

# Processat Morfològic d'imatges

## Menú

### 1. Imatges binàries

- Introducció
- Erosions i dilatacions
- Transformada de distància
- Opening i closing
- Dilatació condicional
- Reconstrucció
- Aplicacions
- Esquelets

## Introducció

- La morfologia és una eina matemàtica que ens permet treballar amb estructures espaials. L'objectiu és l'anàlisi de les formes dels objectes
- Sorgeix a finals dels 70 (*Ecole des mines. Paris*)
- Es popularitza a partir de la publicació de:

J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology*.  
Academic Press, 1982.

-Molt útil per a les aplicacions on la forma dels objectes és important.  
P ex: inspecció industrial, ocrs, geologia, imatges biològiques microscòpiques...

- L'enfoc clàssic del processat d'imatges és proper al càlcul matemàtic (concepte de funció imatge, operadors lineals ...)
- L'enfoc morfològic es basa en àlgebra no linial i treballa amb conjunts de punts, la seva forma i connectivitat.

## Estructures de base

### PROCESSAT LINIAL

Estructura bàsica: Espai Vectorial

Conjunt de vectors  $V$  i conjunt d'escalars  $K$  tals que:

- 1)  $V$  és un grup commutatiu
- 2)  $K$  és un cos
- 3) Existeix una llei de producte extern entre escalars i vectors

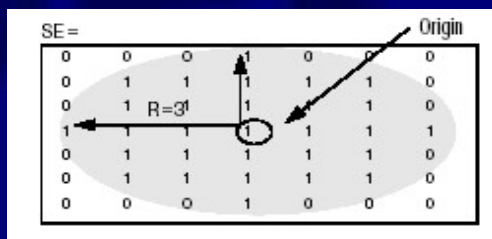
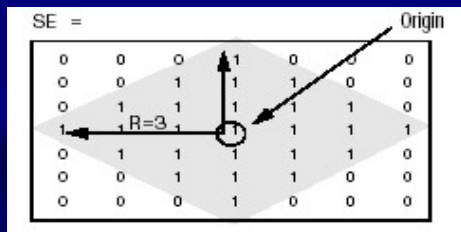
### MORFOLOGIA MATEMÀTICA

Estructura bàsica: Reticle (lattice)

Conjunt  $L$  tal que:

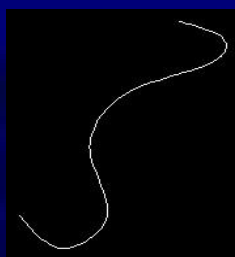
- 1)  $L$  està dotat d'un ordenament parcial, és a dir una relació  $\leq$  amb:  
 $A \leq A$   
 $A \leq B, B \leq A \Rightarrow A=B$   
 $A \leq B, B \leq C \Rightarrow A \leq C$
- 2) Per a cada família d'elements  $\{x_i\} \subseteq L$ , existeix en  $L$ :  
Infim: La major fita inferior  $\bigvee \{x_i\}$   
Suprem: La menor fita superior  $\bigwedge \{x_i\}$

## L'element estructurant



## Dilatació

- Cal una imatge i un element estructurant



Imatge original



Element  
estructurant



Imatge dilatada

## Dilatació

$$1 \quad \delta_B(A) = \bigcup_{x \in A} (B)_x$$

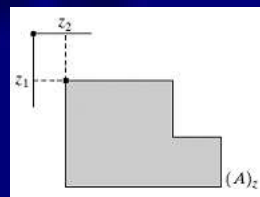
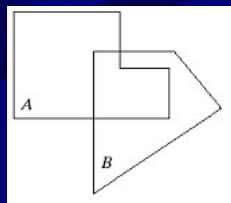
$$2 \quad \delta_B(A) = \bigcup_{x \in B} (A)_x$$

$$3 \quad \delta_B(A) = \{x \mid (\tilde{B})_x \cap A \neq \emptyset\}$$

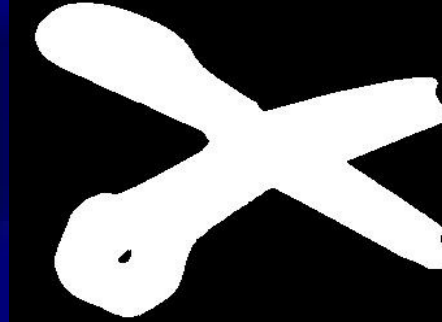
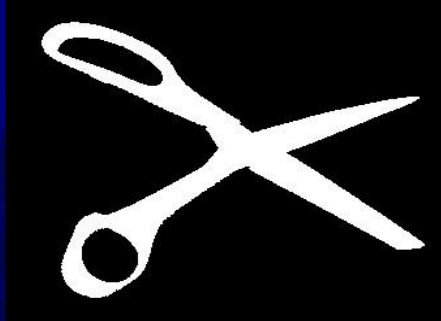
## Traslació

$$f_b(x) = f(x - b)$$

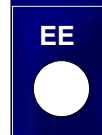
El valor de la imatge traslladada en un píxel  $x$ , és igual al valor de la imatge original en la posició traslladada pel vector oposat



## Dilatació



## Dilatació



## Erosió

- Cal una imatge i un element estructurant



Imatge original



Element  
estructurant

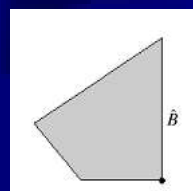
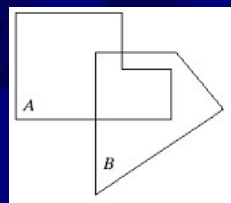


Imatge erosionada

## Reflexió

$$\check{A} = \{-a \mid a \in A\}$$

La reflexió d'un conjunt B es defineix com el seu simètric respecte de l'origen



## Erosió

$$1 \quad \varepsilon_B(f) = \nu(\delta_{\check{B}}(\nu(f)))$$

$$2 \quad \varepsilon_B(A) = \{x \mid (B)_x \subseteq A\}$$

## Erosió



## Propietats d'erosió i dilatació

- Són duals una respecte de l'altra  $\mathcal{E}_B = C\delta_B C$

- Són creixents

$$f \leq g \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{E}(f) \leq \mathcal{E}(g) \\ \delta(f) \leq \delta(g) \end{cases}$$

