefficiente μ si chiama *coefficiente di viscosità* ed è una funzione della temperatura. Le sue dimensioni fisiche sono quelle di uno sforzo su un gradiente di velocità, ovvero $[\mu] = \mathcal{M} \mathcal{L}^{-1} \mathcal{T}^{-2} / \mathcal{T}^{-1} = \mathcal{M} \mathcal{L}^{-1} \mathcal{T}^{-1}$ e si misura quindi in $kg/(ms)$. In acqua è dell'ordine di $10^{-3} kg/(ms)$, mentre in aria è dell'ordine di $10^{-5} kg/(ms)$ al livello del mare. Spesso si utilizza anche la quantità $\nu = \mu/\rho$ che si chiama *coefficiente di viscosità cinematica*.

Disponendo della relazione costitutiva (2.47), calcoliamo la componente k della divergenza di $\boldsymbol{\tau}$:

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau})_k &= -\partial_i \left(p + \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \mathbf{u} \right) \delta_{ki} + \mu \partial_i (\partial_i u_k + \partial_k u_i) \\ &= -\partial_k p - \frac{2}{3}\mu \partial_k \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \nabla^2 u_k + \mu \partial_k \nabla \cdot \mathbf{u} \\ &= -\partial_k p + \mu \nabla^2 u_k + \frac{1}{3}\mu \partial_k \nabla \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

e sostituendo questa espressione a secondo membro della (2.33), ottenendo le *equazioni di Navier-Stokes*:

$$\boxed{\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \left(\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{3} \nabla \cdot \nabla \cdot \mathbf{u} \right) + \rho \mathbf{F}} \quad (2.48)$$

In Letteratura, le equazioni (2.48), specificate per un fluido non viscoso ($\mu = 0$), prendono il nome di *equazioni di Eulero*.

2.7 Equazione di Bernoulli

Se il campo di velocità ammette un potenziale (vedi § 1.5), eventualmente anche polidromo, il flusso è barotropico (la pressione p dipende dalla sola densità ρ) e non viscoso ($\mu = 0$) ed il campo di forze per unità di massa \mathbf{F} è conservativo (ammette un potenziale: $\mathbf{F} = \nabla f$, f potenziale di \mathbf{F}), allora dalle equazioni di Navier-Stokes (2.48) possiamo dedurre una equazione di evoluzione per il potenziale di velocità φ . Infatti, sostituendo l'accelerazione di Lagrange con $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ e portando tutti i termini a primo membro:

$$\nabla \left[\partial_t \varphi + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \mathcal{P}(p) - f \right] = \mathbf{0},$$

utilizzando il potenziale di pressione (2.13). Dalla relazione precedente ne segue che in ogni componente connessa del dominio fluido esiste una funzione $\Phi(t)$ del solo tempo t tale che:

$$\boxed{\partial_t \varphi + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \mathcal{P}(p) - f \equiv \Phi} \quad (2.49)$$

per ogni punto \mathbf{x} . La relazione (2.49) prende il nome di *equazione di Bernoulli*.

- ◊ **Esercizio:** Un fluido a densità costante e non viscoso scorre in modo stazionario in un tubo di forma assialsimmetrica, il cui asse è parametrizzato in x . Assumendo il campo di velocità uniforme e diretto lungo l'asse sulla generica sezione di area $A(x)$, calcolare il campo di pressione.
- ◊ **Esercizio:** Un fluido a densità costante (ρ) e non viscoso scorre in modo stazionario in un tubo di forma troncoconica retta di lunghezza l e raggi delle sezioni (circolari) di ingresso r_i e di uscita r_u . Sono note la velocità u_i e la pressione p_i in ingresso. Assumendo il campo di velocità uniforme e diretto lungo l'asse su ciascuna sezione del condotto, calcolare la forza \mathbf{F} agente sul tubo.
Risposta. Ponendo $r_m = (r_i + r_u)/2$ ed $\alpha = (r_u - r_i)/l$, l'unica componente non nulla è quella lungo l'asse e vale $F_x = -2\pi\alpha r_m l(p_i + \alpha\rho u_i^2 l r_m / r_u^2)$.

- ◊ **Esercizio:** Un fluido a densità costante e non viscoso scorre in modo stazionario in un tubo a sezione variabile, di altezza h e parallelo alla accelerazione di gravità (il cui modulo è g). Il campo di velocità è uniforme su ciascuna sezione del condotto e la sezione più alta è quella di ingresso, sulla quale è nota la velocità (u_i). Calcolare quale deve essere il rapporto A_i/A_u tra le aree delle sezioni d'ingresso e d'uscita per avere la pressione uguale nelle due sezioni. Perché deve essere necessariamente maggiore di 1?

Risposta: $A_i/A_u = \sqrt{1 + 2gh/u_i^2}$.

2.8 L'equazione dell'energia

In questo paragrafo ricaveremo le equazioni di evoluzione per l'*energia interna* per unità di massa e , per l'*entropia* per unità di massa s ed infine per la temperatura T . Indicati con $h(\mathbf{x}, \nu)$ il flusso termico che nel punto \mathbf{x} attraversa il piano di normale ν , positivo se entrante e negativo se uscente (per motivi storici) e con E l'eventuale termine sorgente di energia per unità di massa, il bilancio di energia nel generico volume *materiale* \mathcal{V}_t può scriversi:

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t} dV \rho \left(e + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right)}_{\text{derivata nel tempo dell'energia}} = \underbrace{\int_{\partial\mathcal{V}_t} dA (h + \mathbf{T} \cdot \mathbf{u})}_{\text{flusso termico e lavoro degli sforzi}} + \underbrace{\int_{\mathcal{V}_t} dV \rho (\mathbf{F} \cdot \mathbf{u} + E)}_{\text{lavoro delle forze di volume e termine di produzione}} \quad (2.50)$$

Dalla equazione (2.50) è possibile ricavare due importanti conseguenze sul flusso di termico per unità di area e di tempo h ($[h] = \mathcal{M}\mathcal{T}^{-3}$):

- 1) $h(\mathbf{x}, -\nu) = -h(\mathbf{x}, \nu)$
- 2) esiste un vettore $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ (*flusso di energia*) tale che $h(\mathbf{x}, \nu) = -\mathbf{q}(\mathbf{x}) \cdot \nu$.

Infatti, integrando la (2.50) nei volumi \mathcal{V}_t^\pm (se $\partial\mathcal{V}_t = \Sigma^+ \cup \Sigma^-$, allora $\partial\mathcal{V}_t^\pm = (\mp\mathcal{S}) \cup \Sigma^\pm$) in cui una generica superficie \mathcal{S} passante per \mathbf{x} taglia \mathcal{V}_t :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_t^+ : \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t^+} dV \rho \left(e + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) &= \int_{\Sigma^+} dA (h + \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}) + \int_{\mathcal{V}_t^+} dV \rho (\mathbf{F} \cdot \mathbf{u} + E) + \\ &\quad + \int_{\mathcal{S}} dA [h(-\nu) + \mathbf{T}(-\nu) \cdot \mathbf{u}] \\ \mathcal{V}_t^- : \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_t^-} dV \rho \left(e + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) &= \int_{\Sigma^-} dA (h + \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}) + \int_{\mathcal{V}_t^-} dV \rho (\mathbf{F} \cdot \mathbf{u} + E) + \\ &\quad + \int_{\mathcal{S}} dA [h(+\nu) + \mathbf{T}(+\nu) \cdot \mathbf{u}] \end{aligned}$$

che, sottratte dalla (2.50), forniscono:

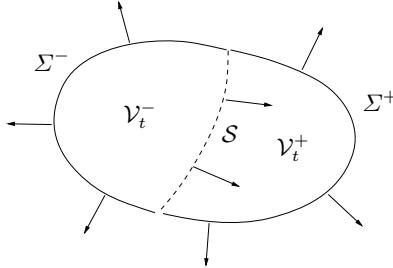


Figura 2.2. Volume $\mathcal{V}_t = \mathcal{V}_t^+ \cup \mathcal{V}_t^-$, dove \mathcal{V}_t^\pm sono i volumi ottenuti intersecando \mathcal{V}_t con la superficie \mathcal{S} . Lungo la parte di $\partial\mathcal{V}_t$ appartenente a \mathcal{V}_t^+ , denominata con Σ^+ , e lungo la corrispondente parte appartenente a \mathcal{V}_t^- , denominata con Σ^- , nonché lungo \mathcal{S} sono tracciati alcuni versori normali. Osservare che l'orientazione di \mathcal{S} è arbitraria, non alterando il risultato finale.

$$-\int_{\mathcal{S}} dA [\mathbf{T}(-\boldsymbol{\nu}) + \mathbf{T}(+\boldsymbol{\nu})] \cdot \mathbf{u} - \int_{\mathcal{S}} dA [h(-\boldsymbol{\nu}) + h(+\boldsymbol{\nu})] = 0 ,$$

in cui il primo integrale è nullo dalla (2.26) ed il secondo, per la arbitrarietà di \mathcal{S} e \mathcal{V}_t permette di concludere:

$$h(\mathbf{x}, -\boldsymbol{\nu}) = -h(\mathbf{x}, \boldsymbol{\nu}) ,$$

cioè la proprietà 1). Inoltre, applicando l'equazione di bilancio (2.50) al tetraedro con vertice in \mathbf{x} rappresentato in Fig. 2.1 possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} & -\tau_{k1} u_k A_1 - \tau_{k2} u_k A_2 - \tau_{k3} u_k A_3 + \tau_{jl} u_j n_l A + \\ & + h(-\mathbf{e}_1) A_1 + h(-\mathbf{e}_2) A_2 + h(-\mathbf{e}_3) A_3 + h(\boldsymbol{\nu}) A = O(\delta^3) , \end{aligned}$$

in cui il tensore degli sforzi $\boldsymbol{\tau}$ ed il flusso termico h sono valutati nel punto \mathbf{x} commettendo un errore dell'ordine di δ^3 . Il primo termine è identicamente nullo dalla (2.26) ed il secondo fornisce: $-h(\mathbf{e}_i) A_i + h(\boldsymbol{\nu}) A = O(\delta^3)$ e quindi mandando δ a 0 abbiamo $h(\boldsymbol{\nu}) = \nu_i h(\mathbf{e}_i)$. Definito il vettore flusso termico $\mathbf{q} = -\mathbf{e}_i h(\mathbf{e}_i)$, otteniamo allora la proprietà 2).

Applicando nella (2.50) il teorema del trasporto nella forma semplificata (2.9) si ottiene, per la arbitrarietà del volume materiale \mathcal{V}_t :

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}) + \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} + \rho E , \quad (2.51)$$

nella quale è possibile separare i contributi dell'energia interna e e cinetica $|\mathbf{u}|^2/2$, infatti quest'ultima verifica l'equazione:

$$\rho \frac{D}{Dt} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} = \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) + \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} , \quad (2.52)$$

ottenuta moltiplicando scalarmente per \mathbf{u} l'equazione della quantità di moto (2.33). Ma si ha pure:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) &= u_k \partial_i \tau_{ki} \\
&\equiv \partial_i(u_k \tau_{ki}) - \tau_{ki} \partial_i u_k \\
&= \partial_i(\tau_{ik} u_k) - \tau_{ki} \partial_i u_k \\
&= \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}) - \text{tr}(\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{u}),
\end{aligned}$$

che, sostituita nella (2.52), fornisce l'*equazione dell'energia cinetica*:

$$\boxed{\rho \frac{D}{Dt} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}) - \text{tr}(\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{u}) + \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}} \quad (2.53)$$

Sottraendo questo bilancio per l'energia cinetica dalla (2.51) si ottiene l'*equazione per l'energia interna*:

$$\boxed{\rho \frac{De}{Dt} = \text{tr}(\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho E} \quad (2.54)$$

nella forma più generale possibile, non essendo ancora state introdotte relazioni costitutive, caratterizzanti il comportamento del fluido.

Considerando un fluido Newtoniano, per il quale il legame costitutivo è dato dalla (2.45), ed ammettendo valida la relazione di Stokes (2.46) è possibile specificare il contributo alla variazione di energia interna *e* dovuto al lavoro della pressione ed alla dissipazione viscosa:

$$\begin{aligned}
\text{tr}(\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{u}) &= \text{tr}\{[(-p + \lambda \nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{S}] \cdot \nabla \mathbf{u}\} \\
&= -p \nabla \cdot \mathbf{u} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})^2 + 2\mu \text{tr}(\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{u}),
\end{aligned} \quad (2.55)$$

ma l'ultimo addendo può essere riorganizzato al modo seguente:

$$\begin{aligned}
2 \text{tr}(\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{u}) &= \text{tr}[\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \cdot \mathbf{S}^T] & \text{tr}(A) = \text{tr}(A^T) \\
&= \text{tr}[\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{S}^T \cdot (\nabla \mathbf{u})^T] & \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) \\
&= \text{tr}[\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{S} \cdot (\nabla \mathbf{u})^T] & \text{simmetria di } \mathbf{S} \\
&= 2 \text{tr}\{\mathbf{S} \cdot [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T]/2\} \\
&= 2 \text{tr}(\mathbf{S}^2).
\end{aligned}$$

Effettuando il cambiamento di riferimento che diagonalizza \mathbf{S} (1.40) ed osservato che tale cambiamento lascia inalterata la traccia¹ di \mathbf{S} , ne segue:

$$\text{tr}(\mathbf{S}^2) = \text{tr}(\mathbf{R}^{-1} \mathbf{S}^2 \mathbf{R}) = \text{tr}(\mathbf{R}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{R} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{R}) = \text{tr}(\mathbf{S}_a^2) = \chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2.$$

Il termine dissipativo nella (2.55) si può quindi scrivere:

¹ Infatti si ha: $\text{tr}(\mathbf{R}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{R}) = R_{ip}^{-1} S_{pq} R_{qi} = \delta_{pq} S_{pq} = \text{tr}(\mathbf{S})$.

$$\begin{aligned}
& \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 + 2\mu \operatorname{tr}(\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{u}) = \\
& = \lambda [\operatorname{tr}(\mathbf{S}_a)]^2 + 2\mu \operatorname{tr}(\mathbf{S}_a^2) \\
& = \lambda \left\{ 3(\chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2) - [(\chi_1 - \chi_2)^2 + (\chi_1 - \chi_3)^2 + (\chi_2 - \chi_3)^2] \right\} + \\
& \quad + 2\mu (\chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2) \\
& = 3 \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) (\chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2) + \\
& \quad - \lambda [(\chi_1 - \chi_2)^2 + (\chi_1 - \chi_3)^2 + (\chi_2 - \chi_3)^2] \\
& = \mu \frac{2}{3} [(\chi_1 - \chi_2)^2 + (\chi_1 - \chi_3)^2 + (\chi_2 - \chi_3)^2] =: \phi \geq 0, \tag{2.56}
\end{aligned}$$

in cui abbiamo utilizzato la relazione di Stokes (2.46). La funzione ϕ , invariante per cambiamenti di base in R^3 , prende il nome di *funzione di dissipazione* ed è per definizione non negativa. Dal punto di vista fisico, infatti, ϕ rappresenta la produzione di energia interna (e di entropia) dovuta al lavoro degli sforzi viscosi: è quindi ovvio che la funzione di dissipazione ϕ risulti necessariamente non negativa. ϕ può essere nulla solo nel caso in cui l'atto di moto del fluido sia caratterizzato da una velocità di deformazione *isotropa* $\chi_i = 1/3 \nabla \cdot \mathbf{u}$ per $i = 1, 2$ e 3 , ovvero per una velocità di deformazione nulla (atto di moto rigido). Il penultimo passaggio evidenzia, peraltro, come una qualunque relazione diversa da quella di Stokes (2.46) tra i due coefficienti λ e μ deve comunque rispettare il vincolo $\lambda + 2\mu/3 \geq 0$. Sostituendo nella (2.55) si ottiene:

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{u}) = \underbrace{-p \nabla \cdot \mathbf{u}}_{\substack{\text{lavoro della} \\ \text{pressione}}} + \underbrace{\phi}_{\text{dissipazione}} \tag{2.57}$$

Occorre ora stabilire una relazione costitutiva che permetta di calcolare il vettore flusso termico \mathbf{q} , noto lo stato termodinamico locale del fluido. La prima osservazione da fare è che \mathbf{q} , per definizione, è invariante al variare del riferimento dalla vecchia base $\{e_i\}$ alla nuova $\{e'_i\}$, con $e'_i = \mathbf{R} e_i$. Infatti, dovendo essere uguale il flusso di energia termica nei due riferimenti per una qualunque giacitura $\boldsymbol{\nu}$:

$$-R_{kl}^{-1} q_l \nu'_k = -q_l R_{lk} \nu'_k = -q_l \nu_l = h = h' = -q'_l \nu'_l$$

e quindi $\mathbf{q}' = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{q}$, dovendo valere la relazione precedente per ogni possibile giacitura $\boldsymbol{\nu}$. Nell'ipotesi che il flusso termico \mathbf{q} funziona sia della temperatura T e del suo gradiente ² ∇T : $\mathbf{q} = \mathbf{f}(T, \nabla T)$ determiniamo la funzione \mathbf{f} in modo da far risultare \mathbf{q} invariante al variare del riferimento. Ovvero, dobbiamo imporre che \mathbf{f} che verifichi la relazione:

² Vale la legge di trasformazione: $(\nabla' T)_i = \partial_{x'_i} T = \partial_{x'_i} x_k \partial_{x_k} T = R_{ki} \partial_{x_k} T = (\mathbf{R}^{-1} \nabla T)_i$.

$$\mathbf{f}(T, \mathbf{R}^{-1} \nabla T) = \mathbf{q}' = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{q} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{f}(T, \nabla T) , \quad (2.58)$$

per ogni possibile rotazione \mathbf{R} del riferimento. Una forma di \mathbf{f} che verifica la richiesta (2.58) è $\mathbf{f}(T, \nabla T) = -\mathcal{K}(T) \nabla T$, con \mathcal{K} scalare. Si pone quindi:

$$\boxed{\mathbf{q} = -\mathcal{K} \nabla T} \quad (2.59)$$

in cui $\mathcal{K}(> 0)$ (che è in generale una funzione scalare di T , prende il nome di *coefficiente di conducibilità termica* del fluido. L'equazione (2.51) è dovuta a Fourier, il segno “-” è necessario per imporre che il flusso di calore \mathbf{q} sia di verso opposto al gradiente termico ∇T . Il coefficiente di conducibilità termica \mathcal{K} ha le dimensioni fisiche di un flusso di energia per unità di area diviso un gradiente di temperatura, ovvero $[\mathcal{K}] = \mathcal{M}\mathcal{L}^{-1}\mathcal{T}^{-3}/(\mathcal{L}^{-1}\Theta) = \mathcal{M}\mathcal{T}^{-3}\Theta^{-1}$ e si misura quindi in $kg/(s^3 K)$. Questo coefficiente è una funzione della temperatura, in acqua è circa $0.6 \text{ kg}/(s^3 K)$, in aria in condizioni di standard di pressione e temperatura è molto più basso, circa $2 \times 10^{-2} \text{ kg}/(s^3 K)$.

A questo punto, in base alle equazioni (2.57) e (2.59), siamo in grado di specificare l'equazione dell'energia per un fluido con coefficienti di viscosità μ e di conduzione termica \mathcal{K} costanti:

$$\rho \frac{De}{Dt} = -p \nabla \cdot \mathbf{u} + \phi + \mathcal{K} \nabla^2 T + \rho E . \quad (2.60)$$

Il ruolo giocato dalla funzione di dissipazione ϕ risulta meglio chiarito derivando dalla (2.60) una equazione per l'entropia per unità di massa s .

2.8.1 Equazione di bilancio per l'entropia

Utilizzando l'equazione di continuità (2.6) e portando a primo membro della relazione (2.60) il termine nella pressione, possiamo scrivere:

$$\rho D_t e + p \nabla \cdot \mathbf{u} = \rho D_t e - \frac{p}{\rho} D_t \rho = \rho \left[\frac{De}{Dt} + p \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right] .$$

Questa espressione si presta ad essere riscritta in termini di *entalpia* per unità di massa ($h = e + p/\rho$):

$$\rho D_t e + p \nabla \cdot \mathbf{u} = \rho \left[D_t e + p \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} D_t p \right] - \frac{Dp}{Dt} = \rho D_t h - D_t p , \quad (2.61)$$

oppure utilizzando l'*entropia* per unità di massa:

$$\rho D_t e + p \nabla \cdot \mathbf{u} = \rho T D_t s . \quad (2.62)$$

Nella seconda equazione sono stati utilizzati il Primo ($de = \tilde{d}Q - pd(1/\rho)$, in cui si usa \tilde{d} per indicare che la forma $\tilde{d}Q$ non è un differenziale esatto) ed il Secondo ($\tilde{d}Q = Tds$) Principio della Termodinamica. Dalla relazione (2.61) il bilancio in termini di entalpia si scrive:

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \phi + \mathcal{K} \nabla^2 T + \rho E , \quad (2.63)$$

mentre dalla relazione (2.62) deduciamo subito l'equazione per l'entropia:

$$\boxed{\rho T \frac{Ds}{Dt} = \phi + \mathcal{K} \nabla^2 T + \rho E} \quad (2.64)$$

Dell'equazione (2.64) si può dare una semplice interpretazione fisica. Notato che:

$$\frac{\mathcal{K}}{T} \nabla^2 T = -\frac{1}{T} \nabla \cdot \mathbf{q} = -\nabla \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} + \mathbf{q} \cdot \left(-\frac{1}{T^2} \right) \nabla T = -\nabla \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} + \frac{\mathcal{K}}{T^2} |\nabla T|^2 ,$$

la (2.64) divisa per T ed integrata su un volume \mathcal{V} fornisce:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} dV \partial_t (\rho s) &= \underbrace{\int_{\partial\mathcal{V}} dA \rho s \mathbf{u} \cdot (-\boldsymbol{\nu})}_{\text{flusso convettivo entrante}} + \underbrace{\int_{\partial\mathcal{V}} dA \frac{h}{T}}_{\text{flusso per effetto termico}} + \underbrace{\int_{\mathcal{V}} dV \left(\frac{\phi}{T} + \frac{\mathcal{K}}{T^2} |\nabla T|^2 \right)}_{\text{produzione interna di entropia (sempre } \geq 0\text{)}} + \\ &\quad + \underbrace{\int_{\mathcal{V}} dV \rho \frac{E}{T}}_{\text{termine sorgente}} \end{aligned}$$

in cui i termini di produzione interna al fluido sono sempre non negativi.

2.8.2 Equazione della temperatura

Nella equazione (2.64) si può scrivere la $D_t s$ in termini di $D_t T$ e $D_t p$. Infatti, considerando che $s = s(T, p)$:

$$\begin{aligned} ds &= \frac{\partial s}{\partial T} \Big|_p dT + \frac{\partial s}{\partial p} \Big|_T dp \\ &= \frac{1}{T} \left(T \frac{\partial s}{\partial T} \Big|_p \right) dT - \frac{1}{\rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial T} \frac{1}{\rho} \Big|_p \right) dp \\ &= \frac{c_p}{T} dT - \frac{\beta}{\rho} dp , \end{aligned} \quad (2.65)$$

in cui sono state utilizzate la prima equazione di Maxwell (2.73):

$$\frac{\partial s}{\partial p} \Big|_T = -\frac{\partial v}{\partial T} \Big|_p$$

($v = 1/\rho$ è il volume specifico), la definizione di *calore specifico a pressione costante*:

$$c_p := \frac{\tilde{d}Q}{dT} \Big|_p = T \frac{\partial s}{\partial T} \Big|_p \quad (2.66)$$

e del coefficiente di espansione termica:

$$\beta := \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial T} \Big|_p \quad (2.67)$$

(per un gas perfetto $\beta = 1/T$). Sostituendo la (2.65) nella (2.64) si ottiene l'equazione per la temperatura:

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \beta T \frac{Dp}{Dt} + \phi + \mathcal{K} \nabla^2 T + \rho E$$

(2.68)

che è la forma più usata di equazione dell'energia. Ad esempio, per un gas perfetto, utilizzando l'equazione di stato ($p = \rho RT$) la (2.68) si riduce alla:

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = -\rho RT \nabla \cdot \mathbf{u} + \phi + \mathcal{K} \nabla^2 T + \rho E, \quad (2.69)$$

scritta in termini della sola temperatura T .

2.9 Curiosando in biblioteca

Gli argomenti trattati in questo capitolo sono altrettanto comuni a molti testi classici di Fluidodinamica.

Il testo [17] prende il via dal teorema di Leibnitz al §4.2 (derivata temporale dell'integrale, definito tra estremi dipendenti dal tempo, di una funzione dello spazio e del tempo), risultato che viene poi esteso al caso di un integrale di volume, deducendo il teorema del trasporto di Reynolds. Utilizzando quest'ultimo e corredando la spiegazione con molte figure esplicative, viene poi scritta l'equazione di continuità (§4.3). Nel §4.5, le forze agenti su di una particella fluida vengono classificate come forze di superficie e di volume, definendo il tensore degli sforzi. La dimostrazione della simmetria di questo tensore viene effettuata nel §4.6. Nelle pagine successive viene scritta l'equazione della quantità di moto, sia in forma integrale, con l'ausilio del teorema del trasporto, sia in forma differenziale (considerando un dominio cubico interno al volume fluido, valutando le forze agenti ed applicando la legge di Newton). Nel §4.10 si deduce la relazione costitutiva, facendo anche enno a fluidi non newtoniani: la trattazione è molto precisa e dettagliata e ne consigliamo la lettura. Ottenuta la relazione costitutiva, nel §4.11 si ricavano le equazioni di Navier-Stokes. Il §4.12 è dedicato ad un interessante approfondimento: la scrittura delle equazioni di Navier Stokes in un riferimento rotante a velocità costante. In questa sede vengono spiegati gli effetti delle forze centrifuga e di Coriolis. Nel §4.13 è scritta l'equazione dell'energia cinetica, nelle forme differenziale ed integrale, mentre nel §4.14 si utilizza il Primo Principio della Termodinamica per dedurre l'equazione integrale di bilancio dell'energia totale (interna + cinetica),

sottolineando come lo stesso risultato segua anche dal teorema del trasporto. Sottraendo da quest'ultima equazione quella dell'energia cinetica prima ricavata, si arriva all'equazione di bilancio dell'energia interna ed all'equazione della temperatura, per un gas perfetto. Infine, nel §4.15 si sfrutta il Secondo Principio della Termodinamica per ricavare una equazione per l'entropia.

Nel libro di Meyer [24], il teorema del trasporto di Reynolds (indicato col nome di *teorema della convezione*) è dedotto nelle pp. 10-11. La dimostrazione richiede molta familiarità con le notazioni indiciali. Nel §4 viene scritta l'equazione di continuità,³ ed, a p. 15, è introdotto il concetto di funzione di corrente per un flusso bidimensionale piano. All'equazione di bilancio della quantità di moto è dedicato il §10, con un tensore degli sforzi in forma diagonale ($\tau_{ij} = -p\delta_{ij}$). La relazione costitutiva completa del tensore degli sforzi per un fluido newtoniano è invece posticipata a p. 79. L'equazione di bilancio dell'energia viene infine scritta nel §35, come diretta conseguenza del Primo Principio della Termodinamica. Nel testo di Chorin [6], la trattazione delle equazioni di bilancio è affrontata già a p. 2, dove si deduce il bilancio integrale di massa e se ne scrive poi l'espressione differenziale. L'equazione di bilancio della quantità di moto per un fluido non viscoso viene introdotta in termini integrali e differenziali alle pp. 6-7, mentre a p. 10 troviamo la trattazione classica del teorema del trasporto. La scrittura dell'equazione di bilancio dell'energia totale è illustrata nelle pp. 12-13, mentre la deduzione del legame costitutivo si trova alle pp. 32-33.

Nel testo [20] di Landau e Lifshitz l'equazione di continuità è dedotta subito (p. 2), utilizzando un bilancio in forma euleriana. Nella pagina immediatamente successiva è scritta in modo simile l'equazione di bilancio della quantità di moto, in termini differenziali per un fluido non viscoso (equazione di Eulero). L'equazione di Bernoulli stazionaria si trova al §5 del primo capitolo. Per la deduzione gli Autori proiettano le equazioni stazionarie di Eulero lungo una linea di corrente, utilizzando al solito la forma di Lagrange dell'accelerazione. Le equazioni di Navier Stokes sono invece introdotte all'inizio del secondo capitolo (p. 45), premettendo considerazioni circa la relazione costitutiva. L'equazione di bilancio dell'energia viene dedotta nel §6, scrivendo prima il bilancio di energia cinetica e poi aggiungendo quello d'energia interna, ricavato come conseguenza del Primo Principio della Termodinamica. Un approfondimento interessante si trova alle pp. 50-51, dove si dimostra la positività del coefficiente di viscosità.

³ In Letteratura, soprattutto anglosassone, viene spesso definito come “incomprimibile” un fluido per il quale la densità è costante nello spazio e nel tempo. Questa definizione non si accorda con quella da noi data, non rispecchiando peraltro il significato della parola incomprimibile. Nel presente testo, un flusso a densità costante è quello realizzato con un fluido incoprimeabile, in moto omotermo (flusso isocoro), partendo da condizioni iniziali di densità uniforme. Possono infatti realizzarsi (in particolare nello studio di problemi di solubilità) flussi isocori che, partendo da condizioni iniziali stratificate, non risultano a densità costante.

In Batchelor [3], l'equazione di conservazione della massa viene dedotta in forma di bilancio integrale euleriano nel §2.2, passando poi alla formulazione locale. A p. 75 c'è una giustificazione del perché la nozione di fluido incomprensibile spesso si associa all'ipotesi di densità costante. Alle pagine successive si introduce la funzione di corrente, mostrando che tale definizione permette il soddisfacimento automatico dell'equazione di continuità, per un flusso bidimensionale piano a densità costante, e discutendone il significato fisico. La trattazione del teorema del trasporto viene effettuata molto dopo, prendendo le mosse dalla nozione di derivata nel tempo dell'integrale fatto su curva (p. 133) ed estendendola poi al caso di un integrale di volume. Il §3.2 è dedicato all'introduzione dell'equazione di bilancio della quantità di moto, che viene scritta sia in termini integrali che differenziali, senza specificare una relazione costitutiva per il tensore degli sforzi. Alla ricerca di una relazione di questo tipo, viene dedicato il paragrafo successivo (§3.3). La trattazione è, al solito, molto estesa ed estremamente chiara. A p. 147 vengono finalmente scritte le equazioni di Navier-Stokes. Nel §3.4 si discute a proposito dell'equazione di bilancio dell'energia interna, identificando (p. 153) la funzione di dissipazione. L'equazione scritta in termini di entropia è invece direttamente dedotta dal Secondo Principio della Termodinamica (p. 156).

Una trattazione estremamente rapida delle equazioni di bilancio è quella che si trova nel cap. 3 del libro [27]. Nel primo paragrafo si identificano tutti gli "ingredienti" tipici di una legge di bilancio. Nel primo esercizio (3.2.1), in particolare, viene dedotta l'equazione di continuità in termini differenziali. Una trattazione più generale si trova nel §3.3. Nel medesimo paragrafo viene anche enunciata la relazione costitutiva, scrivendo poi (§5.1) le equazioni di Navier-Stokes e di Eulero. L'equazione dell'energia cinetica è dedotta alla fine del §5.2. Le equazioni di bilancio in forma integrale sono trattate anche nel cap. 3 di [37]. La lettura di questo capitolo, ricco di esempi e di esercizi, può fornire stimoli importanti a coloro che preferiscono un approccio applicato alla Fluidodinamica. Per la scrittura dell'equazione della massa si rimanda all'esempio 3.1, dove il problema viene affrontato in forma euleriana, con un volume di controllo fisso. La deduzione più rigorosa si trova alle pp. 141-143, dove tra l'altro è anche specificata l'equazione di continuità per un flusso a densità costante. La trattazione è sempre effettuata in termini integrali, così come per l'equazione della quantità di moto (§3.4) e del momento della quantità di moto (§3.5). Il teorema del trasporto viene dedotto attraverso un gran numero di esempi e di figure nel §3.2. Infine, nel §3.6 c'è una chiara deduzione dell'equazione di bilancio dell'energia. La scrittura differenziale delle equazioni di bilancio viene affrontata nel cap. 4, iniziando con l'equazione di conservazione della massa (§4.2). Analizzando nuovamente i flussi di quantità di moto e di energia attraverso la frontiera di un volume di controllo, White arriva alle espressioni differenziali delle relative equazioni di bilancio, rispettivamente nei §4.3 e 4.5. Nel primo di questi paragrafi viene anche presentata la relazione costitutiva del tensore degli sforzi e sono scritte le equazioni di Navier-Stokes. L'equazione differenziale di bilancio del momento della quan-

tità di moto è illustrata nel §4.4. La funzione di corrente è introdotta nel §4.7 e, nel §4.9, viene infine dedotta l'equazione di Bernoulli.

Nel classico libro di Lamb [19], l'equazione della massa è scritta fin dall'inizio (pp. 4-5) in forma differenziale, facendo uso delle descrizioni euleriana e lagrangiana del flusso. Nel §6 si deducono le tre equazioni scalari di bilancio di quantità di moto (in forma differenziale) per un fluido non viscoso, utilizzando un cubo elementare fisso nel dominio fluido. Nel §10 è presentata l'equazione di bilancio dell'energia totale (cinetica + interna) in forma integrale, mentre una riscrittura integrale del bilancio di quantità di moto si trova nel §11. Gli articoli 21 e 22 sono dedicati all'equazione di Bernoulli. Nel cap. 4 viene affrontato lo studio dei flussi bidimensionali e di conseguenza si definisce la funzione di corrente. Le equazioni di Navier-Stokes sono poi illustrate negli articoli dal 323 al 328. La trattazione è estremamente accurata e precisa, anche se le notazioni esclusivamente scalari spesso complicano la lettura. La sua consultazione è certamente da consigliare, anche per motivi storici.

In [22], l'Autore deduce nel §1.2 il teorema del trasporto di Reynolds. Nel §1.3 viene ricavata l'equazione di continuità, prima in forma integrale e successivamente in forma differenziale. Con lo stesso procedimento l'Autore deduce l'equazione della quantità di moto (§1.4), mentre al paragrafo successivo viene ricavata l'equazione per l'energia totale (cinetica + interna). Solo nel §1.6 l'Autore definisce la derivata sostanziale. Il §1.8 è interamente dedicato alla ricerca della relazione costitutiva per un fluido newtoniano ed alla conseguente scrittura delle equazioni di Navier-Stokes. Nelle pp. 85-87 viene definita la funzione di corrente per un flusso bidimensionale piano a densità costante, discutendone il significato fisico. Infine, nel §1.9, l'Autore deduce l'equazione di Bernoulli. Sul libro di Warsi [36] viene subito dedotta la relazione tra la velocità di deformazione dell'elemento di volume e la divergenza della velocità, per poi passare al teorema del trasporto di Reynolds (pp. 12-14). Nel cap. 2, precisamente al secondo paragrafo, viene dedotta l'equazione di continuità, con la conseguente riscrittura del teorema del trasporto per funzioni del tipo ρf . A p. 33 troviamo la deduzione delle equazioni integrali di bilancio della quantità di moto e del momento della quantità di moto, mentre nelle pp. 33-37 viene stabilito il legame tra il vettore degli sforzi ed il tensore degli sforzi, tramite l'esempio classico di Cauchy. La relazione costitutiva per un fluido newtoniano è poi discussa nelle pp. 43-48. La trattazione di questi argomenti viene affrontata con estremo rigore matematico: se ne consiglia per questo la consultazione.

Molto chiara è anche l'esposizione sul testo [12] dove, nei sottoparagrafi §3.3.5 e §3.3.6, è rispettivamente definita la derivata materiale e dedotto il teorema del trasporto. Si sottolinea moltissimo il fatto che questa equazione collega le due descrizioni euleriana e lagrangiana del flusso. Alle pp. 323-325 è presentata la deduzione dell'equazione di continuità in forma locale, mentre a p. 327 un campo di velocità bidimensionale piano è scritto in termini della funzione di corrente. L'equazione di Eulero viene dedotta alle pp. 330-333, prima in coordinate curvilinee e poi (pp. 335-337) in coordinate cartesiane.

L'equazione di Bernoulli stazionaria è ricavata integrando l'equazione vettoriale di Eulero lungo una linea di corrente (pp. 337-339). La deduzione delle equazioni di Navier-Stokes si trova poi nelle pp. 347-349. Segnaliamo che sul testo [34], il §3.6 è dedicato allo studio dell'equazione di Bernoulli, con moltissime applicazioni di natura ingegneristica. Il testo di Acheson [1], seppure finalizzato ad una trattazione non matematicamente rigorosa degli argomenti, presenta in maniera semi-intuitiva nel §1.3 la deduzione delle equazioni di bilancio, ricavando alle pp. 6-8 l'equazione di continuità. Successivamente, pp. 8-9, l'Autore deduce l'equazione di Eulero e quindi (pp. 9-10) il teorema di Bernoulli. Il teorema del trasporto di Reynolds è presentato a p. 206 e successivamente (pp. 209-214) viene giustificata la relazione costitutiva.

L'intero secondo capitolo del testo [25] è dedicato al teorema di Bernoulli, del quale viene presentata la dimostrazione (§2.1) per un flusso stazionario. Suggeriamo di leggere anche il §2.2, in quanto fornisce un esempio di applicazione del teorema di Bernoulli alla manometria (tubo di Pitot). Il cap. 3 è dedicato all'analisi dei flussi bidimensionali: l'Autore introduce immediatamente (§3.1) la definizione di funzione di corrente, spiegandone il significato fisico solo più tardi (§3.11). La forma di tale funzione nel caso di flusso uniforme viene scritta nel §3.13, mentre è più interessante la deduzione (§3.14) per il flusso attorno ad un cilindro rotondo. L'Autore focalizza poi l'attenzione sul concetto di circolazione (§3.2), fornendo una possibile dimostrazione del teorema di Stokes nel caso piano. Nel testo [26] il cap. 5 è riservato alle equazioni di bilancio dedotte per flussi quasi-monodimensionali: nel §5.1 si deduce l'equazione di continuità e nel §5.2 quelle di Eulero e Bernoulli. Le equazioni nel caso bidimensionale vengono discusse solo nel capitolo successivo.

Approfondimenti

2.10 Richiami sulle funzioni di stato termodinamiche

Le equazioni di Maxwell sono quattro equazioni nelle quattro grandezze s , v , T e p (le prime due *estensive*, le ultime due *intensive*) che caratterizzano il sistema termodinamico in esame. Si possono ricavare considerando le *funzioni di stato* (per unità di massa) e (energia interna), h (entalpia), A (funzione di Helmholtz) e G (funzione di Gibbs).

Limitando l'analisi al caso in cui il sistema scambi lavoro con l'esterno solo per il tramite del lavoro delle pressioni, l'energia interna e è funzione delle sole variabili extensive s e v :

$$e = T s - p v \Rightarrow de = T ds - p dv \Rightarrow \frac{\partial e}{\partial s} \Big|_v = T, \quad \frac{\partial e}{\partial v} \Big|_s = -p,$$

da cui, eguagliando le derivate seconde miste di e rispetto a s e v , otteniamo:

$$\frac{\partial T}{\partial v} \Big|_s = -\frac{\partial p}{\partial s} \Big|_v. \quad (2.70)$$

L'entalpia h considera la variabile estensiva s come variabile indipendente nella coppia (s, T) e la variabile intensiva p come variabile indipendente nella coppia (v, p) , risultando definita nel modo seguente:

$$h = e + p v \Rightarrow dh = T ds + v dp \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial s} \Big|_p = T, \quad \frac{\partial h}{\partial p} \Big|_s = v,$$

da cui, eguagliando le derivate seconde miste di h rispetto a s e p , abbiamo:

$$\frac{\partial T}{\partial p} \Big|_s = \frac{\partial v}{\partial s} \Big|_p. \quad (2.71)$$

La funzione di Helmholtz A considera, invece, la variabile intensiva T come variabile indipendente nella coppia (s, T) e la variabile estensiva v come variabile indipendente nella coppia (v, p) , risultando definita nel modo seguente:

$$A = e - T s \Rightarrow dA = -s dT - p dv \Rightarrow \frac{\partial A}{\partial T} \Big|_v = -s, \quad \frac{\partial A}{\partial v} \Big|_T = -p,$$

da cui, eguagliando le derivate seconde miste di A rispetto a T e v , otteniamo:

$$\frac{\partial s}{\partial v} \Big|_T = \frac{\partial p}{\partial T} \Big|_v. \quad (2.72)$$

Infine, la funzione di Gibbs G considera le due variabili intensive T e p come variabili indipendenti nelle coppie (s, T) e (v, p) , risultando definita al modo seguente:

$$G = e - T s + p v \Rightarrow dG = -s dT + v dp \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial T} \Big|_p = -s, \quad \frac{\partial G}{\partial p} \Big|_T = v,$$

da cui, eguagliando le derivate seconde miste di G rispetto a T e v , abbiamo:

$$\frac{\partial s}{\partial p} \Big|_T = -\frac{\partial v}{\partial T} \Big|_p. \quad (2.73)$$

Le relazioni (2.70, 2.71, 2.72) e (2.73) prendono il nome di *equazioni di Maxwell*.

3

Fluidi in quiete

In questo capitolo inizieremo a discutere alcune semplici conseguenze della equazione della quantità di moto (2.48), nel caso in cui sia possibile trovare un riferimento, anche non inerziale, in cui il fluido risulti in quiete. Tutte queste problematiche fanno parte dell'*Idrostatica*,¹ il cui obiettivo è la determinazione del campo di pressione, una volta assegnata la densità (ad esempio, costante) oppure utilizzando una equazione di stato (relazione tra densità e pressione).

Nel primo paragrafo studieremo fluidi in quiete in un riferimento inerziale, deducendo il principio di Archimede e facendo poi un esempio di interesse cosmologico. Nel secondo paragrafo, dopo un breve richiamo sul legame tra campi di velocità ed accelerazione in riferimenti in moto relativo, studieremo alcuni importanti esempi di fluidi in quiete in riferimenti non inerziali.

Una breve bibliografia è proposta nel paragrafo 3.3.

3.1 Fluidi in quiete in un riferimento inerziale

Assumiamo costante la densità del fluido (ad esempio, il fluido sia incompribile ed il campo di temperatura uniforme). L'equazione di conservazione della massa (2.6) è banalmente verificata dai campi $\rho \equiv \rho_0$, $\mathbf{u} \equiv \mathbf{0}$. Poniamo $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ nell'equazione (2.48) ed otteniamo semplicemente:

$$\nabla p = \rho_0 \mathbf{F}. \quad (3.1)$$

Osserviamo che l'equazione (3.1) consente di determinare p solo a meno di costanti additive. Il caso di gran lunga più importante in cui occorre integrare l'equazione (3.1) è quello in cui \mathbf{F} sia l'accelerazione gravitazionale, ovvero $\mathbf{F} = \mathbf{g} \equiv -g \mathbf{e}_z$ con $g > 0$ costante ed \mathbf{e}_z versore dell'asse verticale ascendente. L'equazione (3.1) è allora equivalente alle tre equazioni scalari $\partial_x p = 0$,

¹ Il nome “idrostatica” si usa comunemente, anche se il fluido in esame non è l’acqua.

$\partial_y p = 0$ e $\partial_z p = -\rho_0 g$. Le prime due implicano che p è funzione della sola coordinata z (le superfici isobare sono quindi piani $z = \text{costante}$) ed allora la terza fornisce:

$$p = -\rho_0 g z , \quad (3.2)$$

ovviamente a meno di costanti. Questa relazione ha un significato fisico immediato: in un fluido a densità costante, la pressione varia linearmente con la quota. In particolare, la pressione aumenta per z decrescente e diminuisce per z crescente. Questo è un fatto ben noto a chi pratica immersioni subacquee: la pressione aumenta in tal caso ($\rho_0 g \sim 10^4 \text{Pa/m}$) all'incirca di una atmosfera (ricordiamo che una atmosfera equivale a $1.013 \cdot 10^5 \text{Pa}$) ogni dieci metri di profondità.

- ◊ **Esercizio:** Dedurre l'equazione dell'Idrostatica (3.2) dall'equazione di Bernoulli (2.49).
- ◊ **Esercizio:** Un fluido a densità costante è contenuto in un tubo piegato ad "U" e disposto lungo la direzione della accelerazione di gravità. Sono presenti due sezioni a pelo libero a quote z_1 e z_2 , sulle quali agiscono due pressioni p_1 e p_2 , in generale differenti. Mettere in relazione la differenza di quota ($z_1 - z_2$) con la differenza di pressione ($p_1 - p_2$).
Nota: questo è lo schema di alcuni strumenti di misura della pressione (*manometri a liquido*).

Una applicazione di fondamentale importanza della relazione (3.2) è nota come *principio di Archimede*: un corpo immerso in un fluido (in quiete) riceve da questo una spinta verso l'alto pari al peso del fluido dislocato. Consideriamo un corpo occupante il dominio limitato Ω_b (il cui volume $|\Omega_b|$ è quindi finito), avente frontiera limitata $\partial\Omega_b$, sulla quale sia possibile definire il versore normale (esterno) ν . Scriviamo la risultante \mathbf{F}_b della sollecitazione esercitata dal fluido sul corpo:

$$\mathbf{F}_b = \int_{\partial\Omega_b} dA(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) [-\nu(\mathbf{x})] = \rho_0 g \int_{\partial\Omega_b} dA(\mathbf{x}) z \nu(\mathbf{x}) = \rho_0 g |\Omega_b| \mathbf{e}_z ,$$

con una semplice applicazione delle formule di Green. Le navi sono costruite in modo tale che il loro peso risulti pari al volume d'acqua che dislocano: è facile osservare che una nave a pieno carico ha una linea di galleggiamento più alta che in assenza di carico. Il volo degli aerostati, enormi palloni gonfiati con aria calda, elio od altri gas più leggeri dell'aria, sfrutta il medesimo principio.

- ◊ **Esercizio:** Un galleggiante di forma cilindrica retta (altezza h ed area di base A) e massa m è parzialmente immerso in un liquido a densità uniforme (ρ), in quiete in un campo gravitazionale d'intensità g . Il pelo libero è ortogonale alle generatrici e parallelo alle due basi. Di queste, la base non immersa si eleva di una quota $z = z_0$ dalla superficie del liquido. Trascurando gli effetti dell'eventuale moto del fluido ed assumendo il galleggiante inizialmente ($t = 0$) in quiete, studiare l'andamento della quota z nel tempo.

Risposta: posto $z_e = (\rho Ah/m - 1)m/(\rho A)$ (quota di equilibrio) ed $\omega = \sqrt{\rho Ag/m}$, $z(t) = (z_0 - z_e) \cos \omega t + z_e$.

Per mostrare come l'Idrostatica possa applicarsi anche ad alcuni problemi di Meccanica Celeste, supponiamo di avere una gigantesca massa fluida M in quiete occupante una enorme sfera $B_R(\mathbf{0})$ e tenuta insieme dal campo di forze gravitazionali. Immaginiamo ad esempio una stella all'interno della quale vogliamo determinare il campo di pressione $p(\mathbf{x})$. Nell'ipotesi di simmetria sferica, i campi di densità e pressione dipenderanno solo dalla distanza dall'origine $r = |\mathbf{x}|$. Ricordiamo che, dalla legge di gravitazione universale, la forza (attrattiva) esercitata da una massa m_χ occupante la sfera $B_\chi(\mathbf{0}) \subseteq B_R(\mathbf{0})$ ($m_R = M$) su una massa posta nel punto $\mathbf{x} \in B'_\chi(\mathbf{0})$ è direttamente proporzionale al prodotto delle due masse ed inversamente al quadrato della distanza. L'accelerazione che ne risulta si scrive allora:

$$\mathbf{g}_\chi(\mathbf{x}) = \mathcal{G} \frac{m_\chi}{r^3} (-\mathbf{x}), \quad (3.3)$$

dove \mathcal{G} è la *costante di gravitazione universale*, pari circa a $6.66 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$. Si verifica subito che \mathbf{g}_χ ammette un potenziale $\Phi_\chi(\mathbf{x}) = \mathcal{G}m_\chi/r$, sempre per $\mathbf{x} \in B'_\chi(\mathbf{0})$. In particolare per $\chi = R$ otteniamo il potenziale gravitazionale della nostra stella $\Phi(\mathbf{x}) = \mathcal{G}M/r$. Come possiamo prolungare Φ all'interno della stella? Richiedendo che il potenziale $\Phi(\mathbf{x})$ in tutti i punti \mathbf{x} appartenenti alla superficie sferica $\partial B_\chi(\mathbf{0})$ coincida col potenziale gravitazionale della massa m_χ in essa contenuta, ovvero $\Phi(\mathbf{x}) = \Phi_\chi(\mathbf{x})$ e così pure per l'accelerazione. Ma allora, comunque scegliamo $\chi \in (0, R)$ deve essere verificato, in base alla legge di gravitazione (3.3), il seguente vincolo integrale:

$$\int_{B_\chi(\mathbf{0})} d\mathbf{x} \nabla^2 \Phi = \int_{\partial B_\chi(\mathbf{0})} dS \mathbf{g}_\chi \cdot \boldsymbol{\nu} = -4\pi \mathcal{G}m_\chi = -4\pi \mathcal{G} \int_{B_\chi(\mathbf{0})} d\mathbf{x} \rho.$$

Per il fatto che χ è arbitrario, dall'uguaglianza tra il primo ed l'ultimo membro segue:

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi \mathcal{G} \rho, \quad (3.4)$$

vedi [20] p. 6. La soluzione di questa equazione di Poisson all'interno della sfera $B_R(\mathbf{0})$, con la condizione di Dirichlet $\Phi(\mathbf{x}) = \mathcal{G}M/R$ per $\mathbf{x} \in \partial B_R(\mathbf{0})$, consente di prolungare il potenziale gravitazionale Φ .

Ponendo $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ nell'equazione (2.48) e specificando $\mathbf{F} = \nabla\Phi$, otteniamo $\nabla p = \rho\nabla\Phi$. Ricavato il gradiente di Φ , ne facciamo la divergenza, utilizzando l'equazione di Poisson (3.4) in Φ , ed arriviamo a scrivere la relazione tra la densità ρ e la pressione p :

$$\nabla \cdot \frac{\nabla p}{\rho} = -4\pi\mathcal{G}\rho .$$

In base alla simmetria sferica ed all'espressione dell'operatore ∇ in coordinate sferiche (vedi equazione (5.37) del successivo Cap. 5), l'equazione precedente si specifica nella:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 dp}{\rho dr} \right) = -4\pi\mathcal{G}\rho . \quad (3.5)$$

Le condizioni al contorno che utilizzeremo per integrare la precedente equazione sono di pressione assegnata sulla superficie della stella $p(R) = p_0$, mentre scrivendo l'equazione (2.48) per $r = R$ otteniamo: $dp/dr = -\rho_0 GM/R^2$, essendo $\rho_0 = \rho(R)$ la densità sulla superficie della stella. Assumiamo la legge $\rho/\rho_0 = (r/R)^{-\alpha}$ per la densità, con $0 < \alpha < 3$ (la limitazione superiore deriva dalla richiesta di massa M finita). Adimensionalizzando le masse con $(p_0/\mathcal{G})^{1/2}R^2$, i tempi con $[R^2/(Gp_0)]^{1/4}$ e le lunghezze con R e continuando ad utilizzare gli stessi simboli per le variabili adimensionali, otteniamo il problema differenziale:

$$\begin{cases} p'' + (2 + \alpha)p'/r = -4\pi\rho_0^2 r^{-2\alpha} \\ p(1) = 1 , \quad p'(1) = -4\pi\rho_0^2/(3 - \alpha) , \end{cases} \quad (3.6)$$

che per $\alpha \neq 1$ ammette soluzione:

$$p(r) = 1 + \frac{2\pi\rho_0^2}{3 - \alpha} \frac{1 - r^{2(1-\alpha)}}{1 - \alpha} .$$

È interessante verificare che la pressione aumenta al diminuire di r , ovvero avvicinandosi al centro della stella. Inoltre, se $0 < \alpha < 1$, la pressione ha un limite finito $1 + 2\pi\rho_0^2/[(1 - \alpha)(3 - \alpha)]$ per $r = 0$, mentre per $1 < \alpha < 3$ diverge per $r \rightarrow 0$. Infine, per $\alpha = 1$ il problema differenziale (3.6) ha soluzione $p(r) = 1 - 2\pi\rho_0^2 \log r$, che diverge per $r \rightarrow 0$.

- ◊ **Esercizio:** Integrare analiticamente l'equazione (3.5) per $\rho/\rho_0 = 1 + \alpha(r/R)$, con α costante reale. Utilizzare le condizioni al contorno discusse in precedenza. Discutere il comportamento di $p(r)$ per $r \rightarrow 0$.

- ◊ **Esercizio:** Integrare numericamente l'equazione (3.5) per $\rho/\rho_0 = (p/p_0)^\alpha$, con $\alpha \in (0, 1)$. Utilizzare le condizioni al contorno discusse in precedenza.

3.2 Fluidi in quiete in riferimenti non inerziali

Premettiamo alcune considerazioni di carattere generale sulla scrittura dei campi di velocità ed accelerazione in riferimenti in moto relativo. Riprendiamo le relazioni (2.39, 2.40) che esprimono posizione e velocità nel nuovo riferimento in funzione di quelle nel vecchio ed osserviamo che, essendo $\mathbf{Q} = \dot{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{R}$ emisimmetrico, la sua azione su un vettore è equivalente alla premoltiplicazione vettoriale per un vettore $\boldsymbol{\omega}_0$ (velocità angolare) definito dalla relazione seguente:

$$\omega_{0l} = \frac{1}{2} \varepsilon_{lrs} Q_{sr} . \quad (3.7)$$

- ◊ **Esercizio:** Provare che $\mathbf{Q}\mathbf{x}' = \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{x}'$, con la definizione (3.7) di $\boldsymbol{\omega}_0$.

Ricavando $\mathbf{R}^{-1}\mathbf{x}$ dalla relazione (2.39), la (2.40) con $\dot{\mathbf{x}}' = \mathbf{u}'$ e $\ddot{\mathbf{x}}'_0 = \mathbf{u}'_0$ si può riscrivere allora nella forma seguente:

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u}'_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times (\mathbf{x}' - \mathbf{x}'_0) + \mathbf{R}^{-1}\mathbf{u} . \quad (3.8)$$

Derivando ancora nel tempo questa relazione otteniamo il legame tra l'accelerazione $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{x}}$ nel vecchio sistema di riferimento e quella $\mathbf{a}' = \ddot{\mathbf{x}}'$ nel nuovo:

$$\mathbf{a}' = \dot{\mathbf{u}}'_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_0 \times (\mathbf{x}' - \mathbf{x}'_0) + \boldsymbol{\omega}_0 \times (\mathbf{u}' - \mathbf{u}'_0) + \mathbf{Q}(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{u}) + \mathbf{R}^{-1}\dot{\mathbf{u}} .$$

Ricavando infine dalla relazione (3.8) la differenza $\mathbf{u}' - \mathbf{u}'_0 = \boldsymbol{\omega}_0 \times (\mathbf{x}' - \mathbf{x}'_0) + \mathbf{R}^{-1}\mathbf{u}$ con $\dot{\mathbf{u}}'_0 = \mathbf{a}'_0$ otteniamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}' = & \underbrace{\mathbf{a}'_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_0 \times (\mathbf{x}' - \mathbf{x}'_0) + \boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{\omega}_0 \times (\mathbf{x}' - \mathbf{x}'_0)}_{\text{accelerazione di trascinamento}} + \\ & + \underbrace{2 \boldsymbol{\omega}_0 \times (\mathbf{R}^{-1}\mathbf{u})}_{\substack{\text{accelerazione di} \\ \text{Coriolis}}} + \underbrace{\mathbf{R}^{-1}\mathbf{a}}_{\substack{\text{immagine della} \\ \text{accelerazione} \\ \text{relativa}}} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Consideriamo un fluido in quiete nel riferimento RC mobile rispetto al riferimento inerziale RC' , con velocità ed accelerazione di traslazione \mathbf{u}'_0 e \mathbf{a}'_0 e velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_0$. Poiché il fluido è in quiete in RC , $\mathbf{u} \equiv \mathbf{0}$ e $\mathbf{a} \equiv \mathbf{0}$ ed inoltre la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_0$ deve essere costante ($\dot{\boldsymbol{\omega}}_0 = \mathbf{0}$). Sostituiamo velocità ed accelerazione all'interno delle equazioni di Navier-Stokes (2.48), ottenendo:

$$\rho [\mathbf{a}'_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times \boldsymbol{\omega}_0 \times (\mathbf{x}' - \mathbf{x}'_0)] = -\nabla' p + \rho \mathbf{F} , \quad (3.10)$$

in cui $\nabla' = \mathbf{e}_i \partial_{x'_i}$.

Assumiamo la densità costante $\rho \equiv \rho_0$ e consideriamo il caso $\omega_0 = \mathbf{0}$ e con $\mathbf{F} = \mathbf{g}$, ovvero in presenza di accelerazione gravitazionale. L'equazione (3.10) si riduce a $\nabla' p = \rho_0(\mathbf{g} - \mathbf{a}'_0)$, ovvero:

$$p(\mathbf{x}')/\rho_0 = (\mathbf{g} - \mathbf{a}'_0) \cdot \mathbf{x}' , \quad (3.11)$$

a meno di costanti. Le superfici isobare del campo (3.11) sono piani ortogonali al vettore $\mathbf{g} - \mathbf{a}'_0$.

- ◊ **Esercizio:** Un liquido a densità uniforme occupa parzialmente un serbatoio cilindrico retto. Il serbatoio è accelerato uniformemente nel tempo in una direzione ortogonale alle generatrici. Determinare la forma della superficie libera in condizioni stazionarie.

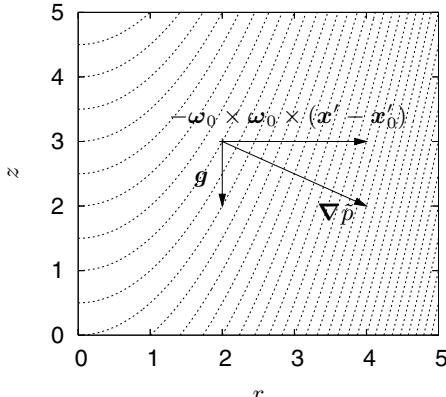


Figura 3.1. Isobare per il campo (3.12). Le masse sono adimensionalizzate con $\rho_0 g^3 / \omega_0^6$, le lunghezze con g / ω_0^2 ed i tempi con $1 / \omega_0$. Il Δp tra le curve è $1/2$. Nel punto $r = 2$, $z = 3$ sono disegnati i due vettori che compongono il gradiente di pressione ($\tilde{p} = p / \rho_0$): \mathbf{g} e $-\omega_0 \times \omega_0 \times (\mathbf{x}' - \mathbf{x}'_0)$.

Supponiamo ora che la velocità angolare ω_0 sia non nulla (possiamo quindi definire un piano π^\perp ortogonale ad ω_0) e parallela al campo di forze $\mathbf{F} = \mathbf{g}$, altrimenti non è possibile ottenere soluzioni stazionarie. Calcoliamo il triplo prodotto vettoriale $\omega_0 \times \omega_0 \times (\mathbf{x}' - \mathbf{x}'_0)$ presente nella equazione della quantità di moto (3.10). Decomponiamo $\mathbf{x}' - \mathbf{x}'_0$ nella somma di un vettore \mathbf{x}'_p parallelo ad ω_0 e di uno $\mathbf{x}'_n = (\mathbf{x}' - \mathbf{x}'_0) - \mathbf{x}'_p \in \pi^\perp$ ortogonale ad ω_0 . Assumendo un sistema di coordinate cilindriche con asse lungo ω_0 passante per \mathbf{x}'_0 e chiamando con \mathbf{r} il versore radiale ed r la distanza dall'asse, possiamo scrivere: $\mathbf{x}'_n = rr$. Abbiamo allora: $\omega_0 \times \omega_0 \times (\mathbf{x}' - \mathbf{x}'_0) = -\omega_0^2 rr$ (accelerazione centripeta), con $\omega_0 = |\omega_0|$. Dall'equazione (3.10) ricaviamo il gradiente

di pressione: $\nabla p = \rho_0(\omega_0^2 rr + \mathbf{g})$ ed, utilizzando la forma del gradiente in coordinate cilindriche (5.22) ricaviamo le seguenti due equazioni: $\partial_z p = -\rho_0 g$ (in direzione assiale) e $\partial_r p = \rho_0 \omega_0^2 r$ (radiale). Integrando otteniamo il campo di pressione:

$$p(r, z)/\rho_0 = \frac{\omega_0^2}{2} r^2 - gz , \quad (3.12)$$

sempre a meno di costanti. Le superfici isobare sono in questo caso dei paraboloidi di rotazione, con asse lungo ω_0 (vedi Fig. 3.1).

3.3 Curiosando in biblioteca

Gli argomenti trattati in questo capitolo non godono di una bibliografia molto vasta, dal momento che vengono in gran parte trattati nei corsi di Fisica Elementare e sono perciò spesso affrontati in modo solo qualitativo.

Il testo di White [37] dedica all'Idrostatica il cap. 2, mostrando (p. 61) la relazione tra il gradiente di pressione e le forze di volume. La deduzione è effettuata attraverso la scrittura di un bilancio di forze in un cubetto elementare. L'Autore mostra anche l'effetto della variazione dell'accelerazione di gravità (che non è uniforme sulla Terra, a causa della sua forma non perfettamente sferica) ed affronta il problema del calcolo della pressione di un gas perfetto, in quiete in un campo di forze gravitazionali. Nei paragrafi successivi, l'Autore presenta alcune applicazioni alla manometria e studia il problema del calcolo di spinte su superfici. La stabilità di corpi galleggianti è oggetto del §2.8, mentre, premesse le leggi di trasformazione della velocità e dell'accelerazione in riferimenti in moto relativo, nel §2.9 viene studiato l'equilibrio di un fluido in un riferimento non inerziale. Alla fine del capitolo, il Lettore potrà trovare un'ampia appendice esercitativa.

Le nozioni di base dell'Idrostatica vengono fornite anche da Kundu e Cohen [17] i quali (§1.7) determinano, così come fatto da White, il legame tra il gradiente di pressione e le forze di volume. Anche in Batchelor [3] possiamo trovare un paragrafo interamente dedicato all'Idrostatica (§1.4), nel quale l'Autore presenta le classiche relazioni dell'Idrostatica. In più viene descritto l'esempio di fluido a densità non costante rotante attorno ad asse fisso, mentre nelle pp. 18-19 è trattato l'esempio della massa fluida tenuta insieme da effetti gravitazionali. Nel testo di Landau e Lifschitz [20] l'Idrostatica è trattata nel §3. Anche sul testo [34] troviamo (pp. 23-27) le equazioni idrostatiche, mentre nelle pp. 61-65 vengono discussi gli esempi classici di fluidi in quiete in riferimenti non inerziali. Più ampia è la trattazione di questi argomenti nel libro [12], dove (p. 52) gli Autori definiscono il campo di pressione all'interno di un fluido in quiete, senza specificare le equazioni del moto, ma scrivendo un bilancio di forze su di un cubo fluido elementare. Successivamente (pp. 57-60) sono illustrate applicazioni alla manometria, mentre nelle pp. 64-80 sono calcolate forze agenti su superfici soggette alla pressione di un fluido in quiete. Sul testo [26], dopo i primi due capitoli strettamente introduttivi, il terzo

introduce il Lettore all'Idrostatica. Nel §3.1.4 viene dedotta l'espressione del campo di pressione all'interno di un fluido in quiete, particolareggiato anche per un gas barotropico. Lo studio del campo di pressione per un fluido in quiete in un riferimento non inerziale si trova nei §3.4.1 e 3.4.2: nel primo il riferimento è uniformemente accelerato, mentre nel secondo ruota a velocità angolare costante.

5

Soluzioni particolari delle equazioni di Navier-Stokes

In questo capitolo esamineremo alcune soluzioni analitiche classiche delle equazioni di Navier-Stokes, utilizzando opportune ipotesi di simmetria sul flusso di un fluido a densità costante (il cui campo di velocità è a divergenza nulla).

Nel §5.1 verranno dedotte alcune soluzioni di natura puramente cinematica, nelle ulteriori ipotesi di flusso piano ed a potenziale. In tal caso, è sufficiente risolvere l'equazione di Laplace $\nabla^2\psi = 0$ e determinare la funzione di corrente ψ , oppure lavorare direttamente in termini di potenziale complesso w . Nel paragrafo 5.2, abbandonando l'ipotesi di flusso a potenziale, saranno esaminate alcune soluzioni analitiche delle equazioni di Navier-Stokes in due dimensioni, per un flusso piano e per un flusso tra due cilindri coassiali. Su quest'ultimo flusso si basa il funzionamento del *viscosimetro* per liquidi, uno strumento che consente la misura del coefficiente di viscosità μ in condizioni di temperatura fissate per molti tipi di liquidi. Il principio del suo funzionamento è brevemente descritto nel §5.3. Esamineremo poi la soluzione per il flusso stazionario all'interno di un tubo a sezione circolare (§5.4), nell'ipotesi di simmetria cilindrica del flusso e per velocità azimutali nulle. Ovviamente questa soluzione è di grande interesse applicativo ed è stata poi estesa a condizioni di flusso ben più complesse [32]. Svolgeremo poi (§5.5) la trattazione classica per il flusso di Stokes (in cui dominano i termini diffusivi) stazionario attorno ad una sfera, calcolando la risultante della sollecitazione di attrito. Anche questa soluzione è estremamente importante nelle applicazioni ed è stata estesa al caso non stazionario, per poter analizzare il trasporto di piccole particelle in un flusso turbolento.

Un percorso bibliografico è infine illustrato nel paragrafo 5.6.

5.1 Esempi di flussi a potenziale

Alcuni dei flussi più semplici che possono essere calcolati analiticamente fanno uso del potenziale di velocità, in due ed anche in tre dimensioni. In questo

paragrafo faremo tre esempi classici nell'ipotesi di flusso piano, utilizzando sia il potenziale complesso \mathbf{w} che la funzione di corrente ψ .

5.1.1 Flusso attorno ad un cilindro circolare

Studiamo il potenziale complesso:

$$\mathbf{w}(\mathbf{z}) = u_\infty (\mathbf{z} + r^2/\mathbf{z}) \quad (5.1)$$

ottenuto sovrapponendo i potenziali di una corrente uniforme diretta lungo l'asse reale con velocità u_∞ e di una doppietta (4.50), con asse $\mathbf{d} = -\mathbf{e}_x$ (opposto alla corrente uniforme) ed intensità $Q = 2u_\infty \pi r^2$ ($2 \times$ velocità asintotica \times area di un cerchio di raggio r). Utilizzando una rappresentazione polare per \mathbf{z} ($\rho = |\mathbf{z}|$, $\theta = \arg \mathbf{z}$), il potenziale (5.1) può essere riscritto nel modo seguente:

$$\mathbf{w}(\rho e^{i\theta}) = u_\infty \left[\left(\rho + \frac{r^2}{\rho} \right) \cos \theta + i \left(\rho - \frac{r^2}{\rho} \right) \sin \theta \right].$$

Questa forma evidenzia il fatto che per $\rho = r$ la parte immaginaria di \mathbf{w} è identicamente costante (nulla, nel caso particolare). Quindi il potenziale complesso (5.1) descrive il flusso attorno ad un cerchio di raggio r e centro nell'origine investito dalla corrente asintotica $\mathbf{u}_\infty = u_\infty \mathbf{e}_x$ diretta lungo l'asse reale.

- ◊ **Esercizio:** Utilizzando l'equazione di Bernoulli (2.49), dedurre l'andamento della pressione sulla frontiera del cerchio. Calcolare la forza agente sul corpo.
- ◊ **Esercizio:** Inserendo nella forma (5.1) del potenziale complesso un vortice puntiforme posto nel centro del cilindro, studiare i campi di velocità e di pressione in presenza di una circolazione Γ attorno al corpo. Calcolare la forza agente sul corpo.

5.1.2 Flusso in un angolo diedro

Consideriamo la regione compresa tra l'asse reale (x) positivo ed una semiretta che parte dall'origine e forma l'angolo α con l'asse x . Introdotto il numero reale positivo: $\chi = \pi/\alpha$ e considerando la rappresentazione polare dei numeri complessi ($\mathbf{z} = r e^{i\theta}$), osserviamo che la funzione $\sin(\chi\theta)$ si annulla in $\theta = 0$ ed in $\theta = \alpha$, ovvero sulle due semirette appena introdotte. Inoltre, utilizzando la forma polare (nelle coordinate (r, θ) , essendo r la distanza dall'origine e θ la fase) dell'operatore di Laplace:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \partial_r(r \partial_r) + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta}, \quad (5.2)$$

verifichiamo subito che la funzione $r^\chi \sin(\chi\theta)$ è armonica e pertanto è la funzione di corrente:

$$\psi(r, \theta) = r^\chi \sin(\chi\theta) \quad (5.3)$$

del flusso all'interno dell'angolo diedro.

- ◊ **Esercizio:** Verificare l'espressione (5.2) dell'operatore di Laplace ∇^2 piano, in coordinate polari.

Suggerimento: introdurre una base locale $r(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$, $\theta(\theta) = (-\sin \theta, \cos \theta)$ (r è il versore della direzione radiale, θ è il versore di quella azimutale) e dedurre l'espressione dell'operatore $\nabla = r\partial_r + \theta/r\partial_\theta \dots$

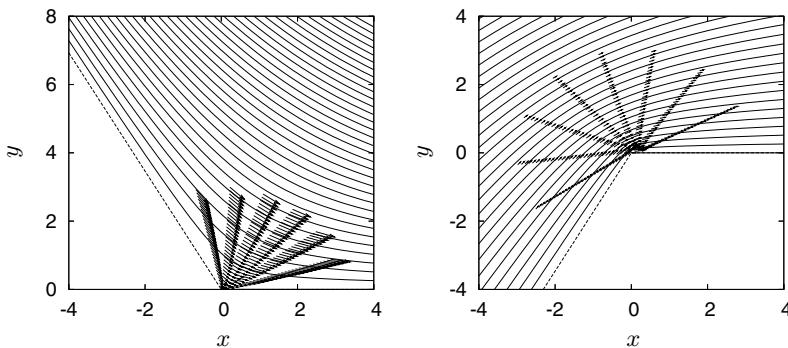


Figura 5.1. Linee di corrente per flusso attorno ad angoli diedri di ampiezze $\alpha = 120^\circ$ (a) e 240° (b). Sono tracciate anche alcune velocità (con un fattore di scala 0.2), per evidenziare che nel vertice c'è un punto di ristagno in (a) ed un punto di infinito (b).

Considerato che $-\nabla^\perp \psi = \nabla \varphi$, ricaviamo che il potenziale di velocità è $\varphi(r, \theta) = r^\chi \cos(\chi\theta)$ ed il potenziale complesso:

$$w(z) = z^\chi. \quad (5.4)$$

Calcolata la velocità $\bar{u} = \chi z^{\chi-1}$, osserviamo che il suo comportamento nell'origine dipende da χ , vedi Fig. 5.1. Più precisamente, la velocità ha una singolarità d'infinito in $z = 0$ per $\chi > 1$ ($\chi < 1$), mentre va a zero in tale punto per $\chi < 1$ ($\chi > 1$, il caso $\chi = 1$ è banale). Quindi l'aggiramento di un angolo di ampiezza maggiore di un angolo piatto implica una singolarità d'infinito sul vertice per la velocità, mentre l'aggiramento di un angolo di ampiezza minore di π avviene con un punto di ristagno nel vertice.

Infine, notiamo che la soluzione ottenuta per $\alpha = \pi/2$ è spesso utilizzata per approssimare (a meno dei termini di curvatura) una metà del campo (simmetrico rispetto alla normale) nell'intorno di un punto di ristagno appartenente alla frontiera del dominio fluido.

5.1.3 Flusso attorno ad un cilindro ellittico

Consideriamo la trasformazione di coordinate *ellittica*:

$$\begin{cases} x = c \cosh \rho \cos \theta \\ y = c \sinh \rho \sin \theta \end{cases}, \quad (5.5)$$

in cui c è un numero reale positivo e $\rho \in [0, +\infty)$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Osserviamo che, fissato ρ ad un valore $\bar{\rho}$, le vecchie coordinate (x, y) verificano l'equazione:

$$\frac{x^2}{(c \cosh \bar{\rho})^2} + \frac{y^2}{(c \sinh \bar{\rho})^2} = 1,$$

la quale prova che la linea $\rho \equiv \bar{\rho}$ è una ellisse nel piano (x, y) centrata nell'origine e di semiassi $a = c \cosh \bar{\rho}$, $b = c \sinh \bar{\rho}$ lungo x ed y . Viceversa, se vogliamo che una linea $\rho \equiv \bar{\rho}$ nel sistema di coordinate (5.5) coincida con un ellisse centrata nell'origine e di semiassi a e b (con $a \geq b$) lungo x ed y assegnati, allora dobbiamo scegliere c ed $\bar{\rho}$ al modo seguente:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad \bar{\rho} = \frac{1}{2} \log \frac{a+b}{a-b}, \quad (5.6)$$

c deve quindi essere la semidistanza focale e $\cosh \bar{\rho} = a/c$, $\sinh \bar{\rho} = b/c$.

L'inversione del cambiamento di coordinate (5.5) è ottenuta considerando i quadrati delle due coordinate:

$$\begin{aligned} \cosh 2\rho + \cos 2\theta + \cosh 2\rho \cos 2\theta &= \frac{4}{c^2} x^2 - 1 \\ \cosh 2\rho + \cos 2\theta - \cosh 2\rho \cos 2\theta &= \frac{4}{c^2} y^2 + 1 \end{aligned}$$

da cui segue il sistema lineare in $\cosh 2\rho$, $\cos 2\theta$:

$$\begin{cases} \cosh 2\rho + \cos 2\theta = \frac{2}{c^2} (x^2 + y^2) = \mu^2 \geq 0 \\ \cosh 2\rho \cos 2\theta = \frac{2}{c^2} (x^2 - y^2) - 1 = \nu \end{cases}$$

in cui il segno di ν non è definito. Risolvendo la seconda equazione per $\cos 2\theta = \nu / \cosh 2\rho$, ricaviamo l'equazione di secondo grado in $\cosh 2\rho$:

$$\cosh^2 2\rho - \mu^2 \cosh 2\rho + \nu = 0,$$

che ha soluzione:

$$\begin{aligned}\cosh 2\rho &= \frac{1}{2} [\mu^2 + \sqrt{\mu^4 - 4\nu}] \\ &= \frac{1}{c^2} [x^2 + y^2 + \sqrt{(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) + c^4}] ;\end{aligned}\quad (5.7)$$

ne segue per $\cos 2\theta$:

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \frac{1}{2} [\mu^2 - \sqrt{\mu^4 - 4\nu}] \\ &= \frac{1}{c^2} [x^2 + y^2 - \sqrt{(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) + c^4}] .\end{aligned}\quad (5.8)$$

Dalle formule di inversione (5.7, 5.8), ponendo $x = m \cos \gamma$, $y = m \sin \gamma$ e $m' = m/c$, otteniamo che $\exp(\rho) = m' + O(1/m')$, $\exp(-\rho) = 1/m' + O(1/m'^2)$ e $\cos 2\theta = \cos 2\gamma + O(1/m'^2)$ per $\mathbf{x} \rightarrow \infty$. Lo jacobiano del cambiamento di coordinate (5.5) si scrive:

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \theta)} = \frac{c^2}{2} (\cosh 2\rho - \cos 2\theta) , \quad (5.9)$$

che è sempre positivo, annullandosi solo nei fuochi ($\rho = 0$ e $\theta = 0$ o $\theta = \pi$). Il Laplaciano piano si scrive nelle nuove coordinate:

$$\nabla^2 = \partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2 = \frac{1}{J} (\partial_{\rho\rho}^2 + \partial_{\theta\theta}^2) . \quad (5.10)$$

- ◊ **Esercizio:** Verificare le espressioni dello jacobiano (5.9) e dell'operatore di Laplace (5.10).

Utilizzando l'espressione (5.10) dell'operatore di Laplace, verifichiamo subito che la funzione $f(\rho, \theta) = \exp(-\rho)(A \cos \theta + B \sin \theta)$ è armonica. Poiché la funzione di corrente ψ_∞ di un flusso uniforme con velocità $\mathbf{u}_\infty = u_\infty(\cos \alpha, \sin \alpha)$ si scrive nelle nuove coordinate come $\psi_\infty(\rho, \theta) = \mathbf{u}_\infty^\perp \cdot \mathbf{x}(\rho, \theta) = cu_\infty(-\sin \alpha \cosh \rho \cos \theta + \cos \alpha \sinh \rho \sin \theta)$. Ne segue che, se imponiamo $\exp(-\bar{\rho})A - cu_\infty \sin \alpha \cosh \bar{\rho} = 0$ e $\exp(-\bar{\rho})B + cu_\infty \cos \alpha \sinh \bar{\rho} = 0$, allora la somma $\psi_\infty + f$ è la funzione di corrente del flusso attorno ad una ellisse investita da una corrente ad incidenza α . Da queste condizioni otteniamo:

$$\begin{aligned}\frac{\psi(\rho, \theta)}{u_\infty \sqrt{a+b}} &= \frac{e^{-\rho}}{\sqrt{1-\lambda}} (\sin \alpha \cos \theta - \lambda \cos \alpha \sin \theta) + \\ &\quad + \sqrt{1-\lambda} (-\sin \alpha \cosh \rho \cos \theta + \cos \alpha \sinh \rho \sin \theta) ,\end{aligned}\quad (5.11)$$

avendo utilizzato il rapporto degli assi $\lambda = b/a < 1$.

Cerchiamo i punti di ristagno, calcolando la componente tangente della velocità:

$$\partial_\nu \psi \propto (\lambda \cos \theta \partial_x \rho + \sin \theta \partial_y \rho) \partial_\rho \psi + (\lambda \cos \theta \partial_x \theta + \sin \theta \partial_y \theta) \partial_\theta \psi = 0$$

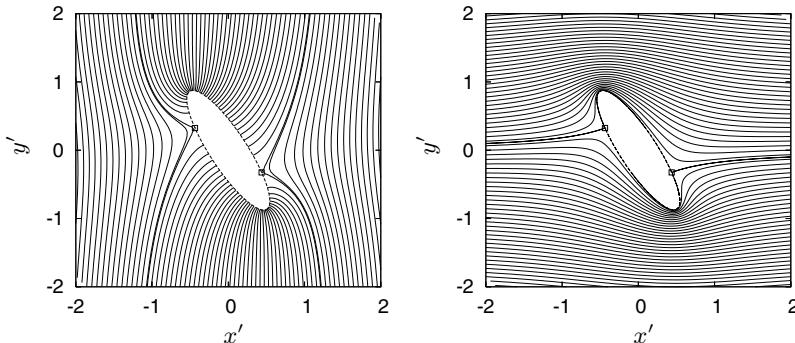


Figura 5.2. Linee isopotenziale (a) e di corrente (b) per flusso attorno ad una ellisse investita da una corrente con incidenza $\alpha = 60^\circ$. Lo spazio è ruotato di 60° per allineare la corrente asintotica all'asse reale e le coordinate nel nuovo riferimento sono denotate con (x', y') . I punti di ristagno sono indicati con quadratini e sono tracciate anche le linee di livello passanti per tali punti. Perché nei punti di ristagno le linee isopotenziale non sono normali al corpo e le linee di corrente non sono tangenti, come in tutti gli altri punti?

che per $\rho = \bar{\rho}$, valutando i due coefficienti:

$$\begin{aligned} \lambda \cos \theta \partial_x \rho + \sin \theta \partial_y \rho &= \frac{a}{2J} [(1 + \lambda^2) - (1 - \lambda^2) \cos 2\theta] > 0 \\ \lambda \cos \theta \partial_x \theta + \sin \theta \partial_y \theta &\equiv 0, \end{aligned}$$

implica $\partial_\rho \psi(\bar{\rho}, \theta) = 0$ la quale ha soluzioni $\theta = \alpha$ e $\theta = \alpha + \pi$.

- ◊ **Esercizio:** Utilizzando l'equazione di Bernoulli (2.49), dedurre l'andamento della pressione sulla frontiera dell'ellisse e quindi la forza \mathbf{F} agente sul corpo.

Infine, il potenziale di velocità φ segue dalla riscrittura in coordinate ellittiche (5.5) della relazione $-\nabla^\perp \psi = \nabla \varphi$, che implica $\partial_\rho \varphi = \partial_\theta \psi$ e $\partial_\theta \varphi = -\partial_\rho \psi$. Da queste e dalla funzione di corrente (5.11) deduciamo quindi:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(\rho, \theta)}{u_\infty \sqrt{a+b}} &= \frac{e^{-\rho}}{\sqrt{1-\lambda}} (\sin \alpha \sin \theta + \lambda \cos \alpha \cos \theta) + \\ &+ \sqrt{1-\lambda} (\sin \alpha \sinh \rho \sin \theta + \cos \alpha \cosh \rho \cos \theta). \end{aligned} \quad (5.12)$$

In Fig. 5.2 sono disegnate le linee isopotenziale e di corrente per una ellisse investita da una corrente con incidenza $\alpha = 60^\circ$.

Sottolineiamo, in conclusione, che per $b \rightarrow 0^+$ la soluzione descritta in questo paragrafo converge a quella per una lastra piana investita da una corrente alla medesima incidenza.

5.2 Flussi in canali bidimensionali

Consideriamo un canale (Fig. 5.3) costituito da due piani paralleli, posti a distanza h , e, nella regione dello spazio compresa tra questi, un flusso stazionario piano di un fluido a densità costante (ρ). Il piano superiore si muova di moto traslatorio uniforme rispetto all'inferiore con velocità di modulo U . Scegliamo la coordinata x parallela alla giacitura dei due piani e diretta nel verso in cui trasla il piano superiore e chiamiamo, al solito, con u la componente x e con v la componente y (ortogonale alla giacitura) del vettore velocità. Assumiamo, infine, che il profilo delle componenti lungo x della velocità ($u(x, y)$ per $0 \leq y \leq h$) sia indipendente dalla posizione x .

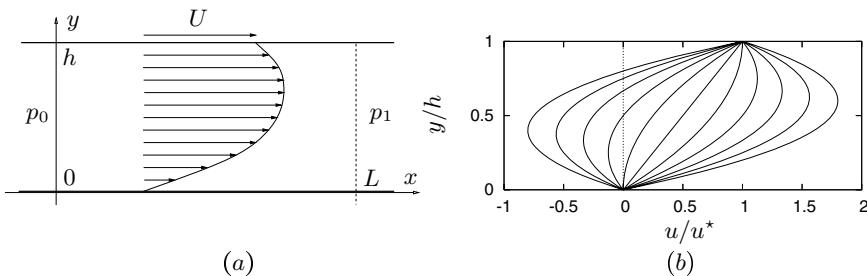


Figura 5.3. In (a): schema del dominio fluido per un flusso in un canale piano. La parete superiore trasla rispetto alla inferiore a velocità U ed è presente una differenza di pressione $p_1 - p_0$ tra due sezioni del canale distanti L . È disegnato anche un profilo di velocità. In (b): profili di velocità adimensionali (5.13) per $\text{Re} = 1$ e $\tilde{p}' = -10, -8, \dots, +10$ (da sinistra a destra).

Essendo per ipotesi $\partial_x u \equiv 0$, l'equazione di continuità si riduce a $\partial_y v = 0$ ed allora, imponendo le condizioni al contorno $v(x, 0) = v(x, h) = 0$, si ha che la componente v è nulla in tutto il campo. Inoltre, la componente y della quantità di moto si riduce a $\partial_y p = 0$ e quindi la pressione è costante in y , dipendendo solo da x (cfr. Fig. 5.3, chiameremo con p' la dp/dx). La componente x della quantità di moto si scrive:

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = p' .$$

In questa relazione il primo membro è una funzione della sola y , mentre il secondo è una funzione della sola x . È evidente allora che entrambe le quantità dovranno essere costanti: in particolare, il gradiente di pressione è costante in tutto il condotto e la pressione è una funzione lineare dell'ascissa. Nel seguito, considereremo il gradiente adimensionale: $\tilde{p}' = \rho h^3 (p_1 - p_0) / (L \mu^2)$. Integrando due volte la relazione precedente ed imponendo le condizioni a contorno

$u(0) = 0$, $u(h) = U$ ed adimensionalizzando le lunghezze con h ed i tempi con h^2/ν ($u^* = \nu/h$), otteniamo:

$$\frac{u}{u^*}(\tilde{y}) = \text{Re } \tilde{y} - \frac{\tilde{p}'}{2} \tilde{y}(1 - \tilde{y}), \quad (5.13)$$

essendo $\tilde{y} = y/h$ la coordinata normale adimensionale e $\text{Re} = \rho h U / \mu$ il *numero di Reynolds* (rapporto tra le forze inerziali $\rho U^2/h$ e viscose $\mu U/h^2$) del flusso. Due sottoclassi di questo problema hanno una importanza particolare. La prima è quella nella quale si ipotizza nullo il gradiente di pressione ed il flusso è generato unicamente dallo spostamento della parete superiore: questo flusso è detto di *Couette*, $u/u^* = \text{Re } \tilde{y}$ lineare in y . La seconda sottoclasse di flussi è quella nella quale la parete superiore è ferma ed il fluido si muove solo per effetto del campo di pressione: questo flusso è chiamato di *Poiseuille*, $u/u^* = (-\tilde{p}')\tilde{y}(1 - \tilde{y})/2$ quadratica in y .

Dalla soluzione (5.13) ricaviamo la portata Q di fluido (adimensionale):

$$\frac{Q}{hu^*} = \frac{1}{12} (6\text{Re} - \tilde{p}').$$

Osserviamo che questa relazione è importante perché chiarisce che per $\tilde{p}' < 6\text{Re}$ la portata è positiva, mentre per \tilde{p}' maggiori di tale soglia la portata diviene negativa, nonostante l'orientazione positiva di U . Lo sforzo τ_w (adimensionale) sulla parente inferiore è:

$$\frac{\tau_w}{\rho u^{*2}} = 1 - \frac{\tilde{p}'}{2\text{Re}},$$

se $\tilde{p}' < 2\text{Re}$ è positivo, mentre diviene negativo per valori superiori del gradiente di pressione.

- ◊ **Esercizio:** Calcolare il campo di vorticità della soluzione (5.13) e discutere i casi a $\text{Re} = 0$, $\tilde{p}' \neq 0$ e $\text{Re} > 0$, $\tilde{p}' = 0$.

Un importante tipo di flusso alla Couette è quello che si instaura tra due cilindri coassiali di raggi R_1 ed R_2 ($R_1 < R_2$), rotanti con un velocità angolari Ω_1 ed Ω_2 in generale differenti. Ipotizzando flusso stazionario e puramente azimutale, dalla equazione di continuità in coordinate cilindriche (z assiale, $r \in (R_1, R_2)$ radiale e $\theta \in [0, 2\pi]$ azimutale) con $u_z = u_r = 0$: $[\partial_r(ru_r)]/r + (\partial_\theta u_\theta)/r + \partial_z u_z = 0$, vedi equazione (5.23), segue che $u_\theta = u_\theta(r)$. L'equazione della quantità di moto lungo r (5.26) è specializzata nella relazione seguente:

$$u_\theta^2/r = \partial_r p / \rho, \quad (5.14)$$

da cui, essendo u_θ funzione della sola r , questo vale anche per p . L'equazione di bilancio della quantità di moto lungo θ (5.26) diviene:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r u_\theta) \right] = 0,$$

che, integrata due volte con le condizioni al contorno $u_\theta(R_1) = R_1 \Omega_1$ e $u_\theta(R_2) = R_2 \Omega_2$, consente di calcolare la velocità azimutale. Assumendo $\Omega_2 \neq 0$:

$$\tilde{u}_\theta = \frac{u_\theta}{R_2 \Omega_2}(\tilde{r}) = \frac{1}{1 - \chi^2} \left[(1 - \chi^2 \omega) \tilde{r} - \chi^2 (1 - \omega) \frac{1}{\tilde{r}} \right], \quad (5.15)$$

in cui $\chi = R_1/R_2 < 1$, $\omega = \Omega_1/\Omega_2$ e $\tilde{r} = r/R_2 \in (\chi, 1)$. Ponendo $a = (1 - \chi^2 \omega)/(1 - \chi^2)$, $b = \chi^2 (1 - \omega)/(1 - \chi^2)$ e nota u_θ dall'equazione (5.15), l'equazione (5.14) consente di calcolare \tilde{p} :

$$\tilde{p} = \frac{p}{\rho R_2^2 \Omega_2^2 / 2}(\tilde{r}) = - \left[a^2 (1 - \tilde{r}^2) + 4ab \log \tilde{r} + b^2 \left(\frac{1}{\tilde{r}^2} - 1 \right) \right], \quad (5.16)$$

in cui abbiamo convenzionalmente fissato $p(1) = 0$. I profili di velocità e pressione (5.15, 5.16) sono diagrammati in Fig. 5.4 per $\chi = 1/4$ ed un ampio intervallo di variazione del rapporto Ω_1/Ω_2 .

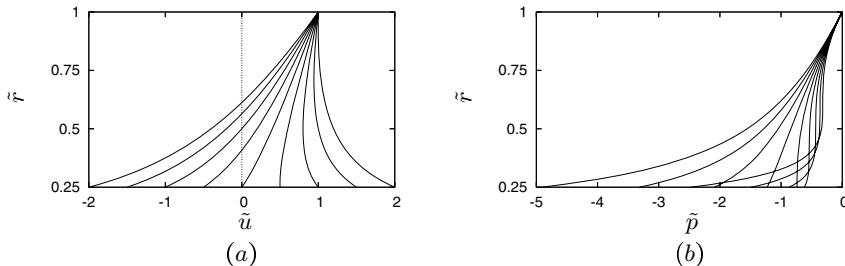


Figura 5.4. Profili di velocità (a) e di pressione (b) per il flusso alla Couette tra due cilindri con $\chi = 1/4$ e (da sinistra a destra) $\omega = -8, -6, \dots, +8$.

5.3 Misura del coefficiente di viscosità di un liquido

Uno strumento adatto alla misurazione sperimentale del coefficiente di viscosità per un liquido è costituito da un tubo a sezione circolare di raggio R entro cui è posto un secondo tubo a sezione circolare di raggio kR (con $k < 1$, ovviamente) coassiale. L'intercapedine tra i due tubi è riempita del liquido di cui si vuole misurare il coefficiente di viscosità ed il tubo esterno è posto in rotazione con velocità angolare Ω . Dalla misura del momento occorrente per mantenere fermo il cilindro più interno si risale al coefficiente di viscosità del

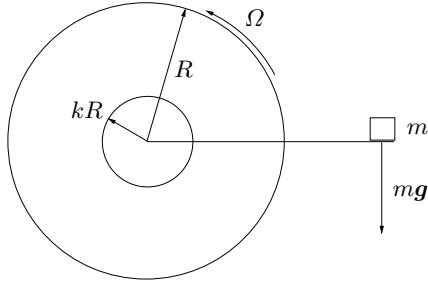


Figura 5.5. Schema di viscosimetro: la regione toroidale compresa tra due cilindri coassiali viene riempita del liquido di cui si desidera misurare il coefficiente di viscosità. Il cilindro esterno, di raggio R viene quindi posto in rotazione a velocità angolare costante Ω , mentre il cilindro interno viene tenuto fisso mediante un momento esercitato da una leva su cui sono applicati dei pesi noti. Dall'entità di questo momento si risale al coefficiente di viscosità del liquido.

liquido. Tale strumento prende il nome di *viscosimetro*, vedi schema in Fig. 5.5.

Per semplificare il calcolo del momento sul cilindro più piccolo conviene ri scrivere lo sforzo $\tau_{r\theta}$, esercitato dal fluido esterno al cilindro di raggio r su quello all'interno in direzione θ , in coordinate cilindriche. Partendo dall'espressione cartesiana: $\tau_{r\theta} = \tau_{ij} r_j \theta_i$, in cui $\mathbf{r} = r_j \mathbf{e}_j$ e $\boldsymbol{\theta} = \theta_i \mathbf{e}_i$, e, ricordando l'equazione costitutiva per flussi isocori di fluidi Newtoniani: $\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + \mu (\partial_j u_i + \partial_i u_j)$, otteniamo:

$$\begin{aligned}\tau_{r\theta} &= \mu (\boldsymbol{\theta} \cdot \partial_r \mathbf{u} + \mathbf{r} \cdot \frac{1}{r} \partial_\theta \mathbf{u}) \\ &= \mu \left(\partial_r u_\theta - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \partial_\theta u_r \right) \\ &= \mu \left[r \partial_r \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \partial_\theta u_r \right],\end{aligned}\quad (5.17)$$

in cui sono state utilizzate le (5.20, 5.21) del paragrafo 5.4 ed il fatto che:

$$\begin{aligned}\theta_i \partial_i &= -\sin \theta \partial_x + \cos \theta \partial_y \\ &= -\sin \theta (\partial_x r \partial_r + \partial_x \theta \partial_\theta) + \cos \theta (\partial_y r \partial_r + \partial_y \theta \partial_\theta) = \frac{1}{r} \partial_\theta.\end{aligned}$$

Ne segue per il momento esercitato dal fluido sul cilindro interno è dato da:

$$\mathcal{M} = kR \int_0^L dz \int_0^{2\pi kR} ds \tau_{r\theta}(kR, \theta, z) = k^2 R^2 \int_0^L dz \int_0^{2\pi} d\theta \tau_{r\theta}(kR, \theta, z). \quad (5.18)$$

Allo scopo di rendere possibile una trattazione analitica, introduciamo le ipotesi semplificative di flusso stazionario ($\partial_t \mathbf{u} = 0$), puramente azimutale

$(u_r = u_z = 0)$ ed assialsimmetrico $(u_\theta = u_\theta(r, z))$ e $p = p(r, z)$). Specializzando l'equazione (5.15) abbiamo:

$$u_\theta = \frac{\Omega R}{1 - k^2} \left(\frac{r}{R} - k^2 \frac{R}{r} \right) .$$

Sostituendo nella (5.18), in cui è stata considerata la (5.17), otteniamo l'espressione del momento:

$$\boxed{\mathcal{M} = 4\pi \Omega R^2 L \frac{k^2}{1 - k^2} \mu} \quad (5.19)$$

che è necessario esercitare sul cilindro più piccolo perché rimanga in quiete. Tale momento viene esercitato (cfr. Fig. 5.5) tramite una leva il cui baricentro è sull'asse dei due cilindri, ad una estremità della quale è posta una massa m nota. Dall'espressione (5.19) di \mathcal{M} è allora possibile ricavare il coefficiente di viscosità μ del liquido.

5.4 Flusso all'interno di un tubo a sezione circolare

Si vuole determinare il campo di velocità stazionario esistente all'interno di un tratto di lunghezza L di tubo a sezione circolare ai cui estremi è imposta una differenza di pressione. Ipotizzato il campo di velocità assialsimmetrico: in ogni punto del mantello di un cilindro a sezione circolare e coassiale con il tubo si misura la stessa velocità \mathbf{u} parallela all'asse del tubo. Si utilizza un sistema di coordinate cilindrico con coordinata assiale z (versore \mathbf{e}_z) e nel piano (x, y) (\mathbf{e}_x versore dell'asse x e \mathbf{e}_y versore dell'asse y) ortogonale all'asse z si introduce una coordinata radiale r (versore \mathbf{r}) ed una azimutale θ (versore $\boldsymbol{\theta}$). Risulta ovviamente:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}(\theta) = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

per i quali valgono le seguenti formule di derivazione:

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\theta} = \boldsymbol{\theta}, \quad \frac{d\boldsymbol{\theta}}{d\theta} = -\mathbf{r}. \quad (5.20)$$

Per poter scrivere l'equazione di continuità $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ occorre valutare l'espressione dell'operatore ∇ in coordinate cilindriche. Poiché valgono le:

$$\begin{aligned} \partial_x r &= \frac{x}{r} = \cos \theta & \partial_y r &= \frac{y}{r} = \sin \theta \\ \partial_x \theta &= -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin \theta}{r} & \partial_y \theta &= \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r} \end{aligned} \quad (5.21)$$

otteniamo:

$$\begin{aligned}
 \nabla &= \mathbf{e}_x \partial_x + \mathbf{e}_y \partial_y + \mathbf{e}_z \partial_z \\
 &= (\cos \theta \mathbf{r} - \sin \theta \boldsymbol{\theta}) (\partial_x r \partial_r + \partial_x \theta \partial_\theta) + \\
 &\quad + (\sin \theta \mathbf{r} + \cos \theta \boldsymbol{\theta}) (\partial_y r \partial_r + \partial_y \theta \partial_\theta) + \mathbf{e}_z \partial_z \\
 &= (\cos \theta \mathbf{r} - \sin \theta \boldsymbol{\theta}) \left(\cos \theta \partial_r - \frac{\sin \theta}{r} \partial_\theta \right) + \\
 &\quad + (\sin \theta \mathbf{r} + \cos \theta \boldsymbol{\theta}) \left(\sin \theta \partial_r + \frac{\cos \theta}{r} \partial_\theta \right) + \mathbf{e}_z \partial_z \\
 &= \mathbf{r} \partial_r + \frac{\theta}{r} \partial_\theta + \mathbf{e}_z \partial_z . \tag{5.22}
 \end{aligned}$$

Utilizzando la (5.22) e le (5.20), si ha per la divergenza di \mathbf{u} :

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{u} &= \left(\mathbf{r} \partial_r + \frac{\theta}{r} \partial_\theta + \mathbf{e}_z \partial_z \right) \cdot (u_r \mathbf{r} + u_\theta \boldsymbol{\theta} + u_z \mathbf{e}_z) \\
 &= \partial_r u_r + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial_\theta u_\theta}{r} + \partial_z u_z \\
 &= \frac{1}{r} \partial_r (r u_r) + \frac{\partial_\theta u_\theta}{r} + \partial_z u_z ,
 \end{aligned}$$

da cui segue l'equazione di continuità:

$$\boxed{\frac{1}{r} \partial_r (r u_r) + \frac{\partial_\theta u_\theta}{r} + \partial_z u_z = 0} \tag{5.23}$$

- ◊ **Esercizio:** Assumendo le tre componenti di velocità della forma seguente:

$$\begin{cases} u_r(r, \theta, z) = r^n [a(z) \cos n\theta + b(z) \sin n\theta] \\ u_\theta(r, \theta, z) = r^n [c(z) \cos n\theta + d(z) \sin n\theta] \\ u_z(r, \theta, z) = r^{n-1} [e(z) \cos n\theta + f(z) \sin n\theta] , \end{cases}$$

in cui n è un numero naturale, determinare le relazioni che devono sussistere tra le funzioni di z (a, b, c, d, e ed f) affinché tale campo di velocità verifichi l'equazione di conservazione della massa (5.23).

Per scrivere le equazioni di Navier-Stokes in coordinate cilindriche occorre valutare i termini convettivo e diffusivo. Per il primo si ha, ricordando l'espressione in coordinate cilindriche dell'operatore ∇ (5.22) e le (5.20):

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} &= (u_r \mathbf{r} + u_\theta \boldsymbol{\theta} + u_z \mathbf{e}_z) \cdot (\mathbf{r} \partial_r + \frac{\boldsymbol{\theta}}{r} \partial_\theta + \mathbf{e}_z \partial_z) (u_r \mathbf{r} + u_\theta \boldsymbol{\theta} + u_z \mathbf{e}_z) \\
&= \left(u_r \partial_r + \frac{u_\theta}{r} \partial_\theta + u_z \partial_z \right) (u_r \mathbf{r} + u_\theta \boldsymbol{\theta} + u_z \mathbf{e}_z) \\
&= \left(u_r \partial_r u_r + \frac{u_\theta}{r} \partial_\theta u_r - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z \partial_z u_r \right) \mathbf{r} + \\
&\quad + \left(u_r \partial_r u_\theta + \frac{u_\theta}{r} \partial_\theta u_\theta + \frac{u_r u_\theta}{r} + u_z \partial_z u_\theta \right) \boldsymbol{\theta} + \\
&\quad + \left(u_r \partial_r u_z + \frac{u_\theta}{r} \partial_\theta u_z + u_z \partial_z u_z \right) \mathbf{e}_z,
\end{aligned} \tag{5.24}$$

mentre, ancora dalle (5.22) e le (5.20) segue per il Laplaciano:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 &= (\mathbf{r} \partial_r + \frac{\boldsymbol{\theta}}{r} \partial_\theta + \mathbf{e}_z \partial_z) \cdot (\mathbf{r} \partial_r + \frac{\boldsymbol{\theta}}{r} \partial_\theta + \mathbf{e}_z \partial_z) \\
&= \partial_{rr}^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta}^2 + \partial_{zz}^2
\end{aligned}$$

che, applicato ad \mathbf{u} fornisce:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \mathbf{u} &= \left(\partial_{rr}^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta}^2 + \partial_{zz}^2 \right) (u_r \mathbf{r} + u_\theta \boldsymbol{\theta} + u_z \mathbf{e}_z) \\
&= \left(\partial_{rr}^2 u_r + \frac{\partial_r u_r}{r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\partial_{\theta\theta}^2 u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \partial_\theta u_\theta + \partial_{zz}^2 u_r \right) \mathbf{e}_r + \\
&\quad + \left(\partial_{rr}^2 u_\theta + \frac{\partial_r u_\theta}{r} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{\partial_{\theta\theta}^2 u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \partial_\theta u_r + \partial_{zz}^2 u_\theta \right) \boldsymbol{\theta} + \\
&\quad + \left(\partial_{rr}^2 u_z + \frac{1}{r} \partial_r u_z + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta}^2 u_z + \partial_{zz}^2 u_z \right) \mathbf{e}_z \\
&= \left\{ \partial_r \left[\frac{1}{r} \partial_r (r u_r) \right] + \frac{\partial_{\theta\theta}^2 u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \partial_\theta u_\theta + \partial_{zz}^2 u_r \right\} \mathbf{e}_r + \\
&\quad + \left\{ \partial_r \left[\frac{1}{r} \partial_r (r u_\theta) \right] + \frac{\partial_{\theta\theta}^2 u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \partial_\theta u_r + \partial_{zz}^2 u_\theta \right\} \boldsymbol{\theta} + \\
&\quad + \left[\frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r u_z) + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta}^2 u_z + \partial_{zz}^2 u_z \right] \mathbf{e}_z.
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Le equazioni di Navier-Stokes in presenza di un campo gravitazionale possono essere scritte utilizzando una pressione modificata $\tilde{p} := p/\rho + gh$, in cui si aggiunge alla pressione statica p/ρ il contributo del potenziale gravitazionale gh , se g è l'accelerazione di gravità ed h è la quota:

$$h(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ z \end{pmatrix} \cdot \mathbf{z}.$$

Qui z è il versore lungo cui agisce g scritto nel sistema di coordinate (x, y, z) del tubo. Sostituendo le espressioni (5.24, 5.25) nelle equazioni di Navier-Stokes e ricordando l'espressione (5.22) dell'operatore ∇ si ottengono:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u_r + u_r \partial_r u_r + \frac{u_\theta}{r} \partial_\theta u_r - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z \partial_z u_r = \\ = -\partial_r \tilde{p} + \nu \left\{ \partial_r \left[\frac{1}{r} \partial_r(r u_r) \right] + \frac{\partial_{\theta\theta}^2 u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \partial_\theta u_\theta + \partial_{zz}^2 u_r \right\} \\ \\ \partial_t u_\theta + u_r \partial_r u_\theta + \frac{u_\theta}{r} \partial_\theta u_\theta + \frac{u_r u_\theta}{r} + u_z \partial_z u_\theta = \\ = -\frac{\partial_\theta \tilde{p}}{r} + \nu \left\{ \partial_r \left[\frac{1}{r} \partial_r(r u_\theta) \right] + \frac{\partial_{\theta\theta}^2 u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \partial_\theta u_r + \partial_{zz}^2 u_\theta \right\} \\ \\ \partial_t u_z + u_r \partial_r u_z + \frac{u_\theta}{r} \partial_\theta u_z + u_z \partial_z u_z = \\ = -\partial_z \tilde{p} + \nu \left[\frac{1}{r} \partial_r(r \partial_r u_z) + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta}^2 u_z + \partial_{zz}^2 u_z \right], \end{array} \right. \quad (5.26)$$

ovvero le equazioni di Navier-Stokes *in coordinate cilindriche*. Le equazioni (5.23) e (5.26) devono essere integrate nel dominio $(0, R) \times [0, 2\pi) \times (0, L)$ dello spazio (r, θ, z) , assegnando opportune condizioni iniziali ed al contorno.

Nella presente trattazione, allo scopo di semplificare le equazioni e consentirne una trattazione analitica, si introducono importanti ipotesi semplificative. Assumiamo che il flusso risulti stazionario ($\partial_t \mathbf{u} = 0$), puramente assiale ($u_r = u_\theta = 0$) ed assialsimmetrico ($u_z = u_z(r, z)$). Dall'equazione di continuità (5.23) si ricava allora:

$$u_z = u_z(r), \quad (5.27)$$

mentre, sostituendo nelle equazioni radiale ed azimutale in (5.26) le $u_r = u_\theta = 0$ e la (5.27), si ottiene:

$$\tilde{p} = \tilde{p}(z). \quad (5.28)$$

Sostituendo le relazioni (5.27, 5.28) nell'equazione (5.26) assiale si può infine scrivere:

$$\frac{d\tilde{p}}{dz} = \frac{\nu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_z}{dr} \right), \quad (5.29)$$

in cui il primo membro è funzione solo di z (5.28), mentre il secondo è funzione solo di r (5.27). L'unica possibilità per avere l'uguaglianza (5.29) è che primo e secondo membro risultino costanti, ovvero per la pressione modificata:

$$\frac{d\tilde{p}}{dz} = A \Rightarrow \tilde{p}(z) = Az + B,$$

in cui, fissata a \tilde{p}_L la pressione modificata in uscita ed a \tilde{p}_0 quella in ingresso, si ha:

$$\tilde{p}(z) = \underbrace{\frac{\tilde{p}_L - \tilde{p}_0}{L}}_A z + \tilde{p}_0 . \quad (5.30)$$

Ipotizzando il fluido viscoso ed integrando una prima volta l'equazione (5.29) si ottiene:

$$\frac{du_z}{dr} = \frac{A}{2\nu} r + C ,$$

nella quale la costante C deve essere nulla, altrimenti l'equazione (5.29) non può essere soddisfatta. Ne segue, integrando una seconda volta e considerando la condizione al contorno $u_z(R) = 0$:

$$u_z(r) = \frac{R^2}{4\nu L} (\tilde{p}_0 - \tilde{p}_L) \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

(5.31)

il profilo di velocità risulta essere un paraboloide di rotazione con valore massimo (raggiunto sull'asse del tubo) proporzionale alla caduta di pressione $\tilde{p}_0 - \tilde{p}_L$ tra la sezione di ingresso ($z = 0$) e quella di uscita ($z = L$). La forma (5.31) del campo di velocità all'interno del tubo fu trovata sperimentalmente da Hagen e Poiseuille nel 1849. La formalizzazione matematica del problema fu poi derivata da Neumann dieci anni più tardi.

- ◊ **Esercizio:** Discutere il significato della equazione (5.29) nel caso di fluido non viscoso. Tale equazione fornisce qualche informazione sul profilo di velocità?
- ◊ **Esercizio:** Calcolare la portata volumetrica che fluisce nel tubo.

5.5 Flusso attorno ad una sfera

In questo paragrafo verrà ricavata una soluzione classica delle equazioni di Navier-Stokes per il flusso di un fluido viscoso attorno ad una sfera, nelle ipotesi che il flusso sia assialsimmetrico e che il numero di Reynolds sia molto piccolo. In tal caso il termine dominante nelle equazioni è quello diffusivo e l'accelerazione può essere trascurata rispetto a questo. In tali condizioni il flusso si definisce *di Stokes* e nella letteratura anglosassone si parla di *creeping flow*. Il primo passo è quello di ricavare le equazioni di Navier-Stokes in coordinate sferiche.

5.5.1 Equazioni di Navier-Stokes in coordinate sferiche

Introdotto il sistema di coordinate sferico:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (5.32)$$

in cui $\theta \in [0, \pi]$ (latitudine), $\phi \in [0, 2\pi]$ (longitudine) ed, ovviamente, $r \geq 0$. Si definiscono i tre versori coordinati:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\phi} = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.33)$$

che implicano:

$$\begin{aligned} \partial_\theta \mathbf{r} &= \boldsymbol{\theta} & \partial_\phi \mathbf{r} &= \sin \theta \ \boldsymbol{\phi} \\ \partial_\theta \boldsymbol{\theta} &= -\mathbf{r} & \partial_\phi \boldsymbol{\theta} &= \cos \theta \ \boldsymbol{\phi} \\ \partial_\theta \boldsymbol{\phi} &= 0 & \partial_\phi \boldsymbol{\phi} &= -\sin \theta \ \mathbf{r} - \cos \theta \ \boldsymbol{\theta} \end{aligned} \quad (5.34)$$

Viceversa, i versori \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y ed \mathbf{e}_z si scrivono in funzione dei versori \mathbf{r} , $\boldsymbol{\theta}$ e $\boldsymbol{\phi}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x &= \sin \theta \ \cos \phi \ \mathbf{r} + \cos \theta \ \cos \phi \ \boldsymbol{\theta} - \sin \phi \ \boldsymbol{\phi} \\ \mathbf{e}_y &= \sin \theta \ \sin \phi \ \mathbf{r} + \cos \theta \ \sin \phi \ \boldsymbol{\theta} + \cos \phi \ \boldsymbol{\phi} \\ \mathbf{e}_z &= \cos \theta \ \mathbf{r} - \sin \theta \ \boldsymbol{\theta}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Invertendo le (5.32) si ottiene:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arg \left(\sqrt{x^2 + y^2}, z \right), \quad \phi = \arg(y, x),$$

da cui possono essere calcolate le derivate:

$$\begin{aligned} \partial_x r &= \sin \theta \ \cos \phi & \partial_y r &= \sin \theta \ \sin \phi & \partial_z r &= \cos \theta \\ \partial_x \theta &= \frac{1}{r} \ \cos \theta \ \cos \phi & \partial_y \theta &= \frac{1}{r} \ \cos \theta \ \sin \phi & \partial_z \theta &= -\frac{1}{r} \ \sin \theta \\ \partial_x \phi &= -\frac{1}{r} \ \frac{\sin \phi}{\sin \theta} & \partial_y \phi &= \frac{1}{r} \ \frac{\cos \phi}{\sin \theta} & \partial_z \phi &= 0. \end{aligned} \quad (5.36)$$

L'operatore ∇ può essere espresso in coordinate sferiche utilizzando i risultati (5.35):

$$\begin{aligned} \nabla &= \mathbf{e}_x (\partial_x r \ \partial_r + \partial_x \theta \ \partial_\theta + \partial_x \phi \ \partial_\phi) + \mathbf{e}_y (\partial_y r \ \partial_r + \partial_y \theta \ \partial_\theta + \partial_y \phi \ \partial_\phi) + \\ &\quad + \mathbf{e}_z (\partial_z r \ \partial_r + \partial_z \theta \ \partial_\theta + \partial_z \phi \ \partial_\phi) \\ &= (\sin \theta \ \cos \phi \ \mathbf{r} + \cos \theta \ \cos \phi \ \boldsymbol{\theta} - \sin \phi \ \boldsymbol{\phi}) \times \\ &\quad \times \left(\sin \theta \ \cos \phi \ \partial_r + \frac{1}{r} \ \cos \theta \ \cos \phi \ \partial_\theta - \frac{1}{r} \ \frac{\sin \phi}{\sin \theta} \ \partial_\phi \right) + \\ &\quad + (\sin \theta \ \sin \phi \ \mathbf{r} + \cos \theta \ \sin \phi \ \boldsymbol{\theta} + \cos \phi \ \boldsymbol{\phi}) \times \\ &\quad \times \left(\sin \theta \ \sin \phi \ \partial_r + \frac{1}{r} \ \cos \theta \ \sin \phi \ \partial_\theta + \frac{1}{r} \ \frac{\cos \phi}{\sin \theta} \ \partial_\phi \right) + \\ &\quad + (\cos \theta \ \mathbf{r} - \sin \theta \ \boldsymbol{\theta}) \left(\cos \theta \ \partial_r - \frac{1}{r} \ \sin \theta \ \partial_\theta \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{r} \left[(\sin^2 \theta \cos^2 \phi + \sin^2 \theta \sin^2 \phi + \cos^2 \theta) \partial_r + \right. \\
&\quad + (\sin \theta \cos \theta \cos^2 \phi + \sin \theta \cos \theta \sin^2 \phi - \sin \theta \cos \theta) \frac{\partial_\theta}{r} + \\
&\quad \left. + (-\sin \phi \cos \phi + \sin \phi \cos \phi) \frac{\partial_\phi}{r} \right] + \\
&+ \boldsymbol{\theta} \left[(\sin \theta \cos \theta \cos^2 \phi + \sin \theta \cos \theta \sin^2 \phi - \sin \theta \cos \theta) \partial_r + \right. \\
&\quad + (\cos^2 \theta \cos^2 \phi + \cos^2 \theta \sin^2 \phi + \sin^2 \theta) \frac{\partial_\theta}{r} + \\
&\quad \left. + \left(-\frac{\sin \phi \cos \phi}{\tan \theta} + \frac{\sin \phi \cos \phi}{\tan \theta} \right) \frac{\partial_\phi}{r} \right] + \\
&+ \boldsymbol{\phi} \left[(-\sin \theta \sin \phi \cos \phi + \sin \theta \sin \phi \cos \phi) \partial_r + \right. \\
&\quad + (-\cos \theta \sin \phi \cos \phi + \cos \theta \sin \phi \cos \phi) \frac{\partial_\theta}{r} + \\
&\quad \left. + \left(\frac{\sin^2 \phi}{\sin \theta} + \frac{\cos^2 \phi}{\sin \theta} \right) \frac{\partial_\phi}{r} \right],
\end{aligned}$$

da cui segue

$$\boxed{\nabla = \mathbf{r} \partial_r + \frac{\boldsymbol{\theta}}{r} \partial_\theta + \frac{\boldsymbol{\phi}}{r \sin \theta} \partial_\phi} \quad (5.37)$$

Ricordando le (5.34), ricaviamo la forma del Laplaciano tridimensionale nelle coordinate sferiche (5.32):

$$\begin{aligned}
\nabla^2 &= (\mathbf{r} \partial_r + \frac{\boldsymbol{\theta}}{r} \partial_\theta + \frac{\boldsymbol{\phi}}{r \sin \theta} \partial_\phi) \cdot (\mathbf{r} \partial_r + \frac{\boldsymbol{\theta}}{r} \partial_\theta + \frac{\boldsymbol{\phi}}{r \sin \theta} \partial_\phi) \\
&= \partial_{rr}^2 + \frac{\boldsymbol{\theta} \cdot \partial_\theta \mathbf{r}}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta}^2 + \frac{\boldsymbol{\theta} \cdot \partial_\theta \boldsymbol{\phi}}{r^2 \sin \theta} \partial_\phi + \\
&\quad + \frac{\boldsymbol{\phi} \cdot \partial_\phi \mathbf{r}}{r \sin \theta} \partial_r + \frac{\boldsymbol{\phi} \cdot \partial_\phi \boldsymbol{\theta}}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_{\phi\phi}^2 \\
&= \partial_{rr}^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta}^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_{\phi\phi}^2,
\end{aligned}$$

da cui segue:

$$\boxed{\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_{\phi\phi}^2} \quad (5.38)$$

L'equazione di continuità ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$) si scrive in coordinate sferiche:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{u} &= (\mathbf{r} \partial_r + \frac{\boldsymbol{\theta}}{r} \partial_\theta + \frac{\boldsymbol{\phi}}{r \sin \theta} \partial_\phi) \cdot (u_r \mathbf{r} + u_\theta \boldsymbol{\theta} + u_\phi \boldsymbol{\phi}) \\
&= \partial_r u_r + \frac{u_r}{r} \boldsymbol{\theta} \cdot \partial_\theta \mathbf{r} + \frac{\partial_\theta u_\theta}{r} + \frac{u_\phi}{r} \boldsymbol{\theta} \cdot \partial_\theta \boldsymbol{\phi} + \\
&\quad + \frac{u_r}{r \sin \theta} \boldsymbol{\phi} \cdot \partial_\phi \mathbf{r} + \frac{u_\theta}{r \sin \theta} \boldsymbol{\phi} \cdot \partial_\phi \boldsymbol{\theta} + \frac{\partial_\phi u_\phi}{r \sin \theta}
\end{aligned}$$

$$= \partial_r u_r + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial_\theta u_\theta}{r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} u_\theta + \frac{\partial_\phi u_\phi}{r \sin \theta},$$

dalla quale, raggruppando le derivate in r ed in θ , otteniamo:

$$\frac{1}{r^2} \partial_r(r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\theta(\sin \theta u_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi u_\phi = 0$$

(5.39)

Il termine convettivo dell'equazione di Navier-Stokes si scrive in coordinate sferiche:

$$\begin{aligned} & \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \\ &= (u_r \partial_r + \frac{u_\theta}{r} \partial_\theta + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \partial_\phi) (u_r \mathbf{r} + u_\theta \boldsymbol{\theta} + u_\phi \boldsymbol{\phi}) \\ &= (u_r \partial_r u_r + \frac{u_\theta}{r} \partial_\theta u_r - \frac{u_\theta^2}{r} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \partial_\phi u_r - \frac{u_\phi^2}{r}) \mathbf{r} + \\ &+ (u_r \partial_r u_\theta + \frac{u_r u_\theta}{r} + \frac{u_\theta}{r} \partial_\theta u_\theta + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \partial_\phi u_\theta - \frac{u_\phi^2}{r \tan \theta}) \boldsymbol{\theta} + \\ &+ (u_r \partial_r u_\phi + \frac{u_\theta u_\phi}{r} + \frac{u_r u_\phi}{r} + \frac{u_\theta}{r \tan \theta} \partial_\phi u_\phi) \boldsymbol{\phi}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Ricordando le (5.34), il termine diffusivo si scrive:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{u} &= \frac{1}{r^2} \partial_r [r^2 \partial_r(u_r \mathbf{r} + u_\theta \boldsymbol{\theta} + u_\phi \boldsymbol{\phi})] + \\ &+ \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta [\sin \theta \partial_\theta(u_r \mathbf{r} + u_\theta \boldsymbol{\theta} + u_\phi \boldsymbol{\phi})] + \\ &+ \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\phi [\partial_\phi(u_r \mathbf{r} + u_\theta \boldsymbol{\theta} + u_\phi \boldsymbol{\phi})] \\ &= (\partial_{rr}^2 u_r + \frac{2}{r} \partial_r u_r + \frac{\partial_{\theta\theta}^2 u_r}{r^2} + \frac{\partial_\theta u_r}{r^2 \tan \theta} + \frac{\partial_{\phi\phi}^2 u_r}{r^2 \sin^2 \theta} + \\ &- \frac{2}{r^2} u_r - \frac{2}{r^2} \partial_\theta u_\theta - \frac{2u_\theta}{r^2 \tan \theta} - \frac{2\partial_\phi u_\phi}{r^2 \sin \theta}) \mathbf{r} + \\ &+ (\partial_{rr}^2 u_\theta + \frac{2\partial_r u_\theta}{r} + \frac{\partial_{\theta\theta}^2 u_\theta}{r^2} + \frac{\partial_\theta u_\theta}{r^2 \tan \theta} + \frac{\partial_{\phi\phi}^2 u_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \\ &+ \frac{2\partial_\theta u_r}{r^2} - \frac{u_\theta}{r^2 \sin \theta} - 2 \frac{\cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\phi u_\phi) \boldsymbol{\theta} + \\ &+ (\partial_{rr}^2 u_\phi + \frac{2\partial_r u_\phi}{r} + \frac{\partial_{\theta\theta}^2 u_\phi}{r^2} + \frac{\partial_\theta u_\phi}{r^2 \tan \theta} + \frac{\partial_{\phi\phi}^2 u_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + \\ &- \frac{u_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2\partial_\phi u_r}{r^2 \sin \theta} + 2 \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \partial_\phi u_\theta) \boldsymbol{\phi}. \end{aligned} \quad (5.41)$$

In base alle espressioni (5.40) del termine convettivo, (5.37) dell'operatore ∇ e (5.41) del termine diffusivo e posto:

$$\mathcal{H} =: \frac{1}{r^2} \partial_r(r^2 \partial_r) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta(\sin \theta \partial_\theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_{\phi\phi}^2 , \quad (5.42)$$

le equazioni di Navier-Stokes in coordinate sferiche si scrivono:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \left(\partial_t u_r + u_r \partial_r u_r + \frac{u_\theta}{r} \partial_\theta u_r + \frac{u_\phi \partial_\phi u_r}{r \sin \theta} - \frac{u_\theta^2 + u_\phi^2}{r} \right) = \\ = -\partial_r p + \mu \left(\mathcal{H} u_r - \frac{2u_r}{r^2} - \frac{2\partial_\theta u_\theta}{r^2} - \frac{2u_\theta}{r^2 \tan \theta} - \frac{2\partial_\phi u_\phi}{r^2 \sin \theta} \right) \\ \\ \rho \left(\partial_t u_\theta + u_r \partial_r u_\theta + \frac{u_\theta}{r} \partial_\theta u_\theta + \frac{u_\phi \partial_\phi u_\theta}{r \sin \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} - \frac{u_\phi^2}{r \tan \theta} \right) = \\ = -\frac{1}{r} \partial_\theta p + \mu \left(\mathcal{H} u_\theta + \frac{2}{r^2} \partial_\theta u_r - \frac{u_\theta}{r^2 \sin \theta} - 2 \frac{\cos \theta \partial_\phi u_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \\ \\ \rho \left(\partial_t u_\phi + u_r \partial_r u_\phi + \frac{u_\theta}{r} \partial_\theta u_\phi + \frac{u_\phi \partial_\phi u_\phi}{r \sin \theta} + \frac{u_r u_\phi}{r} + \frac{u_\theta u_\phi}{r \tan \theta} \right) = \\ = -\frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi p + \mu \left(\mathcal{H} u_\phi - \frac{u_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2 \partial_\phi u_r}{r^2 \sin \theta} + 2 \frac{\cos \theta \partial_\phi u_\theta}{r^2 \sin \theta} \right) \end{array} \right. \quad (5.43)$$

5.5.2 Il caso bidimensionale

Nel caso particolare in cui il campo di velocità è a componente azimutale nulla ($u_\phi \equiv 0$) ed u_r e u_θ non dipendono da ϕ , le equazioni di Navier-Stokes (5.43) si riducono alle seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \left(\partial_t u_r + u_r \partial_r u_r + \frac{u_\theta}{r} \partial_\theta u_r - \frac{u_\theta^2}{r} \right) = \\ = -\partial_r \tilde{p} + \mu \left(\mathcal{H} u_r - \frac{2u_r}{r^2} - \frac{2\partial_\theta u_\theta}{r^2} - \frac{2u_\theta}{r^2 \tan \theta} \right) \\ \\ \rho \left(\partial_t u_\theta + u_r \partial_r u_\theta + \frac{u_\theta}{r} \partial_\theta u_\theta + \frac{u_r u_\theta}{r} \right) = \\ = -\frac{1}{r} \partial_\theta \tilde{p} + \mu \left(\mathcal{H} u_\theta + \frac{2\partial_\theta u_r}{r^2} - \frac{u_\theta}{r^2 \sin \theta} \right) , \end{array} \right. \quad (5.44)$$

in cui

$$\mathcal{H} =: \frac{1}{r^2} \partial_r(r^2 \partial_r) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta(\sin \theta \partial_\theta) . \quad (5.45)$$

Nelle (5.44) si è utilizzata la pressione modificata $\tilde{p} = p + \rho g r \cos \theta$, considerando la presenza di un campo di forze esterne di tipo gravitazionale agenti lungo z . Il flusso è bidimensionale, è allora possibile introdurre una funzione di corrente ψ legata alla velocità dalle relazioni:

$$u_r = \frac{\partial_\theta \psi}{r^2 \sin \theta} , \quad u_\theta = -\frac{\partial_r \psi}{r \sin \theta} \quad (5.46)$$

in modo tale che l'equazione di continuità (5.39) sia automaticamente soddisfatta.

