Títulos públicos pós-fixados e eficácia da política monetária sob a ótica de um modelo DSGE

Paulo Lins*

Universidade de São Paulo

Márcio Issao Nakane†

Universidade de São Paulo

Resumo

Pastore (1996) argumenta que a existência de um título pós-fixado - as Letras Financeiras do Tesouro Nacional (LFTs) - enfraquece a eficácia da política monetária ao obstruir o canal riqueza pelo qual essa é transmitida. O tema é de extrema importância para a economia nacional, mas não se sabe de nenhum trabalho que analisou o argumento contra a existência das LFTs usando um modelo DSGE (*Dynamic Stochastic General Equilibrium*). Este trabalho procura suprimir essa lacuna na literatura nacional introduzindo títulos pós-fixados ao modelo proposto por Krause & Moyen (2016). Como resultados, encontra-se que o argumento contra as LFTs não se mantém no modelo elaborado e que, após a introdução dos títulos pós-fixados, a taxa de juros de longo prazo passou a responder a mudanças da taxa de juros básica da economia.

Palavras-chaves: Política Monetária, Dívida Pública, Política Fiscal, Letras Financeiras do Tesouro
JEL - Classificação: E52, E63, H63
Anpec - Área: Área 4 - Macroeconomia, Economia Monetária e Finanças

Abstract

Pastore (1996) argues that the existence of a post-fixed bond, LFTs - *Letras Financeiras do Tesouro*, weakens the effectiveness of monetary policy by obstructing its wealth channel. The theme is of extreme importance to the national economy, but it does not know of any study that analyzed the argument against the existence of LFTs using a DSGE model (Dynamic Stochastic General Equilibrium). This work seeks to eliminate this gap in the national literature introducing post-fixed bond to the model proposed by Krause & Moyen (2016). As a result, it is found that the argument against post-fixed bond does not hold and that after the introduction of LFTs to model the long-term interest rates began to respond to changes in the basic interest rate of the economy.

Keywords: Monetary Policy, Public Debt, Fiscal Policy, *Letras Financeiras do Tesouro*
JEL - Classification: E52, E63, H63
Anpec - Area: Área 4 - Macroeconomia, Economia Monetária e Finanças

*Email: `pcarvalholins@gmail.com`
†Email: `minakane@usp.br`

1 Introdução

Neste trabalho, procura-se analisar se a existência de um título público pós-fixado tem impacto na efetividade da política monetária utilizando um modelo DSGE (*Dynamic Stochastic General Equilibrium*). Essa questão é fundamental para compreender os impactos da política monetária no Brasil, cuja participação dos títulos pós-fixados - nacionalmente chamado de Letras Financeiras do Tesouro Nacional (LFTs) - na dívida pública federal é quase 30%. O argumento contra as LFTs seria que a existência de um título pós-fixado enfraqueceria a eficácia da política monetária ao obstruir o canal riqueza pelo qual essa é transmitida.

Esse argumento é abordado pela primeira vez na literatura nacional por Pastore (1996). O autor elabora um modelo IS/LM com dois regimes, um em que o financiamento do déficit é feito com títulos perpétuos pré fixados e outro em que o financiamento é feito com títulos perpétuos indexados à taxa básica de juros. No primeiro regime, alterações na taxa de juros impactam no estoque de riqueza, mas não alteram o fluxo de pagamento, ou seja, há um efeito riqueza e não há um efeito renda. No segundo, as alterações de juros não produzem efeito no valor do estoque, mas alteram o fluxo futuro de pagamentos, ou seja, há efeito renda e não há efeito riqueza.

Segundo Carneiro (2006), a oferta de LFTs se justifica por preferências e conveniências do Tesouro, principalmente por diminuir o custo e risco de rolagem do emissor. Já a demanda se justifica por ser lastro para depósitos referenciados e pela necessidade de adequação a exigências quanto aos prazos dos passivos. Loyo (2006) conjectura que o efeito riqueza é mais fraco no Brasil do que nos EUA, principalmente devido à menor razão riqueza-PIB, devido à riqueza mais concentrada e devido ao mercado imobiliário pouco desenvolvido. A riqueza financeira brasileira é composta por títulos de renda fixa, títulos em que a equivalência ricardiana tende a ser mais presente. Segundo Loyo, muito do impacto de uma elevação da taxa de juros na economia americana provem de mudanças no *equity premium*.

As LFTs surgiram no contexto de uma economia fragilizada pelo longo período de inflação elevada ocorrido na década de 80 no Brasil. Com o Plano Cruzado, formou-se a expectativa de que a inflação estava controlada e, consequentemente, as instituições financeiras apostaram na queda dos juros e alavancaram seus passivos. Com os primeiros sinais de pressão inflacionária, ficou claro que os juros teriam de ser elevados após o descongelamento de preços e em uma magnitude que provocaria perdas elevadas para os intermediários financeiros. Como solução do problema, foram criadas em maio de 1986 as LFTs – na época, Letras do Banco Central (LBCs) - um título com indexação financeira diária e prazos de até um ano. Na prática, foi criado um título que refletia a remuneração dos passivos dos intermediários financeiros, o que acabava com o problema do descasamento da remuneração entre ativos e passivos dos intermediários financeiros, facilitava a condução da política monetária e reduzia o custo de rolagem da dívida[1].

Alfaro & Kanczuk (2010) e Divino & Silva Junior (2013) estudam a composição ótima da dívida pública para a economia nacional. Mas ambos estudam apenas a escolha entre títulos indexados a inflação e títulos nominais, não abordando o caso das LFTs. Não se sabe de nenhum trabalho que analisou o argumento contra as LFTs usando um modelo DSGE. Este trabalho procura suprimir essa lacuna na literatura nacional.

Na literatura que trabalha com modelos DSGE, títulos de logo prazo costumam ser modelados de acordo com Woodford (2001). Neste trabalho, usar-se-á a forma proposta por Krause & Moyen (2016). Essa última abordagem, que será chamada de abordagem da dívida pública recursiva, é mais flexível e, consequentemente, permite a existência de um título com remuneração semelhante a de um título pós-fixado.

[1] Para mais detalhes, ver Arida (2006) e Lara Resende (2006).

1.1 Dívida Pública na Teoria Econômica

Na literatura econômica, diversos autores já analisaram o papel da dívida pública no funcionamento da economia. Autores clássicos, como Modigliani (1961), Diamond (1965) e Roley (1979), já discutiam dívida pública e como deveria ser sua gestão.

Partindo das contribuição de Ramsey (1927), uma literatura se desenvolveu para analisar qual deve ser uma política de tributação ótima e qual é o papel da dívida pública. Lucas & Stokey (1983) mostram como dívida contingente de diferentes maturidades pode resolver o problema de inconsistência intertemporal de uma política de tributação ótima. Para os autores, o papel da dívida pública é suavizar intertemporalmente a tributação distorciva, resultado também encontrando por Chamley (1986).

Angeletos (2002) e Buera & Nicolini (2004) mostram que, modificando a maturidade da dívida pública, pode-se garantir a alocação do planejador central usando apenas títulos não contingentes. Avaliando seu modelo quantitativamente, Buera & Nicolini (2004) encontram que a quantidade de dívida emitida deve ser demasiadamente grande, chegando a centenas de vezes o tamanho do produto, resultado não observado em nenhuma economia contemporânea.

Outro ramo da literatura analisa o argumento, fundamental para que mudanças no estoque de dívida pública causem efeitos reais, de que títulos públicos do governo são percebidos como riqueza pelos consumidores. Barro (1974) analisa quais hipóteses teóricas devem ser feitas para a validade do argumento, chamado de equivalência ricardiana. Barro analisa três cenários, um em que os agentes têm vida finita, um em que o mercado de capital é incompleto e outro em que o governo possui controle de emissão de ativos líquidos. No primeiro cenário, caso haja uma transferência intergeracional, não haverá efeito riqueza. No segundo, o efeito será positivo apenas se o governo for mais eficiente em “carregar” poupança que o setor privado e, no terceiro, apenas se o governo agir como um monopolista na emissão de liquidez. Barro conclui que nenhum caso teórico analisado convence que dívida pública deva ser percebida como riqueza.

Woodford (2013) revisa diversas formas alternativas de introduzir formação de expectativas em modelos dinâmicos, distanciando-se do *benchmark* de expectativas racionais. Esse distanciamento modifica diversos resultados da teoria monetária e da fiscal, como a equivalência ricardiana. O autor atenta para o fato de que, em diversas análises em que as expectativas dos agentes são formadas via expectativas racionais, a dinâmica de modelos com agentes representativos e com política fiscal ricardiana é indiferente à adição de um novo título do governo.

Barro (1999) argumenta que, em modelos em que há impostos *lump-sum*, certeza quanto ao futuro, mercados de capitais perfeitos e agentes que vivem infinitamente, vale a equivalência ricardiana, o que torna a adição de novos títulos redundante. Por isso, utilizar-se-ão impostos distorcivos no mercado de trabalho. Na penúltima seção, explorar-se-á o impacto de introduzir agentes *rule-of-thumb* ao modelo.

Este artigo possui seis seções, contando com essa introdução. Na próxima seção, apresentar-se-á o modelo. Na seção 3, apresentar-se-á os parâmetros utilizados. Na seção 4, ferá feita a simulação do modelo calibrado. Na seção 5, serão introduzidos agentes *rule-of-thumb* ao modelo. Por último, a seção 6 apresentará as conclusões finais.

2 Modelo

2.1 Dívida pública recursiva

No modelo de Krause & Moyen (2016), a dívida pública possui uma estrutura recursiva de maturidade. A cada período, α títulos maturam. A equação de movimento dos títulos de longo prazo, B_t^L, é dada por:

$$B_t^L = (1-\alpha)B_{t-1}^L + B_t^{L,n} \tag{1}$$

sendo $B_t^{L,n}$ a quantidade de títulos recém emitidos e $(1-\alpha)B_{t-1}^L$ a quantidade de títulos de longo prazo que não maturaram.