- Composició

$$\delta_{B_2}\delta_{B_1} = \delta_{(\delta_{B_2}B_1)}$$

$$\delta_{nB} = \delta_B^{(n)}$$

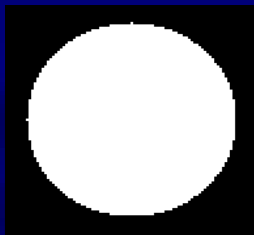
$$\mathcal{E}_{B_2}\mathcal{E}_{B_1} = \mathcal{E}_{(\delta_{B_2}B_1)}$$

- Relació d'ordre

$$\mathcal{E}_B \leq \delta_B$$

## Transformada de distància

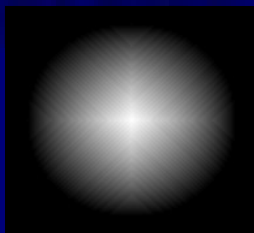
- El valor dels píxels de la imatge resultat representen la distància desde el píxel fins a la vora de la forma connexa a la que pertany



Imatge original



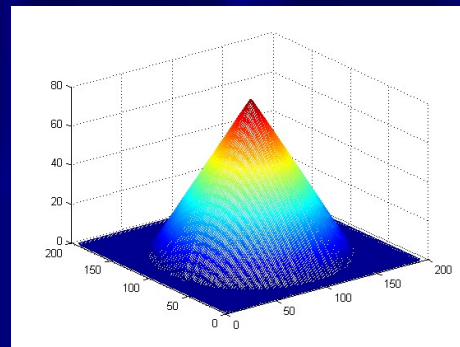
Mètrica euclídea



Mètrica C-8



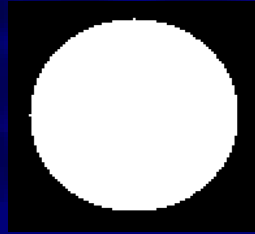
Mètrica C-4



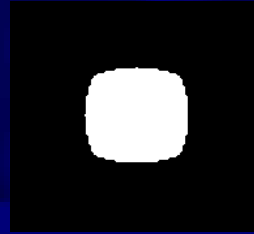


## Transformada de distància

- Combinada amb l'operació 'threshold' emula una erosió.
- L'exemple mostra el resultat de binaritzar (llindar=41) la imatge distància (mètrica C-4). És equivalent a erosionar amb un EE C-4 de radi 41



Imatge original



Imatge resultat

## Opening

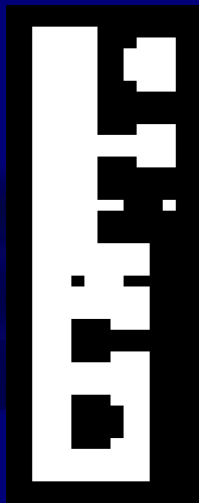
- Es pot expressar com la composició d'una erosió seguida d'una dilatació.

$$\gamma_B(f) = \delta_{\tilde{B}}[\varepsilon_B(f)]$$

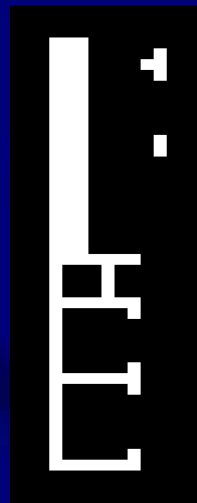
- O també directament a base d'operacions de conjunts:

$$\gamma_B(X) = \bigcup_X \{B_X \mid B_X \subseteq X\}$$

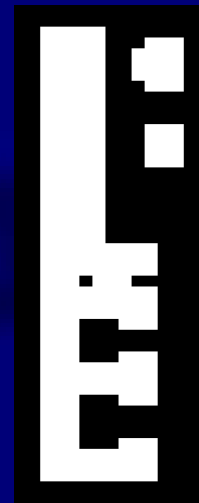
## Opening



Imatge original

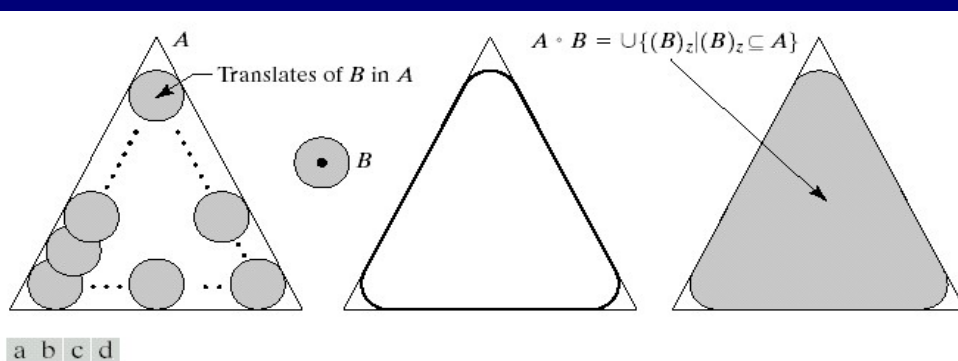


Imatge erosionada (EE  
3x3 quad.)



Imatge oberta  
(erode+dilate)

## Opening



**FIGURE 9.8** (a) Structuring element  $B$  “rolling” along the inner boundary of  $A$  (the dot indicates the origin of  $B$ ). (c) The heavy line is the outer boundary of the opening. (d) Complete opening (shaded).

## Closing

- Es pot expressar com la composició d'una dilatació seguida d'una erosió.

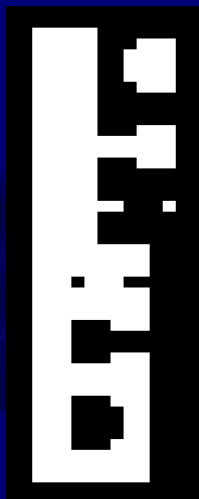
$$\phi_B(f) = \varepsilon_{\tilde{B}}[\delta_B(f)]$$

