

Preferências CRRA e recursivas são equivalentes? Estimando a elasticidade de substituição intertemporal

Fábio Augusto Reis Gomes

Departamento de Economia, FEA-RP, USP

Av. Bandeirantes 3900, Monte Alegre, CEP 14040-905, Ribeirão Preto/SP, Brasil

E-mail: fabiogomes@fearp.usp.br

Resumo

A elasticidade de substituição intertemporal (ESI) é comumente estimada regredindo-se a taxa de crescimento do consumo no retorno esperado de um ativo qualquer. Esta especificação decorre da equação de Euler do consumidor representativo cujas preferências são representadas pela função utilidade CRRA, mas também é associada a preferências recursivas, que relaxam a restrição que a ESI é o recíproco do coeficiente de aversão relativa ao risco. Assumindo preferências recursivas mostramos que ao regredir a taxa de crescimento de consumo contra o retorno esperado de um ativo particular, o estimador de mínimos quadrados em dois estágios não produz estimativas consistentes da ESI. Usando dados efetivos e simulados encontramos evidência de que a estimação baseada na utilidade CRRA não é capaz de estimar adequadamente a ESI, quando o processo gerador dos dados é proveniente de preferências recursivas *a la* Epstein e Zin (1989).

Palavras-chave: consumo; equação de Euler; utilidade da CRRA; preferências recursivas; elasticidade de substituição intertemporal.

Códigos Jel: C22, D91, E21.

Abstract

The elasticity of intertemporal substitution (EIS) is commonly estimated by regressing the consumption growth rate against the expected return on assets. This specification comes from the Euler equation of the representative consumer whose preferences are represented by CRRA utility function, but it is also associated with recursive preferences, which does not assume that the EIS is the reciprocal of the coefficient of relative risk aversion. Assuming recursive preferences, we show that the such usual strategy combined with the two-step least squares estimator does not yield consistent estimates of the EIS. Using effective and simulated data, we found evidence that the estimation based on CRRA utility is not able to accurately recover the EIS, when the data generating process is given by recursive preferences *a la* Epstein and Zin (1989).

Keywords: consumption; Euler equation; CRRA utility; recursive preferences; intertemporal elasticity of substitution.

Área 4 - Macroeconomia, Economia Monetária e Finanças

1 Introdução

Modelos de ciclo de vida, nos quais o consumidor maximiza o bem-estar ao longo de toda a vida sujeito a uma sequência de restrições orçamentárias, tornaram-se a forma padrão de modelar a alocação intertemporal de consumo e de poupança (Browning e Crossley, 2001). Naturalmente, para cada função utilidade usada para representar as preferências do consumidor, o comportamento otimizador do consumidor é caracterizado por uma equação de Euler específica que, em princípio, pode ser estimada e testada. Neste trabalho, estamos interessados em dois casos: utilidade CRRA, cuja a aversão relativa ao risco é constante, e preferências recursivas como proposto por Epstein e Zin (1989).¹

Em um artigo seminal, Hall (1978) resolveu o problema intertemporal do consumidor representativo assumindo uma utilidade quadrática, o que culminou na conhecida hipótese do passeio aleatório do consumo. No entanto, os inconvenientes desta utilidade, como a existência de um ponto de saciedade, motivaram a literatura posterior a adotar utilidades alternativas mais apropriadas, como a CRRA. Neste caso, a equação de Euler do consumidor não é mais descrita por um passeio aleatório, antes a taxa de crescimento do consumo passa a depender do retorno esperado dos ativos, como segue:

$$\Delta \ln(c_t) = \alpha_{1,i} + \psi E_{t-1}[r_{i,t}] + \varepsilon_t^c, \quad i = 1, \dots, N \quad (1)$$

em que c_t é o nível de consumo; $r_{i,t}$ é o retorno do i -ésimo ativo no qual o consumidor investe; N é o número de ativos na economia; $E_{t-1}[\cdot]$ é o operador de esperança condicional as informações disponíveis no período $t - 1$; ε_t^c é o termo de erro (Hansen e Singleton, 1983; Hall, 1988). A equação (1) implica que a taxa de crescimento do consumo depende diretamente do retorno esperado do ativo i , uma vez que o parâmetro ψ é positivo, ou ao menos deveria ser positivo (Okubo, 2011). Este parâmetro é a elasticidade de substituição intertemporal, daqui em diante, ESI. Esta elasticidade é um determinante fundamental da alocação de consumo (e poupança) entre os períodos de tempo.

Uma característica importante da utilidade CRRA é a conexão entre a ESI e o coeficiente de aversão relativa ao risco: um é o recíproco do outro. No entanto, em certo sentido, esta conexão automática não é desejável, uma vez que essas quantidades estão relacionadas a conceitos distintos. A ESI mede a disposição do agente para substituir consumo ao longo do tempo, sendo bem definida mesmo na ausência de qualquer risco. Por sua vez, a aversão relativa ao risco está relacionada ao desejo do agente de evitar estados da natureza desfavoráveis, sendo bem definida mesmo na ausência de qualquer decisão intertemporal (Hall, 1988).

Por meio de preferências recursivas, Epstein e Zin (1989) desvencilharam a aversão relativa ao risco e a substituição intertemporal, apresentando, assim, uma abordagem mais geral. No entanto, sob tais preferências recursivas a equação (1) só é válida para o retorno esperado do portfólio ótimo do consumidor. Em outras palavras, a equação (1) não é válida para um ativo particular qualquer no qual o consumidor invista (Campbell e Viceira, 1999; Campbell e Viceira, 2002; Campbell, 2003).

Hall (1988) remeteu às preferências recursivas com o objetivo de justificar por que o coeficiente do retorno esperado na equação (1) identifica a ESI, mas não deve ser visto como o inverso do coeficiente de aversão relativa ao risco. Tal esforço está relacionado às estimativas da ESI próximas de zero obtidas por Hall (1988) que, por sua vez, implicariam estimativas muito elevadas do coeficiente de aversão relativa ao risco, o que não é razoável. No entanto, o argumento de Hall (1988) seria válido somente se uma medida do retorno do portfólio ótimo do consumidor fosse empregada, ao passou que ele empregou retornos de ativos particulares, tais como retornos de ações e de títulos do governo, o que se tornou, inclusive, o padrão na literatura (Mulligan, 2002; Dacy e Hasanov, 2011). Dado que o consumidor investe em vários ativos, é bastante improvável que um único ativo seja capaz de replicar as características do portfólio ótimo do consumidor. Nesse sentido, é importante investigar quais são as consequências de estimar a equação (1) tanto com ativos particulares quanto com alguma medida do portfólio ótimo do consumidor.

Epstein e Zin (1989) apresentaram outra equação de Euler que permite a identificação da ESI e do coeficiente de aversão relativa ao risco e que emprega o retorno de dois ativos, sendo um deles

¹ A sigla CRRA vem do termo em inglês *constant-relative-risk-aversion*.

necessariamente o retorno do portfólio ótimo do consumidor. Como detalhado na Seção 2, ao comparar tal equação de Euler e a equação (1), fica evidente que esta equação omite o retorno do portfólio ótimo do consumidor, resultando em um modelo econométrico com erro de especificação. Portanto, do ponto de vista econométrico, tal cenário corresponde ao problema de omissão de variável relevante que, em geral, culmina em estimativas inconsistentes. Com efeito, assumindo preferências recursivas *a la* Epstein e Zin (1989), mostramos que o estimador de mínimos quadrados em dois estágios (MQ2E) aplicado à equação (1) não produz estimativas consistentes da ESI.

Para esclarecer esta questão, estimamos as equações de Euler provenientes da utilidade CRRA e de preferências recursivas por meio de dados efetivos e simulados. Tais estimações requerem uma medida do retorno agregado da riqueza total da economia, isto é, o retorno do portfólio ótimo do consumidor representativo. Mulligan (2002) construiu tal medida para a economia norte-americana, denominada retorno do capital agregado, que empregamos em nossas análises empíricas. Os resultados com base em dados efetivos sugerem que o uso da equação (1), juntamente com o retorno de um ativo particular, gera estimativas da ESI inferiores às obtidas quando preferências recursivas *a la* Epstein e Zin (1989) são adotadas. Os resultados das simulações sugerem que as estimativas da ESI com base na equação (1) são severamente viesadas. A simulação pressupõe que o processo gerador dos dados depende de preferências recursivas, mas estimamos a ESI usando o modelo com erro de especificação baseado na utilidade CRRA. Para valores razoáveis da própria ESI e do coeficiente de aversão relativa ao risco, encontrou-se evidências de que as estimativas da ESI são viesadas em direção a zero, o que pode levar à conclusão prematura e equivocada de que a ESI é próxima de zero.

Este artigo está assim organizado. A Seção 2 apresenta os modelos de consumo e as equações de Euler. A Seção 3 apresenta a metodologia econométrica e os resultados com base em dados efetivos. A Seção 4 apresenta os procedimentos da simulação e resultados dos mesmos. Finalmente, a Seção 5 sumariza as conclusões deste trabalho.

2 Elasticidade intertemporal de substituição

Depois da crítica de Lucas (1976) sobre a instabilidade de parâmetros estimados por meio de formas reduzidas, pesquisadores esforçaram-se para identificar e estimar parâmetros estruturais. Na decisão de consumo um parâmetro estrutural fundamental é a ESI, que mede a disposição do agente para substituir o consumo ao longo do tempo. Sob a utilidade CRRA, este parâmetro mede quão intensivamente a taxa de crescimento de consumo responde a alterações no retorno esperado de ativos comprados pelo consumidor - equação (1). De fato, essa estratégia de identificação é frequentemente usada para estimar a ESI, conforme detalhado na Seção 2.1.