A taxa de juros dos títulos emitidos no período t é dada por $i_t^{L,n}$ e a taxa média dos títulos de longo prazo é dada por i_t^L. Defininе-se a taxa de juros média de longo prazo como uma média ponderada:

$$i_t^L = \frac{B_t^{L,n}}{B_t^L} i_t^{L,n} + (1-\alpha)\frac{B_{t-1}^{L,n}}{B_t^L} i_{t-1}^{L,n} + (1-\alpha)^2 \frac{B_{t-2}^{L,n}}{B_t^L} i_{t-2}^{L,n} + \dots$$

O peso da taxa de juros de um título previamente emitido, $i_{t-i}^{L,n}$, na taxa de juros média de longo prazo, i_t^L, depende da fração desses títulos que ainda resta no estoque total de títulos de longo prazo, sendo essa fração representada por $(1-\alpha)^i B_{t-i}^{L,n}/B_t^L$. Ou seja, quanto mais recente o título emitido, maior o peso da sua taxa de juros de emissão na taxa de juros média de longo prazo.

Pode-se simplificar a equação, escrevendo-a na forma recursiva:

$$B_t^L i_t^L = (1-\alpha)B_{t-1}^L i_{t-1}^L + B_t^{L,n} i_t^{L,n} \tag{2}$$

2.2 Modelo com títulos pós-fixados

A estrutura recursiva da dívida pública será modificada para permitir dois títulos de longo prazo, ambos maturando com a mesma probabilidade α. O total de estoque de títulos de longo prazo, B_t^L, é composto por títulos pós-fixados, B_t^{POS}, e pré-fixados, B_t^{PRE}:

$$B_t^L = B_t^{POS} + B_t^{PRE} \tag{3}$$

$$B_t^{L,n} = B_t^{POS,n} + B_t^{PRE,n} \tag{4}$$

Os novos títulos modificam a equação que determina a taxa de juros média de longo prazo, equação (2). Partindo da mesma definição de taxa média de longo prazo como uma média ponderada:

$$i_t^L = \frac{B_t^{L,n}}{B_t^L} i_t^{L,n} + (1-\alpha)\frac{B_{t-1}^{L,n}}{B_t^L} i_{t-1}^{L,n} + (1-\alpha)^2 \frac{B_{t-2}^{L,n}}{B_t^L} i_{t-2}^{L,n} + \dots$$

Pode-se separar os títulos de longo prazo em títulos pós-fixados e em títulos pré-fixados usando a definição de composição dos estoques, equações (3) e (4):

$$i_t^L = \frac{B_t^{POS,n}}{B_t^L} i_t + \frac{B_t^{PRE,n}}{B_t^L} i_t^{PRE,n} + (1-\alpha)[\frac{B_{t-1}^{POS,n}}{B_t^L} i_t + \frac{B_{t-1}^{PRE,n}}{B_t^L} i_{t-1}^{PRE,n}] +$$
$$(1-\alpha)^2[\frac{B_{t-2}^{POS,n}}{B_t^L} i_t + \frac{B_{t-2}^{PRE,n}}{B_t^L} i_{t-2}^{PRE,n}] + \dots$$

Observe que, ao separar os títulos pré-fixados e pós-fixados, deve-se também modificar a taxa de juros incidente em cada um dos tipos. Os títulos pós fixados, $B_{t-i}^{POS,n}\ \forall\, i \in \mathbb{N}$, são remunerados pela taxa de juros básica do período atual, i_t, e os títulos pré-fixados, $B_{t-i}^{PRE,n} \forall i \in \mathbb{N}$, são remunerados pela taxa de emissão do período da emissão,$i_{t-i}^{PRE,n}$. O peso da taxa de juros de um título previamente emitido na taxa de juros média de longo prazo depende da fração desses títulos que ainda resta no estoque total de títulos de longo prazo. Essa equação também pode ser escrita de uma forma recursiva:

$$i_t^L = \frac{B_t^{POS}}{B_t^L} i_t + \frac{B_t^{PRE}}{B_t^L} i_t^{PRE,n} + (1-\alpha)\frac{B_{t-1}^{POS}}{B_t^L}(i_{t-1}^L - i_{t-1}) + (1-\alpha)\frac{B_{t-1}^{PRE}}{B_t^L}(i_{t-1}^L - i_t^{PRE,n}) \tag{5}$$

Intuitivamente, a taxa de juros de longo prazo é igual à soma das remunerações dos títulos pós-fixados e dos pré-fixados, ambas ponderadas pela participação relativa na dívida, mais o diferencial no período anterior entre os juros de longo prazo e a taxa de juros básica da economia e mais o diferencial entre os juros de longo prazo no período anterior e a taxa de juros atual de emissão de títulos pré-fixados. Ambos diferenciais são ponderados pela participação relativa na dívida[2]. A definição da taxa de juros média anterior, equação (2), não é recuperável da nova equação que define a taxa de juros média, equação (5).

Os dois novos títulos também possuem equações de movimento do estoque:

$$B_t^{POS} = (1-\alpha)B_{t-1}^{POS} + B_t^{POS,n} \tag{6}$$

$$B_t^{PRE} = (1-\alpha)B_{t-1}^{PRE} + B_t^{PRE,n} \tag{7}$$

2.3 Condições de Ótimo do Consumidor

O problema do consumidor é maximizar sua utilidade sujeito à restrição orçamentária, à equação de movimento do estoque de títulos, (1), à equação que determina a taxa média de juros dos títulos de longo prazo, (5), às equações de composição dos estoques dos títulos de longo prazo, (3) e (4), e às equações de movimentos dos títulos pós e pré fixados, (6) e (7). Ou seja, os agentes maximizam o valor presente da utilidade intertemporal,

$$\max E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\varphi}}{1+\varphi}\right)$$

sendo C_t um índice de consumo e N_t a quantidade de horas de trabalho ofertada, respeitando as equações:

$$\begin{aligned}
&\frac{B_t}{P_t} + \frac{B_t^{L,n}}{P_t} + C_t = (1+i_{t-1})\frac{B_{t-1}}{P_t} + (\alpha + i_{t-1}^l)\frac{B_{t-1}^L}{P_t} + (1-\tau_t)\frac{W_t}{P_t}N_t + Z_t \\
&B_t^L = (1-\alpha)B_{t-1}^L + B_t^{L,n} \\
&i_t^L = \frac{B_t^{POS}}{B_t^L} i_t + \frac{B_t^{PRE}}{B_t^L} i_t^{PRE,n} + (1-\alpha)\frac{B_{t-1}^{POS}}{B_t^L}(i_{t-1}^L - i_{t-1}) + (1-\alpha)\frac{B_{t-1}^{PRE}}{B_t^L}(i_{t-1}^L - i_t^{PRE,n}) \\
&B_t^L = B_t^{POS} + B_t^{PRE} \\
&B_t^{L,n} = B_t^{POS,n} + B_t^{PRE,n} \\
&B_t^{POS} = (1-\alpha)B_{t-1}^{POS} + B_t^{POS,n} \\
&B_t^{PRE} = (1-\alpha)B_{t-1}^{PRE} + B_t^{PRE,n}
\end{aligned}$$

Na restrição orçamentária, P_t é o índice de preços, i_t é a taxa básica de juros da economia, B_t é o título público de um período, W_t é o salário nominal, Z_t é uma transferência das firmas e τ_t é um imposto distorcivo. As variáveis $B_t^{L,n}$, B_t^L, $i_t^{L,n}$ e i_t^L são, respectivamente, a quantidade de títulos de longo prazo recém emitidos, a quantidade de títulos de longo prazo, a taxa de juros de emissão dos títulos de longo prazo e a taxa de juros média de longo prazo.

O índice de consumo, C_t, é definido como uma cesta de bens composta por um contínuo de bens, $C_t(i) \in [0,1]$. A agregação é feita por $C_t \equiv (\int_0^1 C_t(i)^{1-1/\epsilon} di)^{\epsilon/\epsilon - 1}$, sendo ϵ a elasticidade de substituição entre os bens $C_t(i)$. O agregador de preços é $P_t \equiv (\int_0^1 P_t(i)^{1-\epsilon} di)^{1/1-\epsilon}$.

[2] Quando, a dívida é exclusivamente composta por títulos pré fixados, $B^{POS} = 0$, a equação (5) pode ser simplificada e é igual, como seria de se esperar, à equação (2). Quando a dívida é puramente pós-fixada, $B^{PRE} = 0$, encontra-se a equação:

$$(i_t^L - i_t)B_t^L = (1-\alpha)(i_{t-1}^L - i_{t-1})B_{t-1}^L$$

Para analisar a equação acima, suponha que $(i_t^L - i_t)$ seja constante. . Como todos os títulos de longo prazo são pós fixados, não é uma hipótese irrealista. A equação acima ficará igual a $B_t^L = (1-\alpha)B_{t-1}^L$. Como $0 < (1-\alpha) < 1$, tem-se, recursivamente, que $B_t^L = 1/\alpha B_0^L$.