- O bé: 
$$\phi_B(X) = \bigcap_X \{B_X^c \mid X \subseteq B_X^c\}$$

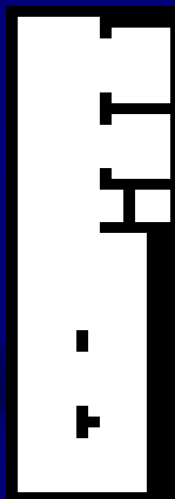
- O bé (dualitat amb l'open):

$$\phi_B(X) = \left[ \bigcup_X \{B_X \mid B_X \subseteq X^c\} \right]^c$$

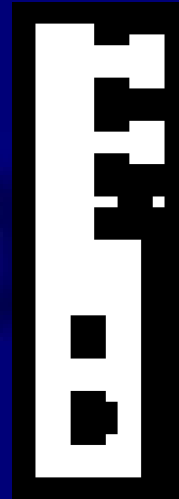
## Closing



Imatge original

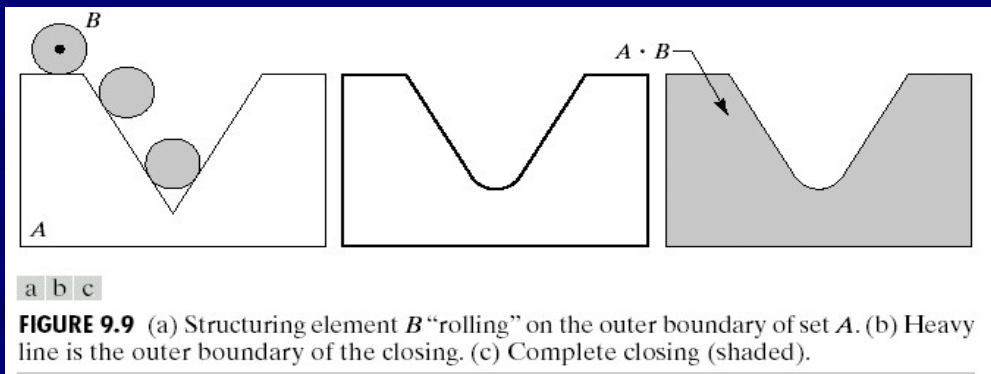


Imatge dilatada (EE  
3x3 quad.)



Imatge tancada  
(dilate+erode)

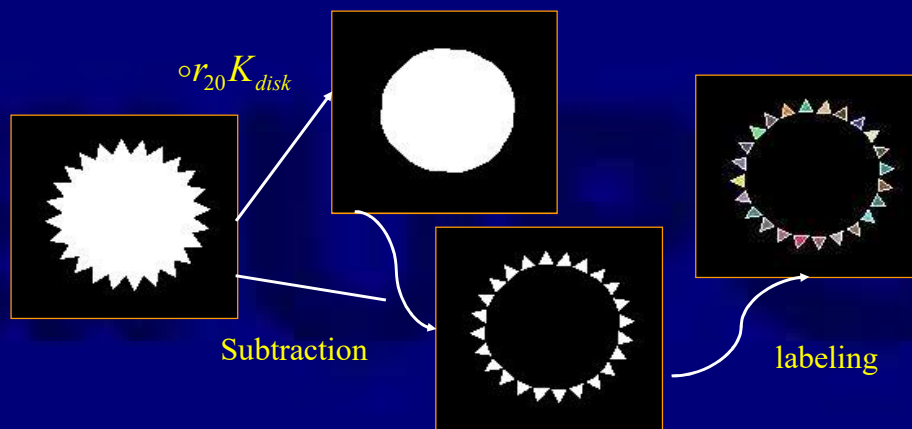
## Closing



## Propietats de l'open i el close

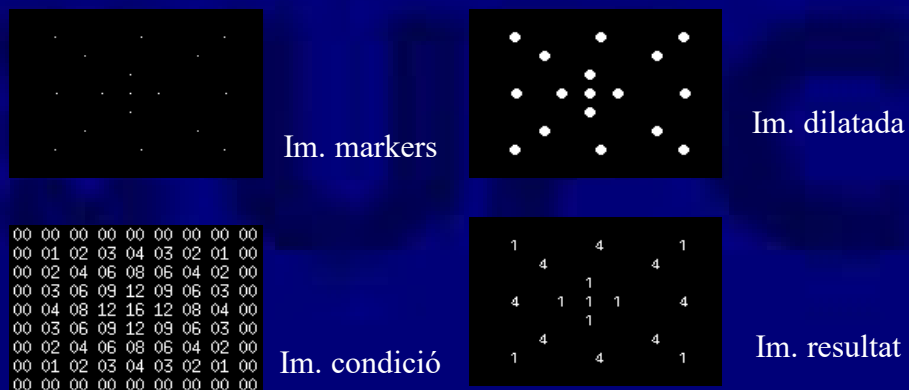
- Invariants a la translació del EE
- Idempotència  $\gamma\gamma = \gamma; \phi\phi = \phi$
- Dualitat  $\gamma_B = C\phi_B C$
- l'open és anti-extensiu i el close és extensiu  $\gamma_B \leq id \leq \phi_B$
- Operadors creixents  $f \leq g \Rightarrow \begin{cases} \gamma(f) \leq \gamma(g) \\ \phi(f) \leq \phi(g) \end{cases}$

## Deteció de les dents



## Dilatació condicional

- Cal una imatge d'entrada (markers), una imatge condicionant i el EE
- El resultat ve donat per la intersecció entre la imatge d'entrada dilatada amb la imatge condicionant



## Reconstrucció

- Cal una imatge d'entrada, una imatge de marques i el EE
- Es van aplicant dilatacions condicionals fins arribar a una imatge estable.

$$\begin{aligned}\delta_{B_c, G}(F) &= \delta_{B_c}(F) \wedge G \\ \delta_{B_c, G}^n(F) &= \underbrace{\delta_{B_c, G}(\delta_{B_c, G}(\cdots \delta_{B_c, G}(f \wedge g)))}_n \\ \gamma_{B_c, F}(G) &= \delta_{B_c, G}^\infty(F)\end{aligned}$$

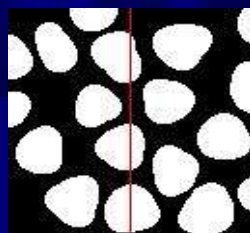
## Reconstrucció

```
00 00 00 00 00 00 00 00 00
00 01 02 03 04 03 02 01 00
00 02 04 06 08 06 04 02 00
00 03 06 09 12 09 06 03 00
00 04 08 12 16 12 08 04 00
00 03 06 09 12 09 06 03 00
00 02 04 06 08 06 04 02 00
00 01 02 03 04 03 02 01 00
00 00 00 00 00 00 00 00 00
```

Im. original

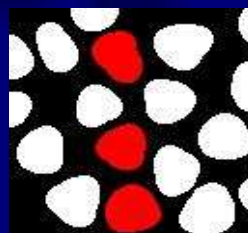


Im. marques

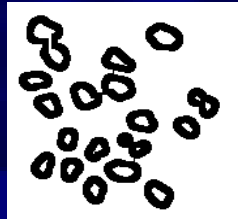


```
1   4   4   1
  4   1   4
  4   1   1   4
    1
  4   4   4   1
1   4   4   1
```