A Seção 2.2 apresenta as preferências recursivas propostas por Epstein e Zin (1989). Neste caso, a taxa de crescimento do consumo não é mais uma função do retorno esperado de um ativo particular, o que lança dúvidas sobre a estratégia comumente utilizada para estimar a ESI. No entanto, a estimação da equação (1) com base em ativos particulares, como ações ou títulos do governo, têm sido vista como compatível com preferências *a la* Epstein e Zin (Hall, 1988; Yogo, 2004). Por esta razão, na Seção 2.3 é feita uma comparação detalhada entre essas duas preferências. Adiantamos que são obtidas evidências claras de que a dúvida sobre a compatibilidade das equações de Euler provenientes da utilidade CRRA e de preferências recursivas é pertinente.

2.1 Utilidade CRRA

Suponha que as preferências do consumidor são representadas pela utilidade CRRA, como segue:

$$u(c_t) = \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \quad (2)$$

em que γ é o coeficiente de aversão relativa ao risco. Esta função utilidade produz a conhecida equação de Euler do consumidor dada por

$$E_{t-1} \left[\beta \left(\frac{c_t}{c_{t-1}} \right)^{-\frac{1}{\psi}} R_{i,t} \right] = 1 \quad (3)$$

em que $R_{i,t}$, $i = 1, \dots, N$, é o rendimento bruto do i -ésimo ativo comprado pelo consumidor, ψ é a ESI e β é o fator de desconto intertemporal. Assumindo que o consumo e o retorno tem distribuição conjunta log-normal, então a equação de Euler (3) torna-se:

$$\Delta \ln c_t = \psi \ln \beta + \psi E_{t-1} [r_{i,t}] + \frac{\psi}{2} \sigma_i^2 + \varepsilon_t^c \quad (4)$$

em que $r_{i,t} \equiv \ln(R_{i,t})$, ε_t^c é uma inovação, tal que $E_{t-1}[\varepsilon_t^c] = 0$, e σ_i^2 é um termo de variância. Examinando a equação (4), notamos que $\alpha_{1,i} = \psi(\ln \beta + 0.5\sigma_i^2)$ na equação (1). De todo modo, as equações (1) e (4) implicam que a ESI conecta a taxa de crescimento do consumo e o retorno esperado do i -ésimo ativo adquirido pelo consumidor.

Vários estudos estimam a equação (4) usando os retornos de títulos do governo e/ou de ações para a economia norte-americana. Por exemplo, Mankiw (1981), Hall (1988) e Campbell e Mankiw (1989) encontraram estimativas da ESI marginalmente significativas e inferiores a 0.25. Patterson e Pesaran (1992) obtiveram estimativas estatisticamente significativas da ESI, mas também abaixo de 0.25. Além disso, Hahm (1998) encontrou resultados semelhantes, com a ESI estimada em torno de 0.3. Mais recentemente, Campbell (2003) não rejeitou a hipótese nula de que a ESI é igual a zero. Yogo (2004) encontrou evidências que a maioria das estimativas para a ESI referente a onze países desenvolvidos, incluindo os EUA, é afetada pelo problema de instrumentos fracos. No entanto, métodos robustos ao problema de instrumentos fracos não alteraram a conclusão principal, a saber, a ESI não é estatisticamente diferente de zero (Yogo, 2004; Gomes e Paz, 2011).

Sob a utilidade CRRA, a ESI é o recíproco do coeficiente de aversão relativa ao risco, isto é, $\psi = 1/\gamma$. Isso significa que, se os consumidores são muito avessos ao risco, eles devem ter ao mesmo tempo uma baixa disposição em substituir consumo intertemporalmente. Nesta perspectiva, a equação (4) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\Delta \ln c_t = \frac{\ln \beta}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} E_{t-1} [r_{i,t}] + \frac{1}{2\gamma} \sigma_i^2 + \varepsilon_t^c \quad (5)$$

No entanto, até mesmo Hall (1988) relutou em interpretar o coeficiente do retorno esperado como o inverso da aversão relativa ao risco. Hall (1988) argumentou que, por meio da regressão da taxa de crescimento do consumo contra o retorno esperado de um ativo é possível recuperar a ESI, mas não o parâmetro de aversão relativa ao risco. Naquela época, o argumento de Hall (1988) foi baseado em estudos sobre preferências recursivas que estavam em desenvolvimento, incluindo, por exemplo, uma versão do trabalho de Epstein e Zin (1989).² Para resumir, Hall (1988) argumentou que a equação (4) é compatível com a abordagem de Epstein e Zin e, por este motivo, esta equação é útil para estimar a ESI, mas não o coeficiente de aversão relativa ao risco. A próxima Seção apresenta tal abordagem e elucida as hipóteses que subsidiam o argumento de Hall (1988).

2.2 Preferências recursivas

O trabalho de Epstein e Zin (1989) generalizou a estrutura recursiva introduzida por Koopmans (1960) para modelos determinísticos bem como as especificações analisadas por Kreps e Porteus (1978) para o caso estocástico. Para ser preciso, Epstein e Zin (1989) assumiram que os consumidores escolhem o consumo e quanto investir em cada ativo de modo a maximizar a utilidade ao longo da vida, que é definida recursivamente por:

² Para ser preciso, Hall (1988) cita um *working paper* do que viria a ser o artigo Epstein e Zin (1989).

$$U_t = \left[(1 - \beta) C_t^{\frac{1-\gamma}{\theta}} + \beta \left(E_t(U_{t+1}^{1-\gamma}) \right)^{\frac{1}{\theta}} \right]^{\frac{\theta}{1-\gamma}} \quad (6)$$

em que $\theta = (1 - \gamma)/(1 - \psi^{-1})$ e, como antes, β é o fator subjetivo de desconto, γ é o coeficiente de aversão relativa ao risco e ψ é a ESI. A restrição orçamentária do consumidor é descrita por $W_{t+1} \leq M_{t+1}(W_t - C_t)$, em que W é a riqueza e M é o rendimento bruto da riqueza total. Nesta estrutura, Epstein e Zin (1991) derivaram as seguintes equações de Euler:

$$E_{t-1} \left\{ \left[\beta \left(\frac{C_t}{C_{t-1}} \right)^{-\frac{1}{\psi}} M_t \right]^{\theta} \right\} = 1 \quad (7)$$

$$E_{t-1} \left\{ \left[\beta \left(\frac{C_t}{C_{t-1}} \right)^{-\frac{1}{\psi}} \right]^{\theta} \left[\frac{1}{M_t} \right]^{1-\theta} R_{i,t} \right\} = 1 \quad (8)$$

em que o portfólio ótimo, M_t , é dado por $\sum_{i=1}^N a_{i,t-1} R_{i,t}$, e $a_{i,t-1}$, $i = 1, \dots, N$, é o peso ótimo é escolhido pelo consumidor para cada ativo. Em outras palavras, $a_{i,t-1}$ é a fração da riqueza investida no i -ésimo ativo.

Assumindo log-normalidade, a equação de Euler (7) torna-se:

$$\Delta \ln c_t = \alpha_{2,i} + \psi E_{t-1}[m_t] + \varepsilon_t^c \quad (9)$$

em que $m_t \equiv \ln(M_t)$ e ε_t^c é uma inovação, tal que $E_{t-1}[\varepsilon_t^c] = 0$. Além disso, $\alpha_{2,i} = \psi(\ln \beta + 0.5\sigma_i^2/\theta)$, em que σ_i^2 é um termo de variância. A equação (9) permite a identificação da ESI e, conforme Hall (1988) argumentou, tal parâmetro não pode ser interpretado como o inverso do coeficiente de aversão relativa ao risco. No entanto, observe que as equações (1) e (4), obtidas sob a utilidade CRRA, são válidas para qualquer ativo adquirido pelo consumidor, enquanto a equação (9) só é válida para o retorno esperado do portfólio ótimo do consumidor. Neste sentido, a equação (1) (ou (4)) não é compatível com as preferências recursivas *a la* Epstein e Zin (1989). As equações (1) e (9) são observacionalmente equivalentes somente se o consumidor investe em apenas um ativo, pois, neste caso, é evidente que $r_{i,t} = m_t$. Como esta possibilidade não é realista, podemos dizer que, sob preferências recursivas *a la* Epstein e Zin (1989), o modelo de regressão simples é capaz de identificar a ESI somente se o retorno do portfólio ótimo do consumidor for empregado.

Em certo sentido, a equação de Euler (8) é uma generalização da equação de Euler (4) baseada na utilidade CRRA. As discrepâncias são devidas a presença do retorno do portfólio ótimo do consumidor, M_t , e a ausência de qualquer restrição envolvendo a ESI e o coeficiente de aversão relativa ao risco. De fato, essas características estão interligadas. Se, por acaso, a ESI for igual ao inverso da aversão relativa ao risco, o parâmetro θ torna-se unitário e a equação de Euler (8) se especializa para a equação de Euler (4). Em outras palavras, quando $\theta = 1$ o retorno do portfólio ótimo do consumidor, M_t , desaparece da equação (8).

Por sua vez, assumindo log-normalidade, a equação de Euler (8) torna-se:

$$\Delta \ln c_t = \alpha_{2,i} + \frac{\psi(\theta-1)}{\theta} E_{t-1}[m_t] + \frac{\psi}{\theta} E_{t-1}[r_{i,t}] + \varepsilon_t^c \quad (10)$$

Como antes, $m_t \equiv \ln(M_t)$, $r_{i,t} \equiv \ln(R_{i,t})$ e ε_t^c é uma inovação, tal que $E_{t-1}[\varepsilon_t^c] = 0$. Ainda, $\alpha_{2,i} = \psi(\ln \beta + 0.5\sigma_i^2/\theta)$, em que σ_i^2 é um termo de variância. A equação (10) implica que o retorno de um único ativo, $r_{i,t}$ ou mesmo m_t , já não contém informação suficiente para permitir a estimação dos parâmetros estruturais do consumidor – ψ e γ –, o que coloca em xeque as estratégias de identificação baseadas na equação (1). Em outras palavras, se um ativo particular é usado para estimar a ESI, como na equação (1), mas nós invocamos preferências recursivas *a la* Epstein e Zin para evitar a restrição $\psi = 1/\gamma$, então, necessariamente omitimos o retorno esperado do portfólio ótimo, $E_{t-1}[m_t]$.