A forma mais fácil de resolver o problema é substituir as equações de composição, (3) e (4), em todas as outras restrições. Em seguida, substitui-se as equações de movimentos dos títulos pós e pré fixados, (6) e (7), nas restrições restantes. O problema do consumidor passa a ser maximizar:

$$\max E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (\frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\varphi}}{1+\varphi})$$

sujeito à restrição orçamentária modificada

$$C_t + \frac{B_t}{P_t} + \frac{(B_t^{POS} - (1-\alpha)B_{t-1}^{POS}) + (B_t^{PRE} - (1-\alpha)B_{t-1}^{PRE})}{P_t}$$
$$= (1+i_{t-1})\frac{B_{t-1}}{P_t} + (\alpha + i_{t-1}^L)\frac{B_{t-1}^{PRE}}{P_t} + (\alpha + i_{t-1}^L)\frac{B_{t-1}^{POS}}{P_t} + (1-\tau_t)\frac{W_t}{P_t}N_t + Z_t$$

e à equação da taxa média de juros do estoque de dívida de longo prazo:

$$(i_t^L - i_t)B_t^{POS} + (i_t^L - i_t^{PRE,n})B_t^{PRE} = (1-\alpha)(i_{t-1}^L - i_{t-1})B_{t-1}^{POS} + (1-\alpha)(i_{t-1}^L - i_t^{PRE,n})B_{t-1}^{PRE}$$

Krause & Moyen (2016) argumentam que os consumidores tomam a taxa de emissão dos novos títulos de longo prazo como dada, já que é o mercado que a determina. Já a taxa média de juros de longo prazo, i_t^L, depende da quantidade de títulos recém emitidos relativos à quantidade de títulos de longo prazo que o agente escolhe manter. Logo, a taxa média de juros deve ser levada em consideração ao resolver o problema de ótimo do consumidor.

O primeiro resultado interessante do modelo[3] fica evidente olhando as condições de ótimo resultantes do processo de otimização. A equação de Euler para o título pós-fixado possui uma Euler igual ao título de um período, ou seja, comportam-se como o título de menor prazo possível. Já o título pré-fixado comporta-se igual ao título pré-fixado do modelo de Krause & Moyen (2016). As equações encontradas foram:

$$1 = \beta E_t \{ (\frac{C_t}{C_{t+1}})^{-\sigma} \frac{P_t}{P_{t+1}} [1 + i_t] \} \tag{8}$$

$$1 = \beta E_t \{ (\frac{C_t}{C_{t+1}})^{-\sigma} \frac{P_t}{P_{t+1}} [1 + i_t^{L,n} - \mu_{t+1}(1-\alpha)\Delta i_{t+1}^{PRE,n}] \} \tag{9}$$

$$\mu_t = \beta E_t \{ (\frac{C_t}{C_{t+1}})^{-\sigma} \frac{P_t}{P_{t+1}} [1 + (1-\alpha)\mu_{t+1}] \} \tag{10}$$

Encontra-se também uma equação para a oferta de trabalho:

$$N_t^{\varphi} C_t^{\sigma} = (1-\tau_t)\frac{W_t}{P_t} \tag{11}$$

A equação de Euler (8) relaciona o fator intertemporal de desconto, $({}^{C_t}/_{C_{t+1}})^{-\sigma}\,{}^{P_t}/_{P_{t+1}}$, com a taxa de juros básica. De forma análoga, a equação de Euler (9) relaciona o fator de desconto intertemporal com a taxa de juros de longo prazo dos títulos recém emitidos. A grande diferença é que esta é corrigida por mudanças na expectativa, $\Delta i_{t+1}^{L,n}$, enquanto aquela não. A correção é ponderada pelo multiplicador de Lagrange μ_t que segue o processo definido pela equação (10).

Intuitivamente, o termo $\mu_{t+1}\Delta i_{t+1}^{L,n}$ na equação (9) é a perda de capital no período $t+1$ devido a aumentos na taxa de juros de longo prazo. Esse é o efeito riqueza da transmissão da política monetária. Ele reduz o incentivo a investir nos títulos de longo prazo no período corrente e, consequentemente, a taxa de longo prazo é maior que a taxa de juros de curto prazo para o agente ser indiferente entre os dois títulos. Os valores de *Steady State* de todas as taxas de juros são iguais.

[3] Os cálculos estão apresentados no apêndice A.

2.4 Equações da Firma

A dinâmica de preços agregados segue:

$$1 = [\theta \pi_t^{\epsilon-1} + (1-\theta)(\frac{P_t^*}{P_t})^{1-\epsilon}] \tag{12}$$

onde θ é a probabilidade de reajuste do contrato de preço, π_t é a taxa de inflação, ϵ é calibrado de forma às firmas terem um *mark-up* de 20% e P_t^*/P_t é a razão entre os preços recém ajustados e o índice de preço na economia.

As condições de ótimo da firma são:

$$\frac{P_t^*}{P_t} = \mu \frac{Z_{2,t}}{Z_{1,t}} \tag{13}$$

sendo

$$Z_{1,t} = C_t^{1-\sigma} + \beta \theta E_t \pi_{t+1}^{\epsilon-1} Z_{1,t+1} \tag{14}$$

$$Z_{2,t} = C_t^{1-\sigma} mc_t + \beta \theta E_t \pi_{t+1}^{\epsilon} Z_{2,t+1} \tag{15}$$

onde μ é a taxa de *mark-up*, $Z_{2,t}$ e $Z_{1,t}$ são duas variáveis auxiliares criadas para facilitar escrever o problema da firma recursivamente e mc_t é o custo marginal da firma, que é dado pela equação:

$$mc_t = \frac{W_t}{P_t} \tag{16}$$

sendo W_t/P_t o salário real.

2.5 Autoridade Fiscal e Monetária

Nesta seção, será usada uma regra fiscal exatamente igual à usada por Krause & Moyen (2016):

$$\hat{\tau}_t = \rho_\tau \hat{\tau_{t-1}} + \phi_b(\hat{b_t^L} + \hat{b_t}) + s_t \tag{17}$$

onde $\hat{\tau}_t$ é o desvio do imposto *lump-sum* do seu valor de *Steady State*, $\hat{\tau}_t \equiv \tau_t - \bar{\tau}_t$, $\hat{b_t^L}$ é o desvio do estoque real de título de longo prazo do seu valor de *Steady State*, $\hat{b_t^L} \equiv b_t^L - \bar{b_t^L}$, $\hat{b_t}$ é o desvio do estoque real de título de curto prazo do seu valor de *Steady State*, $\hat{b_t} \equiv b_t - \bar{b_t}$, e s_t é um choque fiscal com desvio padrão σ_s.

A restrição orçamentária do governo é:

$$\tau_t \frac{W_t}{P_t} N_t + \frac{B_t}{P_t} + \frac{B_t^{L,n}}{P_t} = g + (1 + i_{t-1})\frac{B_{t-1}}{P_t} + (\alpha + i_{t-1}^L)\frac{B_{t-1}^L}{P_t} \tag{18}$$

onde g é uma constante de gasto público.

A autoridade monetária segue uma regra de política monetária da forma:

$$i_t = (1-\rho_i)\bar{i} + \rho_i i_{t-1} + \phi_\pi(\pi_t - 1) + v_t \tag{19}$$

onde i_t é a taxa de juros controlada pela autoridade monetária e que remunera os títulos de um período, $\bar{i}$ é o valor de *Steady-State* da taxa de juros, π_t é a taxa de inflação e v_t é um choque de política monetária com desvio padrão σ_v.

2.6 Equilíbrio

A demanda agregada de bens exige que o produto seja igual ao consumo das famílias mais o consumo do governo:

$$Y_t = C_t + g \tag{20}$$

A condição de *market clearing* do mercado de trabalho é:

$$\Delta_{p,t} Y_t = AN_t \tag{21}$$

sendo $\Delta_{p,t}$ o coeficiente de dispersão de preços, cuja movimento é dado pela equação:

$$\Delta_{p,t} = \theta \pi_t^{\epsilon} \Delta_{p,t-1} + (1-\theta)[\frac{P_t^*}{P_t}]^{-\epsilon} \tag{22}$$

O sistema de equações formadas pelas equações (1), (3), (4), (5), (6) e (7) são linearmente dependentes, o que impossibilita a resolução do modelo. Como forma de resolver o problema, as novas equações de movimento não foram adicionadas - pois são redundantes - e a quantidade de um dos novos títulos foi fixada, de forma que ${}^{B_t^i}/_{P_t} = {}^{\bar{B}^i}/_{P}, \forall i \in [PRE, POS]$.

O equilíbrio do modelo é determinado pelos processos estacionários i_t, i_t^L, $i_t^{PRE,n}$, C_t, π_t, ${}^{W_t}/_{P_t}$, N_t, ${}^{P_t^*}/_{P_t}$, $Z_{1,t}$, $Z_{2,t}$, mc_t, τ_t, ${}^{B_t}/_{P_t}$, ${}^{B_t^L}/_{P_t}$, Y_t, $\Delta_{p,t}$, μ_t, B_t^{POS}, B_t^{PRE}, $B_t^{POS,n}$ e $B_t^{PRE,n}$ satisfazendo as relações (1), (3), (4), (5), (8), (9), (10), (11), (12), (13), (14), (15), (16), (17), (18), (19), (20), (21) e (22) e pelos processos estocásticos v_t e s_t. Para encontrar equilíbrio, são necessárias mais três restrições, que serão ${}^{B_t}/_{P_t} = 0$, ${}^{B_t^i}/_{P_t} = {}^{\bar{B}^i}/_{P}, \forall i \in [PRE, POS]$ e ${}^{B_t^{i,n}}/_{P_t} = {}^{B^{\bar{i},n}}/_{P}, \forall i \in [PRE, POS]$. Dado que a última restrição permite duas calibrações, $i = PRE$ ou $i = POS$, serão feitas duas simulações.

Usou-se a restrição ${}^{B_t}/_{P_t} = 0$, já que essa permite uma maior focalização da análise nos mecanismos de transmissão de choques dos títulos de longo prazo. Já a restrição de fixar um dos títulos de longo prazo, o título pré-fixado ou o título pós fixado, também é escolhida por permitir entender melhor os mecanismos do modelo. Espera-se que o ajuste feito exclusivamente pelos títulos pós fixados seja diferente do ajuste feito exclusivamente pelos títulos pré fixados.