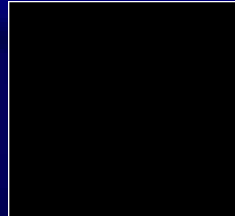
Im. resultat



### Exemple: tancament de forats



Im. original

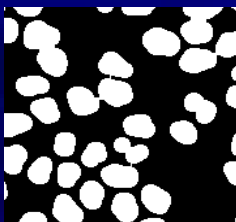


Im. marques



Im. resultat

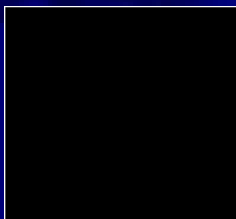
### Exemple: eliminació d'objectes a les vores



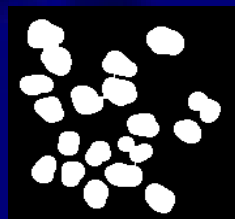
Im. original



Reconstrucció



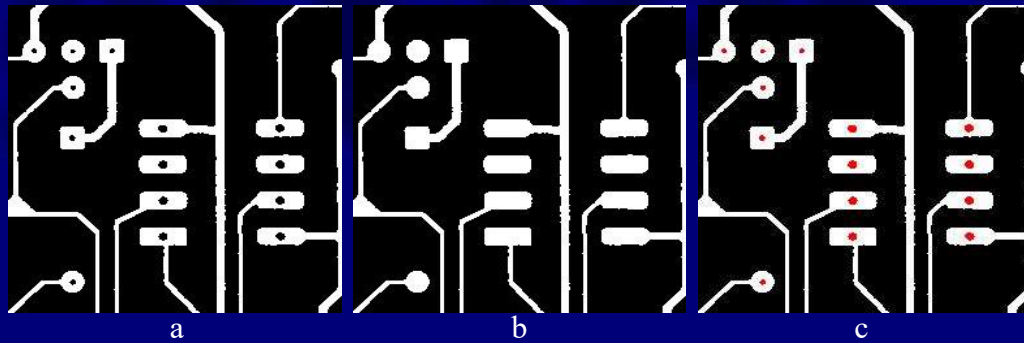
Im. marques



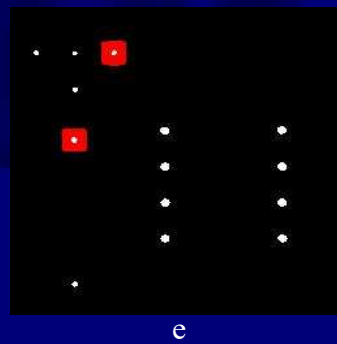
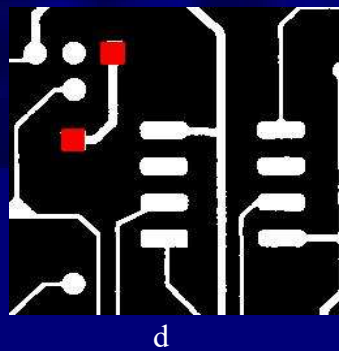
Im. resultat

## Aplicacions

Extracció de les diferents parts d'un circuit imprès

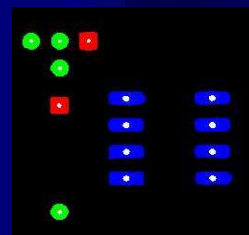
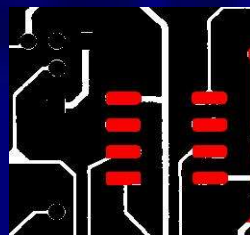
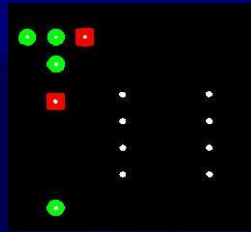
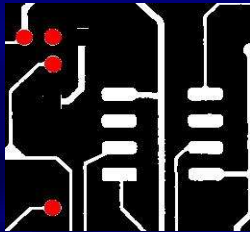


## Aplicacions

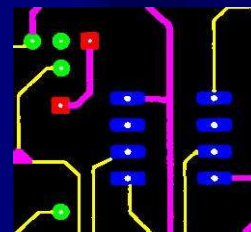
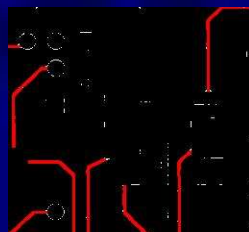
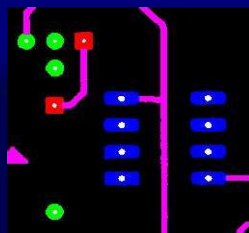
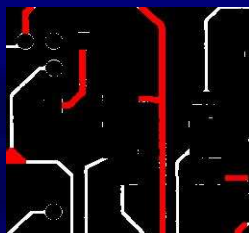




## Aplicacions

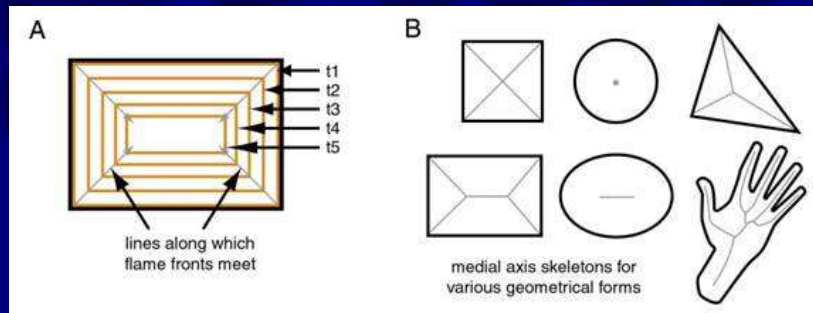


## Aplicacions



## Esquelets

- Consisteix en afinar l'objecte fins a obtenir un conjunt de línies, preservant la homotopia.
- Les línies resultants són l'esquelet o 'medial axis'
- Transformació idempotent, anti-extensiva i no creixent.
- L'analogia 'grassfire':