Como esperado, quando $\theta = 1$ nota-se que m_t torna-se irrelevante e a equação de Euler (10) especializa-se para a equação de Euler (4) (ou a equação (5)). Sob tal restrição voltamos ao caso da utilidade CRRA, no qual o inverso do coeficiente do retorno esperado deve ser visto como o coeficiente de aversão relativa ao risco. No entanto, adotando as preferências propostas por Epstein e Zin (1989) tal restrição é

evitada, desde que as equações (9) ou (10) sejam usados. Em suma, a argumentação de Hall (1988) exige o uso de uma medida do retorno do portfólio ótimo do consumidor.

Dentre outros, Campbell e Viceira (1999) e Campbell (2003) analisaram o modelo baseado nas preferências *a la* Epstein e Zin por meio da equação (9). No entanto, as análises empíricas empregaram os retornos de ativos particulares, como feito por Hall (1988). Portanto, de acordo com a exposição prévia, a literatura estima a equação (4) baseada na utilidade CRRA, ao invés das equações (9) e (10) que resultam da adoção de preferências recursivas *a la* Epstein e Zin (1989).

Além disso, a adoção da equação (9) como uma estratégia para estimar a ESI está sujeita a duas advertências. Primeiro, como argumentado por Epstein e Zin (1991), para contrapor as previsões empíricas da CRRA e de preferências recursivas, pelo menos dois ativos são necessários e um deles deve ser o portfólio ótimo do consumidor. De fato, note que a equação (9) não identifica o parâmetro θ , sendo impossível confrontar a utilidade CRRA e as preferências recursivas por meio de testes de hipóteses cuja hipótese nula é $\theta = 1$. Em segundo lugar, mesmo se tal teste não for considerado prioritário, a equação (9) não permite a identificação do coeficiente de aversão relativa ao risco, que é um parâmetro de interesse. Por estes dois motivos, para analisar as preferências *a la* Epstein e Zin (1989), focamos a equação (10). E, como mencionado, comparando as equações (1) e (10), é evidente que a primeira equação omite o retorno esperado do portfólio do consumidor, $E_{t-1}[m_t]$. A próxima Seção detalha as consequências de tal omissão.

2.3 Utilidade CRRA e preferências recursivas: uma comparação

Além do caso $\theta = 1$, as equações (1) e (10) são empiricamente equivalentes somente se o consumidor investe em apenas um ativo. Em tal caso, o retorno deste ativo particular e o retorno da riqueza total do consumidor são idênticos e, assim, substituindo m_t por $r_{i,t}$ na equação (10) obtemos uma expressão observacionalmente equivalente à equação (1). No entanto, dado que os consumidores investem em diferentes ativos, m_t é diferente de $r_{i,t}$ e o uso da equação (1) leva a um erro de especificação: a omissão de uma variável relevante, a saber, o retorno esperado da riqueza total, $E_{t-1}[m_t]$.

Na prática, a versão linearizada da equação de Euler do consumidor é estimada por meio de um estimador de variáveis instrumental, como o usual método de MQ2E. Neste caso, no primeiro estágio é construído o valor previsto do retorno dos ativos – $r_{i,t}$ e/ou m_t –, que são usados no segundo estágio para estimar a equação de interesse. Assim, qualquer endogeneidade é levada em conta, bem como o fato de que os retornos esperados dos ativos são as variáveis explicativas apropriadas.

Para analisar as propriedades do estimador de MQ2E em um contexto de omissão de uma variável relevante, são definidas as seguintes inovações: $\varepsilon_t^m = m_t - E_{t-1}[m_t]$ e $\varepsilon_{i,t}^r = r_{i,t} - E_{t-1}[r_{i,t}]$. Assim, a equação (10) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\Delta \ln c_t = \alpha_{2,i} + \frac{\psi(\theta-1)}{\theta} m_t + \frac{\psi}{\theta} r_{i,t} + \vartheta_{i,t} \quad (11)$$

em que $\alpha_{2,i} = \psi(\ln \beta + 0.5\sigma^2/\theta)$ e $\vartheta_{i,t} = \varepsilon_t^c - \psi(\theta-1)\varepsilon_t^m/\theta - \psi\varepsilon_{i,t}^r/\theta$. De forma análoga, a equação (1) torna-se

$$\Delta \ln C_t = \alpha_{1,i} + \psi r_{i,t} + \omega_{i,t} \quad (12)$$

em que $\omega_{i,t} = \varepsilon_t^c - \psi\varepsilon_{i,t}^r$.

Defina Z como uma matriz $T \times m$, contendo m instrumentos; \tilde{X} como uma matriz $T \times k$ formada pelos k regressores compatíveis com as preferências *a la* Epstein e Zin (1989) – equação (11); ϑ é o verdadeiro vetor $T \times 1$ de erros. Então, os pressupostos usuais do estimador de MQ2E estão listados abaixo.

Hipótese 1: $\frac{1}{T} Z'Z \xrightarrow{P} Q_{ZZ}$, uma matriz $m \times m$ finita e positiva definida com posto igual a m .

Hipótese 2: $\frac{1}{T} Z'\tilde{X} \xrightarrow{P} Q_{Z\tilde{X}}$, uma matriz $m \times k$ finita com posto k .

Hipótese 3 (exogeneidade): $\frac{1}{T} Z' \vartheta \xrightarrow{P} 0$, um vetor $m \times 1$ nulo.

O primeiro pressuposto é simplesmente uma condição de estabilidade. Basicamente, esta hipótese significa que os dados são bem comportados. A segunda hipótese indica que os regressores e os instrumentos não podem ser não correlacionados, pois, neste caso, a matriz Q_{zx} não terá posto coluna completo. Finalmente, a terceira suposição significa que assintoticamente os instrumentos e o termo de erro (verdadeiro) não são correlacionados. A Proposição 1 esclarece as consequências da utilização da equação (12) para estimar a ESI, quando o verdadeiro processo gerador dos dados (PGD) é dada pela equação (11) e são válidas as hipóteses (1)-(3).

Proposição 1: Se o PGD é representado pela equação (11), as hipóteses (1)-(3) são válidas e o conjunto de instrumentos possui uma constante, então o estimador de MQ2E do coeficiente do retorno do ativo da equação (12) não constitui um estimador consistente para a ESI. Se os instrumentos são assintoticamente não correlacionados com o retorno do portfólio ótimo omitido, então

$$(\hat{\psi} - \psi) \xrightarrow{P} \psi \frac{(1-\theta)}{\theta} \quad (13)$$

Caso contrário,

$$(\hat{\psi} - \psi) \xrightarrow{P} \frac{\psi(1-\theta)}{\theta} \left[1 - \frac{\text{cov}(\hat{r}_{i,t}, \hat{m}_t)}{\text{var}(\hat{r}_{i,t})} \right] \quad (14)$$

em que $\hat{\psi}$ é o estimador de MQ2E do coeficiente do retorno do ativo da equação (12), ψ é a ESI, $\theta = (1 - \gamma)/(1 - \psi^{-1})$, γ é o coeficiente de aversão relativa ao risco e, por fim, $\hat{r}_{i,t}$ e \hat{m}_t são, respectivamente, as projeções de $r_{i,t}$ e m_t no subespaço expandido pelos instrumentos.

Prova: Apêndice A.

Em geral, a omissão de uma variável relevante torna o estimador inconsistente, a não ser que a variável omitida seja assintoticamente não correlacionada com os instrumentos. No entanto, a Proposição 1 implica que, mesmo quando, coincidentemente, esta condição de ortogonalidade se verifica, o estimador de MQ2E da ESI não é consistente. O limite em probabilidade (13) mostra que $\hat{\psi}$ converge para o coeficiente de $r_{i,t}$ da equação (11), que é diferente de ψ . Note que os limites em probabilidade (13) e (14) implicam que o estimador de ψ é consistente quando $\psi = 0$ ou $\theta = 1$. No entanto, $\psi = 0$ não é um caso interessante e, além disso, a consistência sob $\theta = 1$ é esperado pois tal restrição implica que a equação de Euler sob preferências *a la* Epstein e Zin (1989) se especializa para aquela proveniente da utilidade CRRA. No entanto, as restrições $\psi = 0$ e $\theta = 1$ não são compatíveis com o PGD descrito pela equação (11). Em outras palavras, tais restrições significam que o PGD já não é mais o da equação (11).

Dado que $\hat{\psi}$ não é consistente, é importante avaliar o sinal de $\text{plim}_{T \rightarrow \infty}(\hat{\psi} - \psi)$. Em geral, o conjunto de instrumentos inclui retornos defasados dos ativos que, muito provavelmente, tem alguma correlação com o retorno do portfólio ótimo do consumidor e, por esse motivo, analisamos o limite em probabilidade (14). Neste caso, se $\frac{\text{cov}(\hat{r}_{i,t}, \hat{m}_t)}{\text{var}(\hat{r}_{i,t})} < 1$, o sinal do limite em probabilidade (14) depende somente de θ , que é uma função de ψ e γ .³ Este limite é positivo se $0 < \theta < 1$ e, neste caso, o uso da equação (1) tenderia a superestimar a ESI. O limite em probabilidade é negativo se $\theta < 0$ ou $\theta > 1$ e, nestes cenários, a ESI seria subestimada ao se adotar a equação (1). Dado que a maioria das estimativas na literatura da ESI situam-se próximas a zero, este caso parece ser o mais interessante. A condição $\theta < 0$ é válida se a ESI e a aversão relativa ao risco forem ambas maiores do que um ($\gamma > 1$ e $\psi > 1$), ou ambas menores do que um ($\gamma < 1$ e $\psi < 1$). A condição $\theta > 1$ é satisfeita se $\psi > 1$ e $\gamma\psi < 1$ ou, alternativamente, $\psi < 1$ e $\gamma\psi > 1$.