Derivando la prima delle (5.44) in θ e sottraendogli la seconda moltiplicata per r e poi derivata in r si elimina il contributo della pressione. Posto:

$$E^2 = \partial_r^2 + \frac{\sin \theta}{r^2} \partial_\theta \left(\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta \right) =: D_r^2 + D_\theta^2, \quad (5.47)$$

si ottiene, ricordando le (5.46), per il termine di derivata nel tempo:

$$\partial_\theta(\partial_t u_r) - \partial_r(r \partial_t u_\theta) = \partial_t [\partial_\theta u_r - \partial_r(r u_\theta)] = \frac{1}{\sin \theta} \partial_t E^2 \psi, \quad (5.48)$$

mentre per il termine convettivo si ha:

$$\begin{aligned} & \partial_\theta \left(u_r \partial_r u_r + \frac{u_\theta}{r} \partial_\theta u_r - \frac{u_\theta^2}{r} \right) - \partial_r (r u_r \partial_r u_\theta + u_\theta \partial_\theta u_\theta + u_r u_\theta) = \\ &= \frac{2E^2 \psi}{r^2 \sin^3 \theta} \left(\cos \theta \partial_r \psi - \frac{\sin \theta}{r} \partial_\theta \psi \right) + \\ & \quad - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\partial_r \psi \partial_\theta E^2 \psi - \partial_\theta \psi \partial_r E^2 \psi \right), \end{aligned} \quad (5.49)$$

nella quale il termine in parentesi nel secondo addendo a secondo membro è il determinante jacobiano $\partial(\psi, E^2 \psi) / \partial(r, \theta)$. Il termine diffusivo:

$$\partial_\theta \underbrace{\left(\mathcal{H} u_r - 2 \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \partial_\theta u_r - \frac{2}{r^2} \frac{u_\theta}{\tan \theta} \right)}_{T_1} - \partial_r \underbrace{\left(r \mathcal{H} u_\theta + \frac{2}{r} \partial_\theta u_r - \frac{u_\theta}{r \sin^2 \theta} \right)}_{T_2} \quad (5.50)$$

può essere calcolato valutandone i singoli contributi indicati nell'equazione (5.50):

$$\begin{aligned} \mathcal{H} u_r &= \frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{\sin \theta}{r^2} \partial_\theta \left(\frac{E^2 \psi}{\sin \theta} \right) + \frac{E^2 \psi}{r^2 \sin \theta \tan \theta} + \frac{2(\partial_\theta \psi - r \partial_{r\theta}^2 \psi)}{r^4 \sin \theta} \right] \\ r \mathcal{H} u_\theta &= -\frac{\partial_r E^2 \psi}{\sin \theta} - \frac{2D_\theta^2 \psi}{r \sin \theta} - \frac{\partial_r \psi}{r^2 \sin^3 \theta} \\ T_1 &= -\frac{2}{r^4} \left(\frac{\partial_\theta \psi}{\sin \theta} - r \frac{\partial_{r\theta}^2 \psi}{\sin \theta} \right) \\ T_2 &= \frac{2D_\theta^2 \psi}{r \sin \theta} + \frac{\partial_r \psi}{r^2 \sin^3 \theta}, \end{aligned}$$

da cui segue che il termine diffusivo vale:

$$\frac{E^4 \psi}{\sin \theta}, \quad (5.51)$$

in cui con E^4 abbiamo indicato $E^2 \cdot E^2$. Ricordando le valutazioni (5.48) per il termine di derivata nel tempo, (5.49) per quello convettivo e (5.51) per il termine diffusivo, si ottiene l'equazione del quarto ordine in ψ :

$$\partial_t E^2 \psi - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial(\psi, E^2 \psi)}{\partial(r, \theta)} + \frac{2 E^2 \psi}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\cos \theta \partial_r \psi - \frac{\sin \theta}{r} \partial_\theta \psi \right) = \nu E^4 \psi$$

(5.52)

5.5.3 Soluzione in regime di flusso di Stokes

Nell'ipotesi che il termine diffusivo sia quello dominante nell'equazione (5.52), cosicché gli altri possono essere trascurati, calcoliamo la funzione di corrente ψ per una sfera di raggio R investita da una corrente traslazionale uniforme di intensità u_∞ diretta lungo l'asse z . Questo implica, ricordando le definizioni (5.33) dei versori \mathbf{r} e $\boldsymbol{\theta}$ ed il legame funzionale di corrente-velocità dato dalle (5.46), che la funzione di corrente deve soddisfare le richieste all'infinito:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \frac{\partial_\theta \psi}{r^2 \sin \theta} \mathbf{r} - \frac{\partial_r \psi}{r \sin \theta} \boldsymbol{\theta} \\ &= \frac{\partial_\theta \psi}{r^2 \sin \theta} \begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \phi \\ \sin \theta & \sin \phi \\ \cos \theta & \end{pmatrix} - \frac{\partial_r \psi}{r \sin \theta} \begin{pmatrix} \cos \theta & \cos \phi \\ \cos \theta & \sin \phi \\ -\sin \theta & \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_\infty \end{pmatrix},\end{aligned}$$

ovvero che:

$$\partial_\theta \psi \approx u_\infty r^2 \sin \theta \cos \theta, \quad \partial_r \psi \approx u_\infty r \sin^2 \theta.$$

Queste due condizioni rimangono soddisfatte entrambe, se richiediamo il seguente comportamento all'infinito per la funzione di corrente:

$$\psi \approx \frac{1}{2} u_\infty r^2 \sin^2 \theta. \quad (5.53)$$

Il problema differenziale per ψ si formula allora al modo seguente:

$$\begin{cases} E^4 \psi = \left[\partial_{rr}^2 + \frac{\sin \theta}{r^2} \partial_\theta \left(\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta \right) \right]^2 \psi = 0 \\ \partial_\theta \psi = 0, \quad \partial_r \psi = 0 \quad \text{per } r = R \\ \psi \approx \frac{1}{2} u_\infty r^2 \sin^2 \theta \quad \text{all'infinito} \end{cases} \quad (5.54)$$

Ricerchiamo una soluzione della forma:

$$\psi(r, \theta) = f(r) \sin^2 \theta, \quad (5.55)$$

in cui le condizioni al contorno sul corpo saranno soddisfatte richiedendo:

$$f(R) = 0, \quad f'(R) = 0, \quad (5.56)$$

mentre la condizione all'infinito è soddisfatta richiedendo:

$$f(r) \approx \frac{1}{2} u_\infty r^2 \quad \text{per } r \rightarrow \infty. \quad (5.57)$$

Calcolando $E^4 \psi$ con ψ nella forma (5.55) e considerando le condizioni sul corpo (5.56) ed all'infinito (5.57), otteniamo il problema differenziale in f (5.55):

$$\begin{cases} r^4 f^{IV} - 4r^2 f'' + 8rf' - 8f = 0 \\ f(R) = 0, \quad f'(R) = 0 \\ f(r) \approx \frac{1}{2} u_\infty r^2 \quad \text{per } r \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (5.58)$$

Ricerchiamo la soluzione dell'equazione (5.58) nella forma $f(r) = r^n$:

$$\begin{aligned} r^4 n(n-1)(n-2)(n-3)r^{n-4} - 4r^2 n(n-1)r^{n-2} + 8r nr^{n-1} - 8r^n &= \\ = r^n (n-1)(n-2)(n-4)(n+1) &= 0, \end{aligned}$$

da cui segue la forma funzionale di f :

$$f(r) = \frac{A}{r} + Br + Cr^2 + Dr^4, \quad (5.59)$$

in cui le costanti A, B, C e D devono essere calcolate in base alle condizioni al contorno sul corpo ed all'infinito. In base a quest'ultima si ha subito $D = 0$ e $C = u_\infty/2$. Dalle condizioni sul corpo si ottiene:

$$f(r) = \frac{u_\infty}{4} R^2 \left[\frac{R}{r} - 3\frac{r}{R} + 2 \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right],$$

ne segue per la velocità radiale $u_r = \partial_\theta \psi / (r^2 \sin \theta)$:

$$\boxed{\frac{u_r}{u_\infty} = \left[1 - \frac{3}{2} \frac{R}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right] \cos \theta}$$

mentre per la velocità longitudinale $u_\theta = -\partial_r \psi / (r \sin \theta)$:

$$\boxed{\frac{u_\theta}{u_\infty} = \left[-1 + \frac{3}{4} \frac{R}{r} + \frac{1}{4} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \right] \sin \theta}$$

Il calcolo della pressione è allora conseguenza delle due equazioni (5.44), in cui si tenga conto della definizione (5.45):

$$\begin{cases} \partial_r p = \mu \left(\mathcal{H} u_r - \frac{2}{r^2} u_r - \frac{2}{r^2} \partial_\theta u_\theta - \frac{2}{r^2} \frac{u_\theta}{\tan \theta} \right) \\ \frac{\partial_\theta p}{r} = \mu \left(\mathcal{H} u_\theta + \frac{2}{r^2} \partial_\theta u_r - \frac{u_\theta}{r^2 \sin \theta} \right) \end{cases}$$

da cui segue per la pressione:

$$\boxed{p = -\rho g r \cos \theta - \frac{3}{2} \mu u_\infty R \frac{\cos \theta}{r^2}}$$

a meno di costanti additive arbitrarie.

5.5.4 Risultante delle sollecitazioni sulla sfera

Calcoliamo adesso la risultante della sollecitazione che il fluido esercita sulla sfera. Per motivi di simmetria, tale risultante non può che essere diretta lungo z .

Occorre innanzitutto procurarsi l'espressione in coordinate sferiche del tensore degli sforzi. Indicando con τ_{rr} lo sforzo che viene esercitato dal fluido esterno alla sfera di raggio r sul fluido all'interno lungo r e con $\tau_{\theta r}$ quello lungo θ si ha:

$$\tau_{rr} = r_i \tau_{ij} r_j = r_i (-p\delta_{ij} + 2\mu S_{ij}) r_j = -p + \mu r_i (\partial_i u_j + \partial_j u_i) r_j$$

ed analoga in $\tau_{\theta r}$. Svolgendo i calcoli si ottiene per $r = R$:

$$\begin{aligned} \tau_{rr} &= -p + 2\mu \partial_r u_r &= \rho g R \cos \theta + \frac{3}{2} \frac{\mu u_\infty}{r} \cos \theta \\ \tau_{\theta r} &= \mu \left[r \partial_r \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \partial_\theta u_r \right] = -\frac{3}{2} \frac{\mu u_\infty}{r} \sin \theta \end{aligned}$$

che, inserita nell'espressione della risultante della sollecitazione, fornisce:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{e}_z 2\pi R^2 \int_0^\pi d\theta (\tau_{rr} \cos \theta - \tau_{\theta r} \sin \theta) \sin \theta \\ &= \mathbf{e}_z \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \rho g + 6\pi \mu R u_\infty \right), \end{aligned} \quad (5.60)$$

in cui il primo termine è la spinta di Archimede, mentre il secondo è il termine di resistenza di attrito ed è dovuto a Stokes.

La presenza di questa resistenza di attrito che cresce linearmente con la velocità fa sì che una sfera in atmosfera non acceleri indefinitamente. La velocità con cui la sfera trasla ha un andamento asintotico verso una *velocità limite* v_{lim} , che risulta tra l'altro inversamente proporzionale al raggio R della sfera ed al coefficiente di viscosità del fluido. Infatti, l'equazione per il moto del centro di massa della sfera lungo l'asse verticale ascendente z si scrive:

$$m\ddot{z} = -m'g - a\dot{z}, \quad (5.61)$$

in cui si ha $m' = m - V\rho$ (differenza tra la massa m della sfera e quella del fluido dislocato), g è il modulo della accelerazione di gravità ed $a = 6\pi R\mu$. Integrando la (5.61) nel tempo, per semplicità nell'ipotesi che $\dot{z}(0) = 0$, otteniamo la velocità del centro di massa della sfera:

$$\dot{z}(t) = v_{lim}(-1 + e^{-at/m}) \quad \text{in cui: } v_{lim} = m'g/a.$$

Osserviamo che, se la sfera è più pesante del volume di fluido dislocato ($m' > 0$), allora $v_{lim} > 0$ e $z(t) < 0$ per $t > 0$, mentre, se accade il viceversa ($m' < 0$), $v_{lim} < 0$ e $z(t) > 0$.

5.6 Curiosando in biblioteca

Nel cap. 4 del testo di Batchelor [3] troviamo la deduzione della soluzione analitica del flusso all'interno di un cilindro a sezione circolare (p. 180), nell'ipotesi di flusso stazionario e di campo di velocità puramente assiale (flusso alla *Poiseuille*). Segnaliamo al Lettore l'utile approfondimento dello studio del campo di velocità in un cilindro di sezione non circolare (ellittica o rettangolare). Nello stesso paragrafo ritroviamo anche la deduzione del campo di moto in canali bidimensionali. Per quanto riguarda il flusso attorno ad una sfera, l'Autore ne presenta una dettagliata trattazione a p. 230, mentre la riscrittura delle equazioni del moto in coordinate cilindriche e sferiche è oggetto dell'appendice 2. Il potenziale complesso è utilizzato per determinare il campo di moto attorno ad un angolo diedro (pp. 410-411) e ad un cilindro di sezione ellittica (§6.6). Sul testo di Kundu e Cohen [17] troviamo, nel cap. 6, la trattazione di flussi a potenziale fatta col potenziale complesso, con particolare riferimento al flusso attorno ad un angolo diedro (§6.4) e attorno ad un cilindro ellittico, nell'ipotesi più generale di circolazione non nulla attorno al corpo (§6.14). Nel §9.5 viene dedotto il campo di velocità all'interno di un tubo a sezione circolare, mentre nel §9.12 gli Autori trattano il flusso di Stokes attorno ad una sfera. Nello stesso capitolo viene studiato il campo di velocità in un condotto 2D, per flussi alla Poiseuille ed alla Couette (§9.4). In appendice B sono invece riportate le equazioni del moto, in coordinate cilindriche e sferiche.

Sul libro di Landau e Lifshitz [20] il flusso potenziale attorno ad un angolo diedro è studiato nel problema 6 del cap. 1. Nelle pp. 48-49 vengono dedotte le equazioni del moto in coordinate cilindriche, mentre nel §17 si studiano i campi di moto in un canale piano ed in uno a sezione circolare. I problemi posti alla fine del paragrafo trattano i casi nei quali la sezione del condotto è non circolare: in particolare, nel problema 4 è studiato il flusso tra due cilindri coassiali, dei quali uno traslì lungo l'asse. Nel paragrafo seguente (§18) è invece trattato il flusso alla Couette tra due cilindri concentrici rotanti. Una discussione dell'approssimazione di Stokes (in cui si trascurano termini inerziali) è presentata nel §20 (pp. 58-60), ricavando successivamente il campo di velocità attorno ad una sfera e calcolando la risultante della sollecitazione sul corpo. Riguardo al testo di Lamb [19], nel §63 è trattato il flusso a potenziale attorno ad un angolo diedro, mentre nei §68 e 69 l'Autore studia il flusso attorno ad un cilindro circolare. Nei §71 e 72 viene analizzato il flusso attorno ad un cilindro a sezione ellittica fissa e rotante. Nel §330 è calcolato il flusso in un canale piano e nell'articolo successivo è dedotto il campo di moto all'interno di un tubo a sezione circolare (approfondimenti con condotti di sezioni differenti sono oggetto del §332). Il flusso alla Couette tra cilindri coassiali è trattato nel §333, mentre il flusso alla Stokes attorno ad una sfera è studiato nel §338. Nelle pp. 158-159 sono infine presentate le equazioni del moto in coordinate cilindriche e sferiche.

Nel §4.11 del testo di White [37] sono studiati i flussi in canali bidimensionali (Poiseuille e Couette), mentre nelle pagine 261-262 è considerato il flusso tra due cilindri coassiali. La trattazione è costantemente accompagnata da un gran numero di esempi e da alcune osservazioni estremamente utili. Nel §6.4 è poi calcolata la velocità all'interno di un tubo a sezione circolare, approfondimenti su sezioni non circolari si trovano al §6.6. Nelle pp. 518-519 è studiato il flusso potenziale attorno ad un angolo diedro. Infine, le equazioni del moto in coordinate cilindriche si trovano nell'appendice D. Nel testo di Papanastasiou [27] le equazioni di Navier-Stokes in coordinate cilindriche e sferiche sono dedotte nel §5.2. I flussi alla Poiseuille ed alla Couette piani vengono trattati nel §6.1, mentre il paragrafo successivo (§6.2) è dedicato ai flussi in tubi a sezione circolare, con approfondimenti circa i flussi in tubi di sezione qualsiasi (§6.7). Il flusso alla Stokes attorno ad una sfera è studiato nel §10.3, dove viene anche calcolata la risultante sul corpo. Anche sul testo di Warsi [36] troviamo lo studio dei flussi alla Couette piano e circolare, nelle pp. 211-214, mentre nelle pagine successive viene analizzato il flusso alla Poiseuille, insieme a molti altri casi particolari. A p. 226 si discutono le approssimazioni alla base dei flussi alla Stokes, facendo gli esempi dei flussi attorno ad una sfera e ad un cilindro circolare. Il libro [26] presenta nel §6.3.1 le classiche deduzioni dei profili di velocità per flussi piani alla Poiseuille ed alla Couette, mentre nel §6.3.2 gli Autori deducono l'espressione del campo di velocità per un flusso all'interno ad un tubo a sezione circolare. Il § 9 è dedicato alla valutazione semiempirica della forza agente su di un corpo immerso in un flusso, specificandone la forma per un cilindro circolare (§9.3.2) e per una sfera (§9.3.3).

Una trattazione degli argomenti di questo capitolo si può anche trovare nel cap. 5 del testo [34] (canale nel §5.1, tubo a sezione circolare nel §5.2). A p. 226 gli Autori forniscono l'espressione della formula di Stokes per la sfera. Il libro [22] presenta, in appendice al primo capitolo, la riscrittura delle equazioni del moto in coordinate cilindriche e sferiche. Il §5.1 è poi dedicato ai flussi bidimensionali, con particolare riferimento ai flussi alla Poiseuille ed alla Couette piani ed al flusso all'interno di un tubo a sezione circolare. In [12] gli Autori presentano la trattazione dei flussi laminari all'interno di condotti circolari (pp. 474-478), ottenendo l'espressione del profilo di velocità alla Poiseuille. Più completo in merito è il libro [1], nel quale (pp. 42-43) si trova la scrittura delle equazioni di Navier-Stokes in coordinate cilindriche. Viene quindi analizzato il flusso alla Couette tra due cilindri rotanti (pp. 43-45), mentre alla fine del primo capitolo è proposta, in forma di esercizio, l'analisi di un flusso alla Poiseuille. A p. 125 l'Autore analizza, col potenziale complesso, il flusso attorno ad un angolo diedro e ad un cilindro rotondo (pp. 130-134). Il campo di moto attorno ad una sfera è investigato sia nell'ipotesi di flusso a potenziale (pp. 174-175), che nell'approssimazione di Stokes (pp. 223-226).

Considerazioni introduttive sui flussi bidimensionali attorno a corpi

In questo capitolo verranno analizzate alcune importanti conseguenze del modello matematico di fluido sviluppato nei Capitoli 1 e 2 sull’interazione tra un fluido ed un corpo. Lo studio di tale interazione è di centrale interesse in Fluidodinamica per la sua grande importanza applicativa. Infatti, le forze che un fluido ed un corpo si scambiano sono comunemente utilizzate per produrre lavoro (macchine a fluido), come forze propulsive, per sostenere il volo ed in molte altre rilevanti applicazioni ingegneristiche.

L’interazione fluido-corpo pone inoltre delicati problemi teorici, il cui studio all’inizio del secolo scorso portò allo sviluppo di tecniche matematiche nuove (teoria delle perturbazioni singolari, [24]), in grado di fornire approssimazioni asintotiche del campo fluidodinamico valide a numeri di Reynolds (immaginiamo che il corpo definisca una scala delle lunghezze) d’interesse applicativo.¹

Nel presente capitolo l’analisi sarà ristretta a flussi a densità costante piani e verterà essenzialmente sullo studio dei legami tra quantità globali (quali la forza risultante sul corpo) e campi fluidodinamici, con particolare riferimento a quello di vorticità. Considerando un fluido non viscoso, la formulazione a potenziale del problema è sufficiente per spiegare (§ 6.1) la presenza di una

¹ La questione che tali tecniche investigano si può riassumere nei termini seguenti.

Se si studia il flusso con un modello di fluido non viscoso, si ha che è necessario imporre sul corpo l’annullamento della *componente normale* della velocità. Questo implica che la parete è una particolare curva vorticosa, su cui è presente una densità di circolazione γ (vedi § 4.5) pari alla componente tangente della velocità. Utilizzando un modello di fluido viscoso, invece, le condizioni da imporre sono due, dovendo annullarsi il *vettore* velocità sulla parete. Immaginiamo allora di utilizzare, garantendo le stesse condizioni asintotiche, fluidi sempre meno viscosi (numero di Reynolds Re crescente): troviamo che la derivata normale (in direzione y) della componente tangente (u) della velocità aumenta, così che sembra lecito ipotizzare che il termine $\mu\partial_{yy}^2 u$ ammetta limite finito e non nullo per $Re \rightarrow \infty$. La soluzione ottenuta assumendo il fluido non viscoso rappresenta questo limite? Una introduzione allo studio di questo problema sarà oggetto del Capitolo 12.

componente della forza nel piano ortogonale alla direzione della corrente asintotica: la *portanza*. Nel contempo, tale impostazione può portare a conclusioni in contraddizione con l'evidenza sperimentale. Tra queste, la più rilevante è richiamata nel paragrafo 6.2 e prende il nome di *paradosso di d'Alembert*: “un corpo limitato, immerso in un flusso stazionario generato da una corrente traslazionale uniforme, scambia col fluido forze a risultante nulla nella direzione della corrente”, ovvero la *resistenza* è zero! Questo paradosso è indotto dall'aver assunto il fluido non viscoso, trascurando in tal modo la generazione di vorticità, che si stacca dal corpo formando una regione rotazionale: la *scia*.²

In questo capitolo vengono forniti semplici strumenti di calcolo del flusso piano di un fluido non viscoso, sia con formulazioni integrali (§ 6.3), che mediante potenziale complesso ed, eventualmente, trasformazioni conformi (§ 6.4). Questo secondo approccio è utile per studiare prototipi semplici di flusso. In particolare, consente di valutare il legame tra campi fluidodinamici e forza agente sul corpo, utilizzando il *teorema di Blasius* (§ 6.5). Un esempio piuttosto divertente di tali studi lo abbiamo collocato nell'appendice 6.14, unitamente alla descrizione di una tecnica per simulare la produzione di vorticità da parte del corpo e per integrarne (numericamente) il moto.

Con un modello di fluido viscoso, il ruolo della dinamica della vorticità nell'indurre una forza sul corpo è chiarito nel successivo §6.6, in cui viene dedotto un legame tra quest'ultima e la derivata nel tempo del momento del primo ordine della vorticità. Utilizzando questo risultato, la portanza attorno ad un profilo alare si spiega col moto della scia rilasciata a valle e la resistenza colla diffusione della vorticità di parete (§ 6.7).

Così come il momento del primo ordine della vorticità è legato alla risultante delle forze scambiate tra fluido e corpo, il momento del secondo ordine è in relazione col momento risultante delle medesime forze, come viene illustrato nel § 6.8. Infine, la distribuzione di pressione a grandi distanze dal corpo è legata anch'essa alla forza scambiata tra corpo e fluido (§ 6.9) e può essere utilizzata per scrivere un bilancio globale dell'energia³ (§ 6.10).

In chiusura del capitolo, nel paragrafo 6.11, proponiamo infine un breve percorso bibliografico.

6.1 La portanza

Uno degli aspetti fondamentali dell'interazione di un fluido con un corpo rigido riguarda lo studio della forza risultante agente sul corpo. Allo scopo di

² La formazione di una scia può essere considerata anche in modelli nei quali il fluido è ipotizzato non viscoso, approssimando la generazione di vorticità in modo opportuno (*condizione di Kutta*, vedi § 6.14.2).

³ Per un fluido non viscoso, questo bilancio evidenzia la conservazione di una quantità (integrale primo) lungo il moto. L'uso di tale integrale primo è utile nella soluzione di problemi semplici, come illustrato nell'appendice 6.15.

introdurre l'argomento, in questo paragrafo verrà illustrato un celebre esempio, dovuto a Prandtl ([24] pag. 60), di applicazione delle relazioni di bilancio integrali per determinare la forza agente su un profilo alare posto in una corrente uniforme.

Ipotizzati il flusso a densità costante, piano e stazionario ed il fluido non viscoso, supponiamo di avere infiniti profili identici disposti secondo una schiera di passo d , vedi Fig. 6.1. In tal modo evitiamo di discutere le condizioni all'infinito, come è necessario fare per un profilo isolato, e, nel contempo, quest'ultimo caso rientra nella schematizzazione precedente al limite per $d \rightarrow +\infty$. La corrente è assunta uniforme sia all'infinito a monte (con valore limite $\mathbf{u}_\infty^m = u_1^m \mathbf{e}_1 + u_2^m \mathbf{e}_2$) che all'infinito a valle (con valore limite $\mathbf{u}_\infty^v = u_1^v \mathbf{e}_1 + u_2^v \mathbf{e}_2$).

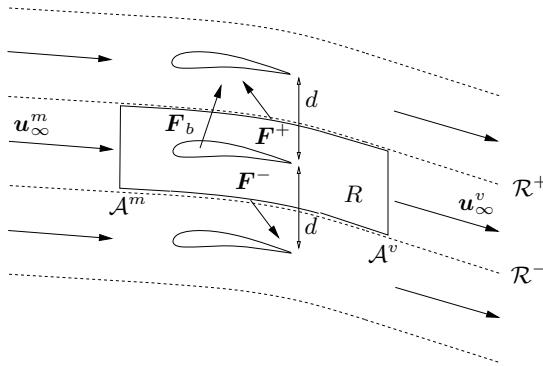


Figura 6.1. Tre periodi di una schiera infinita di profili di passo d , immersa in una corrente uniforme. Con linee a tratti sono disegnate le linee di corrente, mentre con una linea continua è individuata la regione R nella quale si applicano i bilanci di massa e quantità di moto.

Si applica la conservazione della massa e l'equazione di bilancio della quantità di moto al fluido compreso nella regione R la cui frontiera è costituita da due linee di corrente (\mathcal{R}^+ superiore e \mathcal{R}^- inferiore), separate lungo la direzione 2 dalla distanza d , e da due tratti paralleli all'asse 2: uno precedente (\mathcal{A}^m) ed uno seguente (\mathcal{A}^v) la schiera dei profili. Entrambi sono ipotizzati sufficientemente lontani dai corpi, da poter assumere che la velocità su \mathcal{A}^m sia \mathbf{u}_∞^m e su \mathcal{A}^v sia \mathbf{u}_∞^v . La conservazione della massa implica che:

$$u_1^m = u_1^v =: u_1 ,$$

mentre il flusso di quantità di moto uscente dalla regione R considerata vale:

$$\begin{aligned} \text{componente 1: } & \rho (-u_1^m d \cdot u_1^m + u_1^v d \cdot u_1^v) = 0 \\ \text{componente 2: } & \rho (-u_1^m d \cdot u_2^m + u_1^v d \cdot u_2^v) = \rho u_1 \cdot (u_2^v - u_2^m) d , \end{aligned} \quad (6.1)$$

dove ρ è la densità del fluido ed è stato considerato il solo contributo delle sezioni \mathcal{A}^m ed \mathcal{A}^v , poiché attraverso le linee di corrente \mathcal{R}^\pm il flusso di quantità di moto è nullo. Si può osservare, inoltre, che la quantità $(u_2^v - u_2^m)d$ è proprio la *circolazione* Γ che si misura attorno al singolo profilo.

Uguagliando il flusso uscente di quantità di moto alla risultante delle sollecitazioni agenti sulla regione R , si potrà valutare la forza aerodinamica $\mathbf{F}_b = F_1\mathbf{e}_1 + F_2\mathbf{e}_2$ esercitata sul corpo.

Le risultanti delle sollecitazioni (di pressione) sui due archi di \mathcal{R}^\pm sono opposte. Infatti, chiamata con \mathbf{F}^+ la risultante degli sforzi agenti sulla curva \mathcal{R}^+ da parte del fluido *esterno*, il fluido all'*interno* di R eserciterà una sollecitazione di risultante $-\mathbf{F}^+$ sul medesimo arco di curva. Ma, per la periodicità, sarà allora questa la risultante degli sforzi esercitati dal fluido all'esterno di R sulla curva \mathcal{R}^- , ovvero $\mathbf{F}^- = -\mathbf{F}^+$. Ne segue che la risultante delle sollecitazioni sul fluido contenuto nella regione R si scrive considerando le sole sezioni \mathcal{A}^m e \mathcal{A}^v ed il profilo:

$$\begin{aligned} \text{componente 1: } & p^m d - p^v d - F_1 \\ \text{componente 2: } & -F_2 , \end{aligned} \tag{6.2}$$

avendo ricordato che la normale $\boldsymbol{\nu}$ lungo la ∂R è uscente, quindi sulla sezione \mathcal{A}^m si ha $\boldsymbol{\nu} = -\mathbf{e}_1$, mentre sulla sezione \mathcal{A}^v si ha $\boldsymbol{\nu} = +\mathbf{e}_1$. Nelle ipotesi fatte vale l'equazione di Bernoulli (2.49), da cui segue che nella componente 1 si ha:

$$(p^m - p^v) d = \frac{1}{2} \rho (|\mathbf{u}_\infty^v|^2 - |\mathbf{u}_\infty^m|^2) d = \rho \frac{u_2^m + u_2^v}{2} \Gamma .$$

Dalle equazioni (6.1) e (6.2) segue per la sollecitazione aerodinamica:

$$F_1 = \rho \frac{u_2^m + u_2^v}{2} \Gamma , \quad F_2 = -\rho u_1 \Gamma . \tag{6.3}$$

Questa forza viene abitualmente espressa nel riferimento avente asse 1 allineato con la \mathbf{u}^m , in cui si definisce *resistenza* (*drag*, indicata con D) la componente 1 e *portanza* (*lift*, indicata con L) la componente 2 (ortogonale alla corrente all'infinito a monte):

$$D = \rho \Gamma u_1 \frac{u_2^v - u_2^m}{2|\mathbf{u}_\infty^m|} , \quad L = -\rho \Gamma \frac{|\mathbf{u}_\infty^m|^2 + |\mathbf{u}_\infty^v|^2 - (u_2^v - u_2^m)u_2^m}{2|\mathbf{u}_\infty^m|} . \tag{6.4}$$

Per ottenere il caso del profilo isolato occorre effettuare il limite per $d \rightarrow +\infty$ *mantenendo costante la circolazione Γ attorno al profilo*. Ne segue allora che $u_2^v \rightarrow u_2^m$, ovvero il profilo è investito da una corrente uniforme all'infinito, e le componenti (6.4) si riducono alle:

$$D = 0 , \quad L = -\rho |\mathbf{u}_\infty| \Gamma . \tag{6.5}$$

L'equazione (6.5) indica che un profilo è portante ($L > 0$) non appena si instaura attorno ad esso una circolazione Γ negativa. In tal caso il modulo

della velocità sulla parte superiore del profilo (dorso) è maggiore di quello che si ha nella parte inferiore (ventre). Dall'equazione di Bernoulli, le pressioni sul ventre sono maggiori di quelle sul dorso e la loro risultante è concorde con l'asse 2. Un secondo aspetto interessante evidenziato dall'equazione (6.5) è che, nelle ipotesi poste, la resistenza aerodinamica è nulla, come verrà illustrato, in un contesto più generale, nel paragrafo seguente.

6.2 Il paradosso di d'Alembert

Nelle ipotesi di flusso a densità costante, piano, stazionario ed uniforme all'infinito di un fluido non viscoso, si riesce quindi a motivare la presenza di una forza sul corpo in direzione *normale* alla corrente. Nel presente paragrafo sarà mostrato (vedi [24], pag. 66), per un flusso eventualmente tridimensionale, che la risultante della sollecitazione agente sul corpo ha componente (resistenza) nulla nella direzione della corrente asintotica, in accordo col risultato (6.5), appena ottenuto per il profilo isolato.

Si considera un corpo (limitato) Ω_b , vedi Fig. 6.2, di frontiera $\partial\Omega_b$ orientata con la normale uscente ed un tubo di flusso T_f attorno a questo compreso tra una sezione di ingresso \mathcal{A} e una di uscita \mathcal{B} , normali alla \mathbf{u}_∞ , e sufficientemente ampio da poter considerare ∂T_f parallela alla \mathbf{u}_∞ . Infine, si ipotizzano le sezioni \mathcal{A} e \mathcal{B} sufficientemente lontane dal corpo, da poter considerare $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}_\infty$ su di esse. Il tratto di tubo scelto viene chiamato con T^* e la sua frontiera è costituita dalle sezioni \mathcal{A} e \mathcal{B} , dal tratto di mantello \mathcal{M} (parallelo alla \mathbf{u}_∞), oltre che, ovviamente, dalla superficie del corpo $\partial\Omega_b$.

Per la conservazione della massa lungo il tubo, l'area delle due sezioni dovrà essere uguale.

La conservazione della quantità di moto per il fluido compreso nel tratto T^* del tubo T_f in esame si scrive in base alle equazioni di Eulero:

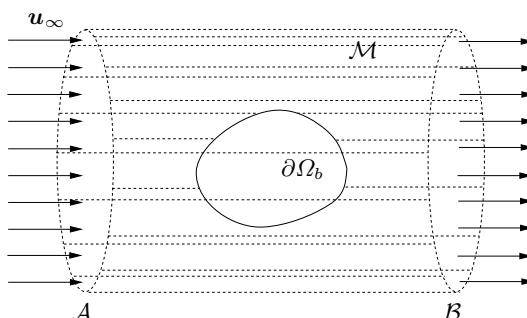


Figura 6.2. Tratto T^* di un tubo di flusso che include il corpo Ω_b ed ha mantello \mathcal{M} parallelo alla velocità asintotica e le due sezioni (di ingresso \mathcal{A} e di uscita \mathcal{B}) ortogonali alla \mathbf{u}_∞ .

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= \frac{d}{dt} \int_{T^*} dV \rho \mathbf{u} \\
&= \int_{T^*} dV \rho \partial_t \mathbf{u} \\
&= - \int_{T^*} dV [\rho \partial_i (u_i \mathbf{u}) + \nabla p] \\
&= - \left(\int_{\mathcal{A}} + \int_{\mathcal{B}} + \int_{\mathcal{M}} + \int_{-\partial\Omega_b} \right) dA (\rho \mathbf{u} \cdot \nu + p \nu) , \quad (6.6)
\end{aligned}$$

in cui con $-\partial\Omega_b$ si è indicata la frontiera del corpo *orientata in verso opposto*. Considerato che, per costruzione di T^* , $\mathbf{u} \cdot \nu$ assume valori opposti sulle sezioni \mathcal{A} e \mathcal{B} e che tale quantità è identicamente nulla sia sul mantello \mathcal{M} che, per l'impermeabilità, sulla superficie del corpo, il primo addendo nella (6.6) fornisce un contributo nullo. Ne segue che la forza sul corpo \mathbf{F}_b è data dalla:

$$\mathbf{F}_b = - \left(\int_{\mathcal{A}} + \int_{\mathcal{B}} + \int_{\mathcal{M}} \right) dA p \nu . \quad (6.7)$$

Poiché, in base all'equazione di Bernoulli (2.49), $p + \rho|\mathbf{u}|^2/2$ è costante in tutto il campo e la velocità sulle sezioni \mathcal{A} e \mathcal{B} è uguale ed uniforme, allora anche la pressione su tali sezioni è uguale ed uniforme. La somma dei primi due addendi a secondo membro della (6.7) è quindi nulla. Ricordando infine che, per costruzione di T^* , la normale ν sul mantello \mathcal{M} è ortogonale alla \mathbf{u}_∞ , dalla (6.7) segue che $\mathbf{F}_b \cdot \mathbf{u}_\infty = 0$.

Vedremo nel seguito che in un flusso piano, la resistenza sul corpo è dovuta alla diffusione di vorticità *in direzione ortogonale alla \mathbf{u}_∞* . In un flusso tridimensionale la situazione può essere più complessa. Ad esempio, è comune accettato un modello per il flusso stazionario attorno ad una ala finita che fa uso di una distribuzione di vorticità di scia, grazie alla quale si ha una resistenza non nulla (*resistenza indotta*) sull'ala, pur essendo il fluido non viscoso. Tale modello viola comunque l'ipotesi (assunta per dimostrare il paradosso) di uniformità all'infinito, impiegando una scia di estensione infinita.

6.3 Analisi del flusso piano con formulazioni integrali

Descriviamo brevemente due possibili approcci integrali, in un certo senso duali, allo studio (numerico) del flusso a densità costante e piano di un fluido non viscoso attorno ad un corpo Ω_b limitato e connesso, dotato di frontiera $\partial\Omega_b$ di lunghezza finita e di classe 2. Supponiamo, per semplicità, che l'origine del riferimento ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$) sia interna al dominio Ω_b .

Nell'ipotesi di irrotationalità e circolazione Γ_b nulla attorno al corpo, il campo di velocità ammette un potenziale monodromo φ che, in base alla

continuità $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, verifica l'equazione di Laplace: $\nabla^2 \varphi = 0$, ovvero è una funzione *armonica*. A questa andrà unita la condizione al contorno di impermeabilità $u_\nu = 0$ sulla $\partial\Omega_b$ ed una condizione all'infinito. Supporremo che $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}_\infty$ per $\mathbf{x} \rightarrow \infty$, ovvero che il corpo sia investito da una corrente uniforme. Il potenziale di velocità è allora una soluzione del problema:

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi = 0 \\ \partial\boldsymbol{\nu} \varphi \equiv 0 \quad \text{su } \partial\Omega_b \\ \nabla \varphi \rightarrow \mathbf{u}_\infty \quad \text{all'infinito.} \end{cases} \quad (6.8)$$

Se si rinuncia alla irrotazionalità e/o è presente una circolazione Γ_b non nulla attorno al corpo, la soluzione del medesimo problema può essere descritta con la funzione di corrente ψ , la quale verifica l'equazione di Poisson $\nabla^2 \psi = -\omega$. La circolazione limite su un circuito all'infinito:

$$\Gamma = \Gamma_b + \int_{\Omega'_b} d\mathbf{x} \omega \quad (6.9)$$

definisce il comportamento all'infinito della velocità come $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \sim \mathbf{u}_\infty + \Gamma \mathbf{K}(\mathbf{x})$, mentre la condizione al contorno sul corpo diviene di Dirichlet: $\psi \equiv \text{costante} =: \psi_b$. La funzione di corrente soddisfa quindi al problema:

$$\begin{cases} \nabla^2 \psi = -\omega \\ \psi \equiv \psi_b \quad \text{su } \partial\Omega_b \\ \nabla \psi \rightarrow \mathbf{u}_\infty^\perp \quad \text{all'infinito.} \end{cases} \quad (6.10)$$

Utilizzando le condizioni asintotiche, è utile decomporre la velocità \mathbf{u} nella somma della velocità della corrente asintotica \mathbf{u}_∞ e del campo indotto dalla presenza del corpo \mathbf{u}' : $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\infty + \mathbf{u}'$.

Nel caso di flusso irrotazionale con $\Gamma_b = 0$ (e quindi $\Gamma = 0$), \mathbf{u}' è infinitesimo di ordine 2 all'infinito. Infatti, qualunque sia la sfera $B_R(\mathbf{x}_0) \supset \Omega_b$, in base al teorema di Gauss ed alla continuità, il flusso di volume attraverso la sua frontiera è nullo e quindi è anche nullo l'integrale:

$$\int_{\partial B_R(\mathbf{x}_0)} ds \mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\nu} .$$

Dall'arbitrarietà di $B_R(\mathbf{x}_0)$ segue che $u'_\nu \sim 1/R^2$, per $R \rightarrow +\infty$. Inoltre, essendo nulla la circolazione su $\partial\Omega_b$ ed il flusso irrotazionale, la stessa stima asintotica vale anche per u'_τ . Scriviamo quindi il potenziale come $\varphi = \varphi_\infty + \varphi'$, con $\varphi_\infty(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_\infty \cdot \mathbf{x}$ e φ' scelto in modo che risulti infinitesimo del primo ordine all'infinito (e quindi $\nabla \varphi'$ è infinitesimo di ordine 2 nel medesimo limite). Il problema (6.8) in termini di potenziale di perturbazione diviene allora omogeneo all'infinito:

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi' = 0 \\ \partial\boldsymbol{\nu} \varphi' = -\mathbf{u}_\infty \cdot \boldsymbol{\nu} \quad \text{su } \partial\Omega_b \\ \nabla \varphi' \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{all'infinito.} \end{cases} \quad (6.11)$$

Analogamente, per un flusso rotazionale e/o $\Gamma_b \neq 0$, \mathbf{u}' risulta infinitesimo di ordine 1 all'infinito. La funzione di corrente si scrive allora come $\psi = \psi_\infty + \psi'$, essendo $\psi_\infty(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_\infty^\perp \cdot \mathbf{x} - \Gamma G(\mathbf{x})$ con $G(\mathbf{x}) = (\log |\mathbf{x}|)/(2\pi)$ funzione di Green dell'operatore di Laplace. Inoltre ψ' è scelto in modo da essere infinitesimo di ordine 1 all'infinito. Il problema (6.10) in termini di funzione di corrente di perturbazione diviene allora:

$$\begin{cases} \nabla^2 \psi' = -\omega \\ \psi' = \psi_b - \psi_\infty \quad \text{su } \partial\Omega_b \\ \nabla \psi' \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{all'infinito,} \end{cases} \quad (6.12)$$

essendo ψ_b il valore (dipendente dal solo tempo) della funzione di corrente sulla frontiera $\partial\Omega_b$ del corpo. Notare che, essendo il punto $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ interno⁴ ad Ω_b , $\nabla^2 G = 0$ in Ω'_b . Inoltre, $\nabla \psi'$ è infinitesimo di ordine 2 all'infinito.

Ad esclusione di un numero molto limitato di corpi Ω_b e di campi ω , per i quali le funzioni φ' o ψ' soluzioni dei problemi (6.11) o (6.12) sono note in modo *analitico* (vedi, ad esempio il §6.4), questo problema può essere risolto solo in modo *approssimato*. La tecnica utilizzata prevede la soluzione numerica di equazioni integrali, soddisfacendo le condizioni al contorno solo in un numero finito di punti sulla $\partial\Omega_b$. Costruiamo tali equazioni.

Integriamo membro a membro la seconda identità di Green (4.24) con $f = \varphi'$ o ψ' e $g = G$ sulla sfera $B_R(\mathbf{0})$ e mandiamo R all'infinito, considerando il comportamento asintotico del potenziale φ' e della funzione di corrente ψ' . Otteniamo in tal modo:

$$\begin{aligned} \varphi'(\mathbf{x}) &= - \int_{\partial\Omega_b} ds' \left[\varphi'(\mathbf{x}') \partial_{\boldsymbol{\nu}'} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \partial_{\boldsymbol{\nu}'} \varphi'(\mathbf{x}') \right] \\ \psi'(\mathbf{x}) &= -G * \omega(\mathbf{x}) + \\ &\quad - \int_{\partial\Omega_b} ds' \left[\psi'(\mathbf{x}') \partial_{\boldsymbol{\nu}'} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \partial_{\boldsymbol{\nu}'} \psi'(\mathbf{x}') \right], \end{aligned} \quad (6.13)$$

in cui $ds' = ds(\mathbf{x}')$ e $\boldsymbol{\nu}'$ è il versore normale alla $\partial\Omega_b$ nel suo punto \mathbf{x}' . Nella seconda relazione, la convoluzione $G * \omega$ è fatta all'esterno del corpo, ovvero su Ω'_b . Le relazioni (6.13) prendono il nome di *rappresentazioni integrali* per φ' e ψ' .

I termini in $\partial_{\boldsymbol{\nu}'} \varphi'(\mathbf{x}')$ e $\psi'(\mathbf{x}')$, a secondo membro delle rappresentazioni integrali (6.13), sono noti su $\partial\Omega_b$, cfr. i problemi (6.11, 6.12). Chiamando con Φ' e Ψ' i corrispondenti integrali (noti) ed includendo in Ψ' il termine $-G * \omega$, le due rappresentazioni (6.13) si possono riscrivere:

⁴ Questo è un tecnicismo. Se non si impone nessuna condizione sulla posizione dell'origine, è sufficiente prendere un qualunque punto $\mathbf{x}_0 \in \Omega_b$ ed utilizzare $G(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ nella decomposizione asintotica e sul corpo.

$$\begin{aligned}\varphi'(\mathbf{x}) &= - \int_{\partial\Omega_b} ds' \varphi'(\mathbf{x}') \partial_{\boldsymbol{\nu}'} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \Phi'(\mathbf{x}) \\ \psi'(\mathbf{x}) &= \int_{\partial\Omega_b} ds' G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \partial_{\boldsymbol{\nu}'} \psi'(\mathbf{x}') + \Psi'(\mathbf{x}) .\end{aligned}\quad (6.14)$$

Le equazioni (6.14) esprimono il potenziale di disturbo in termini di un *potenziale di doppio strato*, ovvero di un integrale del tipo:

$$\int_{\partial\Omega_b} ds' \mu(\mathbf{x}') \partial_{\boldsymbol{\nu}'} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

(μ è la densità di doppio strato), e la funzione di corrente di disturbo in termini di un *potenziale di semplice strato*, ovvero di un integrale del tipo:

$$\int_{\partial\Omega_b} ds' \chi(\mathbf{x}') G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

(χ è la densità di semplice strato). Queste stesse definizioni possono essere poste anche in 3 dimensioni. Come è discusso nelle appendici 6.12 e 6.13, in generale sia in 2 che in 3 dimensioni, il potenziale di doppio strato è discontinuo attraverso la $\partial\Omega_b$, così come la derivata normale del potenziale di semplice strato.

Calcolando il limite sul generico punto $\mathbf{x} \in \partial\Omega_b$ della prima rappresentazione (6.14) ed utilizzando il risultato discusso nell'appendice 6.12, otteniamo per φ' l'equazione integrale di Fredholm di seconda specie:⁵

$$\frac{1}{2} \varphi'(\mathbf{x}) + \int_{\partial\Omega_b} ds' \varphi'(\mathbf{x}') \partial_{\boldsymbol{\nu}'} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \Phi'(\mathbf{x}) . \quad (6.15)$$

Analogamente, calcolando la derivata lungo la direzione della normale $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ alla $\partial\Omega_b$ nel suo generico punto \mathbf{x} della seconda rappresentazione (6.14):

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \nabla_{\mathbf{x}''} \psi'(\mathbf{x}'') = \boldsymbol{\nu} \cdot \nabla_{\mathbf{x}''} \int_{\partial\Omega_b} ds' G(\mathbf{x}'' - \mathbf{x}') \partial_{\boldsymbol{\nu}'} \psi'(\mathbf{x}') + \boldsymbol{\nu} \cdot \nabla_{\mathbf{x}''} \Psi'(\mathbf{x}'')$$

ed effettuando il limite per $\mathbf{x}'' \rightarrow \mathbf{x}$ dall'esterno del corpo otteniamo, sulla base del risultato discusso nell'Appendice 6.13, l'equazione integrale di Fredholm di seconda specie nella derivata normale della ψ' :

⁵ Osserviamo che per $\mathbf{x} \in \partial\Omega_b \cap B_\varepsilon(\mathbf{x}')$, con ε sufficientemente piccolo, fissando in \mathbf{x}' l'origine di una ascissa curvilinea locale s' abbiamo: $\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \boldsymbol{\tau}' s' + \mathcal{K}' \boldsymbol{\nu}' s'^2 / 2 + O(s'^3)$ ($\boldsymbol{\tau}'$ è il versore tangente, \mathcal{K}' è la curvatura in $\mathbf{x}' \in \partial\Omega_b$). Ne segue:

$$\partial_{\boldsymbol{\nu}'} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = - \frac{\boldsymbol{\nu}' \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{2\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} = \frac{\mathcal{K}'}{2} + O(s') ,$$

che prova la regolarità di $\partial_{\boldsymbol{\nu}'} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ in $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$. Nello stesso modo si procede per la derivata $\partial_{\boldsymbol{\nu}} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$.

$$\frac{1}{2} \partial_{\boldsymbol{\nu}} \psi'(\mathbf{x}) - \int_{\partial \Omega_b} ds' \partial_{\boldsymbol{\nu}} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \partial_{\boldsymbol{\nu}'} \psi'(\mathbf{x}') = \partial_{\boldsymbol{\nu}} \Psi'(\mathbf{x}) . \quad (6.16)$$

Notiamo che, essendo $\partial_{\boldsymbol{\nu}'} \psi' = -u'_\tau$, l'equazione (6.16) può essere pensata scritta nella componente tangente alla $\partial \Omega_b$ della velocità di perturbazione \mathbf{u}' .

Sulla risoluzione numerica delle equazioni (6.15, 6.16) rimandiamo a testi specialistici [2]. In questa sede ci interessa soltanto assicurare che possono essere ottenute approssimazioni per φ' e per $\partial_{\boldsymbol{\nu}} \psi'$ su $\partial \Omega_b$. A partire da queste, poi, le rappresentazioni (6.14) consentono di approssimare φ' e ψ' in tutto il campo.

Infine, a proposito della rappresentazione integrale per ψ' (6.13), osserviamo che, sostituendo a secondo membro per il valore della ψ' sul corpo $\psi_b - \psi_\infty$ e per $\partial_{\boldsymbol{\nu}'} \psi'$ il valore $-u_\tau - \partial_{\boldsymbol{\nu}'} \psi_\infty$, (u_τ la velocità tangente su $\partial \Omega_b$, eventualmente nulla per un fluido viscoso), otteniamo:

$$\begin{aligned} \psi'(\mathbf{x}) = & -G * \omega(\mathbf{x}) - \int_{\partial \Omega_b} ds' u_\tau(\mathbf{x}') G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \\ & + \int_{\partial \Omega_b} ds' [\psi_\infty(\mathbf{x}') \partial_{\boldsymbol{\nu}'} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \partial_{\boldsymbol{\nu}'} \psi_\infty(\mathbf{x}')] . \end{aligned}$$

Integrando la seconda identità di Green (4.24) all'interno del corpo Ω_b , troviamo che il terzo addendo a secondo membro della relazione precedente vale $\Gamma G(\mathbf{x})$. Ne segue per la funzione di corrente ψ e per la velocità \mathbf{u} in presenza di un corpo Ω_b :

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}) &= \mathbf{u}_\infty^\perp \cdot \mathbf{x} - G * \omega(\mathbf{x}) - \int_{\partial \Omega_b} ds' u_\tau(\mathbf{x}') G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \mathbf{u}_\infty + \mathbf{K} * \omega(\mathbf{x}) + \int_{\partial \Omega_b} ds' u_\tau(\mathbf{x}') \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') . \end{aligned} \quad (6.17)$$

Le relazioni (6.17) evidenziano che, per un fluido viscoso, la funzione di corrente e quindi la velocità si scrivono nello stesso modo in cui si scriverebbero in assenza del corpo, con l'intesa di estendere la convoluzione al campo fluido Ω'_b . Se il fluido è non viscoso, invece, occorre aggiungere il contributo della curva vorticosa $\partial \Omega_b$, sulla quale è presente una densità di circolazione u_τ determinata dalla vorticità di campo, in base all'equazione (6.16).

6.4 Analisi del flusso piano col potenziale complesso

Limitando l'analisi ai flussi potenziali, in questo paragrafo studieremo alcuni semplici, ma istruttivi, esempi di flussi piani attorno a corpi, utilizzando il potenziale complesso ed i vari modelli di singolarità, introdotti nel § 4.4.1.

6.4.1 Flusso nel semipiano

L'esempio più semplice è quello del flusso in un semipiano (ad esempio, quello a parte immaginaria positiva). Per determinare il potenziale complesso di

una qualunque singolarità posta nel semipiano ricordiamo che la parte immaginaria di w è la corrispondente funzione di corrente, la quale deve essere costante sulla frontiera del corpo e quindi, nel caso specifico, sull'asse reale. Se w è il potenziale complesso associato alla singolarità, il nuovo potenziale complesso⁶ $w(x) + \bar{w}(\bar{x})$ ha parte immaginaria nulla e quindi costante sull'asse reale ($x = \bar{x}$).

Specifichiamo i potenziali complessi delle singolarità elementari nel punto \mathbf{x}_0 , con $\text{Im}(\mathbf{x}_0) > 0$, viste nel paragrafo 4.4.1 per il flusso nel semipiano $\text{Im}(x) > 0$:

$$w(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{\Gamma}{2\pi i} [\log(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - \log(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_0)] & \text{vortice puntiforme} \\ \frac{q}{2\pi} [\log(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \log(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_0)] & \text{sorgente} \\ -\frac{Q}{2\pi} \left(\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0} + \frac{\bar{\mathbf{d}}}{\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_0} \right) & \text{doppietta} \end{cases} \quad (6.18)$$

Dalle espressioni (6.18) segue che un vortice puntiforme è sottoposto, in presenza di una parete piana, al campo di velocità generato da un vortice fittizio (chiamato “vortice immagine”) controrotante e posto in posizione speculare rispetto alla parete, come anche le immagini della sorgente e della doppietta. Una sorgente o una doppietta sono sottoposte al campo di velocità generato dalle immagini, che hanno la stessa intensità. La doppietta immagine è orientata lungo una direzione ($\bar{\mathbf{d}}$), speculare rispetto a quella propria (\mathbf{d}).

È molto interessante notare che, mentre in tutto il piano una singolarità isolata non si muove (induce su se stessa una velocità nulla), in presenza della parete non è più così. Sulla singolarità, infatti, agisce il campo dell’immagine. Quest’ultima si muove a sua volta non col campo locale (non avrebbe senso, in quanto l’immagine è fuori dal dominio fluido), ma rimanendo speculare alla singolarità.

- ◊ **Esercizio:** Calcolare la legge oraria del moto di un vortice puntiforme, o di una sorgente, o di una doppietta posti nel semipiano. In particolare, verificare che la doppietta si muove lungo d . (6.19)
- ◊ **Esercizio:** Utilizzando l’equazione di Bernoulli (2.49), calcolare il campo di pressione sull’asse x (parete) nei tre casi dell’esercizio (6.19).

⁶ Perché sommiamo a $w(x)$ la funzione $\bar{w}(\bar{x})$ e non $\bar{w}(x)$? Anche quest’ultima garantirebbe, infatti, la medesima condizione sull’asse reale. La risposta è molto semplice, ma piuttosto profonda: $\bar{w}(x)$ non è più una funzione olomorfa di x !

- ◊ **Esercizio:** Escludendo effetti autoindotti, studiare il moto nel semipiano superiore di due sorgenti di uguale portata q , poste nei punti $\mathbf{x}_1(0)$ ed $\mathbf{x}_2(0)$ con $\mathbf{x}_2(0) = -\overline{\mathbf{x}_1}(0)$, assumendo vera questa condizione di simmetria per tutti i tempi.

Suggerimento. Risolvere l'equazione di evoluzione per $\delta(t) = |\mathbf{x}_1(t)|^2$ (con $\delta_0 = \delta(0)$), ottenendo $\delta(t) = \delta_0 + \alpha t$, con $\alpha = 3q/(2\pi)$. Poi risostituire nelle equazioni per le parti reale ($x_1 > 0$, $x_1(0) = x_{10}$) ed immaginaria ($y_1 > 0$, $y_1(0) = y_{10}$) di \mathbf{x}_1 .

Risposta:

$$x_1(t) = \sqrt{\{(x_{10}^2 - y_{10}^2) [\delta(t)/\delta_0]^{1/3} + \delta(t)\}/2},$$

ed una relazione analoga, col primo dei due addendi sotto radice con il segno $-$, vale per $y_1(t)$.

6.4.2 Flusso all'esterno di un cerchio

La presenza di un corpo di forma circolare può essere considerata utilizzando il *teorema del cerchio*:

Sia \mathbf{w}' il potenziale complesso del flusso in assenza del cerchio. Il potenziale complesso \mathbf{w} del flusso in presenza del cerchio, avente centro nel punto \mathbf{x}_c e raggio r , si scrive:

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \mathbf{w}'(\mathbf{x}) + \overline{\mathbf{w}'}\left(\frac{r^2}{\overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{x}}_c}\right). \quad (6.20)$$

Questo teorema può essere provato calcolando direttamente il potenziale complesso risultante in un qualunque punto del corpo $\mathbf{x} = \mathbf{x}_c + r e^{i\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi]$ e facendo vedere che la parte immaginaria di questo potenziale è identicamente nulla in θ .

- ◊ **Esercizio:** Utilizzando il teorema del cerchio, ritrovare il potenziale complesso per la corrente traslazionale uniforme (u_∞ parallela all'asse reale) che investe un cerchio di raggio r centratò nell'origine, già discusso nel §5.1.1.

Suggerimento: partire dal potenziale della corrente traslazionale uniforme $\mathbf{w}'(\mathbf{x}) = u_\infty \mathbf{x} \dots$

Le tre singolarità già esaminate nel caso di parete piana in $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ ($|\mathbf{x}_0| > 1$) danno luogo in presenza del cerchio unitario:

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{\Gamma}{2\pi i} \left[\log(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - \log \left(\mathbf{x} - \frac{1}{\bar{\mathbf{x}}_0} \right) + \log \mathbf{x} \right] \\ \frac{q}{2\pi} \left[\log(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \log \left(\mathbf{x} - \frac{1}{\bar{\mathbf{x}}_0} \right) - \log \mathbf{x} \right] \\ \frac{Q}{2\pi} \left(-\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0} + \frac{\bar{\mathbf{d}}/\bar{\mathbf{x}}_0^2}{\mathbf{x} - 1/\bar{\mathbf{x}}_0} \right) \end{cases} \quad (6.21)$$

(nel potenziale complesso della doppietta, abbiamo eliminato un contributo costante in \mathbf{x}). Le espressioni (6.21) mostrano che ad un vortice posto in \mathbf{x}_0 corrispondono *due* vortici immagine: uno controrotante posto nel punto $1/\bar{\mathbf{x}}_0$ (notare che questo punto ha la medesima fase di \mathbf{x}_0), necessario per imporre la condizione di impermeabilità sulla frontiera del cilindro, ed uno corotante posto al centro del cilindro, per ripristinare la circolazione attorno al corpo. Nello stesso modo, ad una sorgente posta all'esterno del cilindro corrispondono due sorgenti immagine: una dello stesso segno posta in $1/\bar{\mathbf{x}}_0$ ed una seconda di segno opposto nel centro del cilindro, che ripristina a zero la portata volumetrica uscente dal corpo. Una estesa trattazione per un insieme di vortici puntiformi esterni ad una cilindro di sezione circolare, con particolare riguardo alle relazioni integrali discusse nel seguito di questo capitolo, è riportata nell'appendice 6.15.

- ◊ **Esercizio:** Calcolare la legge oraria del moto di una singolarità di vortice puntiforme o di sorgente esterna al cerchio unitario.

6.4.3 Trasformazioni conformi

Il flusso attorno al cerchio unitario è particolarmente importante perché da questo si può ricostruire *in forma analitica* il flusso attorno ad un qualsiasi altro corpo, la cui frontiera (nel piano \mathbf{z}) sia mappata in quella del cilindro (nel piano ζ) dalla trasformazione:

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}(\zeta), \quad (6.22)$$

con $\mathbf{z}(\zeta)$ invertibile al di fuori del corpo, olomorfa e con inversa olomorfa e:

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{z}(\zeta)}{\zeta} = 1. \quad (6.23)$$

La condizione (6.23) si chiama *congruenza all'infinito* ed implica che, a grandi distanze dal cilindro nel piano ζ , la trasformazione (6.22) si riduca all'identità. La trasformazione olomorfa (6.22), invertibile con inversa olomorfa e congruente all'infinito prende il nome di *trasformazione conforme* tra il piano del cilindro ζ e quello del flusso (“piano fisico”) \mathbf{z} .

La proprietà fondamentale di una trasformazione conforme è di conservare gli angoli, da cui l'aggettivo “conforme”. Infatti, se nel punto ζ^* si considerano due curve $\zeta_{1,2}$, parametrizzate nelle ascisse curvilinee $\sigma_{1,2}$, possiamo scrivere:

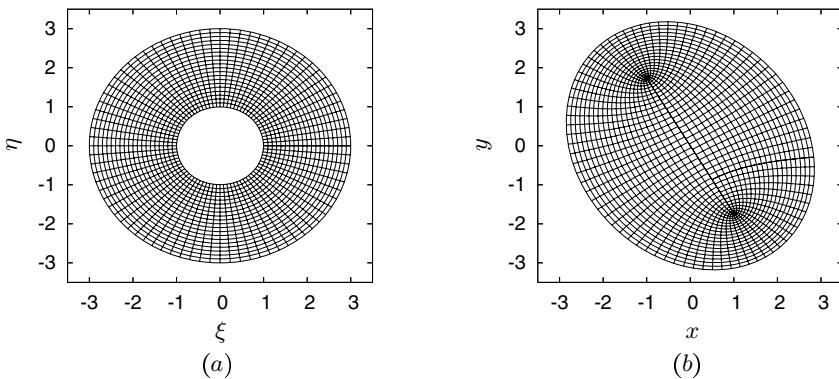


Figura 6.3. Trasformazione conforme (6.26) con $\alpha = 60^\circ$: griglia nel piano $\zeta = \xi + i\eta$ (a) e griglia corrispondente nel piano $z = x + i y$ (b). Cosa succede alle estremità della lastra?

$$e^{i\alpha_c} = \frac{d\bar{\zeta}_1}{d\sigma_1} \frac{d\zeta_2}{d\sigma_2},$$

poiché la parte reale del numero complesso a secondo membro è il prodotto scalare tra i due vettori $d\zeta_1/d\sigma_1$ e $d\zeta_2/d\sigma_2$ (e quindi $\cos \alpha_c$), mentre la parte immaginaria è la componente normale al piano del moto del prodotto vettoriale ($\sin \alpha_c$). Effettuando la trasformazione conforme $z = z(\zeta)$, le curve immagini $z_{1,2}$ risulteranno parametrizzate in $\sigma_{1,2}$, che però, *non saranno più parametri naturali*. Considerando che per $i = 1$ o 2 :

$$\frac{dz_i}{d\sigma_i} = z'(\zeta_i) \frac{d\zeta_i}{d\sigma_i}$$

($z' = dz/d\zeta$), da cui segue che il modulo di $dz_i/d\sigma_i$ nel punto z^* , trasformato di ζ^* , è pari al modulo m della derivata $dz/d\zeta$ della trasformazione nel medesimo punto. Nel piano fisico abbiamo allora:

$$e^{i\alpha_f} = \frac{1}{m^2} \frac{d\bar{z}_1}{d\sigma_1} \frac{dz_2}{d\sigma_2} = \frac{1}{m^2} \bar{z}' \frac{d\bar{\zeta}_1}{d\sigma_1} z' \frac{d\zeta_2}{d\sigma_2} = \frac{d\bar{\zeta}_1}{d\sigma_1} \frac{d\zeta_2}{d\sigma_2} = e^{i\alpha_c}.$$

Ne segue che, *localmente*, la trasformazione conforme $z = z(\zeta)$ altera le lunghezze per un fattore m e conserva gli angoli. Vedremo poi che se la trasformazione diviene singolare in un punto, nel punto di singolarità questa proprietà viene violata.

Noto il potenziale $w_c(\zeta)$ nel piano del cerchio, il potenziale $w_f(z)$ nel piano fisico si ottiene utilizzando la trasformazione: $w_f(z) = w_c[\zeta(z)]$ e così pure la velocità complessa u_f :

$$\bar{u}_f[z(\zeta)] = \frac{dw_f}{dz}[z(\zeta)] = \frac{d\zeta}{dz}[z(\zeta)] \frac{dw_c}{d\zeta}(\zeta) = \frac{\bar{u}_c(\zeta)}{z'(\zeta)}. \quad (6.24)$$

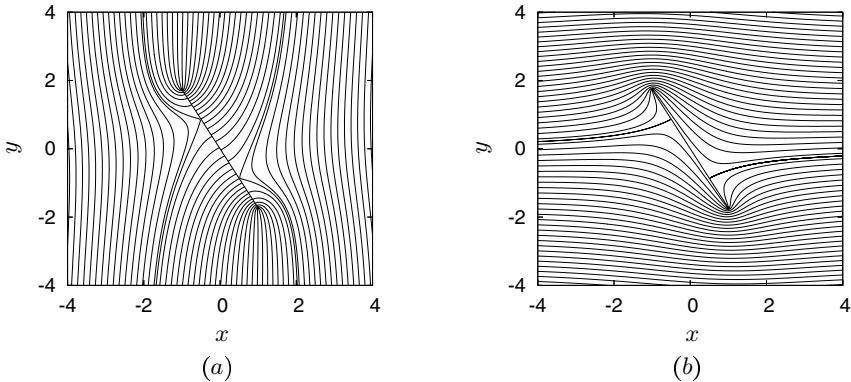


Figura 6.4. Linee isopotenziale (a) e di corrente (b) per una lastra piana investita da una corrente uniforme, ad incidenza $\alpha = 60^\circ$.

Ad esempio la trasformazione:

$$z(\zeta) = \zeta + \frac{1}{\zeta} \quad (6.25)$$

mappa il cerchio unitario in una lastra piana di lunghezza 4 posta lungo l'asse reale. Infatti, se $\zeta = e^{i\theta}$ è il generico punto sul cerchio, il punto nel piano fisico è dato da: $z = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta$, che è reale e varia tra -2 e 2. Se si vuole studiare il caso di una lastra piana posta ad una incidenza α in una corrente uniforme, occorre effettuare tre trasformazioni (di cui la prima e la terza *non conformi*) in successione, come è descritto dallo schema seguente:

$\zeta \rightarrow \zeta'$ da un cerchio investito da una corrente lungo l'asse reale ad un cerchio investito da una corrente ad incidenza α :

$$\zeta' = \zeta e^{i\alpha}$$

$\zeta' \rightarrow z'$ da un cerchio investito da una corrente ad incidenza α ad una lastra piana disposta lungo l'asse reale in una corrente alla medesima incidenza (6.25):

$$z' = \zeta' + \frac{1}{\zeta'}$$

$z' \rightarrow z$ da una lastra piana disposta lungo l'asse reale ed investita da una corrente ad incidenza α ad una lastra piana ad incidenza α in una corrente lungo l'asse reale:

$$z = z' e^{-i\alpha}.$$

La composizione delle tre trasformazioni successive porta a scrivere la trasformazione risultante come:

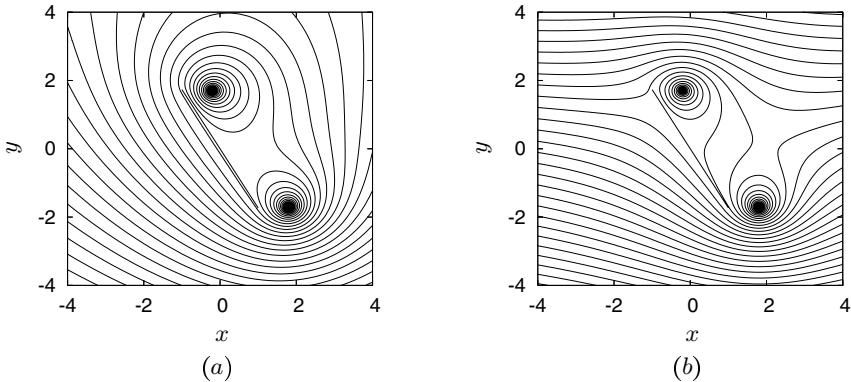


Figura 6.5. Linee di corrente per una lastra piana investita da una corrente uniforme $u_\infty = 1$ ad incidenza $\alpha = 60^\circ$, in presenza di due vortici nei punti $z_1 = -0.2 + 1.7i$, $z_2 = 1.8 - 1.7i$ con $\Gamma_b = 0$ (a) e $\Gamma_b = 4$ (b). Le circolazioni dei due vortici sono calcolate imponendo la condizione di Kutta sui due estremi della lastra: $\Gamma_1 \simeq +22.23233$, $\Gamma_2 \simeq +24.67786$ in (a) e $\Gamma_1 \simeq -6.84080$, $\Gamma_2 \simeq +8.91820$ in (b).

$$z = \zeta + \frac{\chi^2}{\zeta} \quad (6.26)$$

($\chi = e^{-i\alpha}$), che risulta conforme (vedi Fig. 6.3). Ne segue che il campo di velocità attorno a questa lastra piana si scrive in base alla (6.24) a partire dal campo attorno al cerchio:

$$\bar{u}_c(\zeta) = u_\infty \left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right)$$

semplicemente dividendo per la derivata della (6.26):

$$\bar{u}_f(\zeta) = u_\infty \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 - \chi^2}. \quad (6.27)$$

Occorre osservare che la velocità diverge in corrispondenza delle due estremità della lastra $\zeta = \pm\chi$ ed è invece nulla in $\zeta = \pm 1$, il che significa che in $z = \mp(1 + \cos 2\alpha - i \sin 2\alpha)$ sono posizionati i punti di ristagno *anteriore* e *posteriore*. In Fig. 6.4 sono disegnate le linee isopotenziale e di corrente per incidenza $\alpha = 60^\circ$. Notare che le linee isopotenziale sono sempre normali alla $\partial\Omega_b$ (sulla frontiera del corpo la velocità è tangente), con l'importante eccezione dei punti di ristagno. La stessa cosa vale per le linee di corrente, tangenti al corpo a meno dei due punti di ristagno.

Il fatto che la velocità diverge sui due estremi della lastra è dovuto all'aggravamento della corrente di questi punti. Questa è una limitazione del modello

e può essere superata tenendo conto della presenza di una scia a valle del corpo e quindi, in qualche modo, dell'azione della diffusione. Immaginiamo, per semplicità, di poter ridurre la scia a due soli vortici puntiformi, posizionati nei punti $z_{1,2} = z(\zeta_{1,2})$. Calcoliamo le loro circolazioni imponendo proprio che la velocità (nel piano fisico) rimanga finita sugli estremi della lastra, ovvero, in base al legame (6.24) tra \mathbf{u}_c e \mathbf{u}_f , che \mathbf{u}_c si annulli in tali punti, come \mathbf{z}' . Le circolazioni $\Gamma_{1,2}$ seguono allora dalla soluzione del sistema lineare⁷ $\bar{\mathbf{u}}_c(+\chi) = \mathbf{0}, \bar{\mathbf{u}}_c(-\chi) = \mathbf{0}$:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{11}\Gamma_1 + \mathbf{a}_{12}\Gamma_2 = \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_{21}\Gamma_1 + \mathbf{a}_{22}\Gamma_2 = \mathbf{b}_2 \end{cases}.$$

Questa procedura va sotto il nome di *condizione di Kutta* e può essere utilizzata anche in modo dinamico, per simulare la formazione di una scia. In Fig. 6.5 sono riportati due esempi di linee di corrente per una lastra ad incidenza $\alpha = 60^\circ$, con la circolazione attorno al corpo (Γ_b) nulla in (a) e pari a 4 in (b). Nell'Appendice 6.14 trattiamo l'applicazione di questa tecnica allo studio del flusso attorno ad un profilo alare, facendo uso di una opportuna trasformazione conforme.

6.5 Il teorema di Blasius

Noto il potenziale complesso w per il flusso attorno ad un corpo Ω_b , si può agevolmente calcolare la risultante degli sforzi di pressione agenti sul corpo. Orientando la normale uscente da Ω_b ed utilizzando l'equazione di Bernoulli (2.49), otteniamo:

$$\mathbf{F}_b = \int_{\partial\Omega_b} ds p(-\boldsymbol{\nu}) = \underbrace{\rho \int_{\partial\Omega_b} ds \boldsymbol{\nu} \partial_t \varphi}_{\mathbf{F}_{ns}} + \underbrace{\rho \int_{\partial\Omega_b} ds \boldsymbol{\nu} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2}}_{\mathbf{F}_s}. \quad (6.28)$$

Il primo addendo si chiama convenzionalmente “*termine non stazionario*” della forza, mentre il secondo si chiama “*termine stazionario*”, pur essendo ovviamente entrambi gli addendi funzioni del tempo. Poiché $\boldsymbol{\nu} = -i\boldsymbol{\tau}$ e considerando che la parte immaginaria del potenziale complesso è costante sulla

⁷ I coefficienti del sistema sono:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{11} &= 1/(\chi - \zeta_1) - 1/(\chi - 1/\bar{\zeta}_1) + 1/\chi \\ \mathbf{a}_{12} &= 1/(\chi - \zeta_2) - 1/(\chi - 1/\bar{\zeta}_2) + 1/\chi \\ \mathbf{a}_{21} &= 1/(\chi + \zeta_1) - 1/(\chi + 1/\bar{\zeta}_1) + 1/\chi \\ \mathbf{a}_{22} &= 1/(\chi + \zeta_2) - 1/(\chi + 1/\bar{\zeta}_2) + 1/\chi \\ \mathbf{b}_1 &= -2\pi i(1 - 1/\chi^2) - \Gamma_b/\chi \\ \mathbf{b}_2 &= +2\pi i(1 - 1/\chi^2) - \Gamma_b/\chi \end{aligned}$$

frontiera del corpo (quindi $\partial_t \varphi = \partial_t \mathbf{w} + \text{costante}$), il termine non stazionario della sollecitazione diviene:

$$\mathbf{F}_{ns} = \rho \int_{\partial\Omega_b} ds \boldsymbol{\nu} \partial_t \varphi = -i \rho \int_{\partial\Omega_b} dz \partial_t \mathbf{w}, \quad (6.29)$$

essendo $dz = \tau ds$ l'elemento di curva sulla frontiera del corpo. Per quanto riguarda il termine stazionario, osservato che:

$$|\mathbf{u}|^2 dz = \overline{\partial_z \mathbf{w}} \partial_z \mathbf{w} dz = \overline{\partial_z \mathbf{w}} d\mathbf{w} = \overline{\partial_z \mathbf{w}} \overline{d\mathbf{w}} = \overline{(\partial_z \mathbf{w})^2} dz,$$

essendo $d\mathbf{w}$ reale sul corpo ($d\mathbf{w} = \overline{d\mathbf{w}}$), si ottiene:

$$\mathbf{F}_s = -\frac{i}{2} \rho \overline{\int_{\partial\Omega_b} dz (\partial_z \mathbf{w})^2}. \quad (6.30)$$

La forma analitica della risultante della sollecitazione sul corpo è quindi data dalla espressione seguente:

$$\mathbf{F}_b = -i \rho \int_{\partial\Omega_b} dz \partial_t \mathbf{w} - \frac{i}{2} \rho \overline{\int_{\partial\Omega_b} dz (\partial_z \mathbf{w})^2} \quad (6.31)$$

che è facilmente applicabile utilizzando il teorema dei residui.

Ad esempio, si è visto che una sorgente posta in z_0 (con $|z_0| > 1$) e con intensità q in presenza di un cerchio unitario induce un campo il cui potenziale si scrive:

$$\mathbf{w}(z, t) = \frac{q}{2\pi} \left\{ \log[z - z_0(t)] + \log \left[z - \frac{1}{\bar{z}_0(t)} \right] - \log z \right\}.$$

In base alla precedente espressione del potenziale calcoliamo le derivate in t ed in z :

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{w}(z) &= \frac{q}{2\pi} \left[-\frac{\dot{z}_0}{z - z_0} + \frac{\dot{\bar{z}}_0/\bar{z}_0^2}{z - 1/\bar{z}_0} \right] \\ \partial_z \mathbf{w}(z) &= \frac{q}{2\pi} \left(\frac{1}{z - z_0} + \frac{1}{z - 1/\bar{z}_0} - \frac{1}{z} \right) \end{aligned}$$

per cui il $\partial_t \mathbf{w}$ ha un solo polo semplice interno al cilindro (il secondo addendo nella espressione precedente) ed applicando il teorema dei residui interno il contributo non stazionario diviene:

$$\mathbf{F}_{ns} = \rho q \frac{\dot{\bar{z}}_0}{\bar{z}_0^2}. \quad (6.32)$$

Si osservi che questo contributo dipende, oltre che dalla posizione della sorgente z_0 , anche dalla velocità \dot{z}_0 di questa. Calcolando il quadrato della derivata in z del potenziale ed applicando ancora il teorema dei residui si ha poi:

$$\mathbf{F}_s = \frac{\rho q^2}{2\pi} \frac{z_0}{|z_0|^2(|z_0|^2 - 1)}. \quad (6.33)$$

Occorre osservare che questa forza è allineata con la retta congiungente il centro del cilindro e la sorgente ed è *sempre attrattiva*, indipendentemente dal segno dell'intensità q della sorgente. Infatti, in base all'equazione di Bernoulli (2.49), la pressione dal lato adiacente alla singolarità è sempre più bassa di quella dal lato opposto. Un esempio meno banale di applicazione di questo teorema è fornito nell'appendice 6.14.

- ◊ **Esercizio:** Calcolare la forza agente sul cilindro in presenza di un vortice puntiforme e con una assegnata circolazione attorno al corpo.
Suggerimento: scrivere preliminarmente l'equazione della dinamica del vortice puntiforme.

- ◊ **Esercizio:** Utilizzando la trasformazione conforme (6.26), calcolare la forza agente su una lastra piana posta ad incidenza α in una corrente traslazionale uniforme, nota la circolazione Γ_b attorno alla lastra.
Suggerimento: prestare attenzione al cambiamento di variabile che riporta gli integrali sulla lastra presenti a secondo membro della (6.31) ad integrali sul cerchio unitario.

Il teorema di Blasius fornisce uno strumento utile per calcolare la forza che agisce su un corpo quando il flusso è potenziale, ovvero quando nel campo non è presente vorticità oppure quest'ultima è concentrata in punti singolari (vortici puntiformi) che sono pensati *esterni* al campo fluido. In generale, invece, un corpo investito da una corrente (uniforme) produce vorticità all'interno del campo che poi viene convetta a valle, formando la scia. L'approccio descritto nel presente paragrafo non è applicabile allo studio di tali flussi, se non modellando opportunamente sia la *produzione di vorticità* da parte del corpo (approssimata con la condizione di Kutta) che la conseguente *dinamica della vorticità* (approssimata con la dinamica di un sistema di vortici puntiformi). Tuttavia, è molto importante perché fornisce una prima, semplice descrizione *analitica* degli effetti della dinamica del campo esterno sulla risultante delle sollecitazioni sul corpo. Nell'analisi della sollecitazione esercitata da un fluido su un corpo per un flusso piano si possono invece utilizzare risultati rigorosi ottenuti nelle ipotesi più generali di fluido viscoso e flusso rotazionale. A questi è dedicata la rimanente parte del capitolo.

6.6 La forza su un corpo immerso in un flusso piano

In questo paragrafo dedurremo una relazione di natura integrale tra la risultante delle forze scambiate tra fluido e corpo e la derivata nel tempo del momento del primo ordine della vorticità. Abbandoniamo l'ipotesi di flusso a potenziale ed ammettiamo anche che il fluido possa essere viscoso e quindi

il flusso rotazionale. Osserviamo che, se il fluido è non viscoso, la frontiera del corpo deve essere pensata come una curva vorticosa, attraverso la quale il campo di velocità passa dal valore limite esterno $u_\tau \boldsymbol{\tau}$ al valore **0**. La vorticità presente in tal caso sulla $\partial\Omega_b$ ammette una rappresentazione nella forma distribuzionale (4.59) e prende il nome di *vorticità di parete*.

Abbiamo già introdotto il momento del primo ordine della vorticità $\mathbf{M}(t)$ nel sottoparagrafo 4.4.2 qui lo estendiamo al caso in cui sia presente un corpo Ω_b , considerandone anche la restrizione $\mathbf{M}(R, t)$ ad una sfera $B_R(\mathbf{0})$ di raggio R e centrata nell'origine del riferimento:

$$\mathbf{M}(t) := \int_{\Omega'_b} d\mathbf{x} \ \mathbf{x}\omega(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{M}(R, t) := \int_{\Omega'_b \cap B_R(\mathbf{0})} d\mathbf{x} \ \mathbf{x}\omega(\mathbf{x}, t), \quad (6.34)$$

in cui R è scelto così grande da far risultare $\Omega_b \subset B_R(\mathbf{0})$. Occorre notare che nelle definizioni (6.34) appare la vorticità ω presente nel campo fluido, che prende il nome di *vorticità di campo*.

Calcoliamo innanzitutto la derivata nel tempo di $\mathbf{M}(R, t)$:

$$\partial_t \mathbf{M}(R, t) = \int_{\Omega'_b \cap B_R(\mathbf{0})} d\mathbf{x} \ \mathbf{x}\partial_t\omega = \int_{\Omega'_b \cap B_R(\mathbf{0})} d\mathbf{x} \ \mathbf{x}[-\nabla \cdot (\omega \mathbf{u}) + \nu \nabla^2 \omega], \quad (6.35)$$

in base alla equazione di Helmholtz (4.2). Occorre ora valutare i due termini $\mathbf{x}\nabla \cdot (\omega \mathbf{u})$ e $\mathbf{x}\nabla^2\omega$, tentando di riportarli ad una forma adatta all'uso delle formule di Green. Iniziamo notando che:

$$\begin{aligned} \omega \mathbf{u} &= (-\partial_k \partial_k \psi)(-\mathbf{e}_i \partial_i^\perp \psi) \\ &= \mathbf{e}_i [\partial_k (\partial_k \psi \partial_i^\perp \psi) - \partial_k \psi \partial_i^\perp (\partial_k \psi)] \\ &= \mathbf{e}_i [\partial_k (\partial_k \psi \partial_i^\perp \psi) - \frac{1}{2} \partial_i^\perp (\partial_k \psi \partial_k \psi)] \\ &= -\partial_k (u_k^\perp \mathbf{u}) - \nabla^\perp \frac{|\mathbf{u}|^2}{2}, \end{aligned} \quad (6.36)$$

relazione che ci permette di riscrivere il primo termine nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}\nabla \cdot (\omega \mathbf{u}) &= \mathbf{e}_i x_i \partial_k (\omega u_k) \\ &= \mathbf{e}_i [\partial_k (x_i \omega u_k) - \omega u_k \partial_k x_i] \\ &= \partial_k (\mathbf{x}\omega u_k) + \partial_k (u_k^\perp \mathbf{u}) + \nabla^\perp \frac{|\mathbf{u}|^2}{2}. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Il termine viscoso è più semplice da riorganizzare:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}\nabla^2\omega &= \mathbf{e}_i x_i \partial_k \partial_k \omega \\ &= \mathbf{e}_i [\partial_k (x_i \partial_k \omega) - \partial_k \omega \partial_k x_i] \\ &= \partial_k (\mathbf{x}\partial_k \omega) - \nabla \omega. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Utilizzando le relazioni (6.37,6.38) appena dedotte nella equazione (6.35) ed applicando le formule di Green riportiamo l'integrale su $\Omega'_b \cap B_R(\mathbf{0})$ ad un integrale sulla frontiera $\partial B_R(\mathbf{0}) \cup (-\partial \Omega_b)$ di questo insieme:

$$\partial_t \mathbf{M}(R, t) = \left[\int_{\partial B_R(\mathbf{0})} - \int_{\partial \Omega_b} \right] ds \left(-\mathbf{x} \omega u_\nu + \nu \mathbf{x} \partial_\nu \omega - \nu \omega \boldsymbol{\nu} + \mathbf{u} u_\tau - \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \boldsymbol{\tau} \right). \quad (6.39)$$

Nell'integrale sul corpo è utile sostituire una forma limite delle equazioni di Navier-Stokes scritte per un flusso a densità costante, piano ed utilizzando l'accelerazione di Lagrange. Occorre a tale proposito notare che in un flusso piano abbiamo $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = \omega \mathbf{u}^\perp$ ed inoltre, per un fluido isocoro ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$), possiamo scrivere:

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \partial_{11}^2 u_1 + \partial_{22}^2 u_1 \\ \partial_{11}^2 u_2 + \partial_{22}^2 u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_2 (\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1) \\ \partial_1 (\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1) \end{pmatrix} = \nabla^\perp \omega.$$

In tal modo, le equazioni di Navier-Stokes si riducono alla forma seguente:

$$\partial_t \mathbf{u} + \nabla \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \omega \mathbf{u}^\perp = -\nabla \tilde{p} + \nu \nabla^\perp \omega,$$

essendo $\tilde{p} = p/\rho$. Scrivendo la relazione precedente al limite sul corpo e moltiplicando scalarmente tale limite per il versore tangente $\boldsymbol{\tau}$ abbiamo:

$$\partial_t u_\tau + \partial_s \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \omega u_\nu = -\partial_s \tilde{p} + \nu \partial_\nu \omega, \quad (6.40)$$

in cui s è l'ascissa curvilinea sulla $\partial \Omega_b$. Moltiplichiamo entrambi i membri della relazione precedente per il vettore posizione $\mathbf{x}(s)$ sulla $\partial \Omega_b$:

$$-\mathbf{x} \omega u_\nu + \nu \mathbf{x} \partial_\nu \omega = \partial_t (\mathbf{x} u_\tau) + \partial_s \left(\frac{1}{2} \mathbf{x} |\mathbf{u}|^2 \right) - \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \boldsymbol{\tau} + \partial_s (\mathbf{x} \tilde{p}) - \tilde{p} \boldsymbol{\tau},$$

e sostituiamo nella (6.39), considerando che $u_\nu \equiv 0$ sul corpo e che le derivate in s forniscono un contributo nullo ($\partial \Omega_b$ è una curva chiusa), ottenendo:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{M}_1(R, t) &= \int_{\partial B_R(\mathbf{0})} ds \left(-\mathbf{x} \omega u_\nu + \nu \mathbf{x} \partial_\nu \omega - \nu \omega \boldsymbol{\nu} + \mathbf{u} u_\tau - \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \boldsymbol{\tau} \right) + \\ &- \int_{\partial \Omega_b} ds [\partial_t (\mathbf{x} u_\tau) - |\mathbf{u}|^2 \boldsymbol{\tau} + \mathbf{u} u_\tau - \tilde{p} \boldsymbol{\tau} - \nu \omega \boldsymbol{\nu}]. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Nel primo integrale per le proprietà all'infinito della vorticità e del suo gradiente, i primi tre termini, contenenti ω , hanno limite nullo per $R \rightarrow +\infty$. L'unica quantità da valutare è la seguente

$$\begin{aligned} \mathbf{u} u_\tau - \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} |\mathbf{u}|^2 &= (\mathbf{u}_\infty + \mathbf{u}') (\mathbf{u}_\infty \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\tau}) - \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} (|\mathbf{u}_\infty|^2 + 2\mathbf{u}_\infty \cdot \mathbf{u}' + |\mathbf{u}'|^2) \\ &= (\mathbf{u}_\infty \cdot \boldsymbol{\tau}) \mathbf{u}_\infty - \frac{|\mathbf{u}_\infty|^2}{2} \boldsymbol{\tau} + \frac{\Gamma \mathbf{u}_\infty}{2\pi R} + O\left(\frac{1}{R^2}\right), \end{aligned}$$

$$\int_{\partial B_R(\mathbf{0})} ds \left(\mathbf{u} u_\tau - \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} |\mathbf{u}|^2 \right) = \Gamma \mathbf{u}_\infty + O\left(\frac{1}{R}\right)$$

che, sostituita nella (6.41), fornisce

$$\begin{aligned} \partial_t \left[\mathbf{M}(R, t) + \int_{\partial \Omega_b} ds \mathbf{x} u_\tau \right] &= \\ &= \int_{\partial \Omega_b} ds (\tilde{p} \boldsymbol{\tau} + \nu \omega \boldsymbol{\nu}) + \underbrace{\int_{\partial \Omega_b} ds (|\mathbf{u}|^2 \boldsymbol{\tau} - \mathbf{u} u_\tau)}_{\equiv 0} + \Gamma \mathbf{u}_\infty + O\left(\frac{1}{R}\right). \end{aligned} \quad (6.42)$$

Il secondo termine a primo membro è nullo se il fluido è viscoso. Se il fluido è non viscoso, questo termine fornisce il contributo alla variazione nel tempo del momento del primo ordine della vorticità complessiva, dovuto alla vorticità di parete. Possiamo allora modificare la prima definizione (6.34), introducendo un momento del primo ordine della vorticità complessiva (di campo e di parete):

$$\mathbf{M}_c = \mathbf{M} + \int_{\partial \Omega_b} ds \mathbf{x} u_\tau, \quad (6.43)$$

con l'intesa che il contributo della vorticità di parete (secondo termine a secondo membro) è nullo, se il fluido è viscoso. Osseviamo, infine, che il secondo termine a secondo membro della relazione (6.42) è nullo banalmente per un fluido viscoso ($\mathbf{u} \equiv \mathbf{0}$ sulla $\partial \Omega_b$), ma è anche nullo in assenza di viscosità ($\mathbf{u} = u_\tau \boldsymbol{\tau}$).

Facendo l'ortogonale di entrambi i membri della (6.42), moltiplicando per ρ e mandando $R \rightarrow +\infty$ otteniamo allora:

$$\rho \dot{\mathbf{M}}_c^\perp = \int_{\partial \Omega_b} ds (-p \boldsymbol{\nu} + \mu \omega \boldsymbol{\tau}) + \rho \Gamma \mathbf{u}_\infty^\perp. \quad (6.44)$$

All'equazione (6.44) si può dare un significato fisico più profondo osservando che la risultante degli sforzi in un generico punto di $\partial \Omega_b$ si scrive:

$$\mathbf{e}_i \tau_{ij} \nu_j = -p \boldsymbol{\nu} + 2\mu \partial_s \mathbf{u}^\perp + \mu \omega \boldsymbol{\tau},$$

avendo utilizzato l'equazione di continuità. Il secondo termine a secondo membro è identicamente nullo sia nel caso di fluido viscoso ($\mathbf{u} = \mathbf{0}$ su $\partial \Omega_b$), sia nel caso di fluido non viscoso ($\mu = 0$). Ne segue che l'integrale a secondo membro della relazione (6.44) è la risultante \mathbf{F}_b delle forze esercitate dal fluido sul corpo e questa relazione si può scrivere:

$$\boxed{\mathbf{F}_b = \rho \dot{\mathbf{M}}_c^\perp - \rho \Gamma \mathbf{u}_\infty^\perp} \quad (6.45)$$

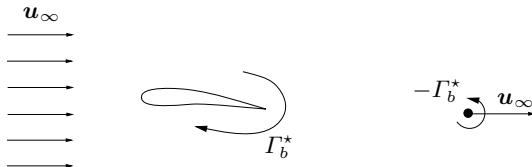


Figura 6.6. Genesi della portanza su un profilo che parte impulsivamente con velocità costante nel tempo u_∞ . Dopo un transitorio iniziale, la circolazione attorno al corpo raggiunge un valore asintotico Γ_b^* (negativo, nel caso in esame). Essendo $\Gamma \equiv 0$, ne segue che è stata rilasciata vorticità di scia per una circolazione complessiva pari a $-\Gamma_b^*$ (positiva), assimilabile ad un unico vortice puntiforme che trasla a velocità u_∞ .

6.7 Genesi della portanza e della resistenza

L'espressione (6.45) consente di dare una suggestiva interpretazione fisica al meccanismo con cui viene generata la portanza da un profilo posto a piccola incidenza in una corrente uniforme che parte impulsivamente al tempo 0. In questo caso, la scala dei tempi è data dal rapporto corda del profilo/ $|u_\infty|$. Si suppone inoltre che al tempo 0^- il limite delle circolazioni Γ sia nullo e si può facilmente dimostrare che rimane nullo per tutti i tempi. Dalla relazione (6.45) abbiamo allora: $F_b = \rho \dot{M}_c^\perp$.

Al tempo 0^+ la corrente uniforme investe il profilo e da quest'ultimo si inizia a distaccare una scia formata, poiché profilo è portante, da vorticità positiva. Nel contempo, attorno al profilo si misura una circolazione $\Gamma_b < 0$. Essendo a piccola incidenza, la circolazione (positiva) rilasciata in tal modo cresce monotonamente verso un valore asintotico $-\Gamma_b^*$, predicibile anche con un modello di fluido non viscoso.

Dopo qualche unità di tempo, tutta la circolazione rilasciata può essere immaginata compattata in un vortice puntiforme che trasla a velocità u_∞ , mentre il campo in prossimità del profilo ha raggiunto una configurazione stazionaria, vedi lo schema in Fig. 6.6. Infatti, in tali condizioni il flusso di vorticità negativa proveniente dal dorso è opposto a quello di vorticità positiva proveniente dal ventre: i due flussi si compensano al bordo di uscita e non vi è più un rilascio netto di circolazione a valle del profilo. Ne segue una variazione nel tempo del momento del primo ordine della vorticità pari a $-\Gamma_b^* u_\infty$ e quindi una risultante della sollecitazione sul profilo $F_b = \rho(-\Gamma_b^*) u_\infty^\perp$, in accordo con i risultati precedenti.

La stessa relazione (6.45) consente di interpretare fisicamente la presenza di una resistenza su una lastra piana allineata ad una corrente uniforme, vedi lo schema riportato in Fig. 6.7. In tal caso, la convezione della vorticità prodotta a parete con la corrente fornisce un contributo globalmente nullo: il campo di vorticità è emisimmetrico rispetto alla lastra e quindi il contributo alla variazione del momento del primo ordine del semispazio superiore risul-

ta opposto a quello del semispazio inferiore. Al contrario, la diffusione della vorticità prodotta a parete fornisce per i due semispazi due contributi uguali e diretti verso il basso. Ne segue quindi che \dot{M}^\perp è parallelo alla \mathbf{u}_∞ , ovvero sulla lastra piana agisce la sola resistenza di attrito.

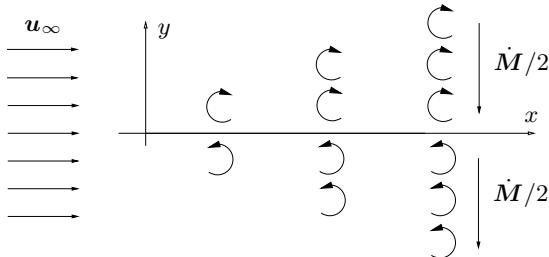


Figura 6.7. Genesi della resistenza su una lastra piana posta parallelamente ad una corrente traslazionale uniforme (piano $y = 0$) di un fluido di densità costante viscoso. La convezione di vorticità a valle della lastra fornisce un contributo complessivamente nullo, poiché la velocità è la stessa nella parte superiore e nell'inferiore, ma il segno della vorticità è opposto. Al contrario, la diffusione sposta vorticità negativa nel verso positivo della y sul lato superiore e vorticità positiva nel verso negativo della y sul lato inferiore.

6.8 Il momento su un corpo immerso in un flusso piano

In questo paragrafo mostreremo, in analogia a quanto visto nel §6.6, che il momento della sollecitazione agente su un corpo immerso in un flusso isocoro piano di un fluido viscoso è in relazione con la derivata nel tempo del momento del secondo ordine della vorticità:

$$I(t) = \int_{\Omega'_b} d\mathbf{x} |\mathbf{x}|^2 \omega(\mathbf{x}, t) . \quad (6.46)$$

Definendone, al solito (cfr. equazione (6.34) per il momento del primo ordine), la restrizione ad una sfera di raggio R e centrata nell'origine, consideriamo la derivata nel tempo di tale restrizione:

$$\begin{aligned} \partial_t I(R, t) &= \int_{\Omega'_b \cap B_R(\mathbf{0})} d\mathbf{x} |\mathbf{x}|^2 \partial_t \omega \\ &= \int_{\Omega'_b \cap B_R(\mathbf{0})} d\mathbf{x} |\mathbf{x}|^2 [-\nabla \cdot (\omega \mathbf{u}) + \nu \nabla^2 \omega] , \end{aligned} \quad (6.47)$$

avendo utilizzato l'equazione di Helmholtz (4.2). Al solito, vogliamo poter usare le formule di Green per riportare l'integrale all'ultimo membro della

(6.47) ad un integrale fatto sul contorno del dominio $\Omega'_b \cap B_R(\mathbf{0})$ e quindi cerchiamo di riscrivere in modo opportuno i due termini sotto l'integrale.

Per scrivere il termine convettivo nell'equazione (6.47) in forma di derivata di una opportuna funzione, è necessario utilizzare l'identità: $|\mathbf{x}|^2 \nabla \cdot (\omega \mathbf{u}) \equiv \nabla \cdot (|\mathbf{x}|^2 \mathbf{u} \omega) - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} \omega$ e poi scrivere il termine $\omega \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}$ sotto forma di derivata:

$$\begin{aligned}\omega \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} &= (\nabla^\perp \cdot \mathbf{u}) \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} \\ &= \nabla^\perp \cdot [\mathbf{u}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{u})] - \mathbf{u} \cdot \nabla^\perp(\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}) \\ &= \nabla^\perp \cdot [\mathbf{u}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{u})] - \frac{\mathbf{x}}{2} \cdot \nabla^\perp |\mathbf{u}|^2 \\ &= \nabla^\perp \cdot [\mathbf{u}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}) - \frac{\mathbf{x}}{2} |\mathbf{u}|^2].\end{aligned}$$

Si ottiene, in definitiva, la seguente forma del termine convettivo:

$$|\mathbf{x}|^2 \nabla \cdot (\mathbf{u} \omega) = \nabla \cdot (|\mathbf{x}|^2 \mathbf{u} \omega) - \nabla^\perp \cdot [2\mathbf{u}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{x} |\mathbf{u}|^2], \quad (6.48)$$

mentre il termine diffusivo si scrive facilmente come:

$$|\mathbf{x}|^2 \nabla^2 \omega \equiv 4\omega + \nabla^2(|\mathbf{x}|^2 \omega) - 4\nabla \cdot (\mathbf{x} \omega). \quad (6.49)$$

Sostituendo le espressioni (6.48) e (6.49) per il termine convettivo e per quello diffusivo nella equazione (6.47) di evoluzione della restrizione alla sfera $B_R(\mathbf{0})$ del momento del secondo ordine (6.46), otteniamo:

$$\begin{aligned}\partial_t I(R, t) &= \\ &= \left[\int_{\partial B_R(\mathbf{0})} - \int_{\partial \Omega_b} \right] ds \left\{ -|\mathbf{x}|^2 \omega u_\nu + 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}) u_\tau - |\mathbf{u}|^2 x_\tau + \right. \\ &\quad \left. + \nu [\partial_\nu (|\mathbf{x}|^2 \omega) - 4\omega x_\nu] \right\} + 4\nu \Gamma + O\left(\frac{1}{R}\right).\end{aligned} \quad (6.50)$$

Iniziamo con valutare nell'equazione (6.50) l'integrale su $\partial B_R(\mathbf{0})$ nel limite per $R \rightarrow +\infty$. Assumendo, al solito, che la vorticità ed il suo gradiente siano esponenzialmente infinitesimi all'infinito ed utilizzando il fatto che $x_\tau = \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\tau} \equiv 0$, ci rimane da valutare il limite della quantità:

$$2 \int_{\partial B_R(\mathbf{0})} ds \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} u_\tau. \quad (6.51)$$

Occorre quindi valutare l'andamento asintotico della velocità, partendo dalla relazione (6.17), ovvero dalla legge di Biot-Savart in presenza del corpo. Otteniamo:

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{\mathbf{x}} + \frac{1}{2\pi i} \frac{\mathbf{M}_c}{\mathbf{x}^2} + O\left(\frac{1}{R^3}\right)$$

e quindi per le due componenti (normale e tangente alla $\partial B_R(\mathbf{0})$):

$$u_\nu \simeq \mathbf{u}_\infty \cdot \boldsymbol{\nu} + \frac{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{M}_c}{2\pi R^2}, \quad u_\tau \simeq \mathbf{u}_\infty \cdot \boldsymbol{\tau} + \frac{\Gamma}{2\pi R} + \frac{\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{M}_c}{2\pi R^2}, \quad (6.52)$$

a meno di termini dell'ordine di $1/R^3$. Utilizzando gli sviluppi asintotici (6.52), l'integrandi nell'integrale su $\partial B_R(\mathbf{0})$ diviene:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} u_\tau &= R u_\nu u_\tau \\ &= R \left(\mathbf{u}_\infty \cdot \boldsymbol{\nu} \mathbf{u}_\infty \cdot \boldsymbol{\tau} + \frac{\Gamma}{2\pi R} \mathbf{u}_\infty \cdot \boldsymbol{\nu} + \frac{\mathbf{u}_\infty \cdot \mathbf{M}_c}{2\pi R^2} \right) + O\left(\frac{1}{R^3}\right), \end{aligned}$$

che, integrato sulla sfera $\partial B_R(\mathbf{0})$ ci consente di stimare il limite della quantità (6.51) per $R \rightarrow +\infty$ come $2 \mathbf{u}_\infty \cdot \mathbf{M}_c$.

Nella derivata $\partial_t I$ (6.50) occorre poi valutare l'integrale sulla frontiera del corpo $\partial\Omega_b$, ovvero:

$$\int_{\partial\Omega_b} ds (-x_\tau u_\tau^2 + 2\nu\omega x_\nu - \nu|\mathbf{x}|^2 \partial_\nu \omega). \quad (6.53)$$

avendo impiegato la condizione al contorno $u_\nu \equiv 0$ su $\partial\Omega_b$, valida sia nel caso di fluido viscoso, che nel caso di fluido non viscoso. Nel secondo integrale della (6.53) occorre valutare $\nu|\mathbf{x}|^2 \partial_\nu \omega$ a partire dalla proiezione in direzione tangente al corpo delle equazioni di Navier-Stokes (6.40). Procedendo in modo analogo a quanto fatto nel paragrafo 6.6 otteniamo:

$$-\nu|\mathbf{x}|^2 \partial_\nu \omega = -\partial_t (|\mathbf{x}|^2 u_\tau) - \partial_s \left[|\mathbf{x}|^2 \left(\tilde{p} + \frac{u_\tau^2}{2} \right) \right] + 2x_\tau \left(\tilde{p} + \frac{u_\tau^2}{2} \right),$$

che consente di riscrivere l'integrale (6.53) nel modo seguente:

$$2 \int_{\partial\Omega_b} ds (x_\tau \tilde{p} + \nu x_\nu \omega) - \frac{d}{dt} \int_{\partial\Omega_b} ds |\mathbf{x}|^2 u_\tau. \quad (6.54)$$

Il primo integrale nell'equazione (6.54) (a meno di un fattore $2/\rho$) è il momento \mathcal{M} risultante della sollecitazione agente sul corpo, infatti:

$$\mathcal{M} = \mathbf{e}_3 \cdot \int_{\partial\Omega_b} ds \mathbf{x} \times (-p\boldsymbol{\nu} + \nu\omega\boldsymbol{\tau}) = \int_{\partial\Omega_b} ds \mathbf{x} \cdot (p\boldsymbol{\tau} + \nu\omega\boldsymbol{\nu}). \quad (6.55)$$

Introducendo il momento del secondo ordine I_c della vorticità complessiva (di campo e di parete) come:

$$I_c := \int_{\Omega'_b} d\mathbf{x} |\mathbf{x}|^2 \omega + \int_{\partial\Omega_b} ds |\mathbf{x}|^2 u_\tau$$

e ricordando il risultato $2\mathbf{u}_\infty \cdot \mathbf{M}_c$ dell'integrale (6.51) ed il risultato (6.54) dell'integrale sul corpo (6.53), in cui sostituiamo il momento (6.55), otteniamo il legame tra momento sul corpo e dinamica della vorticità:

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2} \rho \dot{I} - 2\mu\Gamma - \rho\mathbf{u}_\infty \cdot \mathbf{M}_c$$

(6.56)

Quest'ultima si riduce alla formula di Poincarè in assenza del corpo ($\mathcal{M} = 0$ e $\mathbf{u}_\infty = \mathbf{0}$), che prevede un andamento nel tempo di I lineare, con velocità $4\nu\Gamma$.

6.9 Andamento asintotico della pressione

Sappiamo dall'evidenza sperimentale che il moto di un corpo in un fluido comporta la generazione di vorticità, che se $\mathbf{u}_\infty \neq \mathbf{0}$, si organizza in una regione a valle del corpo che prende il nome di *scia*. Questo fa sì che la presenza del corpo possa essere avvertita anche a grandi distanze, semplicemente misurando le differenze tra la velocità della corrente asintotica (\mathbf{u}_∞) e le velocità all'interno della scia. Alcune metodologie per la misura della risultante delle sollecitazioni sul corpo sono basate proprio su tale differenza di velocità. Cosa succede al campo di pressione? In questo paragrafo tenteremo di fornire una risposta.

Ammettiamo che il campo di pressione ammetta limite uniforme all'infinito ($\tilde{p} \rightarrow \tilde{p}_\infty$ per $x \rightarrow \infty$), il cui valore (\tilde{p}_∞) è peraltro inessenziale, essendo la pressione definita a meno di una funzione del solo tempo in un flusso isocoro. Nell'equazione di Navier-Stokes (2.48), portiamo a primo membro i termini contenuti gradienti:

$$\nabla \cdot \underbrace{(\tilde{p} - \tilde{p}_\infty + (|\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{u}_\infty|^2)/2)}_P = -\partial_t \mathbf{u} - \omega \mathbf{u}^\perp + \nu \nabla^\perp \omega, \quad (6.57)$$

prendendo la divergenza di ambo i membri della (6.57) e ricordando l'equazione di continuità ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$) otteniamo $\nabla^2 P = -\nabla \cdot (\omega \mathbf{u}^\perp)$ che dobbiamo invertire in presenza di un corpo limitato Ω_b , avente una frontiera di classe 2, di lunghezza finita. Per far questo, scriviamo al solito la seconda identità di Green (4.24) con $f = P$ e $g = G$ ed integriamo⁸ in $\Omega'_b \cap B_R(\mathbf{0})$ ricavando il valore di P in un punto (\mathbf{x}) qualunque del campo:

$$\begin{aligned} P = & - \left(\int_{\partial B_R(\mathbf{0})} - \int_{\partial \Omega_b} \right) ds' P \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{K} + \\ & + \left(\int_{\partial B_R(\mathbf{0})} - \int_{\partial \Omega_b} \right) ds' G (-\partial_t u_\nu + \nu \partial_{s'} \omega) + \\ & + \int_{B_R(\mathbf{0}) \cap \Omega'_b} d\mathbf{x}' \omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{K}, \end{aligned}$$

in cui abbiamo utilizzato la relazione (6.57) per sostituire $\partial_{\nu'} P$. Gli integrali su $\partial B_R(\mathbf{0})$ vanno a zero per $R \rightarrow +\infty$, ne segue che, a meno di termini infinitesimi nel medesimo limite, abbiamo:

$$P \simeq \int_{\partial \Omega_b} ds' (P \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{K} - \nu G \partial_{s'} \omega) + \int_{B_R(\mathbf{0}) \cap \Omega'_b} d\mathbf{x}' \omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{K}.$$

⁸ Per semplificare le notazioni, ometteremo le dipendenze dalle variabili spaziali e temporali, quando non vi siano ambiguità. Negli integrali, tutte le funzioni sono calcolate nella variabile di integrazione \mathbf{x}' , con $ds' = ds(\mathbf{x}')$, ad eccezione della funzione di Green G e del nucleo di Biot-Savart \mathbf{K} che sono calcolate in $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$.

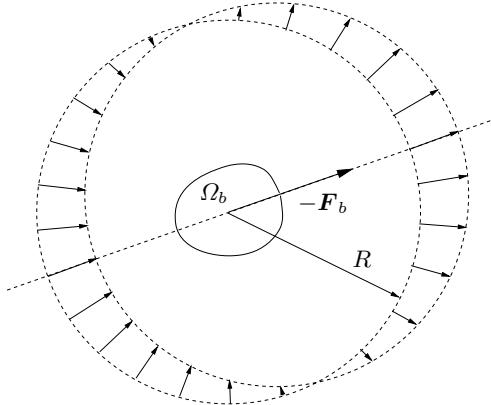


Figura 6.8. La forza esercitata dal corpo sul fluido ha risultante $-F_b$, se sul corpo Ω_b agisce la forza $+F_b$. Nel generico punto x di una grande circonferenza di raggio R , la variazione di pressione rispetto alla p_∞ (indicata simbolicamente con frecce uscenti dalla $\partial B_R(\mathbf{0})$ se positiva, entranti se negativa) è allora data dalla componente lungo x della forza media $(-F_b)/(2\pi R)$.

Considerando che:

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \partial_{s'} \omega(\mathbf{x}') \equiv \partial_{s'} [G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \omega(\mathbf{x}')] - \omega(\mathbf{x}') \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}') \cdot \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'),$$

ne segue, poiché la $\partial\Omega_b$ è una curva chiusa, che la pressione \tilde{p} verifica la relazione:

$$\begin{aligned} \tilde{p} + |\mathbf{u}|^2/2 &\simeq \tilde{p}_\infty + |\mathbf{u}_\infty|^2/2 + \int_{\partial\Omega_b} ds' (p\boldsymbol{\tau} - \nu\omega\boldsymbol{\nu}) \cdot \mathbf{K} + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_b} ds' u_\tau^2 \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{K} + \int_{B_R(\mathbf{0}) \cap \Omega'_b} d\mathbf{x}' \omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{K}, \end{aligned}$$

a meno di termini infinitesimi nel limite per $R \rightarrow +\infty$. Cerchiamo il primo termine dello sviluppo asintotico di $\tilde{p} + |\mathbf{u}|^2/2$, che è dell'ordine di $1/|\mathbf{x}|$. A questo scopo nel primo e nel secondo integrale della (6.58) (in cui $\mathbf{x}' \in \partial\Omega_b$) basta porre $\mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \mathbf{K}(\mathbf{x}) + O(1/|\mathbf{x}|^2)$ mentre nel terzo integrale si sottrae e si somma $\mathbf{K}(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} \tilde{p} + |\mathbf{u}|^2/2 &\simeq \tilde{p}_\infty + |\mathbf{u}_\infty|^2/2 + \mathbf{K}^\perp(\mathbf{x}) \cdot \int_{\partial\Omega_b} ds' (-p\boldsymbol{\nu} + \nu\omega\boldsymbol{\tau}) + \\ &+ \frac{1}{2} \mathbf{K}(\mathbf{x}) \cdot \int_{\partial\Omega_b} ds' |\mathbf{u}|^2 \boldsymbol{\tau} + \\ &+ \int_{B_R(\mathbf{0}) \cap \Omega'_b} d\mathbf{x}' \omega \mathbf{u} \cdot [\mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') - \mathbf{K}(\mathbf{x})] + \end{aligned}$$

$$+ \mathbf{K}(\mathbf{x}) \cdot \int_{B_R(\mathbf{0}) \cap \Omega'_b} d\mathbf{x}' \omega \mathbf{u} + O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}\right) . \quad (6.58)$$

Il primo integrale nella (6.58) è, a meno di un fattore $1/\rho$, la risultante \mathbf{F}_b della sollecitazione esercitata dal fluido sul corpo, mentre la somma del secondo e del quarto integrale si scrive ricordando la relazione (6.36):

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) \cdot \left[\int_{\partial\Omega_b} ds' (u_\tau^2 \boldsymbol{\tau} - \mathbf{u} u_\tau) + \Gamma \mathbf{u}_\infty \right] ,$$

in cui l'integrale è sempre nullo, sia nel caso non viscoso ($\mathbf{u} = u_\tau \boldsymbol{\tau}$ su $\partial\Omega_b$) che nel caso viscoso ($\mathbf{u} \equiv 0$). Poiché possiamo mostrare che il terzo integrale è dell'ordine di $1/|\mathbf{x}|^2$, mandando R a $+\infty$ otteniamo in definitiva:

$$p + \rho|\mathbf{u}|^2/2 = p_\infty + \rho|\mathbf{u}_\infty|^2/2 + \mathbf{K}^\perp(\mathbf{x}) \cdot [\mathbf{F}_b + \rho\Gamma\mathbf{u}_\infty^\perp] + O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}\right) . \quad (6.59)$$

Ricordando che $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_\infty + \Gamma\mathbf{K}(\mathbf{x}) + O(1/|\mathbf{x}|^2)$, dalla precedente relazione possiamo stimare il comportamento all'infinito del campo di pressione:

$$p(\mathbf{x}) = p_\infty + \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \cdot \frac{-\mathbf{F}_b}{2\pi|\mathbf{x}|} + O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}\right)$$

(6.60)

L'equazione (6.60) ha una suggestiva interpretazione fisica, illustrata in Fig. 6.8. Si può notare, infatti, che la pressione in \mathbf{x} è pari alla componente su $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ della forza esercitata *dal corpo sul fluido* divisa per il perimetro della circonferenza di raggio $|\mathbf{x}|$. La pressione è quindi massima lungo la direzione individuata da $-\mathbf{F}_b$ ed è minima nella direzione opposta.

6.10 Bilancio di energia per il flusso piano attorno ad un corpo

Per un flusso piano non è possibile, in generale, definire l'energia cinetica, poiché il campo $|\mathbf{u}|^2$ non è integrabile all'infinito. Infatti, anche qualora $\mathbf{u}_\infty = \mathbf{0}$, se la circolazione all'infinito Γ non è nulla, $|\mathbf{u}(\mathbf{x})| \sim |\Gamma|/(2\pi|\mathbf{x}|)$ per $\mathbf{x} \rightarrow \infty$. Esiste, però, una quantità globale (l'integrale del prodotto $\psi\omega/2$) la cui restrizione ad una sfera $B_R(\mathbf{0}) \supset \Omega_b$ differisce dall'energia cinetica del fluido contenuto nella medesima sfera per termini divergenti con R , ma costanti nel tempo.

Al fine di semplificare le notazioni, prolunghiamo la funzione di corrente all'interno del corpo Ω_b col valore $\psi \equiv \psi_b$ che questa assume sulla $\partial\Omega_b$ ed il campo di vorticità col valore 0. Inoltre, nel caso in cui il fluido è non viscoso, la vorticità ω comprenderà il contributo singolare della curva vorticosa $\partial\Omega_b$.

Riscriviamo l'energia cinetica in $B_R(\mathbf{0})$ utilizzando la funzione di corrente ψ e la vorticità ω come:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(R, t) &= \frac{1}{2} \int_{B_R(\mathbf{0})} d\mathbf{x} \, \nabla \psi \cdot \nabla \psi \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\partial B_R(\mathbf{0})} ds \, \psi \, u_\tau + \frac{1}{2} \int_{B_R(\mathbf{0})} d\mathbf{x} \, \psi \, \omega ,\end{aligned}\quad (6.61)$$

espressione che non dipende dalla particolare definizione di ψ . Il contributo di $\partial B_R(\mathbf{0})$ nell'equazione (6.61) può essere valutato sulla base dell'andamento asintotico della velocità $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_\infty + \Gamma \mathbf{K}(\mathbf{x}) + O(1/|\mathbf{x}|^2)$ e scegliendo una funzione di corrente che si comporta come $\psi(\mathbf{x}) = -\mathbf{u}_\infty \cdot \mathbf{x}^\perp - \Gamma G(\mathbf{x}) + O(1/|\mathbf{x}|)$ per $\mathbf{x} \rightarrow \infty$. Otteniamo in tal modo:

$$-\frac{1}{2} \int_{\partial B_R(\mathbf{0})} ds \, \psi \, u_\tau = \frac{\pi}{2} R^2 |\mathbf{u}_\infty|^2 + \frac{\Gamma^2}{4\pi} \log R + O\left(\frac{1}{R}\right) ,$$

da cui segue per l'energia cinetica nella sfera $B_R(\mathbf{0})$:

$$\mathcal{E}(R, t) = \frac{\pi}{2} R^2 |\mathbf{u}_\infty|^2 + \frac{\Gamma^2}{4\pi} \log R + \frac{1}{2} \int_{B_R(\mathbf{0})} d\mathbf{x} \, \psi \, \omega + O\left(\frac{1}{R}\right) .\quad (6.62)$$

In quest'ultima equazione i primi due termini sono divergenti con R , per $\mathbf{u}_\infty \neq \mathbf{0}$ e $\Gamma \neq 0$. Ovviamente, quando queste due quantità sono nulle, è possibile definire l'energia cinetica in tutto il piano e la sua definizione coincide con quella dell'*excess energy*:

$$\mathcal{E}_f = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{x} \, \psi \omega .\quad (6.63)$$

Riguardo alla definizione (6.63) dell'*excess energy*, va fatta una osservazione, importante se l'energia cinetica in tutto il piano non esiste. In tal caso la scelta dell'andamento asintotico di ψ decide il valore ψ_b (eventualmente funzione del tempo) che la funzione di corrente assume sul corpo e che, pertanto, *non è più arbitrario*.