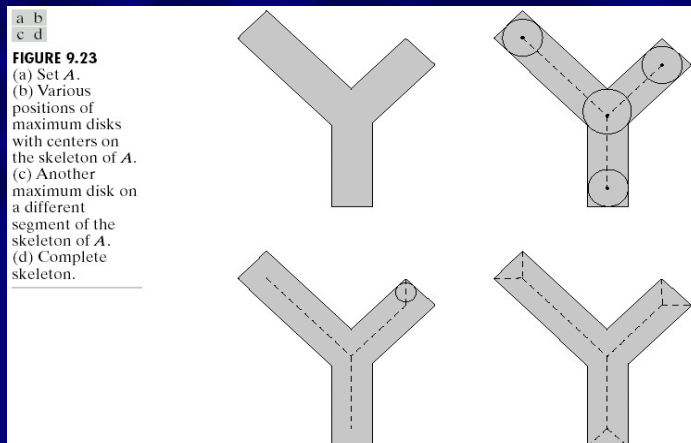


## Esquelets

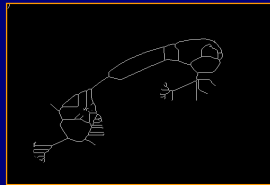
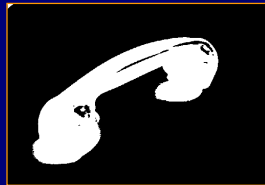
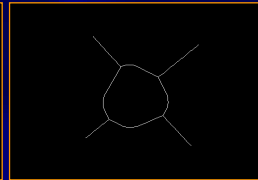
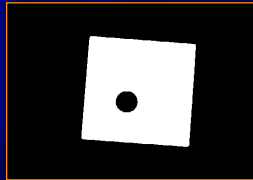
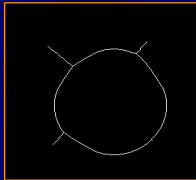
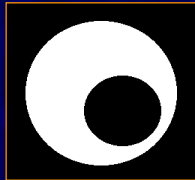
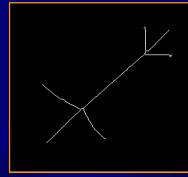
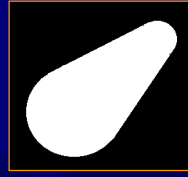
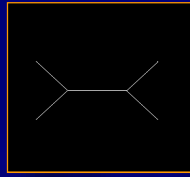
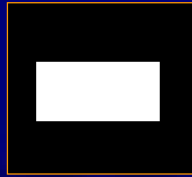
- Maximal disks

$$x \in SK(A) \Leftrightarrow$$

$$\exists y_1, y_2 \in \partial A \mid y_1 \neq y_2 \text{ i } d(x, \partial A) = d(x, y_1) = d(x, y_2)$$



## Esquelets. Sensibilitat a variacions del contorn



## SKIZ

- Skeleton by Influence Zones
- Zona d'influència : Conjunt de píxels d'una imatge binària que estan més propers a una component connexa que a la resta
- SKIZ: Vores de les zones d'influència



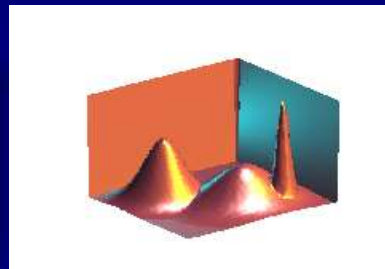
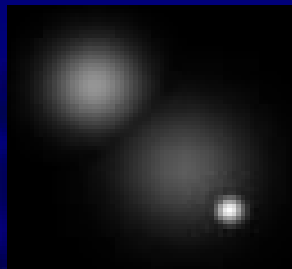
## Menú

### 2. Imatges multinivell

- Extensió a imatges multinivell
- Operadors bàsics sobre imatges multinivell
- Residus
  - Gradient morfològic
  - top-hat
- Reconstrucció multinivell.
- Segmentació morfològica: Watershed
- El problema de la sobresegmentació. Segmentació amb marques
- Màxims i mínims regionals

### Morfologia per a imatges multinivell

- És útil imaginar les imatges multinivell com models d'elevació del terreny. On el nivell de gris de cada píxel representa l'alçada.



- 2 models per extendre els operadors binaris per treballar amb imatges multinivell:
  - Descomposició per llindars
  - Umbra d'una funció

## Descomposició per llindars

- Una imatge multinivell es pot descomposar en varies imatges binàries (*cross sections*) binaritzant-la a cada nivell de gris.
- La *cross section* de nivell 't' ve donada pel conjunt de tots els píxels de valor major o igual que 't'.  

$$F(t) = \{x | f(x) \geq t\}$$
- La imatge es pot reconstruir a partir de les cross sections.

$$f(x) = \text{Max}\{t | x \in F(t)\}$$

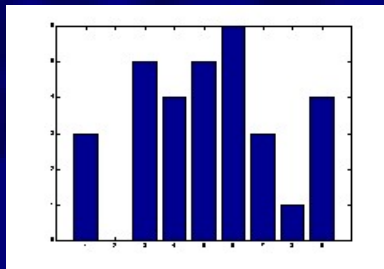


fig.a

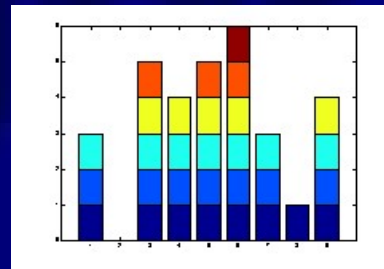
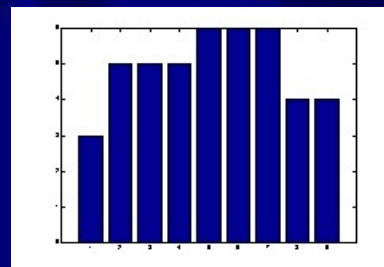
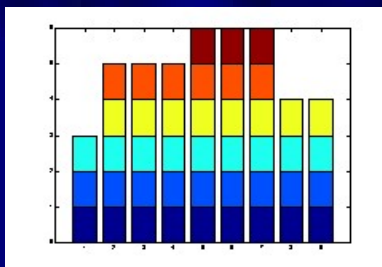
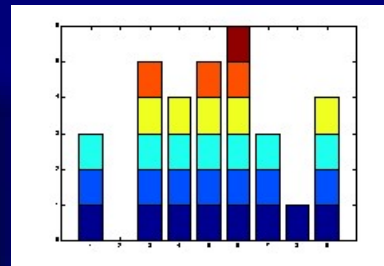
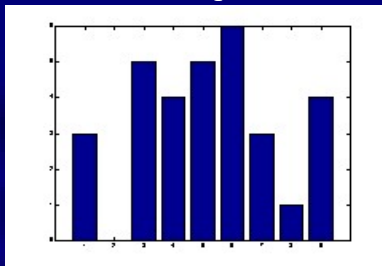


fig.b

## Descomposició per llindars

- Per dilatar una imatge multinivell, la descomposem en cross sections, les dilatam, i recomposem la imatge.