³ Note que $\frac{\text{cov}(\hat{r}_{i,t}, \hat{m}_t)}{\text{var}(\hat{r}_{i,t})} = \text{correl}(\hat{r}_{i,t}, \hat{m}_t) \left[\frac{\text{var}(\hat{m}_t)}{\text{var}(\hat{r}_{i,t})} \right]^{0.5}$, sendo menor do que 1 se a correlação é negativa, ou, ao menos se o termo $\frac{\text{var}(\hat{m}_t)}{\text{var}(\hat{r}_{i,t})}$ não é tão elevado. De fato, em nossa amostra $\frac{\text{cov}(\hat{r}_{i,t}, \hat{m}_t)}{\text{var}(\hat{r}_{i,t})} < 1$.

Finalmente, exceto pelo caso $\theta = 1$, o uso da equação (1) não é compatível com a equação (10). Se a conexão entre a ESI e o coeficiente de aversão relativa ao risco deve ser evitada, então, precisamos abandonar a estimação da equação (1) e nos mover em direção a outras equações de testes tais como a equação (9) ou a equação (10), que fazem uso de uma medida do retorno do portfólio do consumidor. No entanto, como mencionado, diferentemente da equação (9), o uso da equação (10) também permite a identificação do coeficiente de aversão relativa ao risco, sendo preferida.

3 Equações de Euler: fatos empíricos

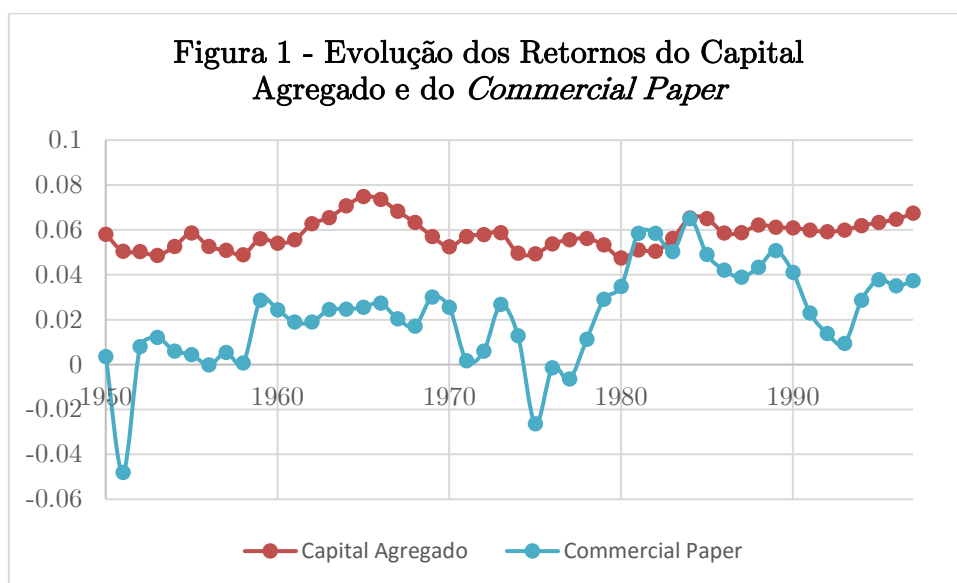
A Seção 3.1 apresenta a base de dados utilizada nas estimações das equações de Euler. Tais estimações são feitas na Seção 3.2, que apresenta e discute os resultados obtidos.

3.1 Base de dados

Para estimar os parâmetros estruturais de preferência do consumidor representativo, por meio das equações (11) e (12), é necessário construir as séries temporais do consumo e do retorno de ativos. Em particular, a implementação empírica para estimar a equação (11) requer uma medida do retorno do portfólio ótimo do consumidor, M_t .

Mulligan (2002) construiu uma medida do retorno da riqueza total da economia norte-americana entre 1930 e 1997, em frequência anual. Tal retorno é a taxa de aluguel do capital após a dedução dos impostos de renda e de propriedade, que empregamos nas análises empíricas. Por simplicidade, daqui em diante, denotaremos esta taxa pelo termo retorno do capital agregado. Com relação ao período de estimação, são usados somente os dados posteriores a Segunda Grande Guerra Mundial, mais especificamente, de 1950 em diante.

Os demais dados usados neste trabalho também são provenientes de Mulligan (2002). O consumo é medido pelo consumo real per capita de não duráveis e, como medida de $r_{i,t}$, empregamos os retornos reais do *commercial paper* (medido como a diferença entre o retorno nominal e a inflação correspondente do deflator do PIB). Para efeito de comparação, esta série é apresentada na Figura 1 juntamente com o retorno do capital agregado.



A Tabela 1 apresenta algumas estatísticas descritivas. Em média, a taxa de crescimento do consumo é de quase 1% ao ano. A mediana da taxa de crescimento do consumo é semelhante à média. O desvio-padrão da taxa de crescimento do consumo é, aproximadamente, 1.554%, enquanto o coeficiente de variação é cerca de 1.745. Sobre os retornos dos ativos, o retorno médio anual do capital agregado é 5.812%, enquanto o retorno médio do *commercial paper* é somente 2.018% ao ano. Sobre a volatilidade, tanto o desvio-padrão quanto o coeficiente de variação indicam que o retorno do capital agregado é menos volátil do que o retorno do *commercial paper*.

Tabela 1 - Estatística descritiva

	Retorno do capital agregado (m_t)	Retorno do <i>Commercial Paper</i> ($r_{i,t}$)	Taxa de crescimento do consumo ($\Delta \ln c_t$)
Média	5.812%	2.018%	0.890%
Mediana	5.797%	2.336%	0.749%
Desvio-padrão	0.667%	2.059%	1.554%
Coeficiente de variação	0.115	1.020	1.745

Nota: O período da amostra é 1950-1997, havendo 48 observações.

Por último, a Tabela 2 apresenta as correlações simples entre o retorno do capital agregado, o retorno do *commercial paper* e a taxa de crescimento do consumo, juntamente com o p-valor referente ao teste de hipótese cuja a hipótese nula é correlação igual zero e a hipótese alternativa é correlação diferente de zero. A correlação entre o retorno do capital agregado e a taxa de crescimento do consumo é, aproximadamente, 0.446, sendo estatisticamente diferente de zero, ao nível de significância de 1%. Por outro lado, a correlação entre o retorno do *commercial paper* e a taxa de crescimento do consumo não é significativa, mesmo ao nível de significância de 10%. Finalmente, os retornos do capital agregado e do *commercial paper* são positivamente correlacionados; no entanto, essa correlação não é muito grande. Como os consumidores investem em diferentes ativos, este resultado é exatamente o esperado. Assim, a baixa correlação entre o retorno dos dois ativos sugere que substituir m_t por $r_{i,t}$ não é apropriado.

Tabela 2 – Correlações Simples

	Retorno do capital agregado	Retorno do <i>Commercial Paper</i>	Taxa de crescimento do consumo
Retorno do capital agregado	1 -		
Retorno do <i>Commercial Paper</i>	0.391*** [0.006]	1 -	
Taxa de crescimento do consumo	0.446*** [0.002]	0.037 [0.803]	1 -

Nota: O período da amostra é 1950-1997, havendo 48 observações. Entre parênteses estão os p-valores referente ao teste da hipótese nula de que a correlação simples é nula. ***, **, * significam significativa a 1%, 5% e 10%, respectivamente.

3.2 Procedimentos de estimação e resultados

As equações (11) e (12) são estimados por meio de métodos de variáveis instrumentais, o que implica que é necessário formar uma lista de instrumentos. Os instrumentos devem ser ortogonais ao termo de erro, mas correlacionados com os regressores endógenos. Mais precisamente, esta correlação com o regressor não pode ser pequena; caso contrário, as estimativas não serão confiáveis devido ao problema de instrumentos fracos (Stock et al., 2002).

Mulligan (2002) estimou a equação (12) usando o retorno do capital agregado e um conjunto de instrumentos composto pela primeira defasagem do retorno do capital, do retorno nominal do *commercial paper*, da taxa de inflação, da taxa de imposto e do rendimento gerado pela diferença entre os retornos de títulos BAA e AAA. Doravante, este conjunto de instrumentos é denominado Mulligan-1°. Mulligan (2002) obteve estimativas da ESI significativas e de magnitude superior as usuais da literatura. Por exemplo, usando o consumo de não duráveis real per capita, a estimativa da ESI é, aproximadamente, 1.35. Portanto, diferentemente da maior parte da literatura, Mulligan (2002) obteve estimativas significativas e substanciais da ESI. Conforme discutido na Seção 2.3, a Proposição 1 não se aplica ao arcabouço usado por Mulligan (2002), já que ao invés de usar o retorno de um ativo particular ($r_{i,t}$), foi empregado o retorno do capital agregado, que é uma medida do portfólio ótimo do consumidor (m_t). Portanto, as estimativas bem-sucedidas da ESI obtidas via m_t não estão em contradição com a nossa argumentação.

Gomes e Paz (2015) analisaram os resultados de Mulligan (2002) tendo em vista duas questões. Em primeiro lugar, eles investigaram se os resultados permanecem inalterados quando outros conjuntos de instrumentos são usados. Em segundo lugar, eles empregaram várias técnicas econométricas para verificar e tratar a presença de instrumentos fracos nas estimativas da ESI. As evidências levantadas por Gomes e Paz (2015) sugerem que o retorno do capital agregado em conjunto com os instrumentos Mulligan-1° fornecem estimativas da ESI significativas e acima de 1, que não são contaminadas pela presença de instrumentos fracos. Além disso, os autores concluem que outros conjuntos de instrumento também levam a estimativas pontuais da EIS em torno de 1. Dado que o conjunto de instrumento proposto por Mulligan (2002) apresenta bom desempenho, utilizamos tais instrumentos, em conformidade com a recomendação feita por Gomes e Paz (2015).