La quantità (6.63) verifica una semplice equazione di evoluzione, che ora dedurremo, nella ipotesi che \mathbf{u}_∞ sia costante nel tempo. Effettuando la derivata nel tempo dell'*excess energy* per il fluido contenuto nella sfera $B_R(\mathbf{0})$ sulla base del legame (6.62):

$$\partial_t \mathcal{E}_f(R, t) = \partial_t \mathcal{E}(R, t) = \int_{B_R(\mathbf{0}) \cap \Omega'_b} d\mathbf{x} \, \mathbf{u} \cdot \partial_t \mathbf{u} ,\quad (6.64)$$

in cui l'integrando può essere valutato utilizzando le equazioni di Navier-Stokes nel modo seguente:

$$\mathbf{u} \cdot \partial_t \mathbf{u} = -\nabla \cdot [(\tilde{p} + |\mathbf{u}|^2/2) \, \mathbf{u}] + \nu [\nabla^\perp \cdot (\omega \mathbf{u}) - \omega^2] .$$

Da quest'ultima, utilizzando anche la condizione al contorno sulla velocità $u_\nu \equiv 0$ su $\partial \Omega_b$, la derivata nel tempo dell'*excess energy* (6.64) diviene:

$$\int_{B_R(\mathbf{0}) \cap \Omega'_b} d\mathbf{x} \, \mathbf{u} \cdot \partial_t \mathbf{u} = - \int_{\partial B_R(\mathbf{0})} ds [\tilde{p} - \tilde{p}_\infty + (|\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{u}_\infty|^2)/2] u_\nu - \nu \int_{B_R(\mathbf{0}) \cap \Omega'_b} d\mathbf{x} \, \omega^2.$$

Utilizzando la condizione asintotica sulla pressione (6.59) e facendo il limite per $R \rightarrow +\infty$, otteniamo l'equazione di evoluzione per l'excess energy:

$$\rho \dot{\mathcal{E}}_f = -\mu \int_{\Omega'_b} d\mathbf{x} \, \omega^2 + \frac{1}{2} \mathbf{u}_\infty \cdot \mathbf{F}_b$$

(6.65)

in cui l'integrale di ω^2 prende il nome di *enstrosia* del flusso.

6.11 Curiosando in biblioteca

Il testo di Batchelor [3] tratta nel §6.4 (pp. 404-406) il teorema di Blasius, deducendo da questo, nell'ipotesi di flusso stazionario, l'espressione della portanza. La trattazione è piuttosto complessa, in quanto l'Autore affronta il problema per un corpo isolato, rendendo quindi necessario il trattamento delle condizioni asintotiche. Nelle stesse pagine è richiamato il paradosso di d'Alembert. Nel §6.5 viene introdotto il concetto di trasformazione conforme e ne vengono illustrate alcune applicazioni. A p. 422 troviamo la dimostrazione del teorema del cerchio, mentre nelle pp. 424-427 l'Autore analizza il flusso potenziale attorno ad un cilindro rotondo, con una circolazione non nulla attorno al corpo. Il flusso attorno ad un profilo di Joukowski è poi trattato nelle pp. 444-449. Riguardo a questi argomenti, il testo [24] ha un carattere introduttivo: nel §6 vengono analizzati i flussi a potenziale attorno ad un cerchio e ad una lastra piana in una corrente traslazionale uniforme. Nel §11, si trova l'esempio, dovuto a Prandtl, di calcolo della portanza su di un profilo in una corrente uniforme, a partire da una schiera di profili equidistanti. Il teorema di Blasius (stazionario) è presentato a pagina 65, ma ne è lasciata al Lettore la dimostrazione. Infine, nel §13 viene discusso il paradosso di d'Alembert. Una analisi simile si può trovare anche nel testo [6]. Infatti, a p. 51 viene definito il potenziale complesso ed alla pagina successiva è dimostrato il teorema di Blasius (stazionario). A p. 53 l'espressione della portanza su di un corpo immerso in una corrente uniforme è dedotta in base allo sviluppo in serie di Laurent della derivata $\partial_z w$, mentre alla pagina successiva è formulato il paradosso di d'Alembert. Il testo di Kundu e Cohen [17] offre invece un'accurata analisi degli argomenti del presente capitolo. Nelle pp. 166-167 è dimostrato il teorema di Blasius (stazionario) ed a p. 168 si scrive il bilancio di forze agenti su di un corpo cilindrico di sezione qualsiasi, ottenendo l'espressione della portanza. Le trasformazioni conformi sono presentate nel §13 ed utilizzate nel paragrafo successivo, per studiare il flusso all'esterno di un cilindro ellittico. Infine, nel §8 del capitolo 15 è studiato il flusso attorno ad un profilo di Joukowski. Anche il classico testo di Lamb [19] risulta estremamente completo relativamente ai flussi attorno a corpi, ai quali è dedicato il cap.

VI. Segnaliamo in particolare il §62, in cui viene introdotta la trasformazione conforme ed il §72.b, dove viene dimostrato il teorema di Blasius (stazionario). Una deduzione alternativa dell'espressione della portanza si trova nel §370.b. Nel testo di Nakayama [26], gli Autori presentano una possibile deduzione della forza agente su di un cilindro rotondo all'interno di un flusso uniforme di un fluido non viscoso al §9.4.1. Cenni sulle trasformazioni conformi, con l'esempio della trasformazione di un profilo alare in un cerchio, sono dati nel §12.6. Anche sul testo [36] (pp. 140-144) vengono definite le trasformazioni conformi, con particolare riferimento alla trasformazione di Kutta-Joukowski. Molto ricco in merito agli argomenti in esame risulta il testo [1], nel quale vengono inizialmente presentati (pp. 20-21) il teorema di Kutta-Joukowski e la condizione di Kutta. Definite le trasformazioni conformi (pp. 134-136), viene studiato il flusso a potenziale attorno ad un cilindro ellittico, posto ad una assegnata incidenza in una corrente uniforme (pp. 136-137). Sempre con l'uso di trasformazioni conformi, si studiano il flusso attorno ad una piastra piana ad incidenza (pp. 137-138) e ad un profilo di Joukowski (pp. 138-140). La dimostrazione del teorema di Blasius (stazionario) si trova nelle pp. 140-141 e viene utilizzata per calcolare la risultante delle sollecitazioni di pressione su un cilindro rotondo e su uno ellittico (pp. 141-143). Infine, il paradosso di d'Alembert è illustrato nelle pp. 147-149. Nel §3.12.3 del testo [22] vengono introdotte le trasformazioni conformi, mentre nel sottoparagrafo successivo (§3.12.3) viene dedotto il teorema di Blasius (stazionario). Interessante notare che l'Autore deriva il teorema di Schwarz-Christoffel nel §3.12.5.

Di estremo rigore matematico e decisamente improntato all'analisi di flussi attorno a corpi è il testo [25]. Introdotto nel §3.3 il concetto di flusso irrotazionale, nel §3.31 viene definito il potenziale di velocità. Nel §3.4 viene trattata l'Analisi Complessa, richiamando (§3.43) il concetto di funzione olomorfa e (§3.44) le condizioni di Cauchy-Riemann. Dopo una breve discussione sulla classificazione delle singolarità di una funzione olomorfa (§3.51) e la dimostrazione del teorema dei residui (§3.53), l'Autore inizia una breve ma rigorosa dissertazione sulle trasformazioni conformi (§3.6). Il potenziale complesso è definito nel §3.7, riportando alcuni esempi nei quali tale potenziale è facilmente esprimibile. Nel §3.71 se ne considera la derivata, ottenendo il coniugato della velocità complessa. Il cap. 5 è interamente dedicato alla studio delle forze agenti su di un corpo immerso in un flusso piano: nel §5.2 è dimostrato in modo rigoroso il teorema del cerchio, mentre nel §5.31 si presenta lo studio del campo di moto attorno ad un cilindro rotondo, quando sia presente una circolazione non nulla e se ne calcola la risultante delle sollecitazioni (§5.33). Nel §5.4 viene dimostrato il teorema di Blasius (stazionario) e nel §5.5 il teorema di Kutta-Joukowski. Al §6.1 è definita la trasformazione di Joukowski, applicata nel §6.8 sullo studio di un profilo immerso in una corrente uniforme ad incidenza. La valutazione della risultante delle forze e dei momenti dei agenti su di un profilo è infine effettuata nel §7.1.

Approfondimenti

6.12 Valutazione del limite del potenziale di strato doppio

Si suppone di avere una superficie regolare \mathcal{S} in $3D$, o una curva regolare (indicata con lo stesso simbolo) in $2D$, che sia *semplice*: per ogni punto $\mathbf{x}^* \in \mathcal{S}$ esiste un intorno $\mathcal{I}(\mathbf{x}^*)$ del punto tale che $\mathcal{S} \cap \mathcal{I}$ risulta *connesso*, ovvero è costituito da un solo tratto di \mathcal{S} . Per brevità, si farà riferimento alla \mathcal{S} come superficie sia in $3D$, dove lo è propriamente, che in $2D$. Si suppone, inoltre, che la superficie \mathcal{S} sia sufficientemente regolare (ad esempio di classe 2) da poter definire in ogni punto \mathbf{x}^* di essa il versore normale - indicato con $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}^*)$ - ed, in $3D$, i versori $\boldsymbol{\tau}_{1,2}(\mathbf{x}^*)$ che individuano la *giacitura* del piano tangente in \mathbf{x}^* , o, in $2D$, il versore $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}^*)$ della *direzione* tangente nel medesimo punto. Questi campi di vettori sono ipotizzati *continui* sulla \mathcal{S} .

La definizione del versore normale consente, in particolare, di riguardare alla superficie \mathcal{S} come formata da due *facce*, quella verso cui punta $\boldsymbol{\nu}$ (faccia *positiva*, indicata con \mathcal{S}^+) e quella opposta (faccia *negativa*, indicata con \mathcal{S}^-). Per questo motivo, si dice che la superficie \mathcal{S} è *orientata*. In tal modo, per ogni punto $\mathbf{x}^* \in \mathcal{S}$ e per ogni intorno $\mathcal{I}(\mathbf{x}^*)$ di questo punto tale che l'insieme $\mathcal{S} \cap \mathcal{I}$ risulta connesso, l'intorno \mathcal{I} è naturalmente suddiviso in un *intorno positivo* (\mathcal{I}^+), dalla parte verso cui punta la normale, ed un *intorno negativo* (\mathcal{I}^-), dalla parte opposta. Per indicare il fatto che un punto \mathbf{x} tende ad un punto $\mathbf{x}^* \in \mathcal{S}$ rimanendo dalla parte positiva della superficie ($\mathbf{x} \in \mathcal{I}^+$), *senza mai attraversarla*, si scriverà simbolicamente $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^* \in \mathcal{S}^+$. Analogamente, per il limite dalla parte negativa si utilizzerà la notazione $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^* \in \mathcal{S}^-$.

Data una funzione scalare μ continua con derivata continua, il problema è quello di valutare il limite per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^* \in \mathcal{S}^\pm$ dell'integrale:

$$\int_{\mathcal{S}} d\sigma(\mathbf{x}') \mu(\mathbf{x}') \partial_{\boldsymbol{\nu}'} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') , \quad (6.66)$$

in cui $d\sigma(\mathbf{x}')$ è l'elemento di superficie nel punto \mathbf{x}' e con $\partial_{\boldsymbol{\nu}'}$ si è indicato l'operatore $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}') \cdot \nabla_{\mathbf{x}'}$. La funzione μ nell'integrale (6.66) si chiama *densità di doppio strato*. L'integrale (6.66) definisce una funzione di \mathbf{x} che sarà mostrata *discontinua attraverso la superficie* \mathcal{S} , presentando nel generico $\mathbf{x}^* \in \mathcal{S}$ un salto pari a $\mu(\mathbf{x}^*)$ nel passare dalla faccia negativa a quella positiva.

Si considera dapprima il caso $\mu \equiv 1$.

Per calcolare il limite dell'integrale in (6.66) occorre separare il contributo di un intorno del punto \mathbf{x}^* da quello del resto della superficie. Comunque si fissi un numero $\varepsilon > 0$ piccolo abbastanza da far risultare connesso l'insieme $\mathcal{S} \cap B_\varepsilon(\mathbf{x}^*)$ ($B_\varepsilon(\mathbf{x}^*)$ è la sfera di centro \mathbf{x}^* e raggio ε), vale per la proprietà additiva dell'integrale e del limite la decomposizione seguente:

$$\begin{aligned} & \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^* \in \mathcal{S}^\pm} \int_{\mathcal{S}} d\sigma(\mathbf{x}') \partial_{\boldsymbol{\nu}'} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \equiv \\ & \equiv \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^* \in \mathcal{S}^\pm} \left(\int_{\mathcal{S} \cap B'_\varepsilon(\mathbf{x}^*)} + \int_{\mathcal{S} \cap B_\varepsilon(\mathbf{x}^*)} \right) d\sigma(\mathbf{x}') \partial_{\boldsymbol{\nu}'} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \end{aligned}$$

(l'apice indica l'insieme complementare) e quindi, in particolare, l'identità vale anche nel limite per $\varepsilon \rightarrow 0^+$:

$$\begin{aligned} & \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^* \in \mathcal{S}^\pm} \int_{\mathcal{S}} d\sigma(\mathbf{x}') \partial_{\boldsymbol{\nu}'} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \equiv \\ & \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^* \in \mathcal{S}^\pm} \int_{\mathcal{S} \cap B'_\varepsilon(\mathbf{x}^*)} d\sigma(\mathbf{x}') \partial_{\boldsymbol{\nu}'} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \quad (6.67) \\ & + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^* \in \mathcal{S}^\pm} \int_{\mathcal{S} \cap B_\varepsilon(\mathbf{x}^*)} d\sigma(\mathbf{x}') \partial_{\boldsymbol{\nu}'} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') . \end{aligned}$$

Nel primo integrale della (6.67), $\mathbf{x}' \in \mathcal{S} \cap B'_\varepsilon(\mathbf{x}^*)$ e quindi si mantiene sempre almeno a distanza ε da \mathbf{x}^* . La funzione di \mathbf{x}

$$\int_{\mathcal{S} \cap B'_\varepsilon(\mathbf{x}^*)} d\sigma(\mathbf{x}') \partial_{\boldsymbol{\nu}'} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

è allora continua in \mathbf{x}^* e si può valutare il limite interno:

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^* \in \mathcal{S}^\pm} \int_{\mathcal{S} \cap B'_\varepsilon(\mathbf{x}^*)} d\sigma(\mathbf{x}') \partial_{\boldsymbol{\nu}'} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \\ & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathcal{S} \cap B'_\varepsilon(\mathbf{x}^*)} d\sigma(\mathbf{x}') \partial_{\boldsymbol{\nu}'} G(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}') . \quad (6.68) \end{aligned}$$

Si verifica agevolmente che $\partial_{\boldsymbol{\nu}'} G(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}')$ è una funzione *integrabile* in $\mathbf{x}' = \mathbf{x}^*$. Infatti, in 2D valgono gli sviluppi in serie nell'ascissa curvilinea σ :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{x}^* + \boldsymbol{\tau}^* \sigma + \frac{1}{2} k^* \boldsymbol{\nu}^* \sigma^2 + O(\sigma^3) \\ \boldsymbol{\nu}' &= \boldsymbol{\nu}^* - k^* \boldsymbol{\tau}^* \sigma + O(\sigma^2) \end{aligned}$$

in cui k è la curvatura e l'asterisco indica che le quantità sono valutate in \mathbf{x}^* . Sostituendo nell'espressione di $\partial_{\boldsymbol{\nu}'} G(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}')$ gli sviluppi precedenti si ottiene:

$$\partial_{\boldsymbol{\nu}'} G(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi} [k^* + O(\sigma)] .$$

$\partial_{\boldsymbol{\nu}'} G(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}')$ risulta in tal caso addirittura continua. In 3D ragionamenti del tutto analoghi mostrano che la $\partial_{\boldsymbol{\nu}'} G(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}')$ è infinita del primo ordine in \mathbf{x}^* e quindi è integrabile su \mathcal{S} . Ne segue che si può effettuare anche il limite in ε nella (6.68):

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^* \in \mathcal{S}^\pm} \int_{\mathcal{S} \cap B'_\varepsilon(\mathbf{x}^*)} d\sigma(\mathbf{x}') \partial_{\boldsymbol{\nu}'} G(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}') = \\ & = \int_{\mathcal{S} \cap B'_\varepsilon(\mathbf{x}^*)} d\sigma(\mathbf{x}') \partial_{\boldsymbol{\nu}'} G(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}') , \quad (6.69) \end{aligned}$$

che consente di valutare il primo contributo al limite (6.67).

Rimane da valutare il secondo limite:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^* \in \mathcal{S}^\pm} \int_{\mathcal{S} \cap B_\varepsilon(\mathbf{x}^*)} d\sigma(\mathbf{x}') \partial_{\mathbf{\nu}'} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') . \quad (6.70)$$

Si indicherà con $\partial^+ B_\varepsilon(\mathbf{x}^*)$ la porzione della $\partial B_\varepsilon(\mathbf{x}^*)$ dalla parte positiva della superficie \mathcal{S} . Analogamente, $\partial^- B_\varepsilon(\mathbf{x}^*)$ sarà dalla parte negativa. Nel fare il limite per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^* \in \mathcal{S}^\pm$ si ha che \mathbf{x} è sempre *esterno* all'aperto di frontiera $[\mathcal{S} \cap B_\varepsilon(\mathbf{x}^*)] \cup \partial^\mp B_\varepsilon(\mathbf{x}^*)$. Ricordando la proprietà fondamentale della funzione di Green G si ha allora:

$$\int_{[\mathcal{S} \cap B_\varepsilon(\mathbf{x}^*)] \cup \partial^\mp B_\varepsilon(\mathbf{x}^*)} d\sigma(\mathbf{x}') \partial_{\mathbf{\nu}'} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \int_{B_\varepsilon^\mp(\mathbf{x}^*)} d\mathbf{x}' \nabla_{\mathbf{x}'}^2 G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \equiv 0 .$$

Decomponendo l'integrale a primo membro nella somma dell'integrale su $\mathcal{S} \cap B_\varepsilon(\mathbf{x}^*)$ e di quello su $\partial^\mp B_\varepsilon(\mathbf{x}^*)$ si ottiene:

$$\int_{\mathcal{S} \cap B_\varepsilon(\mathbf{x}^*)} d\sigma(\mathbf{x}') \partial_{\mathbf{\nu}'} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \int_{\partial^\mp B_\varepsilon(\mathbf{x}^*)} d\sigma(\mathbf{x}') \partial_{\mathbf{\nu}'} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') , \quad (6.71)$$

in cui si è mantenuta su $\partial^\mp B_\varepsilon(\mathbf{x}^*)$ la stessa orientazione della normale che è stata assunta su \mathcal{S} . L'uso dell'integrale a secondo membro della (6.71) per il calcolo del limite (6.70) presenta due vantaggi: è fatto su un dominio che non contiene il punto \mathbf{x}^* e la forma del dominio di integrazione rende immediata la sua valutazione.

Dal fatto che \mathbf{x} è sempre esterno alla $\partial^\mp B_\varepsilon(\mathbf{x}^*)$, ne segue che la funzione a secondo membro della (6.71) è continua in \mathbf{x}^* e su questa si può calcolare il limite interno presente nella (6.70):

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^* \in \mathcal{S}^\pm} \int_{\mathcal{S} \cap B_\varepsilon(\mathbf{x}^*)} d\sigma(\mathbf{x}') \partial_{\mathbf{\nu}'} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\partial^\mp B_\varepsilon(\mathbf{x}^*)} d\sigma(\mathbf{x}') \partial_{\mathbf{\nu}'} G(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}') , \end{aligned} \quad (6.72)$$

dove la memoria della parte (\mathcal{S}^+ o \mathcal{S}^-) da cui viene fatto il limite in \mathbf{x} è nella definizione di $\partial^\mp B_\varepsilon(\mathbf{x}^*)$. A questo punto si può considerare che per $\mathbf{x}' \in \partial^+ B_\varepsilon$ valgono le:

$$\partial_{\mathbf{\nu}'} G(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}') = \mathbf{\nu}(\mathbf{x}') \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} G(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}') = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi\varepsilon} & \text{in } 2D \\ -\frac{1}{4\pi\varepsilon^2} & \text{in } 3D , \end{cases}$$

mentre, procedendo in modo analogo, per $\mathbf{x}' \in \partial^- B_\varepsilon$ valgono le:

$$\partial_{\mathbf{\nu}'} G(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}') = \begin{cases} +\frac{1}{2\pi\varepsilon} & \text{in } 2D \\ +\frac{1}{4\pi\varepsilon^2} & \text{in } 3D \end{cases}$$

ed inoltre, per la regolarità di \mathcal{S} in \mathbf{x}^* :

$$|\partial^\mp B_\varepsilon(\mathbf{x}^*)| = \begin{cases} \pi\varepsilon + O(\varepsilon^2) & \text{in } 2D \\ 2\pi\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) & \text{in } 3D , \end{cases}$$

da cui segue che segue che il limite (6.72) vale $-1/2$ se $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^* \in \mathcal{S}^+$ e $+1/2$ se $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^* \in \mathcal{S}^-$. Utilizzando il risultato (6.69) si ha allora dalla (6.67):

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^* \in \mathcal{S}^\pm} \int_{\mathcal{S}} d\sigma(\mathbf{x}') \partial_{\boldsymbol{\nu}'} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \mp \frac{1}{2} + \int_{\mathcal{S}} d\sigma(\mathbf{x}') \partial_{\boldsymbol{\nu}'} G(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}') , \quad (6.73)$$

a seconda che il limite venga fatto dalla parte positiva (segno superiore) o da quella negativa (segno inferiore) della superficie \mathcal{S} .

Si consideri ora il caso in cui $\mu \neq 1$. Poiché la μ è continua con derivate continue anche al di fuori di \mathcal{S} , si può utilizzare l'identità:

$$\mu(\mathbf{x}') \equiv \mu(\mathbf{x}^*) + [\mu(\mathbf{x}') - \mu(\mathbf{x}^*)] + [\mu(\mathbf{x}) - \mu(\mathbf{x}^*)] \quad (6.74)$$

che fornisce la decomposizione equivalente alla (6.67):

$$\begin{aligned} & \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^* \in \mathcal{S}^\pm} \int_{\mathcal{S}} d\sigma(\mathbf{x}') \mu(\mathbf{x}') \partial_{\boldsymbol{\nu}'} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \\ &= \underbrace{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^* \in \mathcal{S}^\pm} \int_{\mathcal{S} \cap B'_\varepsilon(\mathbf{x}^*)} d\sigma(\mathbf{x}') \mu(\mathbf{x}') \partial_{\boldsymbol{\nu}'} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}_{{L_1}} + \\ &+ \underbrace{\mu(\mathbf{x}^*) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^* \in \mathcal{S}^\pm} \int_{\mathcal{S} \cap B_\varepsilon(\mathbf{x}^*)} d\sigma(\mathbf{x}') \partial_{\boldsymbol{\nu}'} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}_{{L_2}} + \quad (6.75) \\ &+ \underbrace{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^* \in \mathcal{S}^\pm} \int_{\mathcal{S} \cap B_\varepsilon(\mathbf{x}^*)} d\sigma(\mathbf{x}') [\mu(\mathbf{x}') - \mu(\mathbf{x}^*)] \partial_{\boldsymbol{\nu}'} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}_{{L_3}} + \\ &+ \underbrace{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^* \in \mathcal{S}^\pm} [\mu(\mathbf{x}) - \mu(\mathbf{x}^*)] \int_{\mathcal{S} \cap B_\varepsilon(\mathbf{x}^*)} d\sigma(\mathbf{x}') \partial_{\boldsymbol{\nu}'} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}_{{L_4}} \end{aligned}$$

Il limite L_1 può essere valutato direttamente, fornendo l'integrale, improprio in $3D$, seguente:

$$L_1 = \int_{\mathcal{S}} d\sigma(\mathbf{x}') \mu(\mathbf{x}') \partial_{\boldsymbol{\nu}'} G(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}') . \quad (6.76)$$

Per quanto discusso in precedenza, il secondo limite fornisce:

$$L_2 = \mp \frac{\mu(\mathbf{x}^*)}{2} , \quad (6.77)$$

ricordando che il segno superiore vale per il limite dalla parte positiva di \mathcal{S} ed il segno inferiore per il limite dalla parte negativa. Nel terzo limite occorre tener presente che,

per la regolarità di μ , la funzione integranda è continua (in $2D$) od integrabile (in $3D$) e quindi il limite dell'integrale sull'insieme $\mathcal{S} \cap B_\varepsilon(\mathbf{x}^*)$ per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ è nullo. Per l'ultimo limite, tenendo conto che l'integrale rimane finito in base alle considerazioni precedenti, si ottiene subito $L_4 = 0$.

Un secondo modo di procedere, che non implica il prolungamento della funzione μ al di fuori della superficie \mathcal{S} , è quello di ipotizzare μ di classe 1 su \mathcal{S} . In tal caso esiste una funzione vettoriale $\mathbf{M}(\mathbf{x}', \mathbf{x}^*)$ limitata tale che:

$$\mu(\mathbf{x}') = \mu(\mathbf{x}^*) + \mathbf{M}(\mathbf{x}', \mathbf{x}^*) \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x}^*) . \quad (6.78)$$

Questa decomposizione può essere utilizzata al posto della identità (6.74), considerando che $\mathbf{x}' - \mathbf{x}^* \equiv (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$. Adottando una decomposizione del tipo (6.75) si giunge alle medesime conclusioni.

In base ai risultati (6.76) e (6.77) segue per il limite nel caso generale:

$$\begin{aligned} & \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^* \in \mathcal{S}^\pm} \int_{\mathcal{S}} d\sigma(\mathbf{x}') \mu(\mathbf{x}') \partial_{\mathbf{v}'} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \\ & = \mp \frac{\mu(\mathbf{x}^*)}{2} + \int_{\mathcal{S}} d\sigma(\mathbf{x}') \mu(\mathbf{x}') \partial_{\mathbf{v}'} G(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}') \end{aligned} \quad (6.79)$$

con la solita avvertenza di scegliere il segno superiore se si effettua il limite dalla parte di \mathcal{S} in cui punta la normale e l'inferiore se si procede dalla parte opposta.

6.13 Valutazione del limite della derivata normale del potenziale di strato semplice

Nelle stesse ipotesi della Appendice (6.3), data una funzione scalare χ continua con derivata continua, il problema è quello di valutare il limite per $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^* \in \mathcal{S}^\pm$ della derivata:

$$\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}^*) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \int_{\mathcal{S}} d\sigma(\mathbf{x}') \chi(\mathbf{x}') G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \int_{\mathcal{S}} d\sigma(\mathbf{x}') \chi(\mathbf{x}') \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}^*) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') , \quad (6.80)$$

essendo il punto \mathbf{x} esterno alla superficie \mathcal{S} . La funzione χ nell'integrale (6.80) si chiama *densità di semplice strato*. La derivata (6.80) definisce una funzione di \mathbf{x} che sarà mostrata *discontinua attraverso la superficie \mathcal{S}* , presentando nel generico $\mathbf{x}^* \in \mathcal{S}$ un salto pari a $-\chi(\mathbf{x}^*)$ nel passare dalla faccia negativa a quella positiva.

Si considera dapprima il caso $\chi \equiv 1$ e si utilizza l'identità seguente:

$$\begin{aligned} & \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^* \in \mathcal{S}^\pm} \int_{\mathcal{S}} d\sigma(\mathbf{x}') \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}^*) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \equiv \\ & \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^* \in \mathcal{S}^\pm} \int_{\mathcal{S} \cap B'_\varepsilon(\mathbf{x}^*)} d\sigma(\mathbf{x}') \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}^*) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \quad (6.81) \\ & + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^* \in \mathcal{S}^\pm} \int_{\mathcal{S} \cap B_\varepsilon(\mathbf{x}^*)} d\sigma(\mathbf{x}') \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}^*) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') . \end{aligned}$$

Nel primo integrale della (6.81), $\mathbf{x}' \in \mathcal{S} \cap B'_\varepsilon(\mathbf{x}^*)$ e quindi si mantiene sempre almeno a distanza ε da \mathbf{x}^* . La funzione di \mathbf{x}

$$\int_{\mathcal{S} \cap B'_\varepsilon(\mathbf{x}^*)} d\sigma(\mathbf{x}') \, \nu(\mathbf{x}^*) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

è allora continua in \mathbf{x}^* e si può valutare il limite interno:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^* \in \mathcal{S}^\pm} \int_{\mathcal{S} \cap B'_\varepsilon(\mathbf{x}^*)} d\sigma(\mathbf{x}') \, \nu(\mathbf{x}^*) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathcal{S} \cap B'_\varepsilon(\mathbf{x}^*)} d\sigma(\mathbf{x}') \, \partial_{\nu^*} G(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}') . \end{aligned} \quad (6.82)$$

Si verifica agevolmente (cfr. Appendice 6.12) che $\partial_{\nu^*} G(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}')$ è una funzione *integrabile* in $\mathbf{x}' = \mathbf{x}^*$. Ne segue che si può effettuare anche il limite in ε nella (6.82):

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathcal{S} \cap B'_\varepsilon(\mathbf{x}^*)} d\sigma(\mathbf{x}') \, \partial_{\nu^*} G(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}') = \int_{\mathcal{S} \cap B'_\varepsilon(\mathbf{x}^*)} d\sigma(\mathbf{x}') \, \partial_{\nu^*} G(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}') , \quad (6.83)$$

che consente di valutare il primo contributo al limite (6.81).

Rimane da valutare il secondo limite:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^* \in \mathcal{S}^\pm} \int_{\mathcal{S} \cap B_\varepsilon(\mathbf{x}^*)} d\sigma(\mathbf{x}') \, \nu(\mathbf{x}^*) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') . \quad (6.84)$$

Si osservi che utilizzando le identità:

$$\nu(\mathbf{x}^*) \equiv \nu(\mathbf{x}') + [\nu(\mathbf{x}^*) - \nu(\mathbf{x}')]$$

$$\nabla_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \equiv -\nabla_{\mathbf{x}'} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

l'integrale sotto il doppio limite nella (6.84) può essere valutato come:

$$-\int_{\mathcal{S} \cap B_\varepsilon(\mathbf{x}^*)} d\sigma(\mathbf{x}') \, \partial_{\nu'} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \int_{\mathcal{S} \cap B_\varepsilon(\mathbf{x}^*)} d\sigma(\mathbf{x}') \, [\nu(\mathbf{x}^*) - \nu(\mathbf{x}')] \cdot \nabla_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') . \quad (6.85)$$

Il primo integrale, procedendo come nella Appendice 6.12, fornisce il seguente contributo:

$$-\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^* \in \mathcal{S}^\pm} \int_{\mathcal{S} \cap B_\varepsilon(\mathbf{x}^*)} d\sigma(\mathbf{x}') \, \partial_{\nu'} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \pm \frac{1}{2} , \quad (6.86)$$

a seconda che $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^* \in \mathcal{S}^+$ o che $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^* \in \mathcal{S}^-$. Il modulo del secondo integrale può essere maggiorato, considerando che per la continuità del versore normale esiste una costante $N > 0$ finita tale che $|\nu(\mathbf{x}^*) - \nu(\mathbf{x}')| \leq N |\mathbf{x}^* - \mathbf{x}'|$, dall'integrale di una funzione che per $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ è *finita* in $2D$ ($d = 2$), oppure è *integrabile* in $3D$ ($d = 3$):

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathcal{S} \cap B_\varepsilon(\mathbf{x}^*)} d\sigma(\mathbf{x}') \, [\nu(\mathbf{x}^*) - \nu(\mathbf{x}')] \cdot \nabla_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \right| \leq \\ &\leq \frac{N}{2(d-1)\pi} \int_{\mathcal{S} \cap B_\varepsilon(\mathbf{x}^*)} d\sigma(\mathbf{x}') \, \frac{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}^*|}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^{d-1}} . \end{aligned}$$

Ne segue che il secondo integrale fornisce un contributo nullo nel limite per $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Per $\chi \neq 1$ si procede in modo analogo a quanto fatto nella Appendice 6.12 effettuando la decomposizione:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^* \in \mathcal{S}^\pm} \int_{\mathcal{S}} d\sigma(\mathbf{x}') \chi(\mathbf{x}') \nu(\mathbf{x}^*) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^* \in \mathcal{S}^\pm} \int_{\mathcal{S} \cap B'_\varepsilon(\mathbf{x}^*)} d\sigma(\mathbf{x}') \chi(\mathbf{x}') \nu(\mathbf{x}^*) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \\ + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^* \in \mathcal{S}^\pm} \int_{\mathcal{S} \cap B_\varepsilon(\mathbf{x}^*)} d\sigma(\mathbf{x}') \chi(\mathbf{x}') \nu(\mathbf{x}^*) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') . \end{aligned}$$

La prima coppia di limiti, fatta sull'integrale esteso al di fuori della $B_\varepsilon(\mathbf{x}^*)$, può essere valutata direttamente, mentre nella seconda occorre effettuare l'ulteriore decomposizione:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^* \in \mathcal{S}^\pm} \int_{\mathcal{S} \cap B_\varepsilon(\mathbf{x}^*)} d\sigma(\mathbf{x}') \chi(\mathbf{x}') \nu(\mathbf{x}^*) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \equiv \\ \equiv \chi(\mathbf{x}^*) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^* \in \mathcal{S}^\pm} \int_{\mathcal{S} \cap B_\varepsilon(\mathbf{x}^*)} d\sigma(\mathbf{x}') \nu(\mathbf{x}^*) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \\ + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^* \in \mathcal{S}^\pm} \int_{\mathcal{S} \cap B_\varepsilon(\mathbf{x}^*)} d\sigma(\mathbf{x}') [\chi(\mathbf{x}') - \chi(\mathbf{x}^*)] \nu(\mathbf{x}^*) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') , \end{aligned}$$

in cui il secondo contributo è nullo per la regolarità di χ ed il primo viene calcolato in base alla (6.86). Si ottiene in definitiva:

$$\begin{aligned} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^* \in \mathcal{S}^\pm} \int_{\mathcal{S}} d\sigma(\mathbf{x}') \chi(\mathbf{x}') \nu(\mathbf{x}^*) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= \\ = \pm \frac{\chi(\mathbf{x}^*)}{2} + \int_{\mathcal{S}} d\sigma(\mathbf{x}') \chi(\mathbf{x}') \partial_{\nu^*} G(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}') \end{aligned}$$

(6.87)

in cui il segno superiore vale per il limite dalla parte verso cui punta la normale e l'inferiore per il limite dall'altra.

6.14 Flusso attorno ad un profilo di Joukowski

Lo scopo di questo paragrafo è illustrare una tecnica di simulazione numerica del rilasci di vorticità e conseguente formazione di una scia da un profilo di Joukowski in condizioni di flusso differenti. Si studieranno, in particolare, la partenza impulsiva con il raggiungimento di uno stato stazionario, il caso del profilo oscillante ed infine l'effetto del passaggio di un vortice in prossimità del profilo. Questi studi numerici consentiranno una valutazione della circolazione rilasciata a valle dal profilo ed il calcolo della forza (non stazionaria) agente sul profilo medesimo. Uno schema della

configurazione geometrica e delle caratteristiche principali del flusso è quello di Fig. 6.9.

Per effettuare le simulazioni utilizzeremo una trasformazione che mappa il flusso attorno al profilo in quello attorno ad un cilindro circolare, poiché sappiamo calcolare facilmente quest'ultimo. Nel piano del cilindro, la posizione complessa sarà indicata con la lettera greca ζ . Sappiamo che, se w è il potenziale complesso in assenza del cilindro, il potenziale w_c in presenza del cilindro è dato dal teorema del cerchio:

$$w_c(\zeta) = w(\zeta) + \bar{w} \left(\frac{1}{\bar{\zeta}} \right), \quad (6.88)$$

avendo assunto unitario il raggio del cilindro. Poiché la circolazione rilasciata sarà discretizzata mediante vortici “puntiformi”, analizziamo come si scrive il potenziale complesso di un vortice puntiforme (Γ_v, ζ_v) esterno ad un cilindro. Utilizzando il teorema del cerchio, espresso nella forma (6.88), partendo dal potenziale del vortice puntiforme $w(\zeta) = \Gamma_v/(2\pi i) \log(\zeta - \zeta_v)$ otteniamo:

$$\begin{aligned} w_c(\zeta) &= \frac{\Gamma_v}{2\pi i} \left[\log(\zeta - \zeta_v) - \log \left(\frac{1}{\zeta} - \bar{\zeta}_v \right) \right] \\ &= \frac{\Gamma_v}{2\pi i} [\log(\zeta - \zeta_v) + \log \zeta - \log(1 - \bar{\zeta}_v \zeta)] \\ &= \frac{\Gamma_v}{2\pi i} \left[\log(\zeta - \zeta_v) + \log \zeta - \log \left(\frac{1}{\bar{\zeta}_v} - \zeta \right) - \log \bar{\zeta}_v \right] \\ &= \frac{\Gamma_v}{2\pi i} \left[\log(\zeta - \zeta_v) + \log \zeta - \log \left(\zeta - \frac{1}{\bar{\zeta}_v} \right) - i\pi - \log \bar{\zeta}_v \right], \end{aligned}$$

cioè, a meno di termini costanti rispetto a ζ , il potenziale complesso:

$$w_c(\zeta) = \underbrace{\frac{\Gamma_v}{2\pi i} \log(\zeta - \zeta_v)}_{\text{vortice fisico}} - \underbrace{\frac{\Gamma_v}{2\pi i} \log \left(\zeta - \frac{1}{\bar{\zeta}_v} \right)}_{\substack{\text{vortice immagine} \\ (\text{impermeabilità})}} + \underbrace{\frac{\Gamma_v}{2\pi i} \log \zeta}_{\substack{\text{vortice al centro} \\ \text{del cilindro} \\ (\text{circolazione})}} \quad (6.89)$$

ovvero al vortice fisico in ζ_v occorre affiancare un *vortice immagine* in $1/\bar{\zeta}_v$ (interno la cilindrata) controrotante che assicura la condizione di impermeabilità sul cilindro ed uno corotante al centro del cilindro, in grado di ripristinare la circolazione attorno al corpo al valore corretto. I vortici prodotti a valle del profilo nella metodologia di simulazione che stiamo analizzando sono una discretizzazione della vorticità di scia. In base al teorema di Kelvin ad una circolazione rilasciata a valle del corpo corrisponde una circolazione opposta attorno al corpo. Per questo motivo, il vortice al centro del cilindro non verrà considerato, applicando implicitamente il teorema di Kelvin. Avendo allora n vortici presenti nel campo $\{(\Gamma_k, \zeta_k)\}_{k=1, \dots, n}$, il potenziale complesso nel piano del cilindro $\tilde{w}(\zeta)$ si scriverà come:

$$\tilde{w}(\zeta) = -u_\infty \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \Gamma_k \left[\log(\zeta - \zeta_k) - \log \left(\zeta - \frac{1}{\bar{\zeta}_k} \right) \right] + \frac{\Gamma_{b0}}{2\pi i} \log \zeta, \quad (6.90)$$

in cui si è assunto che al tempo 0 si misura una circolazione Γ_{b0} , in generale non nulla, lungo una qualunque curva semplice e chiusa che includa il corpo. Il primo addendo, $-u_\infty(\zeta + 1/\zeta)$, è costituito dal contributo della corrente uniforme $-u_\infty\zeta$, pensata diretta lungo l'asse reale negativo, e della doppietta $-u_\infty/\zeta$, necessaria per descrivere il campo di moto in presenza del cilindro immerso in tale corrente. Il secondo contributo:

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \Gamma_k \left[\log(\zeta - \zeta_k) - \log \left(\zeta - \frac{1}{\bar{\zeta}_k} \right) \right]$$

è quello dei vortici di scia: $\Gamma_k \log(\zeta - \zeta_k)$ è il potenziale del k -esimo vortice, mentre quello $-\Gamma_k \log(\zeta - 1/\bar{\zeta}_k)$ è il potenziale dovuto al corrispondente vortice immagine. Il terzo ed ultimo contributo al potenziale (6.90), ovvero $\Gamma_{b0}/(2\pi i) \log \zeta$, è necessario per avere una circolazione Γ_{b0} attorno al cilindro e, quindi, attorno al profilo.

Questo paragrafo è organizzato al modo seguente. Dopo aver illustrato la trasformazione di Joukowski tra il cilindro ed il profilo (§ 6.14.1), si discute il criterio con il quale vengono generati i vortici per soddisfare la condizione di Kutta sul bordo d'uscita (§ 6.14.2). Quindi viene descritto il modo con cui si calcola la dinamica dei vortici puntiformi, mostrando (§ 6.14.3) come è collegata la velocità nel piano fisico (del profilo) alla velocità nel piano trasformato (del cilindro). Poiché la velocità indotta da un vortice puntiforme assume in modulo valori via via più grandi in prossimità del vortice stesso, occorre prevenire l'innesto di instabilità numeriche nel calcolo delle velocità dei vortici, trattando opportunamente l'interazione vortice-vortice. questo argomento è affrontato nel paragrafo 6.14.4. In § 6.14.5 è illustrato il calcolo della risultante delle forze di pressione agenti sul profilo, mediante il teorema di Blasius. Infine, nel paragrafo 6.14.6 vengono presentati alcuni risultati delle simulazioni numeriche.

6.14.1 La trasformazione di Joukowski

Utilizzando questa trasformazione conforme è possibile trasformare il flusso esterno ad un cilindro (scelto per semplicità di raggio unitario) nel flusso attorno ad un profilo. La trasformazione si scrive:

$$z(\zeta'') = \zeta'' + \frac{p^2}{\zeta''} \quad (6.91)$$

e trasforma il cilindro di centro in ζ_c'' in un profilo, come è illustrato in Fig. 6.9. Nella definizione (6.91), p è un parametro reale, che dipende, una volta assegnato il raggio del cilindro, esclusivamente dalla posizione $\zeta_c'' = \xi_c + i \eta_c$ del centro di quest'ultimo. La coordinata ξ_c del centro sarà sempre non negativa, corrispondendo la scelta $\xi_c = 0$ con un profilo di spessore nullo. Inoltre, si assumerà sempre $|\zeta_c''| < 1$ ed anzi, nei casi di interesse, $|\zeta_c''| \ll 1$. Come è mostrato in Fig. 6.9, $-p$ è proprio il valore della ascissa dell'intercetta tra il cerchio e l'asse reale, ne segue che il parametro p si calcola in base alla relazione:

$$p = \sqrt{1 - \eta_c^2} - \xi_c . \quad (6.92)$$

Le caratteristiche del profilo (spessore e curvatura della linea media) risultano essere allora funzioni della sola ζ_c . In particolare, lo spessore è nullo per $\xi_c = 0$ e cresce al

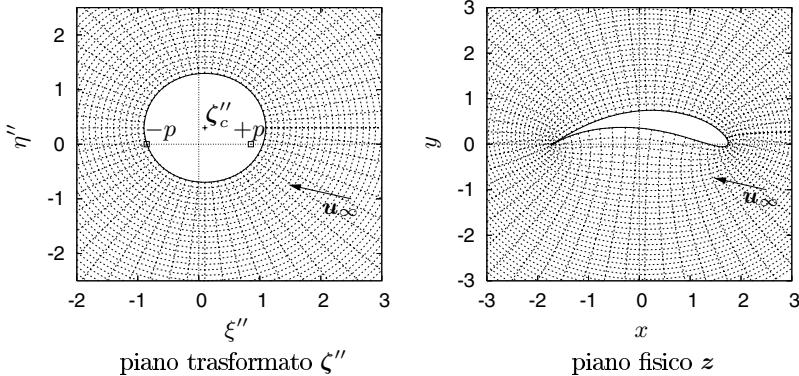


Figura 6.9. La trasformazione di Joukowski con il centro del cerchio in $\zeta_c'' = 0.1 + i 0.3$. Il punto $\zeta'' = -p$ viene trasformato nel bordo di uscita del profilo. Gli assi cartesiani sono disegnati con linee a punti, mentre con linee tratteggiate sono disegnate due griglie che si corrispondono attraverso la trasformazione (6.91). Il valore asintotico della velocità all'infinito è indicato col vettore u_∞ ed è il medesimo nei due piani.

crescere di ξ_c , mentre la curvatura della linea media è nulla per $\eta_c = 0$ ed aumenta all'aumentare di η_c . In Fig. 6.10 sono mostrati gli effetti delle variazioni di ξ_c (a) e di η_c (b). È importante osservare che il punto $\zeta'' = -p$ viene trasformato dalla (6.91) nel *bordo di uscita*, collocato in $z = -2p$. Il bordo di uscita è l'unico punto in cui la trasformazione (6.91) è singolare, risultando $\partial_{\zeta''} z(\zeta'')$ nulla. Analizziamo meglio il comportamento della trasformazione (6.91) in un intorno del bordo di uscita, assumendo:

$$\zeta''(\theta) = \zeta_c'' + e^{i(\theta+\theta^*)}, \quad \text{con: } \zeta''(0) = \zeta_c'' + e^{i\theta^*} = -p. \quad (6.93)$$

Il versore tangente al profilo nel punto è dato allora dalla seguente funzione di θ :

$$\tau(\theta) = \frac{\frac{dz}{d\theta}}{\left| \frac{dz}{d\theta} \right|} = -i \frac{p + \zeta_c''}{|p + \zeta_c''|} e^{i\theta} \frac{\zeta''(\theta) - p}{|\zeta''(\theta) - p|} \frac{\bar{\zeta}''(\theta)}{|\zeta''(\theta)|} \frac{\zeta''(\theta) + p}{|\zeta''(\theta) + p|},$$

che risulta essere discontinua attraverso il valore $\theta = 0$, ovvero il bordo di uscita. L'ultimo fattore a terzo membro è infatti responsabile di questo comportamento della funzione $\tau(\theta)$. Nel punto $\theta = 0$ i limiti da destra ($\theta > 0$) o sinistra ($\theta < 0$) della funzione vettoriale $\tau(\theta)$ sono dati da:

$$\tau(0^\pm) = \pm \left(\frac{p + \zeta_c''}{|p + \zeta_c''|} \right)^2, \quad (6.94)$$

dalla quale segue che il bordo d'uscita è una cuspidé ($\tau(0^-) + \tau(0^+) = \mathbf{0}$) e l'angolo formato tra la retta tangente al profilo nella cuspidé e l'asse x è doppio di quello

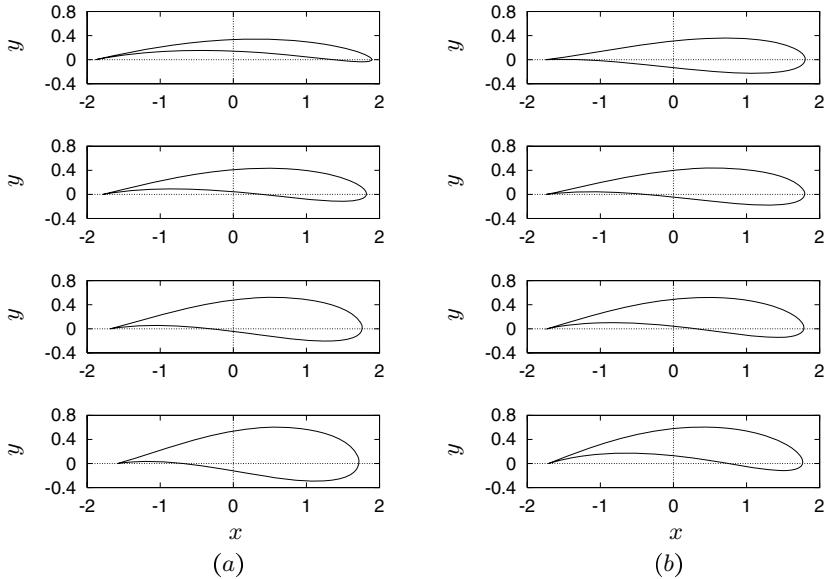


Figura 6.10. Nella colonna (a) è mostrato l'effetto della variazione di ξ_c ad η_c fisso ($\eta_c = 0.125$, dall'alto al basso $\xi_c = 0.05, 0.1, 0.15$ e 0.2). All'aumentare di ξ_c aumenta lo spessore del profilo. Nella colonna (b) è poi mostrato l'effetto della variazione di η_c a ξ_c fisso ($\xi_c = 0.125$, dall'alto al basso $\eta_c = 0.05, 0.1, 0.15$ e 0.2). All'aumentare di η_c aumenta la curvatura della linea media del profilo.

formato tra il vettore $p + \zeta''_c$ (congiungente il punto $\zeta'' = -p$ col centro del cilindro $\zeta'' = \zeta''_c$) e l'asse ξ'' . Esempi di profili di Joukowski sono disegnati in Fig. 6.10.

- ◊ **Esercizio:** Mostrare che $|\zeta''_c - p| < 1$.
Suggerimento: usare la (6.92) e far vedere che $|\zeta''_c - p|^2 = 1 - 4p\xi_c$.

$$(6.95)$$

L'uso diretto della trasformazione (6.91) è però alquanto scomodo, essenzialmente a causa della posizione decentrata del cilindro. Componendo allora la (6.91) con altre due trasformazioni (una traslazione che riporti il centro del cilindro nell'origine ed una rotazione che allinei la u_∞ all'asse delle x) si ottiene una trasformazione che consente di utilizzare il potenziale complesso attorno al cilindro nella sua forma più semplice (6.90). Queste due trasformazioni sono illustrate in Fig. 6.11. Posto:

$$\chi(t) = e^{i\alpha(t)}, \quad (6.96)$$

la trasformazione di Joukowski si riscrive nel piano ζ :

$$\zeta'' = \frac{\zeta}{\chi} + \zeta_c, \quad z(\zeta) = \frac{\zeta}{\chi} + \zeta_c + \frac{p^2}{\frac{\zeta}{\chi} + \zeta_c}, \quad (6.97)$$

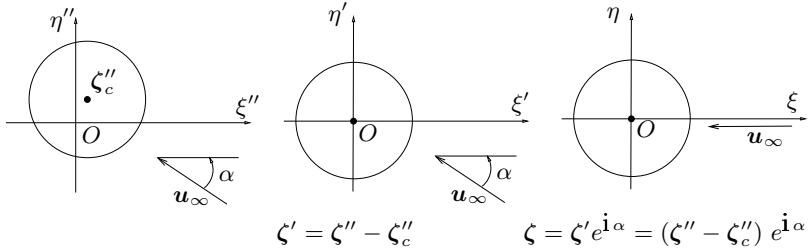


Figura 6.11. Da sinistra a destra: piano ζ'' del cilindro, piano ζ' traslato di $-\zeta_c''$ per portare il centro del cilindro nell'origine O e piano ζ ruotato di $-\alpha$ per allineare la corrente asintotica alla direzione ξ .

avendo utilizzato la notazione semplificata $\zeta_c = \zeta_c''$ e sottointendendo la dipendenza dal tempo eventualmente presente in χ , dovuta alle variazioni dell'incidenza α . La derivata in ζ della funzione $z(\zeta)$ (6.97) vale:

$$G(\zeta) = \partial_\zeta z(\zeta) = \frac{1}{\chi} \frac{[\zeta + \chi(\zeta_c + p)][\zeta + \chi(\zeta_c - p)]}{(\zeta + \chi\zeta_c)^2}, \quad (6.98)$$

mentre la funzione inversa $\zeta(z)$:

$$\zeta(z) = \frac{\chi}{2} \left[(z - 2\zeta_c) \pm \sqrt{z^2 - 4p^2} \right] \quad (6.99)$$

ha una derivata che si riscrive nuovamente in ζ al modo seguente:

$$F(\zeta) = \partial_z \zeta(z) |_{z=z(\zeta)} = \frac{1}{\partial_\zeta z(\zeta)} = \frac{1}{G(\zeta)}. \quad (6.100)$$

La determinazione del segno a secondo membro della (6.99) viene fatta richiedendo che $|\zeta| > 1$. Della funzione F occorreranno, nel calcolo della forza, le prime tre derivate:

$$\begin{aligned} F'(\zeta) &= -2\chi^3 p^2 \frac{\zeta + \chi\zeta_c}{[\zeta + \chi(\zeta_c + p)]^2 [\zeta + \chi(\zeta_c - p)]^2} \\ F''(\zeta) &= +2\chi^3 p^2 \frac{3\zeta^2 + 6\chi\zeta_c\zeta + \chi^2(3\zeta_c^2 + p^2)}{[\zeta + \chi(\zeta_c + p)]^3 [\zeta + \chi(\zeta_c - p)]^3} \\ F'''(\zeta) &= -24\chi^3 p^2 \frac{(\zeta + \chi\zeta_c)[\zeta^2 + 2\chi\zeta_c\zeta + \chi^2(\zeta_c^2 + p^2)]}{[\zeta + \chi(\zeta_c + p)]^4 [\zeta + \chi(\zeta_c - p)]^4}. \end{aligned} \quad (6.101)$$

6.14.2 Condizione di Kutta e generazione dei vortici puntiformi

La condizione di Kutta (impossibilità di aggiramento del bordo di uscita) impone una velocità finita sul bordo di uscita. Osserviamo che, se \tilde{w} è il potenziale complesso nel piano ζ , il coniugato della velocità si scrive:

$$\bar{w}(z) = \partial_z \tilde{w}[\zeta(z)] = \partial_\zeta \tilde{w} |_{\zeta(z)} \partial_z \zeta |_{\zeta(z)} = \partial_\zeta \tilde{w} |_{\zeta(z)} F[\zeta(z)]. \quad (6.102)$$

Come si vede dalle (6.100, 6.98), tenendo presente che il punto $-p$ nel piano ζ'' è il punto $-\chi(\zeta_c + p)$ nel piano ζ (cfr. Fig. 6.11), F è singolare nel punto corrispondente al bordo di uscita. Ne segue che, per imporre un limite finito della u nel bordo di uscita si dovrà *necessariamente* richiedere:

$$\lim_{\zeta \rightarrow -\chi(\zeta_c + p)} \partial_\zeta \tilde{w}(\zeta) = \mathbf{0}, \quad (6.103)$$

ovvero la velocità nel piano trasformato $\tilde{u}(\zeta) = \overline{\partial_\zeta \tilde{w}(\zeta)}$ dovrà essere nulla in $-\chi(\zeta_c + p)$. Questa condizione non viene imposta ad ogni istante del calcolo, ma viene soddisfatta all'inizio di ogni passo nel tempo. La tecnica utilizzata per imporre la condizione di Kutta consiste nel fissare un punto nel piano fisico molto vicino al bordo di uscita, nel quale posizionare un nuovo vortice (uno per ogni passo nel tempo) la cui circolazione viene scelta in modo da soddisfare la richiesta (6.103).

Supponiamo di aver fissato un punto ζ_g nel piano ζ'' tale che la sua immagine nel piano fisico $z(\zeta_g)$, con z data dalla (6.91), sia molto vicina al bordo di uscita. A tale punto nel piano ζ'' corrisponderà il punto $\chi(\zeta_g - \zeta_c)$ nel piano ζ (cfr. Fig. 6.11).

Al nuovo tempo t^{n+1} inseriremo nel campo un nuovo vortice in $\chi(\zeta_g - \zeta_c)$, di questo nuovo vortice vogliamo determinare la circolazione in modo che la condizione necessaria (6.103) sia soddisfatta. Osserviamo che il potenziale complesso all'istante t^{n+1} sarà dato dal potenziale complesso \tilde{w}_n contenente gli n vortici presenti nel campo per $t \in [t^n, t^{n+1}]$ più il potenziale del nuovo vortice posto in $\chi(\zeta_g - \zeta_c)$:

$$\tilde{w}_{n+1}(\zeta) = \tilde{w}_n(\zeta) + \frac{\Gamma_{n+1}}{2\pi i} \left\{ \log[\zeta - \chi(\zeta_g - \zeta_c)] - \log \left[\zeta - \frac{1}{\bar{\chi}(\zeta_g - \zeta_c)} \right] \right\},$$

in cui il contributo del vortice al centro del cilindro è stato omesso per applicare il teorema di Kelvin. A questo potenziale complesso corrisponderà una velocità nel piano trasformato data da:

$$\overline{\tilde{u}}_{n+1} = \partial_\zeta \tilde{w}_{n+1}(\zeta) = \overline{\tilde{u}}_n(\zeta) + \frac{\Gamma_{n+1}}{2\pi i} \left[\frac{1}{\zeta - \chi(\zeta_g - \zeta_c)} - \frac{1}{\zeta - \frac{1}{\bar{\chi}(\zeta_g - \zeta_c)}} \right]$$

e la condizione (6.103) implica che:

$$+\frac{\Gamma_{n+1}}{2\pi i} \left[\frac{1}{-\chi(\zeta_c + p) - \chi(\zeta_g - \zeta_c)} - \frac{1}{-\chi(\zeta_c + p) - \frac{1}{\bar{\chi}(\zeta_g - \zeta_c)}} \right] = \mathbf{0}, \quad (6.104)$$

che, risolta in Γ_{n+1} , fornisce⁹ la circolazione del nuovo vortice:

$$\Gamma_{n+1} = \frac{\frac{2\pi i \chi \overline{\tilde{u}}_n[-\chi(\zeta_c + p)]}{1}}{\frac{1}{p + \zeta_g} - \frac{1}{p + \zeta_c + \frac{1}{\bar{\chi}(\zeta_g - \zeta_c)}}}. \quad (6.105)$$

⁹ Dalla definizione (6.96) segue pure che $\bar{\chi} = 1/\chi$.

Occorre osservare, ed è molto importante, che la (6.104) fornisce un risultato reale, essendo \tilde{u}_n ed il coniugato del coefficiente di Γ_{n+1} nella (6.104) entrambi tangentì al cilindro nel punto $-\chi(\zeta_c + p)$.

Si può verificare che la condizione (6.103) è anche sufficiente a rendere finita la velocità nel bordo d'uscita.

6.14.3 La velocità di un vortice puntiforme

Il calcolo della velocità nel piano fisico con cui si muove un vortice puntiforme (Γ_v, z_v) deve essere effettuato con cautela: infatti si dispone del potenziale complesso \tilde{w} nel piano ζ ed occorre escludere il contributo autoindotto alla velocità nel piano fisico z . A causa della non linearità della trasformazione $z(\zeta)$, questo non può essere fatto semplicemente nel piano trasformato.

Chiamiamo con \tilde{w}_v il potenziale complesso nel piano ζ privato del contributo autoindotto del vortice v . Osserviamo che la velocità nel piano fisico del vortice v è dato da:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{z}}_v &= \lim_{z \rightarrow z_v} \left[\bar{w}(z) - \frac{\Gamma_v}{2\pi i} \frac{1}{z - z_v} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow z_v} \left(\partial_\zeta \tilde{w} \partial z \zeta - \frac{\Gamma_v}{2\pi i} \frac{1}{z - z_v} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_v} \left(\partial_\zeta \tilde{w}_v \partial z \zeta + \frac{\Gamma_v}{2\pi i} \frac{\partial z \zeta}{\zeta - \zeta_v} - \frac{\Gamma_v}{2\pi i} \frac{1}{z - z_v} \right) \\ &= \partial_\zeta \tilde{w}_v \partial z \zeta |_{\zeta_v} + \frac{\Gamma_v}{2\pi i} z \lim_{z \rightarrow z_v} \left(\frac{\partial z \zeta}{\zeta - \zeta_v} - \frac{\Gamma_v}{2\pi i} \right). \quad (6.106)\end{aligned}$$

La forma indeterminata nell'ultimo membro della (6.106) viene valutata applicando il teorema di de l'Hospital:

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow z_v} \left(\frac{\partial z \zeta}{\zeta - \zeta_v} - \frac{\Gamma_v}{2\pi i} \right) &= \lim_{z \rightarrow z_v} \frac{(z - z_v) \partial z \zeta - (\zeta - \zeta_v)}{(\zeta - \zeta_v)(z - z_v)} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_v} \frac{\partial^2 z \zeta + (z - z_v) \partial^3 z z \zeta}{(z - z_v) \partial^2 z \zeta + 2 \partial z \zeta} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 z \zeta}{\partial z \zeta} \Big|_{\zeta_v},\end{aligned}$$

da cui sostituendo nella (6.106):

$$\begin{aligned}\dot{\bar{z}}_v &= \partial_\zeta \tilde{w}_v \partial z \zeta |_{\zeta_v} + \frac{\Gamma_v}{4\pi i} \partial_\zeta (\partial z \zeta) |_{\zeta_v} \\ &= \partial_\zeta \tilde{w}_v(\zeta_v) \mathbf{F}(\zeta_v) + \frac{\Gamma_v}{4\pi i} \mathbf{F}'(\zeta_v).\end{aligned} \quad (6.107)$$

Occorre notare, infine, che, se la trasformazione $z(\zeta)$ fosse lineare, \mathbf{F}' sarebbe identicamente nulla ed escludere il contributo autoindotto nel piano fisico o nel piano trasformato porterebbe al medesimo risultato.

6.14.4 La velocità di un vortice puntiforme con il trattamento della interazione vortice-vortice

Il campo di velocità generato da un vortice puntiforme (Γ_v, z_v) è singolare per $z \rightarrow z_v$. Dovendo integrare numericamente il moto dei vortici puntiformi con i quali si è discretizzata la scia a valle del profilo, tale comportamento comporta delle difficoltà numeriche insormontabili. Infatti, quando i moduli delle velocità indotte diventano eccessivamente grandi, il passo nel tempo (Δt) di integrazione si riduce a valori proibitivamente piccoli per garantire l'accuratezza dell'integrazione numerica. Ne segue che occorre trattare la velocità indotta dal vortice puntiforme per poter effettuare una integrazione numerica. Il modo più semplice consiste nell'impedire l'aerzeramento del denominatore della velocità indotta nel piano trasformato:

$$\bar{u}_v(\zeta) = \frac{\Gamma_v}{2\pi i} \frac{1}{\zeta - \zeta_v}.$$

Si considera la frazione il cui denominatore è $|\zeta - \zeta_v|^2$ (ottenuta moltiplicando numeratore e denominatore per $\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_v$, nel secondo membro della relazione precedente) e si aggiunge una piccola quantità positiva (che indicheremo con ε^2) al denominatore della frazione. In tal modo si ottiene la velocità *desingularizzata* seguente:

$$\tilde{u}_v(\zeta) = \frac{\Gamma_v}{2\pi i} \frac{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_v}{|\zeta - \zeta_v|^2 + \varepsilon^2},$$

la quale non presenta più la singolarità per $\zeta \rightarrow \zeta_v$. In definitiva, la $\dot{\bar{z}}_j$ assume la forma seguente:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}}_j &= \frac{\Gamma_j}{4\pi i} \mathbf{F}'(\zeta_j) + \left[-u_\infty \left(1 - \frac{1}{\zeta_j^2} \right) + \frac{1}{2\pi i} \frac{\Gamma_{b0}}{\zeta_j} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^N \Gamma_k \left(\frac{\bar{\zeta}_j - \bar{\zeta}_k}{|\zeta_j - \zeta_k|^2 + \varepsilon^2} - \frac{1}{\zeta_j - \bar{\zeta}_k} \right) \right] \mathbf{F}(\zeta_j), \end{aligned} \quad (6.108)$$

il cui secondo membro verrà in seguito (§ 6.14.6) chiamato \bar{U}_j e sarà, in generale, una funzione del tempo.

Osserviamo, infine, che la velocità (6.108) consente anche di calcolare la velocità con la quale l'immagine del j -esimo vortice ζ_j si sposta nel piano trasformato ζ . In generale, possiamo scrivere che, sulla base della trasformazione inversa, $\zeta_v = \zeta_v(z_v, t)$, la quale può essere derivata nel tempo ottenendo:

$$\dot{\zeta}_v(t) = \bar{\mathbf{F}}(\zeta_v) \dot{\bar{z}}_v(t) + \partial_t \bar{\zeta}(z_v, t), \quad (6.109)$$

in cui è stata considerata la definizione (6.100) della funzione \mathbf{F} e la derivata $\partial_t \bar{\zeta}$ è fatta a z_v fisso. Una espressione di quest'ultima (6.113) sarà introdotta nel seguito.

6.14.5 La risultante delle forze sul profilo

Come discusso nel paragrafo 6.5, la risultante delle sollecitazioni di pressione sul corpo può essere calcolata valutando due integrali di funzioni di variabile complessa noti come contributi *non stazionario* \mathbf{R}_{ns} e *stazionario* \mathbf{R}_s :

$$\mathbf{R}_{ns} = \int_{\partial\Omega_b} dz \partial_t \mathbf{w}, \quad \mathbf{R}_s = \frac{1}{2} \overline{\int_{\partial\Omega_b} dz (\partial_z \mathbf{w})^2}. \quad (6.110)$$

I due contributi (6.110) corrispondono ai termini non stazionario (\mathbf{F}_{ns}) e stazionario (\mathbf{F}_s) identificati nella (6.28) e calcolati mediante il potenziale complesso \mathbf{w} nella (6.31), a meno del fattore $-i\rho$. In tal modo la risultante \mathbf{R} sul profilo si scrive:

$$\mathbf{R} = -i\rho (\mathbf{R}_{ns} + \mathbf{R}_s). \quad (6.111)$$

Supponiamo ora di avere una trasformazione conforme tra il piano ζ , dove il corpo è $\tilde{\Omega}_b$, ed il piano fisico z , dove il corpo è Ω_b . In generale questa trasformazione può dipendere dal tempo t :

$$z = z(\zeta, t),$$

ad esempio nella (6.97) possiamo immaginare $\alpha = \alpha(t)$. Chiamiamo, come sempre, con $\tilde{\mathbf{w}}$ il potenziale complesso nel piano trasformato:

$$\mathbf{w}(z, t) = \tilde{\mathbf{w}}[\zeta(z, t), t],$$

in cui la dipendenza diretta dal tempo in $\tilde{\mathbf{w}}$ si ha per il tramite delle posizioni dei vortici (sia fisici che immagine) ed, eventualmente, a causa della non stazionarietà della u_∞ . Effettuiamo il cambiamento di variabili dal piano fisico z a quello trasformato ζ negli integrali presenti in (6.110). Consideriamo che, in base alla (6.98), il differenziale dz si può scrivere come:

$$dz = \partial_\zeta z d\zeta = \mathbf{G} d\zeta$$

e che, utilizzando la (6.101), la derivata del potenziale \mathbf{w} in z si esprime come:

$$\partial_z \mathbf{w} = \partial_\zeta \tilde{\mathbf{w}} \partial_z \zeta = \partial_\zeta \tilde{\mathbf{w}} \mathbf{F}.$$

Considerando che $\partial_t \mathbf{w} = \partial_t \tilde{\mathbf{w}} + \partial_\zeta \tilde{\mathbf{w}} \partial_t \zeta$, in cui la derivata nel tempo è fatta a z fissato, i due contributi alla risultante si scrivono:

$$\mathbf{R}_{ns} = \int_{\partial\tilde{\Omega}_b} d\zeta (\partial_t \tilde{\mathbf{w}} + \partial_\zeta \tilde{\mathbf{w}} \partial_t \zeta) \mathbf{G}, \quad \mathbf{R}_s = \frac{1}{2} \overline{\int_{\partial\tilde{\Omega}_b} d\zeta (\partial_\zeta \tilde{\mathbf{w}})^2 \mathbf{F}}. \quad (6.112)$$

Esplicitiamo ora i vari termini nel caso in esame, ovvero con z data dalla (6.97). Considerando che la dipendenza dal tempo di α non implica variazioni di ζ_c (forma del profilo) e quindi di p , dalla trasformazione inversa (6.99) segue subito che a z fissato:

$$\partial_t \zeta = i \dot{\alpha} \zeta, \quad (6.113)$$

mentre dall'espressione del potenziale $\tilde{\mathbf{w}}$ nel piano trasformato (6.90) scritta per $t \in [t^n, t^{n+1})$ ($t^n = (n-1)\Delta t$, n vortici puntiformi sono presenti nel campo) si ottiene subito:

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{\mathbf{w}} &= -\dot{u}_\infty \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) - \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \Gamma_k \left(\frac{\dot{\zeta}_k}{\zeta - \zeta_k} + \frac{\dot{\bar{\zeta}}_k}{\bar{\zeta}_k^2} \frac{1}{\zeta - \frac{1}{\bar{\zeta}_k}} \right) \\ \partial_\zeta \tilde{\mathbf{w}} &= -u_\infty \left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right) + \frac{1}{2\pi i} \left[\sum_{k=1}^n \Gamma_k \left(\frac{1}{\zeta - \zeta_k} - \frac{1}{\zeta - \frac{1}{\bar{\zeta}_k}} \right) + \frac{\Gamma_{b0}}{\zeta} \right]. \end{aligned} \quad (6.114)$$

Termine non stazionario R_{ns}

Sostituendo le (6.113, 6.114) nell'espressione (6.112) di R_{ns} :

$$\begin{aligned} R_{ns} &= \int_{\partial\tilde{\Omega}_b} d\zeta (\partial_t \tilde{w} + \partial_\zeta \tilde{w} \partial_t \zeta) G \\ &= \int_{\partial\tilde{\Omega}_b} d\zeta \left\{ -\dot{u}_\infty \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) - \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \Gamma_k \left(\frac{\dot{\zeta}_k}{\zeta - \zeta_k} + \frac{\dot{\bar{\zeta}}_k}{\bar{\zeta}_k^2} \frac{1}{\zeta - \frac{1}{\bar{\zeta}_k}} \right) + \right. \\ &\quad + i \dot{\alpha} \zeta \left[-u_\infty \left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \Gamma_k \left(\frac{1}{\zeta - \zeta_k} - \frac{1}{\zeta - \frac{1}{\bar{\zeta}_k}} \right) \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\Gamma_{b0}}{2\pi i} \frac{1}{\zeta} \right] \right\} G(\zeta), \end{aligned}$$

in cui G (6.98) ha un polo doppio in $\zeta = -\chi\zeta_c$, interno al cilindro. Riscriviamo R_{ns} ordinando i poli presenti:

$$\begin{aligned} R_{ns} &= \int_{\partial\tilde{\Omega}_b} d\zeta \left\{ \frac{\Gamma_{b0}\dot{\alpha}}{2\pi} - (\dot{u}_\infty + i \dot{\alpha} u_\infty) \zeta + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \Gamma_k (-\dot{\zeta}_k + i \dot{\alpha} \zeta) \frac{1}{\zeta - \zeta_k} + \right. \\ &\quad \left. + (-\dot{u}_\infty + i \dot{\alpha} u_\infty) \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \Gamma_k \left(\frac{\dot{\bar{\zeta}}_k}{\bar{\zeta}_k^2} + i \dot{\alpha} \zeta \right) \frac{1}{\zeta - \frac{1}{\bar{\zeta}_k}} \right\} G(\zeta). \end{aligned} \quad (6.115)$$

Calcoliamo questo integrale facendo uso del teorema dei residui interni. Il residuo relativo al polo in $\zeta = 0$ è dato da:

$$(-\dot{u}_\infty + i \dot{\alpha} u_\infty) G(\mathbf{0}), \quad (6.116)$$

mentre il residuo relativo al polo in $1/\bar{\zeta}_k$ per $k = 1, 2, \dots, n$ è dato da:

$$-\frac{1}{2\pi i} \frac{\Gamma_k}{\bar{\zeta}_k^2} (\dot{\bar{\zeta}}_k + i \dot{\alpha} \bar{\zeta}_k) G \left(\frac{1}{\bar{\zeta}_k} \right). \quad (6.117)$$

L'ultimo polo interno al cilindro è quello presente nella funzione $G(\zeta)$, che, come abbiamo già osservato, possiede un polo doppio in $\zeta = -\chi\zeta_c$. Al fine di calcolare il residuo in tale polo, moltiplichiamo la funzione integranda nella (6.115) per $(\zeta + \chi\zeta_c)^2$ e sottraiamo e sommiamo al termine $-\dot{\zeta}_k + i \dot{\alpha} \zeta$ all'interno della prima sommatoria il termine $i \dot{\alpha} \zeta_k$, analogamente nella seconda sommatoria sottraiamo e sommiamo al termine $\dot{\bar{\zeta}}_k/\bar{\zeta}_k^2 + i \dot{\alpha} \zeta$ la quantità $i \dot{\alpha} \zeta_k$. In tal modo otteniamo la funzione seguente:

$$\begin{aligned} H(\zeta) &= \frac{1}{\chi} \left[\frac{\Gamma_{b0}\dot{\alpha}}{2\pi} - (\dot{u}_\infty + i \dot{\alpha} u_\infty) \zeta - \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \Gamma_k \frac{\dot{\zeta}_k - i \dot{\alpha} \zeta_k}{\zeta - \zeta_k} + \right. \\ &\quad \left. + (-\dot{u}_\infty + i \dot{\alpha} u_\infty) \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma_k}{\bar{\zeta}_k^2} \frac{\dot{\bar{\zeta}}_k + i \dot{\alpha} \bar{\zeta}_k}{\zeta - \frac{1}{\bar{\zeta}_k}} \right] \times \\ &\quad \times [\zeta + \chi(\zeta_c + p)][\zeta + \chi(\zeta_c - p)]. \end{aligned}$$

Derivando in ζ la funzione H e calcolando tale derivata nel punto $\zeta = -\chi\zeta_c$ (osservare che la derivata del fattore $[\zeta + \chi(\zeta_c + p)][\zeta + \chi(\zeta_c - p)]$ è nulla in tale punto), otteniamo il valore del residuo in $\zeta = -\chi\zeta_c$:

$$\begin{aligned} -\chi p^2 & \left\{ -(\dot{u}_\infty + i \dot{\alpha} u_\infty) + \frac{\dot{u}_\infty - i \dot{\alpha} u_\infty}{\chi^2 \zeta_c^2} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \Gamma_k \left[\frac{\dot{\zeta}_k - i \dot{\alpha} \zeta_k}{(\zeta_k + \chi\zeta_c)^2} + \frac{\dot{\bar{\zeta}}_k + i \dot{\alpha} \bar{\zeta}_k}{(1 + \chi\zeta_c \bar{\zeta}_k)^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.118)$$

Utilizzando i risultati (6.116, 6.117, 6.118) possiamo calcolare il contributo non stazionario (6.110) alla sollecitazione (6.111) agente sul corpo:

$$\begin{aligned} R_{ns} = 2\pi i & \left[(-\dot{u}_\infty + i \dot{\alpha} u_\infty) \mathbf{G}(\mathbf{0}) + \chi p^2 (\dot{u}_\infty + i \dot{\alpha} u_\infty) - \frac{p^2}{\chi \zeta_c^2} (\dot{u}_\infty - i \dot{\alpha} u_\infty) \right] + \\ & + \sum_{k=1}^n \Gamma_k \left[-\frac{\dot{\zeta}_k + i \dot{\alpha} \bar{\zeta}_k}{\zeta_k^2} \mathbf{G} \left(\frac{1}{\zeta_k} \right) + \chi p^2 \frac{i \dot{\alpha} \zeta_k - \dot{\zeta}_k}{(\zeta_k + \chi\zeta_c)^2} - \chi p^2 \frac{\dot{\bar{\zeta}}_k + i \dot{\alpha} \bar{\zeta}_k}{(1 + \chi\zeta_c \bar{\zeta}_k)^2} \right]. \end{aligned} \quad (6.119)$$

I contributi legati alle derivate delle posizioni trasformate dei vortici ($\dot{\zeta}_k$ per $k = 1, 2, \dots, n$) nella forma (6.119) del termine non stazionario sono calcolati utilizzando la relazione (6.109), in cui si sostituisca la derivata nel tempo data dalla (6.113).

Termine stazionario R_s

Sulla base dell'espressione ottenuta nel piano trasformato (6.112), occorre preliminarmente fare il quadrato della espressione (6.114) della derivata $\partial_\zeta \tilde{w}$, che riordinando i poli, si può scrivere come:

$$\begin{aligned} (\partial_\zeta \tilde{w})^2 = u_\infty^2 & - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k,j=1}^n \frac{\Gamma_k \Gamma_j}{(\zeta - \zeta_k)(\zeta - \zeta_j)} - \frac{u_\infty}{\pi i} \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma_k}{\zeta - \zeta_k} + \\ & - \frac{u_\infty \Gamma_{b0}}{\pi i} \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{2\pi^2} \frac{\Gamma_{b0}}{\zeta} \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma_k}{\zeta - \zeta_k} + \\ & + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{k,j=1}^n \frac{\Gamma_k \Gamma_j}{(\zeta - \zeta_k) \left(\zeta - \frac{1}{\bar{\zeta}_j} \right)} + \frac{u_\infty}{\pi i} \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma_k}{\zeta - \frac{1}{\bar{\zeta}_k}} + \\ & - \left(2u_\infty^2 + \frac{\Gamma_{b0}^2}{4\pi^2} \right) \frac{1}{\zeta^2} + \frac{u_\infty}{\pi i} \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma_k}{\zeta - \zeta_k} + \\ & - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma_k^2}{\left(\zeta - \frac{1}{\bar{\zeta}_k} \right)^2} + \\ & + \frac{u_\infty \Gamma_{b0}}{\pi i} \frac{1}{\zeta^3} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{u_\infty^2}{\zeta^4} + \\
& - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\substack{k,j=1 \\ k \neq j}}^n \frac{\Gamma_k \Gamma_j}{(\zeta - \frac{1}{\bar{\zeta}_k}) (\zeta - \frac{1}{\bar{\zeta}_j})} + \frac{1}{2\pi^2} \frac{\Gamma_{b0}}{\zeta} \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma_k}{\zeta - \frac{1}{\bar{\zeta}_k}} + \\
& - \frac{u_\infty}{\pi i} \frac{1}{\zeta^2} \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma_k}{\zeta - \frac{1}{\bar{\zeta}_k}} .
\end{aligned}$$

Riguardo al secondo membro, l'ordinamento è stato fatto in base alla natura ed alla molteplicità dei poli interni al cilindro $\partial\tilde{\Omega}_b$: sulla prima riga ci sono i contributi regolari, sulla seconda i poli semplici in $\zeta = 0$, sulla terza i poli semplici in $\zeta \neq 0$, sulla quarta i poli doppi in $\zeta = 0$, sulla quinta i poli doppi in $\zeta \neq 0$, sulla sesta il polo triplo in $\zeta = 0$, sulla settima il polo quadruplo in $\zeta = 0$, sulla ottava i prodotti di poli semplici ed infine sulla nona i prodotti di un polo doppio ed uno semplice. Prima di effettuare il calcolo sulla base del teorema dei residui interno, della componente (6.112) della sollecitazione sul corpo, osserviamo che la funzione $\mathbf{F}(\zeta)$ possiede due poli: uno in $\chi(p - \zeta_c)$, che è interno al cilindro, cfr. Esercizio (6.95), ed un secondo polo in $-\chi(\zeta_c + p)$, ovvero sul punto trasformato del bordo d'uscita del profilo. Poiché la forza \mathbf{R} è calcolata nel medesimo istante in cui viene imposta la condizione di Kutta, il prodotto $\partial_\zeta \tilde{w} \mathbf{F}$ è finito in $-\chi(\zeta_c + p)$ ed anzi, avendo imposto $\tilde{\mathbf{u}}[-\chi(\zeta_c + p)] = \mathbf{0}$, il prodotto $(\partial_\zeta \tilde{w})^2 \mathbf{F}$ è nullo in $\zeta = -\chi(\zeta_c + p)$. Dei due poli di \mathbf{F} va quindi considerato il solo polo in $\zeta = \chi(p - \zeta_c)$. Cominciamo a calcolare i residui proprio da tale polo. Utilizzando la forma (6.100) di \mathbf{F} e quindi anche la funzione \mathbf{G} data dalla (6.98) e lasciando indicata¹⁰ la derivata $(\partial_\zeta \tilde{w})^2$ come $\bar{\mathbf{u}}^2$ abbiamo:

$$\frac{1}{2} \chi^2 p \bar{\mathbf{u}}^2 [\chi(p - \zeta_c)] . \quad (6.120)$$

Il residuo dei poli semplici in $\zeta = 0$ si scrive poi come:

$$\left(- \frac{u_\infty \Gamma_{b0}}{\pi i} + \frac{\Gamma_{b0}}{2\pi^2} \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma_k}{\zeta_k} \right) \mathbf{F}(\mathbf{0}) , \quad (6.121)$$

mentre il residuo dovuto ai poli semplici ma in $\zeta \neq 0$ si scrive:

$$\frac{u_\infty}{\pi i} \sum_{k=1}^n \Gamma_k \mathbf{F} \left(\frac{1}{\bar{\zeta}_k} \right) - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{k,j=1}^n \frac{\Gamma_k \Gamma_j}{\zeta_k - \frac{1}{\bar{\zeta}_j}} \mathbf{F} \left(\frac{1}{\bar{\zeta}_j} \right) . \quad (6.122)$$

Passiamo ora a valutare i residui relativi ai poli doppi: il polo in $\zeta = 0$ fornisce:

$$- \left(2u_\infty^2 + \frac{\Gamma_{b0}^2}{4\pi^2} \right) \mathbf{F}'(\mathbf{0}) - \frac{u_\infty}{\pi i} \sum_{k=1}^n \Gamma_k \frac{\mathbf{F}(\mathbf{0}) + \zeta_k \mathbf{F}'(\mathbf{0})}{\zeta_k^2} , \quad (6.123)$$

¹⁰ Il punto $\zeta = \chi(p - \zeta_c)$ si trova all'interno del cilindro, quindi non è immagine di alcun punto nello spazio fisico. Per questo motivo $\bar{\mathbf{u}}^2$ è solo un simbolo per indicare $(\partial_\zeta \tilde{w})^2$, privo di alcun significato fisico.

mentre nei poli in $\zeta \neq 0$ si calcola il residuo:

$$-\frac{1}{4\pi^2} \sum_{k=1}^n \Gamma_k^2 \mathbf{F}' \left(\frac{1}{\bar{\zeta}_k} \right) . \quad (6.124)$$

Il residuo del polo triplo in $\zeta = 0$ si scrive:

$$\frac{u_\infty \Gamma_{b0}}{2\pi i} \mathbf{F}''(\mathbf{0}) \quad (6.125)$$

e quello del polo quadruplo:

$$\frac{u_\infty^2}{6} \mathbf{F}'''(\mathbf{0}) . \quad (6.126)$$

Più complicato è il calcolo del residuo nel prodotto dei poli semplici, che risulta essere:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{\substack{k,j=1 \\ k \neq j}}^n \frac{\Gamma_k \Gamma_j}{\frac{1}{\bar{\zeta}_k} - \frac{1}{\bar{\zeta}_j}} \left[\mathbf{F} \left(\frac{1}{\bar{\zeta}_k} \right) - \mathbf{F} \left(\frac{1}{\bar{\zeta}_j} \right) \right] + \\ & + \frac{\Gamma_{b0}}{2\pi^2} \sum_{k=1}^n \Gamma_k \bar{\zeta}_k \left[\mathbf{F} \left(\frac{1}{\bar{\zeta}_k} \right) - \mathbf{F}(\mathbf{0}) \right], \end{aligned} \quad (6.127)$$

infine il residuo nel prodotto del polo doppio in $\zeta = 0$ con poli semplici in $\zeta = 1/\bar{\zeta}_k$ si scrive:

$$\frac{u_\infty}{\pi i} \sum_{k=1}^n \Gamma_k \left[\bar{\zeta}_k \mathbf{F}'(\mathbf{0}) + \bar{\zeta}_k^2 \mathbf{F}(\mathbf{0}) - \bar{\zeta}_k^2 \mathbf{F} \left(\frac{1}{\bar{\zeta}_k} \right) \right]. \quad (6.128)$$

Per ottenere il contributo stazionario (6.110) nella forma (6.112) occorre sommare i residui (6.120, 6.121, 6.122, 6.123, 6.124, 6.125, 6.126, 6.127, 6.128) moltiplicare per 1/2 e fare il complesso coniugato. In tal modo si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_s = \pi i & \left\{ -\frac{p}{2\chi^2} \tilde{u}^2 [\chi(p - \zeta_c)] + \right. \\ & - \frac{u_\infty \Gamma_{b0}}{\pi i} \overline{\mathbf{F}}(\mathbf{0}) + \left(2u_\infty^2 + \frac{\Gamma_{b0}^2}{4\pi^2} \right) \overline{\mathbf{F}}'(\mathbf{0}) + \frac{u_\infty \Gamma_{b0}}{2\pi i} \overline{\mathbf{F}}''(\mathbf{0}) - \frac{u_\infty^2}{6} \overline{\mathbf{F}}'''(\mathbf{0}) + \\ & + \sum_{k=1}^n \Gamma_k \left\{ \frac{\Gamma_{b0}}{2\pi^2} \left[\left(\zeta_k - \frac{1}{\bar{\zeta}_k} \right) \overline{\mathbf{F}}(\mathbf{0}) - \zeta_k \overline{\mathbf{F}} \left(\frac{1}{\bar{\zeta}_k} \right) \right] + \right. \\ & + \frac{\Gamma_k}{4\pi^2} \overline{\mathbf{F}}' \left(\frac{1}{\bar{\zeta}_k} \right) + \\ & \left. + \frac{u_\infty}{\pi i} \left[\left(\zeta_k^2 - \frac{1}{\bar{\zeta}_k^2} \right) \overline{\mathbf{F}}(\mathbf{0}) + \left(\zeta_k - \frac{1}{\bar{\zeta}_k} \right) \overline{\mathbf{F}}'(\mathbf{0}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + (1 - \zeta_k^2) \overline{\mathbf{F}} \left(\frac{1}{\bar{\zeta}_k} \right) \right] \right\} + \\ & + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\substack{k,j=1 \\ k \neq j}}^n \frac{\Gamma_k \Gamma_j}{\bar{\zeta}_k - \frac{1}{\bar{\zeta}_j}} \overline{\mathbf{F}} \left(\frac{1}{\bar{\zeta}_j} \right) + \\ & \left. + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\substack{k,j=1 \\ k \neq j}}^n \frac{\Gamma_k \Gamma_j}{\frac{1}{\bar{\zeta}_k} - \frac{1}{\bar{\zeta}_j}} \left[\overline{\mathbf{F}} \left(\frac{1}{\bar{\zeta}_k} \right) - \overline{\mathbf{F}} \left(\frac{1}{\bar{\zeta}_j} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.129)$$

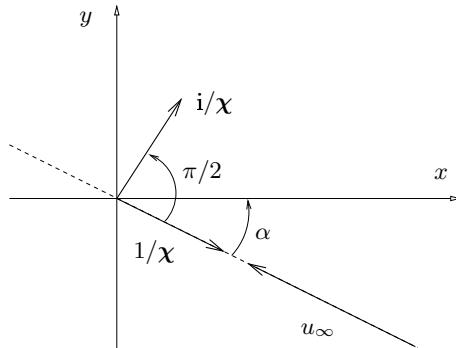


Figura 6.12. Illustrazione del significato geometrico del numero complesso i/χ .

Si può verificare che, in assenza di vorticità rilasciata ($\Gamma_k = 0$ per $k = 1, 2, \dots, n$) e per α ed u_∞ costanti, la forma (6.128) del termine stazionario fornisce una risultante delle sollecitazioni sul corpo che è in accordo col teorema di Joukowski. Infatti, con le posizioni:

$$\mathbf{v}_1 = \chi(\zeta_c + p), \quad \mathbf{v}_2 = \chi(\zeta_c - p),$$

la circolazione Γ_b attorno al profilo si calcola imponendo la condizione di Kutta, ovvero:

$$\partial_\zeta \tilde{\mathbf{w}}(-\mathbf{v}_1) = \mathbf{0}.$$

Ne segue:

$$\Gamma_b = 2\pi i \left(\frac{1}{\mathbf{v}_1} - \mathbf{v}_1 \right) u_\infty, \quad (6.130)$$

che è reale, essendo $|\mathbf{v}_1| = 1$. Dalle espressioni di \mathbf{F} (6.100) e delle sue prime tre derivate (6.101) se ne ricavano i seguenti valori in $\zeta = 0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{0}) &= \frac{\chi}{4} \frac{(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)^2}{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2} \\ \mathbf{F}'(\mathbf{0}) &= -\frac{\chi}{4} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 \frac{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_1^2 \mathbf{v}_2^2} \\ \mathbf{F}''(\mathbf{0}) &= \frac{\chi}{2} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 \frac{\mathbf{v}_1^2 + \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_2^2}{\mathbf{v}_1^3 \mathbf{v}_2^3} \\ \mathbf{F}'''(\mathbf{0}) &= -\frac{3}{2} \chi (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 \frac{(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)(\mathbf{v}_1^2 + \mathbf{v}_2^2)}{\mathbf{v}_1^4 \mathbf{v}_2^4}. \end{aligned} \quad (6.131)$$

Inoltre il coniugato della velocità nel piano trasformato nel punto $\zeta = -\mathbf{v}_2$ si scrive:

$$\bar{\mathbf{u}}(-\mathbf{v}_2) = u_\infty (1 + \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2) \frac{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2^2}. \quad (6.132)$$

Sostituendo le quantità (6.130, 6.131, 6.132) nella (6.129) si ricava $\mathbf{R}_s = -u_\infty \Gamma_b / \chi$, ovvero in base alla decomposizione (6.111), la risultante della sollecitazione sul profilo:

$$\mathbf{R} = \rho u_\infty \Gamma_b \frac{\mathbf{i}}{\chi}, \quad (6.133)$$

che, una volta esaminata la Fig. 6.12, si trova in accordo col teorema di Joukowski.

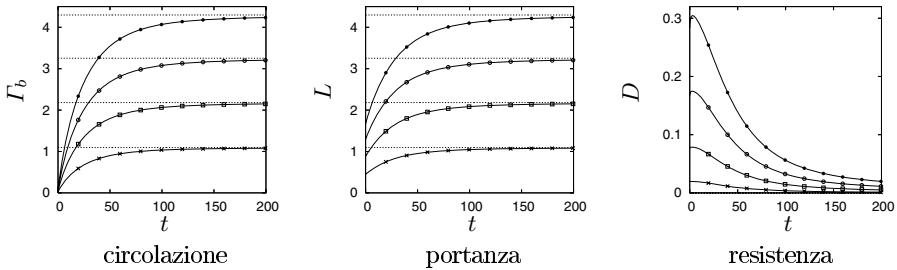


Figura 6.13. Andamenti nel tempo della circolazione Γ_b attorno al profilo, della portanza L e della resistenza D per un profilo (con $\zeta_c = 0.1$ e $\Gamma_{b0} = 0$) investito da una corrente avente $u_\infty = 1$ ed $\alpha = 5^\circ$ (\times), 10° (cerchi), 15° (quadrati) e 20° (cerchi pieni). Le linee orizzontali tratteggiate rappresentano i valori asintotici in condizioni stazionarie.

Una seconda importante osservazione riguarda la compatibilità tra la sollecitazione misurata in condizioni stazionarie (utilizzando per la circolazione attorno al profilo Γ_b il valore (6.129) ottenuto dalla condizione di Kutta) e la sollecitazione asintotica per $t \rightarrow \infty$.

La sollecitazione misurata in condizioni stazionarie, cioè con la Γ_b data dalla condizione di Kutta e tutti i contributi non stazionari assunti nulli ($\mathbf{R}_{ns} = \mathbf{0}$) è proporzionale, in base alla relazione (6.111) ad \mathbf{R}_s :

$$\mathbf{R}_s = \pi i \left\{ -\frac{p}{2\chi^2} \tilde{u}_s^2 [\chi(p - \zeta_c)] + \right. \\ \left. -\frac{u_\infty \Gamma_b}{\pi i} \overline{\mathbf{F}}(\mathbf{0}) + \left(2u_\infty^2 + \frac{\Gamma_b^2}{4\pi^2} \right) \overline{\mathbf{F}}'(\mathbf{0}) + \frac{u_\infty \Gamma_b}{2\pi i} \overline{\mathbf{F}}''(\mathbf{0}) - \frac{u_\infty^2}{6} \overline{\mathbf{F}}'''(\mathbf{0}) \right\}, \quad (6.134)$$

in cui:

$$\overline{\mathbf{u}}_s(\zeta) = -u_\infty \left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right) + \frac{\Gamma_b}{2\pi i} \frac{1}{\zeta} \quad (6.135)$$

è la velocità nel piano trasformato in tali condizioni.

Pensiamo ora a come tale condizione stazionaria si realizza fisicamente. Immaginiamo di far partire impulsivamente il profilo: nel transitorio verranno prodotti n vortici $\{\Gamma_k\}_{k=1,\dots,n}$, tali che:

$$\sum_{k=1}^n \Gamma_k = -\Gamma_b, \quad (6.136)$$

ovvero tali da consentire l'instaurarsi di una circolazione Γ_b (6.130) attorno al profilo. Dopo di che la produzione di vorticità dal bordo di uscita del profilo cessa e

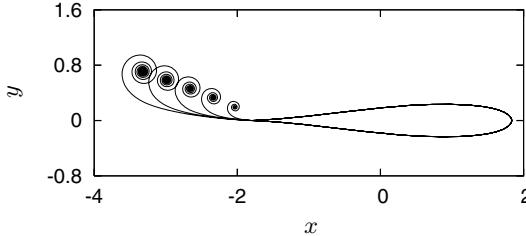


Figura 6.14. Tempi $t = 0.4, 0.8, 1.2, 1.6$ e 2 nell’evoluzione della scia a valle del profilo con $\alpha = 20^\circ$ di Fig. 6.13.

gli n vortici vengono convetti all’infinito a valle del profilo ad opera della corrente uniforme \mathbf{u}_∞ . Misure di circolazione attorno al corpo (Γ_b), componente della forza agente sul profilo normale alla corrente (L , *portanza*) e componente parallela alla corrente (D , *resistenza*) sono riportate in Fig. 6.13, per un profilo simmetrico investito da una corrente con differenti valori di α . Si può quindi pensare di confrontare la sollecitazione misurata per $t \rightarrow \infty$ in tali condizioni con quella stazionaria data dalla (6.134). Alcune configurazioni della scia rilasciata a valle del profilo per il caso $\alpha = 20^\circ$ sono disegnate in Fig. 6.14. Poiché la circolazione iniziale attorno al profilo è nulla, la (6.129) fornisce:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_s = \pi i & \left\{ -\frac{p}{2\chi^2} \tilde{\mathbf{u}}^2 [\chi(p - \zeta_c)] + 2u_\infty^2 \overline{\mathbf{F}}'(\mathbf{0}) - \frac{u_\infty^2}{6} \overline{\mathbf{F}}'''(\mathbf{0}) + \right. \\
 & + \sum_{k=1}^n \Gamma_k \left\{ \frac{\Gamma_k}{4\pi^2} \overline{\mathbf{F}}' \left(\frac{1}{\zeta_k} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{u_\infty}{\pi i} \left[\left(\zeta_k^2 - \frac{1}{\bar{\zeta}_k^2} \right) \overline{\mathbf{F}}(\mathbf{0}) + \left(\zeta_k - \frac{1}{\bar{\zeta}_k} \right) \overline{\mathbf{F}}'(\mathbf{0}) + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + (1 - \zeta_k^2) \overline{\mathbf{F}} \left(\frac{1}{\bar{\zeta}_k} \right) \right] \right\} + \\
 & + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{k,j=1}^n \frac{\Gamma_k \Gamma_j}{\bar{\zeta}_k - \frac{1}{\zeta_j}} \overline{\mathbf{F}} \left(\frac{1}{\bar{\zeta}_j} \right) + \\
 & \quad \left. + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\substack{k,j=1 \\ k \neq j}} \frac{\Gamma_k \Gamma_j}{\zeta_k - \frac{1}{\bar{\zeta}_j}} \left[\overline{\mathbf{F}} \left(\frac{1}{\bar{\zeta}_k} \right) - \overline{\mathbf{F}} \left(\frac{1}{\bar{\zeta}_j} \right) \right] \right\},
 \end{aligned} \tag{6.137}$$

dove:

$$\overline{\mathbf{u}}(\zeta) = -u_\infty \left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \Gamma_k \left(\frac{1}{\zeta - \zeta_k} - \frac{1}{\zeta - \frac{1}{\bar{\zeta}_k}} \right). \tag{6.138}$$

Possiamo senz'altro ammettere che per $t \rightarrow \infty$ avremo $\zeta_k \rightarrow \infty$ per $k = 1, 2, \dots, n$. In queste condizioni:

$$\bar{\mathbf{u}}(\zeta) \rightarrow -u_\infty \left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right) + \frac{1}{2\pi i} \left(- \sum_{k=1}^n \Gamma_k \right) \frac{1}{\zeta},$$

ma occorre ricordare la relazione (6.136) e quindi otteniamo per $t \rightarrow \infty$:

$$\tilde{\mathbf{u}}(\zeta) \rightarrow \tilde{\mathbf{u}}_s(\zeta), \quad (6.139)$$

dalla definizione (6.135) di $\tilde{\mathbf{u}}_s$. Supponendo poi la $\mathbf{F}(\zeta)$ sviluppabile in serie di Taylor in un intorno del punto $\zeta = \mathbf{0}$, osserviamo che:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma_k}{4\pi^2} \bar{\mathbf{F}}' \left(\frac{1}{\zeta_k} \right) &= \frac{\Gamma_k}{4\pi^2} \bar{\mathbf{F}}'(\mathbf{0}) + O\left(\frac{1}{|\zeta_k|}\right), \\ \frac{u_\infty}{\pi i} \left[\left(\zeta_k^2 - \frac{1}{\zeta_k^2} \right) \bar{\mathbf{F}}(\mathbf{0}) + \left(\zeta_k - \frac{1}{\zeta_k} \right) \bar{\mathbf{F}}'(\mathbf{0}) + (1 - \zeta_k^2) \bar{\mathbf{F}} \left(\frac{1}{\zeta_k} \right) \right] &= \\ = \frac{u_\infty}{2\pi i} \left[2\bar{\mathbf{F}}(\mathbf{0}) - \bar{\mathbf{F}}''(\mathbf{0}) \right] + O\left(\frac{1}{|\zeta_k|}\right), & \\ \frac{1}{\frac{1}{\zeta_k} - \frac{1}{\zeta_j}} \left[\bar{\mathbf{F}} \left(\frac{1}{\zeta_k} \right) - \bar{\mathbf{F}} \left(\frac{1}{\zeta_j} \right) \right] &= \bar{\mathbf{F}}'(\mathbf{0}) + O\left(\frac{1}{|\zeta_k|}\right), \end{aligned}$$

avendo indicato con $O(1/|\zeta_k|)$ termini infinitesimi con ζ_k almeno del primo ordine. Considerando le tre stime precedenti ed il limite (6.139), la (6.137) diviene al limite per $t \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_s \rightarrow \pi i \left\{ -\frac{p}{2\chi^2} \tilde{\mathbf{u}}_s^2 [\chi(p - \zeta_c)] + 2u_\infty^2 \bar{\mathbf{F}}'(\mathbf{0}) - \frac{u_\infty^2}{6} \bar{\mathbf{F}}'''(\mathbf{0}) + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^n \Gamma_k \left[\frac{\Gamma_k}{4\pi^2} \bar{\mathbf{F}}'(\mathbf{0}) + \frac{u_\infty}{\pi i} \bar{\mathbf{F}}(\mathbf{0}) - \frac{u_\infty}{2\pi i} \bar{\mathbf{F}}''(\mathbf{0}) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\bar{\mathbf{F}}'(\mathbf{0})}{4\pi^2} \sum_{\substack{k,j=1 \\ k \neq j}} \Gamma_k \Gamma_j \right\}. \end{aligned} \quad (6.140)$$

Ricordando la definizione (6.136) della circolazione totale immessa nel campo a seguito della partenza impulsiva del profilo, abbiamo pure:

$$\sum_{\substack{k,j=1 \\ k \neq j}} \Gamma_k \Gamma_j = \Gamma_b^2 - \sum_{k=1}^n \Gamma_k^2,$$

sostituendo quest'ultima relazione nella (6.140), quest'ultima fornisce il valore limite (6.134) già ricavato ammettendo semplicemente la stazionarietà del moto.

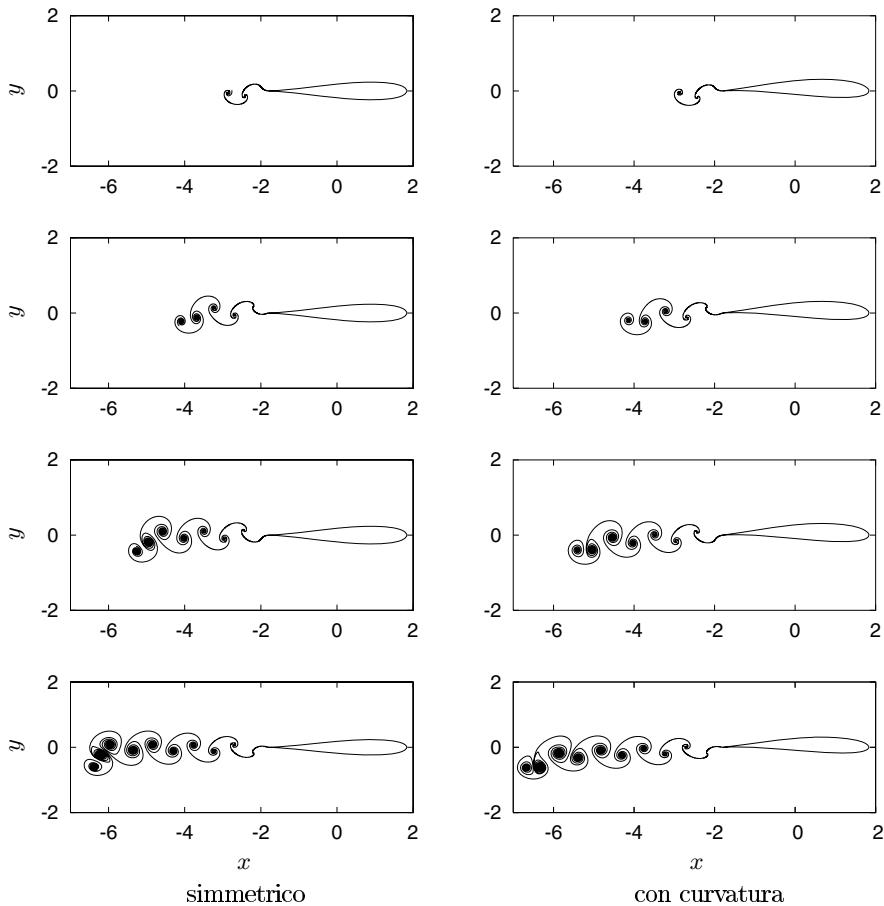


Figura 6.15. Simulazione numerica del flusso attorno ad un profilo di Joukowski con $\zeta_c = 0.1$ (prima colonna) e $\zeta_c = 0.1 + i 0.05$ (seconda colonna) con circolazione iniziale nulla e $u_\infty = 1$, $\alpha(t) = 10^\circ \sin(2\pi t/T)$ con $T = 1$. Dall'alto al basso sono mostrati i tempi 1.25, 2.5, 3.75, e 5.

6.14.6 Alcuni risultati dalle simulazioni numeriche

Sulla base degli elementi discussi in precedenza si può costruire un programma e simulare numericamente il flusso attorno al profilo di Joukowski. L'integrazione numerica del moto della scia può essere effettuata utilizzando un algoritmo del tipo Runge-Kutta. Descriviamone brevemente il cui funzionamento.

Utilizzando le variabili complesse per descrivere le posizioni dei vortici puntiformi, la posizione nel piano fisico al tempo t del j -esimo vortice verrà indicata al solito con $z_j(t)$, mentre $U^{(j)}(t)$ indicherà la velocità indotta sul j -esimo vortice (6.108) dalla corrente asintotica, dal corpo e dai rimanenti vortici di scia. In tal modo, l'al-

goritmo Runge-Kutta al *II* ordine per il passo nel tempo compreso tra i tempi t_k e t_{k+1} si scrive ($\Delta t_2 = \Delta t/2$):

- I)* calcolo $u_\infty(t_k)$ ed $\alpha(t_k)$
immagini dei vortici $\{z_m(t_k)\}$ nel piano trasformato
velocità: $U_j(t_k)$
accumulazione della velocità: $U_j^{(a)} = U_j(t_k)$
posizione nel passo intermedio: $z_j(t_k + \Delta t_2) = z_j(t_k) + \Delta t U_j(t_k)$
- calcolo $u_\infty(t_k + \Delta t)$ ed $\alpha(t_k + \Delta t)$
- II)* immagini dei vortici $\{z_m(t_k + \Delta t_2)\}$ nel piano trasformato
velocità: $U_j(t_k + \Delta t_2)$
accumulazione della velocità: $U_j^{(a)} = U_j^{(a)} + U_j(t_k + \Delta t_2)$
posizione al nuovo tempo: $z_j(t_{k+1}) = z_j(t_k) + \Delta t_2 U_j^{(a)}$, (6.141)

in cui l'errore di integrazione è dell'ordine di $(\Delta t)^3$, mentre l'algoritmo al *IV* ordine è invece dato da ($\Delta t_4 = \Delta t/4$ e $\Delta t_6 = \Delta t/6$):

- I)* calcolo $u_\infty(t_k)$ ed $\alpha(t_k)$
immagini dei vortici $\{z_m(t_k)\}$ nel piano trasformato
velocità: $U_j(t_k)$
accumulazione della velocità: $U_j^{(a)} = U_j(t_k)$
posizione nel passo intermedio: $z_j(t_k + \Delta t_4) = z_j(t_k) + \Delta t_2 U_j(t_k)$
- calcolo $u_\infty(t_k + \Delta t_2)$ ed $\alpha(t_k + \Delta t_2)$
- II)* immagini dei vortici $\{z_m(t_k + \Delta t_4)\}$ nel piano trasformato
velocità: $U_j(t_k + \Delta t_4)$
accumulazione della velocità: $U_j^{(a)} = U_j^{(a)}(t_k) + 2U_j(t_k + \Delta t_4)$
posizione nel passo intermedio: $z_j(t_k + 2\Delta t_4) = z_j(t_k) + \Delta t_2 U_j(t_k + \Delta t_4)$
- III)* immagini dei vortici $\{z_m(t_k + 2\Delta t_4)\}$ nel piano trasformato
velocità: $U_j(t_k + 2\Delta t_4)$
accumulazione della velocità: $U_j^{(a)} = U_j^{(a)}(t_k) + 2U_j(t_k + 2\Delta t_4)$
posizione nel passo intermedio: $z_j(t_k + 3\Delta t_4) = z_j(t_k) + \Delta t U_j(t_k + 2\Delta t_4)$
- calcolo $u_\infty(t_k + \Delta t)$ ed $\alpha(t_k + \Delta t)$
- IV)* immagini dei vortici $\{z_m(t_k + 3\Delta t_4)\}$ nel piano trasformato
velocità: $U_j(t_k + 3\Delta t_4)$
accumulazione della velocità: $U_j^{(a)} = U_j^{(a)}(t_k) + U_j(t_k + 3\Delta t_4)$
posizione al nuovo tempo: $z_j(t_{k+1}) = z_j(t_k) + \Delta t_6 U_j^{(a)}$, (6.142)

in cui l'errore di integrazione è dell'ordine di $(\Delta t)^5$. Al termine di ogni passo nel tempo si genera un nuovo vortice, seguendo le considerazioni svolte nel paragrafo 6.14.2.

A titolo di esempio, in Fig. (6.15) sono riportate le configurazioni assunte dalla scia rilasciata da un profilo simmetrico (prima colonna) e con curvatura della linea media (seconda colonna) in quattro istanti di tempo consecutivi. Si osserva la riorganizzazione delle vorticità di scia in strutture dipolari (*scia di Karman*), formate da due gruppi di vortici (*cluster*) di circolazione discorde. Dettagli di queste strutture dipolari sono meglio visibili in Fig. 6.16, che si riferisce al flusso generato dal profilo simmetrico. L'andamento nel tempo della circolazione attorno al profilo Γ_b è mostrato in Fig. 6.17-a, dove sono sovrapposti gli andamenti per il profilo simmetrico e con

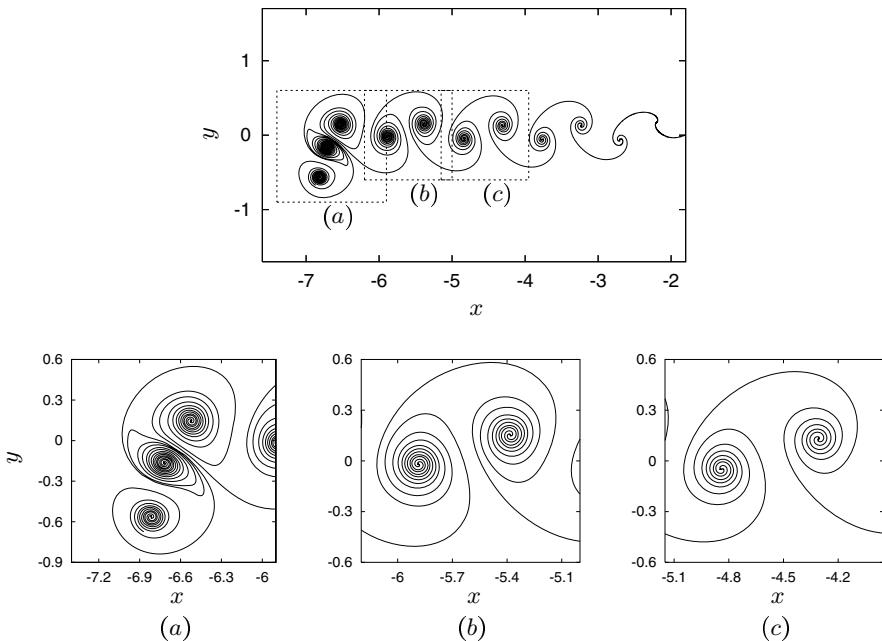


Figura 6.16. Dettagli della scia al tempo $t = 5.5$ per il caso simmetrico di Fig. 6.15. Nella figura superiore è disegnata, con linea continua, la configurazione assunta dall'intera scia rilasciata. Con linea a tratti sono delimitate le regioni (a), (b) e (c) ingrandite nelle figure sottostanti.

curvatura. Si nota che in quest'ultimo caso la circolazione attorno al profilo diviene rapidamente positiva, essendo il profilo portante ad incidenza nulla.¹¹ Ciononostante, l'andamento nel tempo della portanza nei due flussi (Fig. 6.17-b) non differisce sostanzialmente, a causa del prevalere dei termini non stazionari (proporzionali ad $\dot{\alpha}$) nell'espressione della forza. Lo stesso comportamento si rileva per la resistenza (Fig. 6.17-c), questa tutta dovuta alla non stazionarietà del flusso.

6.15 Vortici puntiformi all'esterno di un cilindro rotondo

Verifichiamo i risultati ottenuti nei paragrafi 6.6, 6.8 e 6.10 per il flusso generato da N vortici puntiformi posti all'esterno del cerchio unitario. L'elemento di interesse sta nella possibilità di lavorare con un sistema di equazioni differenziali *ordinarie* nelle posizioni $\{x_k = R_k e^{i\theta_k}\}_{k=1,\dots,N}$ (con $R_k > 1$) dei vortici, potendo quindi dimostrare

¹¹ Occorre ricordare che la circolazione dei vortici puntiformi di scia è proporzionale alla derivata nel tempo di Γ_b .

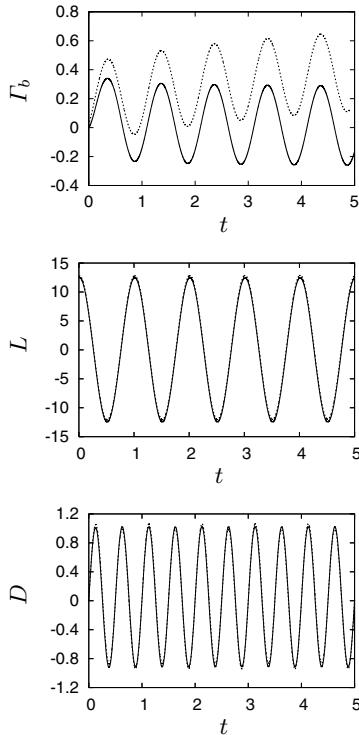


Figura 6.17. Dall’alto in basso: circolazione attorno al profilo Γ_b , portanza L e resistenza D in funzione del tempo, nei due casi di Fig. 6.15. Con linea continua sono disegnate le curve relative al caso simmetrico, mentre con curva a tratti sono disegnate le curve per il profilo con curvatura.

in modo analitico le relazioni precedentemente dedotte utilizzando le equazioni di Navier-Stokes. Il campo di vorticità è allora assegnato in termini di distribuzioni di Dirac (ricordare che $[\delta] = \mathcal{L}^{-2}$):

$$\omega(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^N \Gamma_k \delta[\mathbf{x} - \mathbf{x}_k(t)] ,$$

essendo Γ_k la circolazione attorno al k -esimo vortice. Il potenziale complesso in presenza del cilindro si scrive:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(z) = u_\infty & \left(z + \frac{1}{z} \right) + \sum_{k=1}^N \frac{\Gamma_k}{2\pi i} \left[\log(z - \mathbf{x}_k) - \log \left(z - \frac{1}{\bar{\mathbf{x}}_k} \right) \right] + \\ & + \frac{\Gamma}{2\pi i} \log z \quad \text{con:} \quad \Gamma = \Gamma_b + \sum_{k=1}^N \Gamma_k , \end{aligned} \quad (6.143)$$

in cui la velocità della corrente asintotica è assunta, senza perdita di generalità, reale. In merito al potenziale complesso (6.143), è anche conveniente introdurre il potenziale complesso privato della parte divergente dovuta al vortice j -esimo: $\mathbf{w}_{(j)}(z) := \mathbf{w}(z) - \Gamma_j/(2\pi i) \log(z - \mathbf{x}_j)$. Il campo di velocità segue allora come:

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{u}}(z) &= \frac{d\mathbf{w}}{dz}(z) \\ &= u_\infty \left(1 - \frac{1}{z^2} \right) + \sum_{k=1}^N \frac{\Gamma_k}{2\pi i} \left(\frac{1}{z - \mathbf{x}_k} - \frac{1}{z - \frac{1}{\bar{\mathbf{x}}_k}} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z} \quad (6.144)\end{aligned}$$

e, come spiegato nel sottoparagrafo 4.4.3, la dinamica dei vortici si scrive escludendo il contributo autoindotto dalla velocità (6.144) calcolata nella posizione occupata dal vortice:

$$\dot{\overline{\mathbf{x}}}_j = u_\infty \left(1 - \frac{1}{\mathbf{x}_j^2} \right) + \sum_{k=1}^{N*} \frac{\Gamma_k}{2\pi i} \frac{1}{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k} - \sum_{k=1}^N \frac{\Gamma_k}{2\pi i} \frac{1}{\mathbf{x}_j - \frac{1}{\bar{\mathbf{x}}_k}} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{\mathbf{x}_j} \quad (6.145)$$

per $j = 1, \dots, N$. L'asterisco sopra il simbolo di sommatoria sta a significare che si considerano tutti gli indici k differenti da j .

Dal campo di velocità (6.144) si può facilmente valutare la velocità tangenziale sulla superficie del corpo.¹²

$$u_\tau(\theta) = -2u_\infty \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \Gamma_k \frac{R_k^2 - 1}{R_k^2 + 1} \frac{1}{1 - \frac{2R_k}{R_k^2 + 1} \cos(\theta - \theta_k)},$$

da cui segue il momento del primo ordine della vorticità complessiva (di campo e di parete) e la sua derivata nel tempo:

$$\mathbf{M}_c = -2\pi i u_\infty + \sum_{k=1}^N \Gamma_k \left(\mathbf{x}_k - \frac{1}{\bar{\mathbf{x}}_k} \right) \quad \text{con:} \quad \dot{\mathbf{M}}_c = \sum_{k=1}^N \Gamma_k \left(\dot{\mathbf{x}}_k + \frac{\dot{\overline{\mathbf{x}}}_k}{\mathbf{x}_k^2} \right), \quad (6.146)$$

avendo assunto u_∞ costante nel tempo.

6.15.1 La forza sul corpo

Si può allora valutare, utilizzando il teorema di Blasius (6.31), la risultante degli sforzi di pressione agenti sulla superficie del corpo. Ponendo, per semplicità,

$$\mathbf{p}_k(z) = \frac{1}{z - \mathbf{x}_k}, \quad \mathbf{q}_k(z) = \frac{1}{z - \frac{1}{\bar{\mathbf{x}}_k}},$$

la derivata nel tempo del potenziale (6.143) si scrive come:

¹² Il cerchio unitario è parametrato in termini dell'angolo $\theta \in [0, 2\pi]$ tra il vettore posizione ed il semiasse reale positivo. Essendo il raggio del cerchio unitario, θ coincide anche con l'ascissa cuvilinea.

$$\partial_t \mathbf{w}(\mathbf{z}) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^N \Gamma_k \left[\dot{\mathbf{x}}_k \mathbf{p}_k(\mathbf{z}) + \frac{\dot{\overline{\mathbf{x}}}_k}{\overline{\mathbf{x}}_k^2} \mathbf{q}_k(\mathbf{z}) \right]. \quad (6.147)$$

Il contributo non stazionario alla forza segue allora da una semplice applicazione del teorema dei residui interno:

$$\mathbf{F}_{ns} = i \rho \sum_{k=1}^N \Gamma_k \frac{\dot{\overline{\mathbf{x}}}_k}{\overline{\mathbf{x}}_k^2}. \quad (6.148)$$

Per valutare il contributo del termine stazionario occorre calcolare la derivata in \mathbf{z} del potenziale:

$$\partial_{\mathbf{z}} \mathbf{w}(\mathbf{z}) = u_\infty \left(1 - \frac{1}{\mathbf{z}^2} \right) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^N \Gamma_k [\mathbf{p}_k(\mathbf{z}) - \mathbf{q}_k(\mathbf{z})] + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{\mathbf{z}},$$

ed, utilizzando le relazioni:

$$\sum_{k,j=1}^N \Gamma_k \Gamma_j [\mathbf{q}_k(\mathbf{x}_j) - \mathbf{q}_j(\mathbf{x}_k)] \equiv \mathbf{0}, \quad \sum_{k=1}^N \Gamma_k \sum_{j=1}^{N*} \Gamma_j \mathbf{p}_j(\mathbf{x}_k) \equiv \mathbf{0},$$

possiamo valutare l'integrale presente nel contributo stazionario nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_b} d\mathbf{z} (\partial_{\mathbf{z}} \mathbf{w})^2 &= -2 \sum_{k=1}^N \Gamma_k \left[u_\infty \left(1 - \frac{1}{\mathbf{x}_k^2} \right) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{N*} \Gamma_j \mathbf{p}_j(\mathbf{x}_k) + \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^N \Gamma_j \mathbf{q}_j(\mathbf{x}_k) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{\mathbf{x}_k} \right] + 2u_\infty \Gamma. \end{aligned}$$

Finalmente, utilizzando la dinamica dei vortici (6.145) il termine stazionario può essere scritto come:

$$\mathbf{F}_s = i \rho \left(\sum_{k=1}^N \Gamma_k \dot{\mathbf{x}}_k - u_\infty \Gamma \right),$$

da cui, ricordando l'espressione di \mathbf{F}_{ns} data dalla (6.148), la forza agente sul corpo risulta:

$$\mathbf{F}_b = i \rho \left[\sum_{k=1}^N \Gamma_k \left(\dot{\mathbf{x}}_k + \frac{\dot{\overline{\mathbf{x}}}_k}{\overline{\mathbf{x}}_k^2} \right) - \Gamma u_\infty \right],$$

che soddisfa la relazione (6.45), in base alla derivata nel tempo del momento del primo ordine data in (6.146).