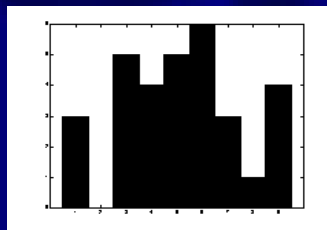


## Umbra d'una funció

- La umbra d'una funció  $f$ ,  $SG(f)$  és el conjunt de punts  $(x,t)$  que queden per sota la funció.  $SG(f) = \{(x,t) | 0 < t \leq f(x)\}$
- Per a recuperar la funció a partir de la umbra, busquem la top surface. El top d'un conjunt ve donat per:

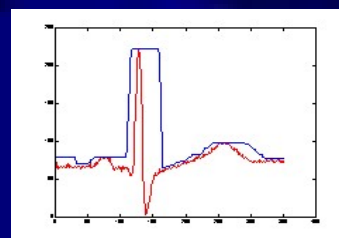
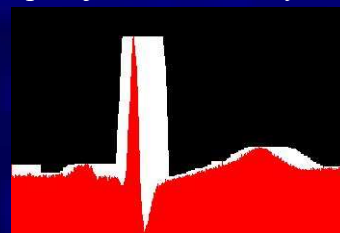
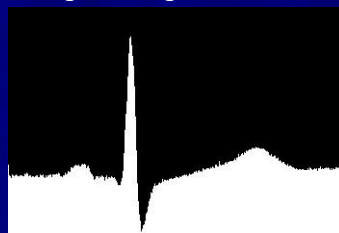
$$T(A)(x) = \begin{cases} \max\{t | (x,t) \in A\} & \text{if } (x,t) \in A \\ 0 & \text{if } (x,t) \notin A \end{cases}$$

- Cal afegir una dimensió més a la funció per a convertir-la en un conjunt. La figura ens mostra un senyal 1D representat com a imatge binària 2D



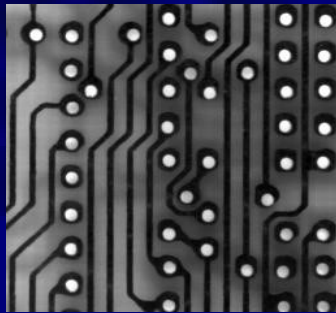
## Umbra d'una funció

- El dilate de la imatge multinivell és el top del dilate binari de la seva umbra.  $\delta_B(f) = T(\delta_B(SG(f)))$
- Representem la umbra d'un senyal ECG com imatge binària. El dilatem. Obtenim el top i el representem en un plot junt amb el senyal original:



## Dilatació multinivell

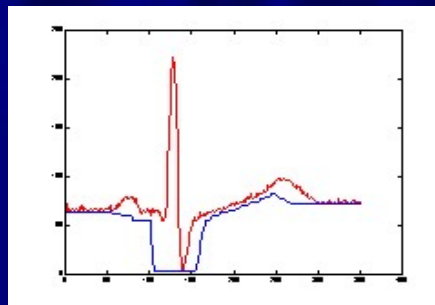
$$\delta_B(f)(x) = \max\{f(y) : y \in (\tilde{B} + x)\}$$



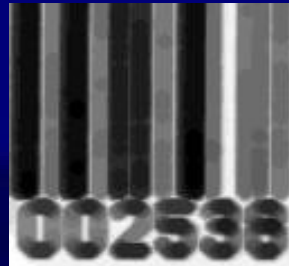
## Erosió multinivell

$$\varepsilon_B(f)(x) = \min\{f(y) : y \in (B + x)\}$$

- La imatge mostra el resultat de erosionar un senyal 1D usant un EE asimètric.

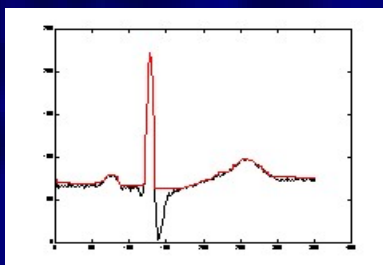


## Erosió multinivell

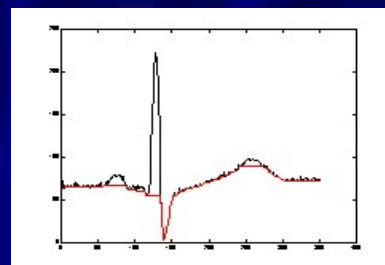


## Open i Close multinivell

- Es construeixen òbviament a partir del dilate i erode.
- Les imatge mostren el resultat de obrir i tancar un senyal 1D usant un EE de mida 30