Hall (1988) recomendou que sejam usados como instrumentos variáveis defasadas pelo menos em dois períodos devido à problemas de agregação que geram um erro com estrutura MA(1).⁴ Assim, inclusive para fins de comparação, construímos outro conjunto de instrumentos dado pela segunda defasagem das variáveis contidas no conjunto Mulligan-1°. Esse segundo conjunto de instrumentos é denominado como Mulligan-2° em alusão ao fato de ele ser composto por variáveis com defasagem de dois períodos.

Gomes e Paz (2005) encontraram evidências de que as estimativas baseadas no conjunto de instrumentos Mulligan-1° não são afetadas pelo problema de instrumentos fracos, mas tal evidência não se estende ao conjunto Mulligan-2°. Por esta razão, empregamos dois estimadores: o habitual estimador de MQ2E e o método generalizado dos momentos atualizado continuamente (CUE-GMM) proposto por Hansen et al. (1996), que é recomendado quando o problema de instrumentos fracos ocorre.⁵

A Tabela 3 apresenta as estimativas de MQ2E e do CUE-GMM da equação (12) com base nos conjuntos de instrumentos Mulligan-1° e Mulligan-2°. Surpreendentemente, para o MQ2E o teste J rejeita a condição de momento associada à equação (12), o que significa que o modelo e/ou os instrumentos não são apropriados. Apesar disso, as estimativas da ESI são elevadas e semelhantes às de Mulligan (2002). Os resultados com base nos instrumentos Mulligan-1° não são idênticos aos do próprio Mulligan (2002), pois as estimativas nesse trabalho usaram dados de 1947 a 1997, enquanto consideramos neste trabalho o período

⁴ Para detalhes veja Working (1960).

⁵ O termo CUE-GMM vem do inglês *continuously updating generalized method of moments*. Hansen et al (1996) encontraram evidências de que o CUE-GMM é menos tendencioso, e seus intervalos de confiança têm taxas de cobertura melhores do que a método generalizado dos momentos em dois passos, o que explica por que a literatura relacionada ao problema de identificação fraca concentrou-se no CUE-GMM. Para maiores detalhes, veja também Stock e Wright (2000) e Stock et al. (2002).

de 1950 a 1997, evitando, assim, o período próximo a Segunda Grande Guerra Mundial. No caso da estimação via CUE-MGM, a hipótese nula do teste J não é rejeitada, ao nível de significância de 5%, mas a estimativa da ESI é sensível ao conjunto de instrumentos utilizado. O conjunto Mulligan-1° acarreta uma estimativa grande e significativa da ESI, enquanto o conjunto Mulligan-2° não produz uma estimativa significativa. Finalmente, observe que o CUE-MGM leva a estimativas pontuais da ESI inferiores àquelas obtidas via o estimador de MQ2E.

Tabela 3 – Utilidade CRRA: equação (12)

Estimador Instrumentos	MQ2E		CUE-GMM	
	Mulligan-1°	Mulligan-2°	Mulligan-1°	Mulligan-2°
$\alpha_{2,i}$	-0.060*** (0.021)	-0.062** (0.027)	-0.050** (0.019)	-0.020 (0.018)
m_t	1.183*** (0.362)	1.225** (0.472)	1.007*** (0.323)	0.537 (0.323)
J test	10.900** [0.028]	9.871** [0.043]	4.566 [0.335]	5.006 [0.287]

Notas: O período da amostra é 1950-1997, havendo 48 observações. Foram usados os conjuntos de instrumentos Mulligan-1° e Mulligan-2°. Entre parênteses estão os p-valores. ***, **, * significam significativa a 1%, 5% e 10%, respectivamente.

Na equação (12) o coeficiente do retorno do ativo é o parâmetro de interesse, sendo a própria ESI (ψ). No entanto, na equação (11) os coeficientes dos retornos dos ativos são funções de ψ e θ . Assim, estimamos tanto a forma reduzida quanto a forma estrutural da equação (11).⁶ No primeiro caso, nós não impomos qualquer restrição sobre coeficientes dos retornos dos ativos e, após o procedimento de estimação, nós recuperamos os valores implícitos de ψ e de γ . Tais resultados são apresentados na Tabela 4. Na forma estrutural impomos no processo de estimação exatamente a forma funcional da equação (12). No entanto, mesmo neste caso, o parâmetro γ é obtido indiretamente, sendo calculado como $\gamma = 1 - \theta(1 - \psi^{-1})$. Os resultados provenientes da forma estrutural são apresentados na Tabela 5.

Começando pelos resultados expostos na Tabela 4, nota-se que o teste J não rejeita a condição de momento gerada pelas preferências recursivas *a la* Epstein e Zin (1989), para qualquer estimador ou conjunto instrumentos empregados. Os coeficientes dos retornos dos ativos são sempre significativos, ao nível de significância de 5%, e as estimativas são muito semelhantes, exceto por um caso - CUE-GMM com instrumentos Mulligan-2°. Excetuando este caso, o coeficiente do retorno do capital agregado é cerca de 1.50, e o coeficiente do *commercial paper* situa-se em torno de -0.40. Com respeito aos parâmetros estruturais, as estimativas da ESI são sempre maiores do que um. Finalmente, os resultados referentes ao coeficiente de aversão relativa ao risco são menos estáveis, mas suas estimativas são, também, sempre maiores do que um.

A Tabela 5 apresenta os resultados da forma-estrutural da equação (11). Neste caso, dada a não-linearidade dos coeficientes só o CUE-GMM foi usado. Como esperado, as estimativas pontuais da ESI e da aversão relativa ao risco são idênticas àquelas apresentadas na Tabela 4. As estimativas são significativas, ao nível de significância de 5%, exceto pelo coeficiente de aversão relativa ao risco quando o conjunto de instrumentos Mulligan-1° é usado.

A Proposição 1 estabelece as consequências da omissão do retorno do portfólio do consumidor, m_t , e, por esta razão, nós estimamos novamente a equação (12) usando o retorno do *commercial paper*, ao invés do retorno do capital agregado. A Tabela 6 consolida os resultados com base nos instrumentos Mulligan-1°, que é o conjunto de instrumentos recomendado por Gomes e Paz (2015). A menor estimativa da ESI é

⁶ De fato, a equação (11) é uma equação estrutural. No entanto, na chamada forma reduzida não impomos as restrições entre os coeficientes dos regressores, enquanto na forma intitulada estrutural impomos tais restrições.

obtida quando a equação (12) é estimada com base no retorno do *commercial paper*. Esta estimativa pontual é compatível com os resultados obtidos na literatura tanto para retornos de títulos do governo quanto para retornos de ações. Como mencionado, as estimativas da ESI, geralmente, situam-se próximas de zero quando esses ativos são empregados (Mankiw, 1981; Hall, 1988; Campbell e Mankiw, 1989; Patterson e Pesaran, 1992; Campbell, 2003; Yogo, 2004; Gomes e Paz, 2015).

Tabela 4 – Preferências *a la* Epstein e Zin (1989): forma reduzida da equação (11)

Estimador Instrumentos	MQ2E		CUE-GMM	
	Mulligan-1°	Mulligan-2°	Mulligan-1°	Mulligan-2°
$\alpha_{2,i}$	-0.079*** (0.025)	-0.080*** (0.024)	-0.066*** (0.020)	-0.192** (0.074)
m_t	1.671*** (0.437)	1.663*** (0.427)	1.440*** (0.351)	3.852*** (1.399)
$r_{i,t}$	-0.456*** (0.147)	-0.362** (0.141)	-0.408*** (0.121)	-0.814** (0.329)
J test	1.576 [0.665]	5.405 [0.144]	2.788 [0.425]	3.756 [0.289]
Parâmetros implícitos				
ψ	1.215	1.301	1.033	3.038
γ	1.471	1.833	1.080	3.503

Nota: O período da amostra é 1950-1997, havendo 48 observações. Foram usados os conjuntos de instrumentos Mulligan-1° e Mulligan-2°. Entre parênteses estão os p-valores. ***, **, * significam significativa a 1%, 5% e 10%, respectivamente.

Tabela 5 – Preferências *a la* Epstein e Zin (1989): forma estrutural da equação (11)

Estimador Instrumentos	CUE-GMM	
	Mulligan-1°	Mulligan-2°
$\alpha_{2,i}$	-0.066*** (0.020)	-0.192** (0.074)
ψ	1.033*** (0.339)	3.038** (1.140)
θ	-2.533** (1.165)	-3.731** (1.076)
J test	2.788 [0.425]	3.756 [0.289]
Parâmetro implícito		
γ	1.080 (0.833)	3.503*** (0.959)

Nota: O período da amostra é 1950-1997, havendo 48 observações. Foram usados os conjuntos de instrumentos Mulligan-1° e Mulligan-2°. Entre parênteses estão os p-valores. ***, **, * significam significativa a 1%, 5% e 10%, respectivamente.

Comparando os resultados provenientes da estimação da equação (12) utilizando o retorno do *commercial paper* e os resultados da equação (11), há um indicativo de que a omissão de m_t leva a subestimação da ESI, o que está em consonância com a Proposição 1. Com efeito, as estimativas baseadas

nas preferências recursivas *a la* Epstein e Zin (1989) indicam que $\hat{\psi} > 1$ e $\hat{\gamma} > 1$, o que segundo a Proposição 1 implica um viés assintótico negativo para a EIS, quando esta é estimada por meio da equação (12) e do método de MQ2E.