6.15.2 La derivata nel tempo del momento del secondo ordine

Abbiamo dimostrato nel paragrafo 6.8 che la derivata nel tempo del momento del secondo ordine della vorticità è in relazione col momento risultante della sollecitazione agente sul corpo e col momento del primo ordine della vorticità. Queste tre quantità sono legate dall'equazione di evoluzione (6.56). Considerando che il momento della sollecitazione di pressione rispetto all'origine degli assi è identicamente nullo, in

questo caso la derivata del momento del secondo ordine della vorticità complessiva è data semplicemente dal prodotto scalare $2\mathbf{u}_\infty \cdot \mathbf{M}_c$. La derivata nel tempo del momento del secondo ordine si scrive come:

$$\dot{\mathbf{I}}_c = \sum_{k=1}^N \Gamma_k (\mathbf{x}_k \bar{\mathbf{x}}_k + \dot{\mathbf{x}}_k \bar{\mathbf{x}}_k) . \quad (6.149)$$

Il k -esimo addendo della (6.149) può essere riscritto, utilizzando l'equazione della dinamica dei vortici (6.145), nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \Gamma_k \left[u_\infty \left(\mathbf{x}_k - \frac{1}{\mathbf{x}_k} + \bar{\mathbf{x}}_k - \frac{1}{\bar{\mathbf{x}}_k} \right) + \sum_{j=1}^{N^*} \frac{\Gamma_j}{2\pi i} \left(\frac{\mathbf{x}_k}{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j} - \frac{\bar{\mathbf{x}}_k}{\bar{\mathbf{x}}_k - \bar{\mathbf{x}}_j} \right) + \right. \\ \left. - \sum_{j=1}^N \frac{\Gamma_j}{2\pi i} \left(\frac{\mathbf{x}_k}{\mathbf{x}_k - 1/\bar{\mathbf{x}}_j} - \frac{\bar{\mathbf{x}}_k}{\bar{\mathbf{x}}_k - 1/\mathbf{x}_j} \right) \right] . \end{aligned}$$

Gli ultimi due termini, quando sommati su k danno un contributo nullo, perché sono antisimmetrici. L'espressione (6.149) diviene quindi:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{I}}_c &= u_\infty \sum_{k=1}^N \Gamma_k \left(\mathbf{x}_k - \frac{1}{\mathbf{x}_k} + \bar{\mathbf{x}}_k - \frac{1}{\bar{\mathbf{x}}_k} \right) \\ &= u_\infty \sum_{k=1}^N \Gamma_k \left[\left(\mathbf{x}_k - \frac{1}{\bar{\mathbf{x}}_k} \right) + \left(\overline{\mathbf{x}_k - \frac{1}{\bar{\mathbf{x}}_k}} \right) \right] \\ &= 2u_\infty \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^N \Gamma_k \left(\mathbf{x}_k - \frac{1}{\bar{\mathbf{x}}_k} \right) - 2\pi i u_\infty \right] = 2\mathbf{u}_\infty \cdot \mathbf{M}_c , \end{aligned}$$

dove si è fatto uso dell'ipotesi che \mathbf{u}_∞ è reale. La relazione (6.56) rimane quindi verificata (ricordare che $\mathcal{M} = 0$ e $\mu = 0$).

6.15.3 Evoluzione dell'excess energy

L'equazione di evoluzione (6.65) per l'excess energy in presenza di un corpo viene ora verificata per la dinamica di un sistema di N vortici puntiformi esterni al cerchio unitario. In questo caso è necessario rimuovere il contributo autoindotto sull'excess energy ed operare con la seguente quantità:

$$\mathcal{E}_f = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \Gamma_k \psi_{(k)}(\mathbf{x}_k) + \frac{1}{2} \Gamma_b \psi_b , \quad (6.150)$$

in cui il valore (dipendente dal tempo) ψ_b della funzione di corrente sulla superficie del corpo segue dalla (6.143):

$$\psi_b(t) = \operatorname{Im}[\mathbf{w}(e^{i\theta}, t)] = \operatorname{Im}[\mathbf{w}_b(t)] \quad \text{con: } \mathbf{w}_b(t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^N \Gamma_k \log \mathbf{x}_k(t) .$$

Osserviamo inoltre che, in queste circostanze, l'equazione (6.65) con $\mu = 0$, in cui sostituiamo il legame (6.45) tra la risultante sul corpo e il momento del primo

ordine della vorticità, implica semplicemente che la quantità $\mathcal{A} = -\mathbf{u}_\infty \cdot \mathbf{M}_c^\perp + 2\mathcal{E}_f$ è conservata lungo il moto, ovvero ne è un integrale primo.

Mostriamo che questa stessa affermazione segue anche dalla dinamica dei vortici puntiformi (6.145). Specifichiamo \mathcal{A} :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \operatorname{Im} \left[u_\infty \mathbf{M}_c + \sum_{k=1}^N \Gamma_k (\mathbf{w}_{(k)} - \mathbf{w}_b) + \Gamma \mathbf{w}_b \right] \\ &= \operatorname{Im} \left[u_\infty \sum_{k=1}^N \Gamma_k \left(2\mathbf{x}_k + \frac{1}{\mathbf{x}_k} - \frac{1}{\bar{\mathbf{x}}_k} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k,j=1}^{N^*} \Gamma_k \Gamma_j \log(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j) - \frac{1}{2\pi i} \sum_{k,j=1}^N \Gamma_k \Gamma_j \log(1 - \mathbf{x}_k \bar{\mathbf{x}}_j) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Gamma}{\pi i} \sum_{k=1}^N \Gamma_k \log \mathbf{x}_k \right]. \end{aligned} \quad (6.151)$$

Derivando nel tempo la quantità \mathcal{A} (6.151) otteniamo:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{A}} &= \operatorname{Im} \left[u_\infty \sum_{k=1}^N \Gamma_k \left(2\dot{\mathbf{x}}_k - \frac{\dot{\mathbf{x}}_k}{\mathbf{x}_k^2} + \frac{\dot{\bar{\mathbf{x}}}_k}{\bar{\mathbf{x}}_k^2} \right) + \right. \\ &\quad + \sum_{k=1}^N \Gamma_k \dot{\mathbf{x}}_k \frac{1}{2\pi i} \left(\sum_{j=1}^{N^*} \frac{\Gamma_j}{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j} - \sum_{j=1}^N \frac{\Gamma_j}{\mathbf{x}_k - \frac{1}{\bar{\mathbf{x}}_j}} \right) + \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \Gamma_j \dot{\mathbf{x}}_j \frac{1}{2\pi i} \left(\sum_{k=1}^{N^*} \frac{\Gamma_k}{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k} - \sum_{k=1}^N \frac{\Gamma_k}{\mathbf{x}_j - \frac{1}{\bar{\mathbf{x}}_k}} \right) + \\ &\quad \left. + \frac{\Gamma}{\pi i} \sum_{k=1}^N \Gamma_k \frac{\dot{\mathbf{x}}_k}{\mathbf{x}_k} \right]. \end{aligned}$$

Utilizzando la dinamica dei vortici puntiformi per sostituire i termini in parentesi tonde nel secondo e terzo addendo dell'espressione precedente, verifichiamo che $\dot{\mathcal{A}}$ è zero.

Il moto turbolento

Finora abbiamo considerato flussi molto regolari, ovvero in cui le traiettorie di ciascuna particella fluida sono curve piuttosto "lisce", lungo le quali nessuna particella esibisce una velocità la cui direzione risulti rapidamente variabile. Il flusso appare "ordinato" e la dipendenza dai dati iniziali modesta: particelle fluide appartenenti al medesimo piccolo aperto trasformano col flusso rimanendo sempre interne ad un piccolo aperto.

In questo capitolo, invece, inizieremo a studiare flussi "disordinati", in cui le traiettorie delle particelle sono curve estremamente irregolari e dipendono fortemente dalle condizioni iniziali. Conseguentemente, la distanza tra due particelle qualunque, inizialmente infinitamente vicine, può cambiare di ordini di grandezza nel tempo e per giunta in modo apparentemente impredicibile. Ovviamente, il flusso rimane una trasformazione regolare, ma, data l'enorme sensibilità ai dati iniziali ed il comportamento disordinato nel tempo e nello spazio del campo di velocità, poterlo prevedere risulta difficile. Specificheremo un pò meglio questi concetti, piuttosto delicati, con un esempio semplice nel §7.1. Nel successivo paragrafo descriveremo un possibile parallelismo tra questo esempio ed il comportamento della soluzione delle equazioni di Navier-Stokes. Questa operazione è certamente non rigorosa ed ancora scarsamente giustificabile [23], sebbene dal punto di vista descrittivo fornisca una chiave d'interpretazione oggi comunemente accettata. La difficoltà di questo parallelismo è del resto il riflesso della distanza tra le moderne teorie dei Sistemi Dinamici, che studiano i comportamenti caotici di sistemi a pochi gradi di libertà, e la Turbolenza. Infine, nel §7.3 illustreremo le caratteristiche fondamentali di un campo turbolento, esaminato da un punto di vista strettamente fenomenologico.

Un possibile percorso bibliografico, mirato ad approndire l'analisi della turbolenza svolta nel presente testo (capitoli 7, 8, 9 e 10), sarà illustrato nel §10.5.

7.1 Esempi di moto “ordinato” e “disordinato”

Mettiamoci, per fissare le idee, in un contesto molto semplificato, esaminando un sistema fortemente non lineare a pochi gradi di libertà: in questo caso è ancora possibile “controllare” il comportamento del sistema. Consideriamo il moto di N vortici puntiformi nel piano, le cui posizioni (complesse) sono funzioni a valori complessi del tempo $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k(t)$ ($\bar{\mathbf{x}}_k$ indicherà il coniugato di \mathbf{x}_k e Γ_k è la circolazione del k -esimo vortice, $k = 1, 2, \dots, N$). Sappiamo che il moto degli N vortici è governato dal sistema differenziale ordinario (4.56). Per caratterizzare il flusso generato da tali vortici puntiformi, seguiremo anche il moto di M di particelle materiali $\mathbf{y}_p = \mathbf{y}_p(t)$ ($p = 1, 2, \dots, M$) integrandone, simultaneamente al sistema (4.56), la dinamica:

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{y}}}_p = \frac{1}{2\pi i} \sum_{q=1}^M \frac{\Gamma_q}{\mathbf{y}_p - \mathbf{x}_q} \\ \mathbf{y}_p(0) \text{ assegnato.} \end{cases} \quad (7.1)$$

Una importante osservazione sul problema differenziale (4.56) riguarda la sua natura fortemente non lineare che, come vedremo tra breve, è in grado di produrre comportamenti “disordinati” della soluzione. A tal punto che, in generale, questa risulta essere impredicibile per $N \geq 4$ e si deve ricorrere alla simulazione numerica del moto. Nel far questo, è sempre opportuno valutare

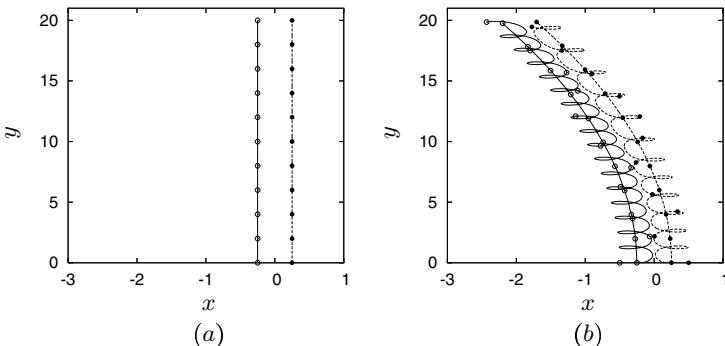


Figura 7.1. In (a) sono disegnate le traiettorie di due vortici puntiformi, inizialmente posizionati in $(\mp 1/4, 0)$ e di circolazione $\pm 2\pi$. Con linea continua è disegnata la traiettoria del vortice con circolazione positiva, mentre quella del vortice con circolazione negativa è disegnata con una linea tratteggiata. In (b) questo sistema è perturbato con altri due vortici inizialmente posizionati in $(\mp 1/2, 0)$ e con circolazioni $\pi/50$ e $-\pi/100$, rispettivamente. Un simbolo è posto sulle traiettorie ogni intervallo di tempo unitario, vuoto per i vortici con circolazione positiva e pieno per quelli con circolazione negativa.

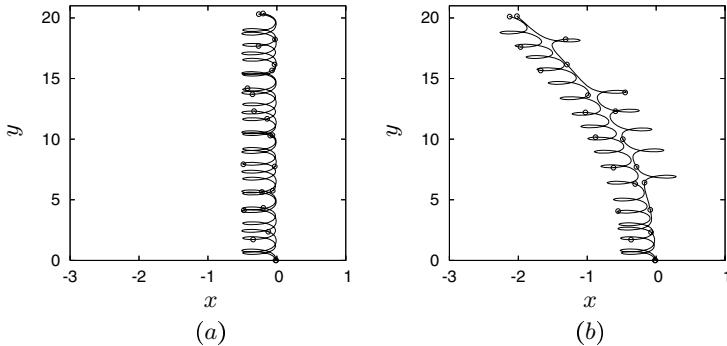


Figura 7.2. Per i flussi generati dai moti dei due vortici puntiformi in Fig. 7.1-a e (b), sono disegnate, rispettivamente in (a) e (b), le traiettorie di due particelle inizialmente posizionate nei punti $(-1/50, 0)$ e $(-1/100, 0)$. Un simbolo è posto sulle traiettorie ad ogni intervallo di tempo unitario.

l’accuratezza dell’integrazione del sistema (4.56), verificando che gli integrali primi ad esso associati (4.58) siano con ottima approssimazione conservati lungo il moto.

Scegliamo una condizione iniziale molto semplice con $n = 2$, posizionando i vortici di circolazioni $\pm 2\pi$ nei due punti $(\mp 1/4, 0)$. La dinamica dei vortici e delle particelle è integrata numericamente, tenendo sotto controllo gli integrali primi (momenti del primo e del secondo ordine, excess energy) del sistema. Il moto che ne segue è una traslazione dei due vortici (che formano un dipolo equilibrato) a velocità 2 lungo l’asse y , come rappresentato in Fig. 7.1-a. Perturbiamo questo sistema aggiungendo due vortici di piccolissima circolazione all’istante iniziale. La dinamica di questo nuovo sistema perturbato nello stesso intervallo di tempo è mostrata in (b). L’integrazione numerica è in questo caso condotta avendo variazioni (in modulo) del momento del primo ordine, del momento del secondo e dell’excess energy inferiori a 10^{-10} . I due piccoli vortici orbitano attorno ai grandi ed, essendo di circolazioni differenti, squilibrio il dipolo, che pertanto non trasla più di moto rettilineo uniforme.

Mentre la dinamica del dipolo perfettamente equilibrato è banalmente predicibile, il moto del sistema squilibrato è molto più complesso, non risultando affatto predicable, se non qualitativamente. Proviamo allora ad inseguire due particelle materiali nei due casi. Fissiamone le condizioni iniziali nei punti $(-1/50, 0)$, $(-1/100, 0)$, ovvero a piccola distanza dall’asse del dipolo impermeabile, che coincide con l’asse y del riferimento scelto. Le traiettorie delle due particelle sono disegnate in Fig. 7.2: osserviamo che nel caso (b) la particella che parte dal punto $(-1/50, 0)$ ruota in parte attorno alla metà positiva del dipolo, in parte attorno alla negativa. Nel caso (b), quindi, la dinamica di queste particelle non è affatto predicable. Un riscontro a questa affermazione si può

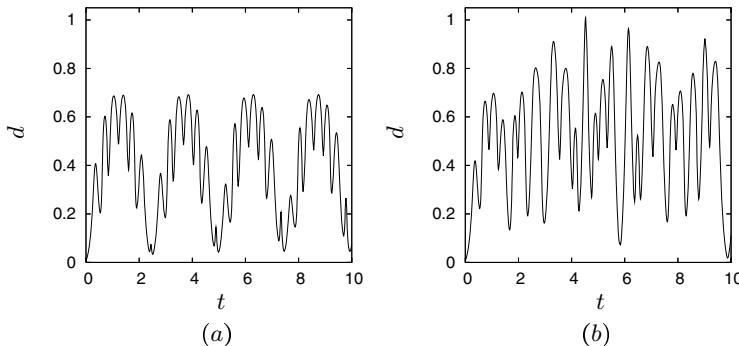


Figura 7.3. In (a) e (b) sono diagrammate le distanze tra le due particelle in Fig. 7.2-a e (b), rispettivamente, in funzione del tempo. Notare il comportamento quasi periodico in (a) e quello “disordinato” in (b).

trovare esaminano l’andamento nel tempo della distanza tra le due particelle, mostrato in Fig. 7.3. Mentre nel caso di un dipolo perfettamente equilibrato (Fig. 7.3-a) tale distanza ha un comportamento all’incirca periodico, nel caso di dipolo perturbato (Fig. 7.3-b) l’andamento non sembra affatto periodico, ma appare decisamente “disordinato”.

Lo studio del comportamento “disordinato” di un insieme di vortici esula dagli scopi di questo libro ed è oggetto di teorie moderne estremamente interessanti. Ci limitiamo in questa sede a constatare che già il moto di quattro vortici puntiformi nel piano ammette dinamice fortemente “disordinate” e quindi assolutamente impredicibili.

7.2 Regimi di flusso laminare e turbolento

Facciamo ora un deciso salto di qualità nella nostra analisi. Consideriamo un flusso, in generale, tridimensionale. Anche in questo caso, sebbene molto più complesso del precedente, possiamo facilmente individuare un flusso “ordinato” (ovvero predicable, vedi il moto del dipolo in Fig. 7.1-a). A questo tipo di flusso assegneremo convenzionalmente l’aggettivo di *laminare*. Viceversa, è quasi la regola che un flusso sia parzialmente o completamente “disordinato” (ovvero impredicibile, vedi Fig. 7.1-b). A questo tipo di flusso, che comprende praticamente tutti quelli osservabili in Natura (moto di fiumi, mare, atmosfera, . . .), assegneremo invece l’aggettivo di *turbolento*.

Nei flussi turbolenti che verranno trattati nel seguito, il campo di velocità \mathbf{u} è una funzione di \mathbf{x} e t che verifica il sistema di equazioni (per un fluido a densità ρ costante):

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ D_t \mathbf{u} = -\nabla \tilde{p} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \end{cases} \quad (7.2)$$

in cui $\tilde{p} = p/\rho$, mentre i flussi turbolenti di fluidi comprimibili non verranno studiati in questo testo. Pur essendo soluzione del problema (7.2), il campo \mathbf{u} risulta essere sostanzialmente impredicibile e rapidamente variabile in \mathbf{x} e t , in modo apparentemente casuale. Di fatto, conviene allora pensare al campo di velocità come una funzione random della posizione \mathbf{x} e del tempo t , vincolata a soddisfare il problema (7.2).

Abbiamo accennato nel paragrafo precedente che è la natura non lineare delle equazioni a produrre “disordine”. Ed infatti il problema (7.2) è non-lineare, a causa del termine convettivo nell’accelerazione ($D_t = \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla$). Ma allora perché alcune soluzioni del sistema (7.2) sono “ordinate” ed altre no? Per rispondere a questa domanda, facciamo alcune considerazioni dimensionali. Supponiamo che sia possibile determinare una scala delle lunghezze¹ L caratterizzante il nostro flusso. Ad esempio, se il flusso è interno o esterno ad un dominio limitato, possiamo prendere L pari al diametro del dominio. Scegliamo poi anche una scala delle velocità U , con la quale definiamo il numero di Reynolds:

$$\text{Re} = \frac{LU}{\nu} = \frac{U^2/L}{\nu U/L^2} = \frac{\text{forze d'inerzia}}{\text{forze viscole}}$$

del flusso. Tale numero adimensionale esprime l’importanza relativa tra le forze di tipo inerziale (dovute al termine convettivo $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$) e forze viscole ($\nu \nabla^2 \mathbf{u}$) nell’equazione della quantità di moto (7.2). Essendo le prime non lineari e le seconde lineari, Re esprime² l’importanza relativa dei termini non lineari nella equazione della quantità di moto (7.2) rispetto ai termini lineari. Quanto più Re è basso, tanto più l’equazione della quantità di moto è “vicina” ad una equazione lineare, viceversa quanto più Re è alto, tanto più contano i termini non lineari. Nel primo caso la soluzione delle equazioni (7.2) è “ordinata” e quindi il flusso è laminare, mentre nel secondo caso la soluzione è “disordinata” e quindi il flusso risulta essere turbolento.

Un flusso turbolento è, per definizione, “disordinato” e quindi impredicibile: per questo motivo si utilizzano per studiarlo strumenti propri della Statistica. Su questi ultimi torneremo nel capitolo successivo. Altre importanti caratteristiche di un flusso turbolento sono descritte nel paragrafo seguente.

7.3 Principali fenomenologie fisiche della turbolenza

Come già discusso nel precedente paragrafo, il numero di Reynolds per un flusso turbolento è abbastanza grande ($\geq 10^4$), ovvero le forze di natura iner-

¹ Occorre comunque notare che, come vedremo più avanti (cfr. Cap. 12), non sempre è possibile scegliere tale scala di lunghezze.

² In questa analisi non facciamo riferimento al termine non stazionario ($\partial_t \mathbf{u}$), che ha, comunque, il medesimo ordine di grandezza del termine convettivo ($\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$).

ziale (non-lineari) sono mediamente molto più importanti di quelle diffusive (lineari). Quindi la soluzione del problema (7.2) è “disordinata”. Vediamo ora altri aspetti fondamentali della turbolenza.

7.3.1 L'interpretazione in termini di vorticità

Proprio a causa della rapida variabilità spaziale (in \mathbf{x}) del vettore velocità, nei flussi turbolenti è sempre importante la vorticità $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ e l'interpretazione della dinamica della turbolenza in termini di vorticità porta ad una migliore comprensione *qualitativa* di questi tipi di flussi. Occorre però sottolineare che tale interpretazione rimane necessariamente qualitativa, in quanto è basata sulla definizione di *vortice*,³ che è difficilmente formalizzabile in modo soddisfacente.

Quello che rende suggestiva l'analisi in termini di vorticità è che nelle simulazioni numeriche ed anche negli esperimenti è facile identificare molti vortici in un campo turbolento, di diverse geometrie e dimensioni. In questa interpretazione conviene quindi pensare alla turbolenza come al risultato dell'interazione tra i vortici presenti, che possono rompersi in vortici più piccoli (ad esempio a causa di instabilità) o possono fondersi in vortici più grandi. La prima fenomenologia accade tipicamente in un campo tridimensionale, mentre la seconda si verifica di regola tra vortici corotanti (le cui circolazioni hanno lo stesso segno) in un campo bidimensionale. L'energia cinetica associata al singolo vortice viene quindi trasferita (per effetto dei termini non lineari) a vortici più piccoli in 3D (*cascata diretta* dell'energia) ed a vortici più grandi in 2D (*cascata inversa*). In tre dimensioni, questo trasferimento di energia prosegue fin quando non si arriva a vortici così piccoli da essere distrutti dalle forze viscose.

Nella turbolenza bidimensionale non forzata, al contrario, il trasferimento di energia cinetica continua fin quando nel campo non rimane una sola struttura dipolare, ovvero due soli grandi vortici: uno di circolazione positiva e l'altro di circolazione negativa. Nelle varie fusioni tra vortici corotanti (*merging*) vengono prodotte una gran quantità di strutture filamentose, il cui contenuto energetico è trascurabile, mentre il contenuto in termini di circolazione o, meglio, di *enstrosia*,⁴ pur essendo piccolo, non è affatto trascurabile. Misuriamo, quindi, simultaneamente alla cascata inversa dell'energia operata dalle fusioni di vortici corotanti, un trasferimento di enstrosia da grandi vortici

³ Un *vortice* è un tubo vorticoso che rimane identificabile, muovendosi in modo materiale col flusso, per un tempo molto più lungo del suo periodo proprio di rotazione. Sinonimo di vortice è anche *struttura (vorticosa) coerente*.

⁴ Come già accennato nel § 6.10, l'*enstrosia* (E) associata ad un vortice occupante il dominio (piano) $D(t)$ è definita dall'integrale:

$$\int_{D(t)} d\mathbf{x} \, \omega^2(\mathbf{x}, t) =: E(t) .$$

a piccole strutture vorticose (filamenti). L'enstrofia di questi ultimi viene poi rapidamente dissipata dalle forze viscose. Questo meccanismo prende il nome di *cascata diretta* dell'enstrofia.

7.3.2 Presenza simultanea di scale molto diverse

La complessità dello studio della turbolenza deriva in gran parte dal fatto che, a causa dell'interazione tra vortici di differenti dimensioni, vengono prodotte strutture vorticose di dimensioni geometriche (*scale spaziali*) molto diverse, aventi diversi tempi caratteristici di rotazione (*scale temporali*). Associando ai vortici più grandi le scale spaziale L e temporale T ed ai vortici più piccoli le omologhe η e τ , abbiamo quindi che $L \gg \eta$ e $T \gg \tau$.

Le strutture vorticose presenti nel campo sono classificate a seconda della loro scala e del loro contenuto energetico. Con riferimento ad un campo turbolento tridimensionale (ma mettendo tra parentesi quadre le opportune modifiche nel caso 2D), generalmente esistono tre intervalli di scala significativi, due di questi sono: le grandi strutture (di scale L, T), che contengono la gran parte dell'energia cinetica [o dell'enstrofia] del campo, e le strutture fini (di scale η, τ), che vengono prodotte continuamente e sono distrutte dall'azione delle forze viscose. Esiste poi un più o meno ampio intervallo di scale che è legato al transito dell'energia cinetica [o dell'enstrofia] dovuto all'azione dei termini non lineari e per questo definito *intervallo inerziale*. Poiché al crescere del numero di Reynolds le scale a cui le strutture vengono dissipate (η, τ) divengono sempre più piccole, l'ampiezza di questo intervallo di scale cresce con Re.

L'evoluzione di un campo turbolento è quindi descrivibile in termini di interazioni tra vortici di scala differente. Questo approccio può essere formalizzato utilizzando uno strumento matematico particolare (trasformata di Fourier, cfr. paragrafo 8.5) che consente facilmente di associare a ciascuna scala il corrispondente contenuto energetico. Dalle equazioni del moto è poi possibile dedurre una relazione che descrive l'evoluzione nel tempo del contenuto energetico di una data scala come il risultato di scambi di energia tra scale differenti e della dissipazione viscosa.

7.3.3 La turbolenza è un fenomeno dissipativo

Una osservazione importante, soprattutto dal punto di vista delle applicazioni, è che un bilancio globale dell'energia per un qualunque campo turbolento prevede che, se non è presente un meccanismo di sostentamento, la turbolenza decada nel tempo, in quanto dissipava energia. Di questo aspetto si deve tener conto in tutti quei casi in cui la turbolenza è utilizzata, ad esempio per favorire il miscelamento tra due fluidi differenti, oppure è necessariamente presente, come accade per le perdite per attrito nei condotti.

Nel caso in cui un campo turbolento è omogeneo, ovvero i valori medi delle grandezze (indicati con una sopralineatura) non dipendono dalla posizione,⁵ si può fare una stima quantitativa dell'andamento temporale dell'energia cinetica media $\rho \overline{u_i u_i} / 2$ per unità di volume (con un piccolo abuso, si omette di solito la desità dalla definizione di energia cinetica, essendo il flusso isocoro). Moltiplicando scalarmente per \mathbf{u} l'equazione della quantità di moto (7.2) e mediando otteniamo:

$$\partial_t \frac{\overline{u_i u_i}}{2} + \frac{1}{2} \partial_k \overline{u_k u_i u_i} = -\partial_i \overline{u_i p} + \nu \nabla^2 \frac{\overline{u_i u_i}}{2} - \nu \overline{\partial_k u_i \partial_k u_i},$$

la quale, essendo $\overline{u_k u_i u_i}$, $\overline{u_i p}$ e $\overline{u_i u_i}$ costanti nello spazio, si riduce in condizioni omogenee all'equazione seguente:

$$\frac{d}{dt} \frac{\overline{u_i u_i}}{2} = -\nu \overline{\partial_k u_i \partial_k u_i} =: -\bar{\varepsilon}. \quad (7.3)$$

L'equazione (7.3) mostra che l'energia cinetica media non può che decadere nel tempo con velocità normalmente indicata con $-\bar{\varepsilon}$. Diverso è il caso in cui, pur continuando ad essere omogeneo il campo, è presente un forzamento, ovvero un campo di forze (anche random) \mathbf{f} a secondo membro dell'equazione della quantità di moto (7.2). Il secondo membro della (7.3) diviene in tal caso: $\overline{f_i u_i} - \bar{\varepsilon}$ e la velocità con cui varia l'energia cinetica dipende quindi da un bilancio tra lavoro fatto dal campo esterno e lavoro delle forze viscose. Ad esempio, se il primo compensa esattamente il secondo, si raggiunge uno stato di equilibrio statistico, in cui l'energia cinetica rimane costante nel tempo.

A partire dal prossimo capitolo introdurremo alcuni tra i più importanti strumenti matematici per l'analisi della turbolenza. Nel contempo, cercheremo di fornire un quadro molto sintetico dei risultati fondamentali a cui si perviene, limitatamente ad analisi molto classiche ed ormai universalmente accettate. Sottolineiamo fin da ora, però, che, essendo lo studio della turbolenza l'ambito in cui la maggioranza dei ricercatori di tutto il mondo lavora, gli sviluppi teorici, sperimentali e numerici in questo settore sono enormemente più estesi ed esaurienti delle poche nozioni discusse in questa sede.

⁵ Sulla definizione di valor medio statistico e di turbolenza omogenea torneremo ampliamente nel capitolo seguente.

Cinematica della turbolenza omogenea

In questo capitolo saranno descritti alcuni degli strumenti matematici più frequentemente adottati nello studio teorico, sperimentale e numerico di campi turbolenti. L'ipotesi fondamentale sotto la quale questi strumenti saranno utilizzati è quella di campo statisticamente *omogeneo*, ovvero d'indipendenza delle quantità statistiche dal punto (nello spazio e/o nel tempo) in cui vengono valutate.

Inizieremo introducendo il concetto di *densità di probabilità* e l'operazione di *media in probabilità* (§8.1), mostrando come dalle *correlazioni* si possa risalire alla densità di probabilità di una variabile random. Introdurremo poi il concetto di *funzione random* e, conseguentemente, le correlazioni a più punti. Entrando nell'ambito della trattazione della turbolenza, nel paragrafo 8.2 specificheremo alcune delle precedenti nozioni generali per la *correlazione doppia di velocità*, sia nello spazio fisico, che in quello dei numeri d'onda. Nel paragrafo successivo l'attenzione si sposterà su una funzione che può essere calcolata dalla trasformata di Fourier della correlazione di velocità: la *funzione spettro d'energia*, i dipendente dal solo modulo (k) del vettore d'onda (\mathbf{k}), oltre che, ovviamente, dal tempo. Ne esamineremo il comportamento in k , illustrando una teoria fondamentale che lo spiega, almeno nell'intervallo di valori di k nel quale l'effetto dominante è quello del *trasferimento* di energia cinetica. Infine (§ 8.4) introdurremo la *correlazione doppia di vorticità*, sia nello spazio fisico che in quello di numeri d'onda, esaminandone il legame con la corrispondente correlazione di velocità.

8.1 Medie e correlazioni

La trattazione matematica classica della turbolenza considera quantità “medie” del flusso, essendo praticamente impredicibile l'andamento locale dei campi nelle singole realizzazioni di un dato esperimento. Per costruire tali medie, occorre in linea di principio conoscere le corrispondenti *funzioni densità di pro-*

babilità, anche se vedremo tra poco come sia possibile aggirare tale richiesta, operando in modo differente.

8.1.1 Densità di probabilità

La densità di probabilità P nel caso di una variabile casuale monodimensionale $x \in \mathbb{R}$ è una funzione $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ (\mathbb{R}^+ è l'insieme dei numeri reali positivi), tale che $P(x') dx'$ è la probabilità che x assuma valori tra x' ed $x' + dx'$. Quindi la probabilità che x sia compresa tra due numeri reali α e β (con $\beta > \alpha$) si esprime attraverso la funzione densità di probabilità come:

$$\text{probabilità che } x \in (\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} dx' P(x') . \quad (8.1)$$

Una importante conseguenza della definizione di P e della (8.1) è che la densità P deve verificare la condizione (detta di *normalizzazione*):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx' P(x') = 1 , \quad (8.2)$$

essendo certo che la x appartiene all'intervallo $(-\infty, +\infty)$ ed applicando quindi la (8.1) con $\alpha = -\infty$ e $\beta = +\infty$.

Facciamo un paio di esempi. Consideriamo, per a , b , δ e μ numeri reali positivi assegnati, la densità di probabilità definita nel modo seguente:

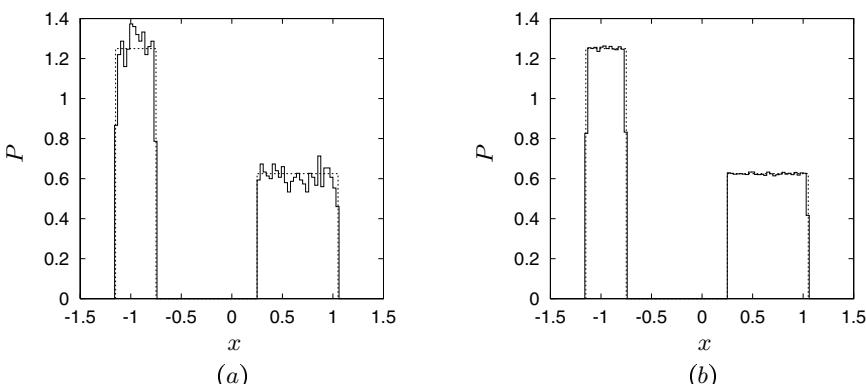


Figura 8.1. Generazione di campioni a densità di probabilità (8.3) ($a = 3/4$, $b = 1/4$, $\delta = 2/5$ e $\mu = 4/5$, con $\bar{x} = -0.15$ e $\sigma \simeq 0.82057$): calcolo della densità di probabilità su un insieme discreto di 100 intervalli, utilizzando $5 \cdot 10^3$ (a) e $5 \cdot 10^5$ (b) campioni. Nel primo caso si ha $\bar{x} \simeq -0.16684$, $\sigma \simeq 0.81989$, mentre nel secondo $\bar{x} \simeq -0.15089$, $\sigma \simeq 0.82051$.

$$P(x) = \begin{cases} 1/(2\delta) & -a - \delta < x < -a \\ 1/(2\mu) & b < x < b + \mu \\ 0 & \text{per tutti gli altri } x. \end{cases} \quad (8.3)$$

che soddisfa comunque la condizione di normalizzazione (8.2). Si verifica facilmente che¹ il valor medio \bar{x} e deviazione standard σ della densità (8.1) sono dati da:

$$\bar{x} = \frac{b-a}{2} + \frac{\mu-\delta}{4}, \quad \sigma^2 = \frac{1}{4} (a+b)^2 + \frac{1}{4} (a+b)(\delta+\mu) + \frac{1}{48} (5\mu^2 + 6\mu\delta + 5\delta^2). \quad (8.4)$$

Cerchiamo di costruire un insieme di campioni la cui densità di probabilità sia proprio la (8.3). Utilizzando la probabilità di trovare un campione tra due valori (α e β) fissati (8.1), calcoliamo l'integrale in x della funzione densità (8.3), ottenendo 0 se $x \leq -a - \delta$, $(x + a + \delta)/(2\delta)$ se $-a - \delta < x \leq -a$, $1/2$ se $-a < x \leq b$, $(x - b + \mu)/(2\mu)$ se $b < x < b + \mu$ ed infine 1 se $x \geq b + \mu$. Disponendo di un generatore di numeri casuali a densità di probabilità uniforme tra 0 ed 1 (rand(\cdot) in FORTRAN), generiamo un insieme di campioni y_i a densità uniforme tra 0 ed 1. Per ciascun campione y_i calcoliamo la posizione x_i tale che:

$$\int_{-\infty}^{x_i} dx' P(x') = y_i, \quad (8.5)$$

In tal modo, mentre i campioni y_i sono a densità uniforme, i campioni x_i risulteranno avere la densità (8.3) richiesta. Due esperimenti numerici di costruzione di un insieme di campioni che ammetta (in modo approssimato) la densità di probabilità (8.3) sono mostrati in Fig. 8.1, per due differenti numeri di campioni.

Come ulteriore, importante esempio consideriamo una densità di probabilità gaussiana di valor medio \bar{x} e varianza σ^2 :

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(x - \bar{x})^2}{2\sigma^2} \right]. \quad (8.6)$$

Poiché si ha:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx' e^{-x'^2} = \sqrt{\pi},$$

la condizione di normalizzazione (8.2) è identicamente verificata, per ogni \bar{x} e σ . Inoltre, in base alla definizione della funzione degli errori (derf(\cdot) in FORTRAN):

¹ Ricordiamo che il valor medio \bar{x} e la deviazione standard σ sono definiti nel modo seguente:

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx x P(x), \quad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx (x - \bar{x})^2 P(x).$$

La quantità σ^2 prende il nome di varianza.

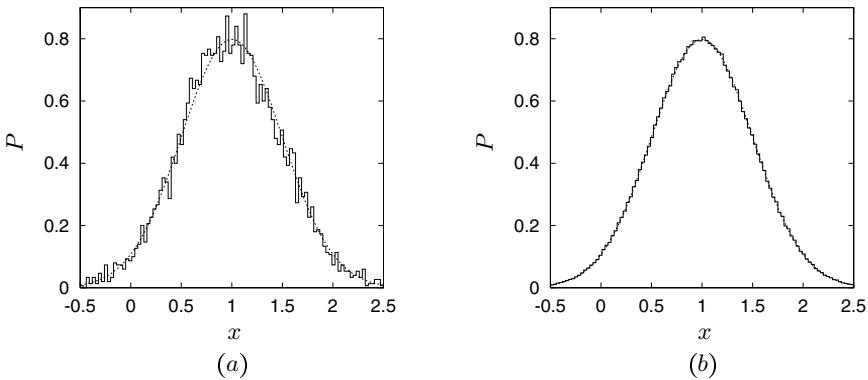


Figura 8.2. Come in Fig. 8.1, ma per una densità di probabilità gaussiana ($\bar{x} = 1$, $\sigma = 0.5$). In (a) si ha $\bar{x} \approx 0.99251$, $\sigma \approx 0.50295$, mentre in (b) $\bar{x} \approx 0.99979$, $\sigma \approx 0.49990$.

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dx' e^{-x'^2}, \quad (8.7)$$

la probabilità (8.1) si scrive subito come $\{\text{erf}[(\beta - \bar{x})/(\sigma\sqrt{2})] - \text{erf}[(\alpha - \bar{x})/(\sigma\sqrt{2})]\}/2$. Disponendo di un generatore di numeri casuali a densità di probabilità uniforme tra 0 ed 1 (`rand()` in FORTRAN), vediamo come si può costruire un insieme di campioni a densità di probabilità gaussiana (8.6). Innanzitutto occorre invertire (numericamente) l'equazione:

$$\int_{-\infty}^x dx' P(x') = \frac{1}{2} [1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x - \bar{x}}{\sigma\sqrt{2}}\right)] = y, \quad (8.8)$$

per $y \in (0, 1)$. L'equazione (8.8) corrisponde all'equazione (8.5), scritta nella densità gaussiana. Chiameremo con $x_{\bar{x}, \sigma}(y)$ la funzione soluzione dell'equazione (8.8). Quindi si generano campioni y_i con densità di probabilità uniforme tra 0 ed 1 e per ciascun campione si calcola la corrispondente $x_i = x_{\bar{x}, \sigma}(y_i)$ che soddisfa l'equazione (8.8). La frequenza con cui i campioni cadono tra x ed $x + dx$ risulta allora proporzionale a $\{\text{erf}[(x + dx - \bar{x})/(\sigma\sqrt{2})] - \text{erf}[(x - \bar{x})/(\sigma\sqrt{2})]\}/2$ e la densità di probabilità è gaussiana. Come per l'esempio precedente, due esperimenti numerici di costruzione di un insieme di campioni che ammetta (in modo approssimato) la densità di probabilità gaussiana (8.6) sono mostrati in Fig. 8.2, per due differenti numeri di campioni.

- ◊ **Esercizio:** Con l'ausilio di un calcolatore, costruire un insieme di campioni che ha densità di probabilità $P(x) = 6(-x^2 + 3x - 2)$, in cui x è una variabile random compresa tra 1 e 2. Confrontare il valore medio e la deviazione standard numerici con le corrispondenti quantità analitiche. (8.9)

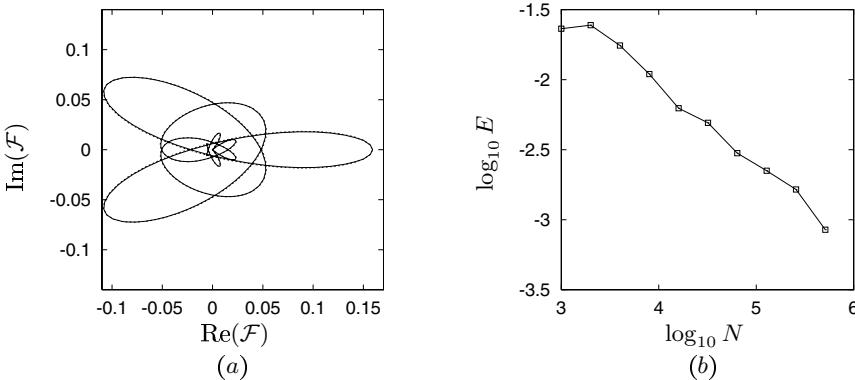


Figura 8.3. In (a) è diagrammata la trasformata di Fourier (8.12) della densità di probabilità di Fig. 8.1 (linea continua, $-20 \leq k \leq +20$) e l'approssimazione di questa ottenuta troncando la serie (8.11) a $Q = 100$ con $N = 64 \cdot 10^3$ campioni (linea a tratti). In (b) è riportato l'andamento del logaritmo decimale dell'errore E (in norma L_2) tra la trasformata (8.12) ed il troncamento della (8.11) a $Q = 100$ per $N = 10^3, 2 \cdot 10^3, 4 \cdot 10^3, \dots, 512 \cdot 10^3$ in funzione del logaritmo decimale di N .

- ◊ **Esercizio:** Come nell'esercizio (8.9) per una variabile random x compresa tra $-3/2$ e $-1/2$ ed una densità di probabilità $P(x) = 4x + 6$ per $-3/2 \leq x \leq -1$,
 $P(x) = -4x - 2$ per $-1 \leq x \leq -1/2$. (8.10)

La definizione di densità di probabilità, come pure la condizione (8.1), sono facilmente generalizzabili al caso di m variabili statisticamente indipendenti $(x_1, x_2, \dots, x_m) = \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, con $m > 1$ finito. In tal caso la funzione densità di probabilità è definita in modo tale che $P(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ è la probabilità che la variabile casuale vettoriale \mathbf{x} appartenga al parallelepipedo $(x_1, x_1 + dx_1) \times (x_2, x_2 + dx_2) \cdots \times (x_m, x_m + dx_m)$ di \mathbb{R}^m .

Come si può determinare P a partire da quantità misurabili sperimentalmente? A tal fine, si può considerare la trasformata di Fourier (vedi § 8.5) della densità di probabilità P [4] e sviluppare in serie di McLaurin l'esponenziale:²

² Scrivendo la trasformata di Fourier come:

$$\mathcal{F}[P](k) = e^{-i k \bar{x}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx P(x) e^{-i k(x - \bar{x})}$$

si può ottenere una stima equivalente alla (8.11), in cui appariranno i *momenzi centrati* $\langle (x - \bar{x})^m \rangle$. Questa procedura può risultare più conveniente, in particolare quando il valor medio \bar{x} è grande.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[P](k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx P(x) e^{-ikx} \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-i)^q k^q}{q!} \int_{-\infty}^{+\infty} dx P(x) x^q \\
&\simeq \frac{1}{2\pi} \sum_{q=0}^Q \frac{(-i)^q k^q}{q!} \langle x^q \rangle,
\end{aligned} \tag{8.11}$$

in cui l'integrale a secondo membro definisce la *media in probabilità* della potenza m -esima di x (ovvero \bar{x}^m). Nell'ultimo membro, tali valori medi sono sostituiti con le corrispondenti medie di insieme $\langle x^q \rangle$ e la somma della serie è approssimata da una somma parziale (Q è un opportuno intero positivo). Sottolineiamo che l'approssimazione operata è duplice: ai valori medi in probabilità \bar{x}^q sono sostituite le medie d'insieme $\langle x^q \rangle$ (calcolate con un numero finito di campioni) e la somma della serie è approssimata con una somma parziale. L'espressione ottenuta è adatta per calcolare sperimentalmente $\mathcal{F}[P]$, e quindi P attraverso una antitrasformata, misurando i *momenti* $\langle x^q \rangle$.

Riprendiamo gli esempi precedenti per calcolare la $\mathcal{F}[P]$ analiticamente e confrontarla con l'ultimo membro della (8.11). La densità di probabilità (8.3) ha trasformata di Fourier:

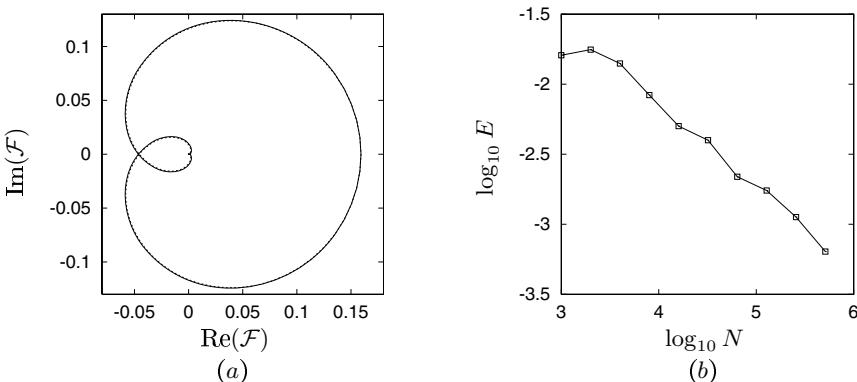


Figura 8.4. In (a) è diagrammata la trasformata di Fourier (8.13) della densità di probabilità di Fig. 8.2 (linea continua, $-10 \leq k \leq +10$) e l'approssimazione di questa ottenuta troncando la serie (8.11) a $Q = 100$ con $N = 64 \cdot 10^3$ campioni (linea a tratti). In (b) è riportato l'andamento del logaritmo decimale dell'errore E (in norma L_2) tra la trasformata (8.13) ed il troncamento della (8.11) a $Q = 100$ per $N = 10^3, 2 \cdot 10^3, 4 \cdot 10^3, \dots, 512 \cdot 10^3$ in funzione del logaritmo decimale di N .

$$\mathcal{F}[P](k) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\sin k\delta/2}{k\delta/2} e^{ik(a+\delta/2)} + \frac{\sin k\mu/2}{k\mu/2} e^{-ik(b+\mu/2)} \right], \quad (8.12)$$

mentre per la densità gaussiana (8.6):

$$\mathcal{F}[P](k) = \frac{1}{2\pi} \exp \left[- \left(\frac{k^2\sigma^2}{2} + ik\bar{x} \right) \right]. \quad (8.13)$$

Queste trasformate sono funzioni complesse della variabile reale k (numero d'onda) e possono pertanto essere pensate come curve, parametrizzate in k , nel piano complesso. Nelle Figg. 8.3-a e 8.4-a sono tracciate le curve analitiche (8.12, 8.13) e le corrispondenti curve ottenute con l'approssimazione (8.11). In entrambi i casi, tale approssimazione appare eccellente.

- ◊ **Esercizio:** Confrontare le trasformate di Fourier delle densità P negli esercizi (8.9, 8.10) con le approssimazioni calcolabili dalla relazione (8.11).

L'estensione al caso pluridimensionale si effettua senza particolari difficoltà, una volta ricordate le notazioni standard seguenti. Dato un multiindice m -dimensionale $\mathbf{j} = (j_1, j_2, \dots, j_m)$ in cui j_k è un numero naturale per $k = 1, 2, \dots, m$, indichiamo con $|\mathbf{j}|$ il numero naturale $j_1 + j_2 + \dots + j_m$ e con $\mathbf{j}!$ il numero naturale $j_1!j_2! \cdots \cdot j_m!$. Assegnato inoltre un vettore $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, utilizzeremo la notazione $\mathbf{x}^{\mathbf{j}}$ per indicare il numero reale $x_1^{j_1}x_2^{j_2} \cdots x_m^{j_m}$. Analogamente a quanto già visto in una dimensione, basta considerare la trasformata di Fourier di $P(\mathbf{u})$:

$$\mathcal{F}[P](\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{R}^m} d\mathbf{x} P(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

e sviluppare in serie l'esponenziale per ottenere:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[P](\mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^m} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-i)^q}{q!} \int_{\mathbb{R}^m} d\mathbf{x} P(\mathbf{x}) (\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})^q \\ &\simeq \frac{1}{(2\pi)^m} \sum_{q=0}^Q (-i)^q \sum_{|\mathbf{j}|=q} \frac{\mathbf{k}^{\mathbf{j}}}{\mathbf{j}!} \langle \mathbf{x}^{\mathbf{j}} \rangle. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Come per la (8.11), nell'ultimo membro sono state fatte due differenti approssimazioni, limitando la somma ad un intero Q finito ed utilizzando le medie di insieme anziché quelle in probabilità.

8.1.2 Media in probabilità

Nella formulazione statistica più generale il tipo di media utilizzata è la *media in probabilità*, definita in base alla funzione densità di probabilità P appena introdotta. Supponiamo di avere una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, il cui

modulo sia sommabile su tutto l'asse reale, ovvero $f \in L_1(\mathbb{R})$. La funzione f sia valutata su un insieme di N campioni $\{x_i\}$ a densità di probabilità $P(x)$. Poniamoci il problema di valutare il valor medio assunto dalla nuova variabile casuale $f(x_i)$.

Per fissare le idee, immaginiamo che esistano due numeri reali e finiti α e β , con $\alpha < \beta$, tali che $P(x)$ sia nulla per $x < \alpha$ e per $x > \beta$. Consideriamo allora l'intervallo finito $[\alpha, \beta]$ e dividiamo questo intervallo in un gran numero (n) di intervalli $[x'_k, x'_{k+1})$, avendo cura di scegliere $x'_1 = \alpha$ e $x'_{n+1} = \beta$. Chiamiamo con δ il valore massimo assunto dalla lunghezza $x'_{k+1} - x'_k$ del k -esimo intervallo, per $k = 1, 2, \dots, n$. La probabilità che in un insieme di N campioni x_i appartenga al k -esimo intervallo si scrive:

$$\int_{x'_k}^{x'_{k+1}} dx P(x) = (x'_{k+1} - x'_k) P(\xi_k) \simeq \frac{n_k}{N}, \quad (8.15)$$

in cui ξ_k è un opportuno punto interno all'intervallo (x'_k, x'_{k+1}) ed n_k è il numero di campioni che cade nell'intervallo $[x'_k, x'_{k+1})$. L'uguaglianza tra secondo e terzo membro si ottiene ovviamente solo nel limite $N \rightarrow \infty$. D'altra parte, il contributo al valor medio \bar{f} di $f(x_i)$ degli n_k campioni appartenenti all'intervallo $[x'_k, x'_{k+1})$ (indicati con \tilde{x}_i per $i = 1, 2, \dots, n_k$) si scrive:

$$\begin{aligned} \text{contributo a } \bar{f} \text{ di } [x'_k, x'_{k+1}) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n_k} f(\tilde{x}_i) \\ &= \frac{n_k}{N} [f(\xi_k) + O(x'_{k+1} - x'_k)] \\ &\simeq (x'_{k+1} - x'_k) P(\xi_k) f(\xi_k) + O(x'_{k+1} - x'_k)^2, \end{aligned}$$

avendosi l'uguaglianza all'ultimo membro solo nel limite per $N \rightarrow \infty$. In quest'ultimo limite, per calcolare \bar{f} non ci rimane che sommare gli n contributi precedenti:

$$\bar{f} = \sum_{k=1}^n [(x'_{k+1} - x'_k) P(\xi_k) f(\xi_k) + O(x'_{k+1} - x'_k)^2] \rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} dx' P(x') f(x'),$$

mandando $\delta \rightarrow 0$ (e quindi, $n \rightarrow \infty$). Ne segue la definizione di media in probabilità:

$$\bar{f} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx P(x) f(x). \quad (8.16)$$

Occorre infine sottolineare che nelle applicazioni la funzione densità di probabilità P di una variabile casuale x non è nota e quindi il calcolo delle media in probabilità (8.16) è impossibile. Disponendo di un insieme di N campioni $\{x^{(i)}\}_{i=1,2,\dots,N}$ della variabile casuale x , si può valutare la *media d'insieme*:

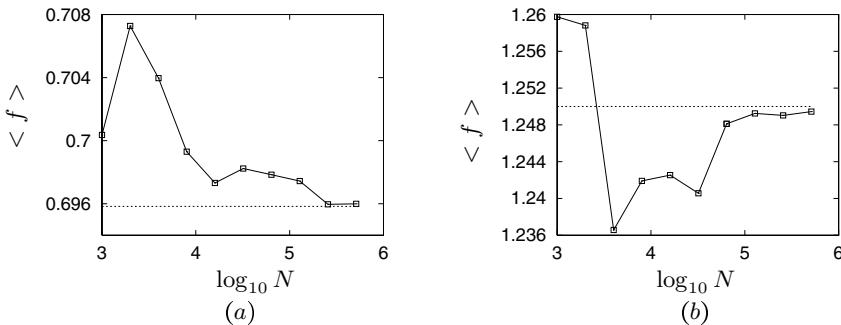


Figura 8.5. Esempi di media d’insieme per la funzione $f(x) = x^2$ della variabile random x al variare del numero N dei campioni utilizzati: in (a) $P(x)$ è la funzione (8.3), Fig. 8.1, mentre in (b) è la gaussiana (8.6), Fig. 8.2. La linea a tratti individua il valore della media in probabilità (8.16) ($f \simeq 0.69583$ nel primo caso, 1.25 nel secondo).

$$\langle f \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i), \quad (8.17)$$

avendo cura di scegliere N sufficientemente grande da rendere la media (8.17) debolmente dipendente da N . Si assumerà sistematicamente nel seguito che la media di insieme così ottenuta risulti coincidente con la media in probabilità (8.16). In Fig. 8.5 sono riportati due esempi di calcolo della media di insieme (8.17), utilizzando differenti numeri di campioni. Si nota la convergenza alla media in probabilità (8.16), al crescere del numero di campioni N considerato.

- ◊ **Esercizio:** Confrontare le medie in probabilità della funzione $f(x) = \sin(\pi x)$ ottenute con le densità di probabilità $P(x)$ degli esercizi (8.9, 8.10) con le medie d’insieme (8.17), calcolate con gli insiemi di campioni disponibili.

8.1.3 Correlazioni

Consideriamo ora una funzione $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che assuma valori random dipendenti dalla variabile x : in ogni punto x fissato di \mathbb{R} , $u(x)$ è una variabile random (chiamata u_x nel seguito). Un insieme di N realizzazioni per la funzione random $u(x)$ è costituito da una collezione di funzioni $\{u^{(q)}(x)\}_{q=1,2,\dots,N}$. Fissato un punto x , un insieme di N realizzazioni per la variabile random u_x è invece una collezione di valori $\{u_x^{(q)}\}_{q=1,2,\dots,N}$.

In parallelo a quanto visto per le variabili random, potremo pensare che per identificare una funzione random $u(x)$ sia sufficiente determinare per ogni

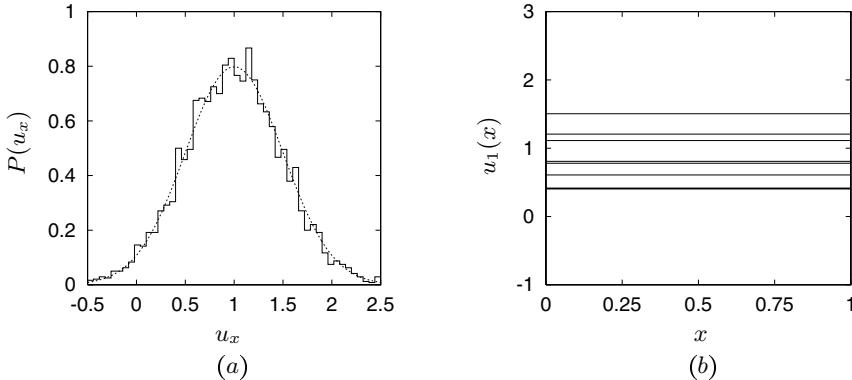


Figura 8.6. In (a) è disegnata la densità di probabilità per la funzione random $u_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, identicamente costante in x , sempre con $N = 4000$, mentre in (b) sono disegnate 8 funzioni campione $\{u_1^{(q)}(x)\}$. Il valor medio e la deviazione standard per la funzione u_1 sono rispettivamente 0.99012 e 0.50241.

x la funzione densità di probabilità $P(u_x)$ associata alla variabile random u_x . Purtroppo, si constata subito [5] che la conoscenza di $P(u_x)$ per ogni x , pur definendo tutte le proprietà statistiche delle *variabili* random u_x , non fornisce informazioni sufficienti sulla *funzione* random $u(x)$.

Consideriamo ad esempio una funzione random $u(x)$ a cui sono associate densità di probabilità $P(u_x)$ fissate ed indipendenti dal punto x e costruiamo due funzioni random di questo tipo u_1 ed u_2 , a cui però sono associate realizzazioni $\{u_1^{(q)}(x)\}$ ed $\{u_2^{(q)}(x)\}$ qualitativamente differenti. Data una variabile random $\omega \in \mathbb{R}$ a densità di probabilità P , un primo esempio di una tale funzione random è $u_1(x) \equiv \omega$: ogni realizzazione $u_1^{(q)}(x)$ ad essa associata è una funzione identicamente costante su tutto l'asse reale. In Fig. 8.6-a è riportata con linea tratteggiata la densità di probabilità obiettivo P (gaussiana a valor medio 1 e deviazione standard 1/2) e la densità di probabilità ottenuta con $N = 4000$ campioni, mentre in (b) sono disegnate 8 funzioni campione. Al contrario, possiamo considerare una funzione random $u_2(x)$ costruita generando un insieme di campioni $\{u_2^{(q)}(x)\}$ con la prescritta densità di probabilità P in modo differente per ogni x , in particolare indipendente da punto a punto. Ogni realizzazione $u_2^{(q)}(x)$ di questa seconda funzione random sarà ovviamente una funzione estremamente variabile di x . Eppure, entrambe le funzioni random $u_1(x)$ ed $u_2(x)$ ammettono la stessa densità di probabilità in ogni punto x dell'asse reale. Nelle Figg. 8.7-a e (b) sono riportate la densità di probabilità obiettivo $P(u_x)$ (linea tratteggiata) e le densità di probabilità ottenute con $N = 4000$ campioni nei punti $x = x_1$ ed $x = x_2$ dell'intervallo $[0, 1]$, mentre in (c, d) sono disegnate 2 funzioni campione, mentre in Fig. 8.7-e sono riportati

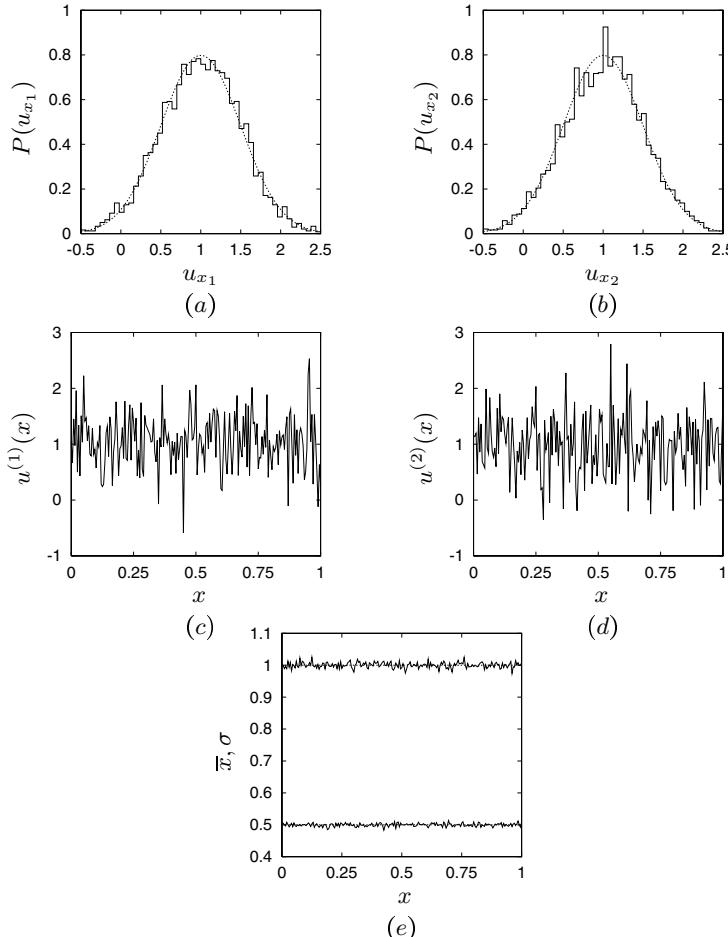


Figura 8.7. Per una funzione random $u_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ a densità gaussiana con valor medio 1 e deviazione standard $1/2$ in (a) e (b) sono rappresentate le densità $P(u_x)$ in $x = x_1 = 3/8$ e $x = x_2 = 6/8$ con $N = 4000$, mentre con le curve tratteggiate è disegnata la densità di probabilità obiettivo gaussiana. Due delle funzioni campione $\{u_2^{(q)}(x)\}$ sono disegnate in (c) ed (d). Infine, in (e) sono disegnati i valori medi e le deviazioni standard per la funzione random u_2 misurati lungo x ed i corrispondenti valori obiettivo (linee tratteggiate), costanti in x .

i valori medi e le deviazioni standard obiettivo (linee tratteggiate, costanti in x) e quelli effettivamente ottenuti.

La sola densità $P(u_x)$, anche qualora fosse nota per ogni x , non sarebbe quindi sufficiente ad identificare una funzione random $u(x)$. Come appare evidente nell'esempio appena discusso, per conoscere una funzione random $u(x)$

occorre determinare le infinite densità di probabilità congiunte $P(u_{x^{(1)}}, u_{x^{(2)}}, \dots, u_{x^{(n)}})$ per ogni intero n ed ogni possibile scelta dei punti $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$ non necessariamente distinti. Utilizzando il risultato (8.14) per una variabile random pluridimensionale, tali densità di probabilità congiunte sono note una volta che si conoscano le quantità medie:

$$Q^{(j)}(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}) = \langle u_{x^{(1)}}^{j_1} u_{x^{(2)}}^{j_2} \cdots u_{x^{(m)}}^{j_m} \rangle \quad (8.18)$$

per ogni intero m , ogni multiindice m -dimensionale j ed ogni m -upla di punti *distinti* $(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}) = x$. Queste quantità prendono il nome di *correlazioni*, ad m punti e di ordine $j = |j| = j_1 + j_2 + \dots + j_m \geq m$. La componente q -esima j_q del multiindice j specifica quante volte nella media d'insieme (8.18) compare il valore di $u(x)$ nel punto $x = x_q$. Si può utilizzare anche una notazione leggermente differente, in cui si introduce un secondo insieme di j punti $\{y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(j)}\}$ *non necessariamente distinti* per specificare il punto in cui è valutato ciascun fattore u nella media a secondo membro della (8.18). Una volta eliminate le ripetizioni, questo insieme di punti coincide con l'insieme precedente $\{x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}\}$. In tal modo, la quantità (8.18) si scrive come $Q^{(j)}(y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(j)})$, in cui il punto $x^{(q)}$ appare ripetuto j_q volte.

Seppure dalle considerazioni precedenti seguia subito che è impossibile conoscere una funzione random, la determinazione di alcune delle correlazioni (8.18) può portare ad una soddisfacente conoscenza della densità di probabilità congiunta. Inoltre, alcune correlazioni di opportune funzioni (ed esempio componenti della velocità o pressione) hanno grande importanza per il loro significato fisico. Per queste ragioni, nelle analisi classiche della turbolenza l'attenzione si sposta spesso dalle funzioni densità di probabilità alle correlazioni.

Una ipotesi fondamentale sulla funzione random $u(x)$ riguarda la dipendenza di una qualunque sua correlazione $Q^{(j)}$ dai punti $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}$. Se comunque si scelga j ed il numero reale $x^{(0)}$ è verificato che: $Q^{(j)}(x^{(0)} + x^{(1)}, x^{(0)} + x^{(2)}, \dots, x^{(0)} + x^{(m)}) = Q^{(j)}(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)})$ per qualunque scelta degli m punti $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}$, ovvero $Q^{(j)}$ dipende solo dalla configurazione *relativa* di tali punti, allora la funzione $u(x)$ si dice statisticamente *omogenea*. In tal caso si può valutare la correlazione (8.18), sostituendo alla media d'insieme una media spaziale. Infatti, consideriamo un intervallo finito (a, b) dell'asse reale e decomponiamolo in N intervalli uguali, ponendo $\delta = (b - a)/N$. Fissiamo un punto $x_i^{(0)}$ nell' i -esimo intervallo e valutiamo la media d'insieme:

$$\begin{aligned} & \langle u_{x^{(1)}}^{j_1} u_{x^{(2)}}^{j_2} \cdots u_{x^{(m)}}^{j_m} \rangle = \\ & \simeq \frac{1}{N \delta} \sum_{i=1}^N u^{j_1}[x_i^{(0)} + x^{(1)}] u^{j_2}[x_i^{(0)} + x^{(2)}] \cdots u^{j_m}[x_i^{(0)} + x^{(m)}] \delta , \end{aligned}$$

la quale, mandando N all'infinito (e quindi δ a zero), tende all'integrale:

$$\begin{aligned} Q^{(j)}(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}) &= \\ = \frac{1}{b-a} \int_a^b d\xi u^{j_1}[\xi + x^{(1)}] u^{j_2}[\xi + x^{(2)}] \cdot \dots \cdot u^{j_m}[\xi + x^{(m)}], \end{aligned} \quad (8.19)$$

indipendentemente dalla scelta dell'intervallo (a, b) .

Nel caso di una funzione random $u(x)$ omogenea, si può assumere, ad esempio, $x^{(0)} = -x^{(m)}$ ed eliminare la dipendenza di $Q^{(j)}$ da una (nell'esempio fatto, l' m -esima) delle variabili indipendenti. Posto $\xi' = (x'^{(1)}, x'^{(2)}, \dots, x'^{(m-1)}) \in \mathbb{R}^{m-1}$ si assume che $Q^{(j)}(\xi') \rightarrow 0$ per $x' \rightarrow \infty$, ovvero che la correlazione statistica tra i valori di $u(x)$ diventi via via più debole quando almeno una delle variabili indipendenti $x'^{(i)} = x^{(i)} - x^{(m)}$ ($i = 1, 2, \dots, m-1$) va all'infinito. Questo perché in tal caso i valori di $u(x)$ e di $u(0)$ divengono sempre meno correlati al crescere di x .

Se $Q^{(j)}(\xi')$ è infinitesima all'infinito di ordine sufficientemente elevato ($> m-1$), potrà essere utilizzata la *trasformata di Fourier* ($m-1$)-dimensionale della correlazione $Q^{(j)}$ (gli $m-1$ numeri d'onda corrispondenti alle $m-1$ variabili indipendenti $x'_i = x_i - x_m$ sono pensati componenti di un vettore di \mathbb{R}^{m-1} , $(k_1, k_2, \dots, k_{m-1}) = \mathbf{k}'$):

$$\chi^j(\mathbf{k}') = \frac{1}{(2\pi)^{m-1}} \int_{\mathbb{R}^{m-1}} d\xi' Q^{(j)}(\xi') \exp(-i\mathbf{k}' \cdot \xi'),$$

in cui $d\xi' = dx'^{(1)} dx'^{(2)} \cdot \dots \cdot dx'^{(m-1)}$ è l'elemento di volume in \mathbb{R}^{m-1} .

Per una funzione random scalare $u(x)$ le correlazioni $Q^{(j)}$ sono quantità scalari. Quando la funzione random è un campo di vettori $\mathbf{u}(x)$ (ovvero una funzione $\mathbf{u} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $n = 3$, si può generalizzare ad n arbitrario senza difficoltà), le correlazioni assumono una natura tensoriale ed occorrerà specificare, oltre ai punti x in cui viene calcolato $\mathbf{u}(x)$, anche quali componenti del vettore $\mathbf{u}(x)$ appaiono. Consideriamo allora di nuovo m punti $\{\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(m)}\}$ distinti e definiamo la correlazione di ordine $j \geq m$ ad m punti introducendo un insieme di j vettori $\{\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \dots, \mathbf{y}^{(j)}\}$, non necessariamente distinti, ciascuno dei quali specifica in quale punto è valutato \mathbf{u} nella media d'insieme e che si riduce al precedente una volta eliminate le ripetizioni. Possiamo allora definire la componente i_1, i_2, \dots, i_j del tensore di correlazione ad m punti e di ordine j nel modo seguente:

$$Q_{i_1, i_2, \dots, i_j}^{(j)}(\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \dots, \mathbf{y}^{(j)}) = \langle u_{i_1} |_{\mathbf{y}^{(1)}} u_{i_2} |_{\mathbf{y}^{(2)}} \cdot \dots \cdot u_{i_j} |_{\mathbf{y}^{(j)}} \rangle. \quad (8.20)$$

La natura tensoriale delle quantità (8.20) segue dalla presenza delle componenti del campo di vettori \mathbf{u} . Alcune delle proprietà del campo $\mathbf{u}(x)$ hanno conseguenze importanti sul tensore di correlazione (8.20).

Nel seguito sarà considerato il solo caso in cui il campo $\mathbf{u}(x)$ è a divergenza nulla ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$). Se in queste condizioni $\mathbf{x}^{(q)}$ appare una sola volta nell'insieme $\{\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \dots, \mathbf{y}^{(j)}\}$ al posto l ($\mathbf{y}^{(l)} = \mathbf{x}^{(q)}$), allora il tensore di ordine $j-1$:

$$\partial_{x_a^{(q)}} Q_{i_1, i_2, \dots, i_{l-1}, a, i_{l+1}, \dots, i_j}^{(j)}$$

è identicamente nullo.

Come abbiamo già visto nel caso di $u(x)$ scalare, si dice che il campo vettoriale random $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ è *omogeneo* se per ogni possibile quantità (8.20) ed ogni punto $\mathbf{y}^{(0)} \in \mathbb{R}^3$ vale la relazione: $Q_{i_1, i_2, \dots, i_j}^{(j)}(\mathbf{y}^{(0)} + \mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(0)} + \mathbf{y}^{(2)}, \dots, \mathbf{y}^{(0)} + \mathbf{y}^{(j)}) \equiv Q_{i_1, i_2, \dots, i_j}^{(j)}(\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \dots, \mathbf{y}^{(j)})$. Si può allora sostituire alla media di insieme la media spaziale, su un qualunque dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ di misura finita, come è stato fatto nella (8.19). Nelle condizioni omogenee si può eliminare la dipendenza da uno dei punti $\mathbf{x}^{(q)}$, ad esempio l' m -esimo, considerando $\mathbf{y}^{(0)} = -\mathbf{x}^{(m)}$. Il tensore di correlazione dipende allora soltanto dagli $m - 1$ vettori separazione $\mathbf{x}'^{(q)} = \mathbf{x}^{(q)} - \mathbf{x}^{(m)}$ per $q = 1, 2, \dots, m - 1$ e risulta infinitesimo all'infinito, essendo i valori di $\mathbf{u}(\mathbf{0})$ e $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ via via meno correlati per $\mathbf{x} \rightarrow \infty$. Riferendosi alle nuove variabili $\{\mathbf{x}'^{(1)}, \mathbf{x}'^{(2)}, \dots, \mathbf{x}'^{(m-1)}\}$ si può allora considerare la trasformata di Fourier di tale tensore, indicata con $\chi^j(\mathbf{k}^{(1)}, \mathbf{k}^{(2)}, \dots, \mathbf{k}^{(m-1)})$. Se in queste condizioni $\mathbf{x}^{(q)}$ appare una sola volta nell'insieme $\{\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \dots, \mathbf{y}^{(j)}\}$ al posto l ($\mathbf{y}^{(l)} = \mathbf{x}^{(q)}$), allora il tensore di ordine $j - 1$:

$$k_a^{(q)} \chi_{i_1, i_2, \dots, i_{l-1}, a, i_{l+1}, \dots, i_j}^j$$

è identicamente nullo.

Nel prossimo paragrafo sarà analizzato a titolo di esempio il tensore di correlazione doppia ($j = 2$) a due punti ($m = 2$) per il campo di velocità, nell'ipotesi che questo sia statisticamente omogeneo.

8.2 La correlazione doppia di velocità

Per il campo di velocità $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, visto come una funzione random omogenea da \mathbb{R}^3 a \mathbb{R}^3 a t fissato, possiamo definire un tensore di correlazione doppia ($j = 2$) a due punti ($m = 2$) la cui componente (i, j) è data da:

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = \langle u_i(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle, \quad (8.21)$$

in cui abbiamo posto $\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}$ e $\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x} + \mathbf{r}$, evidenziando il vettore separazione $\mathbf{r} = \mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)}$. Inoltre, omettiamo la dipendenza dal tempo, che viene visto semplicemente come un parametro nelle considerazioni che seguono. Nel caso in cui $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, il tensore la cui componente (i, j) è $R_{ij}(\mathbf{0}) = \langle u_i(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) \rangle$ si chiama *tensore energia*, essendo la sua traccia proporzionale all'energia cinetica media.

Essendo il campo di velocità solenoidale, verifichiamo facilmente che:

$$\partial_{r_j} R_{ij} = 0 \text{ per ogni } i, \quad \partial_{r_i} R_{ij} = 0 \text{ per ogni } j, \quad (8.22)$$

la seconda delle quali si ottiene effettuando la sostituzione preliminare $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{r}$ e quindi scrivendo: $R_{ij}(\mathbf{r}) = \langle u_i(\mathbf{y} - \mathbf{r}) u_j(\mathbf{y}) \rangle$. Mentre la prima equazione è valida per qualunque campo $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ solenoidale, la seconda si ottiene pertanto solo in condizioni omogenee.

Altre conseguenze della omogeneità del campo $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ sono particolarmente rilevanti. Innanzitutto consideriamo la relazione $R_{ij}(-\mathbf{r}) = \langle u_i(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x} - \mathbf{r}) \rangle$ ed effettuiamo la sostituzione $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{r}$, in tal modo otteniamo: $R_{ij}(-\mathbf{r}) = \langle u_j(\mathbf{y})u_i(\mathbf{y} + \mathbf{r}) \rangle = R_{ji}(+\mathbf{r})$. Ne segue allora che, note le funzioni vettoriali componenti per $i < j$, possiamo conoscere le componenti per $i > j$ semplicemente calcolando le prime in $-\mathbf{r}$. Inoltre, utilizzando la valutazione di $R_{ij}(\mathbf{r})$ in termini di media di volume, otteniamo una stima di tale quantità:

$$R_{ij}^2(\mathbf{r}) = \left[\frac{1}{|D|} \int_D d\mathbf{x} u_i(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \right]^2 \leq \frac{1}{|D|} \int_D d\mathbf{x} u_i^2(\mathbf{x}) \frac{1}{|D|} \int_{D+\mathbf{r}} d\mathbf{y} u_j^2(\mathbf{y}).$$

Considerando che il primo integrale all'ultimo membro vale $R_{ii}^*(\mathbf{0})$ (l'apice “*” sta ad indicare l'assenza di somma sull'indice ripetuto i) e che il secondo, in virtù della omogeneità del campo $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, può essere valutato come $R_{jj}^*(\mathbf{0})$, abbiamo ottenuto l'importante stima:

$$|R_{ij}(\mathbf{r})| \leq [R_{ii}^*(\mathbf{0})R_{jj}^*(\mathbf{0})]^{1/2}, \quad (8.23)$$

qualunque sia il vettore separazione \mathbf{r} , in particolare per $i = j$:

$$|R_{ii}^*(\mathbf{r})| \leq R_{ii}^*(\mathbf{0}), \quad (8.24)$$

ovvero il valore di $R_{ii}^*(\mathbf{r})$ in un qualunque vettore separazione \mathbf{r} non può superare quello in $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Il significato fisico della (8.24) è piuttosto semplice: il valore massimo della correlazione tra le due funzioni random $u_i(\mathbf{x})$ ed $u_i(\mathbf{x} + \mathbf{r})$ è assunto in $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, cioè quando queste funzioni coincidono. In un qualunque altro $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$, la correlazione tra le due funzioni è ovviamente minore.

Un importante teorema [4] assicura che esiste un tensore complesso Φ della cui componente (i, j) R_{ij} è antitrasformata di Fourier:

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k} \Phi_{ij}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (8.25)$$

($d\mathbf{k} = dk_1 dk_2 dk_3$ è l'elemento di volume nello spazio dei numeri d'onda tridimensionali) tale che Φ_{ij} è a modulo integrabile in \mathbb{R}^3 e comunque si scelgano i tre numeri complessi z_1, z_2 e z_3 , la forma quadratica complessa $z_i \bar{z}_j \Phi_{ij}(\mathbf{k})$ (\bar{z} indica il coniugato del numero complesso z) assume valori reali e non negativi, per ogni vettore d'onda \mathbf{k} . Il tensore Φ prende il nome di *tensore spettro di energia*, infatti la media $\langle u_i(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x}) \rangle$ non è altro che l'integrale su \mathbb{R}^3 di Φ_{ij} :

$$\langle u_i(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x}) \rangle = R_{ij}(\mathbf{0}) = \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k} \Phi_{ji}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{0}} = \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k} \Phi_{ji}(\mathbf{k}).$$

Cioè $\Phi_{ij}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}$ è il contenuto di energia associato ai vettori d'onda nel parallelepipedo $(k_1, k_1 + dk_1) \times (k_2, k_2 + dk_2) \times (k_3, k_3 + dk_3)$. Il fatto che la

forma quadratica $z_i \bar{z}_j \Phi_{ij}(\mathbf{k})$ assuma valori reali si verifica subito:³ il risultato importante è che tali valori sono non negativi.

Disponendo del tensore spettro di energia, l'equazione di continuità si traduce nelle relazioni:

$$k_j \Phi_{ij} = 0, \quad k_i \Phi_{ij} = 0, \quad (8.28)$$

del tutto equivalenti alle equazioni nello spazio fisico (8.22). Osservare che, ricavata una delle due, l'altra segue anche facendo il complesso coniugato del primo e secondo membro ed utilizzando la relazione (8.27).

Per eliminare la dipendenza dalla *direzione* di \mathbf{r} e di \mathbf{k} nei tensori di correlazione doppia e spettro di energia, si possono introdurre altri due tensori mediati sulla superficie di sfere centrate nell'origine e di raggi r e k assegnati:

$$S_{ij}(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B_r(\mathbf{0})} dS(\mathbf{r}) R_{ij}(\mathbf{r}), \quad \Psi_{ij}(k) = \int_{\partial B_k(\mathbf{0})} dS(\mathbf{k}) \Phi_{ij}(\mathbf{k}). \quad (8.29)$$

Il contributo alla componente (i, j) del tensore energia dei vettori d'onda contenuti nella corona sferica $B'_k(\mathbf{0}) \cap B_{k+dk}(\mathbf{0})$ è allora dato da $\Psi_{ij}(k) dk$, come segue subito dalle relazioni:

$$\begin{aligned} < u_i(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) > &= R_{ij}(\mathbf{0}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k} \Phi_{ij}(\mathbf{k}) \\ &= \int_0^{+\infty} dk \int_{\partial B_k(\mathbf{0})} dS(\mathbf{k}) \Phi_{ij}(\mathbf{k}) \end{aligned}$$

³ Essendo R_{ij} la antitrasformata di Φ_{ij} (8.25), Φ_{ij} è a sua volta la trasformata di Fourier di R_{ij} :

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{r} R_{ij}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (8.26)$$

e, ricordando che R_{ij} è reale, la (8.26) implica:

$$\begin{aligned} \overline{\Phi}_{ij}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{r} R_{ij}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{r} R_{ij}(-\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{r} R_{ji}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \Phi_{ji}(\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (8.27)$$

oltre alla conseguenza più semplice: $\overline{\Phi}_{ij}(\mathbf{k}) = \Phi_{ij}(-\mathbf{k})$. La forma quadratica $z_l \bar{z}_h \Phi_{lh}$ è allora reale per ogni scelta dei numeri complessi z_1, z_2 e z_3 :

$$\overline{z_l \bar{z}_h \Phi_{lh}} = \bar{z}_l z_h \overline{\Phi}_{lh} = z_h \bar{z}_l \Phi_{hl}.$$

$$= \int_0^{+\infty} dk \Psi_{ij}(k) .$$

Le due funzioni $S_{ij}(r)$ e $\Psi_{ij}(k)$ sono legate da una trasformata di Fourier col seno. Scrivendo le variabili \mathbf{r} in coordinate sferiche con la latitudine nulla nella direzione \mathbf{k} , si ha:

$$\int_{\partial B_r(\mathbf{0})} dS(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = 4\pi r^2 \frac{\sin kr}{kr} . \quad (8.30)$$

È allora possibile collegare $S_{ij}(r)$ a $\Psi_{ij}(k)$:

$$\begin{aligned} S_{ij}(r) &= \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B_r(\mathbf{0})} dS(\mathbf{r}) R_{ij}(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B_r(\mathbf{0})} dS(\mathbf{r}) \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k} \Phi_{ij}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ &= \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k} \Phi_{ij}(\mathbf{k}) \int_{\partial B_r(\mathbf{0})} dS(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k} \frac{\sin kr}{kr} \Phi_{ij}(\mathbf{k}) \\ &= \int_0^{+\infty} dk \frac{\sin kr}{kr} \int_{\partial B_k(\mathbf{0})} dS(\mathbf{k}) \Phi_{ij}(\mathbf{k}) \\ &= \int_0^{+\infty} dk \frac{\sin kr}{kr} \Psi_{ij}(k) , \end{aligned}$$

da cui ricaviamo:

$$rS_{ij}(r) = \int_0^{+\infty} dk \frac{1}{k} \Psi_{ij}(k) \sin kr . \quad (8.31)$$

Procedendo in maniera simmetrica si può ricavare il legame tra $\Psi_{ij}(k)$ e $S_{ij}(r)$, tenendo conto che la (8.30) fornisce scambiando \mathbf{r} con $-\mathbf{k}$ lo stesso risultato,

$$\begin{aligned} \Psi_{ij}(k) &= \int_{\partial B_k(\mathbf{0})} dS(\mathbf{k}) \Phi_{ij}(\mathbf{k}) \\ &= \int_{\partial B_k(\mathbf{0})} dS(\mathbf{k}) \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{r} R_{ij}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{r} R_{ij}(\mathbf{r}) \int_{\partial B_k(\mathbf{0})} dS(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ &= \frac{k^2}{2\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{r} \frac{\sin kr}{kr} R_{ij}(\mathbf{r}) \\ &= \frac{k^2}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} dr \frac{\sin kr}{kr} \int_{\partial B_r(\mathbf{0})} dS(\mathbf{r}) R_{ij}(\mathbf{r}) \\ &= \frac{2}{\pi} k \int_0^{+\infty} dr \sin kr r S_{ij}(r) , \end{aligned}$$

da cui si ricava finalmente:

$$\frac{1}{k} \Psi_{ij}(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} dr r S_{ij}(r) \sin kr . \quad (8.32)$$

Si può quindi concludere che $r S_{ij}(r)$ e $\Psi_{ij}(k)/k$ sono tra loro legati dalla trasformata di Fourier col seno.

8.3 La funzione spettro d'energia

Particolare importanza assume la traccia di $\Psi_{ij}(k)$:

$$E(k) = \frac{1}{2} \Psi_{ii}(k) = \frac{1}{2} \int_{\partial B_k(\mathbf{0})} dS(\mathbf{k}) \Phi_{ii}(\mathbf{k}) , \quad (8.33)$$

che si chiama *funzione spettro d'energia* cinetica. Il nome può essere facilmente giustificato considerando che dalla (8.33) segue:

$$\int_0^{+\infty} dk E(k) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k} \Phi_{ii}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} R_{ii}(\mathbf{0}) = \frac{1}{2} \langle u_i(\mathbf{x}) u_i(\mathbf{x}) \rangle ,$$

che fa vedere come $E(k) dk$ fornisca il contenuto d'energia dei vettori d'onda compresi nella corona sferica $B'_k(\mathbf{0}) \cap B_{k+dk}(\mathbf{0})$. Per questo motivo la funzione (8.33) è tra le più importanti nell'analisi di campi turbolenti.

L'andamento di questa funzione per valori del numero d'onda k molto più piccoli del numero d'onda $k_L = 2\pi/L$, corrispondente ai vortici più grandi presenti nel campo (di dimensione L), può essere predetto sulla base del fatto che il campo di velocità è a divergenza nulla e delle proprietà del tensore spettro d'energia. Infatti, il la componente (i, j) del tensore spettro d'energia $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$ per k sufficientemente piccoli può essere sviluppata in serie di McLaurin:

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = \mathbf{C}_{ij} + k_l \mathbf{C}_{ijl} + k_l k_m \mathbf{C}_{ijlm} + O(k^3) , \quad (8.34)$$

in cui \mathbf{C}_{ij} , \mathbf{C}_{ijl} e \mathbf{C}_{ijlm} sono costanti complesse da determinare, ovviamente dipendenti dalle derivate in \mathbf{k} di $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$ valutate in $\mathbf{k} = \mathbf{0}$. Con $O(k^3)$ sono stati indicati termini dell'ordine al più di k^3 , ovvero il resto della serie. Essendo il campo di velocità a divergenza nulla:

$$\begin{aligned} 0 &= k_j \Phi_{ij}(\mathbf{k}) = k_j \mathbf{C}_{ij} + k_j k_l \mathbf{C}_{ijl} + k_j k_l k_m \mathbf{C}_{ijlm} + O(k^4) \\ 0 &= k_i \Phi_{ij}(\mathbf{k}) = k_i \mathbf{C}_{ij} + k_i k_l \mathbf{C}_{ijl} + k_i k_l k_m \mathbf{C}_{ijlm} + O(k^4) , \end{aligned}$$

che, dovendo essere verificata per ogni valore di \mathbf{k} , impone le seguenti condizioni ai coefficienti dello sviluppo:

$$\mathbf{C}_{ij} = \mathbf{0} ; \quad \sum_{\pi(i,l)} \mathbf{C}_{ijl} = \mathbf{0} , \quad \sum_{\pi(j,l)} \mathbf{C}_{ijl} = \mathbf{0} ; \quad \sum_{\pi(i,l,m)} \mathbf{C}_{ijlm} = \mathbf{0} , \quad \sum_{\pi(j,l,m)} \mathbf{C}_{ijlm} = \mathbf{0} \quad (8.35)$$

e così via, avendo indicato con $\pi(q_1, q_2, q_3, \dots, q_r)$ le permutazioni degli indici $q_1, q_2, q_3, \dots, q_r$. Dovendo inoltre essere la forma quadratica $\mathbf{z}_i \bar{\mathbf{z}}_j \Phi_{ij}$ non negativa per tutte le possibili scelte dei numeri complessi $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ e \mathbf{z}_3 , il numero complesso:

$$\mathbf{z}_i \bar{\mathbf{z}}_j k_l \mathbf{C}_{ijl} + \mathbf{z}_i \bar{\mathbf{z}}_j k_l k_m \mathbf{C}_{ijlm} + O(k^3)$$

deve essere non negativo. Poiché il termine dominante per piccoli k ($\mathbf{z}_i \bar{\mathbf{z}}_j k_l \mathbf{C}_{ijl}$) cambia segno passando da \mathbf{k} a $-\mathbf{k}$, deve essere allora:

$$\mathbf{C}_{ijl} = \mathbf{0} . \quad (8.36)$$

Lo sviluppo di McLaurin (8.34) si riscrive, in base alle (8.35) e (8.36), nel modo seguente:

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = k_l k_m \mathbf{C}_{ijlm} + O(k^3) , \quad (8.37)$$

ne segue per la funzione $\Psi_{ij}(k)$:

$$\Psi_{ij}(k) = \int_{\partial B_k(\mathbf{0})} dS(\mathbf{k}) (k_l k_m \mathbf{C}_{ijlm} + k_l k_m k_q \mathbf{C}_{ijlmq} + \dots) . \quad (8.38)$$

I termini di questo sviluppo in serie possono essere valutati passando in coordinate sferiche sul vettore d'onda \mathbf{k} (ricordare che $dS(\mathbf{k}) = k^2 \sin \phi \, d\phi d\theta$):

$$\mathbf{k} = k \begin{pmatrix} \sin \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \theta \\ \cos \phi \end{pmatrix} .$$

Il fatto importante, piuttosto intuitivo, è che l'integrale del prodotto di un numero *dispari* di fattori k_i è sempre nullo:

$$\int_{\partial B_k(\mathbf{0})} dS(\mathbf{k}) k_{i_1} \cdot k_{i_2} \cdot \dots \cdot k_{i_m} = 0 .$$

Infatti, supponendo che tra gli m fattori ci siano p componenti di \mathbf{k} lungo l'asse 1, q lungo 2 ed s lungo 3 ($p + q + s = m$, con m dispari):

$$\begin{aligned} & \int_{\partial B_k(\mathbf{0})} dS(\mathbf{k}) k_{i_1} \cdot k_{i_2} \cdot \dots \cdot k_{i_m} = \\ & = k^{m+2} \int_0^\pi d\phi \, \sin \phi \sin^{p+q} \phi \cos^s \phi \int_0^{2\pi} d\theta \, \cos^p \theta \sin^q \theta , \end{aligned}$$

si può verificare che se $p + q$ è dispari:

$$\int_0^{2\pi} d\theta \, \cos^p \theta \sin^q \theta = 0 ,$$

mentre se $p + q$ è pari (e quindi s è dispari, dovendo essere $(p + q) + s = m$ dispari):

$$\int_0^\pi d\phi \sin^{p+q+1} \phi \cos^s \phi = 0 .$$

Gli integrali dei prodotti di due componenti di \mathbf{k} sono nulli, invece, solo se le componenti sono diverse, mentre l'integrale del quadrato di una componente di \mathbf{k} è $4\pi k^4/3$. Sulla base della espressione (8.38) della funzione $\Psi_{ij}(k)$, otteniamo allora per lo spettro d'energia per piccoli numeri d'onda ($k \ll k_L$):

$$E(k) = \frac{1}{2}\Psi_{ii}(k) = \frac{2}{3}\pi C_{iill} k^4 + O(k^6) , \quad (8.39)$$

come conseguenza dell'equazione di continuità. Per numeri d'onda molto grandi ($k \geq k_\eta$), al contrario, gli sforzi viscosi prevalgono su quelli inerziali e l'energia cinetica viene rapidamente dissipata. In questo intervallo (detto *dissipativo*) la dipendenza della funzione spettro di energia dal numero d'onda k diviene esponenziale, proporzionale a $\exp(-lk)$, essendo l un opportuno multiplo della lunghezza di dissipazione η .

Riprendendo il discorso qualitativo iniziato nel capitolo precedente, in un campo turbolento si possono individuare vortici di varia dimensione: dalla dimensione L dei vortici più grandi, via via fino alla scala di Kolmogorov. Tale scala di lunghezze, indicata con η , è quella al di sotto della quale ogni struttura vorticosa viene distrutta dalla diffusione viscosa: la corrispondente energia cinetica è dissipata in calore. Per questo motivo, la scala di Kolmogorov è definita dalla velocità di decadimento dell'energia cinetica media (cambiata di segno, ovvero $\bar{\varepsilon} = -3/2 du^2/dt$) e dal coefficiente di viscosità cinematica ν del fluido. Indicando con \mathcal{L} e \mathcal{T} le dimensioni fisiche di una lunghezza e di un tempo, rispettivamente, la velocità di dissipazione dell'energia cinetica media ha dimensioni $[\bar{\varepsilon}] = \mathcal{L}^2 \mathcal{T}^{-3}$, mentre il coefficiente di viscosità cinematica ha dimensioni $[\nu] = \mathcal{L}^2 \mathcal{T}^{-1}$, come tutte le diffusività. Assumendo $\eta = \nu^\alpha \bar{\varepsilon}^\beta$, arriviamo all'equazione dimensionale:

$$\mathcal{L}^1 \mathcal{T}^0 = \mathcal{L}^{2(\alpha+\beta)} \mathcal{T}^{-(\alpha+3\beta)}$$

che implica: $\alpha = 3/4$, $\beta = -1/4$. Ne segue che la scala di Kolmogorov η è data dalla relazione:

$$\eta = (\nu^3 / \bar{\varepsilon})^{1/4} . \quad (8.40)$$

La scala L è necessariamente molto maggiore di η , ne segue che esiste un ampio intervallo di numeri d'onda $k_L \ll k \ll k_\eta$ attraverso il quale l'energia cinetica “transita”, passando dai vortici più grandi a quelli più piccoli, la cui energia viene poi dissipata in calore. Questo transito è dovuto all'azione dei termini convettivi, od inerziali, ed allora a tale intervallo di numeri d'onda si attribuisce l'aggettivo di *inerziale*. Ovviamente, è la velocità di dissipazione dell'energia cinetica media $\bar{\varepsilon}$ che decide quanta energia transita nell'unità di tempo.

Cerchiamo di capire come si comporta la funzione $E(k)$ per k appartenenti all'intervallo inerziale. Iniziamo con l'analizzare il caso tridimensionale. Seguendo l'analisi sviluppata da Kolmogorov nel 1941 [4, 23], supponiamo che

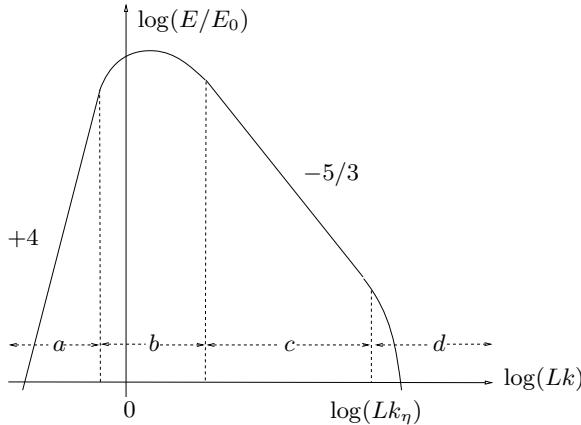


Figura 8.8. Andamento qualitativo della funzione spettro di energia per un campo turbolento tridimensionale in funzione del logaritmo di Lk . E_0 è un opportuno valore di E , ad esempio per $k = 2\pi/L$, necessario per adimensionalizzare l'argomento del logaritmo. Sono indicati i quattro intervalli a : ($k \ll k_L$) in cui $E(k) \propto k^4$, b : $k \simeq k_L$ intervallo corrispondente ai vortici di scala più grande (cui è associata la maggior parte dell'energia cinetica del campo), c : intervallo inerziale e d : $k \geq k_\eta$ intervallo dissipativo.

E dipenda nell'intervalle inerziale solamente da quanta energia viene dissipata nell'unità di tempo, oltre che ovviamente dal numero d'onda k . Essendo l'integrale di E in k proprio l'energia cinetica media, le dimensioni fisiche di E sono $[E] = \mathcal{L}^3 T^{-2}$. Se E deve essere funzione di $\bar{\varepsilon}$ e k nell'intervalle inerziale, possiamo determinare i due numeri α e β tali che:

$$E(k) \propto \bar{\varepsilon}^\alpha k^\beta. \quad (8.41)$$

Una analisi delle dimensioni fisiche di entrambi i membri della relazione (8.41) porta a scrivere l'equazione dimensionale:

$$\mathcal{L}^3 T^{-2} = \mathcal{L}^{2\alpha-\beta} T^{-3\alpha},$$

che fornisce $\alpha = 2/3$ e $\beta = -5/3$. Nell'intervalle inerziale la funzione spettro di energia è quindi proporzionale a $\bar{\varepsilon}^{2/3} k^{-5/3}$.

Passiamo ora ad esaminare il caso bidimensionale. Come già accennato nel capitolo precedente, possono essere condotte considerazioni analoghe sostituendo all'energia cinetica l'enstrofia. In tal caso la velocità di dissipazione dell'enstrofia $\bar{\varepsilon}_\omega = -\partial_t <\omega^2>$ (le cui dimensioni fisiche sono $[\bar{\varepsilon}_\omega] = T^{-3}$) decide quanta enstrofia transita nell'unità di tempo. Di nuovo, assumiamo che E dipenda da $\bar{\varepsilon}_\omega$, oltre che ovviamente da k , nell'intervalle inerziale. Scrivendo ancora la (8.41) con $\bar{\varepsilon}_\omega$ al posto di $\bar{\varepsilon}$, otteniamo questa volta l'equazione dimensionale:

$$\mathcal{L}^3 \mathcal{T}^{-2} = \mathcal{L}^{-\beta} \mathcal{T}^{-3\alpha},$$

che fornisce $\alpha = 2/3$ e $\beta = -3$. In due dimensioni, la funzione spettro di energia nell'intervallo inerziale è quindi proporzionale a $\bar{\varepsilon}_\omega^{2/3} k^{-3}$.

8.4 La correlazione doppia della vorticità

Una correlazione molto importante in turbolenza è quella della vorticità $\boldsymbol{\omega}$:

$$w_{ij}(\mathbf{r}) = \langle \omega_i(\mathbf{x}) \omega_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle, \quad (8.42)$$

in cui $\omega_i(\mathbf{x})$ ed $\omega_j(\mathbf{x} + \mathbf{r})$ sono calcolate allo stesso tempo. La dipendenza dal tempo nella definizione (8.42) è sottointesa, non essendo al momento rilevante. Inoltre, tale definizione è stata posta per un campo omogeneo.

Poiché $\boldsymbol{\omega}$ è il rotore della velocità, si intuisce che esiste un legame differenziale anche tra w_{ij} ed R_{ij} . Sostituendo $\boldsymbol{\omega}$ con $\nabla \times \mathbf{u}$ e la media di insieme con una media di volume, fatta peraltro su un dominio limitato $D \subset \mathbb{R}^3$ arbitrario, otteniamo:

$$\begin{aligned} \langle \omega_i(\mathbf{x}) \omega_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle &= \frac{1}{|D|} \int_D d\mathbf{x} \omega_i(\mathbf{x}) \omega_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{|D|} \int_D d\mathbf{x} e_{ipq} \partial_p u_q(\mathbf{x}) e_{jlm} \partial_{r_l} u_m(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \\ &= \frac{e_{ipq} e_{jlm}}{|D|} \partial_{r_l} \int_D d\mathbf{x} u_m(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \partial_p u_q(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Se nell'ultimo membro poniamo $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{r}$, considerando che $\partial_p u_q(\mathbf{x}) = -\partial_{r_p} u_q(\mathbf{y} - \mathbf{r})$ e l'invarianza con \mathbf{r} della media di volume fatta in $\mathbf{r} + D$, possiamo portare fuori dall'integrale anche la seconda derivata in \mathbf{r} :

$$\begin{aligned} w_{ij}(\mathbf{r}) &= -\frac{e_{ipq} e_{jlm}}{|D|} \partial_{r_l} \int_{D + \mathbf{r}} d\mathbf{y} u_m(\mathbf{y}) \partial_{r_p} u_q(\mathbf{y} - \mathbf{r}) \\ &= -\frac{e_{ipq} e_{jlm}}{|D|} \partial_{r_l r_p}^2 \int_{D + \mathbf{r}} d\mathbf{y} u_q(\mathbf{y} - \mathbf{r}) u_m(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Ponendo di nuovo $\mathbf{x} = \mathbf{y} - \mathbf{r}$ otteniamo infine il legame differenziale:

$$\begin{aligned} w_{ij}(\mathbf{r}) &= -e_{ipq} e_{jlm} \partial_{r_l r_p}^2 \frac{1}{|D|} \int_D d\mathbf{x} u_q(\mathbf{x}) u_m(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \\ &= -e_{ipq} e_{jlm} \partial_{r_l r_p}^2 R_{qm}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (8.43)$$

La relazione (8.42) può essere ulteriormente semplificata utilizzando la decomposizione del prodotto dei due simboli di Ricci:

$$e_{ipq} e_{jlm} = \delta_{ij} \delta_{pl} \delta_{qm} + \delta_{il} \delta_{pm} \delta_{qj} + \delta_{im} \delta_{pj} \delta_{ql} - \delta_{ij} \delta_{pm} \delta_{ql} - \delta_{il} \delta_{pj} \delta_{qm} - \delta_{im} \delta_{pl} \delta_{qj}, \quad (8.44)$$

con la quale otteniamo:

$$\begin{aligned} w_{ij}(\mathbf{r}) = & -\delta_{ij}\nabla^2 R_{mm}(\mathbf{r}) - \underbrace{\partial_{im}^2 R_{jm}(\mathbf{r})}_{\equiv 0} - \underbrace{\partial_{lj}^2 R_{li}(\mathbf{r})}_{\equiv 0} + \\ & + \delta_{ij} \underbrace{\partial_{lm}^2 R_{lm}(\mathbf{r})}_{\equiv 0} + \partial_{ij}^2 R_{mm}(\mathbf{r}) + \nabla^2 R_{ji}(\mathbf{r}), \end{aligned}$$

in cui basta utilizzare le relazioni (8.22) per annullare i termini indicati. Ne segue il legame differenziale tra la correlazione doppia della vorticità (w_{ij}) e la correlazione doppia della velocità (R_{ij}):

$$w_{ij}(\mathbf{r}) = (\partial_{ij}^2 - \delta_{ij}\nabla^2)R_{mm}(\mathbf{r}) + \nabla^2 R_{ji}(\mathbf{r}). \quad (8.45)$$

Osserviamo che *non* è possibile sostituire R_{ji} con R_{ij} , poiché R_{lm} non è simmetrico. La (8.45) fornisce in particolare per la traccia di w_{ij} :

$$w_{ii}(\mathbf{r}) = -\nabla^2 R_{mm}(\mathbf{r}). \quad (8.46)$$

Le (8.45), (8.46) possono essere scritte nello spazio dei numeri d'onda definendo il tensore *spettro di vorticità*:

$$\Omega_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{r} w_{ij}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (8.47)$$

ed applicando la relazione (8.55) dell'Appendice 8.5 tra le trasformate di Fourier di una funzione e della sua derivata. In tal modo la (8.47) può essere riscritta nello spazio dei numeri d'onda:

$$\Omega_{ij}(\mathbf{k}) = (\delta_{ij}k^2 - k_i k_j)\Phi_{mm}(\mathbf{k}) - k^2\Phi_{ji}(\mathbf{k}), \quad (8.48)$$

ed in particolare per la traccia di Ω_{ij} :

$$\Omega_{ii}(\mathbf{k}) = k^2\Phi_{mm}(\mathbf{k}), \quad (8.49)$$

come segue pure trasformando la (8.46). La relazione precedente è tra le più importanti nella cinematica della turbolenza omogenea, vedremo più avanti che un legame analogo vale non solo per le tracce ma per gli interi tensori nel caso in cui il campo turbolento verifichi opportune ipotesi di simmetria.

La correlazione doppia della vorticità consente anche di introdurre una scala delle lunghezze molto importante, data dalla radice quadrata del rapporto tra la velocità quadratica media e la vorticità quadratica media:

$$L = \left[\frac{\langle u_i(\mathbf{x})u_i(\mathbf{x}) \rangle}{\langle \omega_j(\mathbf{x})\omega_j(\mathbf{x}) \rangle} \right]^{1/2} = \left[\frac{\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k} \Phi_{ii}(\mathbf{k})}{\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k} \Omega_{jj}(\mathbf{k})} \right]^{1/2} = \left[\frac{\int_0^{+\infty} dk E(k)}{\int_0^{+\infty} dk k^2 E(k)} \right]^{1/2} \quad (8.50)$$

che è proporzionale al reciproco della dispersione attorno all'origine della funzione spettro dell'energia E . La scala delle lunghezze L ammette una interpretazione fisica immediata. Supponiamo di avere due campi turbolenti col medesimo contenuto di energia totale, ma dei quali il secondo ha una dispersione attorno all'origine di E molto più grande del primo, ovvero:

$$\int_0^{+\infty} dk E(k) \mid_1 = \int_0^{+\infty} dk E(k) \mid_2 , \quad \int_0^{+\infty} dk k^2 E(k) \mid_1 \ll \int_0^{+\infty} dk k^2 E(k) \mid_2 .$$

Nel primo caso il contenuto d'energia delle strutture vorticose di grande scala (piccoli numeri d'onda k) è molto maggiore di quello delle strutture di piccola scala (grandi k) rispetto a quanto accade nel secondo caso. La scala L_1 risulta quindi molto più grande della corrispondente L_2 . L è quindi indicativa delle dimensioni delle strutture vorticose che contengono la parte più rilevante dell'energia cinetica e si può chiamare *scala delle grandi strutture* (vorticose).

Approfondimenti

8.5 Serie e trasformata di Fourier

Richiamiamo brevemente le definizioni ed alcune proprietà importanti della *serie* e della *trasformata* di Fourier. Questa trattazione non vuole essere esaustiva, avendo solo l'intento di familiarizzare con alcuni concetti basilari. Per approfondimenti e applicazioni si può consultare l'amplissima letteratura esistente.

8.5.1 Serie di Fourier e nucleo di Dirichlet

Data una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, periodica di periodo 2π , il modulo della quale ha integrale sul periodo finito, ovvero $f \in L_1([-\pi, \pi])$, si possono considerare i seguenti numeri complessi:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) e^{-ikx} dx , \quad (8.51)$$

per k intero relativo, che risultano finiti, in quanto, per una ben nota proprietà dell'integrale:

$$|c_k| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) e^{-ikx} dx \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(x)| dx .$$

Inoltre, i coefficienti (8.51) risultano infinitesimi per $|k| \rightarrow +\infty$. Infatti, più in generale se $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e g è a modulo integrabile in (a, b) , ovvero $g \in L_1(a, b)$, ed y è una variabile reale, si ha:

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \int_a^b g(x) e^{iyx} dx = 0 ,$$

risultato che va sotto il nome di *teorema di Riemann-Lebesgue* (cfr. [16], pp. 402–403, Lemma 1). Poiché i coefficienti (8.51) sono infinitesimi per $|k| \rightarrow +\infty$, si può allora considerare la serie:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx} \quad (8.52)$$

e valutare sotto quali ipotesi risulti convergente e come l'eventuale somma della serie è legata alla funzione f , con la quale sono stati definiti i coefficienti (8.51). Come è ben noto, la serie (8.52) si chiama *serie di Fourier* associata alla funzione f e la sua convergenza si studia a partire da una riscrittura della sua somma parziale n -esima $S_n(x)$, in cui si utilizza la forma (8.51) dei coefficienti:

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{+n} \int_{-\pi}^{+\pi} dt f(t) e^{-ikt} e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} dt f(t) \sum_{k=-n}^{+n} e^{ik(x-t)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} dt f(t) e^{-i n(x-t)} \sum_{k=-n}^{+n} e^{i(k+n)(x-t)} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} dt f(t) e^{-i n(x-t)} \sum_{h=0}^{2n} e^{i h(x-t)} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} dt f(t) e^{-i n(x-t)} \frac{e^{i(2n+1)(x-t)} - 1}{e^{i(x-t)} - 1} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} dt f(t) \frac{e^{i(n+1/2)(x-t)} - e^{-i(n+1/2)(x-t)}}{e^{i(x-t)/2} - e^{-i(x-t)/2}} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} dt f(t) \frac{\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) (x-t) \right]}{\sin \frac{x-t}{2}} .
\end{aligned}$$

Definendo il *nucleo di Dirichlet* di ordine n :

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right]}{\sin \frac{x}{2}} ,$$

che risulta essere una funzione periodica di periodo 2π , si ha in definitiva:

$$S_n(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} dt D_n(x-t) f(t) = \int_{-\pi}^{+\pi} dt D_n(t) f(x-t) = \int_{-\pi}^{+\pi} dt D_n(t) f(x+t) .$$

In base a questa forma della somma parziale n -esima $S_n(x)$ della serie di Fourier (8.52) per la funzione f , si può mostrare che, se f ha al più una discontinuità a salto in x , esistendo finiti i valori limite da destra, $f(x^+)$, e da sinistra, $f(x^-)$, di f e gli analoghi per la sua derivata f' , allora la serie di Fourier converge nel punto x al valor medio della funzione f :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx} = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} . \quad (8.53)$$

8.5.2 Trasformata di Fourier

Data una funzione della variabile reale x a valori reali (ma la nozione si estende senza modifiche anche a funzioni a valori complessi) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con $f \in L_1(\mathbb{R})$, si può considerare la trasformata seguente:

$$F(k) = \mathcal{F}[f](k) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ikx} f(x) , \quad (8.54)$$

funzione della variabile reale k (che prende il nome di *numero d'onda*, in analogia a quanto accade nella serie di Fourier) a valori complessi chiamata *trasformata di Fourier* della funzione $f(x)$. La trasformata (8.54) può essere facilmente generalizzata al caso in cui $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, per n intero positivo qualunque. Infatti, supponiamo

che $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, ed in particolare $f(\mathbf{x}) \sim |\mathbf{x}|^{-n-\varepsilon}$ con $\varepsilon > 0$ per $\mathbf{x} \rightarrow \infty$, ed applichiamo n volte la definizione (8.54), una volta per ogni componente del vettore \mathbf{x} , utilizzando per la componente x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) il numero d'onda k_i :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 e^{-i k_1 x_1} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 e^{-i k_2 x_2} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n e^{-i k_n x_n} f(\mathbf{x}) = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} d\mathbf{x} f(\mathbf{x}) e^{-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = \mathcal{F}[f](\mathbf{k}) . \end{aligned}$$

Il vettore $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^n$ prende il nome di *vettore (dei numeri) d'onda*.

La trasformata di Fourier (8.54) gode di importanti proprietà. Innanzitutto, come conseguenza del teorema di Riemann-Lebesgue (vedi § 8.5.1), si ha subito che la trasformata di Fourier $\mathbf{F}(y)$ è *infinitesima* per $y \rightarrow \pm\infty$. Una proprietà fondamentale è la *linearità*, che è una ovvia conseguenza della linearità dell'integrale. Inoltre, la trasformata di Fourier di una funzione $f \in L_1(\mathbb{R})$, è una *funzione continua di k* . Questo significa che, considerato un punto $k \in \mathbb{R}$ arbitrario, comunque si scelga un numero $\varepsilon > 0$ arbitrario, esiste in corrispondenza a questo un numero $\delta_\varepsilon > 0$, tale che per ogni $\eta \in (k - \delta_\varepsilon, k + \delta_\varepsilon)$: $|\mathbf{F}(\eta) - \mathbf{F}(y)| < \varepsilon$.

Per $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, esiste un importante legame tra la trasformata di f e quella della sua derivata rispetto ad una componente di \mathbf{x} , ad esempio x_s , ammesso che anche $\partial_s f$ sia trasformabile:

$$\mathcal{F}[\partial_s f](\mathbf{k}) = i k_s \mathcal{F}[f](\mathbf{k}) . \quad (8.55)$$

Infatti se ν è il versore normale uscente dalla superficie $\partial B_R(\mathbf{0})$ di una sfera di raggio R e centro nell'origine e dS è l'elemento d'area su tale superficie:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\partial_s f](\mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{B_R(\mathbf{0})} d\mathbf{x} \partial_s f(\mathbf{x}) e^{-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{\partial B_R(\mathbf{0})} dS(\mathbf{x}) \nu_s(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) e^{-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + \right. \\ &\quad \left. - \int_{B_R(\mathbf{0})} d\mathbf{x} f(\mathbf{x}) (-ik_s) e^{-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \right] \\ &= \frac{ik_s}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x} f(\mathbf{x}) e^{-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} , \end{aligned}$$

in cui l'integrale su $\partial B_R(\mathbf{0})$ converge a zero con R poiché, essendo la f trasformabile, $f(\mathbf{x}) \sim |\mathbf{x}|^{-n-\varepsilon}$ con $\varepsilon > 0$ per $\mathbf{x} \rightarrow \infty$.

Infine, una delle proprietà più utili della trasformata di Fourier è la seguente:

$$\mathcal{F}[f_1] \mathcal{F}[f_2] = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[f_1 * f_2] , \quad (8.56)$$

in cui $f_{1,2} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e si è indicato con $f_1 * f_2$ il *prodotto di convoluzione* tra le due funzioni, ovvero la nuova funzione di x :

$$f_1 * f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy f_1(y) f_2(x - y) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy f_1(x - y) f_2(y) . \quad (8.57)$$

Una analoga proprietà vale per le trasformate n -dimensionali, con l'ovvia differenza di un fattore $1/(2\pi)^n$ a secondo membro. Sinteticamente la relazione (8.56) si legge dicendo che il prodotto delle trasformate è uguale alla trasformata della convoluzione, a meno del fattore $1/(2\pi)$. La relazione (8.56) può essere motivata intuitivamente nel modo seguente ($x = x_1 + x_2$):

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f_1](k) \mathcal{F}[f_2](k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 f_1(x_1) e^{-ikx_1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 f_2(x_2) e^{-ikx_2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 f_1(x_1) f_2(x_2) e^{-ik(x_1+x_2)} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ikx} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 f_1(x_1) f_2(x - x_1) \\ &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[f_1 * f_2](k) .\end{aligned}$$

L'inversione della trasformata di Fourier \mathbf{F} di una funzione $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ implica lo studio delle proprietà di convergenza dell'integrale *in valore principale*:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikx} \mathbf{F}(k) =: \lim_{K \rightarrow +\infty} \int_{-K}^{+K} dk e^{ikx} \mathbf{F}(k) , \quad (8.58)$$

la cui convergenza è strettamente legata a quella di una serie di Fourier (8.52). Infatti, si può far vedere che condizione necessaria e sufficiente affinché il limite (8.58) converga in un punto $x \in \mathbb{R}$ è che risulti convergente la serie di Fourier associata alla funzione periodica di periodo 2π (m è un intero relativo): $\Phi_x(\xi + 2m\pi) := f(\xi + x)$, per $\xi \in [-\pi, +\pi]$. Inoltre, il valore del limite (8.58) coincide con la somma della serie (8.53), ovvero se $\mathbf{F} = \mathcal{F}[f]$ è la trasformata di Fourier di una funzione $f \in L_1(\mathbb{R})$, continua da destra e da sinistra nel punto x , per la quale esistono finite le derivate da destra e da sinistra in x , allora sussiste nel punto x la formula di inversione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikx} \mathbf{F}(k) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} . \quad (8.59)$$

Possiamo ora anche osservare che vale la relazione inversa rispetto alla (8.56). Chiamate con $F_{1,2}$ le trasformate di Fourier $\mathcal{F}[f_{1,2}]$, abbiamo infatti:

$$f_1 f_2 = \mathcal{F}^{-1}[F_1] \mathcal{F}^{-1}[F_2] = \mathcal{F}^{-1}[F_1 * F_2] . \quad (8.60)$$

Per motivare intuitivamente la relazione (8.60) è sufficiente utilizzare le definizioni ($k = k_1 + k_2$):

$$\begin{aligned}f_1(x) f_2(x) &= \mathcal{F}^{-1}[F_1](x) \mathcal{F}^{-1}[F_2](x) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dk_1 F_1(k_1) e^{ik_1 x} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_2 F_2(k_2) e^{ik_2 x} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikx} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_1 F_1(k_1) F_2(k - k_1) \\ &= \mathcal{F}^{-1}[F_1 * F_2](x) ,\end{aligned}$$

sebbene tale dimostrazione non sia formalmente soddisfacente e necessiti di importanti precisazioni riguardo alla possibilità di utilizzare un integrale ordinario per la convoluzione delle $F_{1,2}$.

8.5.3 Un esempio di applicazione della trasformata di Fourier

Mostriamo un esempio concreto di applicazione della trasformata di Fourier alla soluzione di un problema differenziale lineare. L'utilizzazione di questo stesso strumento per trattare le equazioni di Navier-Stokes è molto più complessa, in quanto la trasformata del termine convettivo è una convoluzione di trasformate della velocità e sarà oggetto di studi successivi.

Consideriamo il problema alle derivate parziali:

$$\begin{cases} \partial_t u + u_0 \partial_x u = \nu \partial_{xx}^2 u \\ u(x, 0) = a_0(x) = \exp(-x^2/\sigma^2) \\ u \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow \pm\infty \text{ ed ogni } t, \end{cases} \quad (8.61)$$

in cui u è la velocità lungo una direzione x fissata, funzione della ascissa x e del tempo t . Il problema (8.61) è una linearizzazione del problema monodimensionale di Navier-Stokes, privato della pressione, noto in letteratura come problema di Burgers. Nella equazione differenziale in (8.61) u_0 è una velocità fissata e ν è il coefficiente di viscosità cinematica, inoltre σ misura l'estensione in x del dato iniziale ($u(x, 0) \simeq 0$ per $|x| > 2\sigma$). Osserviamo che, a causa della linearità dell'equazione e delle condizioni omogenee all'infinito, effettuando una trasformata di Fourier in x del primo e del secondo membro dell'equazione ed indicando con $\hat{u}(k, t)$ la trasformata (in x) di $u(x, t)$ otteniamo:

$$\partial_t \hat{u} = -(\nu k^2 + i u_0 k) \hat{u}, \quad (8.62)$$

che possiamo facilmente risolvere, una volta trasformato il dato iniziale. La trasformata di quest'ultimo sarà data da:

$$\hat{u}_0(k) = \mathcal{F}[a_0](k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ikx} e^{-x^2/\sigma^2} = \frac{e^{-\sigma^2 k^2/4}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-(x+ik\sigma^2 k/2)^2/\sigma^2}. \quad (8.63)$$

Considerando la funzione di variabile complessa $h(z) = \exp(-z^2/\sigma^2)$ con $z = x + iy$, olomorfa in tutto il piano complesso, ed il percorso di integrazione in Fig. 8.9 possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \int_{-R}^{+R} dx e^{-(x+ik\sigma^2 k/2)^2/\sigma^2} &= \int_{-R}^{+R} dx e^{-x^2/\sigma^2} + \\ &+ e^{-R^2/\sigma^2} \int_0^{\sigma^2 k/2} d\eta e^{(-2iR\eta+\eta^2)/\sigma^2} - e^{-R^2/\sigma^2} \int_0^{\sigma^2 k/2} d\eta e^{(2iR\eta+\eta^2)/\sigma^2}, \end{aligned}$$

in cui il limite per $R \rightarrow +\infty$ del primo integrale a secondo membro è, come è ben noto, $\sigma\sqrt{\pi}$, mentre va analizzato l'analogico limite per gli altri due integrali. Questi risultano limitati in modulo per ogni R , infatti:

$$\left| \int_0^{\sigma^2 k/2} d\eta e^{(\pm 2iR\eta+\eta^2)/\sigma^2} \right| \leq \int_0^{\sigma^2 k/2} e^{\eta^2/\sigma^2} d\eta$$

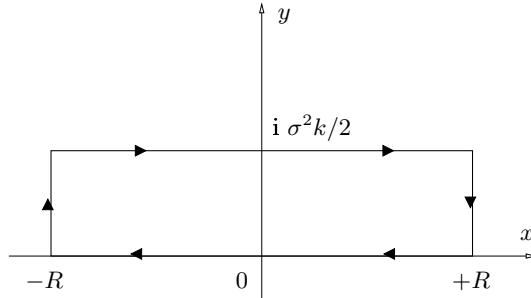


Figura 8.9. Percorso su cui viene valutato l'integrale (8.63), per $k > 0$.

e, poiché sono moltiplicati per il fattore $\exp(-R^2/\sigma^2)$, il loro contributo è nullo per $R \rightarrow +\infty$. Sostituendo nella (8.63), ne segue che la trasformata di Fourier del dato iniziale vale:

$$\hat{u}_0(k) = \frac{\sigma}{2\sqrt{\pi}} e^{-\sigma^2 k^2/4}. \quad (8.64)$$

Integriamo (per separazione di variabili) l'equazione (8.62) col dato iniziale (8.64):

$$\hat{u}(k, t) = \frac{\sigma}{2\sqrt{\pi}} \exp \left[- \left(\frac{\sigma^2}{4} + \nu t \right) k^2 - i u_0 t k \right]$$

ed antitrasformando otteniamo:

$$u(x, t) = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + 4\nu t}} \exp \left[- \left(\frac{x - u_0 t}{\sqrt{\sigma^2 + 4\nu t}} \right)^2 \right]. \quad (8.65)$$

La struttura della soluzione (8.65) ammette una semplice interpretazione fisica. Il dato iniziale propaga a velocità u_0 , si riduce in ampiezza come $(\nu t/\sigma)^{-1/2}$ e la forma d'onda si allarga passando da $\exp(-x^2/\sigma^2)$ al tempo $t = 0$ ad $\exp[-\xi^2/(\sigma^2 + 4\nu t)]$, con $\xi = x - u_0 t$.