3 Calibração

O modelo foi calibrado usando parâmetros comumente usados na literatura brasileira de modelos de equilíbrio geral. De Castro *et al.* (2015) apresentam o modelo de equilíbrio geral usado pelo Banco Central do Brasil (Bacen) para realizar análises econômicas. Usando as estimativas dos autores como base, o coeficiente de desconto intertemporal, β, é igual a 0,989, a elasticidade de substituição intertemporal, σ, é igual a 1,3, a elasticidade da oferta de trabalho de Frisch, φ, é igual a 1, a resposta da tributação a desvios da dívida, ϕ_b, é igual a 0,02, o coeficiente de Taylor, ϕ_π, é igual a 2,43, o coeficiente auto-regressivo da regra fiscal, ρ_T, é igual a 0,8 e o coeficiente auto-regressivo da regra monetária, ρ_R, é igual a 0,79. Além disso, os autores estimam os desvios padrão dos choques monetário e fiscal, σ_v e σ_s, sendo este igual a 1,73 e aquele a 0,32.

De Castro *et al.* (2015) estimam o coeficiente de substituição para vários mercados. Como neste trabalho, tem-se apenas um mercado, o coeficiente de substituição, ϵ, e a proporção de firmas reajustando preços, θ, foram retirados de Krause & Moyen (2016). O primeiro é igual a 6 - de forma que o *mark-up* seja 20% - e o segundo foi calibrado em 2/3 - de forma que a duração média de um contrato de preço dure três quartos.

No cálculo dos valores de *Steady-State*, a razão governo-produto, S_g, foi calibrada para ser igual a 22,20% e a razão dívida-produto, S_b, foi calibrada para ser igual a 36,81%. Em ambas razões, usou-se os valores das Contas Nacionais divulgadas pelo IBGE.

Tabela 1: Calibração para o modelo com estrutura recursiva

Simbolo	Valores	Descrição	Fonte
		Razões	
S_g	22,20%	Razão Governo Produto	IBGE
S_b	36,81%	Razão Dívida Produto	IBGE
		Parâmetros de Preferências e de Tecnologia	
α	0,055	Probabilidade do título maturar	Bacen
β	0,989	Coeficiente de desconto intertemporal	De Castro *et al.* (2015)
σ	1,3	Elasticidade de substituição intertemporal	De Castro *et al.* (2015)
φ	1	Elasticidade da oferta de trabalho de Frisch	De Castro *et al.* (2015)
ϵ	6	Mark-up de 20%	Krause & Moyen (2016)
		Parâmetros de Rigidez	
θ	0,67	Proporção de firmas reajustando preços	Krause & Moyen (2016)
		Parâmetros das Regra Fiscal e da Monetária	
ϕ_b	0,02	Resposta da tributação a desvios da dívida	De Castro *et al.* (2015)
ϕ_π	2,43	Coeficiente de Taylor	De Castro *et al.* (2015)
ρ_T	0,8	Coeficiente auto-regressivo da regra fiscal	De Castro *et al.* (2015)
ρ_i	0,79	Coeficiente auto-regressivo da regra monetária	De Castro *et al.* (2015)
		Coeficientes dos Choques Exógenos	
σ_v	0,32	Desvio padrão do choque monetário (v_t)	De Castro *et al.* (2015)
σ_s	1,73	Desvio padrão do choque monetário (s_t)	De Castro *et al.* (2015)

O parâmetro α, além de governar a probabilidade dos títulos maturarem, controla também a maturidade média da dívida, sendo essa igual a $1/\alpha$. A dívida brasileira possui uma maturidade média de 4,57 anos, segundo a Secretaria do Tesouro Nacional[4], logo o valor de α foi então calibrado em $0,055$. Para calibrar a quantidade de título pós-fixado, usou-se o percentual da Dívida Pública Mobiliária Federal interna que possui rentabilidade vinculada à taxa SELIC - 24,01%. O dado foi coletado no site da Secretaria do Tesouro Nacional.

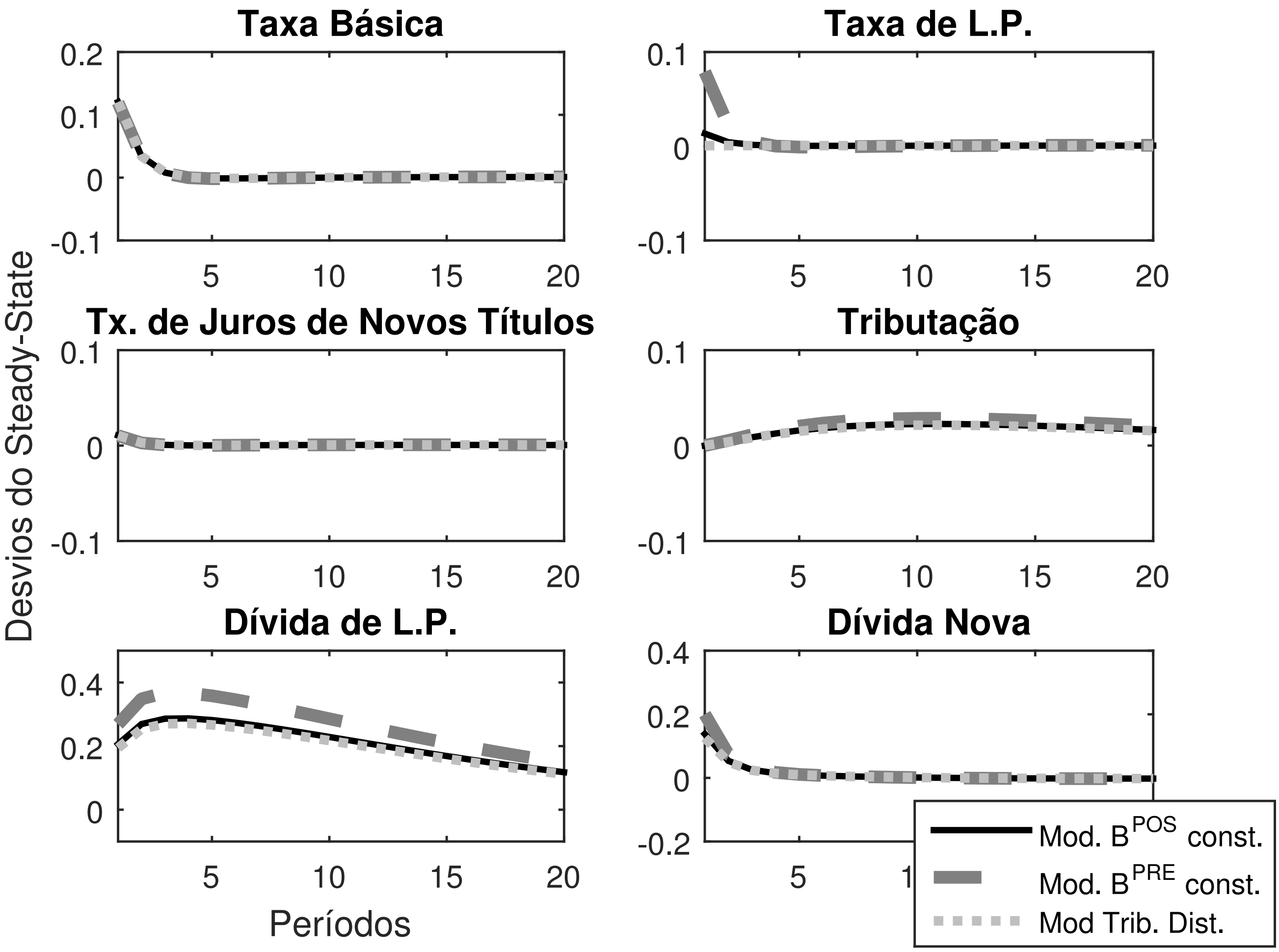
Os parâmetros utilizados estão apresentados na Tabela 1.

4 Simulação

Nesta seção, serão apresentadas as funções de resposta a impulso para o modelo com maturidade recursiva e com títulos pré e pós-fixados. Para facilitar a identificação, esse modelo será chamado de Modelo com LFTs. É pertinente que, para exercício de contra-factual, faça-se uma comparação com o modelo sem títulos pós-fixados, mas ainda com maturidade recursiva - ou seja, o modelo em que há apenas títulos de longo prazo pré-fixados. Esse modelo é exatamente o apresentado por Krause & Moyen (2016) e suas condições de equilíbrio estão apresentadas no apêndice B. Todas as simulações foram feitas usando o programa *Dynare*. Além disso, os resultados são baseados numa aproximação

[4] Dado calibrado de acordo com o valor da série de prazo médio do estoque do total da dívida pública federal em dezembro de 2015.

Figura 1: Comparação entre funções de resposta a impulso a um choque na taxa básica de juros do modelo de Krause & Moyen e do modelo com LFTs