Tabela 6 – Estimativas da ESI baseadas no conjunto de instrumentos Mulligan-1°

	Equação (12) – CRRA				Equação (11) – Epstein e Zin (1989)	
	Retorno do capital agregado		Retorno do <i>commercial paper</i>			
	MQ2E	CUE-GMM	MQ2E	CUE-GMM	MQ2E	CUE-GMM
m_t	1.183*** (0.362)	1.007*** (0.323)			1.671*** (0.437)	1.440*** (0.351)
$r_{i,t}$			-0.194 (0.161)	-0.020 (0.121)	-0.456*** (0.147)	-0.408*** (0.121)
J-test	10.900** [0.028]	4.566 [0.335]	14.554*** [0.006]	5.438 [0.245]	1.576 [0.665]	2.788 [0.425]
Parâmetros implícitos						
ψ	1.183	1.007	-0.194	-0.020	1.215	1.033
γ	-	-	-	-	1.471	1.080

Nota: O período da amostra é 1950-1997, havendo 48 observações. Foi usado o conjunto de instrumentos Mulligan-1°. Entre parênteses estão os p-valores. ***, **, * significam significativa a 1%, 5% e 10%, respectivamente.

A próxima Seção investiga a intensidade deste viés nas estimativas da ESI por meio de simulações de Monte Carlo. Neste caso, o PGD é conhecido, o que nos permite analisar esta questão detalhadamente.

4 Equações de Euler: simulações de Monte Carlo

Primeiramente, na Seção 4.1 detalhamos o processo de simulação. O PGD é baseado nas preferências recursivas – equação (11) –, e o modelo baseado na utilidade CRRA – equação (12) – é estimado por meio do método de MQ2E. A análise do desempenho deste modelo é apresentada na Seção 4.2. Depois disso, na Seção 4.3, o modelo correto, baseado na equação (11), é estimado e seus resultados são analisados. Neste caso, estamos preocupados com o desempenho do estimador MQ2E, dado o pequeno número de observações da amostra.

4.1 Procedimento de simulação

O procedimento de simulação baseia-se na equação (11). Assim, substituímos $\alpha_{2,i} = \psi(\ln\beta + 0.5\sigma^2/\theta)$ nesta equação para tornar evidente a dependência dos parâmetros estruturais e, com isso, obtemos:

$$\Delta \ln c_t = \psi \ln \beta + \frac{0.5\psi\sigma_t^2}{\theta} + \frac{\psi(\theta-1)}{\theta} m_t + \frac{\psi}{\theta} r_{i,t} + \vartheta_{i,t} \quad (15)$$

Como usual na literatura, assumimos que $\vartheta_{i,t} \sim N(0, \sigma_\vartheta^2)$.⁷ É possível mostrar que $\sigma_\vartheta^2 = \left(\frac{\psi}{\theta}\right)^2 \sigma_i^2$, em que $\sigma_i^2 = \text{Var} \left[-\frac{\theta}{\psi} \Delta \ln c_t + (\theta - 1)m_t + r_{i,t} \right]$. Assim, σ_i^2 é uma função das variâncias e covariâncias de $\Delta \ln c_t$, m_t e $r_{i,t}$. Usando as séries temporais do consumo de não duráveis, do retorno do capital agregado e do retorno do *commercial paper* estas variâncias e covariâncias são estimadas. Após isso, usando um *grid* para

⁷ A suposição de normalidade para o termo erro é equivalente a assumir que o consumo e os retornos dos ativos têm distribuição conjunta log-normal, uma hipótese usual na literatura (Campbell et al., 1999; Campbell e Viveira, 1999; Campbell, 2003).

a ESI, ψ , e o coeficiente de aversão relativa ao risco, γ , nós calculamos $\theta = \frac{1-\gamma}{1-\psi-1}$, σ_t^2 e, consequentemente, σ_θ^2 .⁸ Assim, somos capazes de construir o lado direito da equação (15), simulando a taxa de crescimento do consumo.⁹

Usando este procedimento, construímos uma sequência $\{\Delta \ln c_t\}_{t=1}^T$ com $T = 48$, que é o número de observações utilizadas nas estimações apresentadas na Seção 3.2. Consideramos os seguintes valores tanto para ψ quanto para γ : 0.4, 0.8, 1.2, 1.6 e 2.0. Como resultado, forma-se um *grid* composto por 25 pontos. Vale ressaltar que as estimativas de ψ e de γ apresentadas na Tabela 6 são maiores do que 0.4 e menores do que 2.0 e, portanto, elas pertencem ao intervalo definido pelo *grid* empregado. Finalmente, para cada ponto no *grid* são feitas 5000 repetições ($r = 5000$).

O PGD utilizado é construído com base nas preferências recursivas, como proposto por Epstein e Zin (1989), mas dois modelos (casos) diferentes são estimados. No Caso 1 é estimada a equação (12) utilizando o retorno do *commercial paper*, sendo omitido o retorno do capital agregado. Portanto, neste caso a utilidade CRRA é adotada, levando a um modelo econométrico erroneamente especificado por meio do qual são obtidas 5000 estimativas da ESI para cada ponto do *grid*. Tendo em mente os resultados expostos na Proposição 1, este caso nos permite investigar detalhadamente o viés do estimador da ESI. No Caso 2 é estimado o modelo correto, dado pela equação (11), usando os retornos do *commercial paper* e do capital agregado. Nós obtemos 5000 estimativas da ESI para cada ponto do *grid*. Nos Casos 1 e 2 nós reportamos acerca da ESI: *i*) a estimativa média, *ii*) o viés médio das estimativas; *iii*) o erro-padrão das estimativas; *iv*) o erro quadrático médio (EQM) das estimativas. Quando empregamos o modelo baseado na equação (11) – preferências *a la* Epstein e Zin – repetimos essa análise para o coeficiente de aversão relativa ao risco.

4.2 Erro de especificação das preferências e o viés da ESI

A Tabela 7 apresenta os resultados para o Caso 1, no qual a ESI é estimada como o coeficiente do retorno do *commercial paper*. Considerando todos os pontos do *grid*, a estimativa média da ESI varia entre -3.911 e 4.544, indicando que a estimativa obtida pode ser muito diferente do verdadeiro parâmetro. Em particular, quando ψ é 0.8 ou 1.2 nós observamos que, para alguns valores de γ , a média de $\hat{\psi}$ é próxima de zero, ou mesmo negativa, como usual na literatura.

Movendo-se para a análise do viés médio, os resultados são muito interessantes também. Na Tabela 7 as células sombreadas identificam as combinações da ESI e da aversão relativa ao risco que, de acordo com a Proposição 1, implicam que $\text{plim}_{T \rightarrow \infty}(\hat{\psi} - \psi) < 0$. De fato, observamos que em tais células a média do viés é negativo, enquanto nas demais células o viés é justamente positivo. Mesmo com uma amostra composta por apenas 48 observações, com 5000 repetições foram obtidos resultados em consonância com a Proposição 1. No entanto, os resultados não são imunes ao reduzido número de observações, como pode ser visto pelos substanciais erros-padrão de $\hat{\psi}$. Finalmente, como o EQM depende do viés e da variância de $\hat{\psi}$, na maioria dos casos esta quantidade está longe de ser zero. Mais adiante nós detalhamos esta análise comparando o EQM dos Casos 1 e 2.

4.3 Preferências corretas

O Caso 2 assume o modelo compatível com as preferências recursivas *a la* Epstein e Zin (1989), o que torna possível a identificação e, consequentemente, a estimação da ESI (ψ) e do coeficiente de aversão

⁸ Obviamente, ψ não pode ser igual a 1. Adicionalmente, $\gamma = 1$ implica $\theta = 0$ e os coeficientes da equação (15) deixam de ser bem-definidos. Assim, o valor unitário não é incluído no *grid* de ψ e de γ .

⁹ Este procedimento de simulação baseado em equações de Euler linearizadas e dados efetivos tem sido utilizado por outros autores. Por exemplo, Pozzi (2003) usou essa abordagem para analisar equações de Euler provenientes de preferências que dependem tanto do consumo privado quanto do consumo do governo.

relativa ao risco (γ). A Tabela 8 reporta os resultados para a ESI e a Tabela 9 apresenta os resultados para o coeficiente de aversão relativa ao risco. Começando com a ESI, as médias das estimativas são, em geral, próximas do valor verdadeiro do parâmetro. Como resultado, o viés médio das estimativas da ESI é próximo de zero. Nesse sentido, a estimação baseada no modelo correto é capaz de recuperar adequadamente a ESI. No entanto, o desvio-padrão de $\hat{\psi}$ é maior no Caso 2 (Tabela 8) do que no Caso 1 (Tabela 7). Isto não é um resultado surpreendente, pois na equação (11) estima-se um parâmetro adicional, o coeficiente do retorno do capital agregado (m_t). Assim, a necessidade de estimar outro parâmetro quando se emprega o modelo correto leva a erros-padrão maiores. Ainda assim, na maioria dos casos o EQM do modelo correto (ver Tabela 8) é menor do que aquele obtido pelo modelo baseado na utilidade CRRA (ver Tabela 7). Resumindo, o modelo correto fornece estimativas não viesadas da ESI, diferentemente do modelo baseado na utilidade CRRA. No entanto, o pequeno tamanho da amostra leva a uma grande volatilidade, o que é acentuado no Caso 2, cujo modelo contém uma variável explicativa adicional, m_t .