La turbolenza omogenea ed isotropa

In questo capitolo discuteremo alcune delle ipotesi semplificative più frequentemente utilizzate in turbolenza omogenea, che assumono un certo “livello di simmetria”, in senso statistico, del campo turbolento. Queste simmetrie dipendono dalla geometria in cui il campo turbolento è confinato, oppure sono suggerite dall’andamento di quantità medie e si traducono in opportune forme funzionali delle correlazioni. Ad esempio, nella turbolenza all’interno di una geometria assialsimmetrica si può ipotizzare che le correlazioni non dipendano dalle posizioni azimutali *absolute*, ma solo da quelle *relative*. Lo stesso tipo di simmetria si può però ipotizzare anche nel caso del flusso turbolento prodotto da un tornado in atmosfera. In presenza di una parete solida, si può richiedere l’invarianza delle correlazioni per traslazioni lungo la parete o per riflessioni attraverso di questa. Se poi il campo occupa tutto lo spazio, si può pensare di imporre condizioni di simmetria ancora più stringenti, come richiedere l’invarianza rispetto a rotazioni rigide dell’insieme di punti $\{\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \dots, \mathbf{y}^{(j)}\}$ in cui il campo random è valutato per costruire la correlazione di ordine j . Quest’ultima condizione di simmetria, essendo la più restrittiva, è quella che induce le forme funzionali più semplici delle correlazioni. Nella breve trattazione che segue si farà riferimento quasi esclusivo a condizioni in cui si può assumere una tale simmetria, allo scopo di semplificare al massimo la forma funzionale dei tensori di correlazione e, conseguentemente, delle loro equazioni di evoluzione.

Il capitolo è organizzato nel modo seguente. Dopo una breve panoramica sui gruppi di spostamenti rigidi (§ 9.1) d’interesse, nel paragrafo 9.2 vengono illustrate le conseguenze, sulla forma funzionale dei tensori di correlazione, dell’assumerne l’invarianza rispetto a ciascuno dei precedenti gruppi. Nella rimanente parte del capitolo, ci si sofferma sulla forma funzionale più semplice: l’*isotropia*. Nel § 9.3 si discute la forma isotropa dei tensori di ordine 1 (come il tensore di correlazione pressione-velocità $p(\mathbf{x})u_i(\mathbf{x} + \mathbf{r})$), mentre nei paragrafi 9.4 e 9.5 vengono dedotte le corrispondenti forme per i tensori di ordine 2, di correlazione doppia tra velocità e tra vorticità. Infine, nel § 9.6 si discute la forma isotropa dei tensori di ordine 3, di correlazione tripla tra velocità.

9.1 Gruppi di trasformazioni invarianti

L'ipotesi di campo $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ statisticamente omogeneo, ovvero di indipendenza di ogni correlazione:

$$Q_{i_1, i_2, \dots, i_j}^{(j)} = \langle u_{i_1}(\mathbf{y}^{(0)} + \mathbf{y}^{(1)}) u_{i_2}(\mathbf{y}^{(0)} + \mathbf{y}^{(2)}) \cdot \dots \cdot u_{i_j}(\mathbf{y}^{(0)} + \mathbf{y}^{(j)}) \rangle$$

dal punto $\mathbf{y}^{(0)}$, pur costituendo una grandissima semplificazione nell'analisi della turbolenza, non fornisce indicazioni sulla dipendenza funzionale di $Q_{i_1, i_2, \dots, i_j}^{(j)}$ dalle $m - 1$ variabili indipendenti $\mathbf{x}'^{(1)} = \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(m)}$, $\mathbf{x}'^{(2)} = \mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(m)}$, ..., $\mathbf{x}'^{(m-1)} = \mathbf{x}^{(m-1)} - \mathbf{x}^{(m)}$ (qui abbiamo scelto $\mathbf{y}^{(0)} = -\mathbf{x}^{(m)}$). Informazioni su tale dipendenza funzionale possono essere dedotte ipotizzando un certo “livello di simmetria” in senso statistico del campo turbolento, ovvero dall'assumere che le correlazioni risultino invarianti rispetto a trasformazioni dello spazio (nel caso in esame *spostamenti rigidi*) appartenenti ad un opportuno *insieme*, dotato di una legge di composizione interna.

Più propriamente, possiamo utilizzare una nozione familiare nell'Algebra, quella di *gruppo*. Infatti, la composizione di due spostamenti (cioè l'esecuzione del secondo a valle del primo), facenti parte dello stesso insieme, dà luogo ad un terzo spostamento del medesimo insieme. Esiste lo spostamento nullo (che lascia invariate tutte le posizioni), il quale funge da elemento neutro per l'operazione di composizione. Infine, assegnato uno spostamento, ne esiste sempre un secondo, nel medesimo insieme, tale che la composizione dei due è lo spostamento nullo. E quindi l'insieme degli spostamenti di un fissato tipo è dotato naturalmente di una legge di composizione interna e tale legge verifica le richieste necessarie per costruire la struttura algebrica di gruppo.¹ I gruppi di spostamenti più utilizzati, elencati in ordine di peso crescente delle richieste, sono:

¹ Ricordiamo che se in un insieme G è definita una operazione di composizione binaria, chiamata convenzionalmente col simbolo $\circ : G \times G \rightarrow G$, la coppia (G, \circ) è un gruppo se tale operazione verifica le richieste seguenti (per ogni $a, b \in G$):

- associativa: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
- esistenza dell'elemento neutro e : $a \circ e = e \circ a = a$
- esistenza dell'inverso: $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.

Mentre in generale non vale l'uguaglianza $a \circ b = b \circ a$. Se questa è verificata per ogni $a, b \in G$, il gruppo si dice *commutativo* (o *abeliano*).

- I*) : riflessioni attraverso un piano fissato;
- II*) : rotazioni rispetto ad un asse fissato (rotazioni piane);
- III*) : rotazioni rispetto ad un asse fissato, traslazioni lungo il medesimo asse e riflessioni attraverso piani passanti per l'asse e normali ad esso;
- IV*) : rotazioni rispetto ad un punto fissato (rotazioni sferiche);
- V*) : rotazioni rispetto ad un punto fissato e riflessioni attraverso piani passanti per il punto.

(9.1)

Cerchiamo di spiegare la natura di gruppo delle cinque classi di spostamenti appena elencate. È immediato convincersi che l'elemento neutro di ciascuna classe è lo spostamento nullo, ovvero lo spostamento che lascia lo spazio nella posizione iniziale. Occorre invece verificare che il risultato della composizione di due spostamenti (cioè l'effettuare il secondo subito dopo il primo, operazione nel seguito definita col nome di *prodotto*) è ancora uno spostamento del medesimo tipo, cioè appartiene alla stessa classe. In tal modo si verifica la chiusura dell'insieme rispetto all'operazione di prodotto. L'associatività del prodotto di spostamenti è sempre ovvia. Inoltre, per ogni spostamento occorre verificare l'esistenza dell'inverso, ovvero di uno spostamento il cui prodotto col primo riporta lo spazio alla posizione iniziale, dando luogo allo spostamento nullo (elemento neutro nel gruppo).

9.1.1 Riflessioni attraverso un piano

Esaminiamo l'insieme di spostamenti *I*. Chiamato con π il piano fissato, orientato definendone una faccia positiva (π^+) ed una negativa (π^-), l'insieme *I* è composto soltanto da tre elementi: lo spostamento nullo (elemento neutro), la riflessione r_- , che porta π^+ in π^- , e la riflessione r_+ che, viceversa, porta π^- in π^+ . Ovviamente, r_- è l'inverso di r_+ ed r_+ è l'inverso di r_- .

9.1.2 Rotazioni piane

Esaminiamo l'insieme di spostamenti *II*, ponendo l'asse di rotazione lungo l'asse z di un riferimento $RC(x, y, z)$ cartesiano ortogonale destro. Le rotazioni sono allora spostamenti nel piano (x, y) ed il prodotto di due rotazioni è ancora una rotazione (vedi Esercizio 9.2). L'inverso di una rotazione di un angolo α è la rotazione dell'angolo $2\pi - \alpha$.

- ◊ **Esercizio:** Mostrare che il prodotto di due rotazioni piane attorno al medesimo asse è ancora una rotazione piana (di un angolo pari alla somma degli angoli, modulo 2π) e che tale prodotto è associativo.

Suggerimento: se il nuovo riferimento deve ruotare di un angolo α per sovrapporsi al vecchio, le nuove coordinate (x', y') sono date, in funzione delle vecchie (x, y) , dalla relazione:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{R}(\alpha) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

Far vedere che $\mathbf{R}(\alpha_1)\mathbf{R}(\alpha_2) = \mathbf{R}(\alpha_1 + \alpha_2) \dots$

(9.2)

9.1.3 Rotazioni piane, traslazioni e riflessioni

Investighiamo l'insieme III , gli spostamenti del quale comprendono le rotazioni attorno ad un asse fissato, ad esempio l'asse z (indicheremo con e_z il versore relativo) di un riferimento cartesiano ortogonale destro $RC(x, y, z)$, le traslazioni lungo l'asse e le riflessioni attraverso piani passanti per l'asse o normali ad esso. Un qualunque vettore x si decompone nella somma di un vettore x' parallelo al piano (x, y) e di un vettore lungo z .

Una riflessione attraverso un piano $z = z_0$ (normale all'asse) non altera x' , ma cambia z in $2z_0 - z$ e quindi inverte il la natura levogira del riferimento. La composizione di due riflessioni di questo tipo attraverso i piani $z = z_1$ e $z = z_2$ è una traslazione lungo l'asse di $2(z_2 - z_1)$.

Le riflessioni attraverso piani passanti per l'asse e le rotazioni sono spostamenti nel piano (x, y) . Considerato un generico piano passante per l'asse z , la normale a tale piano è un vettore parallelo al piano (x, y) , dato da $d = (d_1, d_2)$ con $d_1 = \cos \beta$ e $d_2 = \sin \beta$, e la riflessione attraverso tale piano fa passare dal vettore x' al vettore $x' - 2(x' \cdot d)d$ ed è rappresentata dalla matrice:

$$S(d) = \begin{pmatrix} 1 - 2d_1^2 & -2d_1d_2 \\ -2d_2d_1 & 1 - 2d_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos 2\beta & -\sin 2\beta \\ -\sin 2\beta & \cos 2\beta \end{pmatrix} , \quad (9.3)$$

il cui determinante è identicamente uguale a -1 , poiché la riflessione altera la natura levogira del riferimento.

Una rotazione attorno all'asse, in cui il nuovo riferimento deve ruotare di un angolo α per sovrapporsi al vecchio, è invece rappresentata dalla matrice di cui all'esercizio 9.2. Ne segue che la composizione di una rotazione e di una riflessione attraverso un piano per l'asse z è una riflessione della forma:

$$\begin{pmatrix} -\cos 2\beta & -\sin 2\beta \\ -\sin 2\beta & \cos 2\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(2\beta - \alpha) & -\sin(2\beta - \alpha) \\ -\sin(2\beta - \alpha) & \cos(2\beta - \alpha) \end{pmatrix} ,$$

ovvero è una riflessione con $\beta' = \beta - \alpha/2$. Il prodotto di due riflessioni attraverso due piani per l'asse z le cui normali formano angoli β_1 e β_2 rispetto ai

corrispondenti assi x è poi una rotazione attorno all'asse z :

$$\begin{pmatrix} -\cos 2\beta_1 & -\sin 2\beta_1 \\ -\sin 2\beta_1 & \cos 2\beta_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\cos 2\beta_2 & -\sin 2\beta_2 \\ -\sin 2\beta_2 & \cos 2\beta_2 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \cos 2(\beta_1 - \beta_2) & -\sin 2(\beta_1 - \beta_2) \\ \sin 2(\beta_1 - \beta_2) & \cos 2(\beta_1 - \beta_2) \end{pmatrix}$$

di un angolo $2(\beta_1 - \beta_2)$.

9.1.4 Rotazioni sferiche

Consideriamo l'insieme IV delle rotazioni sferiche attorno ad un punto fissato (ad esempio, l'origine del riferimento): una rotazione sferica è uno spostamento che lascia invariata la posizione di tale punto. Per individuare una rotazione sferica di uno spazio (i cui punti sono individuati dalle coordinate cartesiane (x, y, z) in un fissato riferimento RC) occorre specificare tre angoli, chiamati *angoli di Eulero* (una loro possibile definizione è richiamata nell'appendice 9.7), formati tra il riferimento nella posizione finale $RC'(x', y', z')$ ed RC . Il prodotto di due rotazioni sferiche è ovviamente una rotazione sferica (ancora nell'appendice, § 9.7.1, gli angoli di Eulero del prodotto sono ricavati in funzione dei corrispondenti angoli delle due rotazioni). Inoltre, effettuata una rotazione sferica di RC in RC' , ne esiste una che fa ritornare RC' in RC , la quale definisce quindi lo spostamento inverso, la cui definizione in termini di angoli di Eulero è discussa nell'Appendice 9.7. Le rotazioni sferiche formano quindi un gruppo, che prende il nome di $SO(3)$.

9.1.5 Rotazioni sferiche e riflessioni

L'ultimo insieme di spostamenti (V) comprende rotazioni sferiche attorno ad un punto fissato e riflessioni attraverso piani passanti per il centro delle rotazioni. Fissiamo il centro di rotazione nell'origine del riferimento ed esaminiamo i prodotti tra gli spostamenti nuovi appena introdotti.

Consideriamo la riflessione attraverso un piano di normale $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3)$ è il versore della normale al piano attraverso cui si effettua la riflessione, tale spostamento implica il passaggio da un vettore posizione \mathbf{x} ad un nuovo vettore $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{d})\mathbf{d}$, ne consegue la matrice (simmetrica) di trasformazione delle componenti:

$$S(\mathbf{d}) = \begin{pmatrix} 1 - 2d_1^2 & -2d_1d_2 & -2d_1d_3 \\ -2d_2d_1 & 1 - 2d_2^2 & -2d_2d_3 \\ -2d_3d_1 & -2d_3d_2 & 1 - 2d_3^2 \end{pmatrix}, \quad (9.4)$$

il cui determinante è -1 , poiché una riflessione altera la natura levogira del riferimento. Nell'appendice 9.8 è mostrato che componendo due riflessioni attraverso piani di normali \mathbf{d} ed \mathbf{e} , in generale distinte, si ottiene una rotazione,

di cui sono specificati gli angoli di Eulero in funzione delle componenti dei vettori \mathbf{d} ed \mathbf{e} , mentre componendo una rotazione ed una riflessione si ottiene una riflessione.

- ◊ **Esercizio:** Seguendo l'approccio utilizzato nell'appendice 9.8, mostrare che componendo una riflessione ed una rotazione si ottiene ancora una riflessione.

9.2 Le proprietà di simmetria

Utilizzando l'invarianza rispetto ai gruppi di spostamenti discussi nel paragrafo 9.1, dedurremo ora importanti informazioni circa la dipendenza funzionale dell'elemento $Q_{i_1, i_2, \dots, i_j}^{(j)}$ del tensore di ordine j $\mathbf{Q}^{(j)}$ dagli $m - 1$ punti $\mathbf{x}'^{(1)}, \mathbf{x}'^{(2)}, \dots, \mathbf{x}'^{(m-1)}$. Per considerare la possibile ripetizione di tali punti all'interno della definizione di $Q_{i_1, i_2, \dots, i_j}^{(j)}$, introduceremo al solito l'insieme dei vettori $\mathbf{y}'^{(1)}, \mathbf{y}'^{(2)}, \dots, \mathbf{y}'^{(j)}$, costruito con i vettori $\mathbf{0}, \mathbf{x}'^{(1)}, \mathbf{x}'^{(2)}, \dots, \mathbf{x}'^{(m-1)}$.

Scorrendo l'elenco dei gruppi di spostamenti introdotti nel paragrafo 9.1, le dipendenze funzionali di $Q_{i_1, i_2, \dots, i_j}^{(j)}$ dagli $m - 1$ punti $\mathbf{x}'^{(1)}, \mathbf{x}'^{(2)}, \dots, \mathbf{x}'^{(m-1)}$ divengono via via più semplici, man mano che la simmetria richiesta diviene più stringente. Se $\mathbf{Q}^{(j)}$ verifica l'invarianza rispetto al gruppo V , ovvero ha la dipendenza funzionale più semplice, tale tensore si definisce *isotropo*, nonostante risulterebbe più naturale assegnare questa denominazione ad un tensore invariante rispetto al gruppo IV . Se $\mathbf{Q}^{(j)}$ verifica l'invarianza rispetto al gruppo III tale tensore si definisce *assialsimmetrico*, pur essendo di nuovo più naturale assegnare tale denominazione ai tensori invarianti rispetto al gruppo II .

La metodologia seguita per tradurre l'invarianza rispetto ai gruppi di spostamenti dal I al V in opportune forme funzionali della dipendenza di $Q_{i_1, i_2, \dots, i_j}^{(j)}$ dagli $m - 1$ punti $\mathbf{x}'^{(1)}, \mathbf{x}'^{(2)}, \dots, \mathbf{x}'^{(m-1)}$ è stata suggerita da Robertson nel 1940 [4] e prevede di scorrere l'elenco in verso opposto, partendo con l'imporre l'invarianza rispetto al gruppo di spostamenti V e risalendo via via fino all'invarianza rispetto al gruppo di spostamenti I .

9.2.1 Rotazioni sferiche e riflessioni

Supponiamo di aver valutato la correlazione (8.20) per una certa configurazione degli m punti $\mathbf{x}'^{(1)}, \mathbf{x}'^{(2)}, \dots, \mathbf{x}'^{(m-1)}$ (e quindi dei j punti $\mathbf{y}'^{(1)}, \mathbf{y}'^{(2)}, \dots, \mathbf{y}'^{(j)}$) utilizzando j componenti del campo di velocità lungo j direzioni $\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{a}^{(2)}, \dots, \mathbf{a}^{(j)}$ specificate (con $|\mathbf{a}^{(i)}| = 1$ per $i = 1, 2, \dots, j$):

$$\tilde{Q}^{(j)}(\mathbf{y}'^{(1)}, \dots, \mathbf{y}'^{(j)} | \mathbf{a}^{(1)}, \dots, \mathbf{a}^{(j)}) = \langle \mathbf{u}(\mathbf{y}'^{(1)}) \cdot \mathbf{a}^{(1)} \cdot \dots \cdot \mathbf{u}(\mathbf{y}'^{(j)}) \cdot \mathbf{a}^{(j)} \rangle . \quad (9.5)$$

Osserviamo che le direzioni $\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{a}^{(2)}, \dots, \mathbf{a}^{(j)}$ possono non essere distinte e coincidere, occasionalmente, con quelle coordinate del riferimento scelto. La correlazione (9.5) è ovviamente esprimibile in termini della definizione (8.20), cioè della correlazione fatta lungo le direzioni coordinate, mediante la relazione seguente:

$$\tilde{Q}^{(j)}(\mathbf{y}'^{(1)}, \dots, \mathbf{y}'^{(j)} | \mathbf{a}^{(1)}, \dots, \mathbf{a}^{(j)}) = a_{i_1}^{(1)} \cdot \dots \cdot a_{i_j}^{(j)} Q_{i_1 \dots i_j}^{(j)}(\mathbf{y}'^{(1)}, \dots, \mathbf{y}'^{(j)}), \quad (9.6)$$

che evidenzia la natura *lineare* ed *omogenea* della dipendenza di $\tilde{Q}^{(j)}$ delle componenti dei versori $\mathbf{a}^{(i)}$.

L'invarianza rispetto a spostamenti appartenenti al gruppo V della correlazione (9.5) impone dei vincoli alla correlazione $\tilde{Q}^{(j)}$, che in tal caso assume una forma chiamata *isotropa*. Al fine di identificare tali restrizioni, operiamo sull'insieme di vettori:

$$S = \{ \mathbf{x}'^{(1)}, \mathbf{x}'^{(2)}, \dots, \mathbf{x}'^{(m-1)} | \mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{a}^{(2)}, \dots, \mathbf{a}^{(j)} \} \quad (9.7)$$

uno spostamento² del gruppo V . Osserviamo che uno spostamento di questo tipo conserva i moduli dei vettori (9.7) ed anche i valori assoluti degli angoli tra due qualunque di tali vettori, ovvero il loro prodotto scalare. Quindi la correlazione (9.6) deve essere funzione di tutti i possibili prodotti scalari tra i vettori dell'insieme (9.7). Inoltre, ogni riflessione cambia il segno dei volumi orientati di tutti i possibili parallelepipedi costruiti con tre vettori qualunque ($\mathbf{w}^{(1)}, \mathbf{w}^{(2)}, \mathbf{w}^{(3)} \in S$) scelti tra quelli dell'elenco (9.7):

$$V(\mathbf{w}^{(1)}, \mathbf{w}^{(2)}, \mathbf{w}^{(3)}) = \mathbf{w}^{(1)} \cdot \mathbf{w}^{(2)} \times \mathbf{w}^{(3)} = \begin{vmatrix} w_1^{(1)} & w_2^{(1)} & w_3^{(1)} \\ w_1^{(2)} & w_2^{(2)} & w_3^{(2)} \\ w_1^{(3)} & w_2^{(3)} & w_3^{(3)} \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} w_i^{(1)} w_j^{(2)} w_k^{(3)}. \quad (9.8)$$

La correlazione (9.6) non può allora dipendere dai prodotti misti³ (9.8) tra vettori dell'insieme (9.7).

² Osserviamo che, essendo il campo random $\mathbf{u}(x)$ statisticamente omogeneo, non è necessario specificare la posizione del centro di rotazione.

³ I prodotti tra volumi orientati possono essere espressi in funzione di opportuni prodotti scalari tra i vettori dell'insieme S (9.7). Infatti, utilizzando la formula di decomposizione (8.44), il prodotto dei due volumi $V(\mathbf{w}'^{(1)}, \mathbf{w}'^{(2)}, \mathbf{w}'^{(3)})$ e $V(\mathbf{w}''^{(1)}, \mathbf{w}''^{(2)}, \mathbf{w}''^{(3)})$ si può esprimere come:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{w}'^{(1)}, \mathbf{w}'^{(2)}, \mathbf{w}'^{(3)}) V(\mathbf{w}''^{(1)}, \mathbf{w}''^{(2)}, \mathbf{w}''^{(3)}) &= \\ &= \varepsilon_{ijk} w'_i^{(1)} w'_j^{(2)} w'_k^{(3)} \varepsilon_{pqr} w''_p^{(1)} w''_q^{(2)} w''_r^{(3)} \\ &= (\delta_{ip}\delta_{jq}\delta_{kr} + \delta_{iq}\delta_{jr}\delta_{kp} + \delta_{ir}\delta_{jp}\delta_{kq} - \delta_{ip}\delta_{jr}\delta_{kq} - \delta_{iq}\delta_{jp}\delta_{kr} - \delta_{ir}\delta_{jq}\delta_{kp}) \times \\ &\quad \times w'_i^{(1)} w''_p^{(1)} w'_j^{(2)} w''_q^{(2)} w'_k^{(3)} w''_r^{(3)} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}, \end{aligned}$$

Ne segue che la correlazione $\tilde{Q}^{(j)}(\mathbf{y}'^{(1)}, \dots, \mathbf{y}'^{(j)} | \mathbf{a}^{(1)}, \dots, \mathbf{a}^{(j)})$ deve essere una funzione di tutti i prodotti scalari tra i vettori dell'insieme S (9.7), *lineare* ed *omogenea* nelle componenti di tutti i versori $\mathbf{a}^{(i)}$ per $i = 1, 2, \dots, j$. Sarà allora somma di tutti i possibili termini del tipo:

$$F(\mathbf{y}'^{(1)} \cdot \mathbf{y}'^{(1)}, \mathbf{y}'^{(1)} \cdot \mathbf{y}'^{(2)}, \dots, \mathbf{y}'^{(j)} \cdot \mathbf{y}'^{(j)}) \mathbf{y}'^{(1)} \cdot \mathbf{a}^{(1)} \mathbf{a}^{(2)} \cdot \mathbf{a}^{(3)} \dots \mathbf{y}'^{(j)} \cdot \mathbf{a}^{(j)}$$

lineare ed omogenea nelle componenti dei versori $\mathbf{a}^{(j)}$. Ricordando il legame (9.6), a questo termine in $\tilde{Q}^{(j)}(\mathbf{y}'^{(1)}, \dots, \mathbf{y}'^{(j)} | \mathbf{a}^{(1)}, \dots, \mathbf{a}^{(j)})$ corrisponderà un termine nella componente i_1, \dots, i_j del tensore $\mathbf{Q}^j(\mathbf{y}'^{(1)}, \dots, \mathbf{y}'^{(j)})$ dato da:

$$F(\mathbf{y}'^{(1)} \cdot \mathbf{y}'^{(1)}, \mathbf{y}'^{(1)} \cdot \mathbf{y}'^{(2)}, \dots, \mathbf{y}'^{(j)} \cdot \mathbf{y}'^{(j)}) y_{i_1}^{(1)} \delta_{i_2 i_3} \dots y_{i_j}^{(j)}.$$

Per $m = 2$ ed $\mathbf{x}'^{(1)} = \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{r}$ otteniamo, ad esempio:

$$\begin{aligned} Q_{i_1 i_2}^{(2)}|_V(\mathbf{r}) &= A r_{i_1} r_{i_2} + B \delta_{i_1 i_2} \\ Q_{i_1 i_2 i_3}^{(3)}|_V(\mathbf{r}) &= A r_{i_1} r_{i_2} r_{i_3} + B r_{i_1} \delta_{i_2 i_3} + C r_{i_2} \delta_{i_1 i_3} + D r_{i_3} \delta_{i_1 i_2} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (9.9)$$

con A, B, C, D, \dots funzioni *pari* di $r = |\mathbf{r}|$, ovvero funzioni di $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r^2$. Il pedice “ V ” sta ad indicare che questa forma tensoriale è invariante rispetto al gruppo di spostamenti V , nell'elenco (9.1). Notare infine che il tensore isotropo del secondo ordine è intrinsecamente simmetrico.

La corrispondente forma isotropa del tensore del primo ordine ha senso solo se si considera la correlazione tra il campo di vettori $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ ed almeno un campo scalare $s = s(\mathbf{x})$. In tal caso abbiamo, posto al solito $\mathbf{x}'^{(1)} = \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{r}$, $\mathbf{Q}^{(1)}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}^{(1)}) s(\mathbf{x}^{(2)}) \rangle$ e la forma predetta si scrive:

$$Q_i^{(1)}|_V(\mathbf{r}) = A r_i, \quad (9.10)$$

con A funzione pari di r . Un esempio importante di tensore isotropo del primo ordine è il tensore di correlazione velocità-pressione $\langle \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) p(\mathbf{x}) \rangle$.

◊ **Esercizio:** Scrivere la forma isotropa dei tensori di correlazione a due punti di ordine 4 e 5.

I tensori di correlazione omogenei ed isotropi a tre punti ($m = 3$) si scrivono in termini dei vettori separazione $\mathbf{x}'^{(1)} = \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{r}^{(1)}$ ed $\mathbf{x}'^{(2)} = \mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{r}^{(2)}$:

$$Q_{i_1 i_2 i_3}^{(3)}|_V(\mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{r}^{(2)}) = \text{termini in } r_{i_1}^{(\alpha)} r_{i_2}^{(\beta)} r_{i_3}^{(\gamma)} + \text{termini in } r_{i_q}^{(\alpha)} \delta_{i_r i_s}$$

$$Q_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{(4)}|_V(\mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{r}^{(2)}) = \text{termini in } r_{i_1}^{(\alpha)} r_{i_2}^{(\beta)} r_{i_3}^{(\gamma)} r_{i_4}^{(\delta)} +$$

in cui $\mathbf{w}'^{(i)} \cdot \mathbf{w}''^{(j)} = a_{ij}$ per $i, j = 1, 2, 3$. Per questo motivo non si considerano tali prodotti tra volumi orientati nelle possibili dipendenze della correlazione (9.6).

$$\begin{aligned}
& + \text{termini in } r_{i_p}^{(\alpha)} r_{i_q}^{(\beta)} \delta_{i_r i_s} + \\
& + \text{termini in } \delta_{i_p i_q} \delta_{i_r i_s} \\
& \vdots
\end{aligned} \tag{9.11}$$

in cui gli indici greci variano nell'insieme $\{1, 2\}$ e possono essere uguali, mentre i latini sono tutti distinti ed appartengono all'insieme $\{1, \dots, j\}$. Inoltre, i coefficienti dipendono da $\mathbf{r}^{(1)} \cdot \mathbf{r}^{(1)}$, $\mathbf{r}^{(1)} \cdot \mathbf{r}^{(2)}$ ed $\mathbf{r}^{(2)} \cdot \mathbf{r}^{(2)}$. A questo punto è quindi chiara la struttura che l'ipotesi di isotropia induce sul tensore di correlazione $\mathbf{Q}^{(j)}$ di ordine j .

9.2.2 Rotazioni sferiche

Si può allora risalire di un gradino la scala delle richieste di simmetria, ovvero passare dal gruppo di spostamenti V al gruppo IV nell'elenco (9.1) abbandonando la richiesta di invarianza rispetto alle riflessioni. Questa rinuncia implica che si deve considerare la dipendenza, oltre che dai prodotti scalari tra due qualunque dei vettori nell'insieme S (9.7), anche dai volumi orientati (9.8) di parallelepipedi costruiti su terne di vettori in S . La struttura del tensore del primo ordine rimane la medesima (9.10), già esaminata nel precedente paragrafo. Invece, nella forma funzionale (9.9) delle correlazioni a due punti ($m = 2$, con $\mathbf{x}'^{(1)} = \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{r}$) appare il simbolo di Ricci:

$$\begin{aligned}
Q_{i_1 i_2}^{(2)} \mid_{IV} (\mathbf{r}) &= Q_{i_1 i_2}^{(2)} \mid_V (\mathbf{r}) + A r_k \varepsilon_{k i_1 i_2} \\
Q_{i_1 i_2 i_3}^{(3)} \mid_{IV} (\mathbf{r}) &= Q_{i_1 i_2 i_3}^{(3)} \mid_V (\mathbf{r}) + \text{termini in } r_{i_p} r_k \varepsilon_{k i_q i_s} + A \varepsilon_{i_1 i_2 i_3} \\
& \vdots
\end{aligned} \tag{9.12}$$

in cui gli indici p, q ed s sono sempre distinti ed appartengono all'insieme $\{1, 2, 3\}$ ed i coefficienti dipendono da $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r^2$, ovvero sono funzioni *pari* di r . I tensori di correlazione omogenei ed invarianti rispetto al gruppo IV a tre punti ($m = 3$) si scrivono in termini dei vettori separazione $\mathbf{x}'^{(1)} = \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{r}^{(1)}$ ed $\mathbf{x}'^{(2)} = \mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{r}^{(2)}$ nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
Q_{i_1 i_2 i_3}^{(3)} \mid_{IV} (\mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{r}^{(2)}) &= Q_{i_1 i_2 i_3}^{(3)} \mid_V (\mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{r}^{(2)}) + \\
& + \text{termini in } r_{i_p}^{(\alpha)} r_k^{(\beta)} \varepsilon_{k i_q i_s} + \\
& + \text{termini in } r_{i_p}^{(\alpha)} r_{i_q}^{(\beta)} r_k^{(\gamma)} r_h^{(\delta)} \varepsilon_{k h i_s} + A \varepsilon_{i_1 i_2 i_3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{(4)} \mid_{IV} (\mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{r}^{(2)}) &= Q_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{(4)} \mid_V (\mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{r}^{(2)}) + \\
& + \text{termini in } r_{i_p}^{(\alpha)} \varepsilon_{i_l i_q i_s} + \\
& + \text{termini in } r_{i_p}^{(\alpha)} r_{i_l}^{(\beta)} r_k^{(\gamma)} \varepsilon_{k i_q i_s} +
\end{aligned} \tag{9.13}$$

$$+ \text{termini in } r_{i_p}^{(\alpha)} r_{i_l}^{(\beta)} r_{i_q}^{(\gamma)} r_k^{(\delta)} r_h^{(\mu)} \varepsilon_{khi_s}$$

$$\vdots$$

in cui gli indici greci (α, β, γ e δ) appartengono all'insieme $\{1, 2\}$ e possono essere uguali, mentre quelli latini (p, l, q ed s) appartengono all'insieme $\{1, \dots, j\}$ e sono diversi. Confrontando le forme funzionali (9.12, 9.13) rispettivamente con le (9.9, 9.11) si nota subito la maggiore complessità, particolarmente nel caso dei tensori a tre punti.

- ◊ **Esercizio:** Scrivere la forma invariante per rotazioni sferiche dei tensori di correlazione a due punti di ordine 4 e 5.

9.2.3 Rotazioni piane e riflessioni

Risalendo ancora di un gradino nell'elenco (9.1) dei possibili gruppi di spostamenti rispetto ai quali richiedere l'invarianza, arriviamo al caso di tensori assialsimmetrici (*III* gruppo). Il modo più semplice di individuare la struttura di questi tensori consiste nel ripartire dalle forme funzionali dei tensori isotropi esaminate nel paragrafo 9.2.1.

Indichiamo con $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ il versore della direzione dell'asse di simmetria. Consideriamo, al solito, j versori $\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{a}^{(2)}, \dots, \mathbf{a}^{(j)}$ che occasionalmente possono coincidere con quelli delle direzioni coordinate. Osserviamo che il gruppo delle rotazioni piane attorno all'asse λ è quel sottogruppo del gruppo delle rotazioni (attorno ad un qualunque punto dell'asse) in cui ogni possibile prodotto scalare tra i vettori del seguente insieme:

$$S' = \{ \mathbf{x}'^{(1)}, \mathbf{x}'^{(2)}, \dots, \mathbf{x}'^{(m-1)}, \lambda \mid \mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{a}^{(2)}, \dots, \mathbf{a}^{(j)} \} \quad (9.14)$$

rimane invariato. Questa richiesta garantisce che l'inclinazione di ogni retta rispetto all'asse non varia, ovvero che lo spostamento è una rotazione attorno a quest'ultimo. Considerata nuovamente la correlazione (9.5) questa sarà una funzione lineare ed omogenea delle componenti dei versori $\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{a}^{(2)}, \dots, \mathbf{a}^{(j)}$ per costruire la quale si dovranno utilizzare i prodotti scalari tra uno qualunque dei vettori $\mathbf{r}^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, m - 1$) ed i versori fissati, così come pure i prodotti scalari tra il versore λ dell'asse di rotazione ed i versori fissati ($\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{a}^{(2)}, \dots, \mathbf{a}^{(j)}$).

Limitiamo l'analisi ai tensori di correlazione a due punti ($m = 2$). Il tensore di correlazione a due punti di ordine 1 si scrive allora:

$$Q_i^{(1)} \Big|_{III}(\mathbf{r}) = Q_i^{(1)} \Big|_V(\mathbf{r}) + B \lambda_i, \quad (9.15)$$

in cui i coefficienti sono funzioni dei prodotti scalari $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r^2$ e $\mathbf{r} \cdot \lambda = r_\lambda$, non più funzioni *pari* di r . Le correlazioni a due punti ($m = 2$ e $\mathbf{x}'^{(1)} = \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{r}$) di ordine maggiore di 1 divengono invece:

$$\begin{aligned} Q_{i_1 i_2}^{(2)} \mid_{III} (\mathbf{r}) &= Q_{i_1 i_2}^{(2)} \mid_V (\mathbf{r}) + \text{termini in } \lambda_{i_p} r_{i_q} + C \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \\ Q_{i_1 i_2 i_3}^{(3)} \mid_{III} (\mathbf{r}) &= Q_{i_1 i_2 i_3}^{(3)} \mid_V (\mathbf{r}) + \text{termini in } \lambda_{i_p} r_{i_q} r_{i_s} + \text{termini in } \lambda_{i_p} \lambda_{i_q} r_{i_s} + \\ &\quad + E \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \lambda_{i_3} + \text{termini in } \lambda_{i_p} \delta_{i_q i_s} \\ &\vdots \end{aligned}$$

in cui gli indici p, q ed s appartengono all'insieme $\{1, \dots, j\}$ e sono tutti distinti. anche qui i coefficienti sono funzioni di r^2 ed r_λ .

9.2.4 Rotazioni piane

In modo analogo a quanto discusso nel passaggio dalla forma invariante rispetto al gruppo V alla forma invariante rispetto al IV nell'elenco (9.1), la rinuncia alla simmetria per riflessione comporta l'introduzione del simbolo alternante nelle precedenti forme (9.15, 9.16) dei tensori di correlazione a due punti di ordine 1, 2 e 3. Il tensore di ordine 1 diviene allora:

$$Q_i^{(1)} \mid_{II} (\mathbf{r}) = Q_i^{(1)} \mid_{III} (\mathbf{r}) + C \lambda_k r_l \varepsilon_{kli}, \quad (9.16)$$

in cui i coefficienti saranno funzioni di r^2 e di r_λ . I tensori di ordine maggiore di 1 hanno invece la forma seguente:

$$\begin{aligned} Q_{i_1 i_2}^{(2)} \mid_{II} (\mathbf{r}) &= Q_{i_1 i_2}^{(2)} \mid_{III} (\mathbf{r}) + \text{termini in } \lambda_k r_l r_{i_p} \varepsilon_{kli_q} + \\ &\quad + \text{termini in } \lambda_k \lambda_{i_p} r_l \varepsilon_{kli_q} + \text{termini in } \lambda_k \varepsilon_{ki_1 i_2} + \\ &\quad + \text{termini in } r_k \varepsilon_{ki_1 i_2} \end{aligned} \quad (9.17)$$

$$\begin{aligned} Q_{i_1 i_2 i_3}^{(3)} \mid_{II} (\mathbf{r}) &= Q_{i_1 i_2 i_3}^{(3)} \mid_{III} (\mathbf{r}) + F \varepsilon_{i_1 i_2 i_3} + \text{termini in } \lambda_k r_{i_p} \varepsilon_{ki_q i_s} + \\ &\quad + \text{termini in } \lambda_k \lambda_{i_p} \varepsilon_{ki_q i_s} + \text{termini in } r_k \lambda_{i_p} \varepsilon_{ki_q i_s} + \\ &\quad + \text{termini in } r_k r_{i_p} \varepsilon_{ki_q i_s} + \text{termini in } \lambda_k r_l r_{i_p} r_{i_q} \varepsilon_{klis} + \\ &\quad + \text{termini in } \lambda_k r_l \lambda_{i_p} r_{i_q} \varepsilon_{klis} + \text{termini in } \lambda_k r_l \lambda_{i_p} \lambda_{i_q} \varepsilon_{klis} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Come si vede facilmente confrontando le strutture dei tensori di correlazione ad un punto (9.16, 9.17) ottenute imponendo l'invarianza per rotazione piana con le corrispondenti strutture per i tensori invarianti per rotazione piana e riflessione (9.15, 9.16), la rinuncia all'invarianza per riflessione attraverso piani passanti per l'asse o normali ad esso comporta l'introduzione di molti nuovi termini legati ai simboli di Ricci nella struttura funzionale dei tensori di correlazione ad un punto. Ovviamente, una complicazione ancora maggiore si verifica per i tensori di correlazione a due punti.

9.2.5 Riflessioni

Infine, analizziamo la richiesta di invarianza rispetto al primo gruppo di trasformazioni nella lista (9.1). Essendo tale richiesta la meno restrittiva, la struttura dei corrispondenti tensori invarianti sarà la più complessa tra quelle finora

esaminate. Il gruppo I è costituito dalle riflessioni attraverso un piano fisso, la cui giacitura può essere individuata dai due vettori $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ e $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ non paralleli. Si impone che lo spostamento (riflessione attraverso il piano) non alteri l'orientamento di una qualsiasi retta rispetto alle due direzioni *linearmente indipendenti* λ e μ che individuano la giacitura del piano di simmetria.

Ne segue che il tensore di correlazione per il campo $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ di ordine j ad $m \leq j$ punti $\tilde{Q}^{(j)}(\mathbf{y}'^{(1)}, \dots, \mathbf{y}'^{(j)} | \mathbf{a}^{(1)}, \dots, \mathbf{a}^{(j)})$ deve essere funzione di tutti i prodotti scalari tra i vettori appartenenti all'insieme:

$$S'' = \{ \mathbf{x}'^{(1)}, \mathbf{x}'^{(2)}, \dots, \mathbf{x}'^{(m-1)}, \lambda, \mu | \mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{a}^{(2)}, \dots, \mathbf{a}^{(j)} \} \quad (9.18)$$

lineare ed omogenea rispetto alle componenti dei versori $\mathbf{a}^{(i)}$. Sulla base delle considerazioni precedenti il tensore di correlazione di ordine 1 deve essere una combinazione lineare omogenea nelle componenti del versore $\mathbf{a}^{(1)}$ e pertanto si scrive:

$$Q_i^{(1)}|_I(\mathbf{r}) = A r_i + B \lambda_i + C \mu_i, \quad (9.19)$$

in cui i coefficienti A , B e C sono funzioni di $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$, $\mathbf{r} \cdot \lambda$ e $\mathbf{r} \cdot \mu$, ovvero delle tre componenti del vettore \mathbf{r} . Le correlazioni a due punti ($m = 2$) di ordine j del campo random $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ devono essere una forma lineare ed omogenea nelle componenti dei versori $\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{a}^{(2)}, \dots, \mathbf{a}^{(j)}$. Scrivendo tutte le possibili combinazioni di prodotti scalari di vettori dell'insieme S'' (9.18) si determinano le seguenti forme funzionali:

$$\begin{aligned} Q_{i_1 i_2}^{(2)}|_I(\mathbf{r}) = & A r_{i_1} r_{i_2} + \text{termini in } r_{i_p} \lambda_{i_q} + \text{termini in } r_{i_p} \mu_{i_q} + \\ & + \text{termini in } \lambda_{i_p} \mu_{i_q} + B \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} + C \mu_{i_1} \mu_{i_2} + D \delta_{i_1 i_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{i_1 i_2 i_3}^{(3)}|_I(\mathbf{r}) = & A r_{i_1} r_{i_2} r_{i_3} + \text{termini in } \lambda_{i_p} r_{i_q} r_{i_s} + \\ & + \text{termini in } \mu_{i_p} r_{i_q} r_{i_s} + \text{termini in } \lambda_{i_p} \mu_{i_q} r_{i_s} + \\ & + \text{termini in } \lambda_{i_p} \lambda_{i_q} \mu_{i_s} + \text{termini in } \lambda_{i_p} \mu_{i_q} \mu_{i_s} + \\ & + B \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \lambda_{i_3} + C \mu_{i_1} \mu_{i_2} \mu_{i_3} + \\ & + \text{termini in } \lambda_{i_p} \delta_{i_q i_s} + \text{termini in } \mu_{i_p} \delta_{i_q i_s} + \\ & + \text{termini in } r_{i_p} \delta_{i_q i_s} \end{aligned} \quad (9.20)$$

⋮

in cui gli indici p , q ed s sono distinti ed appartengono all'insieme $\{1, 2, 3\}$. Anche qui i coefficienti nella (9.19) sono funzioni del vettore \mathbf{r} .

Abbiamo quindi esaminato le strutture dei tensori di correlazione nell'ipotesi di invarianza rispetto ai gruppi di spostamenti elencati in (9.1). È a questo punto necessario chiedersi cosa accade se non viene richiesta alcuna proprietà di invarianza. Si può dire anche in questo caso qualcosa circa la struttura della dipendenza funzionale dai vettori separazione $\mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{r}^{(2)}, \dots, \mathbf{r}^{(m-1)}$?

9.2.6 Assenza di simmetrie

Anche nel caso in cui sia assente una qualunque forma di invarianza rispetto ad un qualsiasi gruppo di spostamenti, le correlazioni del campo vettoriale random $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ devono comunque soddisfare la richiesta di trasformare come tensori (*tensorialità*). Quindi la dipendenza funzionale dai vettori separazione non può essere arbitraria.

La richiesta di tensorialità è esprimibile, in modo completamente equivalente, imponendo la simmetria rispetto ad uno spostamento nullo, ovvero simultaneamente rispetto a rotazioni sferiche, gruppo IV nell'elenco (9.1), ed alle riflessioni rispetto ad un piano individuato dalle due direzioni $\boldsymbol{\lambda}$ e $\boldsymbol{\mu}$ (non necessariamente $|\boldsymbol{\lambda}| = 1$ e $|\boldsymbol{\mu}| = 1$), gruppo I nell'elenco (9.1). Ovviamente, richiedendo l'invarianza rispetto ad uno spostamento nullo, non si impone alcuna altra condizione sulla forma del tensore di correlazione.

Trattiamo ad esempio il caso di un tensore di correlazione doppia ($j = 2$) a due punti ($m = 2$), indicando il vettore di separazione con \mathbf{r} . La struttura di tale tensore è definita in modo che per $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ si riduca al tensore invariante per rotazione, $Q_{i_1 i_2}^{(2)}|_{IV}$ (9.12) prima riga nell'equazione (9.21), mentre i termini aggiuntivi, contenenti $\boldsymbol{\lambda}$ e $\boldsymbol{\mu}$, risultano invarianti per riflessione (nella colonna a fianco c'è il numero di termini di ogni riga, riferito al caso in cui $i_1 \neq i_2$):

$$\begin{aligned} Q_{i_1 i_2}^{(2)}(\mathbf{r}) &= A r_{i_1} r_{i_2} + B \delta_{i_1 i_2} + C r_k \varepsilon_{k i_1 i_2} + & (3) \\ &+ \text{termini in } r_{i_p} \lambda_{i_q} + \text{termini in } r_{i_p} \mu_{i_q} + & (4) \\ &+ \text{termini in } \lambda_{i_p} \mu_{i_q} + D \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} + E \mu_{i_1} \mu_{i_2} + & (4) \\ &+ F \lambda_k \varepsilon_{k i_1 i_2} + G \mu_k \varepsilon_{k i_1 i_2} + H r_k \lambda_l \varepsilon_{k l i_p} r_{i_q} + & (4) \quad (9.21) \\ &+ I r_k \mu_l \varepsilon_{k l i_p} r_{i_q} + L r_k \lambda_l \varepsilon_{k l i_p} \lambda_{i_q} + M r_k \lambda_l \varepsilon_{k l i_p} \mu_{i_q} + & (6) \\ &+ N r_k \mu_l \varepsilon_{k l i_p} \lambda_{i_q} + O r_k \mu_l \varepsilon_{k l i_p} \mu_{i_q} + P \lambda_k \mu_l \varepsilon_{k l i_p} r_{i_q} + & (6) \\ &+ Q \lambda_k \mu_l \varepsilon_{k l i_p} \lambda_{i_q} + R \lambda_k \mu_l \varepsilon_{k l i_p} \mu_{i_q} & (4) \end{aligned}$$

in cui p e q sono indici distinti appartenenti all'insieme $\{1, 2\}$. I coefficienti dipendono dal vettore separazione \mathbf{r} .

Confrontando la struttura (9.21) del tensore di correlazione doppia con la corrispondente forma isotropa (9.9), si nota immediatamente come l'introduzione dell'ipotesi di isotropia consenta di passare da 31 a soli 2 termini, ovvero introduce una notevolissima semplificazione nella forma funzionale del tensore.

Altre possibili semplificazioni possono essere introdotte, in casi particolari, dalla definizione stessa del tensore di correlazione. Un esempio tipico è quello del tensore di correlazione d'ordine 3 ($j = 3$) a 2 punti ($m = 2$) per il campo vettoriale random $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, la cui componente (i_1, i_2, i_3) si scrive:

$$S_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{r}) = \langle u_{i_1}(\mathbf{x}) u_{i_2}(\mathbf{x}) u_{i_3}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle, \quad (9.22)$$

in cui abbiamo usato direttamente la definizione del vettore di separazione \mathbf{r} . Si osserva che, in base alla stessa definizione (9.22) della componente

(i_1, i_2, i_3) , il tensore risulta simmetrico nei primi due indici (i_1, i_2) . Se consideriamo la forma isotropa di tale tensore, sulla base delle considerazioni svolte nel paragrafo 9.2.1, la medesima componente (i_1, i_2, i_3) si scrive:

$$S_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{r}) = A r_{i_1} r_{i_2} r_{i_3} + B' r_{i_1} \delta_{i_2 i_3} + C' r_{i_2} \delta_{i_1 i_3} + D r_{i_3} \delta_{i_1 i_2}, \quad (9.23)$$

in cui i coefficienti A' , B' , C' e D' sono funzioni pari di r . Ora, utilizzando l'informazione sulla simmetria del tensore, abbiamo che scambiando l'indice i_1 con l'indice i_2 , il primo ed il quarto addendo ovviamente non cambiano, mentre il secondo termine (a meno del coefficiente B') diviene uguale al terzo (a meno di C'). Facendo allora la differenza tra $S_{i_1 i_2 i_3}$ ed $S_{i_2 i_1 i_3}$ si ottiene:

$$0 \equiv S_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{r}) - S_{i_2 i_1 i_3}(\mathbf{r}) = (B' - C') (r_{i_1} \delta_{i_2 i_3} - r_{i_2} \delta_{i_1 i_3}),$$

relazione che deve essere valida per ogni vettore separazione \mathbf{r} e per ogni terna di indici (i_1, i_2, i_3) . Ne segue $B' \equiv C'$ ed allora la forma isotropa del tensore \mathbf{S} si scrive:

$$S_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{r}) = A r_{i_1} r_{i_2} r_{i_3} + B (r_{i_1} \delta_{i_2 i_3} + r_{i_2} \delta_{i_1 i_3}) + D r_{i_3} \delta_{i_1 i_2}. \quad (9.24)$$

L'equazione (9.24) mostra che per conoscere l'intero tensore isotropo \mathbf{S} occorre determinare soltanto le tre funzioni *pari* di r denominate A , B e D . Vedremo nel seguito che se $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ è proprio il campo di velocità e se l'equazione di conservazione della massa si riduce proprio alla condizione di solenoidalità di tale campo ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$), sarà sufficiente conoscere una sola delle tre funzioni precedenti per determinare l'intero tensore isotropo.

9.3 Tensori isotropi solenoidali del primo ordine

Si può mostrare facilmente che tutti i tensori isotropi d'ordine 1 $\mathbf{Q}^{(1)}(\mathbf{r})$ regolari in $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ e solenoidali sono identicamente nulli. La forma isotropa di tali tensori è fornita nella equazione (9.10), essendo A una funzione pari di r . Indicando con A' la derivata di A in r , la condizione di divergenza nulla si scrive:

$$0 = \partial_{r_i} Q_i^{(1)} = (A' \partial_{r_i} r) r_i + A \partial_{r_i} r_i = r A' + 3A.$$

Questa condizione fornisce allora una equazione differenziale di Eulero per A , la quale ha soluzione $A \equiv 0$, oppure $A \propto r^{-3}$. La seconda soluzione è singolare per $r \rightarrow 0$, violando la regolarità del tensore nel punto $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Ne segue che il tensore è identicamente nullo.

Questa semplice considerazione giocherà un ruolo importante nella struttura di una equazione di evoluzione per le correlazioni doppie della velocità in condizioni isotrope, consentendo di eliminare la correlazione pressione-velocità $\langle p(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle$.

9.4 Forma isotropa del tensore di correlazione doppia della velocità

Analizziamo la struttura isotropa assunta del tensore di correlazione doppia della velocità, la cui componente (i, j) è data da $R_{ij}(\mathbf{r}) = \langle u_i(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle$. La dipendenza funzionale dalle componenti del vettore separazione \mathbf{r} è fornita nella prima relazione delle (9.9), che specializziamo nella:

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = F(r) r_i r_j + G(r) \delta_{ij} , \quad (9.25)$$

in cui F e G sono funzioni *pari* del modulo r del vettore separazione \mathbf{r} . Osserviamo che le dimensioni fisiche di F e di G sono differenti: F ha le dimensioni del quadrato di una frequenza, mentre G è il quadrato di una velocità. Facciamo vedere come, sulla base della condizione di solenoidalità del campo di velocità $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ si riesca a determinare l'intero tensore con una sola funzione scalare. La condizione di solenoidalità della velocità si traduce nella relazione:

$$0 \equiv \partial_{r_j} R_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{r_j}{r} F' r_i r_j + F \delta_{ij} r_j + F r_i 3 + \frac{r_j}{r} G' \delta_{ij} = \left(r F' + 4F + \frac{G'}{r} \right) r_i ,$$

in cui F' e G' indicano le derivate di F e G , rispettivamente, in r . La relazione precedente, dovendo essere verificata per ogni \mathbf{r} , fornisce l'equazione:

$$r F' + 4F + \frac{G'}{r} = 0 . \quad (9.26)$$

Dalla relazione (9.26) segue che in condizioni omogenee ed isotrope una sola funzione scalare determina l'intero tensore (9.25) di correlazione doppia della velocità.

È tradizione, soprattutto legata alla possibilità di effettuare misure sperimentali delle correlazioni doppie, di introdurre le due particolari correlazioni *longitudinale* e *trasversale* definite nel modo seguente. Si considera il versore $\hat{\mathbf{r}}$ della direzione del vettore di separazione \mathbf{r} ($\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$), insieme ad uno qualunque degli infiniti versori ad esso ortogonali $\hat{\mathbf{r}}^\perp$ (qui si utilizza nuovamente l'ipotesi di isotropia). Si definiscono allora le due componenti di velocità: *parallela* $\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{r}} = u_p$ e *trasversale* $\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{r}}^\perp = u_n$ (cfr. Fig. 9.1) e con esse le correlazioni:

$$\begin{aligned} \text{longitudinale: } & \langle u_p(\mathbf{x}) u_p(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle \\ \text{trasversale: } & \langle u_n(\mathbf{x}) u_n(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle . \end{aligned}$$

che, introdotta la velocità quadratica media:

$$u^2 = \frac{1}{3} \langle u_i(\mathbf{x}) u_i(\mathbf{x}) \rangle = \langle u_p(\mathbf{x}) u_p(\mathbf{x}) \rangle = \langle u_n(\mathbf{x}) u_n(\mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{3} R_{ii}(\mathbf{0}) , \quad (9.27)$$

consentono di definire le seguenti due funzioni *adimensionali* di r :

$$f(r) = \frac{\langle u_p(\mathbf{x}) u_p(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle}{u^2} , \quad g(r) = \frac{\langle u_n(\mathbf{x}) u_n(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle}{u^2} , \quad (9.28)$$

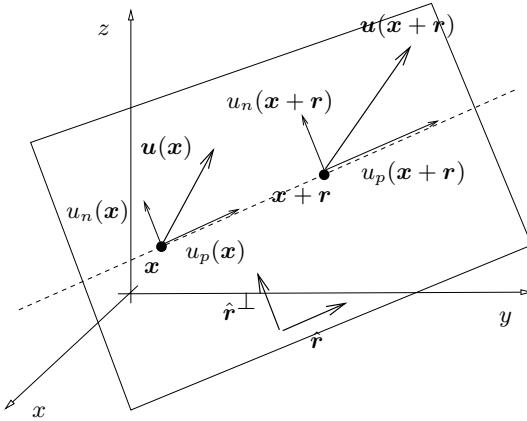


Figura 9.1. Costruzione delle componenti parallele (u_p) ed ortogonali (u_n) delle velocità in x ed in $x + r$. Definito il versore di r (\hat{r}) ed uno tra gli infiniti versori ortogonali ad r (\hat{r}^\perp) si definiscono le componenti $u_p(x) = \mathbf{u}(x) \cdot \hat{r}$, $u_n(x) = \mathbf{u}(x) \cdot \hat{r}^\perp$ ed $u_p(x + r) = \mathbf{u}(x + r) \cdot \hat{r}$, $u_n(x + r) = \mathbf{u}(x + r) \cdot \hat{r}^\perp$.

denominate *coefficienti di correlazione longitudinale* (f) e *trasversale* (g). Il legame tra le funzioni f e g (9.28) ed il tensore di correlazione delle velocità si ricava facilmente dalla forma isotropa (9.25):

$$\begin{aligned} u^2 f(r) &= \hat{r}_i \hat{r}_j R_{ij}(r) = r^2 F + G \\ u^2 g(r) &= \hat{r}_i^\perp \hat{r}_j^\perp R_{ij}(r) = G, \end{aligned} \quad (9.29)$$

dalle quali risulta che, essendo F e G funzioni *pari* di r , anche f e g sono funzioni *pari* di r . Le relazioni (9.29) possono essere viste come un sistema lineare nelle funzioni F e G . Risolvendo tale sistema otteniamo $F = u^2(f - g)/r^2$ e $G = u^2g$, ovvero:

$$\boxed{R_{ij}(r) = u^2 \left\{ [f(r) - g(r)] \frac{\hat{r}_i \hat{r}_j}{r^2} + g(r) \delta_{ij} \right\}} \quad (9.30)$$

Dal vincolo di continuità (9.26) segue allora il legame tra f e g :

$$g = f + \frac{r}{2}, \quad f' = \frac{1}{2r} \frac{d}{dr}(r^2 f). \quad (9.31)$$

Nell'ipotesi che f e g decadano esponenzialmente all'infinito, dall'equazione (9.31) segue anche il legame tra il momento m -esimo di g ed il corrispondente momento di f :

$$\int_0^{+\infty} dr r^m g(r) = \int_0^{+\infty} r^m f(r) + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} dr r^{m+1} f'(r)$$

$$= -\frac{m-1}{2} \int_0^{+\infty} dr r^m f(r) . \quad (9.32)$$

Ne segue in particolare che il momento primo di g è nullo e quindi necessariamente $g(r)$ deve essere negativa in un opportuno intervallo. Un grafico indicativo degli andamenti delle funzioni $f(r)$ e $g(r)$ è riportato in Fig. 9.2. Chiamando con A il centro di figura del dominio sotteso tra l'arco a valori positivi della curva $g = g(r)$ (di area $G_A > 0$) e l'asse delle r e con B l'analogo punto per la parte a valori negativi (di area $G_B < 0$), il fatto che il momento del primo ordine di g è nullo si traduce nella richiesta che risulti nulla la somma $r_A G_A + r_B G_B$, se r_A ed r_B sono le coordinate r dei punti A e B .

I momenti di ordine 0 delle funzioni di correlazione (9.28) consentono di definire le scale integrali:

$$L_p = \int_0^{+\infty} dr f(r) \text{ longitudinale}, \quad L_n = \int_0^{+\infty} dr g(r) = \frac{L_p}{2} \text{ trasversale}, \quad (9.33)$$

come segue dall'equazione di continuità (9.31). Le due lunghezze (9.33) fornendo una indicazione della distanza massima alla quale due componenti longitudinali o trasversali di velocità risultano essere correlate.

È utile dare ora qualche informazione in più sulle funzioni f e g . Innanzitutto dalla definizione (9.28) è evidente che $f(0) = g(0) = 1$. Essendo poi f e g funzioni *pari* di r e tenendo conto del legame (9.31) si hanno gli sviluppi di McLaurin:

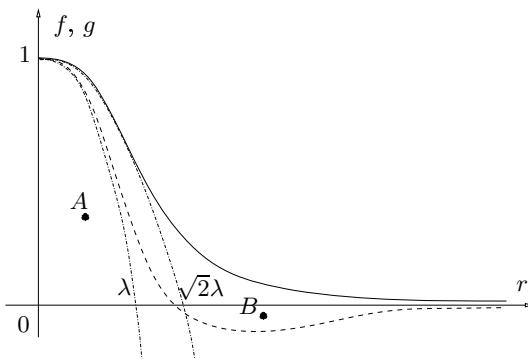


Figura 9.2. Funzioni di correlazione longitudinale $f = f(r)$ (linea continua) e trasversale $g = g(r)$ (tratteggiata). Con linee a tratto e punto sono disegnate le parabole osculatrici alle due curve nel punto $r = 0$ (per la curva $f = f(r)$ tale parabola intercetta l'asse delle r in $r = \sqrt{2}\lambda$, mentre per la curva $g = g(r)$ in $r = \lambda$) ottenute dagli sviluppi (9.36) trascurando tutti i termini di ordine maggiore di 2. Con due punti sono rappresentati i centri di figura dei domini sottesi dalla curva $g = g(r)$ al di sopra (A) ed al di sotto (B) dell'asse delle r .

$$f(r) = 1 + \frac{r^2}{2} f''(0) + O(r^4), \quad g(r) = 1 + r^2 f''(0) + O(r^4). \quad (9.34)$$

Procedendo come si è fatto nel paragrafo 8.2 per ottenere la (8.23), in base alla omogeneità del campo random $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, abbiamo anche che $|f(r)| \leq 1$ e $|g(r)| \leq 1$. Come è ovvio dal significato fisico delle correlazioni, i coefficienti di correlazione raggiungono il loro valore massimo assoluto in $r = 0$, dove vale la $f(0) = g(0) = 1$. Ne segue che $f''(0) < 0$ e $g''(0) = 2f''(0) < 0$ ed usualmente si definisce la *lunghezza di dissipazione* λ nel modo seguente:

$$f''(0) = -\frac{1}{\lambda^2}, \quad (9.35)$$

che consente di riscrivere gli sviluppi (9.34):

$$f(r) = 1 - \frac{1}{2} \frac{r^2}{\lambda^2} + O(r^4), \quad g(r) = 1 - \frac{r^2}{\lambda^2} + O(r^4). \quad (9.36)$$

La lunghezza di dissipazione λ è in particolare legata alla vorticità quadratica media. Essendo quest'ultima una misura dell'energia cinetica dissipata $\bar{\varepsilon}$, come verrà chiarito nel seguito (10.16), ne segue che λ è connessa all'energia dissipata e questo spiega la denominazione. Non va però confusa con la scala a cui avviene la dissipazione (lunghezza di Kolmogorov, $\eta = \nu^{3/4}/\bar{\varepsilon}^{1/4}$). Ricordando la relazione (8.46) del capitolo precedente ed utilizzando la relazione (9.30) e gli sviluppi (9.36) abbiamo infatti:

$$w_{ii}(\mathbf{r}) = -\nabla^2 R_{mm}(\mathbf{r}) = -u^2 \nabla^2(f + 2g) = \frac{5}{2} \frac{u^2}{\lambda^2} \nabla^2 r^2 + O(r^2).$$

Poiché $\nabla^2 r^2 = \partial_{r_i}(2r_i) = 6$ valutando la relazione precedente in $\mathbf{r} = \mathbf{0}$: $\overline{\omega_i(\mathbf{x})\omega_i(\mathbf{x})} = w_{ii}(\mathbf{0}) = 15 u^2/\lambda^2$ e ricordando la definizione di (8.50) L , si vede facilmente che λ è proporzionale ad L , ovvero: $\lambda = \sqrt{5} L$.

Considerazioni del tutto parallele possono essere condotte per il tensore spettro di energia Φ_{ij} del quale si assume l'isotropia:

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = A(k)k_i k_j + B(k)\delta_{ij}, \quad (9.37)$$

con $A(k)$ e $B(k)$ funzioni *pari*. La continuità viene quindi imposta nella forma:

$$k_j \Phi_{ij} = Ak^2 k_i + B k_i = (Ak^2 + B)k_i = 0$$

e consente di stabilire il legame $B(k) = -k^2 A(k)$. La funzione $A(k)$ può a sua volta essere agevolmente ricollegata alla funzione spettro d'energia $E(k)$:

$$\begin{aligned} E(k) &= \frac{1}{2} \Psi_{ii}(\mathbf{k}) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\partial B_k(\mathbf{0})} dS(\mathbf{k}) \Phi_{ii}(\mathbf{k}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4\pi k^2 \cdot (Ak^2 + 3B) = -4\pi k^4 A, \end{aligned}$$

da cui segue che $A(k) = -E(k)/(4\pi k^4)$. Ma allora la componente (i, j) del tensore spettro di energia $\Phi_{ij}(k)$ diviene:

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{E(k)}{4\pi k^2} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right). \quad (9.38)$$

Utilizzando il fatto che le due funzioni $r S_{ij}(r)$ e $\Psi_{ij}(k)/k$ sono legate dalla trasformata di Fourier col seno (cfr. (8.31) e (8.32) del capitolo precedente), si può determinare la relazione tra la funzione spettro d'energia $E(k)$ e la traccia di del tensore correlazione doppia della velocità, ovvero R_{ii} :

$$\frac{1}{2} R_{ii}(\mathbf{r}) = \frac{u^2}{2} [rf'(r) + 3f(r)] := R(r), \quad (9.39)$$

la quale evidenzia che, in condizioni isotrope, la traccia del tensore di correlazione dipende solo dal modulo r del vettore separazione \mathbf{r} . Ma allora $rS_{ii}(r) = 2rR(r)$, ed essendo $\Psi_{ii}(k)/k = 2E(k)/k$, per confronto otteniamo che $rR(r)$ è la trasformata di Fourier col seno di $E(k)/k$. Ciò giustifica la presenza del fattore $1/2$ nella definizione (9.39) della funzione $R(r)$. Utilizzando il secondo membro della medesima relazione (9.39) otteniamo allora il legame diretto tra la funzione di correlazione longitudinale $f(r)$ e la funzione spettro di energia $E(k)$. Integrando per parti otteniamo:

$$\frac{1}{k} E(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} dr rR(r) \sin kr = \frac{u^2}{\pi} \int_0^{+\infty} dr (r \sin kr - kr^2 \cos kr) f(r),$$

da cui segue, in definitiva, il legame:

$$E(k) = \frac{u^2}{\pi} \int_0^{+\infty} dr k^2 r^2 \left(\frac{\sin kr}{kr} - \cos kr \right) f(r). \quad (9.40)$$

In modo simmetrico, partendo dalla antitrasformata di Fourier col seno della funzione $E(k)/k$:

$$rR(r) = \int_0^{+\infty} dk ds \frac{E(k)}{k} \sin kr,$$

moltiplicando per r ambo i membri:

$$\frac{u^2}{2} [3r^2 f(r) + r^3 f'(r)] = \frac{u^2}{2} \frac{d}{dr} [r^3 f(r)] = r \int_0^{+\infty} dk E(k) \frac{\sin kr}{k}$$

ed integrando in r perveniamo alla relazione inversa rispetto alla (9.40):

$$u^2 f(r) = 2 \int_0^{+\infty} dk \frac{1}{k^2 r^2} \left(\frac{\sin kr}{kr} - \cos kr \right) E(k). \quad (9.41)$$

I legami (9.40, 9.41) consentono anche di scrivere i momenti della funzione di correlazione longitudinale $f = f(r)$ e della funzione spettro di energia $E = E(k)$ in termini delle derivate in $k = 0$ di E ed in $r = 0$ di f , rispettivamente. Alcuni dettagli sono riportati nella Appendice 9.9.

9.5 Forma isotropa del tensore di correlazione della vorticità

Il tensore spettro di vorticità $\Omega_{ij}(\mathbf{k})$ è legato al tensore spettro di energia $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$ dalla (8.48). Come è già stato anticipato nel capitolo precedente, la semplice relazione $\Omega_{ii}(\mathbf{k}) = k^2 \Phi_{ii}(\mathbf{k})$, valida per le sole tracce dei due tensori nel caso generale (8.49), è estesa ai due tensori, componente per componente, nel caso isotropo. Questo può essere mostrato partendo dal legame (8.49), in cui si inserisce la forma isotropa del tensore spettro d'energia data dalla (9.38):

$$\Omega_{ij}(\mathbf{k}) = (\delta_{ij}k^2 - k_i k_j) \frac{E(k)}{4\pi k^2} 2 - k^2 \frac{E(k)}{4\pi k^2} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) = k^2 \Phi_{ij}(\mathbf{k}).$$

Nel caso di turbolenza omogenea ed isotropa il tensore di correlazione delle vorticità, la cui componente (i, j) è stata definita come $w_{ij}(\mathbf{r})$ nel § 8.4, può essere scritto utilizzando la sola funzione di correlazione longitudinale $f(r)$, sulla base del legame (8.45) tra correlazione doppia della velocità e w_{ij} . Valutate le derivate:

$$\begin{aligned} \nabla_r^2 R_{mm} &= u^2 \left(\frac{8}{r} f' + 7f'' + rf''' \right) \\ \partial_{r_i r_j} R_{mm} &= u^2 \left[\frac{1}{r} (4f' + rf'') \delta_{ij} + \left(rf''' + 4f'' - \frac{4}{r} f' \right) \frac{r_i r_j}{r^2} \right] \\ \nabla_r^2 R_{ji} &= u^2 \left[\left(-\frac{r}{2} f''' - 2f'' + \frac{2}{r} f' \right) \frac{r_i r_j}{r^2} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{r}{2} f''' + 3f'' + \frac{2}{r} f' \right) \delta_{ij} \right], \end{aligned}$$

queste vengono sostituite nella relazione generale (8.45), ottenendo in tal modo:

$$w_{ij}(\mathbf{r}) = u^2 \left[\left(\frac{r}{2} f''' + 2f'' - \frac{2}{r} f' \right) \frac{r_i r_j}{r^2} - \left(\frac{r}{2} f''' + 4f'' + \frac{2}{r} f' \right) \delta_{ij} \right]. \quad (9.42)$$

9.6 Forma isotropa del tensore di correlazione tripla della velocità

La forma isotropa della correlazione di velocità $Q_{ijl}^{(3)}(\mathbf{r})$ d'ordine 3 a 2 punti: $S_{ijl}(\mathbf{r}) = \overline{u_i(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x})u_l(\mathbf{x}+\mathbf{r})}$ si scrive, come già discusso in precedenza (equazione (9.24) del paragrafo 9.2), nel modo seguente:

$$S_{ijl}(\mathbf{r}) = Ar_i r_j r_l + B(r_i \delta_{jl} + r_j \delta_{il}) + Dr_l \delta_{ij}, \quad (9.43)$$

dove A , B e D sono funzioni *pari* di r . La continuità si esprime nella forma:

$$\begin{aligned}
\partial_r S_{ijl}(\mathbf{r}) &= \frac{r_l}{r} A' r_i r_j r_l + A(\delta_{il} r_j r_l + r_i \delta_{jl} r_l + r_i r_j \delta_{ll}) + \\
&\quad + \frac{r_l}{r} B'(r_i \delta_{jl} + r_j \delta_{il}) + B(\delta_{il} \delta_{jl} + \delta_{jl} \delta_{il}) + \\
&\quad + \frac{r_l}{r} D' r_l \delta_{ij} + D \delta_{ll} \delta_{ij} \\
&= r_i r_j \left(rA' + 5A + 2\frac{B'}{r} \right) + \delta_{ij} (2B + rD' + 3D) \equiv 0,
\end{aligned}$$

che, dovendo valere per ogni vettore separazione \mathbf{r} , implica le due condizioni:

$$\begin{cases} rA' + 5A + 2B'/r = 0 \\ 2B + rD' + 3D = 0. \end{cases} \quad (9.44)$$

Una terza relazione, che però *non* è indipendente da quelle (9.44) appena scritte, si ricava dalla considerazione che S_{iil} è un tensore isotropo del primo ordine a divergenza nulla, e quindi è identicamente nullo in base a quanto visto nel paragrafo 9.3. Ne segue:

$$S_{iil}(\mathbf{r}) = (Ar^2 + 2B + 3D)r_l \equiv 0 \quad \text{e quindi:} \quad Ar^2 + 2B + 3D = 0. \quad (9.45)$$

Per provare che la condizione (9.45) dipende dalle due condizioni (9.44), moltiplichiamo la prima di queste condizioni per r^4 :

$$r^5 A' + 5r^4 A + 2r^3 B' = \frac{d}{dr}(r^5 A) + 2r^3 B' = 0, \quad (9.46)$$

la seconda per r^2 :

$$3r^2 D + r^3 D' + 2r^2 B = \frac{d}{dr}(r^3 D) + 2r^2 B = 0 \quad (9.47)$$

e sommiamo secondo e terzo membro della (9.46) ai corrispondenti membri della (9.47) moltiplicata per 3. In tal modo otteniamo: $r^5 A + 3r^3 D + 2r^3 B \equiv$ costante $= 0$, essendo nulla per $r = 0$. Dividendo per r^3 tale relazione si riottiene la (9.45).

Come nel caso delle correlazioni doppie, utilizzando l'equazione di continuità si può far vedere che una sola funzione scalare di r determina l'intero tensore. Infatti, dalla seconda delle relazioni (9.44) segue:

$$B = -\frac{3}{2} D - \frac{r}{2} D' \quad (9.48)$$

e, sostituendo B nella (9.45), otteniamo A in funzione di D :

$$A = \frac{1}{r} D'. \quad (9.49)$$

Come mostrano le relazioni (9.48, 9.49), è sufficiente conoscere la sola funzione scalare $D(r)$ per determinare l'intero tensore di correlazione tripla della velocità, la cui generica componente (i, j, l) è stata chiamata $S_{ijl}(\mathbf{r})$.

Procedendo come nel paragrafo 9.4, definiamo il versore $\hat{\mathbf{r}}$ della direzione congiungente i due punti in cui sono valutate le velocità ed uno degli ∞^1 versori ad esso ortogonali $\hat{\mathbf{r}}^\perp$ e definiamo le componenti parallele $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{r}} = u_p(\mathbf{x})$, $\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{r}} = u_p(\mathbf{x} + \mathbf{r})$ e le componenti ortogonali $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{r}}^\perp = u_n(\mathbf{x})$, $\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{r}}^\perp = u_n(\mathbf{x} + \mathbf{r})$ delle due velocità in \mathbf{x} ed in $\mathbf{x} + \mathbf{r}$. Con queste componenti di velocità si costruiscono le tre differenti funzioni di correlazione k , h e q definite dalle relazioni: $u^3 k(r) = \overline{u_p(\mathbf{x}) u_p(\mathbf{x}) u_p(\mathbf{x} + \mathbf{r})}$, $u^3 h(r) = \overline{u_n(\mathbf{x}) u_n(\mathbf{x}) u_p(\mathbf{x} + \mathbf{r})}$ e $u^3 q(r) = \overline{u_n(\mathbf{x}) u_p(\mathbf{x}) u_n(\mathbf{x} + \mathbf{r})}$. Le tre funzioni $k = k(r)$, $h = h(r)$ e $q = q(r)$ si scrivono in termini dei coefficienti A , B e D nella (9.43) al modo seguente:

$$\begin{aligned} u^3 k &= \frac{r_i r_j r_l}{r^3} S_{ijl} = Ar^3 + 2Br + Dr & u^3 k &= -2rD \\ u^3 h &= \frac{r_i^\perp r_j^\perp r_l}{r^3} S_{ijl} = rD & u^3 h &= rD \\ u^3 q &= \frac{r_i^\perp r_j^\perp r_l}{r^3} S_{ijl} = rB & u^3 q &= -\frac{3}{2}rD - \frac{r^2}{2}D' , \end{aligned} \quad (9.50)$$

avendo utilizzato le relazioni (9.48, 9.49). In parallelo a quanto fatto per le correlazioni doppie, normalmente si sceglie di scrivere il tensore di correlazione tripla mediante la sola funzione di correlazione *longitudinale* $k = k(r)$. Si ottengono così i coefficienti nella forma (9.43) della componente (i, j, l) del tensore:

$$D = u^3 \left(-\frac{k}{2r} \right), \quad A = u^3 \left(-\frac{k - rk'}{2r^3} \right), \quad B = u^3 \left(-\frac{2k + rk'}{4r} \right),$$

da cui segue la forma isotropa del tensore di correlazione tripla della velocità:

$$S_{ijl}(\mathbf{r}) = u^3 \left[\frac{1}{2}(k - rk') \frac{r_i r_j r_l}{r^3} + \frac{1}{4}(2k + rk') \left(\frac{r_i}{r} \delta_{jl} + \frac{r_j}{r} \delta_{il} \right) - \frac{1}{2}k \frac{r_l}{r} \delta_{ij} \right] \quad (9.51)$$

Le relazioni (9.50) tra il coefficiente D e le funzioni di correlazione $k = k(r)$, $h = h(r)$ e $q = q(r)$ evidenziano che, essendo $D = D(r)$ una funzione pari di r , le funzioni di correlazione k , h e q sono *dispari*.

Al tensore di correlazione tripla di velocità nello spazio fisico corrisponde il tensore trasformato $\boldsymbol{\Upsilon}$, la cui componente (i, j, l) si scrive:

$$\Upsilon_{ijl}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{r} S_{ijl}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (9.52)$$

nello spazio dei numeri d'onda. Nell'ipotesi di turbolenza isotropa la componente (i, j, l) del tensore $\boldsymbol{\Upsilon}$ (9.52) si scrive nella forma:

$$\Upsilon_{ijl}(\mathbf{k}) = Ak_i k_j k_l + B(k_i \delta_{jl} + k_j \delta_{il}) + Dk_l \delta_{ij},$$

con A , B e D funzioni *pari* del modulo k del vettore d'onda \mathbf{k} . La condizione di incompressibilità si traduce nella richiesta:

$$k_l \Upsilon_{ijl} = (Ak^2 + 2B) k_i k_j + Dk^2 \delta_{ij} \equiv 0 ,$$

che implica $B = -k^2 A/2$ e $D \equiv 0$. Sostituendo queste condizioni nella forma (9.52) della componente (i, j, l) del tensore Υ e considerato che il coefficiente A è immaginario puro (cfr. l'equazione (9.57) nel seguito), posto $A(k) = i \Upsilon(k)$ con $\Upsilon = \Upsilon(k)$ funzione pari, abbiamo:

$$\boxed{\Upsilon_{ijl}(k) = i \Upsilon(k) \left[k_i k_j k_l - \frac{k^2}{2} (k_i \delta_{jl} + k_j \delta_{il}) \right]} \quad (9.53)$$

Il legame tra la funzione $\Upsilon(k)$, che definisce l'intero tensore di correlazione tripla della velocità nello spazio dei numeri d'onda, e la funzione di correlazione longitudinale $K(r)$, che fa la stessa cosa nello spazio fisico, può essere ricavato considerando il vettore ottenuto saturando il primo e l'ultimo indice di S :

$$S_{iji}(\mathbf{r}) = \frac{u^3}{2} \frac{rk' + 4k}{r} r_j =: \frac{u^3}{2} K(r) r_j , \quad (9.54)$$

in cui si è definita la nuova funzione *pari* di r $K = K(r)$. Trasformando con Fourier primo e terzo membro della relazione (9.54) abbiamo:

$$\begin{aligned} \Upsilon_{iji}(\mathbf{k}) &= -i \Upsilon(k) k^2 k_j \\ &= \frac{u^3}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{r} K(r) r_j e^{-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \\ &= \frac{i}{2} \frac{u^3}{(2\pi)^3} \partial_{k_j} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{r} K(r) e^{-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \\ &= \frac{i}{2} \frac{u^3}{(2\pi)^3} \partial_{k_j} \int_0^{+\infty} dr K(r) \int_{\partial B_r(\mathbf{0})} dS(\mathbf{r}) e^{-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} . \end{aligned} \quad (9.55)$$

L'integrale sulla superficie della sfera $\partial B_r(\mathbf{0})$ centrata nell'origine e di raggio r si valuta passando a coordinate sferiche $\mathbf{r} = r(\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi)$ (con $dS(\mathbf{r}) = r^2 \sin \varphi d\varphi d\theta$). Otteniamo:

$$\int_{\partial B_r(\mathbf{0})} dS(\mathbf{r}) e^{-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = 4\pi r^2 \frac{\sin kr}{kr} \quad (9.56)$$

che, sostituita nell'ultimo membro della (9.55) fornisce:

$$\begin{aligned} \Upsilon_{iji}(\mathbf{k}) &= \frac{i}{2} \frac{u^3}{(2\pi)^3} \partial_{k_j} \int_0^{+\infty} dr K(r) 4\pi r^2 \frac{\sin kr}{kr} \\ &= u^3 \frac{i}{(2\pi)^2} \partial_{k_j} \left[\frac{1}{k} \int_0^{+\infty} dr K(r) r \sin kr \right] \\ &= u^3 \frac{i}{(2\pi)^2} \left[-\frac{k_j}{k^3} \int_0^{+\infty} dr K(r) r \sin kr + \frac{1}{k} \int_0^{+\infty} dr K(r) r \cos kr \frac{k_j}{k} r \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= u^3 \frac{i}{(2\pi)^2} \left[-\frac{k_j}{k^3} \int_0^{+\infty} dr K(r) r \sin kr + \frac{k_j}{k^3} \int_0^{+\infty} dr K(r) r^2 \frac{d}{dr} \sin kr \right] \\
&= -u^3 \frac{i}{(2\pi)^2} \frac{k_j}{k^3} \int_0^{+\infty} dr [3rK(r) + r^2 K'(r)] \sin kr \\
&= -u^3 \frac{i}{(2\pi)^2} \frac{k_j}{k^2} \int_0^{+\infty} dr \partial_r[r^3 K(r)] \frac{\sin kr}{kr} ,
\end{aligned} \tag{9.57}$$

la quale dimostra come Υ_{iji} sia immaginario puro e quindi la funzione $\Upsilon = \Upsilon(k)$ reale. Una conseguenza della relazione precedente è proprio la definizione della funzione Υ :

$$\Upsilon(k) = \frac{u^3}{(2\pi)^2} \frac{1}{k^4} \int_0^{+\infty} dr \partial_r[r^3 K(r)] \frac{\sin kr}{kr} .$$

Questa relazione si può mettere sotto forma di trasformata di Fourier col seno:

$$8\pi k^5 \Upsilon(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} dr [u^3 r(r\partial_r + 3)K(r)] \sin kr , \tag{9.58}$$

la cui antitrasformata si scrive subito:

$$u^3 r(r\partial_r + 3)K(r) = \int_0^{+\infty} dk [8\pi k^5 \Upsilon(k)] \sin kr . \tag{9.59}$$

Quest'ultima può anche essere ricavata seguendo una procedura simmetrica⁴ a quella che ha portato alla deduzione della trasformata diretta (9.58).

⁴ A partire dalla definizione (9.54), antitrasformando secondo Fourier:

$$\begin{aligned}
u^3 \frac{1}{2} K(r) r_j &= \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k} \Upsilon_{iji}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\
&= -i \int_0^{+\infty} dk \Upsilon(k) k^2 \int_{\partial B_k(\mathbf{0})} dS(\mathbf{k}) k_j e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\
&= -\partial_{r_j} \int_0^{+\infty} dk \Upsilon(k) k^2 \int_{\partial B_k(\mathbf{0})} dS(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} ,
\end{aligned}$$

in cui l'integrale sulla superficie $\partial B_r(\mathbf{0})$ segue subito facendo il complesso coniugato di ambo i membri della relazione (9.56). Inserendo quest'ultimo risultato:

$$\begin{aligned}
S_{iji}(\mathbf{r}) &= -\partial_{r_j} \int_0^{+\infty} dk \Upsilon(k) k^2 4\pi k^2 \frac{\sin kr}{kr} \\
&= -4\pi \frac{r_j}{r} \partial_r \left[\frac{1}{r} \int_0^{+\infty} dk \Upsilon(k) k^3 \sin kr \right] ,
\end{aligned}$$

dalla quale si ricava, moltiplicando per r_j e sommando su j , che:

$$u^3 K(r) = 8\pi \left[\frac{1}{r^3} \int_0^{+\infty} dk \Upsilon(k) k^3 \sin kr - \frac{1}{r^2} \int_0^{+\infty} dk \Upsilon(k) k^4 \cos kr \right] .$$

Approfondimenti

9.7 Alcune considerazioni sugli angoli di Eulero

Una definizione di tali angoli può essere la seguente. Indichiamo con $\varphi \in [0, \pi]$ l'angolo formato dai due assi z e z' . Se i due piani (x, y) ed (x', y') non sono paralleli, fissiamo la semiretta N (detta *linea dei nodi*) uscente all'origine ed appartenente alla loro intersezione che giace nel semispazio delimitato dal piano passante per gli assi z e z' verso cui punta il vettore $e_z \times e_{z'}$, come rappresentato in Fig. 9.3-a. N indicherà il relativo versore e con N_\perp e N'_\perp saranno i versori ortogonali ad N appartenenti ai piani (x, y) e (x', y') , rispettivamente. L'asse x forma un angolo $\theta \in [0, 2\pi)$ con N e l'asse x' un angolo $\chi \in [0, 2\pi)$, conseguentemente $N = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$ in RC , con $N_\perp = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$, ed $N = (\cos \chi, \sin \chi, 0)$ in RC' , con $N'_\perp = (-\sin \chi, \cos \chi, 0)$. Gli angoli di Eulero (φ, θ, χ) sono individuati graficamente in Fig. 9.3-a.

Calcoliamo le componenti del versore $e_{z'}$ in (x, y, z) . La componente lungo z è semplicemente $\cos \varphi$, mentre le altre due sono calcolate imponendo l'ortogonalità tra $e_{z'}$ ed N . Le componenti di $e_{x'}$ seguono dalla relazione $e_{x'} \times N = \sin \chi e_{z'}$ ed, infine, quelle di $e_{y'}$ si calcolano utilizzando il legame $e_{y'} = e_{z'} \times e_{x'}$:

$$\begin{aligned} e_{x'} &= \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \chi \cos \varphi + \cos \theta \cos \chi \\ -\cos \theta \sin \chi \cos \varphi + \sin \theta \cos \chi \\ -\sin \chi \sin \varphi \end{pmatrix} \\ e_{y'} &= \begin{pmatrix} -\sin \theta \cos \chi \cos \varphi + \cos \theta \sin \chi \\ \cos \theta \cos \chi \cos \varphi + \sin \theta \sin \chi \\ \cos \chi \sin \varphi \end{pmatrix} \\ e_{z'} &= \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \varphi \\ -\cos \theta \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9.60)$$

Una ulteriore deduzione di queste relazioni per via grafica è fornita in Fig. 9.3-b. In base alle relazioni (9.60), la matrice del cambiamento di coordinate da RC' ad RC è costruita allineando le tre colonne delle componenti in RC dei versori $e_{x'}$, $e_{y'}$ ed $e_{z'}$, mentre la matrice del cambiamento inverso (dalle componenti in RC a quelle in RC') $R(\varphi, \theta, \chi)$ si ottiene facendo la trasposta della matrice precedente:

$$R = \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \chi \cos \varphi + \cos \theta \cos \chi & -\cos \theta \sin \chi \cos \varphi + \sin \theta \cos \chi & -\sin \chi \sin \varphi \\ -\sin \theta \cos \chi \cos \varphi + \cos \theta \sin \chi & \cos \theta \cos \chi \cos \varphi + \sin \theta \sin \chi & \cos \chi \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & -\cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (9.61)$$

essendo l'operatore del cambiamento di base (e quindi di coordinate) unitario. Il determinante della matrice R (9.61) è identicamente unitario.

9.7.1 Prodotto di due rotazioni sferiche

Analizziamo la struttura del prodotto $R(\varphi_1, \theta_1, \chi_1)R(\varphi_2, \theta_2, \chi_2)$ di due rotazioni, cercando di metterlo nella forma (9.61) e quindi determinando gli angoli φ , θ e χ corrispondenti alla rotazione sferica risultante. Poniamo:

Calcolando la quantità $u^3 r(r\partial_r + 3)K(r)$, quest'ultima relazione consente di ricavare la (9.59).

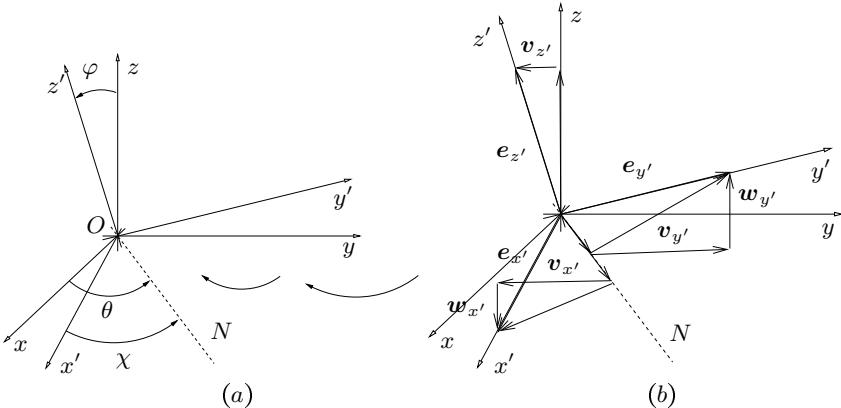


Figura 9.3. Definizione degli angoli di Eulero (a) e componenti (b) dei versori coordinati di RC' in RC . $e_{x'}$ è scritto come somma di due vettori del piano (x', y') : $\cos \chi N$ e $-\sin \chi N_{\perp} = v_{x'} + w_{x'}$, con $v_{x'} = -\sin \chi \cos \varphi N_{\perp}$ e $w_{x'} = -\sin \chi \sin \varphi e_z$. Analogamente $e_{y'}$ è decomposto nella somma dei due vettori del piano (x', y') : $\sin \chi N$ e $\cos \chi N_{\perp} = v_{y'} + w_{y'}$, con $v_{y'} = \cos \chi \cos \varphi N_{\perp}$ e $w_{y'} = \cos \chi \sin \varphi e_z$. Infine, $e_{z'}$ è scritto come somma dei due vettori: $\cos \varphi e_z$ e $-\sin \varphi N_{\perp}$.

$$\sin \frac{\theta_1 - \chi_2}{2} = u, \quad \cos \frac{\theta_1 - \chi_2}{2} = v$$

e calcoliamo l'elemento (3, 3) della matrice prodotto:

$$\cos \varphi = v^2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + u^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2), \quad (9.62)$$

che determina l'angolo $\varphi \in [0, \pi]$. Inoltre, dalla relazione (9.62) segue pure che:

$$\begin{aligned} \sin^2 \varphi &= \underbrace{[v^2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) - u^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]^2}_A + \underbrace{(\overbrace{2uv \sin \varphi_1}^B)^2} = A^2 + B^2 \\ &= \underbrace{[v^2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) + u^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]^2}_C + \underbrace{(\overbrace{2uv \sin \varphi_2}^D)^2} = C^2 + D^2, \end{aligned} \quad (9.63)$$

ovvero, essendo $\sin \varphi \geq 0$, anche $\sin \varphi = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{C^2 + D^2}$. Calcoliamo l'elemento (3, 1) della matrice prodotto:

$$\sin \theta \sin \varphi = A \sin \theta_2 + B \cos \theta_2$$

ed, in base alla relazione (9.63), verifichiamo subito che $|A \sin \theta_2 + B \cos \theta_2| / \sin \varphi \leq 1$. Quindi possiamo effettivamente calcolare $\sin \theta$ come:

$$\sin \theta = \frac{A \sin \theta_2 + B \cos \theta_2}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (9.64)$$

Procedendo in modo del tutto simile, calcolando l'elemento (3, 2) della matrice prodotto, determiniamo $\cos \theta$:

$$\cos \theta = \frac{A \cos \theta_2 - B \sin \theta_2}{\sqrt{A^2 + B^2}} . \quad (9.65)$$

Dalle relazioni (9.64, 9.65) si ricava l'angolo θ . Allo stesso modo, calcolando gli elementi (1, 3) e (2, 3) della matrice prodotto:

$$\sin \chi = \frac{C \sin \chi_1 - D \cos \chi_1}{\sqrt{C^2 + D^2}}, \quad \cos \chi = \frac{C \cos \chi_1 + D \sin \chi_1}{\sqrt{C^2 + D^2}} \quad (9.66)$$

ricaviamo l'angolo χ .

Valutiamo ora gli angoli di Eulero per una rotazione inversa ad una data rotazione di angoli $(\varphi_1, \theta_1, \chi_1)$, con φ_1 non nullo. Dovendo essere $\varphi = 0$, θ e χ risultano essere indeterminati, ed infatti nessuna condizione che implichi la conoscenza di tali angoli sarà necessaria. Osserviamo che, essendo $\varphi = 0$, dalle relazioni (9.62, 9.63) segue il sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} v^2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + u^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 1 \\ v^2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) = 0 \\ u^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \\ uv \sin \varphi_1 = 0 \\ uv \sin \varphi_2 = 0 . \end{array} \right. \quad (9.67)$$

Poiché φ_1 non è nullo, la quarta equazione fornisce $uv = 0$ e quindi o $u = 0$, oppure $v = 0$. Assumiamo $u = 0$. In tali condizioni, $v^2 = 1$, ma allora la prima e la seconda equazione forniscono $\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = 1$ e $\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = 0$, ovvero $\varphi_1 + \varphi_2 = 0$. Questa condizione è assurda, dovendo φ_2 appartenere all'intervallo $[0, \pi]$.

Assumiamo allora $v = 0$, che implica $\chi_2 = \theta_1 + \pi$ se $\theta_1 \in [0, \pi)$, oppure $\chi_2 = \theta_1 - \pi$ se $\theta_1 \in [\pi, 2\pi)$. Osserviamo che, essendo la rotazione $(\varphi_2, \theta_2, \chi_2)$ inversa alla $(\varphi_1, \theta_1, \chi_1)$, la linea dei nodi è la semiretta opposta (a causa dell'orientazione opposta del prodotto vettoriale $e_{z'} \times e_z$) ed il valore assunto da χ_2 lo conferma. Essendo $u^2 = 1$, dalla terza equazione segue $\varphi_1 = \varphi_2$. Infine, una volta definita la posizione della linea dei nodi abbiamo anche $\theta_2 = \chi_1 + \pi$ se $\chi_1 \in [0, \pi)$ e $\theta_2 = \chi_1 - \pi$ se $\chi_1 \in [\pi, 2\pi)$.

9.8 Riflessioni e rotazioni sferiche

Facciamo vedere che componendo due riflessioni si ottiene una rotazione. Fissiamo due piani di normali $d = (\sin \gamma \cos \mu, \sin \gamma \sin \mu, \cos \gamma)$ ed $e = (\sin \delta \cos \nu, \sin \delta \sin \nu, \cos \delta)$ e consideriamo il prodotto dei due spostamenti. Osserviamo che lo spostamento risultante non altera la natura levogira del riferimento, pertanto non può essere una riflessione. Le componenti del generico vettore x sono trasformate dalla matrice prodotto $S(d) \cdot S(e)$, la quale ha infatti la struttura (9.61) di una matrice di rotazione. Gli angoli di eulero (φ, θ, χ) di tale rotazione possono essere determinati al modo seguente.

È importante considerare il prodotto scalare tra i due versori normali, che comporta la definizione dell'angolo α tale che:

$$\cos \alpha = d \cdot e = \sin \gamma \sin \delta \cos(\mu - \nu) + \cos \gamma \cos \delta . \quad (9.68)$$

Si inizia col calcolare l'elemento (3, 3) della matrice prodotto $\mathbf{S}(\mathbf{d}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{e})$, ottenendo il coseno dell'angolo φ :

$$\cos \varphi = u^2 \cos 2(\delta - \gamma) + v^2 \cos 2(\delta + \gamma), \quad (9.69)$$

avendo introdotto le due quantità:

$$u = \cos \frac{\mu - \nu}{2}, \quad v = \sin \frac{\mu - \nu}{2}.$$

Dalla relazione (9.69) segue:

$$\begin{aligned} \sin^2 \varphi &= \underbrace{[u^2 \sin 2(\delta - \gamma) + v^2 \sin 2(\delta + \gamma)]^2}_{E} + \underbrace{(2uv \sin 2\gamma)^2}_{F} \\ &= \underbrace{[u^2 \sin 2(\delta - \gamma) - v^2 \sin 2(\delta + \gamma)]^2}_{G} + \underbrace{(2uv \sin 2\delta)^2}_{H} \end{aligned} \quad (9.70)$$

e quindi:

$$\sin \varphi = \sqrt{E^2 + F^2} = \sqrt{G^2 + H^2}. \quad (9.71)$$

Calcolando gli elementi (3, 1) e (3, 2) della matrice prodotto otteniamo l'angolo θ :

$$\sin \theta = \frac{+E \cos \nu + F \sin \nu}{\sqrt{E^2 + F^2}}, \quad \cos \theta = \frac{-E \sin \nu + F \cos \nu}{\sqrt{E^2 + F^2}},$$

avendo utilizzato la definizione (9.71) di $\sin \varphi$. Dagli elementi (1, 3) ed (2, 3) determiniamo l'angolo χ :

$$\sin \chi = \frac{+G \cos \mu + H \sin \mu}{\sqrt{G^2 + H^2}}, \quad \cos \chi = \frac{-G \sin \mu + H \cos \mu}{\sqrt{G^2 + H^2}}, \quad (9.72)$$

ancora utilizzando la (9.71).

Inoltre, componendo una rotazione (dal riferimento RC ad RC') con una riflessione (da RC' ad RC'') si ottiene ancora una riflessione. Questo è abbastanza intuitivo, considerando l'inversione della natura levogira del riferimento operata della riflessione. Occupiamoci di determinare il versore \mathbf{f} normale al piano della riflessione risultante a partire dagli angoli di Eulero (φ, θ, χ) della rotazione da RC ad RC' e dal versore $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3)$ della riflessione da RC' ad RC'' . Innanzitutto, osserviamo che le colonne della matrice di rotazione dal riferimento RC a RC' forniscono le componenti in RC' dei versori $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ di RC e quindi possiamo scrivere il prodotto dei due spostamenti nella forma:

$$\begin{pmatrix} 1 - 2d_1^2 & -2d_1d_2 & -2d_1d_3 \\ -2d_2d_1 & 1 - 2d_2^2 & -2d_2d_3 \\ -2d_3d_1 & -2d_3d_2 & 1 - 2d_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{x1} & e_{y1} & e_{z1} \\ e_{x2} & e_{y2} & e_{z2} \\ e_{x3} & e_{y3} & e_{z3} \end{pmatrix}. \quad (9.73)$$

L'espressione risultante dl prodotto si semplifica grandemente se si introducono i tre angoli α_x, α_y ed α_z tra $\mathbf{d} = (\sin \gamma \cos \beta, \sin \gamma \sin \beta, \cos \beta)$ ed i versori degli assi di RC :

$$\begin{aligned} \cos \alpha_x &= \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_x = \sin \gamma [+u^2 \cos(\chi - \theta - \beta) + v^2 \cos(\chi + \theta - \beta)] + 2uv \cos \gamma \sin \theta \\ \cos \alpha_y &= \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_y = \sin \gamma [-u^2 \sin(\chi - \theta - \beta) + v^2 \sin(\chi + \theta - \beta)] - 2uv \cos \gamma \cos \theta \\ \cos \alpha_z &= \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_z = \cos \gamma (u^2 - v^2) - 2uv \sin \gamma \sin(\chi - \beta), \end{aligned} \quad (9.74)$$

avendo introdotto le due quantità $u = \cos(\varphi/2)$ e $v = \sin(\varphi/2)$. Utilizzando gli angoli definiti nella (9.74), il prodotto (9.73) si riscrive:

$$\begin{pmatrix} e_{x1} - 2d_1 \cos \alpha_x & e_{y1} - 2d_1 \cos \alpha_y & e_{z1} - 2d_1 \cos \alpha_z \\ e_{x2} - 2d_2 \cos \alpha_x & e_{y2} - 2d_2 \cos \alpha_y & e_{z2} - 2d_2 \cos \alpha_z \\ e_{x3} - 2d_3 \cos \alpha_x & e_{y3} - 2d_3 \cos \alpha_y & e_{z3} - 2d_3 \cos \alpha_z \end{pmatrix}. \quad (9.75)$$

Tutti gli elementi della matrice (9.75) per lo spostamento prodotto da RC ad RC'' assumono valori compresi tra -1 e $+1$. Infatti, consideriamo ad esempio l'elemento $(1, 1)$ di tale matrice ed introduciamo gli angoli β ed ω tali che $e_{x1} = \cos \beta$ e $d_1 = \cos \omega$. I moduli dei vettori $e_{x2}e_{y'} + e_{x3}e_{z'}$ e $d_2e_{y'} + d_3e_{z'}$ risulteranno pari rispettivamente a $|\sin \beta|$ e $|\sin \omega|$ e si può trovare un angolo ζ tale che $\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_x = \cos \alpha_x = \cos \beta \cos \omega + \sin \beta \sin \omega \cos \zeta$. Ne segue per l'elemento $(1, 1)$:

$$e_{x1} - 2d_1 \cos \alpha_x = \cos \beta - 2 \cos \omega \cos \alpha_x = -(\cos \beta \cos 2\omega + \sin \beta \sin 2\omega \cos \zeta),$$

che risulta ovviamente compreso tra -1 ed $+1$. Una stima simile si può fare su ciascun altro elemento della matrice prodotto (9.75).

9.9 Relazioni tra R ed E

Come visto nel paragrafo 9.4, le funzioni $rR(r)$ e $E(k)/k$ sono legate dalla trasformata di Fourier col seno. Questo legame consente di stabilire relazioni tra le derivate in $k = 0$ dello spettro $E(k)$ ed i momenti della traccia del tensore di correlazione R (e quindi, cfr. (9.39), di f) e, viceversa, tra le derivate in 0 della traccia $R(r)$ (e quindi di f) ed i momenti della funzione spettro d'energia $E(k)$. Data la funzione $q : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, continua ed esponenzialmente decrescente per $r \rightarrow \infty$, indicheremo con il simbolo $\mathcal{M}^{(m)}[q]$ il suo momento m -esimo:

$$\mathcal{M}^{(m)}[q] = \int_0^{+\infty} dr r^m q(r).$$

Iniziamo col valutare le derivate in $k = 0$ della funzione spettro di energia $E(k)$. Utilizzandolo sviluppo di McLaurin del $\sin kr$:⁵

$$E(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} dr kr R(r) \sin kr = \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p k^{2p+2}}{(2p+1)!} \mathcal{M}^{(2p+2)}[R]. \quad (9.76)$$

Analizzando la dipendenza dal numero d'onda k del secondo membro della relazione (9.76) appena scritta, si può notare che la funzione spettro d'energia è *pari* nel numero d'onda k . Se ammettiamo, come verrà implicitamente fatto nel seguito,

⁵ Osservare che il momento $\mathcal{M}^{(2)}[R]$ è nullo, infatti:

$$\mathcal{M}^{(2)}[R] = \int_0^{+\infty} dr r^2 R(r) = \frac{u^2}{2} \int_0^{+\infty} dr \partial_r [r^3 f(r)] = 0,$$

avendo utilizzato le proprietà di decadimento all'infinito della funzione di correlazione longitudinale $f(r)$.

che $E(k)$ sia sufficientemente regolare, possiamo scrivere per $E(k)$ lo sviluppo di McLaurin:

$$E(k) = \sum_{q=2}^{\infty} \frac{k^{2q}}{(2q)!} \partial_k^{2q} E(k) \Big|_{k=0},$$

(utilizziamo la derivata parziale, perché E è ovviamente funzione anche del tempo, in generale). In questo sviluppo abbiamo implicitamente considerato i risultati dell'analisi svolta nel paragrafo 8.3, circa il comportamento della funzione $E = E(k)$ per $k \rightarrow 0^+$. Confrontando lo sviluppo appena scritto con quello in (9.76), otteniamo:

$$\partial_k^{2m} E(k) \Big|_{k=0} = \frac{4}{\pi} (-1)^{m+1} m \mathcal{M}^{(2m)}[R]. \quad (9.77)$$

Utilizzando la definizione (9.39) di $R(r)$ ed integrando per parti, possiamo dedurre il legame tra i momenti di R e quelli di f :

$$\mathcal{M}^{(m)}[R] = -\frac{u^2}{2} (m-2) \mathcal{M}^{(m)}[f]. \quad (9.78)$$

Inserendo tale relazione nella (9.77) otteniamo anche:

$$\partial_k^{2m} E(k) \Big|_{k=0} = \frac{4}{\pi} (-1)^m m(m-1) u^2 \mathcal{M}^{(2m)}[f]. \quad (9.79)$$

Ovviamente, questa relazione fornisce per $m = 0$ $E(0) = 0$ e per $m = 1$ $\partial_k^2 E(k) \Big|_{k=0} = 0$, come già sappiamo in base al comportamento della funzione $E = E(k)$ per $k \ll k_L$.

Si ricavano poi facilmente le relazioni duali, in modo da legare le derivate in $r = 0$ della funzione di correlazione longitudinale f (o della traccia del tensore di correlazione R) ai momenti della funzione spettro di energia $E(k)$. Infatti, sempre utilizzando la trasformata di Fourier col seno e lo sviluppo di McLaurin della funzione $\sin kr$,abbiamo:

$$rR(r) = \int_0^{+\infty} dk \frac{E(k)}{k} \sin kr = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} r^{2p+1} \int_0^{+\infty} dk k^{2p} E(k),$$

da cui segue l'espressione di $R(r)$:

$$R(r) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} r^{2p} \mathcal{M}^{(2p)}[E]. \quad (9.80)$$

Essendo $R = R(r)$ una funzione *pari* di r sufficientemente regolare, $R(r)$ ammette lo sviluppo di McLaurin:

$$R(r) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{r^{2p}}{(2p)!} \partial_r^{2p} R(r) \Big|_{r=0}. \quad (9.81)$$

Confrontando termine a termine le due serie (9.80, 9.81) si deducono, per l'unicità dello sviluppo in serie di McLaurin, le espressioni seguenti per le derivate in $r = 0$ della traccia $R(r)$:

$$\partial_r^{2m} R(r) \Big|_{r=0} = \frac{(-1)^m}{2m+1} \mathcal{M}^{(2m)}[E], \quad (9.82)$$

che è la relazione duale rispetto alla (9.78). La derivata in $r = 0$ di $R(r)$ presente nella (9.82) è legata, per il tramite della definizione di R (9.39), alla corrispondente derivata della funzione di correlazione longitudinale $f = f(r)$. Infatti la (9.39) può essere scritta come $r^2 R = u^2 \partial_r(r^3 f)/2$ e sviluppando in serie di McLaurin ambo i membri di questa relazione otteniamo:

$$r^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{r^{2m}}{(2m)!} \partial_r^{2m} R(r) \Big|_{r=0} = \frac{u^2}{2} \partial_r \left[r^3 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^{2l}}{(2l)!} \partial_r^{2l} f(r) \Big|_{r=0} \right],$$

dalla quale, utilizzando l'unicità dello sviluppo di McLaurin, otteniamo il legame tra le derivate in $r = 0$ della traccia $R(r)$ e della funzione di correlazione $f(r)$:

$$\partial_r^{2m} R(r) \Big|_{r=0} = u^2 \frac{2m+3}{2} \partial_r^{2m} f(r) \Big|_{r=0}. \quad (9.83)$$

Utilizzando la forma (9.83) delle derivate di $R(r)$ nella relazione (9.82) otteniamo infine:

$$u^2 \partial_r^{2m} f(r) \Big|_{r=0} = \frac{2(-1)^m}{(2m+1)(2m+3)} \mathcal{M}^{(2m)}[E], \quad (9.84)$$

che è la relazione duale rispetto alla (9.79).

L'uso più frequente delle relazioni (9.79, 9.84) è quello di ricavare dalle derivate della funzione spettro di energia $E = E(k)$ in $k = 0$ e della funzione di correlazione longitudinale $f = f(r)$ in $r = 0$ i momenti d'ordine pari di f e di E . La forma funzionale della relazione (9.79) impedisce di adottare questa strategia per $m = 0$ ed 1. In questi due casi i momenti d'ordine 0 e 2 della funzione di correlazione longitudinale $f = f(r)$ possono essere legati ad integrali della funzione spettro d'energia $E = E(k)$. Si verifica facilmente che:

$$\int_0^{+\infty} dr R(r) = u^2 \int_0^{+\infty} dr f(r)$$

e quindi, ricordando il legame tra le funzioni $rR(r)$ ed $E(k)/k$, otteniamo:

$$\begin{aligned} u^2 \int_0^{+\infty} dr f(r) &\equiv \int_0^{+\infty} dr \frac{1}{r} r R(r) \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{dr}{r} \int_0^{+\infty} dk \frac{E(k)}{k} \sin kr \\ &= \int_0^{+\infty} dk \frac{E(k)}{k} \int_0^{+\infty} dr \frac{\sin kr}{r} \\ &= \int_0^{+\infty} dk \frac{E(k)}{k} \int_0^{+\infty} dx \frac{\sin x}{x}. \end{aligned} \quad (9.85)$$

Poiché l'integrale di $\sin x/x$ vale⁶ $\pi/2$, dalla relazione (9.85) segue:

⁶ L'integrale di $\sin x/x$ può essere calcolato integrando la funzione della variabile complessa $z = x + iy$ e^{-z}/z sul percorso mostrato in figura ed utilizzando il teorema di Cauchy:

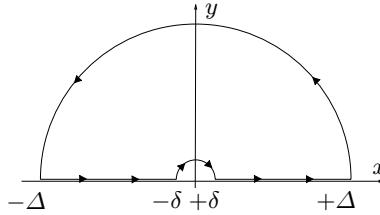
$$u^2 \int_0^{+\infty} dr f(r) = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} dk \frac{E(k)}{k}, \quad (9.86)$$

in cui l'integrandi è sommabile in $k = 0$, sulla base del comportamento di $E(k)$ per $k \ll k_L$ discusso nel capitolo precedente. Il momento d'ordine 2 di f può essere ricavato seguendo lo stesso percorso, visto che $r^2 R(r) = u^2 \partial_r [r^3 f(r)]/2$. Conviene perciò utilizzare direttamente il legame (9.41) tra la funzione di correlazione longitudinale $f = f(r)$ e la funzione spettro di energia $E = E(k)$:

$$\begin{aligned} u^2 \int_0^{+\infty} dr r^2 f(r) &= \int_0^{+\infty} dr r^2 2 \int_0^{+\infty} dk \frac{E(k)}{k^2 r^2} \left(\frac{\sin kr}{kr} - \cos kr \right) \\ &= \int_0^{+\infty} dk \frac{E(k)}{k^2} \int_0^{+\infty} dr \frac{\sin kr}{kr} - 2 \int_0^{+\infty} dr \int_0^{+\infty} dk \frac{E(k)}{k^2} \cos kr, \end{aligned} \quad (9.87)$$

non essendo possibile scambiare l'integrale in k con quello in r nel secondo addendo all'ultimo membro. Si può comunque constatare che quest'ultimo è nullo, infatti:

$$\underline{\int_0^{+\infty} dr \int_0^{+\infty} dk \frac{E(k)}{k^2} \cos kr} =$$



$$\underbrace{\left(\int_{-\Delta}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\Delta} \right) dz \frac{e^{-z}}{z}}_{I_1} + \underbrace{\int_{C_\delta} dz \frac{e^{-z}}{z}}_{I_2} + \underbrace{\int_{C_\Delta} dz \frac{e^{-z}}{z}}_{I_3} = \mathbf{0},$$

in cui i tre integrali I_1 , I_2 ed I_3 possono essere stimati, nei limiti per $\delta \rightarrow 0$, $\Delta \rightarrow \infty$, al modo seguente:

$$\begin{aligned} I_1 &= \left(\int_{-\Delta}^{-\delta} + \int_{+\delta}^{+\Delta} \right) dy \frac{\cos y - i \sin y}{y} = -2i \int_{\delta}^{\Delta} dy \frac{\sin y}{y} \rightarrow -2i \int_0^{+\infty} dy ds \frac{\sin y}{y} \\ I_2 &= i \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta e^{-\delta e^{i\theta}} \rightarrow i\pi \\ I_3 &= i \int_{+\pi/2}^{-\pi/2} d\theta e^{-\Delta(\cos\theta+i\sin\theta)} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Il teorema di Cauchy fornisce allora:

$$\int_0^{+\infty} dx \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{+\infty} \frac{dr}{r} \int_0^{+\infty} dk \frac{E(k)}{k^2} \frac{d}{dk} \sin kr \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{dr}{r} \left[\frac{E(k)}{k^2} \sin kr \Big|_{k=0}^{k=+\infty} - \int_0^{+\infty} dk \left[\partial_k \frac{E(k)}{k^2} \right] \sin kr \right] \\
&= - \int_0^{+\infty} dk \left[\partial_k \frac{E(k)}{k^2} \right] \int_0^{+\infty} dx \frac{\sin x}{x} = -\frac{\pi}{2} \frac{E}{k^2} \Big|_{k=0}^{k=+\infty} = 0,
\end{aligned}$$

dalla relazione (9.87) segue allora:

$$u^2 \int_0^{+\infty} dr r^2 f(r) = \pi \int_0^{+\infty} dk \frac{E(k)}{k^3}, \quad (9.88)$$

in cui il comportamento di $E(k)$ attorno a $k = 0$ (8.39) rende sommabile l'integrando.

Cenni sulla dinamica della turbolenza

In questo capitolo verranno brevemente illustrati alcuni argomenti classici nella *dinamica della turbolenza*, nella quale si studia la dinamica di quantità statisticamente rilevanti per un dato campo turbolento.

Inizieremo nel paragrafo 10.1 col discutere il problema centrale dell'analisi statistica della turbolenza, ovvero il fatto che l'equazione di evoluzione delle correlazioni doppie della velocità (ma tale fenomeno si manifesta nella scrittura di molte altre equazioni di evoluzione di quantità statistiche) contiene le correlazioni triple. A sua volta quella per le correlazioni triple contiene le correlazioni quarte, e così via. Questo problema, causato dalla natura non lineare delle equazioni del moto di un fluido, è uno dei più studiati, tra tutti quelli ancora aperti nella Fisica Classica. In Letteratura è noto come il “*problema della chiusura*”. Nel paragrafo 10.2 specificheremo le equazioni di evoluzione per le correlazioni doppie della velocità e per il tensore spettro di energia, in condizioni omogenee ed isotrope. Ovviamente, pur essendo l'ipotesi di isotropia molto restrittiva, in tale ambito l'analisi teorica si può spingere molto avanti, aiutata dalla semplicità strutturale dei tensori di correlazione. Successivamente, nel paragrafo 10.3, discuteremo una importante proprietà di invarianza per il tensore spettro di energia e quindi anche per la funzione di correlazione longitudinale f , che sussiste nel caso isotropo. Infine (§ 10.4) torneremo sul caso omogeneo, discutendo il problema della chiusura direttamente “nello spazio dei numeri d'onda”, come viene normalmente fatto in moltissime trattazioni moderne della turbolenza.

In chiusura del presente capitolo (§ 10.5) proponiamo un percorso bibliografico sugli argomenti di turbolenza che sono stati trattati nei capitoli 7, 8, 9 e 10.

10.1 Dinamica delle correlazioni doppie di velocità

Utilizzando una descrizione della turbolenza mediante le correlazioni tra i vari campi random (velocità, pressione, vorticità), si pone naturalmente il proble-

ma dell'evoluzione nel tempo di tali correlazioni. Sebbene la non linearità delle equazioni di Navier-Stokes, come già accennato, comporti che l'equazione per il tensore d'ordine n contenga il tensore d'ordine $n+1$, dando quindi luogo ad una *gerarchia di equazioni* e non ad un *sistema chiuso*, alcune informazioni importanti sulle statistiche possono ugualmente essere tratte seguendo questo approccio.

Un legame importante tra le correlazioni della velocità e quelle velocità-pressione si ottiene scrivendo le equazioni di Navier-Stokes componenti i nel punto \mathbf{x} (con le posizioni $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, $\tilde{p} = p(\mathbf{x}, t)/\rho$ e $\nabla_{\mathbf{x}}^2 = \partial_{x_k x_k}^2$):

$$\partial_t u_i + u_k \partial_{x_k} u_i = -\partial_{x_i} \tilde{p} + \nu \nabla_{\mathbf{x}}^2 u_i$$

e componente j nel punto \mathbf{x}' , indipendente da \mathbf{x} (con le posizioni $\mathbf{u}' = \mathbf{u}(\mathbf{x}', t)$, $\tilde{p}' = p(\mathbf{x}', t)/\rho$ e $\nabla_{\mathbf{x}'}^2 = \partial_{x'_k x'_k}^2$), ovvero:

$$\partial_t u'_j + u'_l \partial_{x'_l} u'_j = -\partial_{x'_j} \tilde{p}' + \nu \nabla_{\mathbf{x}'}^2 u'_j ,$$

moltiplicando la prima equazione per u'_j , la seconda per u_i e sommando otteniamo:

$$\begin{aligned} u'_j \partial_t u_i + u_i \partial_t u'_j + u_k u'_j \partial_{x_k} u_i + u_i u'_l \partial_{x'_l} u'_j &= \\ = -u'_j \partial_{x_j} \tilde{p} - u_i \partial_{x'_j} \tilde{p}' + \nu (u'_j \nabla_{\mathbf{x}}^2 u_i + u_i \nabla_{\mathbf{x}'}^2 u'_j) , \end{aligned}$$

ricordando che entrambi i campi $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ed $\mathbf{u}'(\mathbf{x}', t)$ sono a divergenza nulla e \mathbf{x}' è indipendente da \mathbf{x} :

$$\begin{aligned} \partial_t u_i u'_j + \partial_{x_k} u_i u_k u'_j + \partial_{x'_l} u_i u'_l u'_j &= \\ = -\partial_{x_i} u'_j \tilde{p} - \partial_{x'_j} u_i \tilde{p}' + \nu (\nabla_{\mathbf{x}}^2 u_i u'_j + \nabla_{\mathbf{x}'}^2 u_i u'_j) . \end{aligned} \quad (10.1)$$

Ora introduciamo il vettore separazione tra il punto \mathbf{x} ed il punto \mathbf{x}' , ponendo $\mathbf{r} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}$, e riscriviamo l'equazione (10.1) trasformando tutte le derivate spaziali in derivate in \mathbf{r} . Nel far questo, va osservato che: $\partial_{x'_p} = \partial_{x_p} |_{\mathbf{x}}$ fisso $= \partial_{r_p}$ e $\partial_{x_p} = \partial_{x_p} |_{\mathbf{x}'} \text{ fisso} = -\partial_{r_p}$, avendo assunto \mathbf{x} indipendente da \mathbf{x}' . Conseguentemente l'equazione per la dinamica del prodotto $u_i u'_j$ (10.1) si scrive:

$$\partial_t u_i u'_j = \partial_{r_k} (u_i u_k u'_j - u_i u'_k u'_j) + \partial_{r_i} u'_j \tilde{p} - \partial_{r_j} u_i \tilde{p}' + 2\nu \nabla_{\mathbf{r}}^2 u_i u'_j , \quad (10.2)$$

avendo utilizzato la notazione $\nabla_{\mathbf{r}}^2 = \partial_{r_k r_k}^2$.