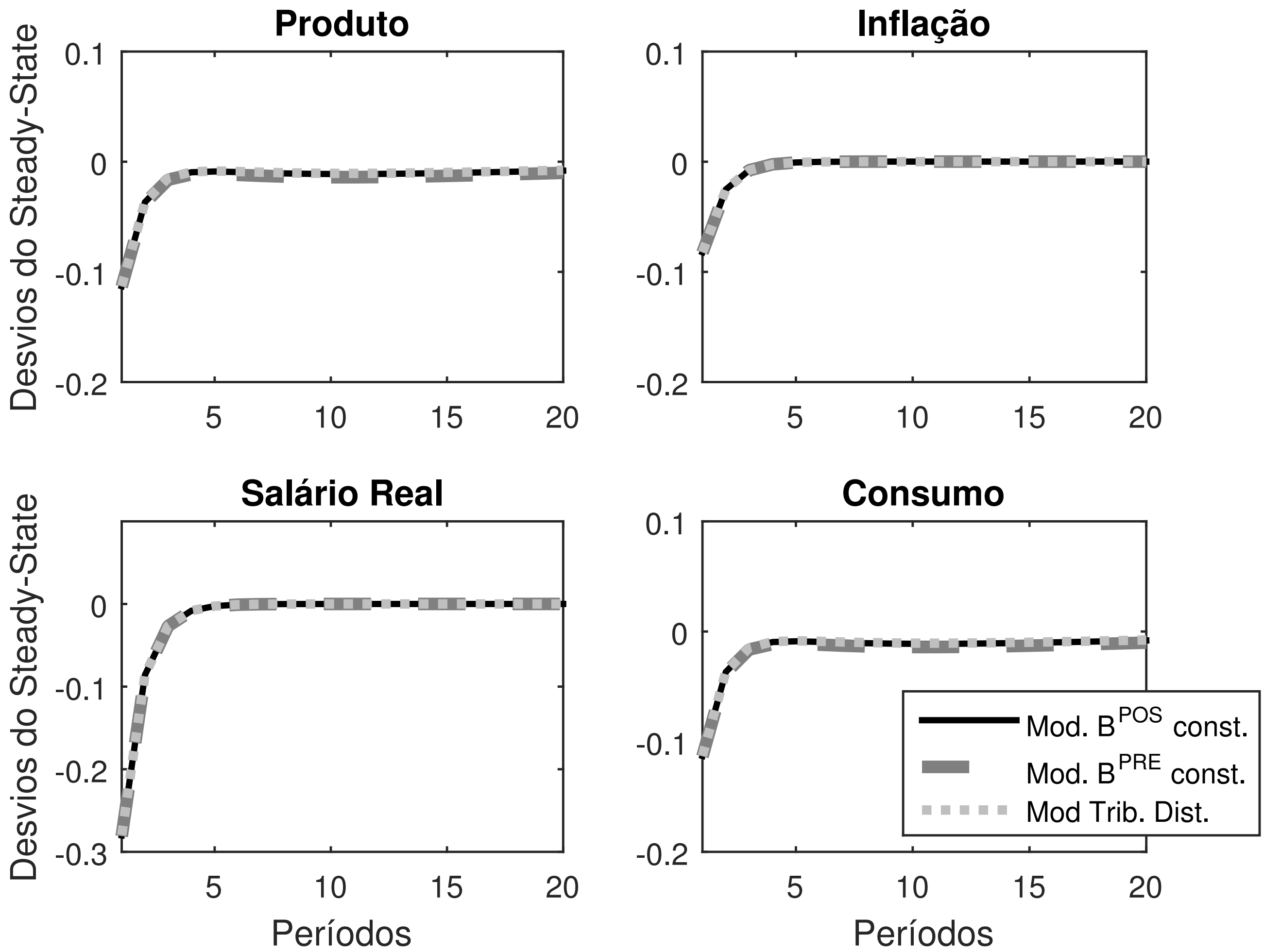
de primeira ordem ao redor dos valores de *Steady-State*.

As figuras 1, 2 e 3 comparam as funções de resposta a impulso após um choque na taxa básica de juros para os dois modelos, lembrando que o modelo com LFTs possui duas formas de ser calibrado. O modelo de Krause & Moyen (2016) é representado por uma linha contínua preta, a calibração do modelo com LFTs em que a dívida pós-fixada é constante é representada pela linha tracejada cinza escuro e a calibração do modelo com LFTs em que a dívida pré-fixada é constante é representada pela linha pontilhada cinza claro.

Na figura 1, observa-se como as dinâmicas entre as duas formas de calibração são parecidas, não alterando em nada as funções de resposta a impulso. A única diferença do modelo modificado é uma alteração na função de resposta a impulso da taxa média de longo prazo, que aumenta com o choque na taxa de juros e, no caso do modelo de Krause & Moyen (2016), fica constante. Na calibração com dívida pré-fixada constante, a dívida de longo prazo aumenta um pouco mais.

Na figura 2, todas as funções resposta a impulso são idênticas, ou seja, a modificação da estrutura da dívida pública em nada altera o comportamento das variáveis produto, consumo, salário real e inflação. Essa figura deixa claro como o argumento de Pastore (1996) não se mantém no modelo. A modificação na estrutura da dívida pública não impactou na capacidade da política monetária, aqui representada por um choque positivo na taxa de juros, em contrair demanda e inflação.

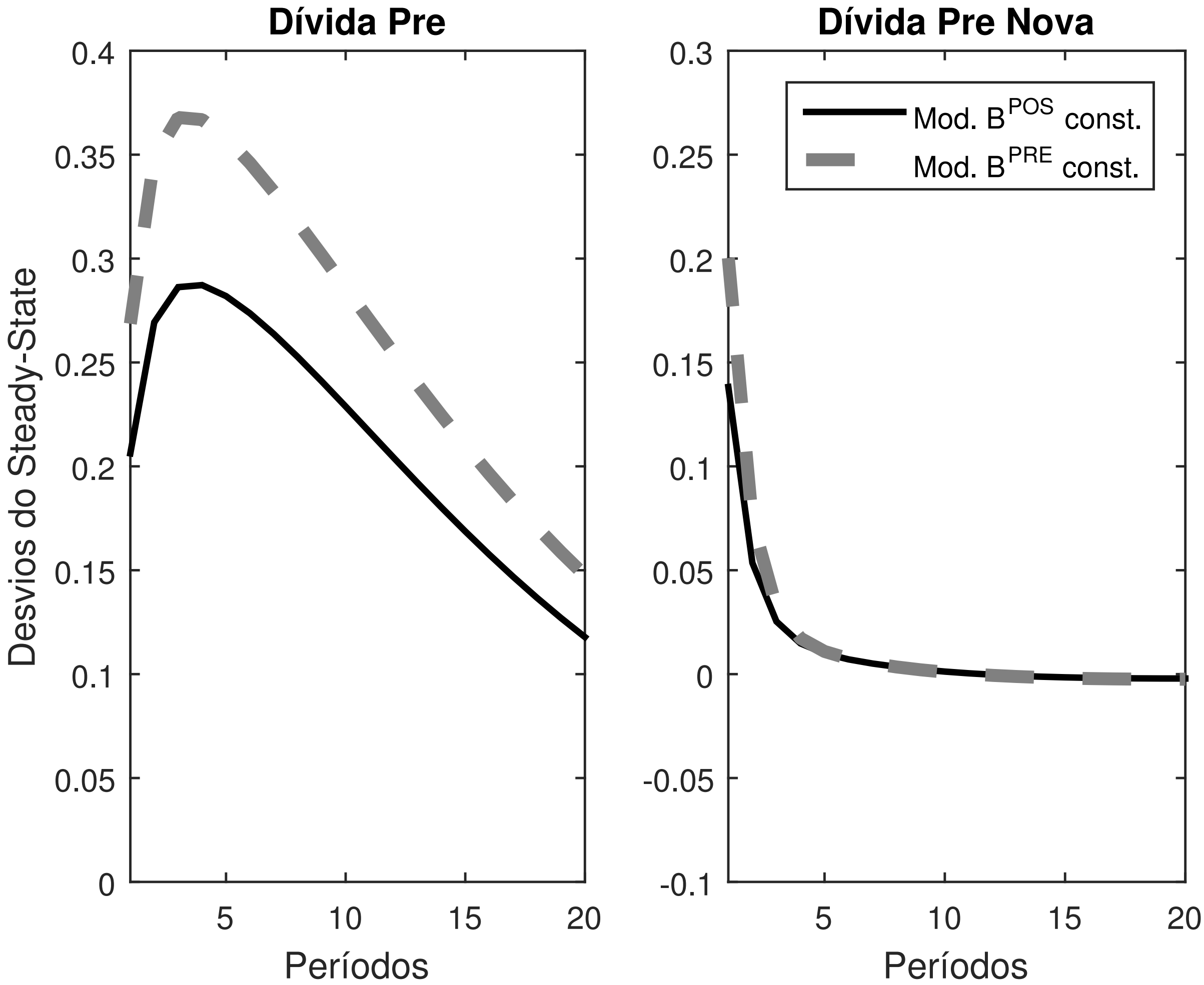
Figura 2: Comparação entre funções de resposta a impulso a um choque na taxa básica de juros do modelo de Krause & Moyen e do modelo com LFTs



A figura 3 mostra que, quando se afasta da equivalência ricardiana utilizando-se de impostos distorcivos no mercado de trabalho, a flexibilização da estrutura da dívida passa a apresentar uma dinâmica diferente. Quando ocorre um choque monetário e a dívida pré-fixada está constante (pós-fixada constante), o estoque da dívida pós-fixada (pré-fixada) de longo prazo aumenta e a emissão de novos títulos pós-fixados (pré-fixados) aumenta, mas logo volta ao valor de *Steady-State*. O interessante a se notar é que emite-se mais dívida pós-fixada do que pré-fixada.

As funções de resposta a impulso após a ocorrência de um choque fiscal para duas calibrações do modelo com LFTs e para o modelo de Krause & Moyen (2016) são apresentadas na figura 4. O impacto da modificação na estrutura da dívida em tributação, taxa básica de juros, taxa de juros de novos títulos, produto e inflação é nulo, mas o impacto na taxa de juros de longo prazo e na dívida de longo prazo é significante. O comportamento modelo com a dívida pós fixada constante é bem semelhante ao comportamento modelo de Krause & Moyen (2016), uma vez que o ajuste está sendo feito apenas por títulos pré-fixado. Quando existe o título pós-fixado, o funcionamento da economia é diferente. O aumento da taxa de juros de longo prazo é mais significativo e a queda no estoque de longo prazo é menor.