Tabela 7 - Caso 1: Resultados do estudo de Monte Carlo referente a ESI
PGD: Epstein e Zin (1989) - equação (11)
Modelo: CRRA - equação (12)

EIS (ψ)	Estatística	Coeficiente de aversão relativa ao risco (γ)				
		0.40	0.80	1.20	1.60	2.00
0.40	Média de $\hat{\psi}$	-0.780	-2.472	2.586	0.903	0.566
	Viés de $\hat{\psi}$	-1.180	-2.872	2.186	0.503	0.166
	Desvio-padrão de $\hat{\psi}$	0.234	0.612	0.625	0.258	0.195
	EQM de $\hat{\psi}$	1.446	8.622	5.171	0.320	0.066
0.80	Média de $\hat{\psi}$	-0.153	-0.717	0.968	0.407	0.295
	Viés de $\hat{\psi}$	-0.953	-1.517	0.168	-0.393	-0.505
	Desvio-padrão de $\hat{\psi}$	0.150	0.236	0.254	0.160	0.146
	EQM de $\hat{\psi}$	0.932	2.356	0.093	0.180	0.276
1.20	Média de $\hat{\psi}$	0.465	1.032	-0.659	-0.093	0.018
	Viés de $\hat{\psi}$	-0.735	-0.168	-1.859	-1.293	-1.182
	Desvio-padrão de $\hat{\psi}$	0.155	0.249	0.242	0.151	0.143
	EQM de $\hat{\psi}$	0.564	0.090	3.515	1.695	1.417
1.60	Média de $\hat{\psi}$	1.094	2.768	-2.270	-0.589	-0.255
	Viés de $\hat{\psi}$	-0.506	1.168	-3.870	-2.189	-1.855
	Desvio-padrão de $\hat{\psi}$	0.246	0.627	0.614	0.243	0.185
	EQM de $\hat{\psi}$	0.317	1.758	15.357	4.850	3.475
2.00	Média de $\hat{\psi}$	1.728	4.536	-3.918	-1.097	-0.529
	Viés de $\hat{\psi}$	-0.272	2.536	-5.918	-3.097	-2.529
	Desvio-padrão de $\hat{\psi}$	0.369	0.994	1.011	0.367	0.252
	EQM de $\hat{\psi}$	0.210	7.421	36.048	9.723	6.459

Nota: As estimativas foram feitas por meio do conjunto de instrumento Mulligan-1° e do estimador MQ2E. As células sombreadas indicam combinações da ESI e da aversão relativa ao risco tais que a Proposição 1 indica que o viés de $\hat{\psi}$ é negativo.

Como um subproduto da investigação sobre a ESI, estimamos também o coeficiente de aversão relativa ao risco no Caso 2. Em alguns casos $\hat{\gamma}$ é bastante diferente de γ (resultado não reportado). Note que o coeficiente de $r_{i,t}$ é $c_r \equiv \psi/\theta$ e o coeficiente de m_t é $c_m \equiv \psi(\theta - 1)/\theta$. Evidentemente, $\psi = c_r + c_m$ enquanto $\theta = 1 + c_m/c_r$. Como resultado, quando c_r é próximo de zero, qualquer desvio causado pelo erro amostral leva $\hat{\theta}$ a ser bastante diferente do verdadeiro θ . Portanto, embora $\hat{\psi}$ não seja sensível à c_r , o oposto ocorre com $\hat{\theta}$. Como $\gamma = 1 - \theta(1 - \psi^{-1})$, $\hat{\gamma}$ também é muito sensível ao erro amostral quando c_r é pequeno. Assim, para alguns valores de ψ e γ , c_r é pequeno e o erro amostral, que é amplificado neste

contexto de amostra pequena, torna a razão c_r/\hat{c}_r substancialmente diferente de um. Em tais casos, diferentemente de $\hat{\psi}$, $\hat{\gamma}$ é muito sensível à estimativa \hat{c}_r , ocorrendo *outliers*. Por tudo isso, na Tabela 9 apresentamos a mediana de $\hat{\psi}$ para o Caso 1, bem como as medianas de $\hat{\psi}$ e de $\hat{\gamma}$ para o Caso 2 (células sombreadas indicam os casos nos quais $c_r \leq 0.60$). Os resultados para $\hat{\psi}$ baseados na equação (12) – Caso 1 – estão de acordo com os resultados anteriores, apresentados na Tabela 7. Na maioria das vezes, a estimativa mediana está distante da verdadeira ESI. Movendo-se para o Caso 2, baseado na equação (11), observamos que a mediana de $\hat{\psi}$ está muito próxima do verdadeiro ψ . Sobre $\hat{\gamma}$, seu desempenho melhorou substancialmente. Na maioria dos casos a mediana de $\hat{\gamma}$ está muito próxima de γ e mesmo as exceções não estão longe de γ . Neste sentido, parece que o mau desempenho, em média, de $\hat{\gamma}$ está relacionado com o pequeno tamanho da amostra. Por outro lado, a omissão de m_t leva, de fato, $\hat{\psi}$ a ser severamente viesado quando é empregado o modelo baseado na utilidade CRRA, mas o PGD decorre de preferências recursivas *a la* Epstein e Zin (1989).

Tabela 8 - Caso 2: Resultados do estudo de Monte Carlo referente a ESI

PGD: Epstein e Zin (1989) - equação (11)

Modelo: Epstein e Zin (1989) - equação (11)

EIS (ψ)	Estatística	Coeficiente de aversão relativa ao risco (γ)				
		0.40	0.80	1.20	1.60	2.00
0.40	Média de $\hat{\psi}$	0.375	0.388	0.389	0.402	0.393
	Viés de $\hat{\psi}$	-0.025	-0.012	-0.011	0.002	-0.007
	Desvio-padrão de $\hat{\psi}$	0.614	1.575	1.696	0.669	0.508
	EQM de $\hat{\psi}$	0.378	2.481	2.877	0.448	0.258
0.80	Média de $\hat{\psi}$	0.802	0.804	0.810	0.793	0.805
	Viés de $\hat{\psi}$	0.002	0.004	0.010	-0.007	0.005
	Desvio-padrão de $\hat{\psi}$	0.399	0.616	0.661	0.411	0.376
	EQM de $\hat{\psi}$	0.160	0.379	0.437	0.169	0.142
1.20	Média de $\hat{\psi}$	1.197	1.201	1.204	1.195	1.200
	Viés de $\hat{\psi}$	-0.003	0.001	0.004	-0.005	0.000
	Desvio-padrão de $\hat{\psi}$	0.398	0.644	0.614	0.397	0.372
	EQM de $\hat{\psi}$	0.158	0.415	0.378	0.158	0.138
1.60	Média de $\hat{\psi}$	1.614	1.580	1.572	1.588	1.603
	Viés de $\hat{\psi}$	0.014	-0.020	-0.028	-0.012	0.003
	Desvio-padrão de $\hat{\psi}$	0.648	1.605	1.605	0.628	0.477
	EQM de $\hat{\psi}$	0.420	2.575	2.578	0.395	0.228
2.00	Média de $\hat{\psi}$	2.001	2.061	2.021	1.965	2.013
	Viés de $\hat{\psi}$	0.001	0.061	0.021	-0.035	0.013
	Desvio-padrão de $\hat{\psi}$	0.957	2.626	2.664	0.954	0.671
	EQM de $\hat{\psi}$	0.916	6.900	7.099	0.911	0.450

Nota: As estimativas foram feitas por meio do conjunto de instrumento Mulligan-1º e do estimador MQ2E.

6 Conclusões

A ESI é um parâmetro fundamental na literatura de macroeconomia e de finanças, sendo geralmente estimada por meio da regressão da taxa de crescimento do consumo contra o retorno esperado de algum dos ativos do consumidor. Esta especificação econométrica é compatível com a utilidade CRRA, mas desde Hall (1988) tem sido associado também a preferências recursivas *a la* Epstein e Zin (1989). Argumentamos que tal modelo de regressão simples é válido em ambos os casos somente se uma medida do retorno do

portfólio ótimo do consumidor é empregada, o que não é usual na literatura. A maioria dos estudos empregam ativos particulares, como títulos do governo ou ações, havendo poucas exceções como Mulligan (2002) e Gomes e Paz (2015).

Supondo que o PGD é constituído a partir de preferências recursivas da forma proposta por Epstein e Zin (1989), mostramos evidências claras de que regredir a taxa de crescimento do consumo contra o retorno de um ativo particular não constitui uma estratégia apropriada para recuperar a ESI. Em primeiro lugar, mostramos que o estimador MQ2E não é consistente, neste cenário. Em segundo lugar, com base em dados efetivos de consumo e de retornos, mostramos que um ativo particular gera estimativas da ESI menores do que aquelas obtidas com base no retorno do capital agregado. Finalmente, por meio de simulações, mostramos que o modelo erroneamente especificado com base na utilidade CRRA leva a estimativas de ESI severamente viesadas. Para valores razoáveis da própria ESI e do coeficiente de aversão relativa ao risco, este viés é negativo, o que pode levar à prematura e equivocada conclusão de que a ESI é próxima de zero. Quando o modelo correto – compatível com as preferências *a la* Epstein e Zin – é estimado, tal viés é eliminado.

Tabela 9 – Casos 1 e 2: Resultados do estudo de Monte Carlo referentes a ESI e ao coeficiente de aversão relativa ao risco

PGD: Epstein e Zin (1989) - equação (11)

Caso 1 - Modelo: CRRA - equação (12)

Caso 2 - Modelo: Epstein e Zin (1989) - equação (11)

EIS (ψ)	Mediana da estimativa menos o parâmetro		Coeficiente de aversão relativa ao risco (γ)				
			0.40	0.80	1.20	1.60	2.00
0.40	Caso 1	$ \hat{\psi}^{(r)} - \psi$	-1.183	-2.881	2.184	0.501	0.164
	Caso 2	$ \hat{\psi}^{(r)} - \psi$	-0.021	-0.010	-0.020	-0.008	-0.009
	Caso 2	$ \hat{\gamma}^{(r)} - \gamma$	-0.030	-0.004	0.006	-0.004	0.030
0.80	Caso 1	$ \hat{\psi}^{(r)} - \psi$	-0.951	-1.515	0.169	-0.392	-0.503
	Caso 2	$ \hat{\psi}^{(r)} - \psi$	-0.004	0.000	0.004	-0.008	0.003
	Caso 2	$ \hat{\gamma}^{(r)} - \gamma$	0.020	0.002	-0.012	-0.018	-0.273
1.20	Caso 1	$ \hat{\psi}^{(r)} - \psi$	-0.733	-0.167	-1.858	-1.293	-1.182
	Caso 2	$ \hat{\psi}^{(r)} - \psi$	-0.002	-0.006	0.007	-0.001	0.007
	Caso 2	$ \hat{\gamma}^{(r)} - \gamma$	0.067	0.001	0.002	-0.021	-0.209
1.60	Caso 1	$ \hat{\psi}^{(r)} - \psi$	-0.507	1.171	-3.874	-2.191	-1.857
	Caso 2	$ \hat{\psi}^{(r)} - \psi$	0.016	-0.026	-0.021	-0.006	0.006
	Caso 2	$ \hat{\gamma}^{(r)} - \gamma$	-0.017	0.006	-0.009	-0.005	0.002
2.00	Caso 1	$ \hat{\psi}^{(r)} - \psi$	-0.271	2.536	-5.920	-3.093	-2.532
	Caso 2	$ \hat{\psi}^{(r)} - \psi$	-0.011	0.024	0.061	-0.027	0.013
	Caso 2	$ \hat{\gamma}^{(r)} - \gamma$	0.008	-0.010	0.009	-0.012	0.022

Nota: As estimativas foram obtidas por meio do conjunto de instrumento Mulligan-1° e do estimador MQ2E. As células sombreadas indicam as combinações da ESI e da aversão relativa ao risco tais que $|c_r| \leq 0.60$.