Se i due campi $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ed $\mathbf{u}'(\mathbf{x}', t)$ sono random, si può porre il problema di scrivere, partendo dall'equazione (10.2), una equazione per la correlazione $u_i u'_j$. Ovviamente, non possiamo pensare di mediare termine a termine in probabilità, per due differenti motivi. Innanzitutto i termini presenti nell'equazione (10.2) non sono tra loro "omogenei", ovvero non sono presenti i soli prodotti di due componenti di velocità. E quindi sarebbe necessario moltiplicare termine a termine per densità di probabilità differenti. Inoltre, anche

qualora i termini fossero “omogenei”, le densità di probabilità congiunte sono in generale funzioni dello spazio e del tempo e non possono essere portate dentro alle derivate presenti nei vari termini dell’equazione (10.2). Si può comunque mediare d’insieme termine a termine, utilizzando la natura lineare dell’operazione di media:

$$\begin{aligned} \partial_t \langle u_i u'_j \rangle = & \quad \partial_{r_k} (\langle u_i u_k u'_j \rangle - \langle u_i u'_k u'_j \rangle) + \\ & + \partial_{r_i} \langle u'_j \tilde{p} \rangle - \partial_{r_j} \langle u_i \tilde{p}' \rangle + 2\nu \nabla_{\mathbf{r}}^2 \langle u_i u'_j \rangle . \end{aligned} \quad (10.3)$$

Assumendo che il numero N di campioni utilizzati nel mediare d’insieme sia sufficientemente elevato, possiamo confondere le medie d’insieme con le corrispondenti medie in probabilità e riscrivere l’equazione (10.3) nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \partial_t \overline{u_i u'_j} = & \quad \partial_{r_k} (\overline{u_i u_k u'_j} - \overline{u_i u'_k u'_j}) + \\ & + \partial_{r_i} \overline{u'_j \tilde{p}} - \partial_{r_j} \overline{u_i \tilde{p}'} + 2\nu \nabla_{\mathbf{r}}^2 \overline{u_i u'_j} . \end{aligned} \quad (10.4)$$

L’equazione (10.4) mostra come l’evoluzione temporale delle correlazioni doppie di velocità dipenda dalle correlazioni triple e dalle correlazioni velocità-pressione. Questi nuovi termini sono inglobati in due nuovi tensori del secondo ordine le cui componenti (i, j) si scrivono (al solito, omettiamo la dipendenza dal tempo):

$$\begin{aligned} T_{ij}(\mathbf{r}) &= \partial_{r_k} [\overline{u_i(\mathbf{x}) u_k(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r})} - \overline{u_i(\mathbf{x}) u_k(\mathbf{x} + \mathbf{r}) u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r})}] \\ P_{ik}(\mathbf{r}) &= \partial_{r_i} \overline{u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \tilde{p}(\mathbf{x})} - \partial_{r_j} \overline{u_i(\mathbf{x}) \tilde{p}(\mathbf{x} + \mathbf{r})} , \end{aligned} \quad (10.5)$$

comportando una riscrittura più sintetica dell’equazione (10.4):

$$\boxed{\partial_t R_{ij} = T_{ij} + P_{ij} + 2\nu \nabla_{\mathbf{r}}^2 R_{ij}} \quad (10.6)$$

- ◊ **Esercizio:** Dedurre le equazioni di evoluzione per le correlazioni doppie e triple di velocità, per un campo di velocità $u(x, t)$ random monodimensionale periodico, che verifica l’equazione di Burgers:

$$\partial_t u + u \partial_x u = \nu \partial_{xx}^2 u + f \quad (10.7)$$

in $[-\pi, +\pi] \times (0, +\infty)$. f è un termine forzante deterministico.

- ◊ **Esercizio:** Discutere come cambia la struttura delle due equazioni dedotte nell’esercizio (10.7), quando il termine forzante f diviene random.

Associati ai tensori \mathbf{T} e \mathbf{P} (10.5) si introducono i corrispondenti tensori trasformati, le cui componenti (i, j) si scrivono:

$$\Gamma_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{r} T_{ij}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad \Pi_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{r} P_{ij}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (10.8)$$

che consentono di scrivere l'equazione per la correlazione doppia di velocità (10.6) nello spazio dei numeri d'onda:

$$\partial_t \Phi_{ij} = \Gamma_{ij} + \Pi_{ij} - 2\nu k^2 \Phi_{ij} \quad (10.9)$$

Dall'equazione (10.9) si deduce subito che se i contributi dei termini convettivi (tensore $\boldsymbol{\Gamma}$) e dei termini di pressione (tensore $\boldsymbol{\Pi}$) sono trascurabili, il tensore spettro di energia decade esponenzialmente nel tempo come $\exp(-2\nu k^2 t)$. Quindi le componenti a più elevato numero d'onda ($k \gg k_L$), associate a strutture vorticose molto fini, decadono molto più velocemente delle componenti con $k \simeq k_L$, relative ai grandi vortici ed alle quali è associata la gran parte dell'energia cinetica del campo.

- ◊ **Esercizio:** Utilizzando sviluppi in serie di Fourier (8.52) in x delle correlazioni doppie e triple di velocità nel caso monodimensionale (10.7), scrivere una equazione di evoluzione per i coefficienti delle correlazioni doppie. (10.10)
- ◊ **Esercizio:** Utilizzando uno sviluppo in serie di Fourier (8.52) in x del campo random di velocità nel caso monodimensionale (10.7), scrivere una equazione di evoluzione delle correlazioni doppie tra i coefficienti di tale sviluppo.

Osservazione. Invece di procedere trasformando le correlazioni, come fatto nell'esercizio (10.10), qui si trasforma il campo di velocità, scrivendo poi le correlazioni direttamente nello spazio dei numeri d'onda (ovvero, correlazioni tra coefficienti di Fourier). Tale approccio sarà generalizzato nel § 10.4.2.

Inoltre osserviamo che utilizzando il fatto che i due campi $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{u}(\mathbf{x}', t)$ sono a divergenza nulla nella definizione (10.5) del tensore T_{ij} otteniamo:

$$T_{ij}(\mathbf{r}) = \overline{u_i(\mathbf{x}) u_k(\mathbf{x}) \partial_{r_k} u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r})} - \overline{u_i(\mathbf{x}) u_k(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \partial_{r_k} u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r})},$$

da cui segue che $\mathbf{T}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, ovvero in base alla prima definizione delle (10.8):

$$\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k} \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{k}) \equiv \mathbf{0}. \quad (10.11)$$

La relazione (10.11) è importante: dimostra che il contributo delle correlazioni triple all'energia cinetica media è nullo, ovvero tali correlazioni *trasferiscono*

energia da un numero d'onda ad un altro, senza alterare il contenuto energetico del sistema. Al tensore $\boldsymbol{\Gamma}$ è quindi dovuta la presenza di un intervallo inerziale ($k_L \ll k \ll k_\eta$) nell'andamento dello spettro di energia $E = E(k)$ in funzione del numero d'onda k .

Una ultima osservazione sull'equazione (10.9) riguarda l'azione del termine di pressione (tensore $\boldsymbol{\Pi}$). Ricordando l'equazione di continuità, calcoliamo la traccia del tensore \boldsymbol{P} (10.5):

$$P_{ii}(\mathbf{r}) = \partial_{r_i} \overline{u_i(\mathbf{x} + \mathbf{r})\tilde{p}(\mathbf{x})} + \partial_{r_i} \overline{u_i(\mathbf{x} - \mathbf{r})\tilde{p}(\mathbf{x})} \equiv 0 ,$$

per ogni \mathbf{r} . La medesima proprietà vale quindi anche trasformato: $P_{ii}(\mathbf{k}) \equiv \mathbf{0}$, quindi $\boldsymbol{\Pi}$ ha una *azione isotropizzante*: ripartisce l'energia in modo da renderla approssimativamente indipendente dalla direzione del vettore d'onda \mathbf{k} . Naturalmente, l'energia associata ad un certo vettore \mathbf{k} rimane fortemente dipendente dal modulo k del medesimo vettore \mathbf{k} , come si può constatare osservando il grafico della funzione spettro di energia (cfr. Fig. 8.8).

Conviene dapprima discutere alcune importanti conseguenze delle due equazioni (10.6, 10.9) nel caso di turbolenza isotropa, per tornare solo in seguito ad esaminare la dinamica nel caso più generale di turbolenza omogenea.

10.2 Dinamica della turbolenza omogenea ed isotropa

Nel caso isotropo le equazioni per la dinamica delle correlazioni doppie nello spazio fisico (10.6) ed in quello dei numeri d'onda (10.9) si semplificano notevolmente, a causa dell'assenza della correlazione velocità-pressione e della struttura semplice dei tensori di correlazione di velocità. Ricordando il fatto che un tensore isotropo di ordine uno a divergenza nulla regolare in $r = 0$ è identicamente nullo (cfr. paragrafo 9.3), si ha subito che il tensore di correlazione tra velocità e pressione è identicamente nullo, ne segue che il secondo tensore nelle definizioni (10.5) è nullo: $P_{ij}(\mathbf{r}) \equiv 0$. Il primo tensore nelle definizioni (10.5) diviene invece: $T_{ij}(\mathbf{r}) = \partial_{r_k} [S_{ikj}(\mathbf{r}) - S_{jki}(-\mathbf{r})]$.

Il metodo più semplice per dedurre una equazione di evoluzione per la funzione di correlazione longitudinale $f = f(r, t)$ consiste nel prendere la traccia della equazione (10.6): $\partial_t R_{ii} = T_{ii} + 2\nu \nabla^2_{\mathbf{r}} R_{ii}$ e sostituirvi le forme funzionali isotrope per R_{ii} (9.39):

$$R_{ii} = u^2(rf' + 3f) = (r\partial_r + 3) u^2 f \quad (10.12)$$

e (ricordare la relazione (9.54): $S_{iki}(\mathbf{r}) = u^3 K(r) r_k / 2$) per T_{ii} :

$$T_{ii}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \partial_{r_j} [u^3 K(r) r_j - u^3 K(r)(-r_j)] = (r\partial_r + 3) u^3 K(r) , \quad (10.13)$$

in cui $K(r) = (\partial_r + 4/r)k(r)$, sempre dalla relazione (9.54). Effettuando il calcolo del Laplaciano in \mathbf{r} di $R_{ii}(\mathbf{r})$ (10.12) abbiamo anche l'importante risultato:

$$\nabla_r^2 R_{ii} = u^2 \left(r f''' + 7f'' + \frac{8f'}{r} \right) = (r\partial_r + 3) u^2 \left(f'' + \frac{4}{r} f' \right). \quad (10.14)$$

Sostituendo le relazioni (10.12, 10.13) e (10.14) nella traccia dell'equazione (10.6) otteniamo:

$$(r\partial_r + 3) \left[\partial_t u^2 f - u^3 \left(\partial_r + \frac{4}{r} \right) k - 2\nu u^2 \left(\partial_r^2 + \frac{4}{r} \partial_r \right) f \right] = 0. \quad (10.15)$$

Come già osservato nel caso dei tensori isotropi del primo ordine a divergenza nulla (cfr. paragrafo 9.3), dalla relazione $(r\partial_r + 3)F = 0$, con F regolare in $r = 0$, segue $F \equiv 0$. In base all'equazione (10.15) si può allora concludere:

$$\boxed{\partial_t u^2 f = u^3 \left(\partial_r + \frac{4}{r} \right) k + 2\nu u^2 \left(\partial_r^2 + \frac{4}{r} \partial_r \right) f} \quad (10.16)$$

dedotta da Karman e Howarth nel 1938. L'equazione (10.16) è il risultato di una integrazione spaziale (in r) dell'equazione per le correlazioni doppie (10.6) e mostra che la variazione nel tempo della correlazione longitudinale è dovuta all'azione delle correlazioni triple (primo termine a secondo membro), le quali trasferiscono energia da strutture vorticose di grande scala a strutture di piccola scala, e della diffusione viscosa (secondo termine). Il fattore u^2 (proporzionale all'energia cinetica media), presente in tutti i termini dell'equazione, è in generale una funzione del tempo (ad esempio, per un campo turbolento in decadimento $u^2(t)$ è una funzione monotona decrescente di t) e quindi non si può portare fuori dalla derivata nel tempo a primo membro dell'equazione (10.16) e semplificare.

Una prima importante conseguenza dell'equazione di Karman-Howarth (10.16) può essere ricavata ponendovi $r = 0$ ed utilizzando il fatto che per piccoli r valgono gli sviluppi di McLaurin per la funzione di correlazione doppia longitudinale $f = f(r)$ (9.36), ovvero $f(r) = 1 - r^2/(2\lambda^2) + O(r^4)$, e per la funzione di correlazione tripla longitudinale $k = k(r)$, ovvero $k(r) = O(r^3)$. Dalla equazione (10.16) segue allora:

$$-\frac{d}{dt} \frac{3u^2}{2} = \bar{\varepsilon} = \frac{15\nu u^2}{\lambda^2}, \quad (10.17)$$

che giustifica il nome di *lunghezza di dissipazione* assegnato a λ . Come verrà ora mostrato, λ è però sempre molto più grande della corrispondente scala di Kolmogorov η .

Infatti, una delle caratteristiche principali della turbolenza è quella di realizzarsi sempre a numeri di Reynolds molto elevati, ovvero in condizioni di netta predominanza dei termini convettivi (non lineari) rispetto a quelli diffusivi (lineari) nella equazione della quantità di moto. Introdotto il numero di Reynolds basato sulla intensità della turbolenza u e sulla scala L come $Re_L = uL/\nu$, avremo quindi sempre $Re_L \gg 1$. Confrontiamo λ con la scala di Kolmogorov η (8.40). Sostituendo il valore della velocità di dissipazione

dell'energia cinetica media $\bar{\varepsilon}$ ricavato dalla (10.16) nella (8.40), otteniamo la relazione seguente λ :

$$\frac{\eta}{L} \propto \left(\frac{\lambda}{L} \right)^{1/2} \text{Re}_L^{-1/2}, \quad (10.18)$$

che consente di quantificare la relazione d'ordine $\eta \ll \lambda$, in termini del numero di Reynolds Re_L .

L'equazione di Karman-Howarth (10.16) possiede ovviamente una equazione corrispondente nello spazio dei numeri d'onda. Come già fatto nello spazio fisico, partiamo dalla traccia dell'equazione (10.9), inserendovi le corrispondenti forme isotrope. Innanzitutto dalla forma isotropa del tensore spettro di energia (9.38) otteniamo per la corrispondente traccia:

$$\Phi_{ii}(\mathbf{k}) = \frac{E(k)}{2\pi k^2}. \quad (10.19)$$

Inoltre, utilizzando la definizione di Γ_{ij} (10.8) e la corrispondente forma funzionale di T_{ij} (10.5) abbiamo:

$$\Gamma_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{r} \partial_{r_p} [S_{ipj}(\mathbf{r}) - S_{jpi}(-\mathbf{r})] e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

ed utilizzando la proprietà di trasformazione secondo Fourier di una derivata e la definizione del tensore Υ (9.52):

$$\Gamma_{ij}(\mathbf{k}) = i k_p [\Upsilon_{ipj}(\mathbf{k}) - \Upsilon_{jpi}(-\mathbf{k})].$$

Attraverso quest'ultima, la forma isotropa di Υ_{ijk} (9.53) fornisce la corrispondente forma isotropa di Γ_{ij} :

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}(\mathbf{k}) &= ik_p \left\{ i\Upsilon(k) \left[k_i k_p k_j - \frac{k^2}{2} (k_i \delta_{pj} + k_p \delta_{ij}) \right] + \right. \\ &\quad \left. - i\Upsilon(k) \left[-k_j k_p k_i - \frac{k^2}{2} (-k_j \delta_{pi} - k_p \delta_{ji}) \right] \right\} \\ &= k^4 \Upsilon(k) \left(\delta_{ji} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right), \end{aligned}$$

da cui segue per la traccia:

$$\Gamma_{ii}(\mathbf{k}) = 2k^4 \Upsilon(k), \quad (10.20)$$

indipendente dalla direzione del vettore d'onda \mathbf{k} . Sostituendo le (10.19, 10.20) nella traccia della (10.9) e ricordando che la traccia di Π è nulla, si ottiene l'equazione per l'evoluzione della funzione spettro di energia:

$$\partial_t E = 4\pi k^6 \Upsilon - 2\nu k^2 E$$

(10.21)

che è stata dedotta da Lin nel 1947. Ovviamente, anche questa equazione mostra come la variazione nel tempo della funzione spettro di energia sia

dovuta all'azione di un termine di trasferimento ($4\pi k^6 \Upsilon$) e della diffusione viscosa ($-2\nu k^2 E$). È importante osservare che quest'ultimo termine è sempre negativo (per ogni tempo t e per ogni numero d'onda k) e comporta quindi una riduzione nel tempo del valore di $E(k, t)$. La velocità di decadimento è proporzionale al quadrato del modulo k del numero d'onda \mathbf{k} ed al valore corrente della funzione spettro di energia $E(k, t)$, oltre che, ovviamente, al coefficiente di viscosità cinematica ν .

Riguardo al significato del termine $4\pi k^6 \Upsilon$, questo può essere chiarito ricordando l'equazione (10.11). In particolare per la traccia Γ_{ii} :

$$0 = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k} \Gamma_{ii}(\mathbf{k}) = \int_0^{+\infty} dk \int_{\partial B_k(\mathbf{0})} dS(\mathbf{k}) \frac{1}{2} \Gamma_{ii}(\mathbf{k}) = \int_0^{+\infty} dk 4\pi k^6 \Upsilon(k) .$$

Il termine $4\pi k^6 \Upsilon(k)$ non altera quindi l'energia cinetica media, ma trasferisce energia tra numeri d'onda differenti. L'analisi dettagliata di tale trasferimento esula dagli scopi di questo testo ed è attualmente oggetto di ricerca ovunque si studi la turbolenza.

10.3 Invarianza del tensore spettro d'energia per piccoli numeri d'onda

Supponiamo di avere un campo turbolento omogeneo, ovvero le cui statistiche, costruite calcolando i campi in punti differenti, dipendono solo dai vettori separazione e non dalle posizioni di tali punti. Abbiamo già visto nel paragrafo 8.3 che il tensore spettro di energia ammette uno sviluppo di McLaurin nella forma (8.37):

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}, t) = \mathbf{C}_{ijlm}(t) k_l k_m + O(k^3) . \quad (10.22)$$

In questo paragrafo mostreremo che i coefficienti \mathbf{C}_{ijlm} sono costanti nel tempo. Per far questo svilupperemo in serie di McLaurin i tensori $\boldsymbol{\Gamma}$ (trasferimento) e $\boldsymbol{\Pi}$ (pressione) a secondo membro dell'equazione di correlazione trasformata (10.9).

10.3.1 Sviluppi per i termini di trasferimento $\boldsymbol{\Gamma}$ e di pressione $\boldsymbol{\Pi}$

Per quello che riguarda i termini inerziali si è visto che vale la seguente definizione di Γ_{ij} :

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{r} T_{ij}(\mathbf{r}) e^{-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \\ &= \frac{ik_p}{(2\pi)^3} \left[\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{r} \overline{u_i(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) u_p(\mathbf{x})} e^{-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + \right. \\ &\quad \left. - \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{r} \overline{u_i(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) u_p(\mathbf{x} + \mathbf{r})} e^{-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mathrm{i} k_p}{(2\pi)^3} \left[\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{r} S_{ipj}(\mathbf{r}) e^{-\mathrm{i} \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} - \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{r} S_{jpi}(-\mathbf{r}) e^{-\mathrm{i} \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right] \\
&= \frac{\mathrm{i} k_p}{(2\pi)^3} \left[\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{r} S_{ipj}(\mathbf{r}) e^{-\mathrm{i} \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} - \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{r}' S_{jpi}(\mathbf{r}') e^{\mathrm{i} \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} \right] \\
&= ik_p [\Upsilon_{ipj}(\mathbf{k}) - \Upsilon_{jpi}(-\mathbf{k})]. \tag{10.23}
\end{aligned}$$

A sua volta il tensore trasformato della correlazione tripla $\Upsilon_{ijl}(\mathbf{k})$ può essere sviluppato in serie di McLaurin: $\Upsilon_{ijl}(\mathbf{k}) = \mathbf{G}_{ijl} + k_p \mathbf{G}_{ijlp} + \dots$, con tutti i coefficienti simmetrici rispetto ai primi due indici ($\mathbf{G}_{ijl} = \mathbf{G}_{jil}$, $\mathbf{G}_{ijlp} = \mathbf{G}_{jilp}$, \dots). Sulla base all'equazione di continuità ($k_l \Upsilon_{ijl}(\mathbf{k}) \equiv 0$), tali coefficienti verificano, per ogni numero d'onda \mathbf{k} il cui modulo è sufficientemente piccolo, la condizione: $\mathbf{0} = k_l \mathbf{G}_{ijl} + k_l k_p \mathbf{G}_{ijlp} + \dots$, dalla quale possiamo dedurre che:

$$\mathbf{G}_{ijl} = \mathbf{0}, \quad \sum_{\pi(l,p)} \mathbf{G}_{ijlp} = \mathbf{0}, \quad \dots \tag{10.24}$$

Ne segue lo sviluppo di McLaurin per la componente (i, j, l) della trasformata di Fourier delle correlazioni triple di velocità:

$$\Upsilon_{ijl}(\mathbf{k}) = k_m \mathbf{G}_{ijlm} + O(k^2) = -k_m \mathbf{G}_{ijml} + O(k^2). \tag{10.25}$$

Utilizzando la forma (10.23) di Γ_{ij} e lo sviluppo appena scritto, possiamo dedurre il corrispondente sviluppo per la componente (i, j) del termine di trasferimento:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ij}(\mathbf{k}) &= \mathrm{i} k_l k_m (\mathbf{G}_{iljm} + \mathbf{G}_{jlim}) + O(k^3) \\
&= \mathrm{i} k_l k_m \sum_{\pi(i,j)} \mathbf{G}_{iljm} + O(k^3) \\
&= k_l k_m \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{\pi(l,m)} \sum_{\pi(i,j)} \mathbf{G}_{iljm}}_{\Gamma_{ijlm}} + O(k^3) \\
&= k_l k_m \Gamma_{ijlm} + O(k^3). \tag{10.26}
\end{aligned}$$

Calcoliamo ora uno sviluppo analogo per la componente (i, j) del termine di pressione $\boldsymbol{\Pi}$ nella equazione (10.9). Per semplicità poniamo $\tilde{p} = p/\rho$. Introduciamo la trasformata di Fourier della correlazione velocità-pressione:

$$\Theta_i(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{r} \overline{u_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \tilde{p}(\mathbf{x})} e^{-\mathrm{i} \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \tag{10.27}$$

dalla quale segue pure ($\mathbf{r}' = -\mathbf{r}$):

$$\overline{u_i(\mathbf{x}) \tilde{p}(\mathbf{x} + \mathbf{r})} = \overline{u_i(\mathbf{x} - \mathbf{r}) \tilde{p}(\mathbf{x})}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{r} \overline{u_i(\mathbf{x} - \mathbf{r}) \tilde{p}(\mathbf{x})} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{r}' \overline{u_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}') \tilde{p}(\mathbf{x})} e^{-i(-\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}'} = \Theta_i(-\mathbf{k}) .
\end{aligned}$$

Inserendo la definizione (10.27) e quest'ultima relazione nella definizione di Π_{ij} (10.5):

$$\begin{aligned}
\Pi_{ij}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{r} [\partial_{r_i} \overline{u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \tilde{p}(\mathbf{x})} - \partial_{r_j} \overline{u_i(\mathbf{x}) \tilde{p}(\mathbf{x} + \mathbf{r})}] e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\
&= i [k_i \Theta_j(\mathbf{k}) - k_j \Theta_i(-\mathbf{k})] .
\end{aligned} \tag{10.28}$$

Al solito, la continuità implica che $k_i \Theta_i(\mathbf{k}) \equiv \mathbf{0}$ e lo sviluppo di McLaurin di $\Theta_i(\mathbf{k})$: $\Theta_i(\mathbf{k}) = \mathbf{T}_i + k_j \mathbf{T}_{ij} + \dots$ verifica allora la relazione $k_i \mathbf{T}_i + k_i k_j \mathbf{T}_{ij} + \dots \equiv \mathbf{0}$ da cui seguono:

$$\mathbf{T}_i = \mathbf{0} , \quad \sum_{\pi(i,j)} \mathbf{T}_{ij} = \mathbf{0} \dots \tag{10.29}$$

Il corrispondente sviluppo per $\Theta_i(\mathbf{k})$ si scrive allora:

$$\Theta_i(\mathbf{k}) = k_j \mathbf{T}_{ij} + O(k^2) , \tag{10.30}$$

che, inserita nella forma (10.28) del termine di pressione, fornisce lo sviluppo di McLaurin per la componente (i, j) del tensore $\boldsymbol{\Pi}$:

$$\begin{aligned}
\Pi_{ij}(\mathbf{k}) &= i (k_i k_m \mathbf{T}_{jm} + k_j k_h \mathbf{T}_{ih}) + O(k^3) \\
&= ik_p k_q (\mathbf{T}_{jq} \delta_{ip} + \mathbf{T}_{ip} \delta_{jq}) + O(k^3) \\
&= ik_p k_q \frac{1}{2} \sum_{\pi(p,q)} (\mathbf{T}_{ip} \delta_{jq} + \mathbf{T}_{jp} \delta_{iq}) + O(k^3) \\
&= k_p k_q \underbrace{\frac{i}{2} \sum_{\pi(i,j)} \sum_{\pi(p,q)} \mathbf{T}_{ip} \delta_{jq}}_{\Pi_{ijpq}} + O(k^3) \\
&= k_p k_q \Pi_{ijpq} + O(k^3) .
\end{aligned} \tag{10.31}$$

Abbiamo quindi ottenuto gli sviluppi di McLaurin per le componenti (i, j) del tensore spettro d'energia $\boldsymbol{\Phi}$ (10.22), $\boldsymbol{\Gamma}$ (10.26) e $\boldsymbol{\Pi}$ (10.31). Questi sviluppi andranno sostituiti nella (10.9), al fine di determinare l'equazione di evoluzione per i coefficienti C_{ijlm} (10.22) del termine d'ordine più basso nello sviluppo del tensore spettro di energia $\boldsymbol{\Phi}$.

10.3.2 Valutazione di $\Gamma_{ijlm} + \Pi_{ijlm}$

Prima di effettuare tale sostituzione è però opportuno far vedere che, in base alle equazioni di Navier-Stokes, $\Gamma_{ijlm} + \Pi_{ijlm} \equiv 0$, per ogni tempo t e per ogni numero d'onda \mathbf{k} .

Iniziamo col ricavare una relazione tra la correlazione velocità-pressione e la correlazione tripla di velocità, deducendo dalle equazioni di Navier-Stokes l'equazione di Poisson per la pressione (o meglio, per il rapporto $p/\rho =: \tilde{p}$) scritta nel punto \mathbf{x} :

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 \tilde{p} = -\partial_{x_i x_l}^2 u_i u_l ,$$

dove, con ovvio significato dei simboli, si è indicato con $\tilde{p} = \tilde{p}(\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Consideriamo un nuovo punto \mathbf{x}' *indipendente da \mathbf{x}* e moltiplichiamo ambo i membri dell'ultima relazione per $u_j(\mathbf{x}', t) = u'_j$, ottenendo in tal modo l'equazione:

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 u'_j \tilde{p} = -\partial_{x_i x_l}^2 u_i u_l u'_j .$$

Introduciamo il vettore separazione $\mathbf{r} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}$ e mediamo d'insieme la relazione precedente. Confondendo, al solito, le medie d'insieme con quelle in probabilità otteniamo:

$$\nabla_{\mathbf{r}}^2 \overline{u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \tilde{p}(\mathbf{x})} = -\partial_{r_i r_l}^2 \overline{u_i(\mathbf{x}) u_l(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r})} . \quad (10.32)$$

Ricordando la definizione di Θ_j (10.27) e della trasformata di Fourier per la correlazione tripla di velocità (9.52) e trasformando secondo Fourier ambo i membri della relazione (10.32):

$$k^2 \Theta_j(\mathbf{k}) = -k_i k_l \Upsilon_{ilj}(\mathbf{k}) . \quad (10.33)$$

Sostituendo nella relazione (10.33) le espansioni di McLaurin per Θ_j (10.30) per Υ_{ilj} (10.25), ricaviamo la relazione seguente tra i coefficienti dei due sviluppi:

$$\mathbf{0} = k^2 k_m \mathbf{T}_{jm} + k_i k_l k_m \mathbf{G}_{ilm} + O(k^4) = k_i k_l k_m (\delta_{il} \mathbf{T}_{jm} + \mathbf{G}_{ilm}) + O(k^4) ,$$

la validità della quale per ogni vettore d'onda \mathbf{k} implica:

$$\sum_{\pi(i,l,m)} (\delta_{il} \mathbf{T}_{jm} + \mathbf{G}_{ilm}) = \mathbf{0} . \quad (10.34)$$

Tenendo conto che dagli sviluppi per le componenti (i, j) degli sviluppi per $\boldsymbol{\Gamma}$ (10.26) e per $\boldsymbol{\Pi}$ (10.31) segue:

$$\begin{aligned} \Pi_{ijlm} + \Gamma_{ijlm} &= \frac{i}{2} \sum_{\pi(i,j)} \sum_{\pi(l,m)} \delta_{jm} \mathbf{T}_{il} + \frac{i}{2} \sum_{\pi(l,m)} \sum_{\pi(i,j)} \mathbf{G}_{ilm} \\ &= \frac{i}{2} \sum_{\pi(i,j)} \sum_{\pi(l,m)} (\delta_{il} \mathbf{T}_{jm} + \mathbf{G}_{ilm}) , \end{aligned} \quad (10.35)$$

mentre una conseguenza della relazione (10.34) è che:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = & \sum_{\pi(l,m)} (\delta_{il} \mathbf{T}_{jm} + \mathbf{G}_{iljm}) + \sum_{\pi(l,m)} (\delta_{li} \mathbf{T}_{jm} + \mathbf{G}_{lijm}) + \\ & + \sum_{\pi(l,m)} (\delta_{ml} \mathbf{T}_{ji} + \mathbf{G}_{mlji}) \\ = & 2 \sum_{\pi(l,m)} (\delta_{il} \mathbf{T}_{jm} + \mathbf{G}_{iljm}) + \sum_{\pi(l,m)} (\delta_{lm} \mathbf{T}_{ji} + \mathbf{G}_{lmji}), \end{aligned}$$

essendo $\mathbf{G}_{iljm} = \mathbf{G}_{lijm}$. Da questa relazione ricaviamo in particolare che:

$$\sum_{\pi(l,m)} (\delta_{il} \mathbf{T}_{jm} + \mathbf{G}_{iljm}) = -\frac{1}{2} \sum_{\pi(l,m)} (\delta_{lm} \mathbf{T}_{ji} + \mathbf{G}_{lmji}) = -(\delta_{lm} \mathbf{T}_{ji} + \mathbf{G}_{lmji}),$$

la quale può essere sostituita nell'ultimo membro della (10.35), ottenendo:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ijlm} + \Pi_{ijlm} &= -\frac{i}{2} \sum_{\pi(i,j)} (\delta_{lm} \mathbf{T}_{ji} + \mathbf{G}_{lmji}) \\ &= -\frac{i}{2} [\delta_{lm} (\mathbf{T}_{ji} + \mathbf{T}_{ij}) + (\mathbf{G}_{lmji} + \mathbf{G}_{lmi})], \end{aligned}$$

che, come anticipato, è identicamente nulla, in base all'equazione di continuità nelle forme (10.24, 10.29).

10.3.3 Condizione di Loitsiansky

Sostituendo gli sviluppi in serie di McLaurin di Φ_{ij} (10.22), Γ_{ij} (10.26) e Π_{ij} (10.31) nell'equazione di evoluzione (10.9), otteniamo la relazione:

$$\dot{\mathbf{C}}_{ijlm} k_l k_m = O(k^3), \quad (10.36)$$

ovvero $C_{ijlm} \equiv$ costante e la forma del tensore spettro di energia per piccoli numeri d'onda ($k \ll k_L$) è invariante nel tempo. Ricordando il significato dei coefficienti dello sviluppo di McLaurin C_{ijlm} , dato dalla (10.22), la condizione (10.36) si traduce nello spazio fisico, divenendo ancor più significativa. Osserviamo infatti che:

$$\begin{aligned} C_{ijlm}(t) &= \frac{1}{2} \partial_{k_l k_m}^2 \Phi_{ij}(\mathbf{k}, t) \Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{0}} \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \partial_{k_l k_m}^2 \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{r} R_{ij}(\mathbf{r}, t) e^{-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{0}} \\ &= -\frac{1}{2(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{r} r_l r_m R_{ij}(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

ed, essendo $C_{ijlm} \equiv$ costante, abbiamo allora che per ogni scelta possibile degli indici l, m, i e j vale il vincolo:

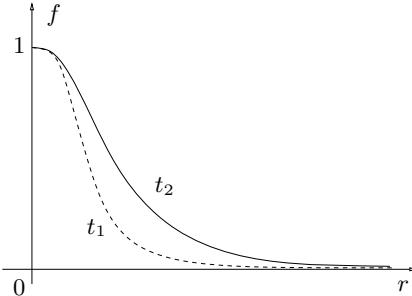


Figura 10.1. Esempio di funzioni di correlazione longitudinale in un campo turbolento in decadimento: la curva tratteggiata si riferisce ad $f(r, t_1)$, mentre la curva continua ad $f(r, t_2)$ con $t_2 > t_1$.

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^3} dr r_l r_m R_{ij}(\mathbf{r}, t) \equiv \text{costante}} \quad (10.37)$$

Nel caso particolare di turbolenza isotropa, in cui il tensore delle correlazioni del secondo ordine a due punti della velocità può essere interamente espresso tramite le funzioni di correlazioni longitudinali f e trasversale g (9.28) nella forma (9.30), la (10.37) diviene una condizione sulla funzione di correlazione longitudinale f . Infatti scegliendo nella (10.37) $l = i$ ed $m = j$, sommando sugli indici ripetuti ed integrando in \mathbb{R}^3 in coordinate sferiche, otteniamo:

$$\int_{\mathbb{R}^3} dr r_i r_j R_{ij}(\mathbf{r}, t) = 4\pi u^2(t) \int_0^{+\infty} dr r^4 f(r, t) ,$$

che, ricordando la (10.37), implica la costanza del prodotto tra $u^2(t)$ (cioè l'energia cinetica media) ed il momento quarto della funzione di correlazione longitudinale $f(r, t)$:

$$\boxed{u^2(t) \int_0^{+\infty} dr r^4 f(r, t) \equiv \text{costante}} \quad (10.38)$$

nota come condizione di Loitsiansky, che la ricavò nel 1939. L'importanza di tale condizione appare subito considerando un campo turbolento in decadimento, ovvero una $u^2(t)$ monotonamente decrescente di t . Ne segue che il momento quarto deve crescere nel tempo, ovvero per $t_1 < t_2$ si deve passare da una $f(r, t_1)$ rappresentata in Fig. 10.1 con linea tratteggiata ad una $f(r, t_2)$ rappresentata nella medesima figura con linea continua, risultando le due velocità in \mathbf{x} ed in $\mathbf{x} + \mathbf{r}$ via via più correlate al crescere del tempo.

10.4 Altre considerazioni sulla dinamica della turbolenza omogenea

In questo paragrafo accenneremo a due importanti tematiche, che possono essere ampiamente approfondite studiando la vasta Letteratura disponibile. Entrambe sono connesse al problema della chiusura delle equazioni per le statistiche di un campo turbolento, ma, mentre la prima fa uso di un approccio nello spazio fisico, la seconda viene sviluppata direttamente nello spazio dei numeri d'onda. Per questo secondo argomento, alla base di gran parte delle moderne trattazioni della turbolenza, si utilizza largamente la trasformata di Fourier, richiamata nell'appendice 8.5 al capitolo 8. L'uso di questo importante strumento è da considerarsi, però, solo in senso formale, non essendo ovviamente possibile soddisfare i requisiti di sommabilità all'infinito per un campo di velocità omogeneo. La questione può essere ampliamente ripresa dal punto di vista strettamente statistico, definendo una nuova trasformata di Fourier (formalmente identica a quella elementare), libera dai vincoli di sommabilità del campo da trasformare (vedi ad esempio [5], paragrafo 2.4).

10.4.1 Ricostruzione delle statistiche nel tempo

Esaminiamo il problema della ricostruzione delle statistiche nel tempo, a partire da dati iniziali noti. Cominciamo col considerare il problema di valutare il campo di velocità $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ad un certo istante t , partendo dalla conoscenza del flusso ad un tempo precedente t_0 . In teoria, tale valutazione può essere effettuata con l'accuratezza desiderata, ovviamente utilizzando le equazioni di Navier-Stokes. Infatti si può pensare di sviluppare in serie di Taylor nel tempo (di punto iniziale t_0) il campo di velocità:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) + \frac{1}{1!} \partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) (t - t_0) + \frac{1}{2!} \partial_{tt}^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) (t - t_0)^2 + \dots \quad (10.39)$$

e di valutare i coefficienti di tale sviluppo, cioè le derivate nel tempo di \mathbf{u} al tempo t_0 , utilizzando le equazioni di Navier-Stokes. Assumiamo che $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}$ insieme a tutte le sue derivate almeno come $1/|\mathbf{x}|^2$ per $\mathbf{x} \rightarrow \infty$ e che $p \rightarrow p_\infty$ nel medesimo limite.

Per la derivata prima tali equazioni si possono usare direttamente (al solito, $\tilde{p} = (p - p_\infty)/\rho$):

$$\partial_t \mathbf{u} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nabla \tilde{p} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} , \quad (10.40)$$

se si riesce a valutare la pressione, utilizzando l'equazione di Poisson $\nabla^2 \tilde{p} = -\partial_{x_k x_i}^2 u_k u_i$. Partendo dalla classica rappresentazione integrale in una sfera $B_R(\mathbf{0})$ centrata nell'origine $\mathbf{0}$ e di raggio R :

$$\begin{aligned} & \int_{B_R(\mathbf{0})} d\mathbf{x}' [G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \nabla_{\mathbf{x}'}^2 \tilde{p}(\mathbf{x}') - \tilde{p}(\mathbf{x}') \nabla_{\mathbf{x}'}^2 G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')] = \\ & = \int_{\partial B_R(\mathbf{0})} dS(\mathbf{x}') G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \partial_{\mathbf{\nu}'} \tilde{p}(\mathbf{x}') - \int_{\partial B_R(\mathbf{0})} dS(\mathbf{x}') \tilde{p}(\mathbf{x}') \partial_{\mathbf{\nu}'} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') , \end{aligned}$$

in cui $G(\mathbf{x}) = -1/(4\pi|\mathbf{x}|)$ è la funzione di Green del ∇^2 e $\boldsymbol{\nu}' = \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}')$ è il versore normale esterno alla $\partial B_R(\mathbf{0})$ nel suo punto \mathbf{x}' . Il primo integrale a secondo membro converge a zero per $R \rightarrow \infty$, infatti dalla (10.40) segue che $\partial_{\boldsymbol{\nu}'} \tilde{p}(\mathbf{x}')$ per $\mathbf{x}' \in \partial B_R(\mathbf{0})$ va a zero almeno come $1/R^2$ (cioè almeno allo stesso modo del campo di velocità) e $G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ va a zero come $1/R$. Anche il secondo integrale converge a zero per $R \rightarrow \infty$, poiché \tilde{p} è infinitesima e $\partial_{\boldsymbol{\nu}'} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ per $\mathbf{x}' \in \partial B_R(\mathbf{0})$ va a zero come $1/R^2$. Calcolando il limite per $R \rightarrow \infty$ otteniamo allora:

$$\tilde{p}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x}' \frac{\partial_{x'_k x'_i}^2 u_k(\mathbf{x}') u_i(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (10.41)$$

cioè si può esprimere la pressione mediante un integrale di convoluzione che contiene il prodotto delle velocità.

Dalle relazioni (10.40, 10.41) segue allora che la derivata prima $\partial_t \mathbf{u}$ dipende da \mathbf{u} semplicemente attraverso il termine diffusivo e dal prodotto delle velocità per il tramite del termine convettivo ed, in modo più complesso, di quello di pressione. Simbolicamente abbiamo allora:

$$\partial_t \mathbf{u} = F_1(\mathbf{u}, \mathbf{u}\mathbf{u}).$$

Procedendo in modo del tutto analogo si ha per la derivata seconda:

$$\begin{aligned} \partial_{tt}^2 \mathbf{u} &= -\partial_t \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla \partial_t \mathbf{u} - \nabla \partial_t \tilde{p} + \nu \nabla^2 \partial_t \mathbf{u} \\ &= F_2(\mathbf{u}, \mathbf{u}\mathbf{u}, \mathbf{u}\mathbf{u}\mathbf{u}) \end{aligned}$$

e così via: la derivata n -esima nel tempo di \mathbf{u} è funzione di \mathbf{u} stessa e dei prodotti di velocità fino all'ordine $n+1$.

In modo assolutamente identico, anche se formalmente più complesso, se si considera la correlazione m -esima delle velocità e lo si sviluppa in serie di Taylor nel tempo (10.39), il coefficiente della potenza $(t - t_0)^n$ in questo sviluppo dipende dalla correlazione stessa, da quelle di ordine $m+1$, da quelle di ordine $m+2$ e via via da tutte le altre, fino a quelle di ordine $m+(n+1)$. Risulta quindi evidente che ad una maggiore accuratezza del calcolo delle correlazioni ad un certo istante t , corrisponde la necessità di conoscere un numero via via più grande di correlazioni ad un istante precedente (t_0). Al limite, se si pretendesse di determinare *esattamente* la correlazione al tempo t , si dovrebbe usare l'intero sviluppo di Taylor e quindi sarebbe necessario conoscere *tutte* le correlazioni al tempo precedente (t_0), ovvero il comportamento statistico del campo random $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$.

10.4.2 Problema nello spazio dei numeri d'onda

Un secondo punto di vista consiste nell'operare direttamente sulle equazioni di Navier-Stokes una trasformata di Fourier formale, al fine di ottenere informazioni sugli scambi di energia tra differenti numeri d'onda. Pensando

che il contenuto energetico associato al generico numero d'onda k è relativo a strutture vorticose di dimensioni geometriche dell'ordine $1/k$, si intuisce come questa analisi può portare ad una maggiore comprensione dei fenomeni di interazione tra vortici che caratterizzano ogni campo turbolento.

Osserviamo innanzitutto che l'equazione (10.41) che definisce \tilde{p} a partire dalla velocità può essere scritta utilizzando l'integrale di convoluzione (8.57) tridimensionale $\tilde{p} = -G * \partial_{ki}^2 u_k u_i$, più adatta se si desidera trasformare secondo Fourier. Inoltre, introdotta la distribuzione di Dirac tridimensionale $\delta(\mathbf{x}) = \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3)$ ed applicando la regola formale di trasformazione di una derivata (8.55) all'operatore di Laplace:

$$\mathcal{F}[\nabla^2 G](\mathbf{k}) = -k^2 \mathcal{F}[G](\mathbf{k}) = \mathcal{F}[\delta](\mathbf{k}) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3},$$

da cui segue la trasformata di Fourier della funzione di Green $\mathcal{F}[G](\mathbf{k}) = -1/(2\pi)^3 k^2$. Applicando allora la proprietà (8.56) alla trasformata della pressione ed indicando con lettere maiuscole le trasformate ($\mathbf{U} = \mathcal{F}[\mathbf{u}]$, $\tilde{P} = \mathcal{F}[\tilde{p}]$) abbiamo:

$$\tilde{P} = -\mathcal{F}[G * \partial_{ki}^2 u_k u_i] = -(2\pi)^3 \mathcal{F}[G] \mathcal{F}[\partial_{pi}^2 u_p u_i] = -\frac{k_p k_i}{k^2} \mathcal{F}[u_p u_i]. \quad (10.42)$$

Ma $\mathcal{F}[u_p u_i] = \mathcal{F}\{\mathcal{F}^{-1}[U_p] \mathcal{F}^{-1}[U_i]\} = \mathcal{F}\{\mathcal{F}^{-1}[U_p * U_i]\} = U_p * U_i$, sulla base della proprietà (8.60) della trasformata di Fourier. Allora la trasformata di Fourier della pressione (10.42) si scrive:

$$\tilde{P}(\mathbf{k}) = -\frac{1}{k^2} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k}' \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}(\mathbf{k}') \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (10.43)$$

continuando ad indicare col prodotto scalare $\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}$ la quantità $k_l U_l$, sebbene le componenti $U_l = U_l^r + i U_l^i$ per $l = 1, 2$ e 3 della trasformata della velocità possano essere non reali.

Facciamo una osservazione molto importante. Se, come si è ammesso, il campo di velocità \mathbf{u} è formalmente trasformabile con Fourier, l'equazione di continuità $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ si scrive nello spazio dei numeri d'onda:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}(\mathbf{k}, t) = k_l U_l^r(\mathbf{k}, t) + i k_m U_m^i(\mathbf{k}, t) \equiv \mathbf{0}, \quad (10.44)$$

per ogni vettore d'onda \mathbf{k} e per ogni tempo t . La (10.44) ammette una interpretazione estremamente suggestiva: costruiti i vettori *a componenti reali* $\mathbf{U}^r = (U_1^r, U_2^r, U_3^r)$ e $\mathbf{U}^i = (U_1^i, U_2^i, U_3^i)$, questi due vettori sono ortogonali al vettore d'onda \mathbf{k} considerato, ovvero giacciono su un piano normale a \mathbf{k} , come rappresentato in Fig. 10.2.

A questo punto le equazioni di Navier-Stokes

$$\partial_t \mathbf{u} = -\partial_l(u_l \mathbf{u}) - \nabla \tilde{p} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}$$

possono essere trasformate formalmente:

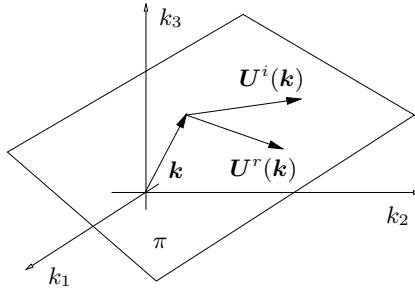


Figura 10.2. In base all'equazione (10.44), considerato un vettore d'onda \mathbf{k} , la trasformata di Fourier della velocità \mathbf{U} gode della proprietà che i vettori ad essa associati \mathbf{U}^r ed \mathbf{U}^i giacciono nel piano π ortogonale a \mathbf{k} .

$$\begin{aligned}\partial_t \hat{\mathbf{u}} &= -i k_m \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k}' U_m(\mathbf{k}') \mathbf{U}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\ &\quad + i \frac{\mathbf{k}}{k^2} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k}' \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}(\mathbf{k}') \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') - \nu k^2 \mathbf{U}.\end{aligned}\quad (10.45)$$

Considerando che, in base all'equazione di continuità (10.44), il primo addendo a secondo membro si riscrive al modo seguente ($\mathbf{k}'' = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$):

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k}' \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}(\mathbf{k}') \mathbf{U}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') &\equiv \\ &\equiv \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k}' [(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{U}(\mathbf{k}') + \mathbf{k}' \cdot \mathbf{U}(\mathbf{k}')] \mathbf{U}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k}'' \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{U}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'') \mathbf{U}(\mathbf{k}'') \\ &\equiv \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k}'' [\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'') - (\mathbf{k} - \mathbf{k}'') \cdot \mathbf{U}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'')] \mathbf{U}(\mathbf{k}'') \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k}'' \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'') \mathbf{U}(\mathbf{k}''),\end{aligned}$$

sostituendo nella trasformata (10.45) otteniamo:

$$\partial_t \mathbf{U}(\mathbf{k}, t) = i \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k}' \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \left[-\mathbf{U}(\mathbf{k}') + \frac{\mathbf{k}}{k^2} \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}(\mathbf{k}') \right] - \nu k^2 \mathbf{U}$$

(10.46)

che è l'equazione di Navier-Stokes nello spazio dei numeri d'onda.

La scrittura dell'equazione (10.46) consente di studiare la turbolenza omogenea direttamente nello spazio dei numeri d'onda. Si introduce una densità di probabilità per \mathbf{U} e, conseguentemente, si possono definire le *correlazioni spettrali*: $\overline{U}_i(\mathbf{k}') U_j(\mathbf{k}'')$, avendo indicato con \overline{U}_i il complesso coniugato di U_i (fare

attenzione a non confondere \overline{U}_i con il valor medio di U_i , che in questa trattazione non appare). Al solito, tali correlazioni possono essere valutate operativamente calcolando la media di insieme del prodotto $\overline{U}_i(\mathbf{k}')U_j(\mathbf{k}'')$, ovvero: $\langle \overline{U}_i(\mathbf{k}')U_j(\mathbf{k}'') \rangle$. Il legame tra le correlazioni spetrali ed il tensore spettro di energia, la cui componente (i, j) $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$ è definita dalla relazione (8.26), è singolare: si può mostrare [29] che $\langle \overline{U}_i(\mathbf{k}')U_j(\mathbf{k}'') \rangle = \Phi_{ij}(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}'')$, in cui $\delta(\mathbf{k})$ è la distribuzione di Dirac tridimensionale in \mathbf{k} . La correlazione $\langle \overline{U}_i(\mathbf{k})U_j(\mathbf{k}) \rangle$ moltiplicata per l'elemento di volume $d\mathbf{k}$ assume quindi il significato di contenuto di energia delle strutture vorticose i cui numeri d'onda giacciono nel parallelepipedo di vertici in \mathbf{k} ed in $\mathbf{k} + d\mathbf{k}$ e lati paralleli agli assi coordinati.

A partire dall'equazione spettrale (10.46), si costruisce una equazione di evoluzione delle correlazioni spettrali. Questa equazione fornisce lo strumento per valutare il flusso d'energia scambiata dalle strutture di scala $1/k$. Infatti, moltiplicando la componente j dell'equazione (10.46) per il coniugato di $U_i(\mathbf{k}, t)$ e sommando membro a membro con la coniugata della componente i della medesima equazione (10.46) moltiplicata per $U_j(\mathbf{k}, t)$, ovvero facendo l'operazione seguente:

$$\begin{aligned} \overline{U}_i \times \left\{ \partial_t U_j = i \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k}' \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \left[-U_j(\mathbf{k}') + \frac{k_j}{k^2} \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}(\mathbf{k}') \right] - \nu k^2 U_j \right\} + \\ U_j \times \left\{ \partial_t \overline{U}_i = i \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k}' \mathbf{k} \cdot \overline{\mathbf{U}}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \left[-\overline{U}_i(\mathbf{k}') + \frac{k_i}{k^2} \mathbf{k} \cdot \overline{\mathbf{U}}(\mathbf{k}') \right] - \nu k^2 \overline{U}_i \right\} \end{aligned}$$

e mediando d'insieme l'equazione somma, otteniamo l'equazione di evoluzione:

$$\begin{aligned} \partial_t \overline{\overline{U}}_i U_j = & \\ = & i k_l \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k}' \left[\overline{U}_l(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \overline{U}_i(\mathbf{k}') U_j(\mathbf{k}) - \overline{U}_l(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \overline{U}_i(\mathbf{k}) U_j(\mathbf{k}') \right] + \\ + i \frac{k_l k_m}{k^2} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k}' \left[k_j \overline{U}_l(\mathbf{k} - \mathbf{k}') U_m(\mathbf{k}') \overline{U}_i(\mathbf{k}) + \right. \\ & \left. - k_i \overline{U}_l(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \overline{U}_m(\mathbf{k}') U_j(\mathbf{k}) \right] + \\ - 2\nu k^2 \overline{\overline{U}}_i(\mathbf{k}) U_j(\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (10.47)$$

Nel secondo membro dell'equazione precedente abbiamo separato i vari contributi: nella prima riga ci sono i termini inerziali (provenienti dal termine convettivo nelle equazioni di Navier-Stokes), nella seconda ci sono i termini di pressione, mentre nell'ultima riga abbiamo scritto i termini diffusivi. L'equazione (10.47) è alla base di molte teorie che si occupano di costruire dei modelli per i termini contenenti le correlazioni prime, scritti utilizzando le sole correlazioni doppie.

Sulla base dell'equazione (10.47), ci limitiamo a verificare due delle proprietà fondamentali dell'equazione di evoluzione per le correlazioni doppie: il fatto che i termini inerziali danno un contributo nullo all'energia del sistema e la

natura isotropizzante dei termini di pressione. Riguardo alla prima questione, integriamo in \mathbf{k} il termine inerziale (a meno dell'unità immaginaria):

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k} k_l \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k}' \left[\overline{\bar{U}_l(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \bar{U}_i(\mathbf{k}') U_j(\mathbf{k})} - \overline{U_l(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \bar{U}_i(\mathbf{k}) U_j(\mathbf{k}')} \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k}' \left[k_l \overline{\bar{U}_l(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \bar{U}_i(\mathbf{k}') U_j(\mathbf{k})} - k_l \overline{\bar{U}_l(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \bar{U}_i(\mathbf{k}) U_j(\mathbf{k}')} \right], \end{aligned}$$

dove nel secondo membro è stata utilizzata l'equazione di continuità per sostituire al termine $\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ il nuovo termine $\mathbf{k}' \cdot \mathbf{U}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ e la proprietà della trasformata di Fourier: $\mathbf{U}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \equiv \overline{\mathbf{U}(\mathbf{k}' - \mathbf{k})}$. È allora evidente che se si scambiano gli integrali in \mathbf{k} ed in \mathbf{k}' del primo o nel secondo addendo a secondo membro, si giunge a scrivere la differenza tra due termini uguali. I termini inerziali trasferiscono energia tra differenti vettori d'onda, fornendo globalmente un contributo nullo al contenuto energetico del sistema.

In base all'equazione di continuità spettrale (10.44) abbiamo infine che il contributo dei termini di pressione alla variazione nel tempo della correlazione $\overline{\bar{U}_i(\mathbf{k}) U_i(\mathbf{k})}$ è identicamente nullo per ogni vettore d'onda \mathbf{k} . Ovvero l'effetto dei termini di pressione è di trasferire energia dalla componente in una direzione a quella in un'altra, senza alterare la traccia del tensore di correlazione spettrale.

10.5 Curiosando in biblioteca

Sugli argomenti discussi negli ultimi quattro capitoli esistono intere biblioteche. Ci limitiamo quindi a segnalare solo pochi riferimenti, utili nello studio dell'argomento, non pretendendo di fornire un quadro d'insieme della Letteratura esistente.

Uno dei libri meno complessi sull'argomento è quello di Libby [21]. Nel cap. 3 vengono illustrati il concetto di media temporale di una funzione e quindi il significato dell'aggettivo “statisticamente stazionario”. A p. 27 è poi introdotto lo strumento più importante dell'analisi statistica della turbolenza: la media d'insieme. Alcune proprietà dell'operatore di media, legate alla linearità, sono elencate e provate a p. 28, mentre nel §3.3 vengono definiti la funzione densità di probabilità ed i momenti di una variabile statisticamente stazionaria. Il tensore di correlazione doppia della velocità e la sua trasformata di Fourier (tensore spettro d'energia) sono poi presentati a p. 48, mentre a p. 53 viene mostrata la relazione tra la funzione spettro d'energia $E(k)$ e la traccia del tensore spettro d'energia, spiegando perché l'integrale in k (da 0 a $+\infty$) di E fornisce l'energia cinetica media. Nell'ipotesi di turbolenza omogenea ed isotropa, alla pagina successiva viene dedotto il legame tra il tensore spettro d'energia e la funzione spettro d'energia. Nel cap. 5 viene trattata la dinamica, premettendo la definizione delle due correlazioni longitudinale e trasversale (p. 90) e delle due scale integrali L_p ed L_n (p. 92). Alla stessa

pagina l'Autore deduce anche gli sviluppi in serie di McLaurin dei coefficienti di correlazione $f(r)$ e $g(r)$, definendo la lunghezza di dissipazione λ . Infine, nelle pp. 94-95 vengono dedotte l'equazione di Lin e di Karman-Howarth. Un testo molto importante è quello di Mathieu e Scott [23], in cui possono essere trovati approfondimenti su tutti gli argomenti trattati nel presente volume. Segnaliamo in particolare che il cap. 6 è dedicato alla dinamica spettrale della turbolenza omogenea. Introdotta l'operazione di trasformata secondo Fourier, questa viene applicata al tensore di correlazione doppia della velocità, definendo in tal modo il tensore spettro d'energia (pp. 240 e 241), di cui viene subito dedotta l'hermitianità. La funzione spettro d'energia $E(k)$ è introdotta a p. 143, sottolineandone il significato. Nel §6.2 viene illustrata la procedura per arrivare, partendo dalle equazioni di Navier-Stokes, ad una equazione della dinamica spettrale, riportando i tipici andamenti in k dei termini di dissipazione e trasferimento, in essa presenti. Nel §6.4 si iniziano a valutare le conseguenze dell'isotropia sulle correlazioni doppie, definendo i due coefficienti di correlazione f e g e deducendo il legame tra il tensore spettro d'energia e la funzione spettro d'energia. A p. 265 troviamo la forma isotropa del tensore di correlazione doppia della velocità, mentre alla pagina seguente sono definite le due scale integrali L_p ed L_n . Nelle pp. 270-271 viene invece dedotta la forma isotropa del tensore di correlazione tripla della velocità ed a seguire l'equazione di Karman-Howarth.

Sul libro di Tennekes e Lumley [35] troviamo, nel cap. 6, un primo paragrafo d'introduzione ai concetti fondamentali della Statistica. Viene spiegato il significato di densità di probabilità di una variabile random (gli Autori utilizzano l'esempio di una funzione del tempo diagrammata da un oscilloscopio) e sono definiti i momenti di una variabile random, evidenziando che la trasformata di Fourier della densità di probabilità ammette uno sviluppo in tali momenti. A pagina 205 è introdotta la relazione di Parseval (che non viene però dimostrata). Il concetto di correlazione tra due funzioni del tempo si trova a p. 207, accompagnato da molte figure esplicative. Le definizioni della correlazione doppia (nello spazio) della velocità e della sua trasformata di Fourier sono collocate a p. 250, mentre alla pagina successiva è infine definita la funzione spettro d'energia. Il testo di Hinze [13] è una delle pietre miliari della turbolenza (è citato in quasi tutte le bibliografie dei testi successivi): ne consigliamo un'approfondita consultazione, anche per motivi storici. Le prime 14 pagine sono dedicate ad una esposizione introduttiva dei concetti di turbolenza omogenea ed omogenea ed isotropa, con le definizioni di medie spaziali, temporali e d'insieme. È inoltre proposta l'analisi di un suggestivo esperimento (flusso attorno ad un cilindro rotondo), corredata da alcune figure di straordinaria chiarezza. Nelle pp. 15-29, le equazioni del moto sono mediate nel tempo, definendo il tensore degli sforzi di Reynolds. Le correlazioni doppie di velocità sono introdotte nelle pp. 30-35, deducendone subito la dinamica (pp. 35-39); troviamo poi le definizioni dei coefficienti f e g ed il loro sviluppo in serie di McLaurin, con la conseguente definizione della lunghezza di dissipazione λ e delle scale integrali L_p ed L_n . Il cap. 2 è interamente dedicato

alla presentazione delle più comuni tecniche di misura sperimentale, mentre nel cap. 3 si scrivono le forme isotrope dei tensori di correlazione. Da notare (pp. 181-189) l'interpretazione geometrica della riscrittura del tensore di correlazione doppia della velocità mediante i coefficienti f e g . Successivamente, individuata la forma isotropa del tensore di correlazione tripla della velocità (pp. 189-194), l'Autore deduce l'equazione di Karman-Howarth (pp. 195-202), sottolineando alcune importanti osservazioni sul problema della chiusura. Nelle pp. 202-209 viene discussa la dinamica spettrale, introducendo la funzione ed il tensore spettro d'energia e scrivendo l'equazione di Lin (pp. 211-215).

Infine, anche sul testo di Kundu e Cohen [17] troviamo il cap. 13 dedicato alla turbolenza. Il capitolo si apre con una discussione delle caratteristiche di un campo turbolento, introducendo (§3) i concetti di media temporale e d'insieme (ma non quella in probabilità) ed evidenziando le proprietà di linearità di questi operatori (permutazione di medie ed integrali, o derivate). Introdotto il tensore di correlazione doppia della velocità, viene poi definito il tensore spettro d'energia (§4). Il capitolo prosegue illustrando l'uso della decomposizione di Reynolds nelle equazioni del moto, deducendo la forma del tensore degli sforzi di Reynolds e le equazioni di bilancio dell'energia cinetica media (§6) e di quella turbolenta (§7). Da consigliare anche il libro [36], nel quale la parte riservata alla turbolenza è molto approfondita. Definite (pp. 426-431) le medie temporale, spaziale e d'insieme, si discute quando è possibile identificare medie d'insieme e spaziale. Vengono inoltre enunciate le proprietà fondamentali dell'operatore di media. Nelle pp. 431-433 sono introdotte le nozioni di funzione di distribuzione, densità di probabilità e media in probabilità, definendo poi le funzioni di correlazione. Nelle pagine successive, l'Autore si sofferma su alcune correlazioni notevoli, come le correlazioni doppia e tripla della velocità o la correlazione pressione-velocità e deduce l'equazione della dinamica delle correlazioni doppie di velocità, dapprima in condizioni omogenee e poi (pp. 440-450) omogenee ed isotrope. In queste ultime condizioni viene ricavata l'equazione di Karman-Howarth. Successivamente (pp. 450-456), l'analisi si sposta nello spazio dei numeri d'onda, giungendo alla scrittura dell'equazione di Lin. Nelle pagine immediatamente successive vengono discusse le ipotesi di Kolmogorov, Heisenberg e Pao sul trasferimento di energia. Infine l'Autore illustra, in modo molto dettagliato, il modello di chiusura $k-\varepsilon$, che fa uso di due equazioni differenziali aggiuntive, per l'energia cinetica turbolenta (\bar{k}) e per la sua velocità di dissipazione ($\bar{\varepsilon}$).

11

Valutazioni semi-empiriche degli effetti della turbolenza

In questo capitolo verranno brevemente descritte le caratteristiche essenziali di alcune tecniche per la simulazione numerica di campi turbolenti. Questo settore della Fluidodinamica Numerica è quello in cui sono concentrati gli sforzi della gran parte dei ricercatori e quindi il materiale disponibile è immenso. Non volendo dare un panorama completo, che esula anche dalle competenze degli autori, si cercherà di limitare la trattazione ad alcuni argomenti di grande importanza.

Dopo una breve descrizione delle problematiche della *simulazione numerica diretta* della turbolenza (§ 11.1), verrà presentato il modello di turbolenza che ha avuto storicamente maggiore successo (§ 11.2), che prevede di trattare il tensore di Reynolds in analogia al tensore degli sforzi. Si accennerà quindi, nel paragrafo 11.3, ad una tecnica di chiusura delle equazioni mediate di insieme che fa uso di un modello di viscosità turbolenta, scritta in funzione dell'energia cinetica turbolenta e della velocità di dissipazione dell'energia. Nel paragrafo 11.4 sarà descritto un nuovo approccio alla simulazione di campi turbolenti, basato sulla *simulazione delle grandi scale* e sulla modellazione delle piccole.

Un breve percorso bibliografico, per approfondire le applicazioni numeriche descritte nel presente capitolo, è proposto nel paragrafo 11.5.

11.1 La simulazione numerica diretta (*DNS*)

L'approccio numerico più semplice allo studio numerico di campi turbolenti consiste nella simulazione diretta del flusso. Si parla di *simulazione diretta* (*Direct Numerical Simulation*) quando la discretizzazione spaziale e temporale consente di descrivere accuratamente la dinamica delle strutture vorticose di tutte le scale presenti nel campo. Il passo nel tempo dovrà essere sensibilmente minore della scala dei tempi dissipativa $(\nu/\bar{\varepsilon})^{1/2}$, mentre gli intervalli di discretizzazione spaziale dovranno risultare più piccoli della scala di Kolmogorov η (8.40). In linea di principio, quindi, per effettuare una simulazione

diretta si utilizza un numero di punti dell'ordine di¹ $\text{Re}_L^{9/4}$ ed effettuare un numero di passi nel tempo dell'ordine di $\text{Re}_L^{1/2}$. Si capisce quindi che, non appena il numero di Reynolds diviene dell'ordine di 10^4 , la *DNS* non è più realizzabile con le potenzialità di calcolo attualmente disponibili.

Pur non essendo uno strumento di previsione in condizioni di flusso realistiche, la simulazione diretta è un importante ausilio nella costruzione, verifica e taratura (a basso numero di Reynolds) di ogni modello di turbolenza. Infatti, la *DNS* offre indiscutibili vantaggi, anche rispetto a tecniche di misura sperimentale. Il più importante riguarda la possibilità di ottenere tutti i dettagli di ciascuna realizzazione del flusso, con una accuratezza controllata. Inoltre, numericamente possono realizzarsi con facilità condizioni (geometriche, di forzamento, ...) che pongono invece enormi difficoltà dal punto di vista sperimentale.

Per statistiche di ordine basso e nel tentativo di superare la difficoltà di realizzare *DNS* a Re_L relativisti, è stato proposto di integrare le equazioni mediate d'insieme: le variabili mediate non presentano infatti contributi importanti sulle piccole scale, risultando molto meno impegnativa la loro discretizzazione. Il problema è che l'operazione di media su equazioni non lineari fa apparire nuove incognite, come vedremo analizzando alcuni dettagli di questo approccio nel prossimo paragrafo.

11.2 Equazioni per il campo medio

Per numeri di Reynolds Re_L di interesse ingegneristico (Re_L da 10^6 a 10^9), la scala L delle grandi strutture vorticose che contengono la maggior parte dell'energia cinetica del campo e la scala di Kolmogorov η sono diverse di molti ordini di grandezza. In queste condizioni non è possibile effettuare una simulazione numerica *diretta* della soluzione delle equazioni di Navier-Stokes, se non con l'impiego di gigantesche risorse di calcolo, al momento difficilmente disponibili. È però possibile adottare un approccio completamente differente: rinunciando alla descrizione campione per campione del flusso, si può tentare di risolvere direttamente le equazioni del moto mediate d'insieme, poiché l'operazione di media d'insieme elimina la gran parte delle piccole scale e consente una agevole soluzione numerica. Questo approccio viene spesso chiamato *media di Reynolds* delle equazioni del moto.

Tutti i campi vengono allora decomposti nella somma di medie d'insieme, confuse poi con quelle in probabilità, e fluttuazioni. Ad esempio, il campo di velocità \mathbf{u} viene pensato come somma di un campo medio ($\bar{\mathbf{u}}$) e di un campo fluttuante \mathbf{u}' , definito proprio per differenza:

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}} . \quad (11.1)$$

¹ Utilizziamo al solito il numero di Reynolds $\text{Re}_L = uL/\nu$, calcolato con la velocità $u = [2\bar{k}/3]^{1/2}$ e la scala di lunghezze L delle grandi strutture vorticose.

La media d'insieme dei campi fluttuanti risulta quindi nulla. Questo modo di trattare i campi random prende il nome di *decomposizione di Reynolds*.

Mediamo allora d'insieme l'equazione di continuità e sottraiamo membro a membro da quella l'equazione mediata, otteniamo in tal modo:

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}' = 0, \quad (11.2)$$

la quale, essendo lineare, implica che il campo medio $\bar{\mathbf{u}}$ ed il campo di perturbazione \mathbf{u}' siano entrambi solenoidali. Consideriamo ora il prodotto di due componenti di velocità, ad esempio $u_i u_j$, che appare nel termine convettivo delle equazioni della quantità di moto. Utilizzando la decomposizione di Reynolds:

$$u_i u_j = \bar{u}_i \bar{u}_j + (u'_i \bar{u}_j + \bar{u}_i u'_j) + u'_i u'_j. \quad (11.3)$$

Mediando d'insieme otteniamo allora: $\bar{u}_i \bar{u}_j = \bar{u}_i \bar{u}_j + \bar{u}'_i \bar{u}'_j$; a causa della non linearità di questo termine, conoscere i campi medi non consente di determinare la media del prodotto, in quanto in quest'ultima appare anche la media del prodotto delle fluttuazioni. In particolare, ne segue che l'energia cinetica media $K = \bar{u}_i \bar{u}_i / 2$ si scrive come somma dell'energia cinetica del campo medio $\bar{K} = \bar{u}_i \bar{u}_i / 2$ e dell'*energia cinetica turbolenta*² $\bar{k} = \bar{u}'_i \bar{u}'_i / 2$.

Mediando d'insieme la componente i -esima delle equazioni di Navier-Stokes:

$$\rho(\partial_t u_i + u_j \partial_j u_i) = -\partial_i p + \mu \nabla^2 u_i, \quad (11.4)$$

otteniamo che il valore medio \bar{u}_i verifica l'equazione:

$$\rho(\partial_t \bar{u}_i + \bar{u}_j \partial_j \bar{u}_i) = \partial_j \left[\underbrace{-\bar{p} \delta_{ij} + \mu(\partial_j \bar{u}_i + \partial_i \bar{u}_j)}_{\bar{\tau}_{ij}} \underbrace{- \rho \bar{u}'_i \bar{u}'_j}_{\bar{\tau}'_{ij}} \right]. \quad (11.5)$$

A secondo membro appare la componente i -esima della divergenza di un tensore differente da quello usuale degli sforzi. Sebbene i primi due addendi (sforzo di pressione media $-\bar{p} \delta_{ij}$ e sforzo viscoso medio $2\mu \bar{S}_{ij}$) compongano l'usuale componente (i, j) del tensore degli sforzi ($\bar{\tau}_{ij}$), calcolata in base al flusso medio, a secondo membro dell'equazione (11.5) appare anche un terzo addendo: la media del prodotto delle componenti fluttuanti di velocità. Nell'equazione per la quantità di moto media, la natura turbolenta del flusso produce quindi lo sforzo aggiuntivo $\bar{\tau}'$, chiamato *sforzo di Reynolds*. Osserviamo che la traccia di $\bar{\tau}'$ vale $-2\rho \bar{k}$.

Il problema fondamentale, posto dalla soluzione dell'equazione per il campo medio (11.5), è quello di scrivere il tensore degli sforzi di Reynolds in funzione dei campi medi. Una qualunque equazione del tipo $\bar{\tau}' = \bar{\tau}'(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{S}}, \bar{p})$ prende il nome di *equazione modello*, o semplicemente *modello*. Qualunque modello è frutto di analisi e sperimentazioni molto complesse. Nessuno risulta fondato da un punto di vista strettamente teorico. Anzi, la regola è che

² Fare molta attenzione a non confondere \bar{k} con un numero d'onda! Non faremo uso di trasformata di Fourier in questo paragrafo.

il modello dipenda dalla tipologia di flusso turbolento (turbolenza nello spazio libero, di scia, di strato limite, ...) da analizzare: non esiste un modello “universale”.

Uno dei modelli che hanno avuto maggiore successo in Letteratura è quello che ipotizza un legame del tutto simile a quello degli sforzi viscosi tra τ' ed \bar{S} , ovvero:

$$\tau'_{ij} \simeq -\frac{2}{3} \rho \bar{k} \delta_{ij} + 2\mu' \bar{S}_{ij} = -\frac{2}{3} \rho \bar{k} \delta_{ij} + \mu' (\partial_j \bar{u}_i + \partial_i \bar{u}_j) , \quad (11.6)$$

in cui il primo addendo a secondo e terzo membro è necessario per garantire alla traccia di τ' il valore corretto $-2\rho\bar{k}$. Il coefficiente μ' prende il nome, in similitudine con gli sforzi viscosi, di *coefficiente di viscosità turbolenta*, analogamente si introduce anche $\nu' = \mu'/\rho$. Osserviamo però che, mentre il coefficiente di viscosità μ (o di viscosità cinematica ν) dipende solo dalla natura del fluido, μ' (e così pure ν') dipende dal campo turbolento in esame e non dalla natura del fluido (ricordare la dipendenza del modello dal tipo di campo turbolento). La posizione (11.6) ha avuto storicamente una grande importanza, consentendo analisi approssimate di alcuni tra i più importanti campi turbolenti. Ovviamente, l’uso della “relazione costitutiva” (11.6) semplifica grandemente il problema di valutare τ' , riducendolo alla determinazione della sola funzione scalare μ' , invece che delle sei componenti indipendenti di τ' .

Inserendo la “relazione costitutiva” (11.6) nell’equazione (11.5), il termine $-2\rho\bar{k}/3$ viene normalmente assorbito in $\bar{p} = \bar{p}/\rho$ (con un piccolo abuso formale, non cambiamo simbolo) e l’equazione risultante si scrive:

$$\partial_t \bar{u}_i + \bar{u}_j \partial_j \bar{u}_i = \partial_j [\nu' (\partial_j \bar{u}_i + \partial_i \bar{u}_j)] - \partial_i \bar{p} + \nu \nabla^2 \bar{u}_i . \quad (11.7)$$

L’equazione (11.7) mostra come, se ν' potesse ritenersi *costante* e *positivo*, l’effetto della turbolenza sul campo medio sarebbe semplicemente quello di incrementare la diffusività di quantità di moto, da ν a $\nu + \nu'$.

11.3 Modellistica per le equazioni mediate (RANS)

Analizziamo una classe di modelli frequentemente utilizzati (anche in codici commerciali) per descrivere l’effetto delle fluttuazioni turbolente sui campi medi, comunemente indicata con l’acronimo RANS (*Reynolds Averaged Navier-Stokes*).

Partendo dal modello (11.6), si ipotizza che il coefficiente di diffusività turbolenta (ν') possa essere scritto in funzione della sola energia cinetica turbolenta \bar{k} e della velocità di dissipazione $\bar{\varepsilon}$. Per costruire questo legame si utilizza una analisi dimensionale. Essendo $[\bar{k}] = \mathcal{L}^2 \mathcal{T}^{-2}$ e $[\bar{\varepsilon}] = \mathcal{L}^2 \mathcal{T}^{-3}$, assumendo $\nu' = \bar{k}^\alpha \bar{\varepsilon}^\beta$ otteniamo l’equazione dimensionale:

$$\mathcal{L}^2 \mathcal{T}^{-1} = \mathcal{L}^{2(\alpha+\beta)} \mathcal{T}^{-(2\alpha+3\beta)} ,$$

da cui segue $\alpha = 2$ e $\beta = -1$. Quindi il coefficiente di diffusività turbolenta viene assunto della forma:

$$\nu' = C_\nu \frac{\bar{k}^2}{\bar{\varepsilon}}, \quad (11.8)$$

dove la costante C_ν è assegnata. Si aggiungono quindi alle equazioni medie, due nuove equazioni di evoluzione: una per l'energia cinetica turbolenta \bar{k} e l'altra per la dissipazione di energia $\bar{\varepsilon}$. Per tale motivo, questi modelli sono noti in Letteratura come *modelli k-ε*.

Innanzitutto, procuriamoci una equazione per l'energia cinetica turbolenta \bar{k} . Sottraendo membro a membro dall'equazione (11.4) l'equazione per il campo medio (11.5), otteniamo che la fluttuazione u'_i verifica l'equazione di evoluzione:

$$\partial_t u'_i + \bar{u}_j \partial_j u'_i = -u'_j \partial_j \bar{u}_i - u'_j \partial_j u'_i + \partial_j \bar{u}'_i \bar{u}'_j - \partial_i \tilde{p}' + \nu \nabla^2 u'_i,$$

in cui abbiamo evidenziato a primo membro il trasporto della fluttuazione da parte del campo medio. Moltiplicando primo e secondo membro per u'_i e sommando sull'indice i otteniamo:

$$\partial_t \frac{u'_i u'_i}{2} + \bar{u}_j \partial_j \frac{u'_i u'_i}{2} = -u'_i u'_j \partial_j \bar{u}_i - u'_j \partial_j \frac{u'_i u'_i}{2} + u'_i \partial_j \bar{u}'_i \bar{u}'_j - \partial_i u'_i \tilde{p}' + \nu u'_i \nabla^2 u'_i, \quad (11.9)$$

in cui abbiamo anche considerato l'equazione di continuità (11.2).

Osserviamo che la media d'insieme del termine diffusivo, l'ultimo a secondo membro dell'equazione (11.9), può essere trasformata al modo seguente:

$$\nu \bar{u}'_i \nabla^2 \bar{u}'_i \equiv \nu (\nabla^2 \bar{k} - \partial_k \bar{u}'_i \partial_k \bar{u}'_i),$$

oppure considerando che $\partial_k u'_i \partial_k u'_i \equiv (\partial_k u'_i - \partial_i u'_k)(\partial_k u'_i - \partial_i u'_k)/2 + \partial_k u'_i \partial_i u'_k$ e che, dalla definizione di componente fluttuante della vorticità $\omega' = \nabla \times \mathbf{u}'$, vale pure la $\partial_k u'_i - \partial_i u'_k = \varepsilon_{pki} \omega_p$ possiamo riscrivere il termine diffusivo come:

$$\nu \bar{u}'_i \nabla^2 \bar{u}'_i = \nu (\nabla^2 \bar{k} - \partial_{pq}^2 \bar{u}'_p \bar{u}'_q - \bar{\omega}'_i \bar{\omega}'_i).$$

I primi due termini a secondo membro sono in generale trascurabili rispetto al terzo, in cui compaiono le derivate spaziali delle fluttuazioni di velocità. Un'ottima approssimazione della media d'insieme del termine diffusivo nell'equazione (11.9) è allora la seguente:

$$\nu \bar{u}'_i \nabla^2 \bar{u}'_i \simeq -\nu \bar{\omega}'_i \bar{\omega}'_i = -\bar{\varepsilon}, \quad (11.10)$$

ricordando la definizione di velocità di dissipazione dell'energia cinetica turbolenta ³ $\bar{\varepsilon}$. Questa relazione diviene esatta nel caso di turbolenza omogenea,

³ Occorre notare che nel § 8.3 la quantità $\bar{\varepsilon}$ viene chiamata velocità di dissipazione dell'*energia cinetica media*, mentre qui si parla di *energia cinetica turbolenta*. L'apparente contraddizione si risolve ricordando che nel cap. 8 si parla di turbolenza omogenea e quindi il campo medio di velocità \bar{u} è identicamente costante nello spazio. Non ha quindi senso parlare dell'energia cinetica del campo medio. Nel presente capitolo, ovviamente, ciò non accade ed ha senso parlare sia dell'energia cinetica del campo medio che della componente turbolenta.

nel quale \bar{k} e $\overline{u'_p u'_q}$ non dipendono dalla posizione.

Mediando d'insieme l'equazione (11.9), trascurando i termini di correlazione velocità-pressione $-\partial_i \bar{u}'_i \bar{p}'$ e $\partial_j \bar{u}'_j \bar{k}$ (identicamente nulli nel caso omogeneo) e considerando la forma (11.10) del termine diffusivo, otteniamo l'equazione per l'energia cinetica turbolenta:

$$\partial_t \bar{k} + \bar{u}_j \partial_j \bar{k} = \underbrace{-\bar{u}'_i \bar{u}'_j \partial_j \bar{u}_i - \bar{\varepsilon}}_{\Pi}, \quad (11.11)$$

in cui il primo termine a secondo membro è un termine di produzione, generalmente indicato con Π , dovuta ai gradienti del campo medio ed il secondo è il termine dissipativo, dovuto alla natura viscosa del fluido. Nel termine di produzione la componente (i, j) di τ' viene valutata utilizzando il modello (11.6). A questo proposito, occorre osservare che il primo addendo a secondo e terzo membro del modello (11.6), cioè $-2 k \delta_{ij}/3$, non fornisce contributi nel termine di produzione Π , essendo moltiplicato per $\partial_m \bar{u}_m$. E questo termine è nullo in base all'equazione di continuità (11.2).

L'equazione per $\bar{\varepsilon}$ è maggiormente modellata, infatti si ipotizza la presenza di un termine di produzione proporzionale al termine di produzione per \bar{k} (Π) ed un termine di dissipazione proporzionale al corrispondente termine nell'equazione (11.11). Complessivamente il modello k - ε prevede l'integrazione del seguente sistema di equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_j \bar{u}_j = 0 \\ \partial_t \bar{u}_i + \bar{u}_j \partial_j \bar{u}_i = \partial_j [-\bar{p} \delta_{ij} + (\nu + \nu') (\partial_j \bar{u}_i + \partial_i \bar{u}_j)] \\ \partial_t \bar{k} + \bar{u}_j \partial_j \bar{k} = \Pi - \bar{\varepsilon} \\ \partial_t \bar{\varepsilon} + \bar{u}_j \partial_j \bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon} (C_{\varepsilon 1} \Pi - C_{\varepsilon 2} \bar{\varepsilon}) / \bar{k} \end{array} \right. \quad (11.12)$$

con: $\nu' = C_\nu \bar{k}^2 / \bar{\varepsilon}$, $\Pi = \nu' (\partial_k \bar{u}_m + \partial_m \bar{u}_k) \partial_k \bar{u}_m$.

La scelta delle costanti C_ν , $C_{\varepsilon 1}$ e $C_{\varepsilon 2}$ va fatta in base all'esperienza ed al tipo di flusso da analizzare.

Nel prossimo paragrafo descriveremo un approccio meno empirico all'integrazione delle equazioni per il campo medio: la simulazione delle grandi scale. Questa formulazione del problema prevede di integrare "esattamente" (nei limiti delle approssimazioni numeriche) il moto delle grandi strutture vorticose, tentando quindi di ridurre gli effetti del modello alle sole piccole scale. Essendo il contenuto energetico di queste ultime molto piccolo, l'effetto delle approssimazioni introdotte dal modello sulla dinamica complessiva viene in tal modo drasticamente ridotto.

11.4 La simulazione delle grandi scale (LES)

In questo approccio si cerca di separare idealmente le grandi strutture vorticose dal resto del campo. A tal fine si utilizza una operazione di filtraggio

delle equazioni del moto, che vengono quindi scritte nei campi filtrati. Ovviamente, le piccole scale forniscono un contributo (analogo al tensore degli sforzi di Reynolds) nell'equazione della quantità di moto media, che deve essere opportunamente approssimato. La scelta del modello e la sua taratura devono essere fatte considerando anche gli effetti della discretizzazione delle equazioni alle derivate parziali, preliminare alla loro soluzione numerica.

11.4.1 La funzione di filtro e l'operazione di filtraggio

Cominciamo ad analizzare l'operazione di filtraggio delle equazioni del moto. Supponiamo di utilizzare una *funzione di filtro* $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dipendente dalle coordinate adimensionali spaziale $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^3$ e temporale $t' \in \mathbb{R}$. f verifichi le seguenti proprietà: 1) sia C^∞ (questa ipotesi si può rilassare lavorando con distribuzioni, anziché con funzioni); 2) sia esponenzialmente infinitesima all'infinito insieme a tutte le sue derivate o, meglio, a supporto compatto; 3) il suo integrale su $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ sia unitario. Introduciamo l'*ampiezza spaziale* δ_s e l'*ampiezza temporale* δ_t del filtro e quindi l'operazione di filtraggio su un qualunque campo sommabile (per semplicità scalare) $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nel modo seguente:

$$\mathcal{H}_f[g](\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\delta_s^3 \delta_t} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{y} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau f \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\delta_s}, \frac{t - \tau}{\delta_t} \right) g(\mathbf{y}, \tau). \quad (11.13)$$

Se le ampiezze del filtro (δ_s e δ_t) sono costanti,⁴ allora le operazioni di filtraggio (11.13) e di derivazione commutano. Infatti, scegliamo una qualunque direzione \mathbf{d} in $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ (con $|\mathbf{d}| = 1$) e filtriemo la derivata lungo \mathbf{d} di g :⁵

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_f[\partial_{\mathbf{d}} g] &\equiv \frac{1}{\delta_s^3 \delta_t} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{y} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left\{ \partial_{\mathbf{d}}^{(\mathbf{y}, \tau)} \left[f \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\delta_s}, \frac{t - \tau}{\delta_t} \right) g(\mathbf{y}, \tau) \right] + \right. \\ &\quad \left. - g(\mathbf{y}, \tau) \partial_{\mathbf{d}}^{(\mathbf{y}, \tau)} f \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\delta_s}, \frac{t - \tau}{\delta_t} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (11.14)$$

Applicando le formule di Green, il primo contributo, ovvero l'integrale della derivata, si annulla, in base alle proprietà all'infinito della funzione filtro f . Inoltre, poiché vale la seguente identità:

$$\partial_{\mathbf{d}}^{(\mathbf{y}, \tau)} f \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\delta_s}, \frac{t - \tau}{\delta_t} \right) \equiv -\partial_{\mathbf{d}}^{(\mathbf{x}, t)} f \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\delta_s}, \frac{t - \tau}{\delta_t} \right),$$

⁴ Nel caso di flussi turbolenti non omogenei, come accade in presenza di pareti, è possibile che l'ampiezza spaziale del filtro dipenda dalla coordinata \mathbf{y} in cui viene calcolata la funzione da filtrare g .

⁵ Indicheremo con $\partial_{\mathbf{d}}^{(\mathbf{x}, t)}$ la derivata fatta lungo \mathbf{d} utilizzando le variabili \mathbf{x} e t e con $\partial_{\mathbf{d}}^{(\mathbf{y}, \tau)}$ quella che usa \mathbf{y} e τ . Nei casi in cui non vi è ambiguità, ometteremo l'apice.

portando fuori dall'integrale in \mathbf{y} e τ la derivata in \mathbf{x} e t otteniamo dalla relazione (11.14) la possibilità di invertire derivata e filtraggio:

$$\mathcal{H}_f[\partial_{\mathbf{d}} g] = \partial_{\mathbf{d}} \mathcal{H}_f[g] . \quad (11.15)$$

Osserviamo, infine, che, a meno di definizioni particolari (ma importanti) dell'operatore di filtraggio \mathcal{H}_f , questo non risulta idempotente, ovvero $\mathcal{H}_f^2 \neq \mathcal{H}_f$. Conseguentemente, filtrare un campo filtrato è una operazione che non restituisce tale campo.

La scelta delle ampiezze spaziale δ_s e temporale δ_t di filtraggio è piuttosto delicata e coinvolge anche la discretizzazione adottata per approssimare la soluzione delle equazioni filtrate. In generale, tali ampiezze vengono prese dell'ordine di qualche passo di discretizzazione. Spesso, peraltro, si lavora con $\delta_t \rightarrow 0^+$, ovvero in assenza di filtraggio nel tempo.

Una descrizione particolarmente significativa dell'operazione di filtraggio può essere parallelamente condotta nello spazio dei numeri d'onda. Chiamando con F la trasformata di Fourier della funzione filtro f :

$$F(\mathbf{k}', \omega') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x}' e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}'} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' e^{-i\omega' t'} f(\mathbf{x}', t') , \quad (11.16)$$

dipendente dalle variabili adimensionali vettore d'onda \mathbf{k}' e pulsazione ω' , e con G la trasformata di Fourier della funzione da filtrare g , la trasformata di Fourier della funzione filtrata (11.13) è legata alla trasformata di Fourier della funzione da filtrare da una moltiplicazione:

$$\mathcal{F} [\mathcal{H}_f[g]] (\mathbf{k}, \omega) = (2\pi)^4 F(\mathbf{k}\delta_s, \omega\delta_t) G(\mathbf{k}, \omega) , \quad (11.17)$$

in cui nella trasformata di Fourier della funzione filtro i numeri d'onda e le pulsazioni sono moltiplicati per le ampiezze spaziale e temporale del filtro. A meno di questo fatto, la relazione (11.17) non è che l'estensione della (8.56) in quattro dimensioni.

In base alla relazione (11.17), l'andamento della funzione $F(\mathbf{k}', \omega')$ con $\mathbf{k}' = \mathbf{k}\delta_s$ e $\omega' = \omega\delta_t$ fornisce importanti informazioni sull'azione del filtro. Osserviamo, ad esempio, che, avendo f integrale unitario, il valore di F (11.16) in $\mathbf{k}' = \mathbf{0}$ e $\omega' = 0$ è unitario, ovvero il filtraggio non altera le componenti a piccolo numero d'onda e frequenza. Questo fatto formale traduce la richiesta di non alterare, con il filtraggio, le grandi strutture vorticose presenti nel campo turbolento.

11.4.2 Il filtraggio delle equazioni di Navier-Stokes

Indicando con $\bar{\mathbf{u}}$ il campo di velocità filtrato ($\bar{\mathbf{u}} = \mathcal{H}_f[\mathbf{u}]$), possiamo introdurre il campo di velocità di piccola scala come differenza: $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}$. Filtrando l'equazione di continuità otteniamo:

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 . \quad (11.18)$$

Prima di filtrare l'equazione della quantità di moto, osserviamo che quando filtriamo il prodotto $u_i u_j$ possiamo scrivere $\overline{u_i u_j} \equiv \overline{u_i} \overline{u_j} + (\overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j}) = \overline{u_i} \overline{u_j} + \tau''_{ij}$, in cui la componente (i, j) del tensore τ'' si può ulteriormente decomporre:

$$\tau''_{ij} \equiv (\overline{\overline{u_i} \overline{u_j}} - \overline{u_i} \overline{u_j}) + (\overline{u'_i} \overline{u_j} + \overline{u_i} \overline{u'_j}) + \overline{u'_i} \overline{u'_j}, \quad (11.19)$$

in cui il primo addendo a secondo membro si può calcolare sulla base del campo filtrato, mentre gli altri due $(\overline{u'_i} \overline{u_j} + \overline{u_i} \overline{u'_j})$: *sforzo misto* tra campo filtrato e piccola scala e $\overline{u'_i} \overline{u'_j}$: *sforzo di Reynolds*) necessitano di essere modellati. Considerata la forma (11.19) del tensore τ'' , le equazioni di Navier-Stokes filtrate si scrivono:

$$\partial_t \overline{u}_i + \overline{u}_j \partial_j \overline{u}_i = \partial_j [-\bar{p} \delta_{ij} + \nu (\partial_j \overline{u}_i + \partial_i \overline{u}_j) + \tau''_{ij}], \quad (11.20)$$

in cui il termine τ''_{ij} o, nelle formulazioni più sofisticate, gli ultimi due addendi nella sua definizione (11.19) necessitano di un modello. Il modello più utilizzato per l'intero tensore τ'' è quello proposto da Smagorinsky nel lontano 1963, tale modello assume al solito la proporzionalità tra $\tau'' - \text{tr}(\tau'') \mathbf{I}/3$ ed il tensore velocità di deformazione filtrato, la cui componente (i, j) si scrive: $\overline{S}_{ij} = (\partial_j \overline{u}_i + \partial_i \overline{u}_j)/2$. La costante di proporzionalità è un coefficiente di viscosità (cinematica) turbolento, che si assume della forma:

$$\nu'' = \Delta^2 |\overline{\mathbf{S}}|, \quad (11.21)$$

in cui Δ è una lunghezza fissata e $|\overline{\mathbf{S}}| = (\overline{S}_{lm} \overline{S}_{ml})^{1/2}$. L'idea è di assegnare Δ in modo da rendere significativo l'effetto del modello nel solo intervallo dissipativo, conservando quanto più possibile inalterato l'intervallo inerziale. Le equazioni del moto medio per la LES (*Large Eddy Simulation*) sono allora le seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_j \overline{u}_j = 0 \\ \partial_t \overline{u}_i + \overline{u}_j \partial_j \overline{u}_i = \partial_j [-\bar{p} \delta_{ij} + (\nu + \Delta^2 |\overline{\mathbf{S}}|)(\partial_j \overline{u}_i + \partial_i \overline{u}_j)] \end{array} \right., \quad (11.22)$$

dove, al solito, la parte nella traccia del tensore τ'' è inclusa nella ridefinizione della “pressione” \bar{p} .

Nell'utilizzare praticamente l'approccio LES occorre però considerare altri effetti, indotti dalla discretizzazione delle equazioni (11.22). I due più importanti sono descritti brevemente nel prossimo paragrafo.

11.4.3 Cenni sugli effetti della discretizzazione

L'integrazione approssimata del sistema di equazioni (11.22) ne implica la discretizzazione nello spazio e nel tempo. A meno di casi estremamente particolari, la discretizzazione nel tempo è fatta considerando i tempi caratteristici

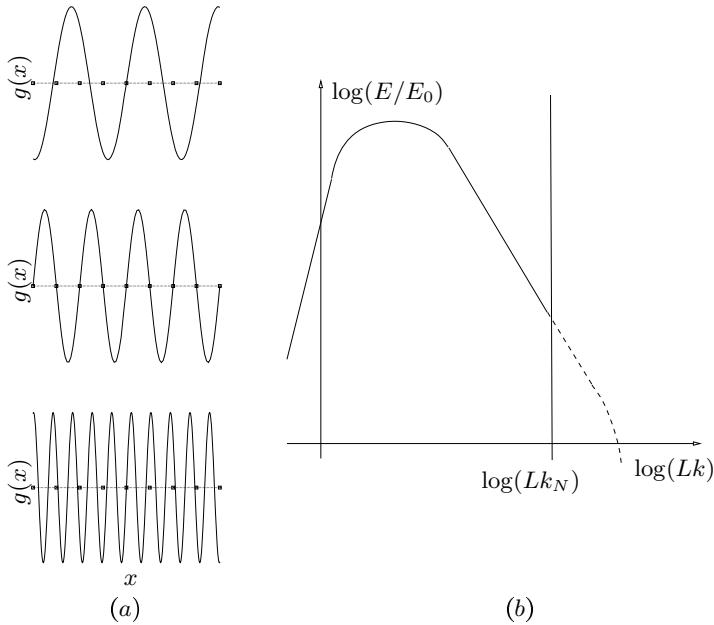


Figura 11.1. In (a) sono disegnate dall’alto al basso tre funzioni $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che, rispetto alla discretizzazione fissata (indicata con i quadratini) sono rispettivamente: risolta ($\lambda_1 > 2\Delta x_1$), al limite della risoluzione ($\lambda_1 = 2\Delta x_1$) e non risolta ($\lambda_1 < 2\Delta x_1$). In (b) è indicata la posizione del taglio operato dalla discretizzazione al numero d’onda k_N sulla funzione spettro di energia $E(k)$.

di rotazione delle grandi strutture vorticose, mentre la discretizzazione nello spazio merita qualche riflessione particolare.

Supponiamo di essere nello spazio libero e poniamoci preliminarmente il problema della scelta del passo di integrazione, essendo equivalenti le tre direzioni, solo lungo x_1 . La massima frequenza spaziale che la discretizzazione di passo Δx_1 può catturare è quella avente lunghezza d’onda (λ_1) pari a $2\Delta x_1$, come rappresentato in Fig. 11.1-a. Poiché $\lambda_1 = 2\pi/k_1$, ne deduciamo che il valore massimo del numero d’onda k_1 rappresentabile nella discretizzazione corrente è $\pi/\Delta x_1 = k_N$ (numero d’onda di Nyquist). Questo numero d’onda sarà necessariamente più piccolo di quello ($k_\eta = 2\pi/\eta$) corrispondente alla scala di Kolmogorov η , altrimenti saremo in simulazione diretta. k_N si collocherà quindi in pieno intervallo inerziale, come schematicamente rappresentato in Fig. 11.1-b.

L’operazione di approssimazione alle differenze finite delle derivate presenti nel sistema (11.22) può a sua volta essere interpretata come un filtraggio. Un approccio semplificato alla LES prevede addirittura di non effettuare un fil-

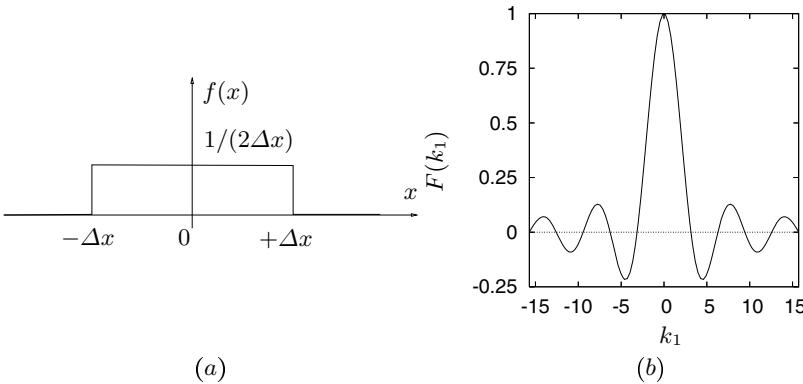


Figura 11.2. Funzione di filtro (a) e sua trasformata di Fourier (moltiplicata per 2π , b) risultante dalla discretizzazione centrata al secondo ordine della derivata prima (11.23).

traggio (esplicito) delle equazioni del moto, affidando questo compito al *filtraggio隐式* operato dalla discretizzazione, che ora descriveremo brevemente in un caso particolare. Consideriamo l'approssimazione centrata al secondo ordine della derivata prima in x di una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a modulo integrabile su tutto l'asse reale. Indicando con $\tilde{f}'(x) = [f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)]/(2\Delta x)$ questa approssimazione, possiamo calcolare la trasformata di Fourier di \tilde{f}' e collegarla alla omologa trasformata di f' :

$$\mathcal{F}[\tilde{f}'](k_1) = \frac{e^{+i k_1 \Delta x} - e^{-i k_1 \Delta x}}{2 \Delta x} \mathcal{F}[f](k_1) = \frac{\sin k_1 \Delta x}{k_1 \Delta x} \mathcal{F}[f'](k_1). \quad (11.23)$$

Ricordando la relazione (8.56), che consente di calcolare la trasformata di Fourier di un prodotto di convoluzione come 2π volte il prodotto delle trasformate, e considerato il “filtro” (per questa funzione di filtro, rinunciamo alle ipotesi circa l’esistenza e la continuità di tutte le derivate) in Fig. 11.1-*a* e la sua trasformata in Fig. 11.1-*b*, è immediato verificare che l’approssimazione alle differenze della derivata, ovvero \hat{f}' , può essere interpretata come un filtraggio della f' con il filtro di cui sopra. Se f è a sua volta una funzione filtrata, come nel caso delle derivate nel problema (11.22), è evidente che il filtro (11.23) agisce in cascata dopo quello utilizzato per filtrare le equazioni. Ne segue che il problema discretizzato non è ottenuto mediante lo stesso filtro del problema continuo. Di questo se ne deve tener conto quando si sviluppano modelli per il problema (11.22) discretizzato.

Una seconda importante considerazione riguarda il ruolo stabilizzante del modello nel problema discreto. Come sappiamo, una delle componenti di Fourier $\mathbf{U}(\mathbf{k})$, con un numero d'onda k (k è il modulo del vettore d'onda: $k = |\mathbf{k}|$) cede energia prevalentemente alle componenti a numeri d'onda maggiori ed,

occasionalmente, anche a componenti a numeri d'onda minori di k . Abbiamo visto nel paragrafo 10.2 che, ad esempio, per un campo turbolento omogeneo ed isotropo tali scambi sono regolati dall'equazione di Lin (10.21). Una volta discretizzate le equazioni, avremo un numero finito di componenti di Fourier, le quali scambiano energia tra loro e vorrebbero scambiarne anche con quelle a numero d'onda maggiore di k_N , che però non sono presenti nella simulazione discreta. Man mano che ci si avvicina al numero d'onda k_N , l'energia che arriva alle componenti di Fourier da componenti a numeri d'onda più bassi rimane quindi intrappolata: il livello energetico delle componenti a numero d'onda maggiore cresce artificialmente. Questo comportamento non fisico può, peraltro, destabilizzare la simulazione. Il modello deve quindi occuparsi di dissipare l'energia su queste componenti ad elevato numero d'onda, contrastando l'effetto del termine di trasferimento. La scelta della lunghezza Δ nel modello di Smagorinsky per il coefficiente di viscosità turbolenta (11.21) è allora molto critica e deve anche considerare la discretizzazione.

11.5 Curiosando in biblioteca

Sul testo di Wilcox [38] troviamo un'introduzione alle equazioni mediate alla Reynolds (RANS) nel § 2.3. L'Autore effettua prima la riscrittura delle equazioni di Navier-Stokes in forma conservativa e poi la media temporale. A p. 16 è evidenziata la forma assunta dagli sforzi di Reynolds a seguito dell'operazione di media e viene sottolineato come proprio la presenza di queste quantità comprometta la chiusura del sistema di equazioni. Per convincere ulteriormente il Lettore di questo problema, l'Autore propone poi (§ 2.4) la deduzione delle sei equazioni di evoluzione degli sforzi di Reynolds, mettendo in evidenza come questa operazione comporti la presenza di 22 nuove incognite. Il problema di chiusura resta quindi aperto, fino a quando non si aggiunge qualche informazione di natura fisica al sistema di equazioni, al fine di modellare gli sforzi di Reynolds. Il capitolo 4 è dedicato all'analisi dei modelli di chiusura delle equazioni del moto. Nel § 4.2 vengono illustrati alcuni modelli di chiusura *a singola equazione*, nei quali la modellazione viene effettuata mediante la scrittura di una singola equazione di evoluzione (per l'energia cinetica turbolenta). Il paragrafo successivo è invece dedicato all'analisi dei modelli di chiusura *a due equazioni*. In particolare, nel § 4.3.2 viene descritto il modello $k-\varepsilon$. Nel § 8.2, l'Autore descrive in linee generali la DNS, mentre al paragrafo successivo delinea le proprietà fondamentali della LES. Circa la DNS, Wilcox sottolinea l'importanza sperimentale e teorica di questa tecnica, evidenziandone nel contempo i forti limiti dovuti alla (relativamente) scarsa risoluzione, mentre per la LES l'Autore introduce l'idea di filtraggio e mostra come questa operazione possa essere effettuata sulle equazioni del moto. Riguardo alla modellazione delle scale di sottogriglia, discute il modello di Smagorinsky.

Anche il testo di Ferziger [8] offre una esaustiva panoramica sui metodi numerici prima citati. In particolare, dedica ad essi il Cap. 9, nel quale descrive la tecnica DNS, sottolineando che una simulazione DNS equivale ad un esperimento di laboratorio di breve durata, con migliori caratteristiche di ripetibilità e (spesso) di risoluzione. Si sottolinea che in questo modello la scala più piccola che deve essere risolta è quella di Kolmogorov. L'Autore mette in risalto come questa tecnica possieda delle forti limitazioni legate al notevole carico computazionale necessario per descrivere problemi, tra l'altro piuttosto semplici, rispetto a quelli d'interesse applicativo. Il testo offre anche alcuni esempi di algoritmi DNS, presentando alcuni risultati. Nel § 9.3 è invece descritta la LES: l'Autore in proposito sottolinea che “*Large eddy simulations are three dimensional, time dependent and expensive, but much less costly than DNS of the same flow*”. Anche Ferziger inizia dalla definizione di filtraggio, per poi identificare gli sforzi di Reynolds e definire il modello di Smagorinsky (§ 9.3.1). L'Autore sottolinea come l'utilizzo di questo modello sia poco soddisfacente per la simulazione di flussi molto complessi o ad elevati numeri di Reynolds e ne propone degli altri. Viene inoltre discusso un problema importante delle simulazioni LES: la deduzione dei campi non filtrati a partire dai corrispondenti filtrati. Nel § 9.4, l'Autore presenta il metodo RANS: definita la decomposizione di Reynolds, riscrive le equazioni del moto e ne effettua la media nel tempo, discutendo due modelli di chiusura ($k-\varepsilon$ e $k-\omega$, quest'ultimo proposto da Wilcox).

Una lettura molto interessante è anche quella del libro di Chung [7]. Il problema della modellazione numerica della turbolenza è discusso nel Cap. 21. In particolare, nel § 21.3.1, dopo aver dedotto al paragrafo precedente la forma delle equazioni mediate RANS, l'Autore propone alcuni modelli di chiusura diretta delle equazioni, ovvero modelli *a zero equazioni*. Qui il tensore degli sforzi di Reynolds viene modellato in analogia al tensore degli sforzi di un fluido newtoniano, tramite l'introduzione di un coefficiente di viscosità turbolenta. Vari metodi di calcolo di questo coefficiente (la teoria della lunghezza di mescolamento di Prandtl, Cebeci-Smith, Baldwin-Lomax ed altri) sono descritti in quella sede. Dei modelli a due equazioni vengono illustrati essenzialmente i modelli $k-\varepsilon$ e $k-\omega$. Nel § 21.4 viene introdotta la tecnica di chiusura LES, partendo dalla definizione dell'operazione di filtraggio, con particolare riferimento ad alcune funzioni di filtro. I modelli di sottogriglia (Smagorinsky ed altri) sono poi analizzati nel paragrafo 21.4.3 mentre, nel § 21.5, viene discusso l'approccio DNS.

L'approssimazione di strato limite

Nel campo di moto generato da una corrente uniforme \mathbf{u}_e di un fluido (a densità costante) *debolmente viscoso* che investe un corpo Ω_b , si può individuare una sottile regione attorno al corpo nella quale il flusso viene decelerato per effetto dell'attrito, fino a raggiungere velocità nulla nei punti di $\partial\Omega_b$ (vedi Fig. 12.1). All'interno di tale regione, il termine *convettivo* nella equazione della quantità di moto $(\rho D_t \mathbf{u})$ è quindi bilanciato da quello *diffusivo* $(\mu \nabla^2 \mathbf{u})$, che può invece essere trascurato all'esterno. Pur non essendo intrinsecamente possibile una definizione geometrica precisa di questa regione, l'ordine di grandezza δ della sua estensione normale al corpo (spessore) dipende, almeno nei casi stazionari, dal numero di Reynolds $Re = UL/\nu$, costruito utilizzando,

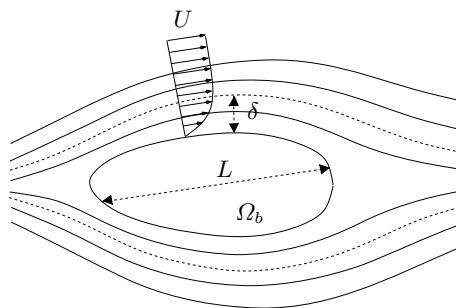


Figura 12.1. Rappresentazione schematica del flusso bidimensionale stazionario attorno al corpo Ω_b , in cui sono indicate soltanto alcune linee di corrente ed un profilo di velocità. La linea tratteggiata delimita la regione, di spessore δ , in cui i termini convettivi e diffusivi sono del medesimo ordine di grandezza. L indica una dimensione geometrica caratteristica del corpo ($L \gg \delta$) ed U l'ordine di grandezza della velocità al di fuori della regione precedente.

laddove è possibile,¹ una lunghezza L propria del corpo ed il valore U del modulo della velocità asintotica \mathbf{u}_e . Infatti, denotando con u la componente tangente e con v la componente normale al corpo della velocità all'interno di questa regione, dall'equazione di continuità segue $O(v) = \delta U/L$. Gli ordini dei termini convettivo e diffusivo nella equazione della quantità di moto sono, rispettivamente, $O(\rho D_t \mathbf{u}) = \rho U U / L$ e $O(\mu \nabla^2 \mathbf{u}) = \mu U / \delta^2$ ed affinché si bilancino deve essere $\delta/L = \text{Re}^{-1/2}$. Lo spessore δ di questa regione diminuisce come $\text{Re}^{-1/2}$ al crescere di Re , fino ad annullarsi per $\text{Re} \rightarrow \infty$: di qui la denominazione di *strato limite*.

Per $\text{Re} = \infty$, in particolare, la componente normale v della velocità passa dal valore esterno, dell'ordine di U , a 0 sul corpo in uno spessore nullo: lo strato limite si schiaccia in una superficie vorticosa. Su $\partial\Omega_b$ rimane verificata la sola condizione di impermeabilità $\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$ ($\boldsymbol{\nu}$ è il versore normale), mentre la componente tangente della velocità è in generale non nulla. Ma allora, adimensionalizzando con L ed U , ne segue che il problema a $\text{Re} = \infty$:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ D_t \mathbf{u} = -\nabla p \\ \mathbf{u}|_{\partial\Omega_b} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0, \text{ condizioni all'infinito,} \end{cases} \quad (12.1)$$

non può essere visto come la forma limite del problema a numero di Reynolds finito:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ D_t \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{u} \\ \mathbf{u}|_{\partial\Omega_b} = \mathbf{0}, \text{ condizioni all'infinito,} \end{cases} \quad (12.2)$$

a causa delle differenti condizioni al contorno. Non solo, ma, per quanto detto prima, mandando $\text{Re} \rightarrow \infty$ nella seconda equazione (12.2), le derivate di \mathbf{u} in direzione normale al corpo divergono, mantenendo finito il termine $\text{Re}^{-1} \nabla^2 \mathbf{u}$: la forma limite dell'equazione della quantità di moto non è quella assunta nel problema di Eulero (12.1).

Il problema (12.2) per $\text{Re} \rightarrow \infty$ è quindi un problema di *perturbazione singolare*, nel quale il termine di perturbazione (introdotto nella seconda equazione (12.1) dalla natura debolmente viscosa del fluido e piccolo all'esterno dello strato limite) contiene tutte le derivate di ordine massimo. La soluzione analitica del problema (12.2) non è nota, anche quando Ω_b è una lastra piana posta in direzione parallela alla corrente. Tuttavia è possibile ottenere una soluzione *approssimata*, proprio utilizzando la natura singolare della perturbazione, mediante la procedura descritta nel paragrafo 12.1.

¹ Per alcun geometrie del corpo, la definizione di una scala delle lunghezze L non è possibile. In particolare, questo accade nel caso di una lastra piana (di spessore nullo) e di estensione semi-infinita. Tale flusso sarà ampiamente considerato nel seguito.

Nel § 12.3 questa trattazione viene estesa al caso in cui nella corrente asintotica sia presente un gradiente di pressione, mentre nel paragrafo 12.4 viene presentato un approccio integrale alla descrizione dello strato limite. L'estensione al caso in cui lo strato limite sia turbolento è discussa nel paragrafo 12.5, evidenziando la presenza di tre differenti regioni nel profilo di velocità media. Lo strato limite termico è poi trattato nel § 12.6, limitando l'analisi ad alcuni casi particolari.

Un breve percorso bibliografico sullo strato limite è infine proposto nel paragrafo 12.7.

12.1 Un esempio di perturbazione singolare 1D

Nel seguito tratteremo estesamente lo strato limite su lastra piana semi-infinita. Per questa forma semplice del corpo, potremo concentrarci sulla natura fisico-matematica del problema. Chiarita la natura singolare della perturbazione introdotta nel problema di Eulero (12.1) dal termine diffusivo in presenza di una parete, illustriamo come ottenere una soluzione approssimata.

Inizialmente si risolve il problema di Eulero (12.1), che fornisce la *soluzione esterna* (per una lastra piana semi-infinita di spessore nullo disposta parallelamente alla corrente asintotica, il corpo non introduce alcuna perturbazione). Sul problema (12.2) si opera poi un cambiamento della coordinata normale al corpo, singolare per $\text{Re} \rightarrow \infty$, in grado di dilatare la dimensione normale alla $\partial\Omega_b$. Nel problema trasformato così ottenuto si effettua il limite per $\text{Re} \rightarrow \infty$, ottenendo un problema enormemente più semplice. Per la lastra piana questo problema viene risolto analiticamente, sostituendo alle condizioni all'infinito la condizione di accoppiamento (*matching*) con la soluzione esterna: il limite a distanza infinita dalla parete della soluzione interna deve uguagliare il limite sulla parete della soluzione esterna. In tal modo si determina la *soluzione interna*. L'approssimazione della (12.2) viene quindi ricostruita sommando le soluzioni interna ed esterna e togliendo il limite precedente, che altrimenti verrebbe contato due volte. Questa procedura viene ora illustrata su un esempio, dovuto a Friedrichs (1955) [24].

Si considera il problema di approssimare la soluzione per $x \in (0, 1)$ del problema (l'apice indica derivazione in x):

$$\begin{cases} \varepsilon y'' + y' = a \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 1, \end{cases} \quad (12.3)$$

per piccoli valori del parametro reale positivo ε ed $a \in (0, 1)$. Questo è un problema di perturbazione singolare, in quanto il termine contenente il parametro ε è quello di ordine massimo (2) nell'equazione differenziale (12.3). Si cerca la soluzione $y \in \mathcal{C}^2([0, 1])$.

Dalle condizioni al contorno in (12.3) segue che deve comunque esistere un intervallo $I \subset [0, 1]$ in cui la funzione $y = y(x)$ è strettamente crescente

$(y' > 0)$. Integrando l'equazione in (12.3) da x_0 ad x si ha $(y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0)$:

$$y(x) = a(x - x_0) + y_0 - \varepsilon[y'(x) - y'_0]$$

da cui segue che, se y' si mantenesse definitivamente limitata per $\varepsilon \rightarrow 0^+$, allora si avrebbe la soluzione:

$$y(x) = ax + y_0 - ax_0 , \quad (12.4)$$

che non può soddisfare entrambe le condizioni al contorno in (12.3), essendo lineare in x ed avendo assunto $a \in (0, 1)$. Per una opportuna scelta del punto x_0 , la funzione (12.4) fornirà la soluzione esterna. Quindi deve esistere un intervallo chiuso $I_\varepsilon = [\xi_0(\varepsilon), \xi_1(\varepsilon)] \subset I$ ed un numero positivo M_ε , tale che $M_\varepsilon \rightarrow +\infty$ per $\varepsilon \rightarrow 0^+$, ed inoltre $y'(x) > M_\varepsilon$ per tutti i punti $x \in I_\varepsilon$. Ma allora:

$$y(\xi_1) - y(\xi_0) = \int_{\xi_0}^{\xi_1} d\eta \, y'(\eta) > (\xi_1 - \xi_0)M_\varepsilon ,$$

ne segue che ξ_1 e ξ_0 convergono allo stesso punto per $\varepsilon \rightarrow 0^+$. La soluzione asintotica si discosta quindi da quella esterna solo in un intervallo $I_\varepsilon \subset I$ che si riduce ad un punto per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ e nel quale la funzione $y = y(x)$ è strettamente crescente.

Si vede subito (Fig. 12.2-a) che la soluzione (12.4) con $x_0 < 1$ non può sussistere perché in alcuni punti di I_ε si avrebbe allora $y' > a$ ed $y'' > 0$, contraddicendo l'equazione differenziale nel problema (12.3). La sola possibilità che rimane è $x_0 = 1, y_0 = 1$ ($\xi_0 = 0$), la soluzione esterna è quindi (Fig. 12.2-b):

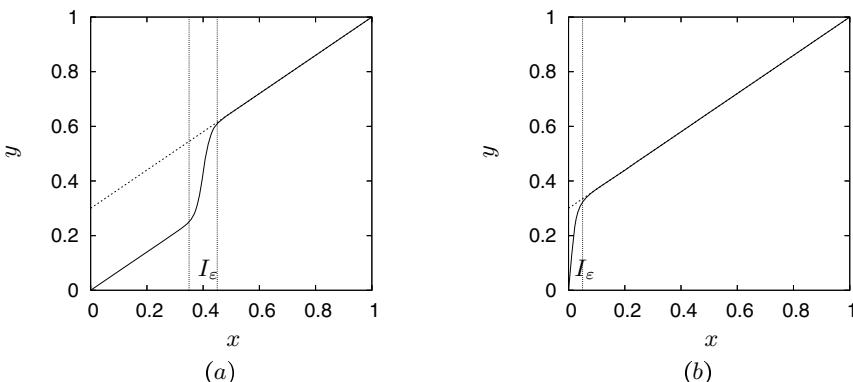


Figura 12.2. Fissati i valori $x_0 = y_0 = 1$ ed $a = 0.7$, con una linea tratteggiata è disegnata la soluzione approssimata (12.4), mentre con linea continua sono disegnate le soluzioni asintotiche ottenute posizionando I_ε (delimitato dalle linee a punti in figura) con centro in $x = 0.4$ (a) od in $x = 0$ (b).

$$f_0(x) = ax + (1 - a) . \quad (12.5)$$

Individuata la corretta posizione di I_ε , per calcolare la soluzione interna si introduce la trasformazione di coordinate singolare per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ in grado di dilatare un intorno dell'origine: $\tilde{x} = x/\varepsilon^\alpha$ in cui α è un numero reale positivo. In particolare questa trasformazione dilata l'intervallo $I_\varepsilon = [0, \varepsilon^\alpha]$ nell'intervallo $[0, 1]$. Ponendo $g_\varepsilon(\tilde{x}) = y(x)$, l'equazione (12.3) risulta trasformata nella:

$$\varepsilon^{1-\alpha} g_\varepsilon'' + g_\varepsilon' = \varepsilon^\alpha a , \quad (12.6)$$

nella quale si richiede che la soluzione asintotica g_0 (per $\varepsilon \rightarrow 0^+$) sia $C^2([0, +\infty])$ ed abbia $g_0'' \neq$ costante, dovendo descrivere la transizione da 0 ad $1 - a$ e mantenere la classe 2. Dalla (12.6) segue che per $0 < \alpha < 1$ $g_0' \equiv 0$, mentre per $\alpha > 1$, previa moltiplicazione per $\varepsilon^{\alpha-1}$, $g_0'' \equiv 0$. Deve quindi essere $\alpha = 1$, si pone allora il problema *asintotico*:

$$\begin{cases} g_0'' + g_0' = 0 \\ g_0(0) = 0 \\ \lim_{\tilde{x} \rightarrow +\infty} g_0(\tilde{x}) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f_0(x) = 1 - a , \end{cases}$$

in cui l'ultima condizione assicura l'accoppiamento (*matching*) tra la soluzione esterna f_0 (12.5) e l'interna g_0 :

$$g_0(\tilde{x}) = (1 - a)(1 - e^{-\tilde{x}}) . \quad (12.7)$$

Si ottiene la seguente approssimazione della soluzione del problema (12.3) per piccoli valori del parametro ε :

$$\begin{aligned} y_\varepsilon(x) &\simeq \underbrace{ax + (1 - a)}_{\text{sol. esterna } f_0(x)} + \underbrace{(1 - a)(1 - e^{-x/\varepsilon})}_{\text{sol. interna } g_0[\tilde{x}(x)]} - \underbrace{(1 - a)}_{f_0(0^+) = g_0(+\infty)} \\ &= ax + (1 - a)(1 - e^{-x/\varepsilon}) =: Y_\varepsilon(x) . \end{aligned} \quad (12.8)$$

Si può notare che $Y_\varepsilon(x)$ non soddisfa esattamente la condizione in $x = 1$. La Y_ε è però un'approssimazione *uniforme* della soluzione del problema (12.3):

$$y_\varepsilon(x) = ax + (1 - a) \frac{1 - e^{-x/\varepsilon}}{1 - e^{-1/\varepsilon}} , \quad (12.9)$$

ed infatti vale la seguente maggiorazione indipendente dal punto:

$$y_\varepsilon(x) - Y_\varepsilon(x) = (1 - a) \frac{1 - e^{-x/\varepsilon}}{1 - e^{-1/\varepsilon}} e^{-1/\varepsilon} < e^{-1/\varepsilon} . \quad (12.10)$$

In Fig. 12.3-a sono tracciate le curve $y_\varepsilon = y_\varepsilon(x)$ ed $Y_\varepsilon = Y_\varepsilon(x)$ per $\varepsilon = 1/4$ (per valori più piccoli di ε , le due curve non si distinguono più). Inoltre,

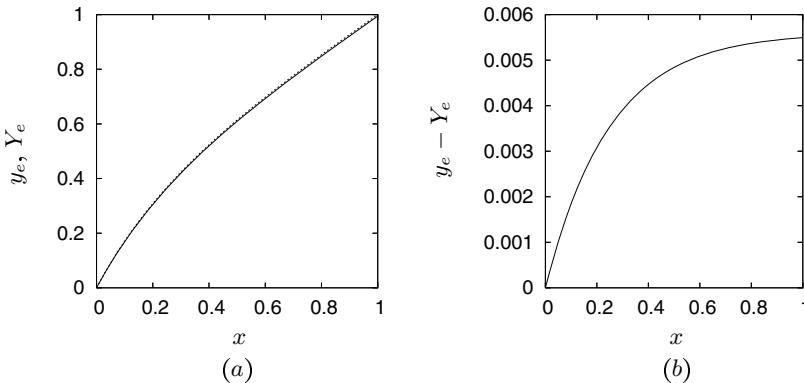


Figura 12.3. Per $a = 0.7$ e $\varepsilon = 1/4$ in (a) sono disegnate la soluzione analitica $y_\varepsilon = y_\varepsilon(x)$ (12.9) con linea a tratti e la sua approssimazione $Y_\varepsilon = Y_\varepsilon(x)$ (12.8) ottenuta con la tecnica illustrata. In (b) è tracciata la curva dell'errore $(y_\varepsilon - Y_\varepsilon)(x)$ (12.10). Notare l'ottimo accordo tra le due curve ($e^{-1/\varepsilon} \simeq 0.018316$) ed il fatto che l'approssimazione Y_ε non soddisfa la condizione al contorno in $x = 1$ del problema (12.3).

in Fig. 12.3-*b* è disegnato l'andamento dell'errore (12.10), che consente di quantificare l'errore che si commette approssimando la funzione $y_\varepsilon = y_\varepsilon(x)$ con la $Y_\varepsilon = Y_\varepsilon(x)$, in particolare sulla condizione al contorno nel punto $x = 1$.

- ◊ **Esercizio:** Un sistema massa puntiforme (m) molla (lineare, con costante elastica k) e smorzatore (coefficiente di attrito μ) in presenza del forzamento $f(t) = Ft(T-t)$ (T è un tempo fissato) è tale che $x(T) = x_1$. La posizione $x(t)$ della massa verifica il problema differenziale ordinario:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + \mu\dot{x} + kx = f \\ x(0) = x_0, \quad x(T) = x_1. \end{cases}$$

Ipotizzando $m \ll kT^2$, fornire una approssimazione del moto ottenuta con la tecnica delle perturbazioni singolari. Confrontare con la soluzione analitica.