Figura 3: Funções de resposta a impulso a um choque na taxa básica de juros para duas calibrações do modelo com LFTs



5 Agentes Não Ricardianos

Seguindo Barro (1999), nesta seção são introduzidos agentes *rule-of-thumb* ao modelo. Uma parcela γ da população é composta por agentes que não maximizam intertemporalmente a utilidade, possivelmente por imperfeições no mercado de crédito. A fonte dessa imperfeição de mercado não é uma questão investigada por este trabalho. O consumo e quantidade de trabalho ofertada pelos agentes *rule-of-thumb* são representados, respectivamente, por C_t^r e N_t^r. Seguindo a mesma notação, o consumo e quantidade de trabalho ofertada pelos agentes ricardianos são representados, respectivamente, por C_t^o e N_t^o. Um agente *rule-of-thumb* possui a função de utilidade de um período:

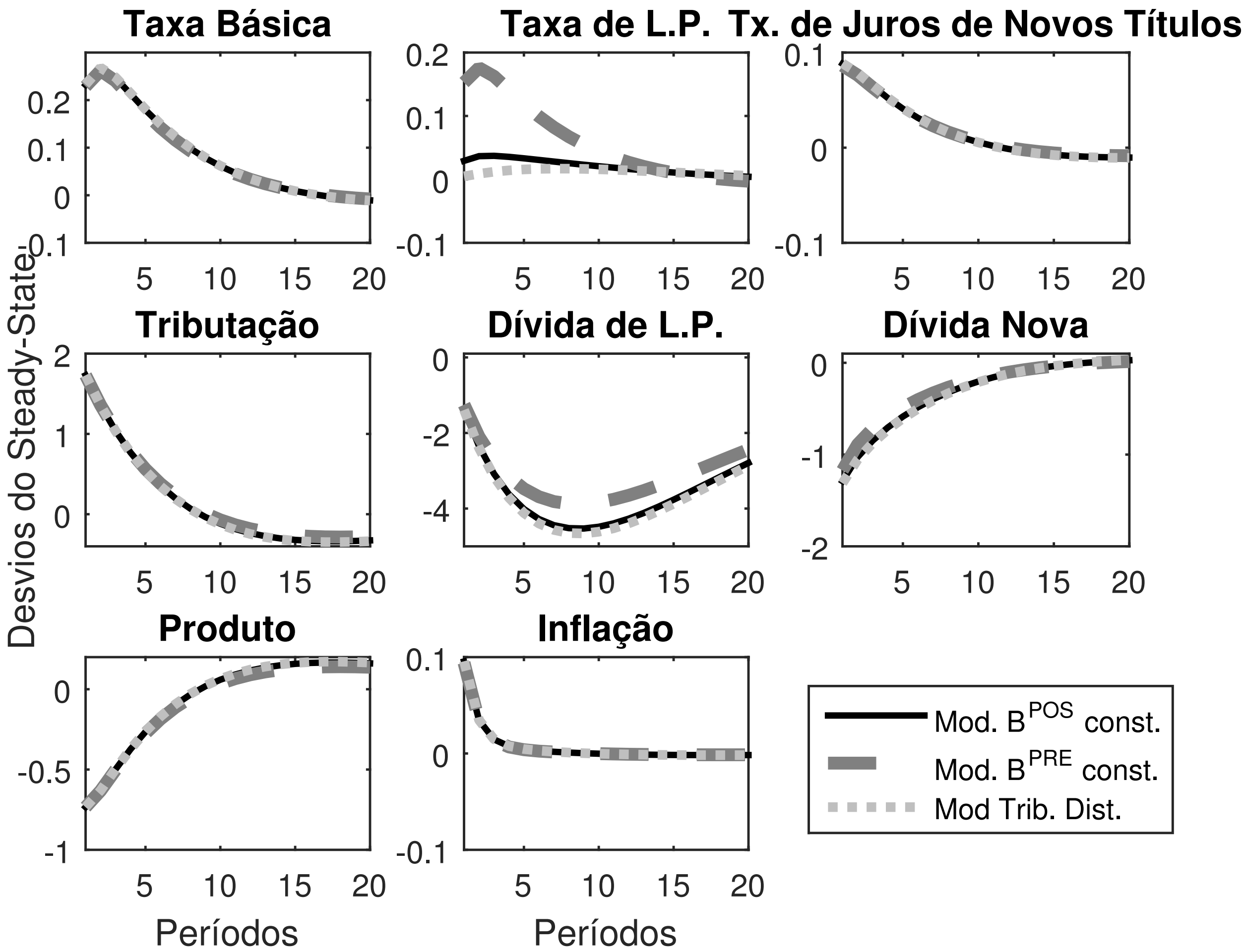
$$(\frac{C_t^{r\,1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{N_t^{r\,1+\varphi}}{1+\varphi})$$

e estão sujeitos a restrição orçamentária, que é, exatamente, a renda líquida de impostos[5]. É essa relação que define o nível de consumo a cada período:

$$C_t^r = (1-\tau_t)\frac{W_t}{P_t}N_t^r$$

[5] Supõe-se que a parcela da renda tributada, τ_t, é a mesma para todos os agentes.

Figura 4: Comparação entre funções de resposta a impulso após um choque fiscal do modelo de Krause & Moyen e do modelo com LFTs



Como o mercado de trabalho é competitivo, os agentes *rule-of-thumb* possuem a função de oferta de trabalho:

$$N_t^{r\varphi} C_t^{r\sigma} = (1 - \tau_t) \frac{W_t}{P_t}$$

5.1 Agregação

A agregação é dada pela média ponderadas dos indivíduos:

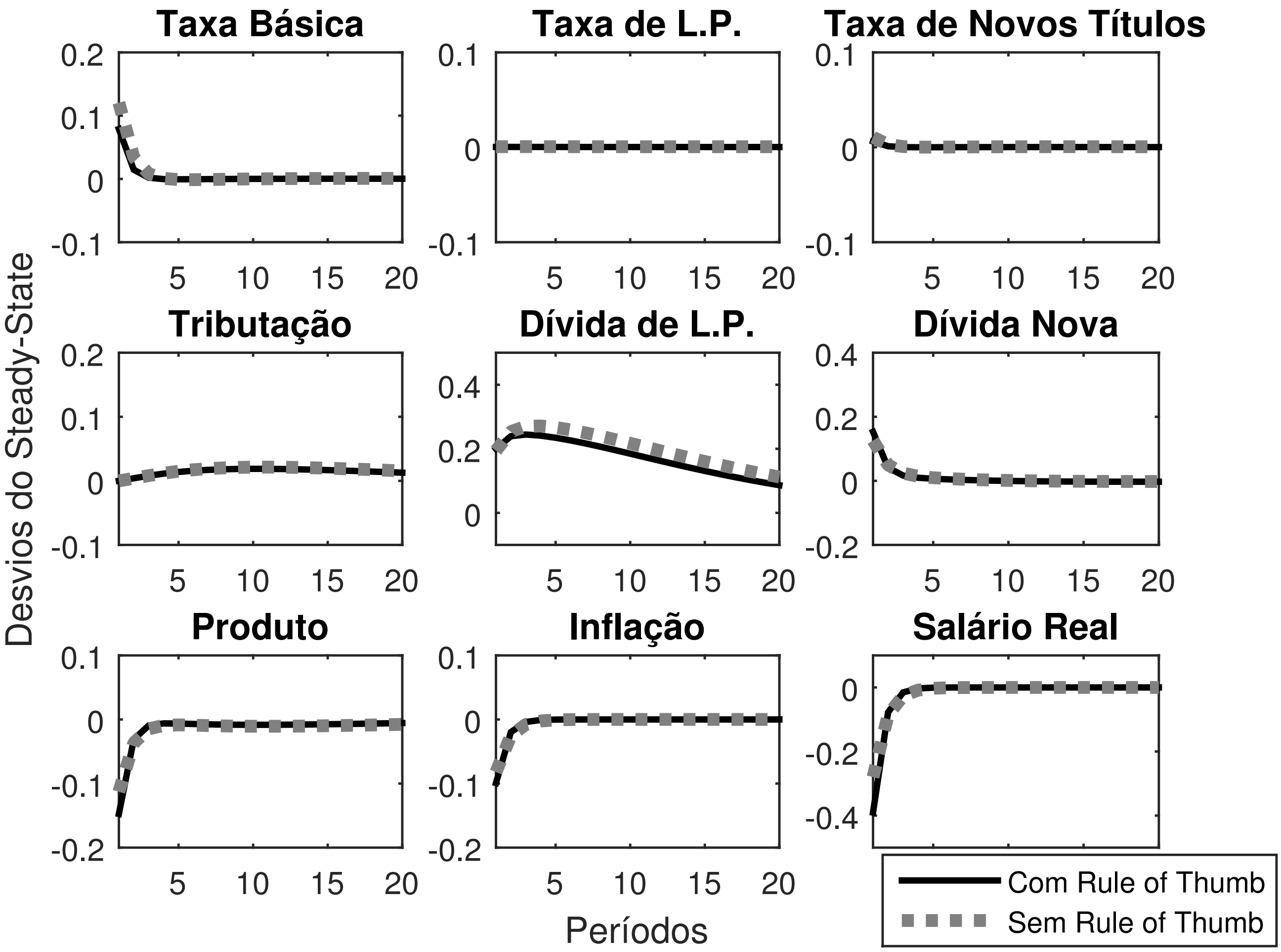
$$C_t = \gamma C_t^o + (1 - \gamma) C_t^r$$

e

$$N_t = \gamma N_t^o + (1 - \gamma) N_t^r$$

sendo C_t^o o consumo dos agentes otimizadores e C_t^r o consumo dos agentes *rule-of-thumb*. A notação é análoga para a quantidade de trabalho.

