35. **Demostreu que un graf G té un únic MST si, per a tot tall de C de G, existeix una única aresta $e \in C$ amb valor mínim. Demostreu que el reciproc no és cert, i.e. pot ser el cas de que per un o més talls C tinguem més d'una aresta de mínim pes, però que el MST sigui únic.**

Per definició, $T = (V, A)$ es un MST si $\omega(T) = \sum_{\forall a \in A} \omega(a)$ es el mínim de tots els arbres d'expansió, podem deduir:

- Tenim que entre dos vèrtexs $\in V$ només existeix un únic camí, d'altra banda tenim un cicle i per tant no podem tenir un arbre.
- S'ha de tenir una aresta entre dos vèrtexs $\in V$, pel contrari tindríem un graf inconnex i no podria ser un arbre.

Suposem un tall de G, $(S, V - S)$, tal que la intersecció es buida, per la definició de tall. Ens podem trobar en els següents casos:

- Com a mínim, tenim una aresta que connecta els dos talls i que haurà d'estar al MST ja que aquest ha de ser connex.
    - Com només tenim una aresta mínima, aquesta es la que farà l'únic MST.
- Si tenim, dues o més arestes $(r_0, r_1, \ldots r_n)$ llavor tenim que el MST tindrà únicament aquella aresta amb menor pes, d'altra banda el MST no seria mínim per que el pes del MST serà menor. Tampoc podrà tenir dues arestes per que llavors tindríem un cicle.

Si $\omega(r_0) == \omega(r_1)$ i aquests valors són mínims, tindríem dos MST, un per cada aresta que te el valor mínim.

Per demostrar el recíproc, podem veure un exemple:

Amb un graf C_n amb totes les arestes de pes idèntic; per obtenir el MST d'aquest graf cicle, tenim es generara descartant una aresta i que quedaran $n - 1$ arestes del mateix pes.