Suggerimento. Adimensionalizzare le lunghezze con F/k ed il coefficiente di attrito con $2kT$.

Questa stessa procedura viene ora applicata alla ricerca di una soluzione *asintotica*, cioè per fluidi debolmente viscosi, per il flusso generato da una corrente uniforme che investe una lastra piana semi-infinita, disposta parallelamente alla corrente. Anche se questa è effettivamente la geometria più semplice tra quelle d'interesse, non si riesce a risolvere analiticamente il problema asintotico, come fatto in (12.7), né tantomeno si conosce una soluzione analiti-

ca del problema originario, quale la (12.9). La soluzione asintotica ottenuta è nota come *soluzione di Blasius* (1908) e deve essere calcolata numericamente.

12.2 Strato limite su una lastra piana in una corrente uniforme

Il problema consiste nello studiare le soluzioni *asintotiche* (per un fluido isotropo e debolmente viscoso) del flusso stazionario generato da una corrente uniforme di intensità u_e diretta lungo x che investe una lastra piana di spessore nullo posta nel semipiano $x > 0, y = 0$. La situazione è schematicamente descritta in Fig. 12.4. In queste condizioni si può ipotizzare che le componenti u longitudinale (lungo x) e v trasversale (lungo y) della velocità e la pressione p siano funzioni soltanto di (x, y) , mentre la componente di velocità z (lungo l'apertura della lastra) sia identicamente nulla. Il campo è ovviamente simmetrico in y e quindi si analizza il flusso nel solo semispazio $y \geq 0$.

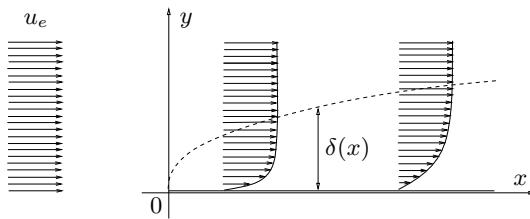


Figura 12.4. Schema del campo di moto bidimensionale attorno ad una lastra piana disposta parallelamente ad una corrente uniforme. Con una linea tratteggiata è indicato qualitativamente l'andamento dello spessore δ dello strato limite in funzione della coordinata longitudinale x .

Sulla base delle precedenti assunzioni, il flusso è descritto dal sistema:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_x u + \partial_y v = 0 & \text{continuità} \\ u \partial_x u + v \partial_y u = -\partial_x p / \rho + \nu (\partial_{xx}^2 u + \partial_{yy}^2 u) & \text{quantità di moto longitudinale} \\ u \partial_x v + v \partial_y v = -\partial_y p / \rho + \nu (\partial_{xx}^2 v + \partial_{yy}^2 v) & \text{quantità di moto trasversale} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (u, v, p) \equiv \lim_{y \rightarrow +\infty} (u, v, p) \equiv (u_e, 0, p_e) & \text{condizioni all'infinito} \\ u(x, 0) \equiv v(x, 0) \equiv 0 & \text{condizioni sulla parete} \end{array} \right. \quad (12.11)$$

La *soluzione esterna* è la corrente uniforme:

$$(u, v, p) \equiv (u_e, 0, p_e), \quad (12.12)$$

poiché la lastra, essendo di spessore nullo, non perturba in alcun modo la corrente asintotica, se gli effetti della diffusione viscosa vengono trascurati. Inoltre, poiché la soluzione asintotica del problema (12.11), come descritto nel paragrafo 12.1, è somma delle soluzioni interna ed esterna privata del limite comune (ancora $(u_e, 0, p_e)$, uguale alla soluzione esterna), tale soluzione asintotica coincide con la soluzione interna in questo caso particolare. Per il calcolo di quest'ultima si opera una trasformazione della coordinata *ortogonale* alla lastra (y):

$$\zeta = \frac{y}{\alpha(\nu)}, \quad \text{con: } \lim_{\nu \rightarrow 0^+} \alpha(\nu) = 0 \quad (12.13)$$

ed il problema consiste allora nel trovare le funzioni $\alpha(\nu)$, $u(x, \zeta)$, $v(x, \zeta)$ e $p(x, \zeta)$ tali che u , v e p rappresentino una approssimazione asintotica (per piccoli valori del coefficiente di viscosità ν) della soluzione del problema (12.11) e questa approssimazione si riduca alla forma (12.12) per $\nu \rightarrow 0^+$ ed $y > 0$. È stato inoltre già evidenziato come il limite per $\nu \rightarrow 0^+$ della soluzione asintotica del problema (12.11) differisca sostanzialmente dalla soluzione esterna (12.12) proprio per $y = 0$. Questo a causa della presenza sulla lastra di una superficie vorticosa con densità di circolazione u_e uniforme.

Il legame velocità-funzione di corrente si scrive nelle nuove variabili (x, ζ) :

$$u = \partial_y \psi = \partial_\zeta \frac{\psi}{\alpha}, \quad v = -\partial_x \psi;$$

poiché u deve mantenersi di classe 2 per $\nu \rightarrow 0^+$ ed $y > 0$, la funzione di corrente $\tilde{\psi} = \psi/\alpha$ deve rimanere di classe 3 per $\nu \rightarrow 0^+$. Per separare quantità infinitesime da quantità finite è quindi conveniente la scrittura della velocità in termini della funzione $\tilde{\psi}$:

$$u = \partial_\zeta \tilde{\psi}, \quad v = -\alpha \partial_x \tilde{\psi} = \alpha \tilde{v} \quad \text{con: } \tilde{v} = -\partial_x \tilde{\psi}, \quad (12.14)$$

in cui \tilde{v} si mantiene finita nel limite per $\nu \rightarrow 0^+$. Il problema (12.11) può quindi essere riformulato nelle nuove variabili $(\zeta, \tilde{\psi}, \tilde{v})$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u = \partial_\zeta \tilde{\psi}, \quad \tilde{v} = -\partial_x \tilde{\psi} & \text{continuità} \\ u \partial_x u + \tilde{v} \partial_\zeta u = -\frac{\partial_x p}{\rho} + \nu \left(\partial_{xx}^2 u + \frac{1}{\alpha^2} \partial_{\zeta\zeta}^2 u \right) & \text{q. di m. longitudinale} \\ \alpha (u \partial_x \tilde{v} + \tilde{v} \partial_\zeta \tilde{v}) = -\frac{1}{\alpha} \frac{\partial_\zeta p}{\rho} + \nu \left(\alpha \partial_{xx}^2 \tilde{v} + \frac{1}{\alpha} \partial_{\zeta\zeta}^2 \tilde{v} \right) & \text{q. di m. trasversale} \\ u(x, 0) \equiv 0, \quad \tilde{\psi}(x, 0) \equiv 0 & \text{cond. alla parete} \\ \lim_{\zeta \rightarrow +\infty} \lim_{\nu \rightarrow 0^+} (u, \alpha \tilde{v}, p) = (u_e, 0, p_e) & \text{cond. accoppiamento.} \end{array} \right. \quad (12.15)$$

La terza equazione delle (12.15), cioè l'equazione della quantità di moto trasversale, moltiplicata per α fornisce:

$$\alpha^2 (u \partial_x \tilde{v} + \tilde{v} \partial_\zeta \tilde{v}) = -\frac{\partial_\zeta p}{\rho} + \nu \left(\alpha^2 \partial_{xx}^2 \tilde{v} + \partial_{\zeta\zeta}^2 \tilde{v} \right) ,$$

che nel limite $\nu \rightarrow 0^+$ diviene $\partial_\zeta p = 0$, ovvero p è funzione della sola x . Ma allora, considerata la condizione di accoppiamento, $p \equiv p_e$. La seconda equazione delle (12.15) (quantità di moto longitudinale) può essere riscritta come:

$$u \partial_x u + \tilde{v} \partial_\zeta u = \frac{\nu}{\alpha^2} \left(\alpha^2 \partial_{xx}^2 u + \partial_{\zeta\zeta}^2 u \right) ,$$

dalla quale si riesce ad individuare la funzione $\alpha = \alpha(\nu)$. Infatti, se $\nu/\alpha^2 \rightarrow 0$ per $\nu \rightarrow 0^+$ si riottiene la componente longitudinale dell'equazione di Eulero, mentre se $\nu/\alpha^2 \rightarrow +\infty$ si ha che $\partial_{\zeta\zeta}^2 u = 0$. Quest'ultima fornisce $u(x, \zeta) = a(x)\zeta + b(x)$, che non può rispettare la condizione di accoppiamento. ν/α^2 deve allora mantenersi finito per $\nu \rightarrow 0^+$, quindi si può assumere che:

$$\alpha = \sqrt{\nu} . \quad (12.16)$$

La forma limite per $\nu \rightarrow 0^+$ del problema (12.15) diviene, in base alla precedente definizione di α :

$$\begin{cases} u = \partial_\zeta \tilde{\psi}, \quad \tilde{v} = -\partial_x \tilde{\psi} \\ u \partial_x u + \tilde{v} \partial_\zeta u = \partial_{\zeta\zeta}^2 u \\ \tilde{\psi}(x, 0) \equiv 0, \quad u(x, 0) \equiv 0 \\ \lim_{\zeta \rightarrow +\infty} u(x, \zeta) \equiv u_e , \end{cases} \quad (12.17)$$

su cui occorre fare due osservazioni molto importanti. La prima è che la natura del sistema (12.17) è differente da quella del sistema di partenza (12.11): quest'ultimo è *ellittico*, mentre il sistema (12.17) è *parabolico*, ovvero i segnali si propagano da monte (x_1) a valle ($x_2 > x_1$). In secondo luogo, la geometria del corpo (lastra piana semi-infinita) *non* definisce una scala delle lunghezze (questo è il motivo per cui si è preferito partire senza specificare alcuna adimensionalizzazione), quindi ci si può aspettare che la soluzione dipenda da una opportuna combinazione *adimensionale* delle posizioni longitudinale e normale.

Per riconoscere questo fatto si può applicare una idea di Prandtl. Per prima cosa, le equazioni (12.17) possono essere immaginate scritte nella sola u . Infatti, considerato che $u = \partial_\zeta \tilde{\psi}$ e $\tilde{\psi}(x, 0) \equiv 0$, la funzione di corrente $\tilde{\psi}$ si scrive come:

$$\tilde{\psi}(x, \zeta) = \int_0^\zeta ds u(x, s) .$$

Le equazioni (12.17) possono essere allora riscritte in termini della sola u :

$$\begin{aligned} u &= \partial_\zeta \tilde{\psi}, \quad \tilde{v} = -\partial_x \int_0^\zeta ds u(x, s) \\ u \partial_x u - \partial_\zeta u \partial_x \int_0^\zeta ds u(x, s) &= \partial_{\zeta\zeta}^2 u , \end{aligned} \quad (12.18)$$

in cui la seconda è solo la definizione di $\tilde{\psi}$. A questo punto si può notare che cambiando variabili da $(x, \zeta, \tilde{\psi})$ a $(x' = ax, \zeta' = b\zeta, \tilde{\psi}' = c\tilde{\psi})$ con a e b costanti, la prima e la terza equazione in (12.18) divengono:

$$u = \frac{b}{c} \frac{\partial \tilde{\psi}'}{\partial \zeta'} = \frac{b}{c} u'$$

$$\frac{a}{c} \left[u' \frac{\partial u'}{\partial x'} - \frac{\partial u'}{\partial \zeta'} \frac{\partial}{\partial x'} \int_0^{\zeta'} ds u'(x', s) \right] = b \frac{\partial^2 u'}{\partial \zeta'^2},$$

che rimangono invarianti se e solo se $b/c = 1$, $a/c = b$, ovvero $b = c = \sqrt{a}$. Con questa scelta dei parametri b e c le (12.17) sono soddisfatte qualunque sia a . Ma, non essendo possibile che la soluzione di tali equazioni dipenda da un parametro *arbitrario* (a), la u , soluzione delle (12.17) deve essere funzione della combinazione ζ/\sqrt{x} , che è indipendente da a .

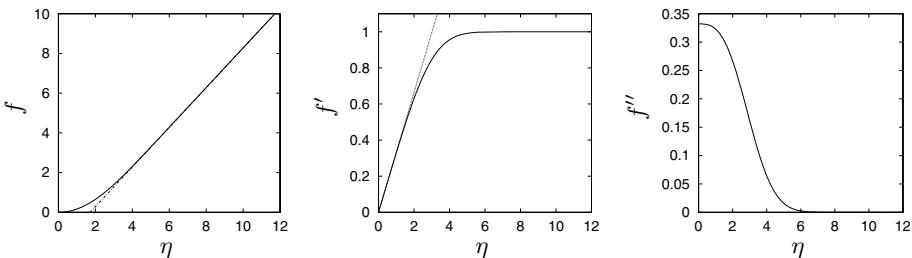


Figura 12.5. Da sinistra a destra: soluzione del problema di Blasius (12.21) f (con linea a tratto e punto è tracciata la retta parallela alla bisettrice che interseca l'asse η in $\eta = b$) e sue derivate prima (con linea a tratto e punto è tracciata la retta per l'origine di coefficiente angolare a) e seconda in funzione di η . Notare che $f''(\eta)$ è sempre positiva ed infinitesima al crescere di η .

Introdotto il numero di Reynolds relativo all'ascissa x : $\text{Re}_x = u_e x / \nu$, la velocità dovrà essere funzione della variabile adimensionale:

$$\eta = \frac{\zeta}{\sqrt{x}} \sqrt{u_e} = \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{u_e}}} = \frac{\sqrt{\text{Re}_x}}{x} y, \quad (12.19)$$

quindi l'ordinata $y = \delta(x) = x \text{Re}_x^{-1/2}$ sarà rappresentativa dello spessore dello strato limite nella sezione di ascissa x . Pensando alla funzione di corrente $\tilde{\psi}$ come variabile dipendente “primitiva” del problema (12.17) si potrà quindi porre: $u = u_e f'(\eta)$ in cui $f = f(\eta)$ è una funzione di classe 3 da determinare che si assume nulla in $\eta = 0$. La ψ si calcola allora per integrazione, essendo $\partial_\zeta = \sqrt{u_e/x} \partial_\eta$ e $\partial_x \eta = -\eta/(2x)$:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{u_e}{x}} \partial_\eta \tilde{\psi} = u_e f' \\ \tilde{\psi}(x, 0) \equiv 0 , \end{cases}$$

da cui seguono la funzione di corrente $\tilde{\psi}$ e la velocità trasversale \tilde{v} scalate:

$$\tilde{\psi}(x, \eta) = \sqrt{u_e x} f(\eta) , \quad \tilde{v}(x, \eta) = \frac{u_e}{2\sqrt{u_e x}} [\eta f'(\eta) - f(\eta)] . \quad (12.20)$$

Il profilo di velocità u/u_e è quindi noto una volta risolto il problema differenziale:

$$\begin{cases} f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0 \\ f(0) = f'(0) = 0 , \quad \lim_{\eta \rightarrow +\infty} f'(\eta) = 1 , \end{cases} \quad (12.21)$$

ottenendo una soluzione del tipo rappresentato in Fig. 12.5. La formulazione del problema differenziale (12.21) è dovuta a H. Blasius, che la presentò nella sua tesi di dottorato nel 1908 [32], ma la soluzione non è nota in forma analitica, sebbene alcune sue proprietà siano ovvie. In particolare, poiché $f(\eta) \sim \eta$ per $\eta \gg 1$, dividendo per f'' primo e secondo membro dell'equazione otteniamo:

$$\frac{d}{d\eta} \log f'' \sim -\frac{\eta}{2} ,$$

da cui, integrando per separazione di variabili, ricaviamo che $f''(\eta) \sim \exp(-\eta^2/4)$ per $\eta \gg 1$.

- ◊ **Esercizio:** Calcolare la resistenza agente sulla lastra piana, dal bordo d'attacco alla generica ascissa x .

La soluzione del problema (12.21) si può calcolare numericamente considerando [24] la funzione $g(\xi)$ che verifica il problema:

$$\begin{cases} g''' + gg'' = 0 \\ g(0) = g'(0) = 0 , \quad g''(0) = 1 , \end{cases} \quad (12.22)$$

con $g'(\xi) \rightarrow 2\chi^2$ per $\xi \rightarrow +\infty$. Se si definisce la coordinata η come $2\chi\xi$, la funzione $f(\eta) = g(\xi)/\chi$ verifica il problema di Blasius (12.21). L'integrazione numerica del problema differenziale (12.22) si effettua riducendolo al sistema differenziale seguente:

$$\begin{cases} g' = g_1 \\ g'_1 = g_2 \\ g'_2 = -gg_2 \\ g(0) = g_1(0) = 0 , \quad g_2(0) = 1 . \end{cases} \quad (12.23)$$

In merito alla soluzione di Blasius va osservato (sarà importante in connessione con la discussione delle soluzioni dell'equazione di *Falkner-Skan*, per u_e

variabile in x) che dalle (12.21-1, 2) segue $f'''(0) = 0$, quindi u/u_e ha un flesso nell'origine. Il calcolo numerico della soluzione del problema (12.21) mostra in particolare che $f''(0) =: a \simeq 0.33$ ed $[\eta - f(\eta)] \rightarrow b \simeq 1.72$ per $\eta \rightarrow +\infty$.

Nota la $f(\eta)$ si può ricostruire l'approssimazione ottenuta per il problema (12.11):

$$\begin{cases} \frac{u}{u_e} = f'(\eta) \\ \frac{v}{u_e} = \frac{1}{2} \text{Re}_x^{-1/2} [\eta f'(\eta) - f(\eta)] \\ p \equiv p_e . \end{cases} \quad (12.24)$$

Si può notare, infine, che in base alle precedenti osservazioni:

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow +\infty} (\eta f' - f) &= \lim_{\eta \rightarrow +\infty} [\eta(f' - 1) + \eta - f] \\ &= \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \frac{f' - 1}{1/\eta} + b \\ &= \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \frac{f''}{-1/\eta^2} + b = b , \end{aligned}$$

da cui segue che:

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} \frac{v}{u_e} = \frac{b}{2} \text{Re}_x^{-1/2} . \quad (12.25)$$

La componente trasversale v della velocità non va quindi a 0 per $\eta \rightarrow +\infty$, come del resto la funzione Y_ε non soddisfa la condizione al contorno per $x = 1$ nell'esempio svolto nel paragrafo 12.1. In Fig. 12.6 sono riportati i profili delle componenti di velocità (u/u_e e v/u_e) e quello della vorticità $\omega = -\partial_y u + \partial_x v$:

$$\frac{x\omega}{u_e} = - \left[\frac{1}{4\text{Re}_x^{1/2}} (\eta f' - f + \eta^2 f'') + \text{Re}_x^{1/2} f'' \right] . \quad (12.26)$$

Si nota che la (12.26) fornisce il valore di vorticità a parete $-\text{Re}_x^{1/2} a u_e / x$ che diverge con Re_x , inoltre ω non è infinitesima all'infinito, avendosi $\omega \rightarrow -b u_e / (4x \text{Re}_x^{1/2})$ per $y \rightarrow +\infty$. Anche questo dimostra che la soluzione di Blasius non soddisfa le condizioni all'infinito, per Re_x finito.

Il flusso analizzato per $u_e \equiv$ costante verrà ora esaminato per $u_e \neq$ costante in x , ovvero in presenza di un gradiente non nullo della pressione esterna. Si discuterà, in particolare, una classe importante di soluzioni delle equazioni di strato limite sulla lastra piana: le *soluzioni simili*, in cui i profili di velocità rimangono funzioni della sola quantità $\eta = y \sqrt{u_e(x)/(vx)}$. L'importanza di queste soluzioni è legata al fatto che approssimano *uniformemente* un'ampia classe di soluzioni non simili al crescere di x .

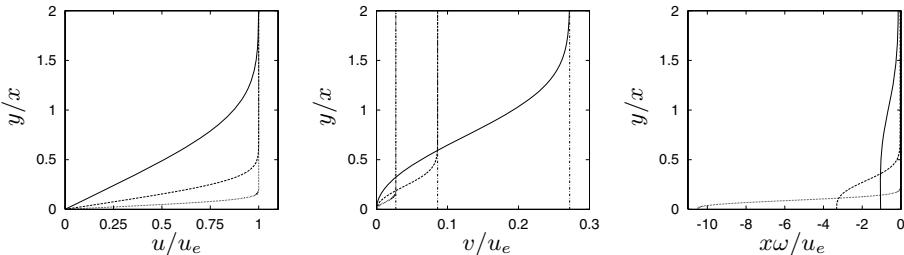


Figura 12.6. Da sinistra a destra: profili delle componenti x ed y della velocità (adimensionalizzate con u_e) e profilo della vorticità ω (adimensionalizzata con u_e/x) rispetto alla coordinata normale y/x , per tre differenti valori di Re_x (10 : linea continua, 10^2 : linea a tratti, 10^3 : linea a punti). Nella figura centrale sono riportati anche i valori asintotici ($bRe_x^{-1/2}/2$) di v/u_e (12.25).

12.3 Strato limite su una lastra piana in una corrente non uniforme

Supponiamo in questo paragrafo che la corrente asintotica (per $x \rightarrow -\infty$, oppure per $y \rightarrow +\infty$) sia sempre diretta lungo x , ma la sua componente lungo x sia una funzione della ascissa x , ovvero $u_e = u_e(x)$. Questo caso è di grande interesse perché l'evoluzione dello strato limite in x risulta fortemente dipendente dal gradiente di pressione $p'_e/\rho = -u_e u'_e$ (la derivata in x , ad esempio di p_e , è indicata con l'apice: $dp_e/dx = p'_e$), come sarà anche mostrato utilizzando una formulazione integrale delle equazioni nel paragrafo seguente.

Con ragionamenti del tutto analoghi a quelli svolti per $u_e \equiv$ costante si ottiene la soluzione *esterna*:

$$(u, v, p) = (u_e(x), 0, p_e(x)) , \quad (12.27)$$

mentre per la soluzione *interna* si arriva facilmente al problema asintotico:

$$\begin{cases} u = \partial_\zeta \tilde{\psi} , \quad \tilde{v} = -\partial_x \tilde{\psi} \\ u \partial_x u + \tilde{v} \partial_\zeta u = -p'_e/\rho + \partial_{\zeta\zeta}^2 u \\ \tilde{v}(x, 0) \equiv 0 , \quad u(x, 0) \equiv 0 \\ \lim_{\zeta \rightarrow +\infty} u(x, \zeta) = u_e(x) , \end{cases} \quad (12.28)$$

nel quale, a causa della presenza del termine forzante $-p'_e/\rho$, non si può ripetere il ragionamento che consente di dedurre la dipendenza di u/u_e dalla combinazione ζ/\sqrt{x} e di porre quindi $u/u_e = f'(\eta)$. In similitudine con la (12.20), si cerca comunque una soluzione del tipo:

$$\tilde{\psi}(x, \eta) = \sqrt{u_e(x)x} F(x, \eta) \quad \text{con: } \eta = y \sqrt{\frac{u_e(x)}{\nu x}} = \zeta \sqrt{\frac{u_e(x)}{x}} , \quad (12.29)$$

in cui F può avere, al contrario che nella (12.20), una dipendenza *diretta* da x . Al solito, la richiesta su $\tilde{\psi}$ al contorno è che $\tilde{\psi}(x, 0) = \sqrt{u_e x} F(x, 0) \equiv 0$ e quindi $F(x, 0) \equiv 0$.

Il gradiente di pressione p'_e/ρ entrerà nella formulazione matematica del problema attraverso la funzione forzante (adimensionale):

$$\beta(x) = -\frac{x p'_e(x)}{\rho u_e^2(x)} = \frac{x u'_e(x)}{u_e(x)} , \quad (12.30)$$

con $\beta \equiv 0$ per la soluzione di Blasius. Considerando che $\partial_x \eta = -\eta(1-\beta)/(2x)$ e $\partial_\zeta \eta = \sqrt{u_e/x}$, possiamo calcolare i vari termini presenti nella equazione in (12.28) al modo seguente:

$$\begin{aligned} u &= \partial_\zeta \tilde{\psi} \Big|_{x \text{ cost.}} = u_e \partial_\eta F \\ \tilde{v} &= -\partial_x \tilde{\psi} \Big|_{\zeta \text{ cost.}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{u_e}{x}} [(1-\beta)\eta \partial_\eta F - 2x \partial_x F - (1+\beta)F] \\ \partial_\zeta u \Big|_{x \text{ cost.}} &= u_e \sqrt{\frac{u_e}{x}} \partial_{\eta\eta}^2 F \\ \partial_\zeta^2 u \Big|_{x \text{ cost.}} &= \frac{u_e^2}{x} \partial_{\eta\eta\eta}^3 F . \end{aligned}$$

che, sostituite nell'equazione in (12.28), conducono alla nuova relazione:

$$\partial_{\eta\eta\eta}^3 F + \frac{1+\beta}{2} F \partial_{\eta\eta}^2 F + \beta[1 - (\partial_\eta F)^2] = x(\partial_\eta F \partial_{x\eta}^2 F - \partial_x F \partial_{\eta\eta}^2 F) , \quad (12.31)$$

in cui tutti i termini che sono non nulli se vi è una dipendenza diretta da x della funzione F sono stati scritti a secondo membro. La ragione per fare questo è che si cercano *soluzioni simili*, ovvero soluzioni $u(x, \zeta)$ per le quali il rapporto $u(x, \zeta)/u_e(x)$ (che si scrive anche come $\partial_\eta F$) è una funzione della sola η , ovvero si ipotizza che esista una funzione G della sola η tale che:

$$\frac{u(x, \zeta)}{u_e(x)} = \partial_\eta F(x, \eta) = G(\eta) \quad \text{quindi: } F(x, \eta) = \int_0^\eta ds G(s) + F(x, 0) ,$$

poiché dalla condizione al contorno su $\tilde{\psi}$, ovvero $\tilde{\psi}(x, 0) = F(x, 0)\sqrt{u_e x} \equiv 0$, segue che $F(x, 0) \equiv 0$, allora anche F è funzione della sola η . In tal caso occorre risolvere il problema in cui l'equazione (12.31) viene scritta con 0 a secondo membro (al solito, l'apice indica la derivata ordinaria in η):

$$\begin{cases} F''' + \frac{1+\beta}{2} F F'' + \beta(1 - F'^2) = 0 \\ F(0) = F'(0) = 0 , \quad \lim_{\eta \rightarrow +\infty} F'(\eta) = 1 . \end{cases} \quad (12.32)$$

È fondamentale osservare che nell'equazione in (12.32) β deve essere necessariamente costante. Il problema (12.32) è dovuto a V.M. Falkner e S.W. Skan (1931).

Come per il problema di Blasius, la soluzione non è nota in forma analitica, ma alcune sue proprietà possono essere dedotte dall'equazione differenziale. Considerando che $F(\eta) \sim \eta$ per $\eta \gg 1$, ponendo $\tilde{\beta} = (1 + \beta)/4$ e dividendo primo e secondo membro dell'equazione per F'' otteniamo per $\eta \gg 1$:

$$\frac{d}{d\eta} \log F'' + 2\tilde{\beta}\eta \sim -2\tilde{\beta} \frac{1 - F'}{F''} \simeq 0.$$

Ipotizziamo che il secondo membro sia trascurabile rispetto a ciascuno dei due

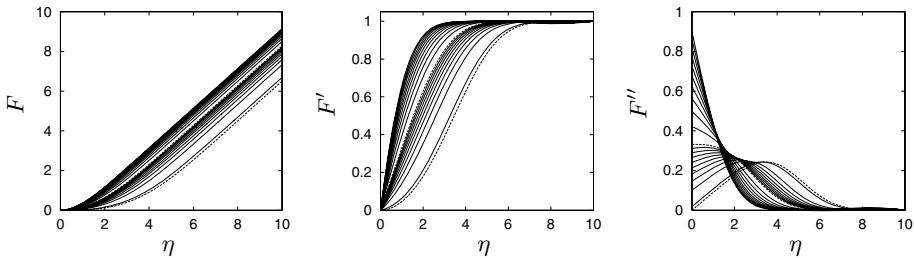


Figura 12.7. Da sinistra a destra: soluzione (F) del problema di Falkner e Skan (12.32) e le sue derivate prima (F') e seconda (F'') in funzione di η e (dalla curva più in basso a quella più alta) per $\beta \simeq -0.09043$ (linea tratteggiata), $-0.09, -0.08, \dots, -0.01, 0$ (linea tratteggiata), $0.05, 0.10, \dots, 0.50$.

addendi a primo membro (come poi verificheremo *a posteriori*) ed integriamo in η partendo da $\bar{\eta}$. Otteniamo in tal modo:

$$F''(\eta) \sim \underbrace{F''(\bar{\eta}) e^{\tilde{\beta}\bar{\eta}^2}}_{F_2} e^{-\tilde{\beta}\eta^2}, \quad (12.33)$$

valida per $\eta \geq \bar{\eta}$. Per brevità, la quantità $F''(\bar{\eta}) \exp(\tilde{\beta}\bar{\eta}^2)$ verrà indicata con F_2 e dipende solo dal punto iniziale di integrazione $\bar{\eta}$. La (12.33) mostra che F'' è esponenzialmente decrescente all'infinito. Integrando tra η e $+\infty$ e considerando che $F' \rightarrow 1$ per $\eta \rightarrow +\infty$, otteniamo la stima ² della derivata prima in η :

$$F'(\eta) \sim 1 - F_2 \int_\eta^{+\infty} d\xi e^{-\tilde{\beta}\xi^2} = 1 - \sqrt{\frac{\pi}{4\tilde{\beta}}} F_2 \operatorname{erfc}(\sqrt{\tilde{\beta}}\eta). \quad (12.34)$$

Integrando da η a $+\infty$ la quantità $1 - F'$ ricavata a partire dalla relazione (12.34) e considerando che $\eta - F(\eta) \rightarrow b(\beta)$ per $\eta \rightarrow \infty$ (cfr. Fig. 12.8) otteniamo:

² Utilizziamo qui la funzione degli errori complementare $\operatorname{erfc}(x)$, definita nel modo seguente:

$$b - [\eta - F(\eta)] \sim F_2 \int_{\eta}^{+\infty} d\xi' \int_{\xi'}^{+\infty} d\xi'' e^{-\tilde{\beta}\xi''^2},$$

integrandi due volte per parti si arriva alla stima:

$$\begin{aligned} F(\eta) &\sim \eta - b - F_2 \left[\eta \int_{\eta}^{+\infty} d\xi e^{-\tilde{\beta}\xi^2} + \frac{1}{2\tilde{\beta}} e^{-\tilde{\beta}\eta^2} \right] \\ &= \eta - b - \frac{F_2}{2\tilde{\beta}} \left[\sqrt{\pi\tilde{\beta}} \eta \operatorname{erfc}(\sqrt{\tilde{\beta}}\eta) + e^{-\tilde{\beta}\eta^2} \right]. \end{aligned} \quad (12.35)$$

Osserviamo che dalle (12.33, 12.34) segue la stima del rapporto $(1 - F')/F''$:

$$\frac{1 - F'(\eta)}{F''(\eta)} \sim \frac{\int_{\eta}^{+\infty} d\xi e^{-\tilde{\beta}\xi^2}}{e^{-\tilde{\beta}\eta^2}} \leq \int_{\eta}^{+\infty} d\xi e^{-2\tilde{\beta}\eta(\xi-\eta)} = \frac{1}{2\tilde{\beta}\eta} \ll 1,$$

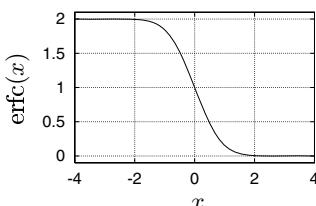
mentre i termini a primo membro dell'equazione nel problema (12.32) sono entrambi dell'ordine di η .

L'integrazione numerica del problema (12.32) non è banale, a causa della presenza della condizione all'infinito e del fatto che non si riesce a ridurre il problema ai soli valori iniziali, come è stato fatto per il problema di Blasius. Questo a causa della presenza del nuovo termine $1 - F'^2$. Una strategia possibile per integrare il problema (12.32) almeno in un certo intervallo di valori di β , meglio specificato nel seguito, consiste nel cambiare variabile dipendente, riscrivendo l'equazione nella nuova funzione $H = \eta - F$:

$$H''' + \frac{1+\beta}{2} (\eta - H) H'' + \beta (H'^2 - 2H') = 0. \quad (12.36)$$

Sappiamo che $F(\eta) \sim \eta$ per $\eta \gg 1$ ed inoltre $F'(\eta) < 1$, almeno in un intervallo contenente il punto $\eta = 0$. La funzione $w = F(\eta)$ avrà quindi un asintoto obliqua della forma $w = \eta - b$, la cui intercetta con l'asse w sarà a sua volta dipendente da β : $b = b(\beta)$. Ne segue che possiamo ipotizzare che, per un assegnato valore di β , la funzione $H = H(\eta)$ risulti *monotona* crescente dal valore 0, assunto in $\eta = 0$, al valore H_0 (tutt'ora incognito), assunto per $\eta \rightarrow \infty$. Si può allora pensare H' (derivata prima in η di H) come funzione

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} d\xi e^{-\xi^2}$$



il cui andamento è riportato in figura. Notare che $\operatorname{erfc}(0) = 1$ ed $\operatorname{erfc}(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$.

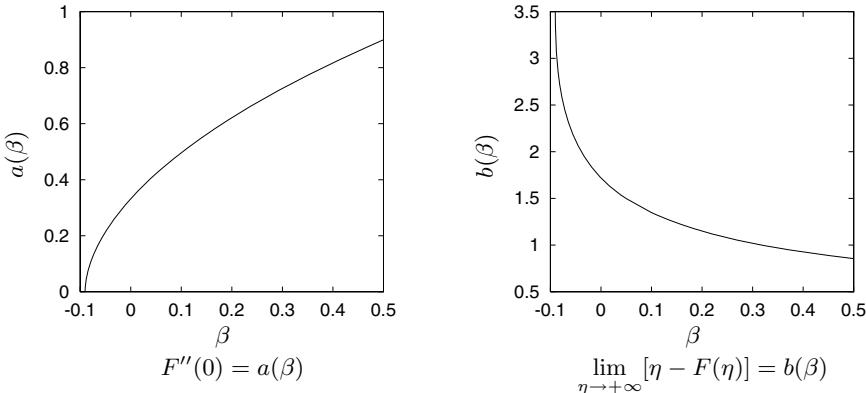


Figura 12.8. Derivata seconda di F in $\eta = 0$ e valore limite di $\eta - F(\eta)$ per $\eta \rightarrow +\infty$ in funzione del parametro β (12.30).

della H stessa. La coordinata η sarà allora a sua volta soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{d\eta}{dH} = \frac{1}{H'(H)} \\ \eta(0) = 0 , \end{cases} \quad (12.37)$$

mentre sarà pure utile introdurre l'integrale M in H della funzione H' che vale 0 in $H = 0$, a sua volta soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dM}{dH} = H'(H) \\ M(0) = 0 . \end{cases} \quad (12.38)$$

Evidentemente, la soluzione M del problema (12.38) si scrive pure:

$$M(H) = \int_0^H d\tilde{H} H'(\tilde{H}) = \int_0^{\eta(H)} d\tilde{\eta} H'^2(\tilde{\eta}) . \quad (12.39)$$

Nella nuova variabile indipendente H , l'equazione (12.36) conduce al seguente problema ai valori iniziali:

$$\begin{cases} \frac{dH'^2}{dH} + (1 + \beta)[\eta(H) - H]H' + (1 + 3\beta)M(H) = (1 + 5\beta)H - 2a \\ H'(0) = 1 , \end{cases} \quad (12.40)$$

che deve essere integrato simultaneamente ai precedenti problemi (12.37, 12.39) per η ed M . La soluzione ottenuta dovrà rispettare il vincolo all'infinito:

$$(1 + 3\beta) M(H_0) - (1 + 5\beta) H_0 + 2a(\beta) = 0 , \quad (12.41)$$

che si ricava facendo il limite per $H \rightarrow H_0$ di entrambi i membri dell'equazione differenziale nel problema (12.40). Una strategia per calcolare la soluzione $a \beta$ fissato consiste nell'integrare in H i problemi (12.37, 12.39, 12.40) per a fissato, fintantoché H'^2 rimane positivo. Quando H'^2 assume il valore 0, $H = H_0$ ed $H' \rightarrow 0$ in modo che $\eta \rightarrow +\infty$, in base al problema differenziale (12.37). La soluzione così ottenuta non verifica, in generale, il vincolo (12.41): infatti il valore a assegnato inizialmente non è quello corretto. Occorre quindi realizzare una procedura iterativa (bisezioni) sul parametro a , fintantoché il vincolo (12.41) non risulti verificato, nel limite della approssimazione numerica adottata per integrare.

In Fig. 12.9 è riportata con la linea tratteggiata la soluzione di Blasius (12.21) ($\beta = 0$) e con linee continue le soluzioni con gradiente di pressione *favorevole* ($p'_e < 0, \beta > 0$) ed *averso* ($p'_e > 0, \beta < 0$), utilizzando i valori di β di Fig. 12.7. Dalle (12.32, 12.30) segue in particolare che:

$$F'''(0) = -\beta = \frac{x}{\rho u_e^2} p'_e ,$$

la quale mostra come ad un gradiente di pressione favorevole sia associata una concavità verso il basso ed ad un gradiente avverso una concavità verso l'alto. Notare inoltre che, per $\beta \simeq -0.09$, $\partial_y u = 0$ in corrispondenza della parete, sulla quale lo sforzo di attrito risulta quindi nullo.

La soluzione ottenuta si scrive allora:

$$\begin{cases} \frac{u}{u_e} = F'(\eta) \\ \frac{v}{u_e} = \frac{1}{2} \text{Re}_x^{-1/2} \left[(1 - \beta)\eta F'(\eta) - (1 + \beta)F(\eta) \right] \\ p = p_e(x) , \end{cases} \quad (12.42)$$

da cui segue la vorticità (adimensionalizzata con $u_e(x)/x$):

$$\frac{x\omega}{u_e} = - \left\{ \frac{1}{4\text{Re}_x^{1/2}} \left[(1 - 4\beta + \beta^2)\eta F' - (1 - \beta^2)F + (1 - \beta)\eta^2 F'' \right] + \text{Re}_x^{1/2} F'' \right\} . \quad (12.43)$$

Si può osservare, infine, che la condizione, necessaria per avere soluzioni simili, $\beta = \text{costante}$ implica una forma particolare del legame $u_e = u_e(x)$, infatti:

$$\frac{x}{u_e} u'_e = \beta \Rightarrow \frac{du_e}{u_e} = \beta \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{u_e(x)}{u_e(x_0)} = \left(\frac{x}{x_0} \right)^\beta . \quad (12.44)$$

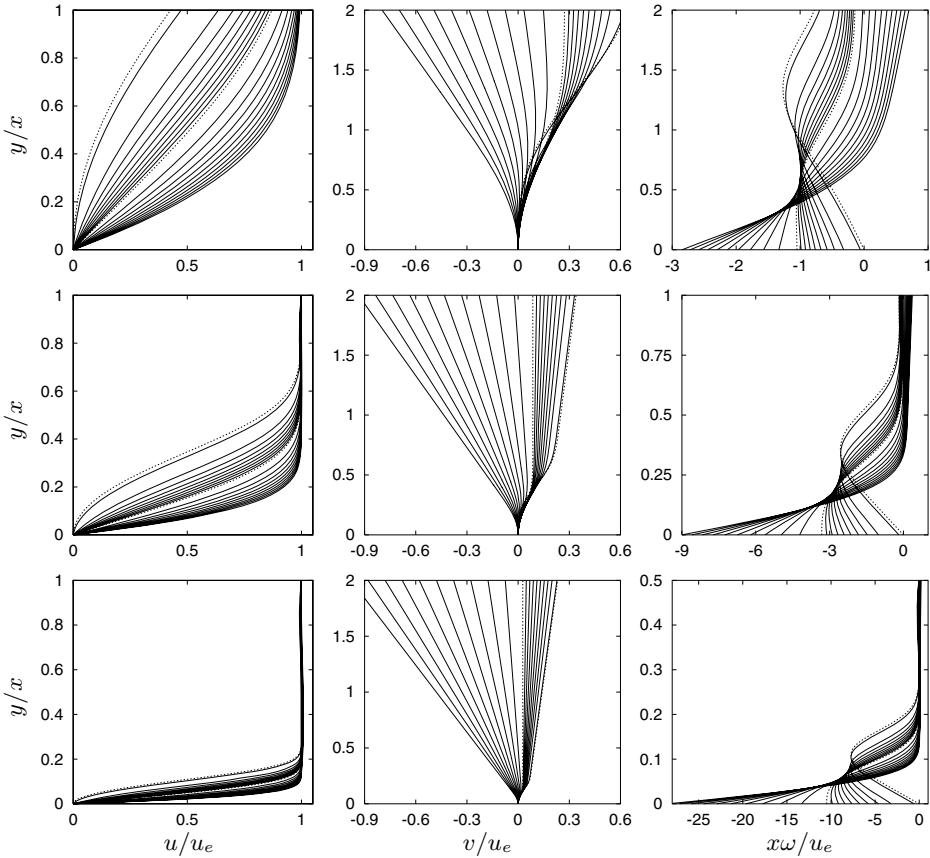


Figura 12.9. Soluzione del problema di Falkner e Skan per $\text{Re}_x = 10$ (prima riga) $\text{Re}_x = 10^2$ (seconda riga) $\text{Re}_x = 10^3$ (terza riga), in termini di velocità (12.42) componente x (prima colonna), componente y (seconda colonna), e nella terza colonna, di vorticità (12.43). I valori del parametro β ed il tipo di linea utilizzato seguono le medesime convenzioni di Fig. 12.7.

- ◊ **Esercizio:** Un metodo approssimato per il calcolo dello strato limite fu proposto da Karman e Pohlhausen (1921), assumendo il seguente sviluppo polinomiale del profilo di velocità:

$$\frac{u}{u_e} = f'(\xi) = c_1 \xi + c_2 \xi^2 + c_3 \xi^3 + c_4 \xi^4 , \quad (12.45)$$

in cui $\xi = y/\delta$ (δ è lo “spessore” dello strato limite) e gli apici indicano derivate in ξ . Si assume $f'(1) = 1$ ed $f''(1) = f'''(1) = 0$. Calcolare i coefficienti c_i per $i = 1, \dots, 4$.

Suggerimento. Introdurre il parametro adimensionale $\lambda = u'_e \delta^2 / \nu$, in cui $u'_e = du_e/dx$.

L'importanza delle soluzioni simili è nel fatto che una *qualunque* soluzione (*non simile*) delle equazioni di strato limite (12.28) in presenza di un gradiente di pressione *strettamente* favorevole, ovvero:

$$\exists b \neq 0 \mid xp'_e \leq -b^2, \quad \forall x > 0 \quad \Rightarrow \quad u_e \text{ diverge con } x,$$

e col $\lim_{\zeta \rightarrow +\infty} u(x, \zeta) = u_e(x)$ uniforme su ogni intervallo limitato³ è approssimata uniformemente in ζ , sempre meglio per x crescenti, dalla soluzione simile corrispondente al medesimo valore del gradiente della pressione esterna. Ovviamamente la soluzione simile è ipotizzata esistente, cioè vale la (12.44). Infatti verrà mostrato che esiste $a > 0$ tale che:

$$\left| \frac{u_1(x, \zeta)}{u_e(x)} - \frac{u_2(x, \zeta)}{u_e(x)} \right| \leq \frac{a}{u_e(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0, \quad (12.46)$$

dove u_2 è la soluzione generica delle equazioni di strato limite (12.28) ed u_1 è la corrispondente soluzione simile. Si assume, inoltre, che esista un punto iniziale x_0 in cui $u_2(x_0, \zeta) \geq 0$ (analoghe proprietà vale per la soluzione simile in modo ovvio), da cui si può mostrare che $u_2(x, \zeta) \geq 0, \quad \forall x > x_0$.

Per dimostrare la validità della (12.46), conviene dapprima di riscrivere in modo più comodo le equazioni (12.28) utilizzando la trasformazione proposta da *Mises*:

$$\xi = x - x_0, \quad \psi = \tilde{\psi}(x, \zeta) \quad (\text{con } \tilde{\psi}(x, 0) \equiv 0)$$

che risulterà invertibile, avendo lo jacobiano $j = \partial(\xi, \psi)/\partial(x, \zeta) = u \neq 0$. La regione $x \geq x_0, \zeta \geq 0$ è trasformata nella $\xi \geq 0, \psi \geq 0$, tenendo conto che si ha:

$$\partial_x = \partial_\xi - \tilde{v}\partial_\psi, \quad \partial_\zeta = u\partial_\psi$$

e quindi che l'equazione (12.28) si scrive:

$$\frac{1}{2}\partial_{\psi\psi}^2 u^2 \equiv (\partial_\psi u)^2 + u\partial_{\psi\psi}^2 u \quad \Rightarrow \quad \partial_{\zeta\zeta}^2 = \frac{1}{2}u\partial_{\psi\psi}^2 u^2,$$

il sistema (12.28) si riduce al sistema seguente:

$$\begin{cases} \partial_\xi(u^2 - u_e^2) = u\partial_{\psi\psi}^2 u^2 \\ u(\xi, 0) \equiv 0 \\ \lim_{\psi \rightarrow +\infty} u(\xi, \psi) = u_e(\xi) \quad (\text{uniformemente su ogni intervallo limitato}). \end{cases} \quad (12.47)$$

³ Ovvvero $\forall I \subset R^+$ limitato:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists M_\varepsilon^I > 0 \mid \forall \zeta > M_\varepsilon^I : |u - u_e| < \varepsilon, \quad \forall x \in I$$

con M_ε^I non dipendente da x .

Questo sistema vale per u_2 ma anche per u_1 (l'uniformità del limite per una soluzione simile è mostrata nella Appendice 12.8), quindi si può introdurre la funzione $\varphi = u_2^2 - u_1^2$ la quale verifica l'equazione:

$$\begin{aligned}\partial_\xi \varphi &= u_2 \partial_{\psi\psi}^2 u_2^2 - u_1 \partial_{\psi\psi}^2 u_1^2 \\ &\equiv u_2 \partial_{\psi\psi}^2 (u_2^2 - u_1^2) + (u_2 - u_1) \partial_{\psi\psi}^2 u_1^2 \\ &\equiv u_2 \partial_{\psi\psi}^2 \varphi + \left[\frac{2}{u_1(u_2 + u_1)} \partial_{\zeta\zeta}^2 u_1 \right] \varphi,\end{aligned}$$

posto $\alpha = 2/u_1(u_1 + u_2)\partial_{\zeta\zeta}^2 u_1 < 0$, poiché u_1 è simile, φ soddisfa il problema la differenza dei problemi (12.48) scritta in φ :

$$\begin{cases} \partial_\xi \varphi - u_2 \partial_{\psi\psi}^2 \varphi = \alpha \varphi \\ \varphi(\xi, 0) \equiv 0 \\ \lim_{\psi \rightarrow +\infty} \varphi(\xi, \psi) \equiv 0 \end{cases} \quad (12.48)$$

in cui il limite è uniforme su ogni intervallo limitato.⁴ Viene ora mostrato che la φ soluzione di (12.48) raggiunge i suoi valori estremali sulla semiretta $\xi = 0$, $\psi \geq 0$, se il valore massimo φ_M di $\varphi(0, \psi)$ (non negativo, poiché $\varphi(0, 0) = 0$) è strettamente positivo ed il valore minimo φ_m (non positivo, poiché $\varphi(0, 0) = 0$) è strettamente negativo. In altre parole, in queste ipotesi dalla $\varphi_m \leq \varphi(0, \psi) \leq \varphi_M$ segue $\forall \xi > 0 : \varphi_m \leq \varphi(\xi, \psi) \leq \varphi_M$.

La negazione di questa proposizione conduce ad un assurdo. Infatti, $\exists(\xi_0, \psi_0)$ in cui, ad esempio, $\varphi > \varphi_M$, vedi Fig. 12.10. Ma allora $\exists(\xi_1, \psi_1) \in S$ dove φ raggiunge il massimo assoluto, ed è $\xi_1 > 0$. Infatti, fissato $\varepsilon_1 > 0$, $\exists M_{\varepsilon_1} > 0 \mid \forall \psi > M_{\varepsilon_1} : -\varepsilon_1 \leq \varphi \leq \varepsilon_1$. Sia F_1 il massimo assoluto

⁴ Nella ipotesi di uniformità del limite nella (12.47), il limite nella (12.48) è uniforme.

Infatti, si fissi un intervallo chiuso e limitato $I \subset R^1$, a piacere. u è limitata nella striscia $I \times [0, +\infty)$. Questo segue dall'uniformità del limite (12.47): scelto ad arbitrio $\varepsilon' > 0$, $\exists M_{\varepsilon'}^I > 0$ non dipendente da x , tale che $u_e(x) - \varepsilon' \leq u(x, \zeta) \leq u_e(x) + \varepsilon' \leq U_e + \varepsilon'$ per $\zeta > M_{\varepsilon'}^I$, con $U_e = \max \{u_e(x), x \in I\}$. Fuori dal rettangolo $I \times [0, M_{\varepsilon'}^I]$ la u è maggiorata da $U_e + \varepsilon'$, dentro il rettangolo $I \times [0, M_{\varepsilon'}^I]$ ammette massimo assoluto, essendo continua. Quindi $u(x, \zeta)$ è limitata nella striscia $I \times [0, +\infty)$ da U . Ma allora per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $M_\varepsilon^I > 0$ tale che per ogni $\psi > M_\varepsilon^I$:

$$\begin{aligned}|\varphi| &= |u_1^2 - u_2^2| \\ &= (u_1 + u_2) |u_1 - u_2| \\ &\leq (U_1 + U_2) (|u_1 - u_e| + |u_2 - u_e|) \\ &< 2(U_1 + U_2) \varepsilon,\end{aligned}$$

uniformemente in x .

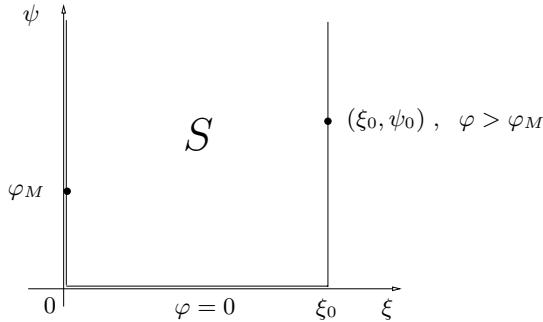


Figura 12.10. Regione del piano (ξ, ψ) in cui si pone il problema (12.48).

(φ è continua) nel rettangolo $[0, \xi_0] \times [0, M_{\varepsilon_1}]$. Se $F_1 > \varepsilon$, allora F_1 è il massimo assoluto in $S = [0, \xi_0] \times [0, +\infty)$. Se $F_1 \leq \varepsilon$, si scelga $\varepsilon_2 = F_1/2$ in corrispondenza alla quale $\exists M_{\varepsilon_2} > 0 \mid \forall \psi > M_{\varepsilon_2} : -\varepsilon_2 \leq \varphi \leq \varepsilon_2 = F_1/2$. Sia F_2 il massimo assoluto di φ nel rettangolo $[0, \xi_0] \times [0, M_{\varepsilon_2}]$. Allora F_2 è il massimo assoluto in S . Poiché $\xi_0 > 0$, deve essere pure $\xi_1 > 0$ ed eventualmente $\xi_1 = \xi_0$.

L'esistenza del punto (ξ_1, ψ_1) contraddice i segni nella (12.48-1). Se $0 < \xi_1 < \xi_0$, in (ξ_1, ψ_1) si ha $\partial_\xi \varphi = 0, \partial_{\psi\psi}^2 \varphi \leq 0$; se $\xi_1 = \xi_0$, in (ξ_1, ψ_1) si ha $\partial_\xi \varphi \geq 0, \partial_{\psi\psi}^2 \varphi \leq 0$. Entrambe le ipotesi sono assurde. Quindi, in tutto S , $\varphi_m \leq \varphi \leq \varphi_M$, con $\varphi_M > 0$ e $\varphi_m < 0$. Per l'arbitrarietà di ξ_0 , questa doppia diseguaglianza vale in tutto il primo quadrante. Posto $a^2 = \max(|\varphi_m|, \varphi_M)$, con $a > 0$, si ha nel primo quadrante:

$$|\varphi| \leq a^2 \quad \text{per ogni } \xi \geq 0 \text{ e } \psi \geq 0. \quad (12.49)$$

I casi in cui $\varphi_M = 0$ oppure $\varphi_m = 0$ non sono interessanti perché $a^2 = |\varphi_m|$ oppure $a^2 = \varphi_M$ e la discussione va fatta solo per φ_m oppure φ_M , che sono nuovamente non nulli. Dalla (12.49) segue allora che:

$$0 \leq |u_1 - u_2|^2 \leq |u_1 - u_2| (u_1 + u_2) = |\varphi| \leq a^2 \Rightarrow |u_1 - u_2| \leq a$$

in tutto il primo quadrante, da quest'ultima segue la (12.46).

La proprietà precedentemente discussa delle soluzioni simili, che le rende in senso asintotico rappresentative di una ampia classe di soluzioni delle equazioni dello strato limite (12.28), evidenzia come l'evoluzione in x dello strato limite in presenza di un gradiente *favorevole* della pressione ($p'_e < 0$) tenda a divenire via via meno dipendente dalle condizioni iniziali (sezione x_0): la struttura dello strato limite diviene funzione delle sole condizioni locali. Il contrario accade in presenza di un gradiente *avverso* della pressione ($p'_e > 0$): la struttura dello strato limite è fortemente dipendente dalle condizioni iniziali e la dipendenza dalle condizioni locali diviene molto debole. Si può quindi concludere che, se $p'_e < 0$, l'evoluzione dello strato limite è dominata dalla diffusione

dello strato vorticoso adiacente alla parete e questa rende il flusso via via meno dipendente dalle condizioni iniziali. Le caratteristiche dello strato limite in tal caso dipendono esclusivamente dalle condizioni locali ($p'_e(x)$). Questo diverso comportamento è chiarito anche dalla scrittura in termini integrali delle equazioni di strato limite.

12.4 Descrizione integrale dello strato limite su una lastra piana

In molte applicazioni non interessa la struttura interna (profilo di velocità) dello strato limite, ma occorrono solo delle informazioni globali. Ad esempio, una quantità in ogni caso interessante è lo *sforzo di taglio* alla parete:

$$\tau_w = \mu \left. \partial_y u \right|_{y=0} , \quad (12.50)$$

che nel caso di profilo u/u_e simile assume la forma:

$$\tau_w = a(\beta) \rho u_e^2 Re_x^{-1/2} =: T(\beta) \rho u_e^2 Re_x^{-1/2} , \quad (12.51)$$

dove $a(\beta) = F''(0)$ (cfr. Fig. 12.8), essendo F la soluzione del problema (12.32) per il valore corrente di β (12.30).

Una seconda quantità di natura integrale dà una misura di quanto la corrente esterna sia deviata per effetto della presenza dello strato limite, l'entità di questa deviazione è data dallo *spessore di scostamento* δ_1 definito da:

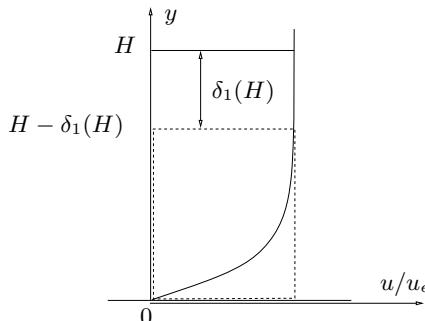


Figura 12.11. Significato fisico dello spessore di scostamento (12.52): fissato un valore di H , l'area sottesa del profilo di velocità (normalizzato con la u_e) e l'asse y fino all'ordinata $y = H$ è uguale all'area del rettangolo (tratteggiato) di base 1 ed altezza $H - \delta_1(H)$. La corrente asintotica viene deviata di $\delta_1(H)$ (e quindi, all'infinito, di δ_1) per effetto della non uniformità del profilo di velocità.

$$\begin{aligned}
\delta_1(x) &= \lim_{H \rightarrow +\infty} \delta_1(H) \\
&= \lim_{H \rightarrow +\infty} \int_0^H dy \left[1 - \frac{u(x, y)}{u_e(x)} \right] \\
&= \int_0^{+\infty} dy \left[1 - \frac{u(x, y)}{u_e(x)} \right], \tag{12.52}
\end{aligned}$$

che per una soluzione simile diviene:

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= \sqrt{\frac{\nu x}{u_e}} \int_0^{+\infty} d\eta [1 - F'(\eta)] \\
&= x \operatorname{Re}_x^{-1/2} \lim_{\eta \rightarrow +\infty} [\eta - F(\eta)] \\
&= b(\beta) x \operatorname{Re}_x^{-1/2} =: \Delta(\beta) x \operatorname{Re}_x^{-1/2}, \tag{12.53}
\end{aligned}$$

avendo indicato con $b(\beta)$ il limite per $\eta \rightarrow +\infty$ della quantità $\eta - F(\eta)$ (cfr. Fig. 12.8). Il significato fisico della quantità δ_1 è chiarito in Fig. 12.11 ed anche dall'ulteriore considerazione seguente. Per $\beta = 0$ dalla soluzione di Blasius (12.24) segue:

$$\begin{aligned}
\lim_{\eta \rightarrow +\infty} \frac{v}{u}(\eta) &= \frac{1}{u_e} \lim_{\eta \rightarrow +\infty} v(\eta) \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{Re}_x^{-1/2} \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \{\eta[f'(\eta) - 1] + [\eta - f(\eta)]\} \\
&= \frac{b(0)}{2} \operatorname{Re}_x^{-1/2} = \frac{d\delta_1}{dx},
\end{aligned}$$

la curva $y = \delta_1(x)$ rappresentativa quindi il “confine” dello strato limite, almeno in assenza di gradienti di pressione.

Una terza quantità interessante (perché interviene nella forma integrale delle equazioni di strato limite) è lo *spessore di quantità di moto* θ , definito dalla:

$$\theta(x) = \int_0^{+\infty} dy \frac{u(x, y)}{u_e(x)} \left[1 - \frac{u(x, y)}{u_e(x)} \right] \tag{12.54}$$

che, però, non ha un significato fisico immediato, al contrario di δ_1 . Per una soluzione simile con⁵ $\beta \neq -1/3$ si ha:⁶

⁵ Poiché le soluzioni simili hanno senso fisico se e solo se $\beta > -0.09$, come è stato discusso nel paragrafo 12.2, il valore $\beta = -1/3$ non è d'interesse.

⁶ Dalla definizione di soluzione simile segue che θ (12.54) può essere calcolato come:

$$\theta = \sqrt{\frac{\nu x}{u_e}} \int_0^{+\infty} d\eta F' (1 - F') = x \operatorname{Re}_x^{-1/2} \left[F(1 - F') \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} d\eta FF'' \right], \tag{12.55}$$

ma, poiché è noto che F'' va esponenzialmente a zero per $\eta \rightarrow +\infty$ (12.33):

$$\theta(x) = 2 \frac{a - b\beta}{1 + 3\beta} x \text{Re}_x^{-1/2} = \Theta(\beta) x \text{Re}_x^{-1/2}. \quad (12.58)$$

Va osservato che θ assumerebbe valori negativi se fosse $\beta > a/b$ (ad esempio, nel caso di Blasius: $\beta = 0$ e $a/b \simeq 0.19$). Dalle (12.53, 12.58) si vede, inoltre, che entrambi gli spessori sono proporzionali ad $x \text{Re}_x^{-1/2}$, con fattori differenti e dipendenti dal gradiente di pressione esterna per il tramite di β .

- ◊ **Esercizio:** Utilizzando il polinomio in ξ ottenuto nell'esercizio (12.45), calcolare gli spessori di scostamento e di quantità di moto e confrontarli con quelli della soluzione di Falkner-Skan.

Introdotte queste tre quantità caratteristiche della descrizione integrale dello strato limite (τ_w , δ_1 e θ), riscriviamo il problema (12.28) nelle variabili fisiche:

$$\begin{cases} \partial_x u + \partial_y v = 0 \\ u \partial_x u + v \partial_y u = -p'_e / \rho + \nu \partial_{yy}^2 u \\ u(x, 0) \equiv v(x, 0) \equiv 0 \\ \lim_{y \rightarrow +\infty} (u, v) = (u_e, 0) \end{cases} \quad (12.59)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} F(1 - F') = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \frac{1 - F'}{1/F} = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \frac{F^2 F''}{F'} = 0, \quad (12.56)$$

inoltre, ricordando che F è soluzione del problema (12.32), l'integrale può essere scritto come:

$$\begin{aligned} \frac{1+\beta}{2} \int_0^{+\infty} d\eta FF'' &= F''(0) - \beta \int_0^{+\infty} d(\eta - F) (1 + F') \\ &= a - \beta(\eta - F) (1 + F') \Big|_0^{+\infty} + \beta \int_0^{+\infty} d\eta (\eta - F) F'' \\ &= a - 2b\beta + \beta \int_0^{+\infty} d[\eta(F' - 1)] + \\ &\quad + \beta \int_0^{+\infty} d(\eta - F) - \beta \int_0^{+\infty} d\eta FF'' \\ &= a - 2b\beta + b\beta - \beta \int_0^{+\infty} d\eta FF'', \end{aligned}$$

risolvendo la relazione ottenuta eguagliando primo ed ultimo membro si ha:

$$\int_0^{+\infty} d\eta FF'' = 2 \frac{a - b\beta}{1 + 3\beta}. \quad (12.57)$$

Inserendo i risultati (12.56, 12.57) nella relazione (12.55) si ottiene la valutazione (12.58) di θ in condizioni simili.

e ricaviamo una equazione per le quantità (12.50, 12.52, 12.54) dovuta a *Karman*. Infatti, utilizzando l'equazione di continuità nel problema (12.59):

$$\begin{aligned} v\partial_y u &\equiv v\partial_y(u - u_e) \\ &= \partial_y[v(u - u_e)] + (u - u_e)\partial_x u \\ &= \partial_y[v(u - u_e)] + \partial_x[u(u - u_e)] - u\partial_x u + uu'_e \\ &= \partial_y[v(u - u_e)] - \partial_x \left\{ u_e^2 \left[\frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e} \right) \right] \right\} - u\partial_x u + \\ &\quad - u_e \left(1 - \frac{u}{u_e} \right) u'_e + u_e u'_e \end{aligned}$$

e sostituendo questa forma di $v\partial_y u$ nella seconda equazione del problema (12.59):

$$\partial_y[v(u - u_e)] - \partial_x \left\{ u_e^2 \left[\frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e} \right) \right] \right\} - \left(1 - \frac{u}{u_e} \right) u_e u'_e = \nu \partial_{yy}^2 u$$

che può essere integrata in y tra 0 e $+\infty$. Ricordando le condizioni al contorno nel problema (12.59) e le definizioni (12.50, 12.52) e (12.54), otteniamo l'equazione:

$$\boxed{\frac{d}{dx}(u_e^2 \theta) + \delta_1 u_e u'_e = \frac{\tau_w}{\rho}} \quad (12.60)$$

nota come equazione di Karman.

Osserviamo che l'equazione di Karman (12.60) è senz'altro verificata per una soluzione simile. Infatti sostituendo nella (12.60) le espressioni (12.51, 12.53) e (12.58):

$$\frac{d}{dx}(u_e^2 \Theta x \text{Re}_x^{-1/2}) + \Delta x \text{Re}_x^{-1/2} u_e u'_e = \frac{T \rho u_e^2 \text{Re}_x^{-1/2}}{\rho},$$

considerato che si ha:

$$\frac{d}{dx} x \text{Re}_x^{-1/2} = \frac{d}{dx} \sqrt{\frac{\nu x}{u_e}} = \frac{1 - \beta}{2} \text{Re}_x^{-1/2}$$

e dividendo per u_e^2 :

$$2 \frac{u'_e}{u_e} \Theta x \text{Re}_x^{-1/2} + \Theta \frac{1 - \beta}{2} \text{Re}_x^{-1/2} + \Delta x \text{Re}_x^{-1/2} \frac{u'_e}{u_e} = T \text{Re}_x^{-1/2}$$

che, ricordando la definizione di $\beta = x u'_e / u_e$, diviene:

$$\left(\frac{1 + 3\beta}{2} \Theta + \beta \Delta - T \right) \text{Re}_x^{-1/2} = 0.$$

La relazione precedente è identicamente verificata in x , come si può constatare sostituendo le espressioni (12.51, 12.53) e (12.58) di T , Δ e Θ nel fattore che moltiplica $\text{Re}_x^{-1/2}$, il quale diviene in tal modo:

$$\frac{1+3\beta}{2} 2 \frac{a-b\beta}{1+3\beta} + b\beta - a \equiv 0 ,$$

nullo per ogni β .

L'equazione di Karman (12.60) può essere integrata facendo uso di una assunzione suggerita da Thwaites 1949 [24]. Si può osservare che, da un punto di vista integrale, lo strato limite è caratterizzato dalle *quattro* quantità:

$$\tau_w, \delta_1, \theta \text{ e } p'_e \text{ (oppure } -\rho u_e u'_e\text{)} ,$$

con le quali è possibile costruire i seguenti *tre* gruppi adimensionali:

$$H = \frac{\delta_1}{\theta}, \quad l = \frac{\theta \tau_w}{\mu u_e} \text{ e } j = \frac{\theta^2}{\mu u_e} p'_e = -\frac{\theta^2}{\nu} u'_e$$

che per una qualunque soluzione simile risultano funzioni del solo parametro β (e non dell'ascissa x):

$$H_s = \frac{\Delta x R e_x^{-1/2}}{\Theta x R e_x^{-1/2}} \equiv \frac{\Delta}{\Theta} = H_s(\beta)$$

$$l_s = \frac{\Theta x R e_x^{-1/2} T \rho u_e^2 R e_x^{-1/2}}{\mu u_e} = \Theta T \frac{x u_e}{\nu} R e_x^{-1} \equiv \Theta T = l_s(\beta)$$

$$j_s = \frac{\Theta^2 x^2 R e_x^{-1}}{\mu u_e} p'_e = \Theta^2 \frac{x u_e}{\nu} \frac{x}{u_e^2} \frac{p'_e}{\rho} R e_x^{-1} = -\Theta^2 \frac{x}{u_e^2} u_e u'_e \equiv -\Theta^2 \beta = j_s(\beta) .$$

Si può pensare di invertire, almeno localmente, l'ultima ottenendo $\beta = \beta(j_s)$ e quindi di sostituire nelle prime due ottenendo, almeno localmente, i legami:

$$H_s = H_s(j_s), \quad l_s = l_s(j_s) .$$

Thwaites suggerisce di assumere che per una *qualsiasi* soluzione del problema (12.28), in generale non simile, valgano le relazioni $H = H_s(j)$ ed $l = l_s(j)$. Allora si può pensare di integrare l'equazione di Karman (12.60), infatti moltiplicandola per θ (assunta non nulla) e considerando l'ipotesi precedente:

$$\frac{u_e}{\nu} \frac{d\theta^2}{dx} = 2\{[H_s(j) + 2]j + l_s(j)\} =: L(j) . \quad (12.61)$$

Una prima approssimazione per $L(j)$, ancora suggerita da Thwaites, è $L(j) \simeq 0.45 + 6j$. Sostituendo nella (12.61):

$$\frac{d\theta^2}{dx} + 6 \frac{u'_e}{u_e} \theta^2 = 0.45 \frac{\nu}{u_e}$$

e moltiplicando per u_e^6 ed integrando a partire da condizioni iniziali note in $x = x_0$:

$$u_e^6(x)\theta^2(x) = u_e^6(x_0)\theta^2(x_0) + 0.45\nu \int_{x_0}^x ds u_e^5(s) .$$

Considerato che $u'_e = -p'_e/(\rho u_e)$, l'integrale a secondo membro diviene:

$$\nu \int_{x_0}^x ds u_e^5(s) = -\mu \int_{x_0}^x ds u_e^5(s) \frac{u'_e(s)}{\frac{p'_e(s)}{u_e(s)}} = -\mu \int_{u_e(x_0)}^{u_e(x)} d\lambda \frac{\lambda^6}{p'_e(\lambda)} ,$$

si ottiene, infine:

$$\begin{aligned} u_e^6(x)\theta^2(x) &= \\ &= u_e^6(x_0)\theta^2(x_0) + 0.45\mu \int_{u_e(x_0)}^{u_e(x)} d\lambda \frac{\lambda^6}{-\tilde{p}'_e(\lambda)} \\ &= u_e^6(x_0)\theta^2(x_0) \left\{ 1 + \frac{0.45}{\text{Re}_\theta(x_0)} \int_1^{u_e(x)/u_e(x_0)} d\chi \frac{\chi^6}{-\tilde{p}'_e(\chi)} \right\} , \end{aligned} \quad (12.62)$$

dove $\text{Re}_\theta(x_0) = u_e(x_0)\theta(x_0)/\nu$ e $\tilde{p}'_e(\chi) = \theta(x_0)p'_e[\chi u_e(x_0)]/[\rho u_e^2(x_0)]$. La relazione (12.62) consente di avere una prima stima dell'andamento in x dello spessore di quantità di moto θ . Inoltre possiamo osservare che, assunto $\tilde{p}'_e \equiv$ costante $= \sigma_e$, l'integrale ad ultimo membro della relazione (12.62) risulta essere proporzionale a χ^7 , valutato tra 1 e $u_e(x)/u_e(x_0)$. Ne segue che se $\sigma_e < 0$, ovvero se $u_e(x) > u_e(x_0)$, possiamo trascurare 1 rispetto a $u_e(x)/u_e(x_0)$ e quindi $u_e^6(x)\theta^2(x)$ risulta praticamente indipendente dalle condizioni iniziali (in x_0). Al contrario, se $\sigma_e > 0$, ovvero se $u_e(x) < u_e(x_0)$, si può trascurare $u_e(x)/u_e(x_0)$ rispetto ad 1 e quindi $u_e^6(x)\theta^2(x)$ dipende essenzialmente dalle condizioni iniziali. Questo ci dice che uno strato limite sottoposto ad un gradiente di pressione favorevole ($p'_e < 0$) non "ha memoria" delle condizioni iniziali, al contrario di uno sottoposto ad un gradiente avverso ($p'_e > 0$).

12.5 Strato limite turbolento su lastra piana in una corrente laminare uniforme

In questo paragrafo verranno brevemente svolte alcune considerazioni introduttive sullo strato limite bidimensionale turbolento, senza entrare nell'analisi della *transizione* da un regime di flusso laminare ad uno turbolento (vedi [32]).

Supponiamo allora di avere una lastra piana semi-infinita disposta parallelamente ad una corrente uniforme $\mathbf{u}(x, y) = u_e \mathbf{e}_x$ all'infinito a monte, avendo scelto le coordinate x lungo la lastra ed y ortogonale ad essa. Essendo il flusso statisticamente invariante per riflessione attraverso il piano della lastra, consideriamo $y > 0$ ed assumiamo di essere in condizioni statisticamente stazionarie nel tempo, con una corrente asintotica (per $y \rightarrow +\infty$) laminare.

Tutti i campi sono considerati come somma di valori medi (calcolati utilizzando una media di insieme su campioni riferiti a differenti istanti di tempo), indicati con una sopralineatura, e di fluttuazioni, indicate con un apice. Le componenti x ed y del campo di velocità u e v sono pensate come somme dei valori medi $\bar{u} = \bar{u}(x, y)$ e $\bar{v} = \bar{v}(x, y)$ e delle fluttuazioni $u' = u'(x, y; t)$ e $v' = v'(x, y; t)$, così pure la pressione p sarà $\bar{p} + p'$ con $\bar{p} = \bar{p}(x, y)$ e $p' = p'(x, y; t)$. La componente della velocità media nella terza direzione spaziale (z , trasversale alla lastra) è assunta nulla e le quantità medie sono ipotizzate indipendenti da z . Con la definizione presente di media, risulta $\bar{u}' = 0$ e quindi $\bar{\bar{u}} = \bar{u}$ ed analoghe. Inoltre, le fluttuazioni sono infinitesime per $y \rightarrow +\infty$, avendo assunto la corrente asintotica laminare.

Sostituendo nelle equazioni del moto (continuità e quantità di moto lungo x e lungo y) e considerando le condizioni al contorno sulla lastra, possiamo scrivere il problema differenziale:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_x(\bar{u} + u') + \partial_y(\bar{v} + v') = 0 \\ \partial_t(\bar{u} + u') + (\bar{u} + u')\partial_x(\bar{u} + u') + (\bar{v} + v')\partial_y(\bar{u} + u') = \\ = -\partial_x(\bar{p} + p')/\rho + \nu [\partial_{xx}^2(\bar{u} + u') + \partial_{yy}^2(\bar{u} + u')] \\ \partial_t(\bar{v} + v') + (\bar{u} + u')\partial_x(\bar{v} + v') + (\bar{v} + v')\partial_y(\bar{v} + v') = \\ = -\partial_y(\bar{p} + p')/\rho + \nu [\partial_{xx}^2(\bar{v} + v') + \partial_{yy}^2(\bar{v} + v')] \\ (\bar{u} + u')(x, 0) = (\bar{v} + v')(x, 0) \equiv 0 \end{array} \right.$$

le quali, mediate d'insieme nel tempo ed in base all'ipotesi di turbolenza statisticamente stazionaria ($\partial_t \bar{u} = \partial_t \bar{v} = 0$), forniscono le equazioni per i campi medi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_x \bar{u} + \partial_y \bar{v} = 0 \\ \bar{u} \partial_x \bar{u} + \bar{v} \partial_y \bar{u} = -\partial_x \bar{p}/\rho - \partial_x \bar{u}' \bar{u}' - \partial_y \bar{u}' \bar{v}' + \nu (\partial_{xx}^2 \bar{u} + \partial_{yy}^2 \bar{u}) \\ \bar{u} \partial_x \bar{v} + \bar{v} \partial_y \bar{v} = -\partial_y \bar{p}/\rho - \partial_x \bar{u}' \bar{v}' - \partial_y \bar{v}' \bar{v}' + \nu (\partial_{xx}^2 \bar{v} + \partial_{yy}^2 \bar{v}) \\ \bar{u}(x, 0) = \bar{v}(x, 0) \equiv 0 . \end{array} \right. \quad (12.63)$$

Questo sistema appare ovviamente aperto, a causa della presenza dei termini $-\bar{u}' \bar{u}'$, $-\bar{u}' \bar{v}'$ e $-\bar{v}' \bar{v}'$ a secondo membro delle ultime due equazioni, che sono incogniti. Si è visto che questi termini possono essere pensati (a meno del fattore ρ che nelle (12.63) non appare) come le componenti $(1, 1)$, $(1, 2) = (2, 1)$ e $(2, 2)$ del *tensore degli sforzi di Reynolds*. Per costruire una soluzione asintotica del sistema (12.63) mediante perturbazioni singolari, occorre stimare il comportamento per $\nu \rightarrow 0^+$ degli sforzi di Reynolds. Poiché la corrente esterna è laminare, assumiamo che sia possibile determinare una funzione $\beta = \beta(\nu)$, infinitesima con ν , tale che $u'(x, y; t) = \beta \chi(x, y; t)$ e $v'(x, y; t) = \beta \gamma(x, y; t)$, dove le due funzioni χ e γ sono statisticamente stazionarie e rimangono finite per $\nu \rightarrow 0^+$. In tal modo si può ripetere l'analisi già condotta nel paragrafo

12.2 per uno strato limite laminare. Effettuando la trasformazione $\zeta = y/\alpha$ e posto $\bar{v} = \alpha\tilde{v}$ otteniamo per l'equazione della quantità di moto componenti longitudinale e trasversale:

$$\begin{aligned}\bar{u}\partial_x\bar{u} + \tilde{v}\partial_\zeta\bar{u} &= -\partial_x\bar{p}/\rho - \beta^2\partial_x\bar{\chi}\bar{\gamma} - \frac{\beta^2}{\alpha}\partial_\zeta\bar{\chi}\bar{\gamma} + \nu \left(\partial_{xx}^2\bar{u} + \frac{1}{\alpha^2}\partial_{\zeta\zeta}^2\bar{u} \right) \\ \alpha(\bar{u}\partial_x\tilde{v} + \tilde{v}\partial_\zeta\tilde{v}) &= -\frac{1}{\alpha}\partial_\zeta\bar{p}/\rho - \beta^2\partial_x\bar{\chi}\bar{\gamma} - \frac{\beta^2}{\alpha}\partial_\zeta\bar{\gamma}\bar{\gamma} + \nu \left(\alpha\partial_{xx}^2\tilde{v} + \frac{1}{\alpha}\partial_{\zeta\zeta}^2\tilde{v} \right).\end{aligned}$$

Al solito, moltiplicando membro a membro la seconda equazione per α e mandando $\nu \rightarrow 0^+$, otteniamo $\bar{p} \equiv p_e$. Dall'esame della prima equazione si deduce nuovamente che ν/α^2 deve rimanere finito e non nullo per $\nu \rightarrow 0^+$, quindi si può assumere $\alpha = \sqrt{\nu}$ (12.16). Il rapporto β^2/α deve rimanere finito al tendere a zero di ν , ma non sappiamo se il limite è differente da zero. Nella forma limite della prima equazione, il primo ($-\partial_x\bar{p}/\rho$), il secondo ($-\beta^2\partial_x\bar{\chi}\bar{\gamma}$) ed il quarto ($\nu\partial_{xx}^2\bar{u}$) termine a secondo membro forniscono contributi nulli, ne segue:

$$\begin{cases} \partial_x\bar{u} + \partial_y\bar{v} = 0 \\ \bar{u}\partial_x\bar{u} + \bar{v}\partial_y\bar{u} = -\partial_y\bar{u}'\bar{v}' + \nu\partial_{yy}^2\bar{u} \\ \bar{u}(x, 0) \equiv 0, \quad \bar{v}(x, 0) \equiv 0, \quad \bar{u}'\bar{v}'(x, 0) \equiv 0 \\ \lim_{y \rightarrow +\infty} (\bar{u}, \bar{v}, \bar{u}'\bar{v}') = (u_e, 0, 0). \end{cases} \quad (12.64)$$

Il problema limite (12.64) è analogo al problema di Blasius (12.21), con l'unica, ma sostanziale, differenza che nella seconda equazione (12.64) appare il termine $-\partial_y\bar{u}'\bar{v}'$ che è incognito. Tale termine descrive l'effetto della turbolenza sul campo medio e pone quindi il classico problema di chiusura. Per questo motivo, invece di approcciare alla soluzione del problema (12.64) adottando un opportuno modello di turbolenza (di solito, si utilizza quello conseguente alla definizione di lunghezza di mescolamento [32]), preferiamo ricorrere ad alcune osservazioni di natura sperimentale su \bar{u} .

Nel punto di ascissa x della lastra misureremo uno sforzo tangenziale $\tau_w(x)$ agente sul corpo, dovuto alla natura viscosa del fluido. Mediando $\tau_w(x)$ d'insieme nel tempo ed in assenza di separazione ($\tau_w > 0$), otteniamo la scala di velocità:

$$\sqrt{\tau_w(x)/\rho} =: u_*(x), \quad (12.65)$$

a stretto rigore dipendente dalla posizione x (vedremo nel seguito (12.76) che u_* è con buona approssimazione indipendente da x). u_* prende il nome di *velocità di attrito* ed è sempre molto più piccola della velocità asintotica esterna u_e . Se indichiamo con $\delta(x)$ l'ordine di grandezza dello spessore (ad esempio di scostamento) dello strato limite turbolento alla stazione x , restringeremo l'analisi ai flussi in cui il numero di Reynolds basato su tale spessore ($Re_\delta := u_e\delta/\nu$) è molto grande. L'evidenza sperimentale suggerisce due considerazioni importanti su δ : innanzitutto (cfr. Figg. 12.12-a e b) uno strato limite turbolento è sempre molto più spesso di uno laminare ed

inoltre δ è una funzione monotonicamente crescente dell'ascissa x . Esaminiamo quest'ultimo aspetto.

Procedendo sul problema (12.64) come fatto nel paragrafo 12.4 ed utilizzando il fatto che la corrente esterna è laminare, si ottiene che l'equazione di Karman (12.60) continua a valere, non appena si consideri a secondo membro il valore medio $\bar{\tau}_w(x)$ dello sforzo a parete e si calcolino gli spessori di scostamento δ_1 (12.52) e di quantità di moto θ (12.54) utilizzando il valore medio \bar{u} della componente x del campo di velocità, in particolare:

$$\theta(x) = \int_0^{+\infty} dy \frac{\bar{u}(x, y)}{u_e} \left[1 - \frac{\bar{u}(x, y)}{u_e} \right]. \quad (12.66)$$

Essendo la corrente asintotica uniforme, l'equazione di Karman equivale alla relazione seguente ($\theta(0) = 0$):

$$\theta(x) = \frac{1}{u_e^2} \int_0^x d\xi u_*^2(\xi). \quad (12.67)$$

È importante notare che, essendo con ottima approssimazione la velocità di attrito $u_*(x)$ costante con x , la relazione (12.67) mostra che lo spessore di quantità di moto $\theta(x)$ cresce *linearmente* con l'ascissa x . In base all'equazione (12.58), lo spessore dello strato limite laminare in condizioni simili cresce con la radice quadrata dell'ascissa x .

Poiché $\bar{u}(x, 0) = 0$ (12.63), esiste una sottile regione adiacente alla parete in cui la velocità \bar{u} è dell'ordine di u_* , talmente piccola da rendere dominanti gli effetti della diffusione viscosa. Conseguentemente il flusso al suo interno è laminare: tale regione prende il nome di *sottostrato laminare* (*viscous sublayer*, cfr. Fig. 12.12-b) Essendo importante solo la diffusione viscosa, lo spessore del sottostrato laminare è dell'ordine di ν/u_* e la coordinata normale alla lastra da utilizzare in questa regione è:

$$y_+(x, y) = \frac{yu_*(x)}{\nu}. \quad (12.68)$$

Praticamente, si può parlare di sottostrato laminare se $y_+ < 10$. Osserviamo che in questa regione il profilo di velocità $\bar{u}(x, y)$ ad x fissato deve avere la forma universale:

$$\text{sottostrato laminare: } \bar{u}(x, y) = u_*(x) f(y_+), \quad (12.69)$$

in cui f è una funzione da determinare. Derivando in y ambo i membri della relazione (12.69) e calcolando le derivate in $y = 0$:

$$\partial_y \bar{u}(x, 0) = \frac{\rho u_*^2(x)}{\mu} f'(0),$$

da cui, ricordando la definizioni (12.65) di u_* e di sforzo viscoso medio a parete $\bar{\tau}_w(x) = \mu \partial_y \bar{u}(x, 0)$, segue $f'(0) = 1$. Per valori dell'ordine dell'unità di y_+ , possiamo quindi assumere:

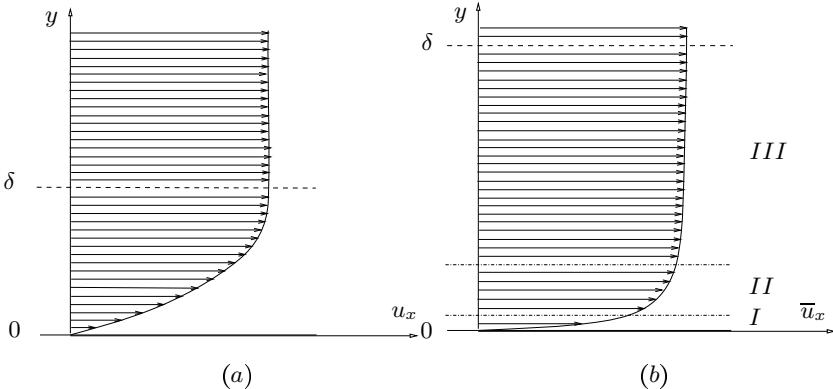


Figura 12.12. Profilo di velocità in uno strato limite laminare (a) e profilo di velocità media in uno turbolento (b), per una lastra piana semi-infinita posta in una corrente $\mathbf{u}(x, y) \equiv u_e$ uniforme. Con una linea tratteggiata sono indicati i confini convenzionali per $y = \delta$ dello strato limite, ad esempio assumendo δ pari allo spessore di scostamento (medio nel caso turbolento). In (b) sono anche indicate le tre regioni (*I*: sottostrato laminare, *II*: strato logaritmico, *III*: regione esterna) in cui si può suddividere uno strato limite turbolento.

$$f(y_+) = y_+ . \quad (12.70)$$

Cosa succede per valori molto grandi di y_+ ? Innanzitutto cerchiamo una nuova adimensionalizzazione per y , per evitare di usare la variabile y_+ . La nuova variabile:

$$\eta(x, y) = \frac{y}{\delta(x)} \quad (12.71)$$

appare molto più adatta, assumendo sempre valori di ordine unitario. Introducendo nella relazione (12.71) il nuovo numero di Reynolds $Re_\star(x) = u_\star(x)\delta(x)/\nu$ basato sullo spessore δ e sulla velocità di attrito (12.65), possiamo dedurre il legame tra η ed y_+ :

$$\eta = \frac{\nu}{u_\star \delta} \frac{yu_\star}{\nu} = \frac{y_+}{Re_\star} . \quad (12.72)$$

e spiegare come mai, nonostante y_+ sia molto grande, η rimanga di ordine unitario. Questa relazione mostra anche che possiamo far variare y_+ , ad esempio aumentando y ad y' , senza far variare η . È infatti sufficiente spostarsi in una stazione $x' > x$ tale che $y'/\delta(x') = y/\delta(x)$. E così pure possiamo cambiare η , cambiando x , senza alterare il valore di y_+ (ricordare che $u_\star(x) \simeq$ costante).

L'osservazione sperimentale mostra che per valori di y_+ molto grandi ($10^3 < y_+ < 10^5$), le fluttuazioni di velocità ed il *difetto di velocità* $u_e - \bar{u}$ sono dell'ordine della velocità di attrito u_\star , ovvero il profilo di velocità media

\bar{u} è circa costante. Questa regione si estende per la gran parte dello strato limite e prende il nome di *strato esterno* (*outer region*, cfr. Fig. 12.12-b). Al suo interno, il difetto di velocità assume la forma universale:

$$\text{strato esterno:} \quad u_e - \bar{u}(x, y) = u_*(x) F(\eta) . \quad (12.73)$$

Da quest'ultima relazione e dalla definizione di spessore di quantità di moto (12.66), segue che $\theta(x) = O(\delta u_*/u_e)$ e quindi, in base alla equazione di Karman (12.67), che $\delta(x)/x$ è dello stesso ordine di u_*/u_e . Ne segue che il contributo dello sforzo di Reynolds nella seconda equazione (12.64) è dell'ordine di u_*/u_e , ovvero di un ordine di grandezza più piccolo dei rimanenti termini nella medesima equazione, come già anticipato. Del resto, questo appare congruente con l'andamento (12.73) del profilo di velocità media nello strato esterno.

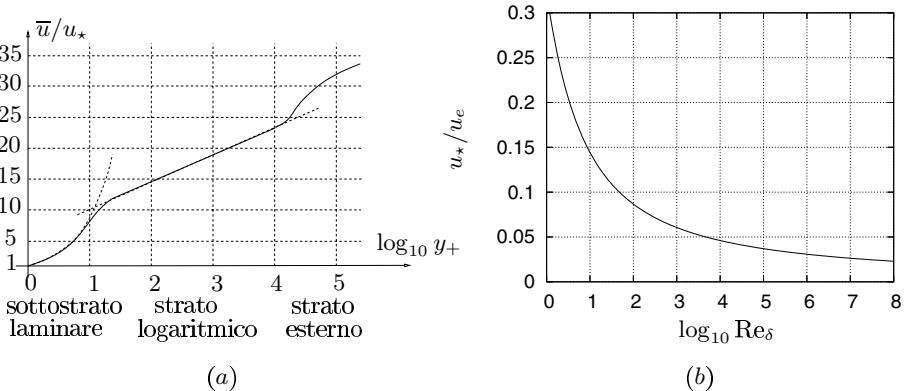


Figura 12.13. In (a) è disegnato un tipico profilo di velocità media longitudinale in funzione del logaritmo decimale della coordinata di parete y_+ (12.68). Sono evidenziate le tre regioni in cui può essere immaginato suddiviso lo strato limite. In (b) è disegnata la soluzione u_*/u_e dell'equazione trascendente (12.76) in funzione del logaritmo decimale del numero di Reynolds Re_δ . Osservare che $u_*/u_e \ll 1$ e la modesta variazione di u_*/u_e per incrementi di diversi ordini di grandezza del numero Re_δ .

Le due leggi universali (12.69, 12.73) sul profilo medio di velocità lungo la lastra per il sottostrato laminare e per lo strato esterno si devono raccordare in una regione intermedia che prende il nome di *strato logaritmico* (*log-layer*, cfr. Fig. 12.12-b), per i motivi che ora illustreremo. Per y_+ grandi ed η piccole, dobbiamo quindi avere:

$$f(y_+) = \frac{\bar{u}(x, y)}{u_*(x)} = \frac{u_e}{u_*(x)} - F(\eta) ,$$

derivando il primo e l'ultimo membro in η , utilizzando il legame tra η ed y_+ (12.72), e moltiplicando per η abbiamo:

$$y_+ f'(y_+) \equiv -\eta F'(\eta) , \quad (12.74)$$

in cui il segno di identità sta ad indicare che, potendo far variare y_+ ed η in modo indipendente, primo e secondo membro devono essere costanti. Per motivi storici, tale costante si pone nella forma di $1/\mathcal{K}$, trovando $\mathcal{K} \simeq 0.39$. In tale regione intermedia abbiamo quindi che il profilo di velocità media, proporzionale alla funzione $f(y_+)$, è logaritmico:

$$\frac{\bar{u}(x, y)}{u_*(x)} = \frac{1}{\mathcal{K}} \log y_+ + a , \quad (12.75)$$

in cui $a \simeq 4$ è una costante. In Fig. 12.13-a è qualitativamente disegnato un profilo di velocità longitudinale \bar{u}/u_* in funzione del logaritmo della coordinata di parete y_+ . Inoltre vale anche la:

$$F(\eta) = -\frac{1}{\mathcal{K}} \log \eta - b ,$$

in cui b è una seconda costante di integrazione (con $a - b \simeq 6$). Inserendo quest'ultima e la (12.75) nella (12.74) ed eliminando η troviamo inoltre la relazione tra la velocità di attrito u_* e l'ascissa corrente x :

$$\frac{u_e}{u_*} + \frac{1}{\mathcal{K}} \log \frac{u_e}{u_*} = \frac{1}{\mathcal{K}} \log \text{Re}_\delta + a - b . \quad (12.76)$$

Come anticipato, la relazione (12.76) evidenzia una dipendenza di u_* da x per il tramite di $\text{Re}_\delta(x) = u_e \delta(x)/\nu$ e quindi una debolissima variabilità di u_* con l'ascissa corrente x . Risolvendo (numericamente) l'equazione (12.76) in u_*/u_e e diagrammando la soluzione nell'intervallo $10^0 < \text{Re}_\delta < 10^8$ in funzione del $\log_{10} \text{Re}_\delta$ otteniamo la Fig. 12.13-b, che prova la scarsa dipendenza di u_*/u_e da Re_δ , e quindi da x .

12.6 Strato limite termico

Nel flusso attorno ad un corpo a temperatura T_w (per semplicità *uniforme*) di un fluido a temperatura T_e (in generale $\neq T_w$) esiste una regione attorno al corpo in cui il fluido passa da temperature prossime a T_w alla temperatura T_e . In tale regione i termini *convettivi* ($D_t T$) nell'equazione dell'energia (2.68) sono dello stesso ordine di quelli *diffusivi* ($\mathcal{K}/(\rho c_p) \nabla^2 T$), che divengono rapidamente trascurabili al di fuori. L'ordine di grandezza del rapporto tra lo spessore dello strato limite cinematico δ e l'ampiezza δ_T di tale regione è legato, nei casi stazionari, al rapporto tra la *diffusività della quantità di moto* ν e la *diffusività della temperatura* $\mathcal{K}/(\rho c_p)$, ovvero al numero di Prandtl $\text{Pr} = \mu c_p / \mathcal{K}$ del

fluido. Premettiamo che, se L è una scala delle lunghezze per il corpo ed u_e è il modulo della velocità asintotica, lo spessore δ è dell'ordine di $L\text{Re}_l^{-1/2}$ e quindi $O(\nu) = u_e L(\delta/L)^2$. Ma allora $O[\mathcal{K}/(\rho c_p)] = O(\nu)/\text{Pr} = \delta^2/\text{Pr} \cdot u_e/L$ e si possono determinare gli ordini di grandezza dei termini convettivi nell'equazione dell'energia:

$$\begin{aligned} O\left(\frac{DT}{Dt}\right) &= \frac{u_e}{L}(T_e - T_w) + \left(u_e \frac{\delta}{L}\right) \frac{T_e - T_w}{\delta_T} \\ &= u_e \frac{T_e - T_w}{L} \left(1 + \frac{\delta}{\delta_T}\right) \end{aligned} \quad (12.77)$$

ed anche di quelli diffusivi:

$$\begin{aligned} O\left(\frac{\mathcal{K}}{\rho c_p} \nabla^2 T\right) &= \frac{\mathcal{K}}{\rho c_p} \left(\frac{T_e - T_w}{L^2} + \frac{T_e - T_w}{\delta_T^2}\right) \\ &= \frac{1}{\text{Pr}} u_e \frac{T_e - T_w}{L} \left[\left(\frac{\delta}{L}\right)^2 + \left(\frac{\delta}{\delta_T}\right)^2\right]. \end{aligned} \quad (12.78)$$

Richiedendo che δ_T sia tale da rendere confrontabili i due ordini di grandezza (12.77, 12.78), se ne deduce nel caso in cui $\text{Pr} \ll 1$:

$$\frac{1}{\text{Pr}} O\left(\frac{\delta}{\delta_T}\right)^2 = O(1) \Rightarrow \frac{\delta}{\delta_T} = O(\sqrt{\text{Pr}}) \ll 1,$$

mentre nel caso in cui $\text{Pr} \gg 1$:

$$\frac{1}{\text{Pr}} O\left(\frac{\delta}{\delta_T}\right)^2 = O\left(\frac{\delta}{\delta_T}\right) \Rightarrow \frac{\delta}{\delta_T} = O(\text{Pr}) \gg 1$$

ed infine quando $\text{Pr} \simeq 1$:

$$\frac{1}{\text{Pr}} O\left(\frac{\delta}{\delta_T}\right)^2 = O\left(\frac{\delta}{\delta_T}\right) \Rightarrow \frac{\delta}{\delta_T} = O(\text{Pr}) \simeq 1.$$

Il primo caso ($\text{Pr} \ll 1$) è quello dei *metalli liquidi*, il secondo ($\text{Pr} \gg 1$) è quello tipico dei *lubrificanti*, mentre il terzo ($\text{Pr} \simeq 1$) si verifica per l'*aria*. Occorre notare, inoltre, che *il rapporto δ/δ_T è una proprietà del fluido*, mentre δ (e, conseguentemente, δ_T) dipende anche dal flusso (u_e , L).

Lo studio dei flussi in cui sono importanti gli effetti termici viene svolto utilizzando, oltre all'equazione di conservazione della massa e della quantità di moto, anche l'equazione dell'energia (2.68) scritta in termini della temperatura T :

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \beta T \frac{Dp}{Dt} + \phi + \mathcal{K} \nabla^2 T \quad \text{con: } \beta = \rho \left. \frac{\partial}{\partial T} \frac{1}{\rho} \right|_p, \quad \mathcal{K} \text{ e } \mu \text{ costanti} \quad (12.79)$$

(il termine sorgente E è nullo) ed una opportuna *equazione di stato*:

$$f(\rho, p, T) = 0 \quad (12.80)$$

che definisce le proprietà termodinamiche del fluido. Nel caso di flussi *isocori* la (12.80) si scrive:

$$\rho - \rho_0 = 0 ,$$

essendo ρ_0 una costante. Poiché in tal caso il coefficiente di espansione termica β è ovviamente nullo, la (12.79) consente di ricavare il campo delle temperature una volta nota la soluzione del problema cinematico (p, u) . Il problema termico è allora completamente disaccoppiato da quello cinematico, come verrà discusso più avanti. Nel caso di gas ideali la (12.80) diviene:

$$p - \mathcal{R} \rho T = 0$$

e $\beta = 1/T$. Infine, nel caso di fluidi incomprimibili ($\partial\rho/\partial p = 0$) la (12.80) diviene:

$$f(\rho, T) = 0 ,$$

avendosi ovviamente $\beta \neq 0$.

Il problema di determinare il campo termico attorno ad un corpo in un fluido a conduzione e viscosità trascurabili è, come ci si convince facilmente osservando la (12.79), di nuovo un problema di perturbazione singolare. Infatti, si consideri, per semplicità, il problema nel caso di un flusso isocoro:

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \phi + \mathcal{K} \nabla^2 T , \quad (12.81)$$

la soluzione della (12.81) per $\mathcal{K} = 0$ (e quindi $\mu = 0$, poiché $\mu = \text{Pr} \mathcal{K}/c_p$ e Pr, c_p sono costanti proprie del fluido) è $T \equiv T_e$, ovvero si è potuto imporre la condizione all'infinito, ma non è possibile soddisfare alcuna condizione sul corpo. Ne segue che, se $T_w \neq T_e$, il limite per $\mathcal{K} \rightarrow 0$ della soluzione della (12.81) differisce dalla soluzione $T \equiv T_e$ in una piccola regione attorno al corpo, detta *strato limite termico*, attraverso cui la temperatura del fluido raggiunge quella del corpo. La situazione è qui analoga a quella già discussa per lo strato limite cinematico e verrà risolta in modo del tutto simile: il parametro di perturbazione sarà ancora μ che verrà mandato a zero per ottenere una forma limite della (12.79), corrispondentemente anche il coefficiente di conduzione termica \mathcal{K} andrà a zero, essendo il rapporto $\mu/\mathcal{K} = \text{Pr}/c_p$ una proprietà del fluido (assunto caloricamente perfetto, ovvero con c_p indipendente dalla temperatura).

12.6.1 Strato limite termico su una lastra piana in una corrente uniforme

Il flusso bidimensionale stazionario è descritto dal sistema:

$$\begin{cases} \partial_x(\rho u) + \partial_y(\rho v) = 0 \\ \rho(u\partial_x u + v\partial_y u) = -\partial_x p + \frac{\mu}{3} \partial_x(\partial_x u + \partial_y v) + \mu(\partial_{xx}^2 u + \partial_{yy}^2 u) \\ \rho(u\partial_x v + v\partial_y v) = -\partial_y p + \frac{\mu}{3} \partial_y(\partial_x u + \partial_y v) + \mu(\partial_{xx}^2 v + \partial_{yy}^2 v) \\ \rho c_p(u\partial_x T + v\partial_y T) = (u\partial_x p + v\partial_y p)\beta T + \mu\phi + \mathcal{K}(\partial_{xx}^2 T + \partial_{yy}^2 T) \\ f(\rho, p, T) = 0 \\ y = 0, x > 0 : u = v = 0, T = T_w \text{ (isot.), oppure } \partial_y T = 0 \text{ (adiab.)} \\ \lim_{y \rightarrow +\infty} (\rho, u, v, T, p) = (\rho_e, u_e, 0, T_e, p_e), \end{cases} \quad (12.82)$$

in cui si considerano anche le variazioni di densità con la temperatura. La funzione di dissipazione ϕ è data in questo caso da:

$$\phi = \frac{4}{3} [(\partial_x u)^2 + (\partial_y v)^2 - \partial_x u \partial_y v] + (\partial_y u)^2 + (\partial_x v)^2 + 2 \partial_y u \partial_x v, \quad (12.83)$$

avendo assunto nulla la bulk viscosity $\mu' = \lambda + 2\mu/3$.

Si cerca una soluzione asintotica del sistema (12.82) in grado di approssimare la soluzione per valori molto piccoli di μ e \mathcal{K} . Introdotta la funzione $\alpha = \alpha(\mu)$, infinitesima con μ ($\alpha \rightarrow 0$ per $\mu \rightarrow 0$), si effettua la trasformazione della coordinata trasversale:

$$y \rightarrow \zeta = \frac{y}{\alpha(\mu)}. \quad (12.84)$$

Per soddisfare l'equazione di continuità si può introdurre una funzione di corrente ψ tale che:

$$\rho u = \rho_e \partial_y \psi, \quad \rho v = -\rho_e \partial_x \psi. \quad (12.85)$$

Effettuando il cambiamento di coordinate (12.84) si ha:

$$\rho u = \rho_e \partial_\zeta \frac{\psi}{\alpha}, \quad (12.86)$$

ma ψ/α deve rimanere di classe 3 per $\mu \rightarrow 0$ e quindi ha senso porre $\tilde{\psi} = \psi/\alpha$ regolare per $\mu \rightarrow 0$. Ne segue che si può introdurre $\tilde{v} = v/\alpha$ e riscrivere le due componenti della quantità di moto (12.85) come:

$$\rho u = \rho_e \partial_\zeta \tilde{\psi}, \quad \rho \tilde{v} = -\rho_e \partial_x \tilde{\psi}. \quad (12.87)$$

Il sistema (12.82) e la definizione (12.83) divengono col cambiamento di coordinate (12.84):

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_x(\rho u) + \partial_\zeta(\rho \tilde{v}) = 0 \\ \rho(u\partial_x u + \tilde{v}\partial_\zeta u) = -\partial_x p + \frac{\mu}{3} \partial_x(\partial_x u + \partial_\zeta \tilde{v}) + \mu(\partial_{xx}^2 u + \frac{1}{\alpha^2} \partial_{\zeta\zeta}^2 u) \\ \alpha^2 \rho(u\partial_x \tilde{v} + \tilde{v}\partial_\zeta \tilde{v}) = -\partial_\zeta p + \frac{\mu}{3} \partial_\zeta(\partial_x u + \partial_\zeta \tilde{v}) + \mu(\alpha^2 \partial_{xx}^2 \tilde{v} + \partial_{\zeta\zeta}^2 \tilde{v}) \\ \rho c_p(u\partial_x T + \tilde{v}\partial_\zeta T) = (u\partial_x p + \tilde{v}\partial_\zeta p)\beta T + \mu \tilde{\phi} + \mathcal{K}(\partial_{xx}^2 T + \frac{1}{\alpha^2} \partial_{\zeta\zeta}^2 T) \\ f(\rho, p, T) = 0 \\ y = 0, x > 0 : u = 0, \tilde{v} = 0, T = T_w \text{ (isot.), oppure } \partial_\zeta T = 0 \text{ (adiab.)} \\ \lim_{y \rightarrow +\infty} (\rho, u, \tilde{v}, T, p) = (\rho_e, u_e, 0, T_e, p_e) \end{array} \right. , \quad (12.88)$$

con:

$$\tilde{\phi} = \frac{4}{3} \left[(\partial_x u)^2 + (\partial_\zeta \tilde{v})^2 - \partial_x u \partial_\zeta \tilde{v} \right] + \frac{1}{\alpha^2} (\partial_\zeta u)^2 + \alpha^2 (\partial_x \tilde{v})^2 + 2 \partial_\zeta u \partial_x \tilde{v} . \quad (12.89)$$

Dalla terza delle equazioni (12.88), ovvero dalla componente y dell'equazione per la quantità di moto, per $\mu \rightarrow 0$: $\partial_\zeta p = 0$, quindi $p = p(x)$. Ma allora dalla condizione all'infinito segue $p \equiv p_e$. Quindi nella forma limite la pressione è identicamente costante. Dalla seconda delle equazioni (12.88) si vede che se $\alpha^2/\mu \rightarrow 0$ per $\mu \rightarrow 0$: $\partial_{\zeta\zeta}^2 u = 0$, quindi $u(x, \zeta) = A(x)\zeta + B(x)$ che non può soddisfare le condizioni all'infinito nel sistema (12.88). D'altra parte, se $\alpha^2/\mu \rightarrow +\infty$ per $\mu \rightarrow 0$ si riottiene la componente x delle equazioni di Eulero. Ne segue che deve avversi $\alpha = \sqrt{\mu}$ e la forma limite si scrive nelle coordinate fisiche:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_x(\rho u) + \partial_y(\rho v) = 0 \\ \rho(u\partial_x u + v\partial_y u) = \mu \partial_{yy}^2 u \\ \rho c_p(u\partial_x T + v\partial_y T) = \mu(\partial_y u)^2 + \mathcal{K} \partial_{yy}^2 T \\ f(\rho, p_e, T) = 0 \\ y = 0, x > 0 : u = v = 0, T = T_w \text{ (isot.), oppure } \partial_y T = 0 \text{ (adiab.)} \\ \lim_{y \rightarrow +\infty} (\rho, u, v, T) = (\rho_e, u_e, 0, T_e) \end{array} \right. . \quad (12.90)$$

La soluzione di questo sistema verrà discussa nel caso di flusso a densità costante, in cui il problema termico è completamente disaccoppiato da quello cinematico, mentre nei casi di lastra isoterna con $\text{Pr} = 1$ ed adiabatica per Pr qualsiasi verranno analizzate alcune semplici conseguenze del sistema (12.90).

12.6.2 Flusso a densità costante

Trascuriamo le variazioni di densità dovute alla non uniformità del campo di temperatura. Il problema cinematico ammette allora la soluzione di Blasius

(12.21), con η data dalla (12.19) ed u , v e p della forma (12.24). La struttura della soluzione cinematica suggerisce di cercare la soluzione della terza equazione nel sistema (12.90) in funzione della sola η . Indicando con T_w una temperatura di riferimento sulla lastra (eventualmente proprio la temperatura della lastra nel caso isotermo), ricerchiamo tale soluzione introducendo la temperatura adimensionale:

$$\frac{T(x, y) - T_e}{T_w - T_e} = \tilde{T}(\eta) . \quad (12.91)$$

In corrispondenza alla scelta della temperatura di riferimento T_w , si introduce la quantità adimensionale:

$$\text{Br} = \frac{\text{calore prodotto dagli sforzi viscosi}}{\text{calore diffuso per conduzione}} = \frac{\mu u_e^2}{\mathcal{K}(T_w - T_e)} , \quad (12.92)$$

nota come *numero di Brinkman*. Considerando che, in base alla definizione di η , $\partial_x = -\eta/(2x)\partial_\eta$, $\partial_y = \eta/y\partial_\eta$ e $\partial_{yy}^2 = (\eta/y)^2\partial_{\eta\eta}^2$, la terza equazione nel sistema (12.90) si scrive nella forma adimensionale:

$$\tilde{T}'' + \frac{\text{Pr}}{2} f\tilde{T}' = -\text{Br} f''^2 . \quad (12.93)$$

Questa equazione sarà risolta per $0 < \text{Pr} < 2$ con le condizioni al contorno:

$$\begin{cases} \tilde{T}(0) = 1 \\ \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \tilde{T} = 0 \end{cases} \quad \text{caso isotermo}, \quad \begin{cases} \tilde{T}'(0) = 0 \\ \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \tilde{T} = 0 \end{cases} \quad \text{caso adiabatico}. \quad (12.94)$$

L'integrale generale dell'equazione (12.93) si ricava ricordando che la funzione f soddisfa il problema di Blasius (12.21): $f/2 = -f'''/f''$, sostituendo e dividendo il primo ed il secondo membro per f''^{Pr} :

$$\frac{d}{d\eta} \left(\frac{\tilde{T}'}{f''^{\text{Pr}}} \right) = -\text{Br} f''^{2-\text{Pr}} ,$$

integrandolo una prima volta calcoliamo la derivata prima \tilde{T}' :

$$\tilde{T}' = -\text{Br} f''^{\text{Pr}} \int_0^\eta d\xi f''^{2-\text{Pr}}(\xi) + A f''^{\text{Pr}} \quad (12.95)$$

ed integrando una seconda volta :

$$\tilde{T} = -\text{Br} \int_0^\eta d\xi f''^{\text{Pr}}(\xi) \int_0^\xi d\tau f''^{2-\text{Pr}}(\tau) + A \int_0^\eta d\xi f''^{\text{Pr}}(\xi) + B , \quad (12.96)$$

in cui A e B sono due costanti da determinare in base alle condizioni al contorno (12.94). La struttura della soluzione (12.96) suggerisce di introdurre

le due funzioni,⁷ parametrizzate nel numero di Prandtl, seguenti:

$$\Gamma_{\text{Pr}}(\eta) = \int_{\eta}^{+\infty} d\xi f''^{\text{Pr}}(\xi), \quad \Lambda_{\text{Pr}}(\eta) = \int_{\eta}^{+\infty} d\xi f''^{\text{Pr}}(\xi) \int_0^{\xi} d\tau f''^{2-\text{Pr}}(\tau), \quad (12.97)$$

che consentono di riscrivere \tilde{T}' (12.95) e \tilde{T} (12.96) nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \tilde{T}' &= -\text{Br} f''^{\text{Pr}} [\Gamma_{2-\text{Pr}}(0) - \Gamma_{2-\text{Pr}}(\eta)] + A f''^{\text{Pr}} \\ \tilde{T} &= -\text{Br} [\Lambda_{\text{Pr}}(0) - \Lambda_{\text{Pr}}(\eta)] + A [\Gamma_{\text{Pr}}(0) - \Gamma_{\text{Pr}}(\eta)] + B. \end{aligned} \quad (12.98)$$

Imponendo le condizioni al contorno (12.94) si ricava nel caso isotermo:

$$A = \frac{\text{Br} \Lambda_{\text{Pr}}(0) - 1}{\Gamma_{\text{Pr}}(0)}, \quad B = 1$$

e nel caso adiabatico:

$$A = 0, \quad B = \text{Br} \Lambda_{\text{Pr}}(0),$$

ne seguono le soluzioni:

$$\begin{aligned} \tilde{T}(\eta) &= \text{Br} \Lambda_{\text{Pr}}(\eta) + \frac{1 - \text{Br} \Lambda_{\text{Pr}}(0)}{\Gamma_{\text{Pr}}(0)} \Gamma_{\text{Pr}}(\eta) && \text{isoterma} \\ \tilde{T}(\eta) &= \text{Br} \Lambda_{\text{Pr}}(\eta) && \text{adiabatica}, \end{aligned} \quad (12.99)$$

in cui la soluzione isoterna coincide con quella adiabatica, soltanto se $\text{Br} \Lambda_{\text{Pr}}(0) = 1$.

Il calcolo numerico delle soluzioni (12.99) può essere effettuato accoppiando all'integrazione del problema di Blasius (12.21) la valutazione delle nuove funzioni (12.97). Ricordando la trasformazione del problema di Blasius nel problema ai valori iniziali (12.22) e definendo le funzioni trasformate:

$$\gamma_{\text{Pr}}(\xi) = 2^{2\text{Pr}-1} \chi^3 \text{Pr}^{-1} \Gamma_{\text{Pr}}[\eta(\xi)], \quad \lambda_{\text{Pr}}(\xi) = 4\chi^4 \Lambda_{\text{Pr}}[\eta(\xi)] \quad (12.100)$$

queste verificano le equazioni differenziali:

$$\gamma'_{\text{Pr}} = -g''^{\text{Pr}}, \quad \varepsilon'_{\text{Pr}} = -g''^{2-\text{Pr}}, \quad \lambda'_{\text{Pr}} = g''^{\text{Pr}} \varepsilon_{\text{Pr}}, \quad (12.101)$$

in cui la seconda è solo un espediente tecnico per scrivere al primo ordine la terza. Poiché $g''(\xi) \rightarrow 0$ per $\xi \rightarrow +\infty$, le tre funzioni γ_{Pr} , ε_{Pr} e λ_{Pr} hanno asintoti orizzontali all'infinito: in particolare γ_{Pr} e λ_{Pr} verificano condizioni di annullamento all'infinito, sulla base della loro definizione (12.100) e di quella

⁷ Si osservi che, essendo f'' esponenzialmente decrescente a zero all'infinito, gli integrali presenti nelle definizioni seguenti esistono per qualunque numero di Prandtl $\text{Pr} \in (0, 2)$.

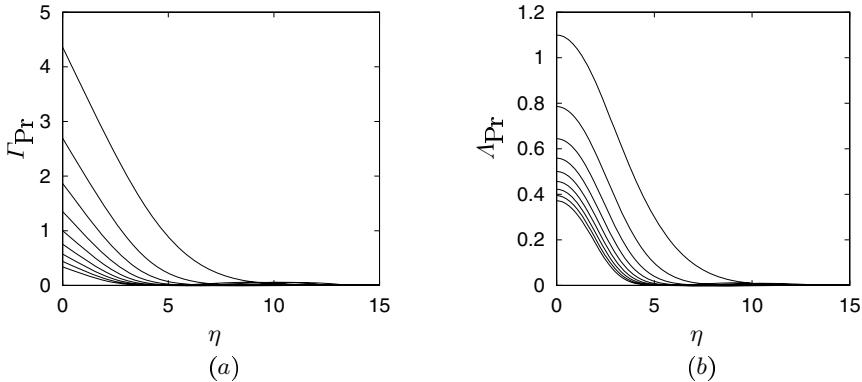


Figura 12.14. Andamenti delle funzioni $\Gamma_{\text{Pr}}(\eta)$ (a) e $\Lambda_{\text{Pr}}(\eta)$ (b) per differenti numeri di Prandtl. Dalla curva superiore all'inferiore $\text{Pr} = 0.2, 0.4, \dots, 1.8$.

(12.97) delle funzioni $\Gamma_{\text{Pr}}(\eta)$ e $\Lambda_{\text{Pr}}(\eta)$. Poiché la nuova funzione ε_{Pr} verifica la relazione:

$$\varepsilon_{\text{Pr}}(\xi) \propto \int_0^\xi d\tau g''^{2-\text{Pr}}(\tau) ,$$

allora soddisfa la condizione iniziale $\varepsilon_{\text{Pr}}(0) = 0$. Questo fatto porta a considerare il problema differenziale ai valori iniziali:

$$\begin{cases} \gamma'_{\text{Pr}} = -g''^{\text{Pr}} \\ \varepsilon'_{\text{Pr}} = -g''^{2-\text{Pr}} \\ \lambda'_{\text{Pr}} = g''^{\text{Pr}} \varepsilon_{\text{Pr}} \\ \gamma_{\text{Pr}}(0) = 0, \quad \varepsilon_{\text{Pr}}(0) = 0, \quad \lambda_{\text{Pr}}(0) = 0, \end{cases} \quad (12.102)$$

nel quale le funzioni $\gamma_{\text{Pr}}(\xi)$ e $\lambda_{\text{Pr}}(\xi)$ raggiungeranno dei valori asintotici per $\xi \rightarrow +\infty$ ($\gamma_{\text{Pr}}^\infty, \lambda_{\text{Pr}}^\infty$), in generale non nulli. Osservato che le funzioni $\gamma_{\text{Pr}}(\xi) - \gamma_{\text{Pr}}^\infty$ e $\lambda_{\text{Pr}}(\xi) - \lambda_{\text{Pr}}^\infty$ verificano le medesime equazioni differenziali del problema (12.102) e le condizioni asintotiche corrette, ne concludiamo che è sufficiente risolvere il problema (12.102) e poi ridefinire le due funzioni $\gamma_{\text{Pr}}(\xi)$ e $\lambda_{\text{Pr}}(\xi)$ riscalandole con i valori ($\gamma_{\text{Pr}}^\infty$ e $\lambda_{\text{Pr}}^\infty$) assunti all'infinito. Il problema (12.102) viene allora accoppiato al problema (12.23) ed integrato simultaneamente. Terminata l'integrazione si ricava il valore di χ , si correggono i valori asintotici delle funzioni $\gamma_{\text{Pr}}(\xi)$ e $\lambda_{\text{Pr}}(\xi)$ ed attraverso le relazioni (12.100) si risale alle due funzioni $\Gamma_{\text{Pr}}(\eta)$ e $\Lambda_{\text{Pr}}(\eta)$. Gli andamenti delle due funzioni $\Gamma_{\text{Pr}}(\eta)$ e $\Lambda_{\text{Pr}}(\eta)$ sono riportati in Fig. 12.14 per differenti numeri di Prandtl.

Per la soluzione isoterna (12.99) è interessante calcolare il flusso termico alla parete $h = -q_y(0)$, essendo $q_y(0)$ la componente y del vettore flusso termico $q_w(0) = -K\partial_y T(0)$. Considerando che dalle definizioni (12.97) segue:

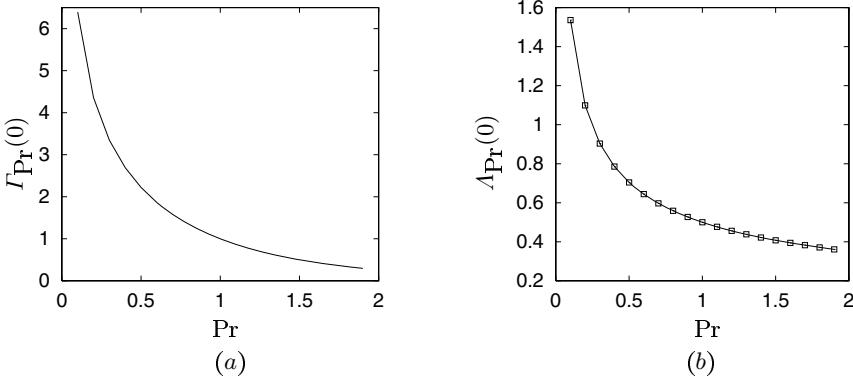


Figura 12.15. Valori di $\Gamma_{\text{Pr}}(0)$ (a) e $\Lambda_{\text{Pr}}(0)$ (b) in funzione del numero di Prandtl. In (b) sono riportati con dei simboli i valori assunti dalla funzione $1/(2\sqrt{\text{Pr}})$, che approssima molto soddisfacentemente $\Lambda_{\text{Pr}}(0)$.

$$\Lambda'_{\text{Pr}} = -f''^{\text{Pr}} \int_0^\eta d\xi f''^{2-\text{Pr}}(\xi) = f''^{\text{Pr}} [\Gamma_{2-\text{Pr}}(\eta) - \Gamma_{2-\text{Pr}}(0)]$$

$$\Gamma'_{\text{Pr}} = -f''^{\text{Pr}}$$

e ricordando che $f''(0) = a \simeq 0.33$, si ottiene:

$$\begin{aligned} h &= \mathcal{K} \partial_y T(0) \\ &= \mathcal{K} (T_w - T_e) \sqrt{\frac{u_e}{\nu x}} \partial_\eta \tilde{T}(0) \\ &= \rho u_e^3 \frac{a^{\text{Pr}}}{\text{Br} \Gamma_{\text{Pr}}(0)} [\text{Br} \Lambda_{\text{Pr}}(0) - 1] \text{Re}_x^{-1/2}. \end{aligned}$$

Si può mostrare [32] che $\Lambda_{\text{Pr}}(0) \simeq 1/(2\sqrt{\text{Pr}})$ (cfr. Fig. 12.15-b), ne segue che il flusso di calore per unità di area è dato da:

$$\frac{h}{\rho u_e^3} \simeq \frac{a^{\text{Pr}}}{2\text{Br}\sqrt{\text{Pr}}\Gamma_{\text{Pr}}(0)} (\text{Br} - 2\sqrt{\text{Pr}}) \text{Re}_x^{-1/2}, \quad (12.103)$$

da cui si possono trarre le importanti indicazioni che seguono. Il flusso termico diverge sul bordo d'attacco, a causa della natura singolare della soluzione cinematica in tale punto. Inoltre, se $T_w < T_e$ allora il numero di Brinkman Br è negativo ed ovviamente h è sempre positivo, ovvero la lastra è sempre riscaldata dal flusso. Se $T_w > T_e$ si hanno invece due possibilità: nel caso in cui $\text{Br} > 2\sqrt{\text{Pr}}$ $h > 0$, ovvero la lastra è riscaldata dal flusso, mentre se $\text{Br} < 2\sqrt{\text{Pr}}$ $h < 0$ ed il flusso raffredda la lastra.