Figura 5: Comparação entre funções de resposta a impulso após a ocorrência de um choque monetário do modelo de Krause & Moyen com e sem agentes não ricardianos



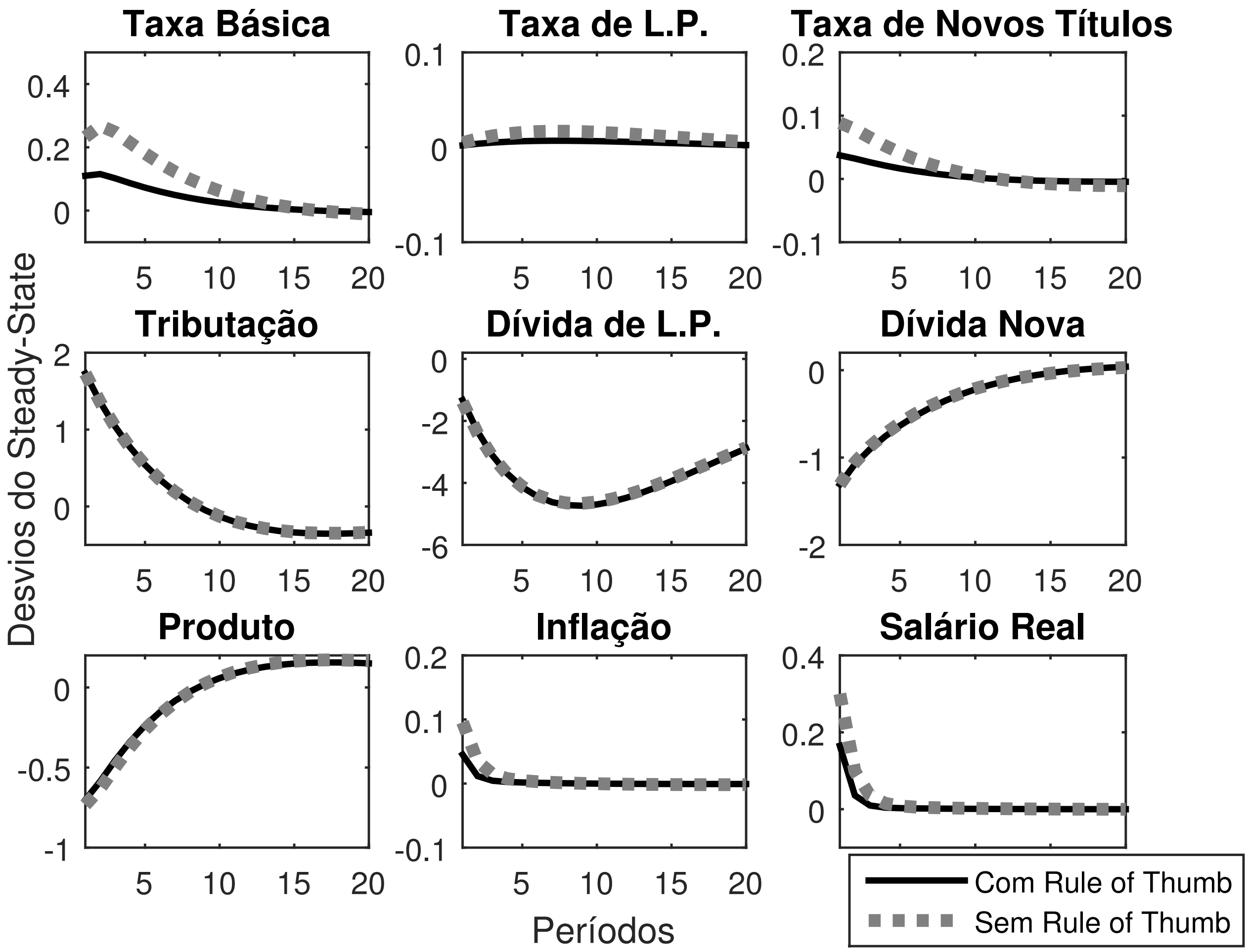
5.2 Calibração e Simulação

O parâmetro γ pode ser pensado como a parcela do consumo dos agentes *rule of thumb* no consumo total. Seguindo a calibração de De Castro *et al.* (2015), o valor do parâmetro é igual ao número do agentes que recebem até 2,5 salários mínimos segundo a Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios (PNAD). O valor é de 0,40.

A figura 5 apresenta as funções de resposta do modelo de Krause & Moyen (2016) com e sem agentes não ricardianos, sendo as primeiras representadas pelas linhas contínuas pretas e as segundas pelas linhas tracejadas cinzas escuros. Observa-se que os modelos possuem funções de resposta a impulso semelhantes para todas as variáveis. A modificação da estrutura da dívida pública, só apresentou efeito na taxa de juros de longo prazo e os gráficos comparando as funções de resposta a impulso foram omitidos.

Na figura 6, observa-se que a dinâmica após o choque fiscal é semelhante para todas as variáveis, com exceção da taxa básica de juros. Essa aumenta mais acentuadamente no modelo sem agentes *rule of thumb*. Em ambos os modelos, o choque fiscal leva a uma contração do produto, resultado encontrado também por Galí *et al.* (2007). Os autores encontram que choques fiscais em modelos com agentes *rule of thumb* e com preços rígidos são expansionistas no produto.

Figura 6: Comparação entre funções de resposta a impulso após a ocorrência de um choque fiscal do modelo de Krause & Moyen com e sem agentes não ricardianos



6 Conclusão

Pastore (1996) introduziu, na literatura nacional, o argumento de que a existência de um título pós-fixado - as Letras Financeiras do Tesouro Nacional (LFTs) - enfraquece a eficácia da política monetária. Usando como motivação a experiência brasileira e a discussão sobre títulos LFTs, generalizou-se a estrutura da dívida de longo prazo do modelo de Krause & Moyen (2016) para permitir a existência de um título pós fixado.

Com a introdução do novo título, a taxa de juros de longo prazo passou a responder a mudanças da taxa de juros básica da economia. Também se observa que, quando ocorre um choque monetário e o ajuste é feito exclusivamente via dívida pós-fixada (pré-fixada), o estoque da dívida pós-fixada (pré-fixada) de longo prazo e a emissão de novos títulos pós-fixados (pré-fixados) aumentam. O interessante a se notar é que emite-se mais dívida pós-fixada do que pré-fixada. O argumento de que a existência de títulos pós-fixados diminui a eficácia da política monetária em contrair a demanda não se mantém no modelo desenvolvido.

Seguindo Barro (1999), foram introduzidos ao modelo agentes *rule-of-thumb*, mas os efeitos foram mínimos e a dinâmica só se mostrou diferente para a taxa básica de juros e exclusivamente após a ocorrência de um choque fiscal.

Referências

Alfaro, Laura, & Kanczuk, Fabio. 2010. Nominal versus indexed debt: A quantitative horse race. *Journal of International Money and Finance*, **29**(8), 1706–1726.

Angeletos, George-Marios. 2002. Fiscal Policy with Noncontingent Debt and the Optimal Maturity Structure. *Quarterly Journal of Economics*, **117**(3), 1105–1131.

Arida, Pérsio. 2006. As Letras Financeiras do Tesouro em seu vigésimo aniversário. *In:* Bacha, Edmar, & Oliveira Filho, Luiz Chrysostomo (eds), *Mercado de capitais e dívida pública.* Rio de Janeiro: Contracapa.

Barro, Robert J. 1974. Are government bonds net wealth? *Journal of Political Economy*, **82**(6), 1095–1117.

Barro, Robert J. 1999. Notes on optimal debt management. *Journal of Applied Economics*, **2**(2), 281–289.

Buera, Francisco, & Nicolini, Juan Pablo. 2004. Optimal maturity of government debt without state contingent bonds. *Journal of Monetary Economics*, **51**(3), 531–554.

Carneiro, Dionísio Dias. 2006. Letras Financeiras do Tesouro e normalidade financeira: haverá um "peso problem". *Mercado de capitais e dívida pública. Rio de Janeiro: Contracapa*, 197–218.

Chamley, Christophe. 1986. Optimal taxation of capital income in general equilibrium with infinite lives. *Econometrica*, **54**(3), 607–622.

De Castro, Marcos R, Gouvea, Solange N, Minella, Andre, Santos, Rafael, & Souza-Sobrinho, Nelson F. 2015. SAMBA: Stochastic analytical model with a Bayesian approach. *Brazilian Review of Econometrics*, **35**(2).

Diamond, Peter A. 1965. National debt in a neoclassical growth model. *The American Economic Review*, **55**(5), 1126–1150.

Divino, Jose Angelo, & Silva Junior, Rogerio Lucio Soares. 2013. Public Debt Composition and Monetary Policy. *Anais do XXXV Encontro Brasileiro de Econometria*, **1**, 1–28.

Galí, Jordi, López-Salido, J David, & Vallés, Javier. 2007. Understanding the effects of government spending on consumption. *Journal of the European Economic Association*, **5**(1), 227–270.

Krause, Michael U, & Moyen, Stéphane. 2016. Public debt and changing inflation targets. *American Economic Journal Macroeconomics*, **8**.

Lara Resende, André. 2006. Em defesa dos títulos de indexação financeira. *In:* Bacha, Edmar, & Oliveira Filho, Luiz Chrysostomo (eds), *Mercado de capitais e dívida pública.* Rio de Janeiro: Contracapa.

Loyo, Eduardo. 2006. Política monetária e alongamento da dívida pública. *In:* Bacha, Edmar, & Oliveira Filho, Luiz Chrysostomo (eds), *Mercado de capitais e dívida pública.* Rio de Janeiro: Contracapa.

Lucas, Robert E, & Stokey, Nancy L. 1983. Optimal fiscal and monetary policy in an economy without capital. *Journal of Monetary Economics*, **12**(1), 55–93.

Modigliani, Franco. 1961. Long-run implications of alternative fiscal policies and the burden of the national debt. *The Economic Journal*, **71**(284), 730–755.

Pastore, Affonso Celso. 1996. Por que a política monetária perde eficácia? *Revista Brasileira de Economia*, **50**(3), 281–311.

Ramsey, Frank P. 1927. A Contribution to the Theory of Taxation. *The Economic Journal*, **37**(145), 47–61.

Roley, V Vance. 1979. A theory of federal debt management. *The American Economic Review*, **69**(5), 915–926.

Woodford, Michael. 2001. Fiscal Requirements for Price Stability. *Journal of Money, Credit and Banking*, **33**(3), 669–728.

Woodford, Michael. 2013. Macroeconomic Analysis Without the Rational Expectations Hypothesis. *Annual Review of Economics*, **5**(1), 303–346.