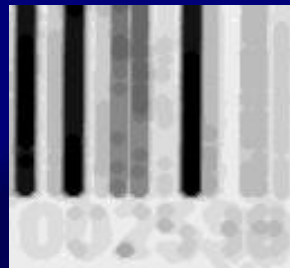
close



open



## Open i Close multinivell



close

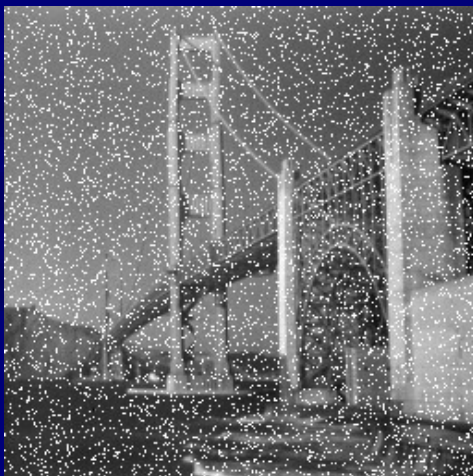


open



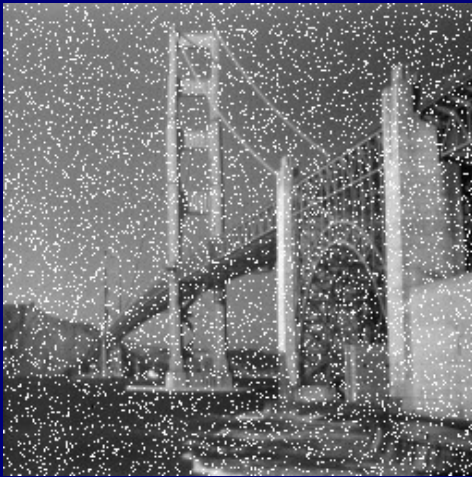
## Aplicacions de l'opening

Filtrat de soroll impulsional

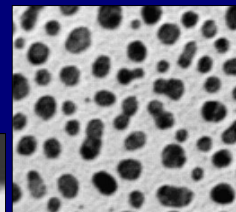
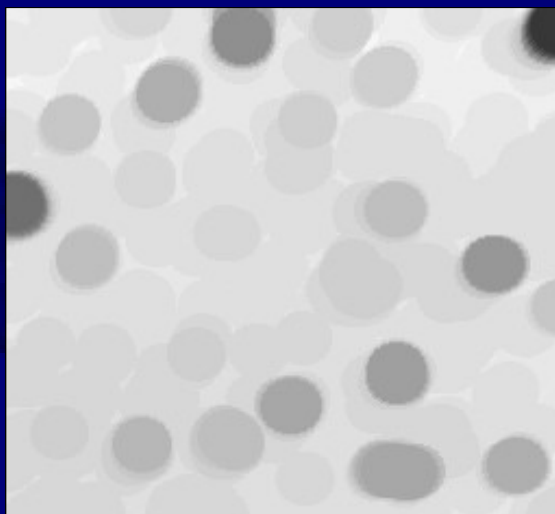


## Aplicacions de l'opening

Filtrat de soroll impulsional amb operador gaussià



## Closing multinivell



## Residus

- És la part de la imatge que ha estat eliminada al filtrar.
- Diferenciem dos grups: gradient morfològic i top-hat.

- Gradient morfològic:

- intern (imatge – erosió)
- extern (dilatació – imatge)
- tos dos (dilatació – erosió)
- Laplacà (gradient extern – gradient intern)

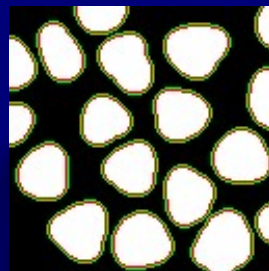
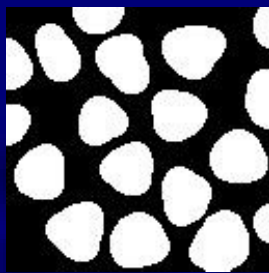
$$\rho_B = \delta_B - \varepsilon_B$$

- Top hat:

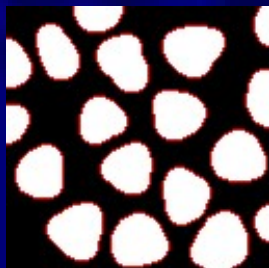
- open top-hat (imatge – opening)  $WTH(f) = f - \gamma(f)$
- close top-hat (closing – imatge)  $BTH(f) = \phi(f) - f$

## Extracció de contorns

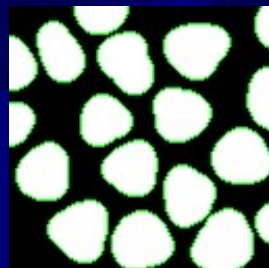
- Usarem el gradient morfològic



doble



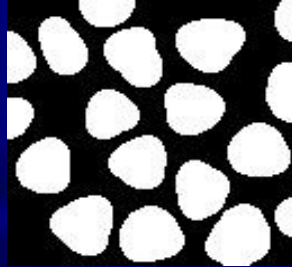
intern



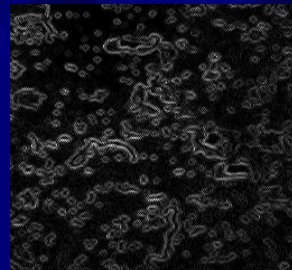
extern

## Extracció de contorns

- La mida del EE determina el gruix del contorn

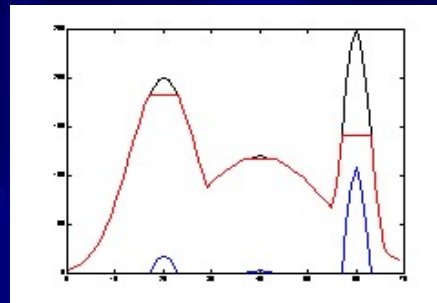
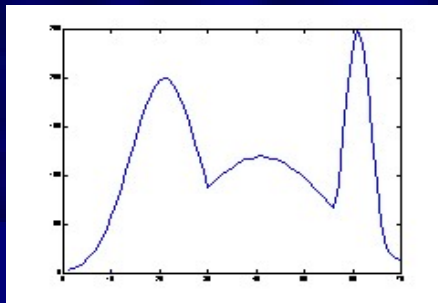


- Podem extreure gradients d'imatges multinivell:



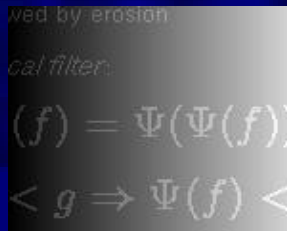
## Open top-hat

- Detectem pics més estrets que el EE.

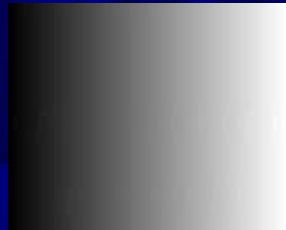


## Open top-hat

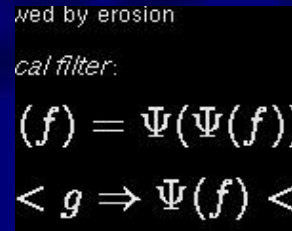
- La imatge original està corrompuda amb il·luminació no uniforme.
- Recuperem la imatge original amb un top-hat.
- Cal fer l'opening usant un EE més gruixut que les estructures de la imatge original



Original



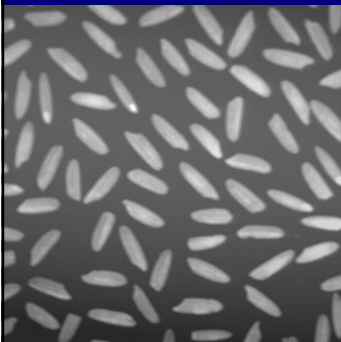
Open



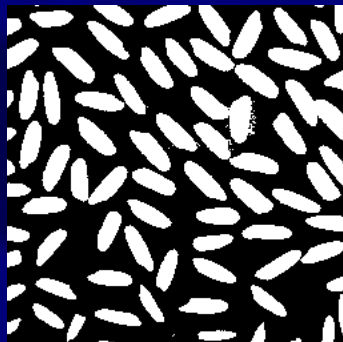
Top-hat

## Open top-hat

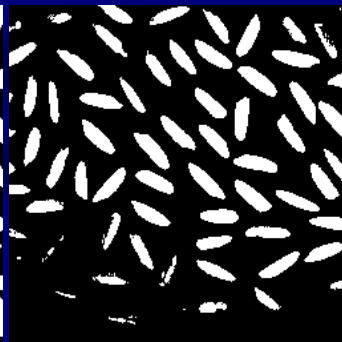
- Volem segmentar els grans d'arròs
- La imatge està corrompuda amb il·luminació no uniforme.