12.6.3 Lastra piana con $\text{Pr} = 1$

In questo caso la struttura dell'equazione dell'energia nel sistema (12.90) si semplifica notevolmente, una volta scritta nella *temperatura totale* T_0 :

$$T_0 = T + \frac{u^2}{2c_p}, \quad (12.104)$$

assumendo una forma identica a quella dell'equazione della quantità di moto longitudinale nel medesimo sistema (12.90). Infatti:

$$\rho c_p (u\partial_x T_0 + v\partial_y T_0) = \frac{\mathcal{K}}{2c_p} (\text{Pr} - 1) [u\partial_{yy}^2 u + (\partial_y u)^2] + \mathcal{K} \partial_{yy}^2 T_0,$$

che, quando il numero di Prandtl è unitario ($\mathcal{K}/c_p = \mu$), si scrive:

$$\rho (u\partial_x T_0 + v\partial_y T_0) = \mu \partial_{yy} T_0.$$

La soluzione dell'equazione precedente è quindi legata al campo di velocità longitudinale u da una relazione lineare: $T_0 = Au + B$, in cui A e B sono due costanti da determinare. La soluzione con $A = 0$ comporta $T_0 \equiv$ costante, dalla quale segue anche $\partial_y T_0(0) = 0$, ovvero siamo in condizioni adiabatiche. La temperatura di parete dipende allora dalle sole condizioni all'infinito, infatti per la costanza di T_0 :

$$T_w = T_e + \frac{u_e^2}{2c_p}.$$

Il caso isotermo, invece, è caratterizzato dalla scelta delle costanti $A = -(T_w - T_e)/u_e + u_e/(2c_p)$ e $B = T_w$. comportando la seguente soluzione per la temperatura T :

$$T = T_w - (T_w - T_e) \frac{u}{u_e} + \frac{uu_e}{2c_p} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right). \quad (12.105)$$

Il flusso termico alla parete q_w si scrive allora:

$$\begin{aligned} q_w &= \mathcal{K} \partial_y T(0) \\ &= \mathcal{K} \partial_y T_0(0) \\ &= -\frac{\mathcal{K}}{u_e} (T_w - T_{0e}) \partial_y u(0) \\ &= -\frac{c_p}{u_e} (T_w - T_{0e}) \tau_w, \end{aligned} \quad (12.106)$$

avendo evidenziato lo sforzo $\tau_w = \mu \partial_y u(0) > 0$ alla parete. Ne segue ancora che per $T_w < T_{0e}$ la lastra è riscaldata e per $T_w > T_{0e}$ è raffreddata dalla corrente. Una interessante conseguenza della (12.106) si ha stabilendo una corrispondenza tra il flusso termico alla parete per unità di differenza di

temperatura ed il coefficiente di attrito $c_f = \tau_w / (\rho_e u_e^2 / 2)$. Infatti, definito il *numero di Nusselt* locale (alla ascissa x):

$$\text{Nu}_x = \frac{\text{flusso termico}}{\text{diffusività} \times \text{salto termico}} \cdot \text{ascissa } x = \frac{q_w}{\mathcal{K}(T_{0e} - T_w)} x \quad (12.107)$$

che, utilizzando la forma (12.106) del flusso termico alla parete, si riscrive come:

$$\text{Nu}_x = \frac{1}{2} \text{Re}_x c_f, \quad (12.108)$$

essendo $\text{Re}_x = (\rho_e u_e x) / \mu$. Questa relazione tra il numero di Nusselt, il numero di Reynolds ed il coefficiente di attrito alla parete prende il nome di *analogia di Reynolds*.

Una ultima considerazione occorre far vedere come, se si ammette che il flusso è isocoro, la soluzione isotermica (12.99) scritta per $\text{Pr} = 1$ si riduce alla (12.105). Considerando che dalle definizioni (12.97) segue per $\text{Pr} = 1$:

$$\Gamma_1(\eta) = 1 - f'(\eta), \quad \Lambda_1(\eta) = \frac{1}{2} (1 - f'^2),$$

in cui abbiamo ricordato le condizioni al contorno su f nel problema di Blasius (12.21). Sostituendo nella prima soluzione della (12.99) e ricordando la definizione (12.92) del numero di Brinkman:

$$\tilde{T} = \text{Br} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{u^2}{u_e^2} \right) + \frac{1 - \text{Br}/2}{1} \left(1 - \frac{u}{u_e} \right),$$

che si riduce alla (12.105) in base alla definizione (12.91) di \tilde{T} .

12.7 Curiosando in biblioteca

Lo strato limite è trattato più o meno diffusamente su moltissimi libri di Fluidodinamica. Uno di quelli che affrontano l'argomento in modo più completo e soddisfacente è il testo di Schlichting [32], interamente dedicato allo strato limite. Nel cap. 7 troviamo la trattazione dello strato limite laminare per un flusso bidimensionale attorno ad un corpo. Inizialmente l'Autore esegue un'analisi degli ordini di grandezza dei termini presenti nelle equazioni di continuità e nelle due equazioni di bilancio della quantità di moto (longitudinale, x , e trasversale, y). Assumendo la coordinata y dell'ordine dello spessore δ dello strato limite ed ipotizzando che risulti $\delta \ll L$, con L dimensione caratteristica del corpo, Schlichting semplifica le equazioni, giungendo alla approssimazione di Prandtl. Nel §e dello stesso capitolo viene quindi dedotta l'equazione di Balsius di strato limite su di una lastra piana. Nel cap. 8 viene trattato (§b) lo strato limite su di una lastra piana in una corrente non uniforme, premettendo alcune considerazioni sul concetto di soluzione simile,

e (§e) viene poi dedotta l'equazione di Karman. L'ipotesi di Thwaites⁸ (che Schlichting attribuisce a A. Walz) per l'integrazione dell'equazione di Karman è illustrata nel §b del cap. 10. La trattazione dello strato limite termico viene affrontata nel cap. 12, partendo con la deduzione dell'equazione di bilancio dell'energia. Nel §c, l'Autore riscrive le equazioni di bilancio di massa, quantità di moto ed energia in forma adimensionale, definendo i gruppi adimensionali dai quali deve dipendere la soluzione del problema (numeri di Prandtl e di Nusselt). L'analisi degli ordini di grandezza dei vari termini presenti nell'equazione dell'energia adimensionale è illustrata nel §e e quindi (§f) si deduce una forma molto generale dell'analogia di Reynolds. La trattazione completa dello strato limite per flusso a densità costante si trova nel §g: a p. 296 sono riportate le soluzioni nei casi adiabatico ed isotermo.⁹

Circa lo strato limite turbolento, al solito in [32] se ne trova una ampia e dettagliata trattazione. I capitoli 16 e 17 sono dedicati alla presentazione fenomenologica della turbolenza, mentre il cap. 18 tratta specificamente lo strato limite turbolento. Nel §b troviamo infatti alcune delle proprietà dell'operatore di media (notare che Schlichting definisce la media solo come media nel tempo e non d'insieme), mentre nei due paragrafi successivi viene definito il tensore degli sforzi di Reynolds. La deduzione è effettuata in modo intuitivo nel §c, considerando il flusso di quantità di moto attraverso un elemento d'area interno al fluido, mentre la trattazione diviene rigorosa nel paragrafo successivo. Qui sono riportate le equazioni di strato limite, la cui deduzione è però lasciata al Lettore. La conseguente trattazione, piuttosto differente da quella svolta nel presente testo, per lo strato limite su una lastra piana è illustrata nel §a del cap. 21.

Una lunga e dettagliatissima analisi dello strato limite turbolento è presente in [23], nel §5.5. Dopo una introduzione fenomenologica, ma estremamente chiara, vengono ricavate le forme universali del profilo di velocità media nel sottostato laminare (p. 205) e nello strato esterno (p. 206), per poi dedurre il profilo nello strato logaritmico. Dalle relazioni di accoppiamento, segue naturalmente la scarsa dipendenza della velocità d'attrito dalla coordinata lungo la parete. Il paragrafo prosegue affrontando anche la presenza di un gradiente di pressione non nullo e di una rugosità della parete. La trattazione dei vari argomenti è nel complesso estremamente ricca e dettagliata, consigliabile per approfondire l'argomento.

Per un approfondimento formale della trattazione dello strato limite laminare è consigliabile il libro di Meyer [24], nel quale (§21) viene trattato l'esempio classico di perturbazione singolare dovuto a Friedrichs. Il §22 tratta lo strato limite su piastra piana seminfinita partendo dalle equazioni del

⁸ Il Lettore ponga attenzione al fatto che l'Autore definisce il gruppo adimensionale K opposto a j e che usa la relazione $L(K) \simeq 0.47 - 6K$, leggermente differente da quella utilizzata nel presente testo.

⁹ Non si usa il numero di Brinkman: al suo posto si utilizza il prodotto E Pr, in cui $E = u_e^2/[c_p(T_w - T_e)]$ è il *numero di Eckert*.

moto per un flusso bidimensionale, con la tecnica di perturbazione singolare. Ottenute le equazioni di Prandtl per lo strato limite, viene introdotta, in modo estremamente rigoroso, la coordinata adimensionale η e quindi dedotto il problema di Balsius (p. 104). Da sottolineare che, nell'appendice 22, viene spiegato come trasformare tale problema in uno a valori iniziali. Nei due §24 e 25 viene quindi trattato lo strato limite in una corrente non uniforme ed introdotto il concetto di soluzione simile. La spiegazione è matematicamente molto rigorosa, e mostra in particolare che una soluzione simile approssima uniformemente una soluzione non simile per un gradiente di pressione strettamente favorevole. Nel §26 troviamo infine la trattazione integrale dello strato limite, con la deduzione dell'equazione di Karman e l'uso dell'ipotesi di Thwaites.

Nel testo di Chorin e Marsden [6] il §2.2 è dedicato allo strato limite laminare, premettendo le considerazioni sulla differenza tra problema di Eulero e problema di Navier-Stokes nel limite per $Re \rightarrow \infty$. La tecnica di perturbazione singolare è illustrata col classico esempio di Friedrichs (p. 68, esempio 1), per poi ricavare successivamente (pp. 73-74) le equazioni di Prandtl ed il problema di Blasius (pp. 80-81). In Batchelor [3] lo strato limite laminare è introdotto nel §5.7. L'Autore analizza gli ordini di grandezza dei vari termini nelle equazioni di bilancio per una lastra piana infinita e giunge alle equazioni di Prandtl e (p. 305) alla dipendenza dello spessore dello strato limite dal numero di Reynolds. A p. 308 (§5.8) viene trattato lo strato limite su una lastra piana, in assenza di gradienti di pressione, scrivendo il problema di Blasius. L'analisi è poi estesa al caso in cui è presente un gradiente di pressione (§5.9), deducendo il problema di Falkner-Skan, ed alla formulazione integrale. Molto interessante è infine il paragrafo successivo, in cui viene affrontato il problema della separazione dello strato limite. Nel testo di Kundu [17] le equazioni di Prandtl sono ricavate nel §10.2, con una analisi degli ordini di grandezza, successivamente (§10.5) viene presentata la soluzione di Blasius, ottenuta prima in modo classico e poi con una deduzione alternativa, basata sull'assumere la soluzione simile, rispetto alla nuova variabile $\eta = y/\delta(x)$. Dopo aver esteso tale problema alla presenza di gradienti di pressione, nel §10.6 viene illustrato l'approccio integrale e dedotta l'equazione di Karman.

Sul testo di Landau e Lifschitz [20] allo strato limite è riservato il cap. 4. Inizia con la deduzione delle equazioni di Prandtl, ottenute al solito mediante un confronto degli ordini di grandezza, per poi dedurre il problema di Blasius. È interessante leggere il §41, nel quale si affronta il problema della transizione da uno strato limite laminare ad uno turbolento. Si passa poi allo studio dello strato limite turbolento, ottenendo in particolare la forma del profilo medio nello strato logaritmico. Anche sul libro di Tennekes e Lumley [35] viene trattato in modo molto soddisfacente lo strato limite turbolento. Si deducono i profili di velocità medi nel sottostrato laminare e nello strato esterno, per poi accoppiarli con lo strato logaritmico. Particolare attenzione è riservata al sottostrato laminare ed alla valutazione dello sforzo a parete (pp. 158-162).

Passando in rassegna libri più propriamente didattici, notiamo che White [37] dedica i §7.3-7.5 allo strato limite. Partendo dallo strato limite laminare

con la deduzione delle equazioni di Prandtl (§7.3), ottenute tramite l'analisi degli ordini di grandezza, e giungendo al problema di Blasius (p. 437). Segue poi la trattazione integrale, giungendo all'equazione di Karman (p. 448). Piuttosto singolare è la trattazione in [27] (§ 8), in cui la presenza dello strato limite è interpretata come un effetto della diffusione di vorticità dalla parete. Effettuando una analisi agli ordini di grandezza nell'equazione di Helmholtz, gli Autori deducono la stima classica dello spessore dello strato limite, inversamente proporzionale alla radice del numero di Reynolds (§8.1). Vengono dedotte poi le equazioni di Prandtl (§8.2) e, definita la coordinata adimensionale η (che gli Autori indicano con ξ), viene formulato il problema di Blasius. Nel §8.3, gli Autori deducono l'equazione di Karman e mostrano con un esempio (8.3.1) come, sviluppando la velocità adimensionale u/u_e in serie di McLaurin rispetto a δ (spessore dello strato) e troncando lo sviluppo al terzo ordine, sia possibile dedurre la dipendenza dall'ascissa corrente dello sforzo a parete e di δ . Il problema di Falkner-Skan è infine dedotto nel §8.4. Sottolineiamo la presenza, alla fine di questo capitolo, di un nutrito numero di interessanti esercizi. Il testo di Warsi [36] introduce il problema dello strato limite nel §5.5, deducendo l'approssimazione di Prandtl delle equazioni del moto. Viene sottolineando come, nel passare dalla formulazione viscosa a quella non viscosa, si perda una condizione a contorno e quindi il problema di Eulero non possa essere interpretato come limite per $\mu \rightarrow 0$ del problema di Navier-Stokes. Nelle pp. 243-245 sono introdotte le quantità integrali δ_1 e θ , giungendo (pp. 250-252) alle equazioni di Falkner-Skan. Successivamente, l'Autore presenta la deduzione del problema di Blasius. Viene quindi trattato lo strato limite turbolento (pp. 493-497), spiegando come può essere determinata sperimentalmente la velocità d'attrito. Piuttosto povero a riguardo è invece il testo [26], nel quale lo strato limite è affrontato al §6.5, introducendo le quantità integrali (spessori di scostamento e di quantità di moto). Al §6.5.2 gli Autori presentano, ma non ne mostrano la deduzione, le equazioni di Prandtl e le corrispondenti equazioni mediate per lo strato limite turbolento. Sul testo [12] è invece possibile trovare una breve ma precisa trattazione dello strato limite turbolento all'interno di un condotto a sezione circolare (pp. 505-508). L'analisi è molto simile a quanto si fa con la lastra piana semi-infinita. Nel §9.2 troviamo poi la teoria completa dello strato limite. In particolare, nel §9.2.2 gli Autori deducono le equazioni semplificate di Prandtl nel caso di assenza di gradienti di pressione, mentre nel §9.2.4 viene scritta l'equazione di Karman. Il caso di corrente esterna non uniforme è invece trattato nel §9.2.6. La scrittura del problema di Blasius è proposta negli esercizi alla fine cap. § 9. Anche sul libro [22] la teoria dello strato limite è inserita in modo piuttosto marginale. Il §6.2 si apre con la definizione di strato limite e la deduzione delle equazioni di Prandtl, mentre nel §6.4 si definiscono le quantità integrali. Nel §6.5.1 l'Autore tratta lo strato limite su lastra piana, deducendo il problema di Blasius. Infine il problema di Falkner-Skan è illustrato nel §6.6. Il testo di Acheson [1] risulta a riguardo molto più soddisfacente. Una definizione qualitativa dello strato limite è data nelle pp. 26-30, sottolineando che

la soluzione del problema di Navier-Stokes nel limite per $\mu \rightarrow 0$ non coincide con la soluzione del problema di Eulero. Il cap. 8 è poi interamente dedicato allo strato limite. Nelle pp. 260-265 vengono illustrate le prime idee di base e si cita il lavoro che Prandtl pubblicò sull'argomento. L'esempio del problema di perturbazione singolare di Friedrichs (pp. 269-271) e l'analisi dello strato limite su lastra piana portano poi alla deduzione del problema di Blasius (pp. 271-274). Negli esercizi al termine del capitolo, si propone infine al Lettore di dedurre il problema di Falkner-Skan.

Approfondimenti

12.8 Uniformità per una soluzione di Falkner-Skan

In questa appendice vogliamo mostrare che, se u è una soluzione *simile* delle equazioni (12.28) ed il gradiente di pressione è strettamente favorevole ($p'_e < 0$), allora $u(x, \zeta) \rightarrow u_e(x)$ per $\zeta \rightarrow +\infty$ in modo uniforme su ogni intervallo limitato.

Infatti, sia $I = [x_0, x_1]$ un intervallo chiuso e limitato arbitrario. Scelto ad arbitrio un numero $\varepsilon > 0$, possono essere determinati in corrispondenza ad esso i seguenti due numeri positivi. Considerando che $F' \rightarrow 1$ per $\eta \rightarrow +\infty$, esiste un numero m_ε tale che per ogni $\eta > m_\varepsilon$ sia verificata la relazione: $|F'(\eta) - 1| < \varepsilon/u_e(x_1)$. Inoltre, possiamo determinare un numero $M_\varepsilon = m_\varepsilon \sqrt{x_i/u_e(x_i)}$, con $i = 0$ se $\beta > 1$ ed $i = 1$ se $0 < \beta \leq 1$, indipendente da $x \in I$ tale che per ogni $\zeta > M_\varepsilon$ il corrispondente valore di $\eta = \zeta \sqrt{u_e(x)/x}$ verifica la relazione $\eta > m_\varepsilon$. Ne segue che per ogni $\zeta > M_\varepsilon$ ed indipendentemente da x :

$$|u(x, \zeta) - u_e(x)| = u_e(x)|F'(\eta) - 1| \leq \frac{u_e(x)}{u_e(x_1)} \varepsilon \leq \varepsilon .$$

Mostriamo infine che se $\zeta > M_\varepsilon$, allora $\eta > m_\varepsilon$:

$$\eta = \zeta \sqrt{\frac{u_e(x)}{x}} > M_\varepsilon \sqrt{\frac{u_e(x)}{x}} = m_\varepsilon \frac{\sqrt{\frac{x_i}{u_e(x_i)}}}{\sqrt{\frac{x}{u_e(x)}}} > m_\varepsilon ,$$

essendo la funzione $\sqrt{x/u_e(x)}$ crescente per $0 < \beta \leq 1$ e decrescente per $\beta > 1$:

$$\frac{d}{dx} \sqrt{\frac{x}{u_e(x)}} = \frac{1 - \beta}{2\sqrt{xu_e}} .$$

13

Flussi di fluidi comprimibili

In questo capitolo verranno brevemente discusse alcune delle più importanti conseguenze della comprimibilità, ovvero delle variazioni di densità del fluido dovute alla non uniformità del campo di pressione. Questi effetti sono stati finora trascurati, pur comportando sviluppi molto profondi della teoria ed avendo un ruolo importante in moltissime applicazioni.

Si assume spesso che un fluido *comprimibile* sia un gas, sufficientemente denso da poter essere considerato un mezzo continuo. Lo studio del moto di un tale mezzo è un argomento di quel settore della Fluidodinamica che prende il nome di *Gasdinamica*, per una analisi approfondita del quale si rimanda a testi specialistici (vedi ad esempio [30]). Qui daremo soltanto pochi cenni, considerando alcuni dei fenomeni di maggiore interesse. Una caratteristica importante del moto dei gas consiste nel fatto che al moto “medio” delle singole molecole è sovrapposto un moto random detto di “agitazione termica”. Tale moto random avviene su una scala di lunghezze microscopica: il libero cammino medio (l), ovvero la distanza media tra due collisioni successive per le molecole costituenti il gas. L’energia cinetica media del moto random è proporzionale alla grandezza intensiva macroscopica temperatura (T), di qui la necessità di introdurre nel modello una equazione per l’energia interna del gas ed una equazione di stato, che metta in relazione temperatura con pressione (p) e densità (ρ). Il limite per $T \rightarrow 0$ corrisponde quindi ad un gas in cui l’agitazione termica diviene via via meno intensa e gli urti meno probabili. Nello stesso limite, lo scambio microscopico di quantità di moto si annulla e quindi $p \rightarrow 0$: la pressione possiede uno “zero termodinamico”, cosa che non accade in un fluido incomprimibile.

L’introduzione degli effetti della comprimibilità nella descrizione matematica del moto di un fluido cambia radicalmente alcuni dei comportamenti qualitativi discussi precedentemente. È facile convincersi (§ 13.1) che il paradosso di avere disturbi di pressione che propagano a velocità infinita, tipico di un fluido incomprimibile, viene superato considerandone la comprimibilità. La natura ondosa delle soluzioni dei problemi non stazionari è poi illustrata nel successivo paragrafo 13.2, prendendo in considerazione il problema clas-

sico del moto (monodimensionale) di un gas indotto dal moto di un pistone in un cilindro. La discussione è rivolta a definire i meccanismi di formazione e la successiva propagazione di *onde di espansione* e *di compressione* in un fluido non viscoso. In queste condizioni, un'onda di compressione evolve assumendo sempre più il carattere di una discontinuità (*urto*) che propaga all'interno del mezzo, attraverso la quale si verifica un salto tra condizioni a monte (ρ_1, u_1, p_1, h_1 ed s_1) ed a valle (ρ_2, u_2, p_2, h_2 ed s_2). In particolare, un urto realizza una diminuzione della velocità relativa ($u_1 > u_2$) ed incrementi di densità ($\rho_1 < \rho_2$), pressione ($p_1 < p_2$), entalpia ($h_1 < h_2$) ed entropia ($s_1 < s_2$). Il successivo paragrafo 13.4 illustra come la natura discontinua dell'urto sia un paradosso dovuto all'assenza di meccanismi diffusivi. Viene studiata la struttura dell'urto in un flusso monodimensionale stazionario di un fluido viscoso, mostrando che la transizione dallo stato a monte a quello a valle avviene in una regione il cui spessore è dell'ordine del libero cammino medio l . Infine, nel paragrafo 13.5 verrà brevemente analizzata una applicazione ingegneristica classica degli effetti della comprimibilità: l'accelerazione di un flusso attraverso un ugello propulsivo.

Una breve bibliografia sugli argomenti trattati nel presente capitolo è discussa nel paragrafo 13.6.

13.1 La propagazione di piccoli disturbi

In questo paragrafo analizzeremo la propagazione di *piccoli* disturbi di pressione (e quindi di densità e velocità) in un fluido non viscoso in moto monodimensionale omoentropico, assumendo $p(x, t) = p_0 + \tilde{p}(x, t)$ con $|\tilde{p}|/p_0 \ll 1$. In corrispondenza a questa scelta, avremo pure $\rho(x, t) = \rho_0 + \tilde{\rho}(x, t)$ (con $|\tilde{\rho}|/\rho_0 \ll 1$) ed $u(x, t) = u_0 + \tilde{u}(x, t)$ (con $|\tilde{u}|/u_0 \ll 1$). Sulla base del Primo e del Secondo Principio della Termodinamica, dell'equazione di stato dei gas perfetti e nell'ipotesi di gas caloricamente perfetto, si ottiene la relazione tra p , ρ ed entropia specifica s :

$$\frac{p}{\rho^\gamma} e^{-s/c_v} \equiv \text{costante} \quad (13.1)$$

e, nelle ipotesi poste, $s \equiv s_0$.

- ◊ **Esercizio:** Ricavare l'equazione (13.1) per un gas perfetto e caloricamente perfetto.

Al fine di ricavare un legame tra i disturbi di pressione \tilde{p} e di densità $\tilde{\rho}$, differenziamo l'equazione di stato $p = p(\rho, T)$:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_{T=T_0} d\rho + \frac{\partial p}{\partial T} \Big|_{\rho=\rho_0} dT . \quad (13.2)$$

In base all'equazione di stato, la prima derivata a secondo membro vale p_0/ρ_0 e la seconda $R\rho_0$. Dalla relazione (13.1) segue però che una variazione $d\rho$

produce, in condizioni omoentropiche ($s \equiv s_0$) una variazione di temperatura dT data da:

$$dT = \frac{\gamma - 1}{R} \frac{p_0}{\rho_0^2} d\rho \quad (13.3)$$

e, sostituendo quest'ultima relazione nella (13.1), otteniamo:

$$dp = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} d\rho = \frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_{s=s_0} d\rho . \quad (13.4)$$

L'ultima uguaglianza appare ovvia dalla (13.1), ma la deduzione illustrata chiarisce che associata alla variazione di densità c'è sempre anche una variazione di temperatura (13.3). Poiché la derivata $\partial p / \partial \rho$ è positiva e dimensionalmente omogenea al quadrato di una velocità, riscriveremo la relazione (13.4) sostituendo ai differenziali le variazioni come:

$$\tilde{p} = a_0^2 \tilde{\rho} \quad \text{con: } a_0^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_{s=s_0} . \quad (13.5)$$

Vedremo nel seguito che la velocità a_0 assume il significato di velocità con la quale propagano i disturbi di densità ($\tilde{\rho}$) e di velocità (\tilde{u}) nel sistema di riferimento solidale alla corrente indisturbata (*velocità del suono*), ovvero nel sistema che trasla a velocità u_0 rispetto all'asse di riferimento x .

Avendo collegato, per il tramite della relazione (13.5), le variazioni di pressione a quelle di densità, possiamo scrivere il sistema chiuso in $\tilde{\rho}$ e \tilde{u} dato dalle equazioni di continuità e quantità di moto:

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{\rho} + (\rho_0 + \tilde{\rho}) \partial_x \tilde{u} + (u_0 + \tilde{u}) \partial_x \tilde{\rho} = 0 \\ (\rho_0 + \tilde{\rho}) [\partial_t \tilde{u} + (u_0 + \tilde{u}) \partial_x \tilde{u}] + a_0^2 \partial_x \tilde{\rho} = 0 . \end{cases}$$

Assumendo le derivate dei disturbi piccole quanto i disturbi medesimi, nel sistema precedente possiamo trascurare i prodotti dei termini di perturbazione:

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{\rho} + \rho_0 \partial_x \tilde{u} + u_0 \partial_x \tilde{\rho} = 0 \\ \partial_t \tilde{u} + u_0 \partial_x \tilde{u} + \frac{a_0^2}{\rho_0} \partial_x \tilde{\rho} = 0 , \end{cases} \quad (13.6)$$

in cui la seconda equazione è stata divisa membro a membro per ρ_0 . A partire dal sistema (13.6), si possono disaccoppiare le due equazioni ed ottenere il nuovo sistema:

$$\mathcal{L}_0 \tilde{\rho} = 0 , \quad \mathcal{L}_0 \tilde{u} = 0 , \quad \text{con: } \mathcal{L}_0 = \partial_{tt}^2 + 2u_0 \partial_{tx}^2 + (u_0^2 - a_0^2) \partial_{xx}^2 , \quad (13.7)$$

come è illustrato nell'esercizio (13.7).

- ◊ **Esercizio:** Costruire le equazioni (13.7), derivando in t ed x entrambe le relazioni (13.6).

Suggerimento. Dalle quattro equazioni nelle sei incognite ($\partial_{tt}^2 \tilde{\rho}$, $\partial_{tx}^2 \tilde{\rho}$, $\partial_{xx}^2 \tilde{\rho}$, $\partial_{tt}^2 \tilde{u}$, $\partial_{tx}^2 \tilde{u}$ e $\partial_{xx}^2 \tilde{u}$) ricavare, ad esempio, le prime tre derivate ($\partial_{tt}^2 \tilde{\rho}$, $\partial_{tx}^2 \tilde{\rho}$ e $\partial_{xx}^2 \tilde{\rho}$) in funzione delle tre altre derivate ($\partial_{tt}^2 \tilde{u}$, $\partial_{tx}^2 \tilde{u}$ e $\partial_{xx}^2 \tilde{u}$). Infine, sostituire due delle tre derivate di $\tilde{\rho}$ nella quarta equazione e dedurre in tal modo il sistema (13.7). (13.8)

Cerchiamo di individuare la natura dell'operatore differenziale lineare del secondo ordine \mathcal{L}_0 . A tale scopo adimensionalizziamo l'operatore introducendo una scala delle lunghezze L (in questo stadio arbitraria), la scala dei tempi L/a_0 ed il rapporto $u_0/a_0 = M_0$ che prende il nome di *numero di Mach*. Indicando con (ξ, τ) le variabili indipendenti (x, t) adimensionalizzate, l'operatore \mathcal{L}_0 si può riscrivere:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{a_0^2}{L^2} \left[\partial_{\tau\tau}^2 + 2M_0 \partial_{\tau\xi}^2 + (M_0^2 - 1) \partial_{\xi\xi}^2 \right]. \quad (13.9)$$

Gli autovalori della matrice dei coefficienti delle derivate seconde di \mathcal{L}_0 sono sempre di segno opposto, come segue dall'esercizio (13.10). Le equazioni (13.7) sono allora (strettamente) iperboliche, qualunque sia il numero di Mach M_0 . Come è noto, equazioni (strettamente) iperboliche possiedono caratteristiche reali (e distinte) e descrivono fenomeni di propagazione ondosa, come è facile riconoscere nel caso in esame sulla base delle considerazioni seguenti.

- ◊ **Esercizio:** Ricavare gli autovalori della matrice dei coefficienti delle derivate seconde dell'operatore differenziale lineare (13.9) e verificare che sono sempre reali discordi. (13.10)

Osserviamo che una qualunque funzione continua con derivata seconda continua di $\eta_1 = \xi - (M_0 + 1)\tau$ o di $\eta_2 = \xi - (M_0 - 1)\tau$ è soluzione delle equazioni (13.7), in base alla forma (13.9) dell'operatore \mathcal{L}_0 . Essendo tali equazioni lineari, il loro integrale generale è dato dalla somma di una funzione \mathcal{C}^2 di η_1 (f_1 e g_1 , rispettivamente per $\tilde{\rho}$ e \tilde{u}) e di una funzione \mathcal{C}^2 di η_2 (f_2 e g_2):

$$\tilde{\rho}(\xi, \tau) = f_1(\eta_1) + f_2(\eta_2), \quad \tilde{u}(\xi, \tau) = g_1(\eta_1) + g_2(\eta_2). \quad (13.11)$$

Assegnando un dato iniziale $\tilde{\rho}(x, 0) = \tilde{\rho}_0(x)$, $\tilde{u}(x, 0) = \tilde{u}_0(x)$ almeno \mathcal{C}^2 , abbiamo che:

$$\begin{cases} f_1(\xi) + f_2(\xi) = \tilde{\rho}_0(\xi) \\ g_1(\xi) + g_2(\xi) = \tilde{u}_0(\xi) \end{cases} \quad (13.12)$$

Inoltre, sulla base del sistema originario (13.6), la conoscenza del dato iniziale consente di specificare le derivate nel tempo di $\tilde{\rho}$ e \tilde{u} al tempo $t = 0$:

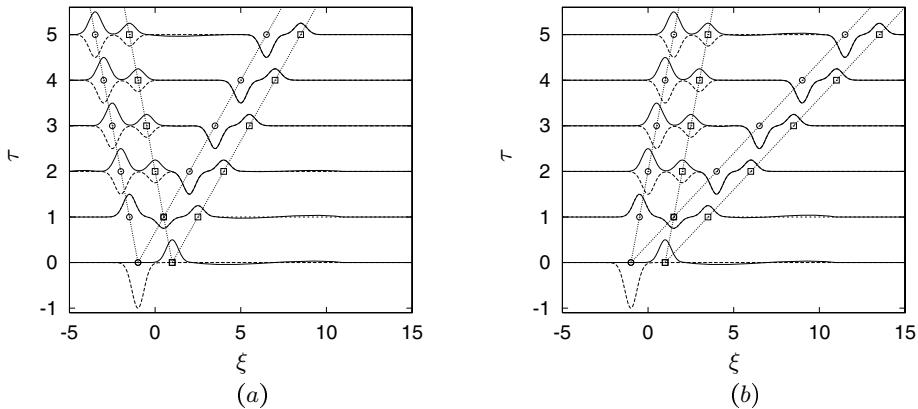


Figura 13.1. Soluzione (13.14) per $M_0 = 0.5$ (a) e $M_0 = 1.5$ (b), per disturbi $\tilde{\rho}_0(\xi)/\rho_0$ e $\tilde{u}_0(\xi)/u_0$ inizialmente concentrati attorno ai punti $\xi_\rho = +1$ e $\xi_u = -1$. Negli istanti $\tau = 0, 1, \dots, 5$ sono diagrammati gli andamenti di $\tilde{\rho}(\xi, \tau)/\rho_0$ (linea continua) e $\tilde{u}(\xi, \tau)/a_0$ (linea a tratti) in funzione di ξ , collocando convenzionalmente tali curve nello stesso piano (ξ, τ). Con linee a punti sono anche rappresentate le rette $\eta_{1,2} = \xi - (M_0 \pm 1)\tau = \xi_\rho$ (quadrati) e $\eta_{1,2} = \xi - (M_0 \pm 1)\tau = \xi_u$ (cerchi).

$$\begin{cases} -\partial_\tau \tilde{\rho}(\xi, 0) = (M_0 + 1)f'_1(\xi) + (M_0 - 1)f'_2(\xi) = \frac{\rho_0}{a_0} \tilde{u}'_0(\xi) + M_0 \tilde{\rho}'_0(\xi) \\ -\partial_\tau \tilde{u}(\xi, 0) = (M_0 + 1)g'_1(\xi) + (M_0 - 1)g'_2(\xi) = M_0 \tilde{u}'_0(\xi) + \frac{a_0}{\rho_0} \tilde{\rho}'_0(\xi) , \end{cases} \quad (13.13)$$

in cui $\tilde{\rho}'_0$ e \tilde{u}'_0 sono le derivate in ξ del dato iniziale. Derivando membro a membro in ξ le condizioni (13.12) e combinandole con le relazioni (13.13) possiamo ricavare le derivate delle funzioni $f_{1,2}$ e $g_{1,2}$:

$$f'_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\tilde{\rho}'_0 \pm \frac{\rho_0}{a_0} \tilde{u}'_0 \right) , \quad g'_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\tilde{u}'_0 \pm \frac{a_0}{\rho_0} \tilde{\rho}'_0 \right) ,$$

dove il segno superiore si riferisce al primo pedice e l'inferiore al secondo. Integrando le relazioni precedenti, sostituendo i risultati nelle (13.11) e ponendo:

$$q = \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{\rho}_0}{\rho_0} + \frac{\tilde{u}_0}{a_0} \right) , \quad r = \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{\rho}_0}{\rho_0} - \frac{\tilde{u}_0}{a_0} \right) \quad (13.14)$$

otteniamo la soluzione del problema linearizzato (13.6):

$$\tilde{\rho}(\xi, \tau)/\rho_0 = q(\eta_1) + r(\eta_2) , \quad \tilde{u}(\xi, \tau)/a_0 = q(\eta_1) - r(\eta_2) . \quad (13.15)$$

È molto istruttivo analizzare la struttura di tale soluzione. In Fig. 13.1 sono disegnati gli andamenti delle due funzioni $\tilde{\rho}(\xi, \tau)/\rho_0$ e $\tilde{u}(\xi, \tau)/a_0$ in istanti τ

differenti, per due valori del numero di Mach: in (a) $M_0 < 1$ ed in (b) $M_0 > 1$. Costruite le due funzioni $q(\xi)$ ed $r(\xi)$ (13.14) sulla base del dato iniziale, la soluzione (13.15) propaga la q lungo le rette $\eta_1 = \xi - (M_0 + 1)\tau \equiv$ costante e la r lungo le rette $\eta_2 = \xi - (M_0 - 1)\tau \equiv$ costante del piano (ξ, τ) . Dal confronto tra la Fig. 13.1-a ($M_0 < 1$) e la 13.1-b ($M_0 > 1$) si vede anche che i disturbi risalgono il flusso imperturbato solo nel caso $M_0 < 1$ (flusso imperturbato *subsonico*), mentre nessun punto a monte risente dei disturbi nel caso $M_0 > 1$ (*supersonico*). Analizziamo ora la soluzione analitica del medesimo problema ottenuta senza linearizzare (13.6) le equazioni del moto.

13.2 Flusso monodimensionale omoentropico

Per esemplificare la natura ondosa dei flussi comprimibili evitando di fare assunzioni sull'intensità dei disturbi, esaminiamo il flusso monodimensionale di un gas perfetto non viscoso a partire da condizioni iniziali (al tempo $t = 0$) note. Come già fatto nel precedente paragrafo, ipotizziamo, per maggiore semplicità, che il flusso sia *omoentropico*, ovvero l'entropia s sia costante nello spazio (in x) e nel tempo (in t). Ne segue che l'equazione dell'energia è identicamente soddisfatta ed inoltre sussiste il legame tra la pressione p e la densità ρ : $p/\rho^\gamma \equiv$ costante (in x ed in t). Il problema si può formulare allora in termini di equazioni di continuità e quantità di moto:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + u \partial_x \rho + \rho \partial_x u = 0 \\ \partial_t u + u \partial_x u + \frac{1}{\rho} \partial_x p = 0 . \end{cases} \quad (13.16)$$

Tali equazioni sono scritte in punti (x, t) appartenenti ad un dominio D del piano (x, t) , sulla frontiera del quale (∂D) sono assegnate condizioni al contorno opportune. Sulla assegnazione di tali condizioni torneremo più tardi. L'idea di base per la soluzione delle equazioni (13.16) consiste nel combinarle opportunamente, al fine di riscrivere la prima nella forma:

$$\partial_t q + v \partial_x q = 0 , \quad (13.17)$$

e la seconda in una forma analogica, con r e w rispettivamente al posto di q e v . Le funzioni q e v , così come pure r e w , sono opportune combinazioni della velocità del suono a e della velocità u (vedi il sistema (13.19) più avanti) e pertanto sono funzioni (composte) di x e di t . Consideriamo allora la curva $x = x(t)$ nel piano delle variabili indipendenti (x, t) , interna a D e soddisfacente il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v[a(x, t), u(x, t)] \\ x(0) = x_0 , \end{cases} \quad (13.18)$$

per un dato x_0 . La curva (13.18) verrà nel seguito chiamata C''_{x_0} , mentre la analoga definita con w al posto di v nel secondo membro dell'equazione differenziale in (13.18) sarà chiamata C'_{x_0} . Inoltre, la convenzione spesso utilizzata è quella di classificare le curve C'_{x_0} come appartenenti alla *I* famiglia e le curve C''_{x_0} come appartenenti alla *II* famiglia. Utilizzando il teorema di derivazione delle funzioni composte e l'equazione (13.17), è facile verificare che la restrizione di q alla curva C''_{x_0} , ovvero la funzione del solo tempo $\tilde{q}(t) = q[x(t), t]$, è identicamente costante. Il valore di tale costante (\tilde{q}) dipende in generale dalla curva C''_{x_0} scelta, ovvero dal dato iniziale x_0 selezionato nel problema (13.18). Analogamente, la restrizione di r alle curve C'_{x_0} è anch'essa costante. A causa di questa particolarissima proprietà, le curve C'_{x_0} e C''_{x_0} vengono chiamate *curve caratteristiche* per il problema differenziale (13.16). Le quantità q ed r , costanti rispettivamente sulle curve caratteristiche della *II* e della *I* famiglia, sono chiamate *invarianti di Riemann*.

Cerchiamo di riscrivere le equazioni (13.16) nella velocità u e nella velocità del suono a . In base alla relazione $p/\rho^\gamma \equiv$ costante ed alla definizione di velocità del suono $a^2 = \gamma p/\rho$ per un gas perfetto otteniamo i seguenti differenziali logaritmici:

$$\begin{cases} \frac{dp}{p} - \gamma \frac{d\rho}{\rho} = 0 \\ \frac{dp}{p} - \frac{d\rho}{\rho} = 2 \frac{da}{a}, \end{cases}$$

che, introdotta la notazione $\delta = (\gamma - 1)/2$, forniscono:

$$\frac{dp}{p} = \frac{\gamma}{\delta} \frac{da}{a}, \quad \frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{\delta} \frac{da}{a}.$$

Sostituendo queste relazioni nelle equazioni del moto (13.16) otteniamo il sistema nella forma desiderata:

$$\begin{cases} \partial_t \frac{a}{\delta} + u \partial_x \frac{a}{\delta} + a \partial_x u = 0 \\ \partial_t u + a \partial_x \frac{a}{\delta} + u \partial_x u = 0. \end{cases} \quad (13.19)$$

Facendo la somma e la differenza membro a membro di queste equazioni otteniamo due relazioni del tipo (13.17):

$$\begin{cases} \underbrace{\partial_t(a/\delta + u)}_q + \underbrace{(u+a)\partial_x(a/\delta + u)}_v = 0 \\ \underbrace{\partial_t(a/\delta - u)}_r + \underbrace{(u-a)\partial_x(a/\delta - u)}_w = 0, \end{cases} \quad (13.20)$$

nelle quantità $q = a/\delta + u$, $r = a/\delta - u$ e con $v = u + a$, $w = u - a$. Il sistema (13.20) consente di risolvere il problema (13.16) in D , noti opportuni dati al contorno (su ∂D).

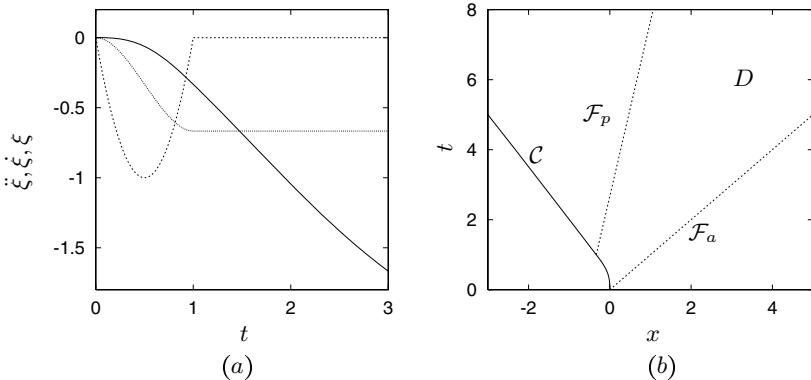


Figura 13.2. In (a) sono diagrammate accelerazione ($\ddot{\xi}$, linea a tratti), velocità ($\dot{\xi}$, linea a punti) e spazio percorso dal pistone (ξ , linea continua) adimensionali in funzione del tempo adimensionale t (13.21, 13.22). In (b) è disegnato il dominio D del piano (x, t) in cui si studia il moto del fluido. La curva C è rappresentata in modo parametrico in t come $(\xi(t), t)$ (osservare che, avendo assunto $\dot{\xi}(0) = 0$, la tangente a questa curva nell'origine è verticale). Con linea a tratti sono riportate anche le tracce dei fronti d'onda anteriore (\mathcal{F}_a) e posteriore (\mathcal{F}_p) per un gas con $\gamma = 7/5$ ed $a_0 = 1$.

Osserviamo innanzitutto che in ogni punto di $(x, t) \in D$ le curve \mathcal{C}'_{x_0} (I famiglia) e \mathcal{C}''_{x_0} (II famiglia) sono non parallele, per motivi termodinamici (la velocità del suono a non può annullarsi). Ne segue in ogni (x, t) passano almeno due curve caratteristiche, una della I ed una della II famiglia (escludiamo, al momento, che due curve caratteristiche della medesima famiglia possano intersecarsi). Necessariamente, procedendo a ritroso nel tempo lungo queste due curve, si giunge su ∂D , su cui sono assegnati dei dati. In tal modo, essendo costanti q sulle curve \mathcal{C}''_{x_0} ed r sulle curve \mathcal{C}'_{x_0} , si riesce, in generale, ad avere sufficienti informazioni per costruire i valori di $a = \delta(q+r)/2$ ed $u = (q-r)/2$ nel punto (x, t) . È quindi evidente la natura ondosa di questo flusso. Invertendo il ragionamento si deduce che i dati al contorno propagano sotto forma di invarianti di Riemann lungo le due famiglie di caratteristiche, dando luogo a sistemi di onde che si muovono ed interagiscono all'interno del campo fluido. Sulla base di questa proprietà delle sue soluzioni, il sistema (13.20) viene classificato come (strettamente) iperbolico. Il procedimento di costruzione della soluzione può essere meglio illustrato con l'esempio che segue.

Consideriamo al tempo iniziale il dominio fluido dato dal semiasse reale positivo, in cui il fluido sia a riposo ($u(x, 0) \equiv 0$ ed $a(x, 0) \equiv a_0$ per $x > 0$). Supponiamo che il punto sovrapposto all'origine ($x = 0$) al tempo iniziale ($t = 0$) si sposti nella direzione delle x negative per tempi $t > 0$, secondo una legge oraria assegnata $x = \xi(t)$ (pensiamo, ad esempio, al flusso generato

all'interno di un cilindro dal moto di un pistone, il quale occupi la posizione $x = \xi(t)$ al tempo t). La velocità $\dot{\xi}(t)$ nulla al tempo iniziale ($t = 0$) ed è *strettamente negativa* per tempi successivi ($t > 0$). Inoltre, supponiamo, per semplicità, che l'accelerazione $\ddot{\xi}$ sia diversa da zero solo per un tempo T finito. A titolo di esempio, adimesionalizzando i tempi con T e le accelerazioni col valore di minimo, potremo scegliere:

$$\ddot{\xi}(t) = \begin{cases} 4t(t-1) & t \in [0, 1] \\ 0 & t \in (1, +\infty) \end{cases}, \quad (13.21)$$

in cui l'accelerazione minima ($\ddot{\xi} = -1$) viene raggiunta in $t = 1/2$. I diagrammi orari¹ di questo moto del pistone sono disegnati in Fig. 13.2-a. Il valore costante assunto dalla velocità $\dot{\xi}(t)$ per $t > 1$ verrà nel seguito chiamato $\dot{\xi}_0$. In Fig. 13.2-b è anche disegnato il corrispondente dominio D del piano (x, t) , in cui la traiettoria del punto $x = \xi(t)$ è rappresentata dalla curva \mathcal{C} . La scelta (13.21) è congruente con l'esigenza di assegnare diagrammi orari del moto del punto $x = \xi(t)$ che possiedano derivate prime (nel tempo) continue, poiché il problema differenziale (13.16) coinvolge la derivata $\partial_t u$ e su \mathcal{C} dovranno imporre $u(\xi(t), t) = \dot{\xi}(t)$. Come già accennato, sulla rimanente parte di ∂D , ovvero sul semiasse positivo delle x , dobbiamo imporre $a(x, 0) \equiv a_0$ ed $u(x, 0) \equiv 0$. Quindi tutte le caratteristiche che originano dal semiasse reale positivo trasportano i valori $q = r = a_0/\delta$ degli invarianti di Riemann.

Cominciamo a costruire la soluzione in una stretta regione sopra l'asse reale positivo: le curve caratteristiche passanti per punti di questa regione originano entrambe dall'asse reale positivo (u è finita e quindi $1/(u \pm a)$ non può essere nulla). Quindi in questi punti $a = a_0$, $u = 0$ e le linee caratteristiche sono rette a pendenza dt/dx pari a $\pm 1/a_0$. Si può allora ripetere questo ragionamento su una seconda regione immediatamente sopra la prima e così via, per tutti i punti di D al di sotto della retta passante per l'origine $t = x/a_0$ (\mathcal{F}_a in Fig. 13.2-b). In questa parte del dominio D il fluido è quindi in quiete, ragionando per sezioni a $t = \text{costante}$ in questa regione si propaga un fronte d'onda a velocità pari alla velocità del suono per il fluido in quiete a_0 . La traccia nel piano (x, t) di tale fronte d'onda (anteriore) è la retta \mathcal{F}_a .

Consideriamo poi un punto poco al di sopra della retta $t = x/a_0$. Per questo punto passerà una curva caratteristica della I famiglia che, provenendo dal semiasse reale positivo, trasporta $r = a_0/\delta$. Passerà poi una curva della seconda famiglia che intersecherà la curva \mathcal{C} nel punto corrispondente al tempo

¹ Dalla forma (13.21) dell'accelerazione segue la velocità $\dot{\xi}(t)$ e lo spostamento $\xi(t)$ del pistone al tempo t :

$$\dot{\xi}(t) = \begin{cases} \frac{2}{3}t^2(2t-3) & t \in [0, 1] \\ -\frac{2}{3} & t \in (1, +\infty) \end{cases} \quad \xi(t) = \begin{cases} \frac{1}{3}t^3(t-2) & t \in [0, 1] \\ -\frac{2}{3}t + \frac{1}{3} & t \in (1, +\infty) \end{cases} \quad (13.22)$$

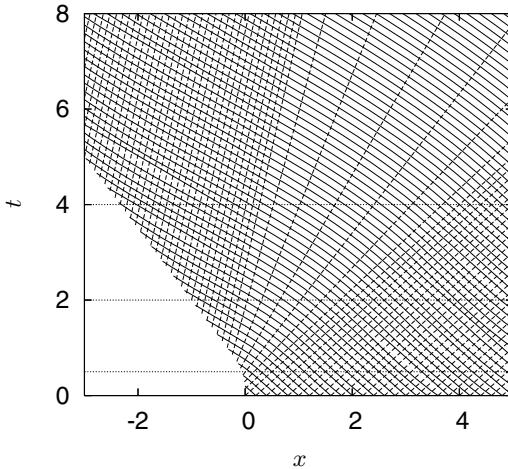


Figura 13.3. Linee caratteristiche per il problema (13.20), avendo assegnato le condizioni di flusso specificate in Fig. 13.2. Con linee tratteggiate sono rappresentate le curve della *II* famiglia (rette), mentre con linea continua sono rappresentate quelle della *I* famiglia. Nella zona compresa tra i due fronti, queste ultime sono calcolate integrando numericamente l'equazione $dx/dt = -a_0 + (1-\delta)\dot{\xi}(t')$, in cui $t' = t'(x, t)$ è calcolato risolvendo numericamente (bisezione) l'equazione (13.23). Le linee tratteggiate orizzontali indicano i tempi in cui verranno tracciati (vedi Fig. 13.4) i profili di velocità del suono e di velocità.

t' , tuttora incognito. Ne segue che sulla caratteristica della *II* famiglia viene trasportato l'invariante $q = a'/\delta + u'$, in cui $a' = a[\xi(t'), t']$ ed $u' = u[\xi(t'), t'] = \dot{\xi}(t')$ sono rispettivamente la velocità del suono e la velocità calcolate nel punto di \mathcal{C} di parametro t' . Ma allora i valori di $a = (a' + a_0 + \delta u')/2$ ed $u = (a' - a_0 + \delta u')/(2\delta)$ sono costanti su tale curva, che è quindi una retta. Imponendo quindi che $a = a'$ otteniamo $a' = a_0 + \delta\dot{\xi}(t')$ ed $u = \dot{\xi}(t')$: la velocità del suono a è in questa regione più bassa di a_0 . Quindi, essendo $a \propto \rho^\delta$, il fluido subisce in tale zona una espansione.² Introdotta la notazione $\delta' = (\gamma + 1)/2$, il tempo t' si calcola sulla base dell'informazione che la curva caratteristica è una retta di pendenza $1/[a_0 + \delta'\dot{\xi}(t')]$ passante per (x, t) , si ottiene in tal modo l'equazione in t' :

$$t' = t + \frac{\xi(t') - x}{a_0 + \delta'\dot{\xi}(t')} . \quad (13.23)$$

Questo stesso ragionamento vale per tutti i punti (x, t) appartenenti alla porzione di D compresa tra le rette $t = x/a_0$ e $t = T + [x - \xi(T)]/[a_0 + \delta'\dot{\xi}_0]$ (\mathcal{F}_p)

² Osserviamo che la condizione termodinamica $a' > 0$ implica una limitazione alle possibili velocità del pistone: $\dot{\xi}(t') > -a_0/\delta$.

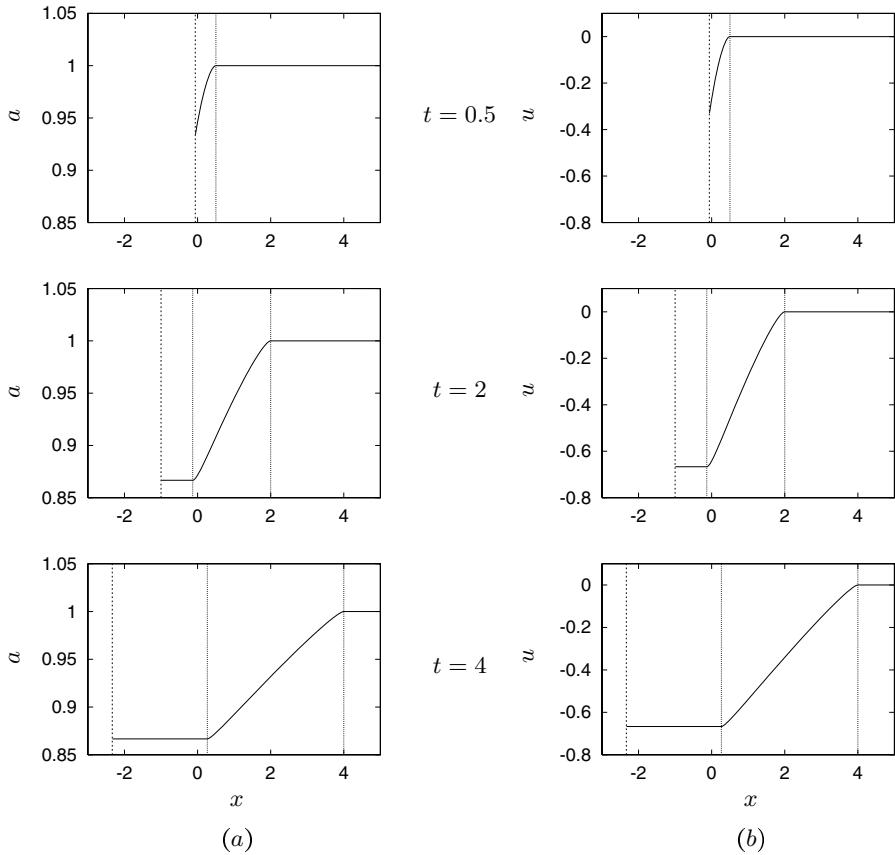


Figura 13.4. Profili di velocità del suono (prima colonna, a) e di velocità (seconda colonna, b) nei tre istanti $t = 0.5, 2$ e 4 , per il medesimo flusso di Fig. 13.2-b. Con linee a tratti sono rappresentate le posizioni del pistone e con linee a punti le tracce dei fronti d'onda anteriore (\mathcal{F}_a) e posteriore (\mathcal{F}_p).

in Fig. 13.2-b), ovvero tra le tracce nel piano (x, t) dei fronti d'onda anteriore e posteriore. Osserviamo infine che soltanto le curve caratteristiche della II famiglia sono rette in questa regione.

Nella regione di D al di sopra della retta \mathcal{F}_p le curve caratteristiche della II famiglia trasportano un valore di $q = a''/\delta + \dot{\xi}_0$. Il tempo t'' identifica l'intersezione tra la data caratteristica della II famiglia e la curva \mathcal{C} . Inoltre, abbiamo posto $a'' = a[\xi(t''), t'']$. Ragionando come nel caso precedente, possiamo dimostrare l'uniformità di a ed u lungo la caratteristica, che è quindi una retta, ed inoltre otteniamo che $a'' = a_0 + \delta\dot{\xi}_0$ ed $u = \dot{\xi}_0$. La velocità del suono raggiunge in tale regione il suo valore minimo assoluto. Ovviamente,

essendo la velocità del pistone uniforme per $t > T$, il calcolo di t'' non risulta essere necessario.

- ◊ **Esercizio:** Perché i gradienti spaziali $\partial_x a$ e $\partial_x u$ sul punto $x = \xi(t)$ in Fig. 13.4 (linee a tratti) sono non nulli in $t = 0.5$ e nulli negli altri due tempi?

Suggerimento: ricavare questi gradienti dalle equazioni (13.19).

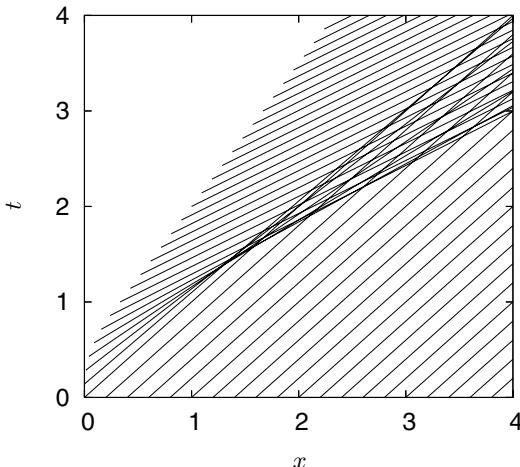


Figura 13.5. Linee caratteristiche della *II* famiglia per il problema (13.20), avendo assegnato le condizioni di flusso opposte a quelle in Fig. 13.2.

Che cosa accade se il pistone accelera nel verso positivo delle x , ovvero comprimendo il fluido? Assumiamo una legge oraria del moto opposta alla (13.21), cioè $\dot{\xi}(t) = 4t(1 - t)$ per $0 \leq t \leq 1$ e 0 per $t > 1$, e ricostruiamo la soluzione facendo uso dello stesso metodo. Per motivi che saranno chiari tra breve, restringiamo l'analisi alle curve della *II* famiglia ed a un intervallo di tempo opportunamente piccolo. Al di sotto della retta $t = x/a_0$ avremo sempre il fluido in quiete ($a = a_0$, $u = 0$). Al di sopra del fronte d'onda anteriore $t = x/a_0$ avremo di nuovo $a = a' = a_0 + \delta\xi(t')$ ed $u = \dot{\xi}(t')$, con t' tempo in cui la retta caratteristica interseca la curva \mathcal{C} (traiettoria del pistone). Questa volta, però, $\dot{\xi}(t') > 0$, quindi $a > a_0$ ed il fluido è riscaldato dal passaggio dell'onda. Non solo, ma la pendenza $1/(u + a)$ di tali rette diminuisce, man mano che ci si sposta sulla \mathcal{C} per t' crescenti da 0 ad 1. Come è chiaramente mostrato in Fig. 13.5, le linee caratteristiche si intersecano: non è più possibile costruire una soluzione!

L'insorgere di questa singolarità in un tempo finito può essere facilmente spiegato col seguente ragionamento qualitativo [30], immaginando di sostituire all'andamento continuo di $\dot{\xi}$ una approssimazione di questo costante a tratti: ciascun salto produce un'onda di ampiezza infinitesima, che si muove quindi con la velocità del suono a . Come abbiamo appena visto, al passaggio della prima il fluido viene riscaldato. La seconda onda trova quindi un fluido a temperatura maggiore e quindi si muove con una velocità a maggiore della precedente, raggiungendo il primo fronte d'onda in un tempo finito. Lo stesso discorso vale per tutte le successive onde, implicando la formazione in un tempo finito di un'onda attraverso la quale misuriamo un salto finito di u ed a e quindi della pressione, della temperatura e della densità. Tale onda prende il nome di *urto*.

Ai salti di pressione e densità è però associato un brusco aumento dell'entropia al passaggio dell'onda, violando quindi l'ipotesi di base (omoentropia) in cui abbiamo calcolato questa soluzione. Infine, la presenza di una diffusione viscosa della quantità di moto e di una diffusività termica impedisce la formazione di una discontinuità, come discuteremo nel § 13.4.

13.3 Flussi stazionari

Osserviamo preliminarmente che, in condizioni stazionarie, dall'equazione di bilancio dell'entalpia specifica (per unità di massa) (2.63) per un fluido non viscoso e non conducente segue $\rho \mathbf{u} \cdot \nabla h = \mathbf{u} \cdot \nabla p$, mentre dall'equazione della quantità di moto (2.48) abbiamo $\mathbf{u} \cdot \nabla p = -\rho \mathbf{u} \cdot \nabla |\mathbf{u}|^2/2$, utilizzando l'accelerazione di Lagrange (1.50). Indicando con u il modulo della velocità ($u = |\mathbf{u}|$) e sostituendo la seconda nella prima otteniamo:

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \left(h + \frac{u^2}{2} \right) = 0, \quad (13.24)$$

ovvero la costanza di $H = h + u^2/2$ su una linea di corrente (o traiettoria). Se l'*entalpia specifica totale* H è uniforme all'infinito a monte (ad esempio, $H = H_0$), allora dalla equazione (13.24) segue l'uniformità in tutto il campo:

$$H = h + \frac{u^2}{2} \equiv H_0. \quad (13.25)$$

Considerando condizioni omoentropiche, l'entalpia specifica si può scrivere al modo seguente:

$$h = c_p T = \frac{\gamma R T}{\gamma - 1} = \frac{a^2}{\gamma - 1}. \quad (13.26)$$

avendo utilizzato la relazione $c_p = \gamma R / (\gamma - 1)$, la definizione di velocità del suono: $a^2 = \partial p / \partial \rho = \gamma p / \rho$ (ad entropia costante) e l'equazione di stato per i gas perfetti $p = \rho R T$. Introducendo la notazione $\delta = (\gamma - 1)/2$, l'equazione (13.26) consente di riscrivere l'equazione (13.25) come:

$$a^2 + \delta u^2 \equiv a_0^2 . \quad (13.27)$$

Una ovvia conseguenza dell'equazione (13.27) è che la massima velocità del suono a_0 si misura in condizioni di ristagno e si chiama per questo *velocità del suono di ristagno*. Ad essa è spesso associata la *temperatura di ristagno* $T_0 = a_0^2 / (\gamma R)$. Inoltre, dalla relazione (13.27) segue pure che la velocità ha modulo limitato da $a_0 / \sqrt{\delta}$.

Si parla invece di *condizioni critiche* quando il modulo u della velocità eguaglia la velocità del suono, tale valore di u si indica con $u_* = a_*$ e si esprime in funzione della velocità del suono di ristagno come: $a_* = a_0 / \sqrt{\delta'}$ avendo indicato con δ' la quantità $(\gamma + 1)/2$ ed utilizzato la relazione (13.27). Nasce allora l'idea di considerare il rapporto $M_* = u/a_*$ detto *numero di Mach critico*. Questo valore, a differenza del numero di Mach, può essere considerato come una misura effettiva della velocità locale del fluido, dipendendo il valore di a_* unicamente dal tipo di fluido considerato e dalle condizioni di ristagno. Il legame tra numero di Mach ed il numero di Mach critico lo ricaviamo sempre a partire dalla relazione (13.27):

$$M_*^2 = \frac{\delta' M^2}{\delta M^2 + 1} , \quad M^2 = \frac{M_*^2}{\delta' - \delta M_*^2} . \quad (13.28)$$

Da queste relazioni risulta che M_* è minore o maggiore di 1 quando lo è M e che, al tendere di M all'infinito, M_* converge al valore finito $\sqrt{\delta'/\delta}$.

13.4 Relazioni di salto e struttura dell'urto

Le equazioni di conservazione della massa, della quantità di moto e dell'energia *monodimensionali stazionarie* con condizioni all'infinito ³ su densità (ρ), velocità (u), pressione (p) ed entalpia specifica h :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{2,1} \\ u_{2,1} \\ p_{2,1} \\ h_{2,1} \end{pmatrix} \quad \text{con: } \rho_1 < \rho_2 , \quad u_1 > u_2 > 0 , \quad p_1 < p_2 , \quad h_1 < h_2 \quad (13.29)$$

per un gas *perfetto* e *caloricamente perfetto* ($c_{p,v}$ costanti) con $Pr = 3/4$ possiedono una soluzione che descrive la transizione dallo stato 1 allo stato 2 in uno spessore dell'ordine del libero cammino medio l . Questa soluzione, dovuta a Becker (1922), fornisce alcune indicazioni sulla struttura dell'urto in un caso estremamente semplificato aiutando a comprendere i limiti dell'approssimazione dell'urto con una *superficie di discontinuità*.

³ Le condizioni in $+\infty$ corrispondono al primo pedice "2", mentre quelle in $-\infty$ corrispondono al secondo pedice "1".

Osserviamo innanzitutto che, nella definizione dei valori asintotici (13.29), si è assunto il flusso lungo la direzione positiva delle x . Nelle condizioni assunte, l'equazione di conservazione della massa si scrive:

$$\frac{d}{dx} \rho u = 0 ,$$

da cui segue che il prodotto $\rho u = m$ è costante in x , ovvero anche che i valori limite della densità e della velocità non possono essere arbitrari, ma devono soddisfare la relazione:

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 . \quad (13.30)$$

Specializzando l'equazione della quantità di moto $\rho D\mathbf{u}/Dt = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$ al caso $1 - D$ stazionario in cui i coefficienti di viscosità λ e μ dipendono dalla temperatura T (e quindi dalla posizione x) si ottiene:

$$\rho uu' = \frac{d}{dx} [(-p + \lambda u') + 2\mu u'] = -p' + \frac{d}{dx} [(\lambda + 2\mu) u'] ,$$

in cui l'apice indica derivazione in x . L'equazione precedente ha due importanti conseguenze. La prima è quella identificare una seconda quantità costante lungo x , in secondo luogo fornisce il valore del gradiente di pressione in funzione della velocità e dei coefficienti di viscosità. Nell'ordine allora abbiamo le due conseguenze:

$$\begin{aligned} mu + p - (\lambda + 2\mu) u' &\equiv mU \\ p' &= -mu' + \frac{d}{dx} [(\lambda + 2\mu) u'] , \end{aligned} \quad (13.31)$$

la seconda delle quali consente di scrivere l'equazione dell'energia $\rho Dh/Dt = Dp/Dt + \text{tr}(\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q}$, specializzata nel caso $1 - D$ (in cui $\text{tr}(\mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{u}) = (\lambda + 2\mu) u'^2$) stazionario, nella forma seguente:

$$mh' = up' + (\lambda + 2\mu) u'^2 + \frac{d}{dx} (kT') = -m \frac{d}{dx} \frac{u^2}{2} + \frac{d}{dx} [(\lambda + 2\mu) uu'] + \frac{d}{dx} (kT') .$$

La relazione precedente, introducendo l'*entalpia specifica totale* $H = h + u^2/2$, consente di identificare una terza quantità costante per questo flusso:

$$mH - (\lambda + 2\mu) uu' - kT' \equiv m\mathcal{H} . \quad (13.32)$$

13.4.1 Relazioni di salto

Le costanti U ed \mathcal{H} nelle (13.31) e (13.32) possono essere riscritte in termini delle quantità asintotiche (13.29), fornendo due nuovi vincoli sui valori asintotici di velocità, pressione ed entalpia. Complessivamente, le relazioni tra le condizioni all'infinito a monte ($x \rightarrow -\infty$) e l'infinito a valle ($x \rightarrow +\infty$) ottenute sono le seguenti:

$$\boxed{\begin{aligned}\rho_1 u_1 &= \rho_2 u_2 = m \\ m u_1 + p_1 &= m u_2 + p_2 = m U \\ H_1 &= H_2 = \mathcal{H}\end{aligned}} \quad (13.33)$$

in cui abbiamo anche riscritto, per completezza, la relazione (13.30), riguardante il flusso di massa. Le relazioni (13.33) stabiliscono dei legami algebrici tra i valori di densità, velocità, pressione ed entalpia specifica a monte (“₁”) ed a valle (“₂”) chiamati *relazioni di salto* attraverso l’urto. Da queste relazioni si possono dedurre alcuni importanti legami tra le condizioni all’infinito a monte (pedice “₁”) e quelle all’infinito a valle (pedice “₂”).

Innanzitutto, i numeri di Mach a monte (M_1) ed a valle (M_2) possono essere riscritti (13.28) in termini dei corrispondenti numeri di Mach critici ($\mathcal{H} = (\gamma + 1)a^{*2}/[2(\gamma - 1)]$, valutando H in condizioni critiche):

$$M_k^2 = \frac{M_k^{*2}}{\frac{\gamma + 1}{2} - \delta M_k^{*2}}, \quad (13.34)$$

per $k = 1$ e 2 , dalla conoscenza del numero di Mach critico seguono poi tutte le altre quantità:

$$\rho_k = \frac{m}{a^*} \frac{1}{M_k^*}, \quad u_k = a^* M_k^*, \quad p_k = m(U - a^* M_k^*), \quad h_k = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} - M_k^{*2} \right), \quad (13.35)$$

sempre per $k = 1$ e 2 . Dalla seconda relazione di salto, dividendo per m (pensata come $\rho_1 u_1$ al primo membro e come $\rho_2 u_2$ al secondo) ed utilizzando la definizione di velocità del suono $a^2 = \gamma p / \rho$ per un gas perfetto:

$$u_1 \left(1 + \frac{1}{\gamma M_1^2} \right) = u_2 \left(1 + \frac{1}{\gamma M_2^2} \right),$$

dividendo per a^* e sostituendo le relazioni (13.34) otteniamo:

$$M_1^* + \frac{1}{M_1^*} = M_2^* + \frac{1}{M_2^*},$$

la quale ammette la soluzione banale $M_1^* = M_2^*$ e la soluzione $M_1^* = 1/M_2^*$. Ma se si accetta la soluzione banale, dalle relazioni (13.35) segue che le condizioni a monte sono uguali alle condizioni a valle, violando la richiesta (13.29). Ne segue che deve essere vera l’altra soluzione, ovvero:

$$M_1^* M_2^* = 1, \quad (13.36)$$

nota come *condizione di Prandtl*. Essendo $u_1 > u_2$ per ipotesi (13.29), allora una prima conseguenza della (13.36) è che il flusso a monte deve essere supersonico e quello a valle subsonico. Inoltre, ricavando, ad esempio, il numero di

Mach critico a valle in funzione di quello a monte, si ottengono tutte le grandezze a valle (M_2 , ρ_2 , u_2 , p_2 ed h_2) in funzione di M_1 e delle corrispondenti grandezze a monte (ρ_1 , u_1 , p_1 ed h_1):

$$\begin{aligned} M_2^2 &= \frac{\delta M_1^2 + 1}{\gamma M_1^2 - \delta} \\ \frac{\rho_2}{\rho_1} &= \frac{u_1}{u_2} = \frac{\delta' M_1^2}{\delta M_1^2 + 1} \\ \frac{p_2}{p_1} &= \frac{1}{\delta'} (\gamma M_1^2 - \delta) \\ \frac{h_2 - h_1}{h_1} &= \frac{\delta}{\delta'^2} \frac{\gamma M_1^2 + 1}{M_1^2} (M_1^2 - 1), \end{aligned} \quad (13.37)$$

in cui sono state utilizzate le notazioni $\delta = (\gamma - 1)/2$, $\delta' = (\gamma + 1)/2$ e la relazione:

$$\frac{a^{*2}}{a_1^2} = \frac{2}{\gamma + 1} (1 + \delta M_1^2).$$

La variazione di entropia attraverso l'urto si scrive ricordando la forma più generale del Secondo Princípio della Termodinamica:

$$de = c_v dT = T ds - p d\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

da cui, utilizzando l'equazione di stato dei gas perfetti e la definizione di c_v e c_p , segue:

$$d\frac{s}{c_v} + \gamma \frac{dp}{\rho} - \frac{dp}{p} = 0.$$

Integrando la relazione precedente otteniamo:

$$\frac{p}{c_v^\gamma} e^{-s/c_v} \equiv \text{costante}. \quad (13.38)$$

Utilizzando questa equazione e le relazioni (13.37) possiamo scrivere la relazione desiderata per il salto di entropia:

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{s_2 - s_1}{c_v}\right) &= \frac{p_2}{p_1} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{-\gamma} \\ &= \frac{(\gamma M_1^2 - \delta)(\delta M_1^2 + 1)^\gamma}{\delta'^{1+\gamma} M_1^{2\gamma}}. \end{aligned} \quad (13.39)$$

- ◊ **Esercizio:** Posto $m = M_1^2 - 1$, mostrare che per $m \ll 1$ valgono i seguenti sviluppi di McLaurin:

$$\begin{aligned} M_2^2 &\simeq 1 - m \\ \rho_2/\rho_1 &\simeq 1 + m/\delta' \\ u_2/u_1 &\simeq 1 - m/\delta' \\ p_2/p_1 &= 1 + \gamma m/\delta' \\ (h_2 - h_1)/h_1 &\simeq 2 \delta m/\delta' \\ \exp[(s_2 - s_1)/c_v] &\simeq 1 + \gamma \delta m^3/(3\delta'^2) . \end{aligned} \quad (13.40)$$

13.4.2 Soluzione di Becker

Dall'espressione del rapporto delle velocità u_2/u_1 in funzione del numero di Mach a monte dell'urto (13.37) si ricava $1/M_1^2 = (\gamma+1)/2 u_2/u_1 - \delta$ e quindi:

$$\begin{aligned} U &= u_1 + \frac{p_1}{\rho_1 u_1} = u_1 \left(1 + \frac{1}{\gamma m_1^2} \right) = u_1 \left(1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{u_2}{u_1} - \frac{\gamma-1}{2\gamma} \right) = \\ &= \frac{\gamma+1}{2\gamma} u_1 \left(\frac{u_2}{u_1} + 1 \right) = \frac{\gamma+1}{2\gamma} (u_1 + u_2) , \\ \mathcal{H} &= h_1 + \frac{u_1^2}{2} = \frac{a_1^2}{\gamma-1} + \frac{u_1^2}{2} = u_1^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{(\gamma-1)M_1^2} \right] = \\ &= u_1^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} \frac{u_2}{u_1} - \frac{1}{2} \right] = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} u_1 u_2 . \end{aligned} \quad (13.41)$$

La soluzione viene ottenuta effettuando il cambiamento di variabili:

$$x \rightarrow \xi(x) := Pr \ m \int_0^x \frac{ds}{\mu(s)} , \quad \frac{d}{dx} = \frac{d\xi}{dx} \frac{d}{d\xi} = Pr \ \frac{m}{\mu} \frac{d}{d\xi} \quad (13.42)$$

con la quale le equazioni (13.31, 13.32) divengono (utilizzando la relazione $\lambda + 2/3 \mu = 0$):

$$\begin{aligned} mu + p - \frac{4}{3} Pr \ m \frac{du}{d\xi} &= mU \\ H - \frac{4}{3} Pr \ u \frac{du}{d\xi} - c_p \frac{dT}{d\xi} &= \mathcal{H} , \end{aligned}$$

in cui è stata utilizzata la definizione di $Pr = \mu/(k/c_p)$. Per $Pr = 3/4$ queste si semplificano nelle:

$$mu + p - m \frac{du}{d\xi} = mU \quad (13.43)$$

$$H - \frac{dH}{d\xi} = \mathcal{H} , \quad (13.44)$$

di cui l'ultima ha soluzione:

$$H = Ae^\xi + \mathcal{H} ,$$

ma, poiché il limite per $\xi \rightarrow +\infty$ di H deve essere \mathcal{H} , ne segue che $A = 0$ ed H è identicamente costante anche *all'interno dell'urto*, dove gli effetti della viscosità e della conducibilità termica non sono trascurabili.

Nota H utilizzando l'equazione di stato (gas perfetto) è possibile esprimere la pressione in termini della sola velocità u :

$$h = c_p T = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{pu}{m} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{\gamma - 1}{\gamma} m \frac{\mathcal{H} - \frac{u^2}{2}}{u} ,$$

che, sostituita nella (13.43) fornisce:

$$\begin{aligned} u \frac{du}{d\xi} &= u(u - U) + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left(\mathcal{H} - \frac{u^2}{2} \right) \\ &= u \left[u - \frac{\gamma + 1}{2\gamma} (u_1 + u_2) \right] + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left[\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} u_1 u_2 - \frac{u^2}{2} \right] \\ &= \frac{\gamma + 1}{2\gamma} [u^2 - (u_1 + u_2)u + u_1 u_2] \\ &= \frac{\gamma + 1}{2\gamma} (u - u_1)(u - u_2) < 0 , \end{aligned} \quad (13.45)$$

in cui sono state utilizzate le espressioni (13.41) per U ed \mathcal{H} . Dalla trasformazione (13.42) segue allora che anche u' è negativa. La (13.45) può essere integrata per separazione di variabili:

$$\frac{u}{(u - u_1)(u - u_2)} du = \frac{\gamma + 1}{2\gamma} d\xi$$

ovvero, decomponendo in frazioni semplici il primo membro:

$$\left(\frac{u}{u - u_1} - \frac{u}{u - u_2} \right) du \equiv \left(\frac{u_1}{u - u_1} - \frac{u_2}{u - u_2} \right) du = \frac{\gamma + 1}{2\gamma} (u_1 - u_2) d\xi .$$

Ne segue, utilizzando per semplicità la notazione $r = \sqrt{u_2/u_1} < 1$, la relazione differenziale:

$$\frac{1}{r} \frac{1}{1 - \frac{u}{u_1}} d \left(-\frac{u}{u_1} \right) - r \frac{1}{\frac{u}{u_2} - 1} d \left(\frac{u}{u_2} \right) = \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \left(\frac{1}{r} - r \right) d\xi ,$$

che fornisce, integrando in modo indefinito, la relazione seguente:

$$\frac{1}{r} \log \left(1 - \frac{u}{u_1} \right) - r \log \left(\frac{u}{u_2} - 1 \right) = \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \left(\frac{1}{r} - r \right) \xi + \underbrace{\text{cost.}}_{= \log A}$$

e, facendo l'esponenziale di ambo i membri, otteniamo infine:

$$\frac{\left(1 - \frac{u}{u_1}\right)^{1/r}}{\left(\frac{u}{u_2} - 1\right)^r} = A e^{\frac{\delta'}{\gamma} \left(\frac{1}{r} - r\right) \xi}.$$

La costante A si può scegliere *in modo che* $\xi = 0$ *corrisponda al punto sonico*, ovvero (13.36) $u(0)^2 = a(0)^2 = u_1 u_2$, da cui segue la soluzione di Becker:

$$\frac{\left(1 - \frac{u}{u_1}\right)^{1/r}}{\left(\frac{u}{u_2} - 1\right)^r} = \frac{(1-r)^{1/r}}{\left(\frac{1}{r} - 1\right)^r} \exp \left[\frac{3}{4} \frac{\delta'}{\gamma} \left(\frac{1}{r} - r \right) m \int_0^x \frac{ds}{\mu(s)} \right]$$

(13.46)

Una importante proprietà di questa soluzione consiste nel fatto che essa descrive la transizione dalle condizioni a monte e quelle a valle in una regione di spessore dell'ordine di μ/m , ovvero, considerando che $\mu = o(ml)$, dell'ordine del libero cammino medio l . Inoltre la convergenza ai valori u_1 per $x \rightarrow -\infty$ ed u_2 per $x \rightarrow +\infty$ è esponenziale e nel punto sonico ($x = 0$) la curva ha un flesso, come si verifica derivando la (13.45):

$$\frac{du}{d\xi} \Big|_{x=0} = 2 \frac{\delta'}{\gamma} \left(\sqrt{u_1 u_2} - \frac{u_1 + u_2}{2} \right), \quad \frac{d^2 u}{d\xi^2} = \frac{\delta'}{\gamma} \left(1 - \frac{u_1 u_2}{u^2} \right).$$

Se μ è costante, si può convenzionalmente definire lo *spessore dell'urto* Δ come differenza tra l'ascissa in cui la tangente nel flesso interseca la retta $u = u_2$ e l'ascissa in cui la stessa retta interseca la $u = u_1$, si trova allora:

$$Re_\Delta = \frac{m\Delta}{\mu} = \frac{4}{3} \frac{\gamma}{\delta'} \frac{1+r}{1-r} = \frac{4}{3} \frac{\gamma}{\delta'} \frac{\sqrt{\delta'} M_1 + \sqrt{1+\delta} M_1^2}{\sqrt{\delta'} M_1 - \sqrt{1+\delta} M_1^2}, \quad (13.47)$$

quindi lo spessore adimensionale $m\Delta/\mu$ dipende solo dal numero di Mach a monte dell'urto.

Alcuni dettagli tecnici necessari al calcolo numerico della soluzione di Becker (13.46) sono illustrati nel paragrafo 13.4.3. Tale calcolo è basato sulle osservazioni seguenti. In primo luogo è opportuno adimensionalizzare densità, velocità, pressione ed entalpia assumendo le quantità di riferimento m/U per le densità, U per le velocità, mU per le pressioni ed U^2 per le entalpie specifiche. Per quanto riguarda le ascisse x , occorre osservare che non si riesce a definire una scala delle lunghezze con le quantità precedentemente introdotte. *Soltanto utilizzando il coefficiente di viscosità* μ *possiamo definire una ascissa adimensionale, sotto forma di un numero di Reynolds locale:*

$$Re_x = m \int_0^x \frac{ds}{\mu(s)}. \quad (13.48)$$

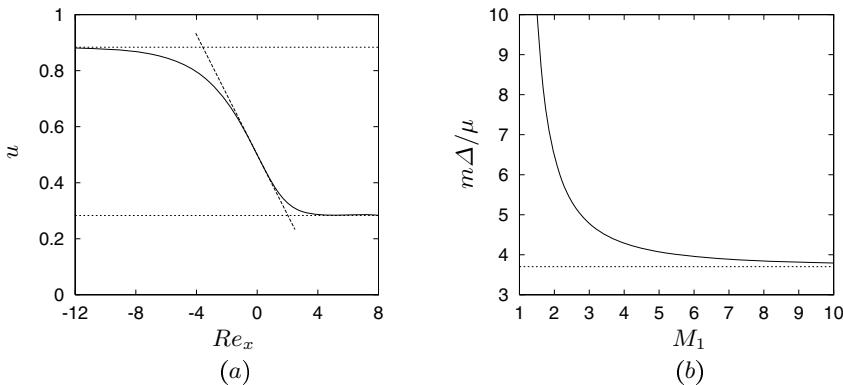


Figura 13.6. In (a) è diagrammata la velocità u (13.46) in funzione della ascissa adimensionale $Re_x = mx/\mu$. Con linee tratteggiate sono stati indicati i due valori asintotici a monte (u_1) ed a valle (u_2). La tangente nell'origine alla curva u è disegnata con una linea a tratti, per illustrare la definizione di spessore Δ dell'urto. L'andamento dello spessore Δ dell'urto (13.47) (adimensionizzato come Re_Δ) in funzione del numero di Mach a monte M_1 è disegnato in (b). Con una linea tratteggiata è rappresentato il valore asintotico $Re_\Delta = 4\gamma(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1})/(3\delta')$. Sono stati assunti i valori $\gamma = 7/5$ e $\mathcal{H} = 3/4$, corrispondenti a $M_1 \simeq 2.331$.

Per μ costante, la funzione $u = u(x)$, definita implicitamente nell'equazione (13.46), è diagrammata in Fig. 13.6-a in funzione del numero di Reynolds locale $Re_x = mx/\mu$ (13.48). Lo spessore adimensionale dell'urto Re_Δ (13.47) è diagrammato in Fig. 13.6-b in funzione del numero di Mach a monte. Si osserva che lo spessore adimensionale Re_Δ tende ad un limite finito e diverso da zero per $M_1 \rightarrow +\infty$. I corrispondenti andamenti, sempre in funzione della ascissa adimensionale Re_x , per i campi di densità, pressione ed entalpia sono riportati nelle Figg. 13.7-a, 13.7-b e 13.8-a.

Utilizzando la costanza di H si può ricavare la velocità del suono a in funzione della velocità: $h = a^2/(\gamma - 1) = H - u^2/2$, si ottiene allora:

$$a' = -\frac{\gamma - 1}{2a} uu'$$

e quindi si ottiene la derivata del numero di Mach locale:

$$M' = \frac{u'}{a} - \frac{u}{a^2} a' = (1 + \delta M^2) M \frac{u'}{u} < 0 ,$$

che dimostra come il numero di Mach sia *strettamente decrescente* attraverso l'urto. Il secondo Principio della Termodinamica si può scrivere:

$$Tds = dh - \frac{dp}{\rho} \quad \Rightarrow \quad ds = c_p \frac{dh}{h} - R \frac{dp}{p} , \quad (13.49)$$

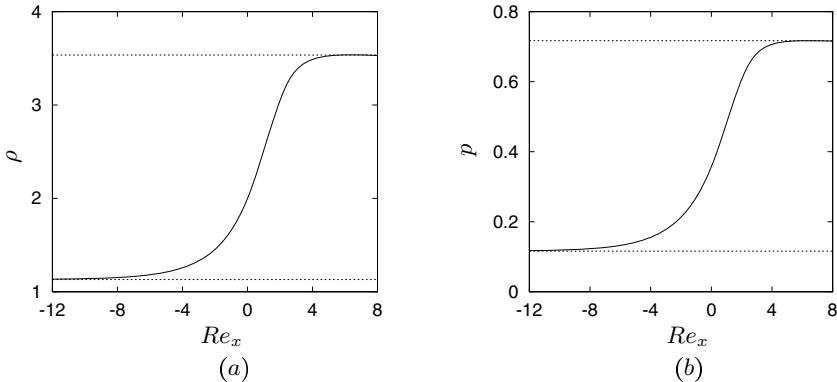


Figura 13.7. Per gli stessi valori di γ ed H assunti in Fig. 13.6, in (a) è diagrammata la densità ρ ed in (b) la pressione p in funzione dell'ascissa adimensionale Re_x . Con linee tratteggiate sono rappresentati i valori asintotici a monte (ρ_1 , p_1) ed a valle (ρ_2 , p_2).

considerato che:

$$\frac{p'}{p} = - \frac{H + \frac{u^2}{2}}{H - \frac{u^2}{2}} \frac{u'}{u}, \quad \frac{h'}{h} = - \frac{uu'}{H - \frac{u^2}{2}}$$

dalla (13.49) segue:

$$\begin{aligned}
s' &= c_p \frac{-uu'}{H - \frac{u^2}{2}} + R \frac{H + \frac{u^2}{2}}{H - \frac{u^2}{2}} \frac{u'}{u} \\
&= \frac{R}{H - \frac{u^2}{2}} \frac{u'}{u} \left(-\frac{\gamma}{\gamma-1} u^2 + h + u^2 \right) \\
&= \frac{R}{H - \frac{u^2}{2}} \frac{u'}{u} \left(\frac{a^2}{\gamma-1} - \frac{u^2}{\gamma-1} \right) \\
&= \frac{R}{\frac{a^2}{\gamma-1}} \frac{1}{\gamma-1} \frac{u'}{u} a^2 (1 - M^2) \\
&= R (M^2 - 1) \left(-\frac{u'}{u} \right)
\end{aligned} \tag{13.50}$$

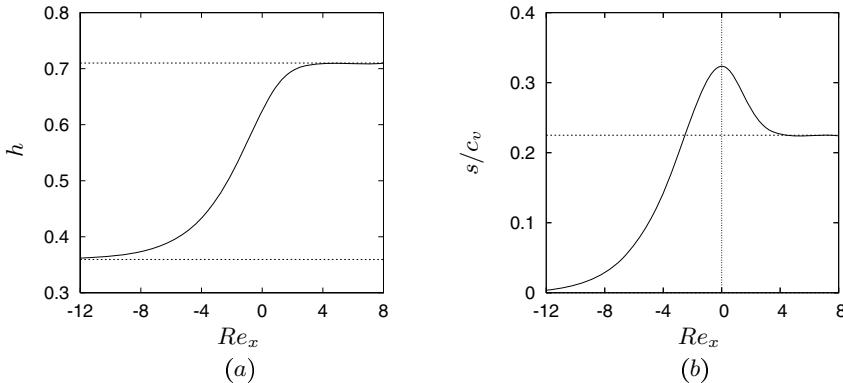


Figura 13.8. Per gli stessi valori di γ ed \mathcal{H} assunti in Fig. 13.6, in (a) è dia-grammata l'entalpia specifica h ed in (b) il rapporto s/c_v in funzione dell'ascissa adimensionale Re_x . Con linee tratteggiate sono rappresentati i valori asintotici a monte (h_1 , s_1 è assunto nullo) ed a valle (h_2 , s_2/c_v).

che è positiva per $x < 0$, nulla in $x = 0$ e negativa per $x > 0$. Ne segue che *l'entropia ha un massimo nel punto sonico* (in $x = 0$, dove si ha $u = \sqrt{u_1 u_2} = a$), dopo il quale decresce al valore s_2 nello stato 2.

13.4.3 Calcolo numerico della soluzione di Becker

Calcoliamo effettivamente la funzione $u(x)$, soluzione dell'equazione implicita (13.46), per valori assegnati delle costanti m , U ed \mathcal{H} e con un coefficiente di viscosità μ costante. Vedremo subito che i valori di U ed \mathcal{H} devono essere assegnati rispettando delle condizioni conseguenti al significato fisico della soluzione. Innanzitutto, assegnata $\gamma > 1$, i valori di U ed \mathcal{H} determinano, per il tramite delle relazioni (13.41), le due velocità u_1 ed u_2 . Occorre osservare, però, che è necessario richiedere che sia verificata la condizione:

$$\mathcal{H} < U^2/(2\nu) \quad \text{con: } \nu = 1 - 1/\gamma^2 \in (0, 1) . \quad (13.51)$$

In tal caso le due velocità sono date dalle relazioni seguenti:

$$u_{1,2} = \frac{\gamma}{\gamma + 1} \left(U \pm \sqrt{U^2 - 2\nu\mathcal{H}} \right) , \quad (13.52)$$

da cui seguono poi tutte le altre quantità asintotiche: $\rho_{1,2} = m/u_{1,2}$, $p_{1,2} = m(U - u_{1,2})$ ed $h_{1,2} = \mathcal{H} - u_{1,2}^2/2$. Ma allora devono anche essere verificate le condizioni di positività di p_1 ed h_1 (che includono le analoghe condizioni per p_2 ed h_2). La positività di p_1 si traduce nella nuova condizione:

$$\mathcal{H} > U^2/2 , \quad (13.53)$$

mentre invece la condizione di positività di h_1 implica il nuovo vincolo:

$$\mathcal{H} > U^2/(4\nu) . \quad (13.54)$$

Se γ è minore di $\sqrt{2}$, ma ovviamente maggiore di 1, il vincolo (13.54) è più stringente della condizione (13.53), mentre se γ è maggiore di $\sqrt{2}$ accade il viceversa.

Partendo dalla forma implicita (13.46) e posto:

$$\beta = \frac{3}{8} \frac{\gamma + 1}{\gamma} \left(\frac{1}{r} - r \right) \frac{m}{\mu}, \quad \chi(x) = \frac{(1-r)^{1/r}}{\left(\frac{1}{r} - 1 \right)^r} e^{\beta x}, \quad (13.55)$$

conviene riscrivere tale forma nel modo seguente:

$$f(u; x) = \left(1 - \frac{u}{u_1} \right)^{1/r} - \chi(x) \left(\frac{u}{u_2} - 1 \right)^r = 0 . \quad (13.56)$$

L'equazione (13.56) mostra come, assegnato x , la soluzione $u(x)$ possa essere calcolata con un metodo di Newton applicato all'equazione trascendente in u : $f(u; x) = 0$. Conviene calcolare la soluzione a partire dal punto sonico $x = 0$ verso monte, utilizzando come valore di u di primo tentativo per l'algoritmo di Newton nel primo punto ($x = 0$) il valor medio $(u_1 + u_2)/2$ e come valori di primo tentativo nei punti seguenti il valore di u ottenuto nel punto x precedente. Analogamente si effettua il calcolo della soluzione a partire dal punto sonico verso l'infinito a valle. Si può procedere in x fintantoché le quantità $1 - u(x)/u_1$ nel primo intervallo e $u(x)/u_2 - 1$ nel secondo non hanno raggiunto un valore piccolo fissato (10^{-3} nelle figure precedenti).

Per quello che riguarda il calcolo dell'entropia, la relazione (13.50) fornisce la sua derivata (s') in x . Occorre quindi integrare numericamente, ad esempio con il metodo delle parabole, e valutare la derivata in x di u derivando in x primo e secondo membro della (13.46):

$$u' = -\beta\chi \frac{\left(\frac{u}{u_2} - 1 \right)^{r+1}}{\frac{1}{ru_1} \left(\frac{u}{u_2} - 1 \right) \left(1 - \frac{u}{u_1} \right)^{1/r-1} + \frac{r}{u_2} \left(1 - \frac{u}{u_1} \right)^{1/r}} .$$

13.5 Flussi quasi-monodimensionali

Analizzeremo il flusso di un fluido comprimibile non viscoso in condizioni omoentropiche stazionarie all'interno di un condotto, nell'ipotesi che l'area A della sezione vari debolmente con l'ascissa curvilinea x lungo il condotto. Quest'ultima ipotesi consente di considerare come rappresentative delle grandezze locali le corrispondenti grandezze mediate sulla sezione (che saranno indicate con gli stessi simboli, per semplicità): il flusso viene per questo chiamato

quasi-monodimensionale. In queste condizioni, tutte le quantità medie sono funzioni della sola ascissa curvilinea x .

Approssimando le grandezze locali con quelle medie ed indicando con u la componente assiale della velocità, l'equazione di continuità si riduce alla seguente:

$$\rho u A \equiv m, \quad (13.57)$$

essendo m la portata in massa attraverso il condotto. L'equazione della quantità di moto si scrive invece:

$$uu' + \frac{p'}{\rho} = uu' + \frac{\rho'}{\rho} a^2 = 0, \quad (13.58)$$

avendo indicato con l'apice la derivazione in x . Poiché dalla continuità (13.57) segue che $\rho'/\rho = -u'/u - A'/A$, sostituendo nell'equazione (13.58) abbiamo:

$$\frac{A'}{A} = (M^2 - 1) \frac{u'}{u}. \quad (13.59)$$

Questa relazione mostra che, in un condotto convergente ($A' < 0$), un flusso supersonico rallenta ($u' < 0$), mentre uno subsonico accelera ($u' > 0$). Essendo inoltre $p' = -\rho uu'$, sempre dalla (13.58), in un condotto convergente un flusso supersonico subisce una compressione, mentre uno subsonico espande. Il contrario avviene ovviamente in un condotto divergente. Peraltro, dall'equazione (13.59) segue pure che una eventuale transizione da subsonico a supersonico o viceversa (quest'ultima, però, non si riesce a realizzarla in modo omoentropico) può avvenire soltanto ad una ascissa a cui corrisponda un minimo (relativo) dell'area A . Una tale sezione si dice *di gola* (la sua area si indica con A_t). Se in un condotto convergente-divergente si realizza $M = 1$ nella sezione di gola, $M < 1$ a monte e $M > 1$ a valle (o al contrario $M > 1$ a monte e $M < 1$ a valle), allora la gola è detta *efficace* ed il flusso è in questa sezione in condizioni critiche.

Calcoliamo la portata per unità di area m/A che defluisce attraverso il condotto in funzione del numero di Mach:⁴

$$\frac{m}{A} = \rho u = \frac{p}{RT} Ma \propto M \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\delta'/(2\delta)} = M(1 + \delta M^2)^{-\delta'/(2\delta)}, \quad (13.60)$$

dove la costante di proporzionalità (dimensionale: $\sqrt{R/\gamma p_0/T_0^{1/2}}$) dipende dalle sole condizioni di ristagno. Si può osservare nella equazione (13.60) che $m/A \rightarrow 0$ sia per $M \rightarrow 0$, che per $M \rightarrow +\infty$: m/A è massima in corrispondenza del Mach unitario, come si verifica derivando in M . Poiché l'equazione (13.59) mostra che tale condizione si può raggiungere solo in corrispondenza della sezione di gola, la massima portata smaltibile da un condotto a sezione variabile è quindi quella per la quale gola è efficace ($m_{(\max)} = \rho_* a_* A_t$): questa condizione si dice di *soffocamento* (o *choking*).

⁴ Dall'equazione dell'energia (13.27) abbiamo: $(a/a_0)^2 = T/T_0 = (1 + \delta M^2)^{-1}$ e dalla relazione $p/\rho^\gamma \equiv$ costante, come segue dall'ipotesi di flusso omoentropico, deduciamo: $p/p_0 = (T/T_0)^{\gamma/(2\delta)}$.

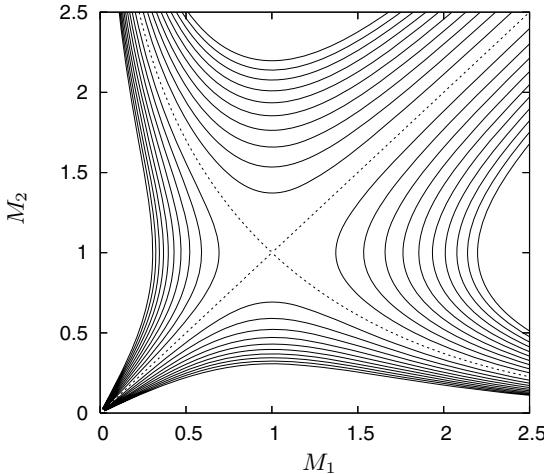


Figura 13.9. Soluzione (numerica) dell’equazione (13.61) per $A_2 = A_1$ (curve tratteggiate) e per $A_2/A_1 = 1.2, 1.4, \dots, 2$ (curve continue, al di sotto ed al di sopra delle curve tratteggiate: $A_2/A_1 = 1.2$ sulla più vicina e $A_2/A_1 = 2$ sulla più lontana alle curve tratteggiate) e per i valori reciproci (curve continue, a sinistra ed a destra delle curve tratteggiate).

Consideriamo ora un condotto propulsivo convergente-divergente. Noto M_1 in una certa stazione x_1 del condotto, in corrispondenza della quale $A = A_1$, vogliamo conoscere il numero di Mach in corrispondenza di un’altra stazione x_2 , nella quale $A = A_2$. Scrivendo la (13.60) nelle due sezioni e facendo il rapporto membro a membro otteniamo la *legge delle aree*:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{1 + \delta M_2^2}{1 + \delta M_1^2} \right)^{\delta'/(2\delta)}. \quad (13.61)$$

Alcune soluzioni dell’equazione (13.61) sono disegnate in Fig. 13.9 per fissati valori del rapporto A_2/A_1 . Se si ha transizione da M_1 subsonico a M_2 supersonico (o viceversa), tra le sezioni A_1 ed A_2 è presente una gola efficace. Mentre se ciò non accade, l’eventuale gola non è efficace.

Infine, per spiegare perché, avendo fissato A_2/A_1 ad un valore minore di 1, esiste un intervallo di valori del numero di Mach M_1 nel quale non troviamo soluzione, conviene fare il ragionamento seguente. Fissiamo la portata m che fluisce attraverso il condotto, la sezione A_1 ed il numero di Mach M_1 . Partendo da $A_2 = A_1$, riduciamo gradualmente A_2 . Essendo m fissata, il rapporto m/A_2 (13.60) cresce fino a raggiungere il valore massimo assoluto per $M_2 = 1$: la sezione 2 diviene allora una gola efficace ($A_2 = A_2^*$). In questo modo ci spostiamo gradualmente su curve sempre più a sinistra, se $M_1 < 1$, o a destra, se $M_1 > 1$, di quelle tratteggiate in Fig. 13.9, fino a raggiungere la curva che

diviene tangente alla retta verticale passante per il valore fissato M_1 . Non essendo possibile una ulteriore riduzione di A_2 , non troviamo più soluzioni al di sotto del valore $A_2 = A_2^*$.

13.6 Curiosando in biblioteca

Dovendo introdurre il Lettore alla Letteratura sui flussi comprimibili, consigliamo, per il rigore formale e la sintesi, la consultazione del testo di Meyer [24], che riserva all’analisi di tali flussi il sesto ed ultimo capitolo. Il primo paragrafo richiama alcuni concetti fondamentali, quali l’equazione di stato di un gas perfetto e la velocità del suono, e descrive (§34) l’approssimazione acustica, spesso utilizzata per spiegare alcuni effetti della comprimibilità nell’instaurarsi impulsivo di un flusso. In appendice, segue poi una descrizione del flusso ad onda semplice monodimensionale. Il paragrafo successivo è dedicato all’equazione dell’energia, per poi passare (§36) all’analisi del flusso monodimensionale stazionario, introducendo il concetto le relazioni di salto. Sottolineiamo che, a p. 163 (problemi 36.2 e 36.3), vengono date le definizioni di urto *forte* e *debole*. Nel §37, l’Autore presenta la soluzione di Becker per la struttura dell’urto. Il capitolo si chiude (§38) con la scrittura del sistema differenziale delle equazioni del moto nel caso comprimibile. Anche il libro di Chorin [6] riserva l’ultimo capitolo (il terzo) ad una panoramica sui flussi comprimibili (monodimensionali). Definita la velocità del suono nel §3.1, si affronta il problema del flusso ad una famiglia indotto dal moto di un pistone in un cilindro, introducendo la formazione dell’urto come singolarità della soluzione. Viene quindi discusso il concetto di *soluzione debole* (§3.2) e dedotte le relazioni di salto.

Un altro testo di interesse è quello di Sabetta [30], nel quale gli argomenti del presente capitolo sono trattati in maniera più ampia. Nel primo capitolo vengono richiamate alcune relazioni termodinamiche, definiti la velocità del suono ed il numero di Mach ed esaminate qualitativamente le differenze tra flussi subsonici e supersonici. Viene inoltre descritto qualitativamente il processo di formazione di un urto. Nel cap. 2 sono scritte le equazioni di bilancio e dedotte le relazioni di salto, specializzate per un urto normale. È interessante leggere nel §2.8 la valutazione dello spessore dell’urto. Il cap. 3 è dedicato ai flussi quasimonodimensionali, con una analisi del funzionamento degli ugelli propulsivi e delle prese d’aria. Il cap. 4 contiene una soddisfacente presentazione della teoria delle caratteristiche, mentre nel capitolo successivo troviamo lo studio dei flussi ad onda semplice monodimensionali, partendo dal caso linearizzato (§5.1) ed estendendo successivamente l’analisi al problema non-lineare (§5.3). Il testo di Landau e Lifschitz [20] riserva alcuni capitoli allo studio dei flussi comprimibili. In particolare il cap. 9 si apre con la definizione di numero di Mach, ottenuta dall’analisi del disturbo prodotto da un ostacolo puntiforme interno al campo di moto. Nel §83 sono derivate alcune relazioni fondamentali, nel caso di flusso stazionario, mentre le relazioni di salto sono

illustrate nel successivo §84, dove è anche introdotto il concetto di urto. Il flusso monodimensionale non stazionario ad una famiglia è discusso nelle pp. 103-104.

Nel §4.3 del libro [39] viene dedotta (p. 85), con un bilancio di quantità di moto in un volume elementare, l'espressione generale della velocità del suono, specificata poi per un gas perfetto. La definizione di numero di Mach è interpretata geometricamente nel §4.4 analizzando il disturbo prodotto in un flusso stazionario da un ostacolo puntiforme. Nelle pp. 92-94 sono dedotte le relazioni isentropiche tra le grandezze termodinamiche e le corrispondenti di ristagno, sempre per un gas perfetto. Nel cap. 5 vengono poi trattati i flussi omoentropici in condotti di sezione variabile. La legge delle aree viene scritta nel §5.6 (p. 118) ed alcune nozioni di particolare interesse ingegneristico circa le prestazioni dei condotti convergenti-divergenti sono illustrate nei §5.8 e 5.9. Le relazioni di salto vengono dedotte nel cap. 6 per un'onda d'urto normale e nel capitolo successivo per onde d'urto oblique. Uno dei testi specialistici in materia è senz'altro quello di Zucrow [40], nel quale (pp. 125-128) troviamo la definizione di velocità del suono e (pp. 128-130) del cono di Mach (disturbo generato da un corpo puntiforme viaggiante a velocità supersonica all'interno di un fluido). Nelle pp. 134-138 si trovano le deduzioni dei legami isoentropici tra le grandezze termodinamiche e le corrispondenti in condizioni di ristagno, per un gas perfetto. Successivamente vengono definiti la velocità del suono critica (p. 140) ed il numero di Mach critico (p. 143). Il cap. 13 è dedicato allo studio dei flussi omoentropici 1D col metodo delle caratteristiche, in particolare sono analizzate (pp. 643-650) le interazioni tra onde d'espansione.

Infine, notiamo che i testi di Kundu [17] e di White [37] focalizzano l'analisi sui flussi all'interno di condotti, rispettivamente nei capitoli 16 e 9.

Riferimenti bibliografici

1. Acheson, D.J.: *Elementary Fluid Dynamics*. Oxford University Press (1990)
2. Bassanini, P., Elcrat A.R.: *Theory and applications of Partial differential Equations*. Plenum Press (1998)
3. Batchelor, G.K.: *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge Univ. Press (2000)
4. Batchelor, G.K.: *The theory of homogeneous turbulence*. Cambridge Univ. Press (1993)
5. Chorin, A.: *Vorticity and turbulence*. Springer-Verlag (1994)
6. Chorin, A.J., Marsden, J.E.: *A mathematical introduction to Fluid Dynamics*, Third Edition. Springer-Verlag (1993)
7. Chung, T.J.: *Computational Fluid Dynamics*. Cambridge University Press (2002)
8. Ferziger, J.H., Perić, M.: *Computational Methods for Fluid Dynamics*, Third Edition. Springer-Verlag (2002)
9. Fiorenza, R., Greco, D.: *Lezioni di analisi matematica*, vol. II. Liguori Editore (1993)
10. Frisch, U.: *Turbulence, the legacy of A. N. Kolomogorov*. Cambridge University Press (1995)
11. Garabedian, P.R.: *Partial differential equations*. Chelsea Publishing Company (1986)
12. Gerhart, P.M., Gross, R.J., Hochstein, J.I.: *Fundamentals of Fluid Mechanics*, Second edition. Addison-Wesley Publishing Company (1993)
13. Hinze, J.O.: *Turbulence*, Second Edition. Mc Graw Hill (1975)
14. Holmes, P., Lumley, J.L., Berkooz, G.: *Turbulence, Coherent structures, Dynamical Systems and Symmetry*. Cambridge University Press (1996)
15. Kantorovic, L.V., Akilov, G.P.: *Analisi Funzionale*. Editori Riuniti (1980)
16. Kolmogorov, A.N., Fomin, S.V.: *Elementi di teoria delle funzioni e di analisi funzionale*. Editori Riuniti (1980)
17. Kundu, P.K., Cohen I.M.: *Fluid Mechanics*, Second Edition. Academic Press (2002)
18. Ladyzenskaya, O.A.: *The mathematical theory of viscous incompressible flow*. Gordon and Breach Science Publishers (1969)
19. Lamb, H.: *Hydrodynamics*, Sixth Edition. Dover Publications (1945)

20. Landau, L.D., Lifshitz, E.M.: 1987 *Fluid mechanics*, VI vol. of “Course of Theoretical Physics”. Pergamon Press (1987)
21. Libby, P.A.: *Introduction to Turbulence*. Taylor & Francis (1996)
22. Liggett, J.A.: *Fluid Mechanics*. Mc Graw-Hill, Inc. (1994)
23. Mathieu, J., Scott J.: *An introduction to turbulent flow*. Cambridge Univ. Press (2000)
24. Meyer, R.E.: *Introduction to mathematical fluid dynamics*. Dover Publications (1971)
25. Milne-Thomson, L.M.: *Theoretical Aerodynamics*. Dover Publication (1958)
26. Nakayama, Y., Boucher, R.F.: *Introduction to Fluid Mechanics*. Butterworth-Heinemann (1999)
27. Papanastasiou, T.C., Georgiou, G.C., Alexandorou, A.N.: *Viscous fluid flow*. CRC Press (2000)
28. Quarteroni, A.: *Modellistica numerica per problemi differenziali*, Seconda edizione. Springer-Verlag Italia (2003)
29. Riccardi, G., Denaro, F.M.: *Una Introduzione alla Turbolenza: Fenomenologia, Analisi e Simulazione Numerica*. In preparazione
30. Sabetta, F.: *Gasdinamica*. Edizioni Ingegneria 2000 (1999)
31. Saffman, P.G.: *Vortex Dynamics*. Cambridge University Press (1992)
32. Schlichting, H.: *Boundary-Layer Theory*, Seventh edition. Mc Graw Hill (1979)
33. Smirnov, V.I.: *Corso di matematica superiore*, volume III parte II. Editori Riuniti (1982)
34. Streeter, V.L., Wylie, E.B.: *Fluid Mechanics, First SI Metric Edition*. Mc Graw-Hill (1983)
35. Tennekes, H., Lumley, J.L.: *A first course in turbulence*. MIT Press (1972)
36. Warsi, Z.U.A.: *Fluid Dynamics, Theoretical and Computational Approaches*. CRC Press (1993)
37. White, F.M.: *Fluid Mechanics*, Fourth edition. Mc Graw Hill (2001)
38. Wilcox, D.C.: *Turbulence modeling for CFD*. DCW Industries (1994)
39. Zucker, R. D., Biblarz O.: *Fundamentals of Gas Dynamics*, Second Edition. John Wiley & Sons (2002)
40. Zucrow, M.J., Hoffman J.D.: *Gas Dynamics*, vol. 1. John Wiley & Sons (1976)

Indice analitico

a

accelerazione centripeta 72
di gravità 45
euleriana 21
forma di Lagrange 22, 77
lagrangiana 21
angoli di Eulero 245, 265
applicazione continua tra spazi
topologici 32
atto di moto di deformazione pura 18
locale 18, 49
rigido 18
autovalori del tensore velocità di
deformazione 18
autovettori del tensore velocità di
deformazione 18

b

barotropico, flusso 42
base di intorni aperti 32
basi duali 33
Becker, soluzione di 374
Birkhoff, problema di 105
Biot-Savart, legge di 83
 $2D$ 87, 101
 $3D$ 90
Biot-Savart, nucleo $2D$ di 86, 105
 $3D$ 90

c

cambiamento di base in uno spazio
vettoriale 33
campo di strain piano 27

Cauchy, parte principale dell'integrale
secondo 101, 109
tetraedro di 46
centro di vorticita 91
chiusura, operazione di 32
circolazione associata al tubo vorticoso
 81
 attorno ad una lacuna 20
coefficiente di conducibilità termica 58
 di viscosità 52
 cinematica 52
 turbolenta 300
coefficienti di correlazione longitudinale
 (f) e trasversale (g) 256
condizione di accoppiamento (matching)
 313
 di Loitsiansky 287
 di normalizzazione 212
 di soffocamento (choking) 386
condizioni asintotiche sulla velocità
 ($2D$) 85
 sulla funzione di corrente ($2D$) 85
 sulla velocità ($3D$) 88
 sul potenziale vettore ($3D$) 89
condizioni di Cauchy-Riemann 94
conseguenze della continuità su f e g
 256
 sulla correlazione doppia di velocità
 224
 sulla correlazione tripla di velocità
 261
 sulla trasformata di Fourier della
 velocità 290

- sul tensore spettro d'energia 226
- coordinate ellittiche 116
- correlazione 222
- curva 2
 - caratteristica 367
 - orientata 3
 - semplice 3
 - vorticosa 100
- d**
 - decomposizione di Helmholtz 88
 - densità 39
 - di circolazione 100
 - di probabilità 212
 - gaussiana 213
 - derivata materiale 22, 38, 40
 - desingolarizzazione del nucleo di Biot-Savart 106
 - determinante jacobiano del flusso 14, 92
 - del cambiamento di coordinate ellittiche 117
 - dinamica dei vortici puntiformi 98, 204
 - di una curva vorticosa 105
 - distribuzione di Dirac 83, 91, 101
 - DNS (Direct Numerical Simulation) 297
 - doppietta 94
- e**
 - energia cinetica media 299
 - turbolenta 299
 - energia interna 65
 - enstrosia 169
 - entalpia 65
 - totale 373
 - equazione di continuità 40, 366
 - in coordinate cilindriche 124
 - in coordinate sferiche 129
 - energia cinetica 56
 - energia interna 56
 - entalpia 58
 - entropia 58
 - momento della quantità di moto 49
 - quantità di moto 48
 - temperatura 60
- equazione di Bernoulli 53
 - Cauchy 81
 - Helmholtz 77, 80
 - Karman 336, 341
 - Karman-Howarth 280
- Lin 281
- equazione di evoluzione dello jacobiano 15
 - correlazione doppia di velocità 276
 - tensore spettro d'energia 278
- equazione di stato dei gas perfetti 362
- equazioni di Eulero 53, 366
 - Maxwell 65
- Navier-Stokes 53, 71, 77, 126, 276, 299
 - filtrate 305
 - in coordinate cilindriche 126
 - in coordinate sferiche 131
 - nello spazio dei numeri d'onda 291
- excess energy 99, 168
- f**
 - filtraggio 303
 - Implicito 307
 - filtro 299
 - fluido incomprimibile 40
 - flusso 2
 - a densità costante 42
 - barotropico 42
 - bidimensionale 2
 - isocoro 41
 - isotropo 6
 - laminare 206
 - omoentropico 366
 - omotermo 41
 - piano 2
 - quasi-monodimensionale 385
 - subsonico 366
 - supersonico 366
 - turbolento 206
 - flusso di Couette in un canale circolare 120
 - in un canale piano 120
 - di Poiseuille in un canale circolare 120
 - in un canale piano 120
 - di Stokes 127
- flusso termico h 54
 - a parete 353
- forma diagonale tensore velocità deformazione 18
- forma lineare 33
 - prodotto tensoriale 35

- f**
- forma isotropa della correlazione 247, 249
 - tensore correlazione doppia velocità 256
 - tensore correlazione vorticità 260
 - tensore correlazione tripla della velocità 262
 - tensore spettro d'energia 258
 - tensore trasformato di correlazione tripla di velocità 263
 - formule di Green 68, 96
 - forze di supericie 45
 - forze di volume 45
 - funzione argomento 93
 - principale 93
 - armonica 145
 - degli errori 213
 - di filtro 303
 - di corrente 42, 318, 323, 347
 - flusso 3D attorno alla sfera 131
 - di dissipazione 57
 - di Gibbs 65
 - di Green dell'operatore di Laplace 2D
 - 84, 85
 - 3D 88
 - di Helmholtz 65
 - lölderiana 109
 - random 219
 - spettro d'energia 228
- g**
- gola efficace 385
 - gradiente di velocità 17
 - grandezze estensive 65
 - intensive 65
 - gruppo 242
 - gruppo di spostamenti: riflessioni
 - attraverso un piano 243
 - rotazioni piane 243
 - rotazioni piane, traslazioni e riflessioni 244
 - rotazioni sferiche 245
 - rotazioni sferiche e riflessioni 245
- h**
- Helmholtz, funzione di 65
 - decomposizione di 88
 - equazione di 77, 80, 90
 - Howarth, equazione di Karman- 280
- i**
- insieme aperto 31
 - chiuso 32
 - integrale di convoluzione 84
 - in parte principale secondo Cauchy 101, 109
 - intervallo (range) inerziale 230
 - intorno aperto 32
 - di un punto su una curva 4
 - sferico 31
 - invarianti di Riemann 367
 - ipotesi geometriche sul flusso 2
 - di regolarità sul flusso 3
 - isomorfismo naturale tra spazi vettoriali 35
- j**
- jacobiano del flusso 14, 92
 - equazione di evoluzione 15
 - jacobiano del cambiamento di coordinate ellittiche 117
 - Joukowski, profilo di 179
 - trasformazione 181
- k**
- Karmen, equazione di 336, 341
 - Karmen-Howarth, equazione di 280
 - Kelvin, teorema di 82
 - Kolmogorov, lunghezza di 230, 258, 280, 297, 298
 - ipotesi di 230
 - Kutta, condizione di 155, 182
 - algoritmo d'integrazione di Runge-(II e IV ordine) 196
- l**
- legge delle aree 386
 - legge di gravitazione universale 69
 - legge di Biot-Savart 83
 - 2D 87, 101
 - 3D 90
 - LES (Large Eddy Simulation) 305
 - libero cammino medio 374
 - linea di corrente 8
 - di fumo 11
 - linea vorticosa 80
 - dei nodi 265
 - lunghezza di dissipazione 258, 280
 - di Kolmogorov 230, 258, 280, 297, 298

m

- Mach, numero di 364
- media d'insieme 218
 - in probabilità 216, 217
 - di Reynolds delle equazioni del moto 298
- misura del coefficiente di viscosità 121
- modello di turbolenza 299
 - di Smagorinsky 305
 - $k-\varepsilon$ 302
- momento del primo ordine della vorticità 96
 - del secondo ordine della vorticità 99
- moto piano 42

n

- nabla in coordinate cilindriche 73, 123
 - in coordinate sferiche 70, 128
 - ortogonale 43
- nucleo di Biot-Savart 2D 86, 105
 - 3D 90
 - di Dirichlet 236
- numero di Brinkman 349
 - di Mach 364
 - critico 374
 - di Nusselt 354
 - di Prandtl 345
 - di Reynolds 207
- numero d'onda 217, 228, 230, 231, 236

o

- omeomorfismo tra spazi vettoriali 33
- omogeneità statistica di una funzione random 222
 - di un campo vettoriale random 224
- operatore di Laplace in coordinate ellittiche 117
 - in coordinate cilindriche 125
 - in coordinate sferiche 129

p

- parte antisimmetrica del gradiente di velocità 17
- parte principale secondo Cauchy di un integrale 101, 109
- parte simmetrica del gradiente di velocità 17
- particella fluida 39
- portata volumetrica 7

potenziale di pressione 42

- complesso 94
 - di un flusso attorno ad un cerchio 114
 - di un flusso attorno ad un angolo diedro 115
 - di una doppietta 94
 - di una sorgente puntiforme 94
 - di un vortice puntiforme 94
- di velocità 19, 53, 88
 - condizioni per la monodromia 21
- vettore 88

prinzio di Archimede 68

- di invarianza 49

problema di Falkner-Skan 324

- di Blasius 321, 349
- di Birkhoff 105
- prodotto di convoluzione 237
- proprietà di tensorialità 253

r**R**ANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes) 300

- rappresentazione euleriana 5
 - integrale 146
 - lagrangiana 5

relazione costitutiva 49, 52

- di Stokes 52, 56
- di salto 375

resistenza di Stokes 135

- Reynolds, numero di 207
 - tensore degli sforzi 299
 - media di 298

Ricci, simbolo di 232

- Runge-Kutta, algoritmo d'integrazione (II e IV ordine) 196

s**s**cala delle grandi strutture 233

- dei tempi dissipativa 297

- di Kolmogorov 230, 258, 280, 298

- scale integrali (longitudinale e trasversale) 257

- spaziali, in turbolenza 209

- temporali, in turbolenza 209

seconda identità di Green 85, 89**s**erie di Fourier 235**s**ezione di gola 385**s**forno a parete 333

- simbolo di Ricci 232
 simmetria del tensore degli sforzi 49
 soluzione di Becker 374
 esterna 313, 323
 interna 313, 323
 simile 322
 sorgente puntiforme 7, 94
 sottostrato laminare 341
 spazio topologico 32
 bi-duale 35
 duale 33
 spazio prodotto tensoriale di due spazi vettoriali 35
 dei duali 35
 spessore di quantità di moto 334
 di scostamento 333
 strato di scorrimento 99
 strato esterno 343
 logaritmico 343
 strato limite 312
 termico 346
 turbolento 338
 struttura vorticosa coerente 208
 supporto di uno spazio topologico 32
- t**
 temperatura di ristagno 374
 tensore degli sforzi 47
 degli sforzi di Reynolds 299
 di correlazione doppia della vorticità 232
 di correlazione doppia di velocità 224
 doppio controvariante 35
 doppio covariante 35
 gradiente di velocità 17, 51
 isotropo I ordine 254
 isotropo II ordine 255
 spettro di energia 225
 vorticità 233
 trasformato del tensore di correlazione
 tripla di velocità 262
 unitario 51
 velocità di deformazione 17, 51
 vorticità 17, 51
 tensorialità 36, 253
 teorema del trasporto 38
- di Gauss 86, 89
 di Kelvin 82
 di Leibnitz 60
 di Schwarz 77, 88
 di Stokes 44, 81
 termine convettivo 22
 di stretching 78
 di trasferimento nell'equazione di evoluzione tensore spettro d'energia 279
 nell'equazione di Lin 282
 tetraedro di Cauchy 46
 topologia 32
 traccia del tensore velocità di deformazione 19
 traiettoria 6
 trasformata di Fourier 215, 236, 304
 inversa 238
 trasformazione conforme 151
 continua 2
 di Joukowski 181
 tubo di flusso 41
 vorticoso 81
- u**
 unitario, tensore 51
 urto 373
- v**
 valore principale di Cauchy 101, 109
 variabile random 212
 velocità del suono 363, 366
 di ristagno 374
 di dissipazione dell'energia cinetica
 media 230, 301
 dell'enstrofia 231
 euleriana 5
 lagrangiana 5
 limite per una sfera 135
 vettore degli sforzi 45
 flusso termico 55
 ortogonale 43
 viscosimetro 122
 volume materiale 14, 37, 39, 45, 48, 54
 vortice immagine 149
 puntiforme 91