A Resolução do Problema do Consumidor

O problema do consumidor é maximizar a função de utilidade:

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\phi}}{1+\phi}\right)$$

sujeito à restrição orçamentária modificada:

$$\begin{aligned} & C_t + \frac{B_t}{P_t} + \frac{(B_t^{POS} - (1-\alpha)B_{t-1}^{POS}) + (B_t^{PRE} - (1-\alpha)B_{t-1}^{PRE})}{P_t} \\ & = (1+i_{t-1})\frac{B_{t-1}}{P_t} + (\alpha + i_{t-1}^L)\frac{B_{t-1}^{PRE}}{P_t} + (\alpha + i_{t-1}^L)\frac{B_{t-1}^{POS}}{P_t} + (1-\tau_t)\frac{W_t}{P_t}N_t + Z_t \end{aligned}$$

e à equação da taxa média de juros do estoque de dívida de longo prazo:

$$(i_t^L - i_t)B_t^{POS} + (i_t^L - i_t^{PRE,n})B_t^{PRE} = (1-\alpha)(i_{t-1}^L - i_{t-1})B_{t-1}^{POS} + (1-\alpha)(i_{t-1}^L - i_t^{PRE,n})B_{t-1}^{PRE}$$

Derivando para C_t, encontram-se a equação:

$$\lambda_t = C_t^{-\sigma}$$

Derivando para N_t:

$$N_t^{\phi} = \lambda_t (1-\tau_t)\frac{W_t}{P_t}$$

Encontrando a equação de oferta de trabalho:

$$\frac{N_t^{\phi}}{C_t^{-\sigma}} = (1-\tau_t)\frac{W_t}{P_t} \tag{23}$$

Derivando para B_t, encontra-se:

$$\frac{\lambda_t}{P_t} = E_t \beta \frac{\lambda_{t+1}}{P_{t+1}}[1+i_t]$$

ou, simplificando:

$$1 = E_t \beta \frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t}\frac{P_t}{P_{t+1}}[1+i_t]$$

Derivando para B_t^{POS}:

$$\frac{\lambda_t}{P_t} + \beta E_t \frac{\lambda_{t+1}}{P_{t+1}}(1+i_t^L) - \mu_t(i_t^L - i_t) + \beta E_t(1-\alpha)\mu_{t+1}(i_t^L - i_t) = 0$$

Derivando para B_t^{PRE}:

$$-\frac{\lambda_t}{P_t} + E_t \beta \frac{\lambda_{t+1}}{P_{t+1}}(1+i_t^L) - \mu_t(i_t^L - i_t^{PRE,n}) + \beta(1-\alpha)E_t\mu_{t+1}(i_t^L - i_{t+1}^{PRE,n}) = 0$$

Derivando para i_t^L:

$$\beta E_t \frac{\lambda_{t+1}}{P_{t+1}}[B_t^{POS} + B_t^{PRE}] - \mu_t[B_t^{POS} + B_t^{PRE}] + \beta E_t(1-\alpha)\mu_{t+1}[B_t^{POS} + B_t^{PRE}] = 0$$

Simplificando a derivada de B_t^{POS} e colocando $(i_t^L - i_t)$ em evidência:

$$-\frac{\lambda_t}{P_t} + \beta E_t \frac{\lambda_{t+1}}{P_{t+1}}(1+i_t^L) - E_t(\mu_t - \beta(1-\alpha)E_t\mu_{t+1})(i_t^L - i_t) = 0$$

usando o resultado da simplificação da derivada de i_t^L:

$$-\frac{\lambda_t}{P_t} + \beta E_t \frac{\lambda_{t+1}}{P_{t+1}}(1+i_t^L) - \beta E_t \frac{\lambda_{t+1}}{P_{t+1}}(i_t^L - i_t) = 0$$

simplificando encontramos uma equação idêntica a equação (8):

$$1 = \beta E_t \frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t}\frac{P_t}{P_{t+1}}(1+i_t)$$

Simplificando a derivada de B_t^{PRE}:

$$-\frac{\lambda_t}{P_t} + \beta E_t \frac{\lambda_{t+1}}{P_{t+1}}(1+i_t^L) - \mu_t(i_t^L - i_t^{PRE,n}) + (1-\alpha)E_t\mu_{t+1}(i_t^L - i_{t+1}^{PRE,n}) = 0$$

rearranjando a equação

$$\frac{\lambda_t}{P_t} = \beta E_t \frac{\lambda_{t+1}}{P_{t+1}}(1+i_t^L) - \mu_t i_t^L + \mu_t i_t^{PRE,n} + \beta E_t(1-\alpha)\mu_{t+1}i_t^L - \beta E_t(1-\alpha)\mu_{t+1}i_{t+1}^{PRE,n}$$

colocando i_t^L em evidência

$$\frac{\lambda_t}{P_t} = \beta E_t \frac{\lambda_{t+1}}{P_{t+1}}(1+i_t^L) - E_t(\mu_t - \beta(1-\alpha)\mu_{t+1})i_t^L + \mu_t i_t^{PRE,n} - \beta E_t(1-\alpha)\mu_{t+1}i_{t+1}^{PRE,n})$$

usando o resultado da simplificação da derivada de i_t^L:

$$\frac{\lambda_t}{P_t} = \beta E_t \frac{\lambda_{t+1}}{P_{t+1}}(1+i_t^L) - \beta E_t \frac{\lambda_{t+1}}{P_{t+1}} i_t^L + E - t(\beta \frac{\lambda_{t+1}}{P_{t+1}} + \beta(1-\alpha)\mu_{t+1})i_t^{PRE,n} - \beta(1-\alpha)\mu_{t+1}i_{t+1}^{PRE,n})$$

$$\frac{\lambda_t}{P_t} = \beta E_t \frac{\lambda_{t+1}}{P_{t+1}}(1 - i_{t+1}^{PRE,n}) - \beta E_t(1-\alpha)\mu_{t+1}(i_{t+1}^{PRE,n} - i_t^{PRE,n})$$

Usando a normalização do multiplicador de Krause & Moyen (2016), a equação fica exatamente igual a equação (9):

$$1 = E_t \beta E_t \frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t}\frac{P_t}{P_{t+1}}[1 + i_t^{L,n} - \mu_{t+1}(1-\alpha)\Delta i_{t+1}^{PRE,n}]$$

Simplificando a derivada de i_t^L e dividindo por $B_t^{POS} + B_t^{PRE}$:

$$\beta E_t \frac{\lambda_{t+1}}{P_{t+1}} - \mu_t + \beta E_t(1-\alpha)\mu_{t+1} = 0$$

Usando a normalização do multiplicador de Krause & Moyen (2016), a equação fica exatamente igual a equação (10):

$$\mu_t = \beta E_t \frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t}\frac{P_t}{P_{t+1}}(1 + (1-\alpha)\mu_{t+1})$$

B Modelo de Krause & Moyen (2016)

No modelo apresentado por Krause & Moyen (2016), a dívida de longo prazo é composta exclusivamente por títulos pré-fixados. O problema do consumidor é maximizar sua utilidade sujeito à restrição orçamentária, à equação de movimento do estoque de títulos, (1), e à equação que determina a taxa média de juros dos títulos de longo prazo, (2). Ou seja, os agentes maximizam o valor presente da utilidade intertemporal,

$$\max E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{N_t^{1+\varphi}}{1+\varphi}\right)$$

sendo C_t um índice de consumo e N_t a quantidade de horas de trabalho ofertada, respeitando as equações:

$$\begin{aligned}
&\frac{B_t}{P_t} + \frac{B_t^{L,n}}{P_t} + C_t = (1+i_{t-1})\frac{B_{t-1}}{P_t} + (\alpha + i_{t-1}^L)\frac{B_{t-1}^L}{P_t} + \frac{W_t}{P_t}N_t + Z_t + T_t \\
&B_t^L = (1-\alpha)B_{t-1}^L + B_t^{L,n} \\
&B_t^L i_t^L = B_t^{L,n} i_t^{L,n} + (1-\alpha)B_{t-1}^L i_{t-1}^L
\end{aligned}$$

Na restrição orçamentária, P_t é o índice de preços, i_t é a taxa básica de juros da economia, B_t é o título público de um período, W_t é o salário nominal, Z_t é uma transferência das firmas e τ_t é um imposto distorcivo. As variáveis $B_t^{L,n}$, B_t^L, $i_t^{L,n}$ e i_t^L são, respectivamente, a quantidade de títulos de longo prazo recém emitidos, a quantidade de títulos de longo prazo, a taxa de juros de emissão dos títulos de longo prazo e a taxa de juros média de longo prazo.

Das condições de primeira ordem, encontra-se uma equação para a oferta de trabalho, uma equação de Euler para o título de um período, B_t, uma equação de Euler para o multiplicador de Lagrange e uma equação de Euler para o título de longo prazo:

$$N_t^{\varphi} C_t^{\sigma} = (1-\tau_t)\frac{W_t}{P_t}$$

$$1 = E_t \beta \left\{ \left(\frac{C_t}{C_{t+1}}\right)^{-\sigma} \frac{P_t}{P_{t+1}} \right\} (1+i_t)$$

$$\mu_t = \beta E_t \left\{ \left(\frac{C_t}{C_{t+1}}\right)^{-\sigma} \frac{P_t}{P_{t+1}} [1 - \mu_{t+1}(1-\alpha)] \right\}$$

$$1 = \beta E_t \left\{ \left(\frac{C_t}{C_{t+1}}\right)^{-\sigma} \frac{P_t}{P_{t+1}} [(1+i_t^{L,n}) - \mu_{t+1}(1-\alpha)\Delta i_{t+1}^{L,n}] \right\}$$

sendo $\Delta i_{t+1}^{L,n} = i_{t+1}^{L,n} - i_t^{L,n}$.

O resto do modelo é idêntico ao modelo apresentado na seção 2. A principal diferença é a equação que determina a taxa média de juros dos títulos de longo prazo.