Original



binarització al 40%

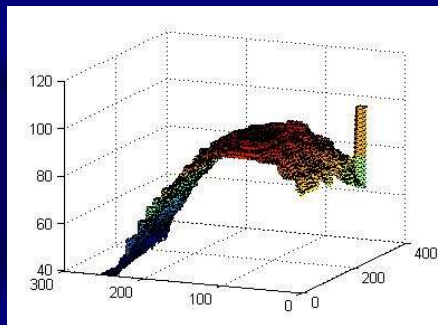


binarització al 60%

## Open top-hat

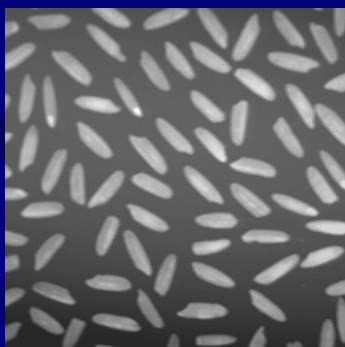


Opening

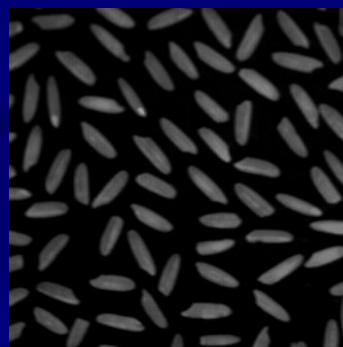


Representació 3D

## Open top-hat



Original



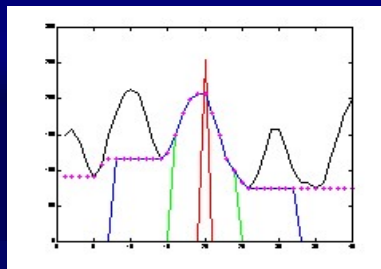
top hat

## Open top-hat



## Reconstrucció multinivell

- Es defineix igual que la binària: seqüència infinita de dilatacions del marker condicionades a la imatge original



-Reconstrucció per dilatació:

$$R_g^\delta(f) = \delta_g^\infty(f)$$

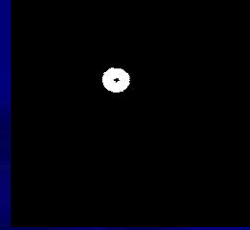
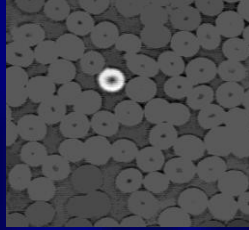
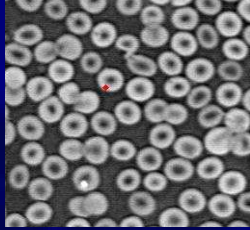
-Reconstrucció per erosió:

$$R_g^\epsilon(f) = \epsilon_g^\infty(f)$$

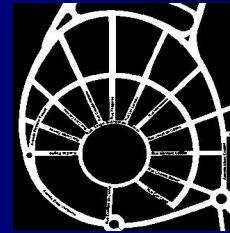
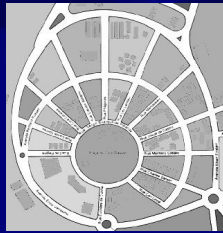
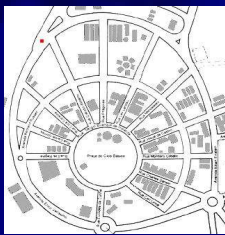


## Reconstrucció multinivell

- Segmentem una única cel.lula a partir d'un pixel de valor 255 (marker) situat sobre ella.

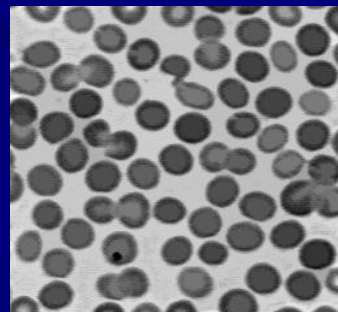
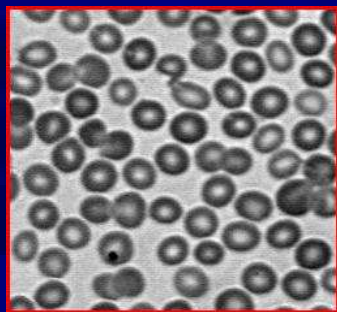


- Segmentem els carrers del mapa situant el marker sobre un dels carrers



## Exemple: eliminació de regions aïllades

- Eliminem el centre de les cel.lules de la imatge
- Creem un marc de imatge de valor 255 (marker)



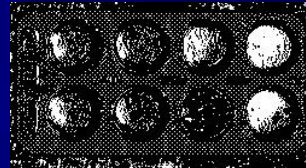


## Màxims i mínims regionals

- Un màxim (mínim) regional és una regió connexa on tots els píxels veïns tenen un valor estrictament menor (major).
- Les imatges reals tenen masses màxims i mínims regionals.
- Cal filtrar per a reduir el nombre de màxims i mínims.
- Els extrems regionals trobats solen ser bons markers per al watershed.



Original



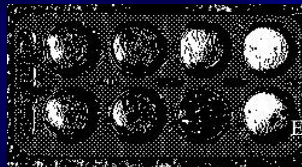
Extrems regionals

## Màxims i mínims regionals

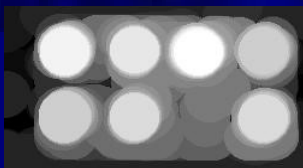
- Les tècniques de filtratge es basen en:
  - contrast: h-max, h-min
  - forma: Opening
  - mida: AreaOpening



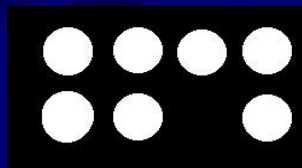
Original



Extrems regionals



Opening



Extrems regionals  
de la imatge  
filtrada