Em suma, encontramos evidências de que estimativas razoáveis da ESI e, inclusive, do coeficiente de aversão relativa ao risco podem ser obtidas com dados agregados, desde que sejam empregados o modelo e os dados (séries temporais) apropriados.

Referências

Browning, M. and Crossley, T. F. (2001). The Life-Cycle Model of Consumption and Saving. *Journal of Economic Perspectives*, 15 (3), 3–22.

- Campbell, J. Y., (2003). Consumption-Based Asset Pricing. In G. M. Constantinides, M. Harris and R. M. Stulz (eds.), *Handbook of the Economics of Finance*, vol. 1b. Amsterdam: Elsevier.
- Campbell, Lo & MacKinlay (1997) *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton.
- Campbell, J. Y., and N. G. Mankiw (1989). Consumption, Income, and Interest Rates: Reinterpreting the Time Series Evidence. In O. J. Blanchard and S. Fischer (eds.), *NBER Macroeconomics Annual* 1989. Cambridge, MA: MIT Press.
- Campbell, John Y., and Luis M. Viceira, "Consumption and Portfolio Decisions When Expected Returns Are Time Varying," *Quarterly Journal of Economics* 114:2 (1999), 433–495.
- Campbell, John Y., and Luis M. Viceira, *Strategic Asset Allocation: Portfolio Choice for Long-Term Investors*, Clarendon Lectures in Economics (New York: Oxford University Press, 2002).
- Dacy, D. and Hasanov, F. (2011). A Finance Approach to Estimating Consumption Parameters. *Economic Inquiry*, 49 (1), 122-154.
- Epstein, L. G. and Zin, S. E. (1989). Substitution, risk aversion and the temporal behavior of consumption and asset returns: a theoretical framework. *Econometrica*, 57, 937-79.
- Epstein, L. G. and Zin, S. E. (1991). Substitution, risk aversion and the temporal behavior of consumption and asset returns: an empirical analysis. *Journal of Political Economy*, 99, 263-286.
- Gomes, F. and Issler, J. (2016). Testing Consumption Optimality using Aggregate Data, *Macroeconomic Dynamics* (forthcoming).
- Gomes, F. and Paz, L. (2011). Narrow Replication of Yogo (2004) Estimating the Elasticity of Intertemporal Substitution When Instruments are Weak. *Journal of Applied Econometrics*, 26 (7), 1215-1216.
- Gomes, F. and Paz, L. (2015). Large estimates of the elasticity of intertemporal substitution: is it the aggregate return series or the instrument list? *Economics Bulletin*, 35 (1), 168-181.
- Hahm, J.H. (1998). Consumption Adjustment to Real Interest Rates: Intertemporal Substitution Revisited. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 22, 293-320.
- Hall, R. E. (1978). Stochastic Implications of the Life Cycle-Permanent Income Hypothesis: Theory and Evidence. *Journal of Political Economy*, 86(6), 971-987.
- Hall, R. E. (1988). Intertemporal Substitution in Consumption. *Journal of Political Economy*, 96 (2), 339-357.
- Hansen, L., Heaton, J. and Yaron, A. (1996). Finite-Sample Properties of Some Alternative GMM Estimators. *Journal of Business and Economic Statistics*, 14 (3), 262-280.
- Hansen, L. P., and Singleton, K. J. (1983). Stochastic Consumption, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Asset Returns. *Journal of Political Economy*, 91 (2), p. 249-265.
- Kreps, David M., and Porteus, Evan L. "Temporal Resolution of Uncertainty and Dynamic Choice Theory." *Econometrica* 46 (January 1978): 185-200.
- Koopmans, Tjalling C. "Stationary Ordinal Utility and Impatience." *Econometrica* 28 (April 1960): 287-309.
- Lucas, R.E., Jr. 1976. Econometric policy evaluation: a critique. In *The Phillips Curve and the Labor Market*, ed. K. Brunner and A. Meltzer, Vol. 1 of Carnegie-Rochester Conference on Public Policy. Amsterdam, North-Holland.
- Mankiw, N. (1981). The permanent income hypothesis and the real interest rate. *Economics Letters*, 7, 307-311.
- Mulligan, C., (2002). Capital, Interest, and Aggregate Intertemporal Substitution. NBER working paper 9373.
- Okubo, M. (2011). The Intertemporal Elasticity of Substitution: An Analysis Based on Japanese Data. *Economica* 78 (310), p. 367-390.
- Patterson, K. D. and Pesaran, B. (1992). The Intertemporal Elasticity of Substitution in Consumption in the United States and the United Kingdom. *Review of Economics and Statistics*, 74 (4), 573-584.
- Pozzi, L. (2003). The coefficient of relative risk aversion: a Monte Carlo study investigating small sample estimator problems. *Economic Modelling*, 20 (5), 923-940.

- Shiller, Robert (1989). *Market Volatility*. Cambridge, MA: M.I.T. Press.
- Stock, J.H. and Wright, J. H. (2000). GMM with Weak Identification. *Econometrica*, 68(5), 1055-1096.
- Stock, J. H., Wright, J. H. and Yogo, M. (2002). A Survey of Weak Instruments and Weak Identification in Generalized Method of Moments. *Journal of Business and Economic Statistics*, 20 (4), 518–529.
- Working, H. (1960). Note on the correlation of first differences of averages in a random chain. *Econometrica*, 28, 916-918.
- Yogo, M. (2004). Estimating The Elasticity of Intertemporal Substitution When Instruments are Weak. *Review of Economics and Statistics*, 86 (3), 797-810.

Apêndice A: Limite em probabilidade para a ESI

Considere o modelo baseado na equação (12):

$$\Delta \ln C_t = \alpha_{1,i} + \psi r_{i,t} + \omega_{i,t} \quad (\text{A.1})$$

em que $\alpha_{1,i} = \psi \ln \beta + 0.5 \psi \sigma_i^2$ e $\omega_{i,t} = \varepsilon_{i,t} - \psi \varepsilon_{i,t}^r$. Em notação matricial (A.1) é reescrito como segue:

$$Y = X\tau + \omega \quad (\text{A.2})$$

em que $Y = [\Delta \ln c_1 \ \cdots \ \Delta \ln c_T]'$; $X = [\iota \ r_i]$, com $\iota = [1 \ \cdots \ 1]'$ e $r = [r_{i,1} \ \cdots \ r_{i,T}]'$; $\tau = [\tau_1 \ \tau_2]' = [\alpha_{1,i} \ \psi]'$; $\omega = [\omega_{i,1} \ \cdots \ \omega_{i,T}]'$.

O PGD é dado pela equação (11):

$$\Delta \ln c_t = \alpha_{2,i} + \frac{\psi(\theta-1)}{\theta} m_t + \frac{\psi}{\theta} r_{i,t} + \vartheta_{i,t} \quad (\text{A.3})$$

em que $\alpha_{2,i} = \psi \ln \beta + 0.5 \psi \sigma^2 / \theta$ e $\vartheta_{i,t} = \varepsilon_{i,t} - \psi(\theta-1) \varepsilon_t^m / \theta - \psi \varepsilon_{i,t}^r / \theta$. Em notação matricial a equação (A.3) torna-se:

$$Y = X\pi + M\delta + \vartheta \quad (\text{A.4})$$

em que $\pi = [\pi_1 \ \pi_2]' = [\alpha_{2,i} \ \frac{\psi}{\theta}]'$; $M = [m]'$, sendo $m = [m_1 \ \cdots \ m_T]'$; $\vartheta_i = [\vartheta_{i,1} \ \cdots \ \vartheta_{i,T}]'$.

Assim, o modelo correto tem matriz de regressores $\tilde{X} = [X \ M]$.

Suponha que exista um conjunto de instrumentos disponível e que Z seja uma matriz $m \times T$ composta por m instrumentos. Defina a matriz $P_Z \equiv Z(Z'Z)^{-1}Z'$, $T \times T$, que projeta qualquer vetor (variável) no subespaço expandido pelos instrumentos.

Prova da Proposição 1:

Aplicar o método de MQ2E ao modelo (A.2) implica que

$$\hat{\tau} = (X'P_ZX)^{-1}X'P_ZY \quad (\text{A.5})$$

Assim,

$$\text{plim}_{T \rightarrow \infty}[\hat{\tau}] = \text{plim}_{T \rightarrow \infty}[(X'P_ZX)^{-1}X'P_ZY] \quad (\text{A.6})$$

Substituindo P_Z por $Z(Z'Z)^{-1}Z'$ e Y pelo PGD – equação (A.4) –, obtemos:

$$\text{plim}_{T \rightarrow \infty}[\hat{\tau}] = \text{plim}_{T \rightarrow \infty}\{[X'Z(Z'Z)^{-1}Z'X]^{-1}X'Z(Z'Z)^{-1}Z'(X\pi + M\delta + \vartheta)\} \quad (\text{A.7})$$

Note que a inversa de $X'Z(Z'Z)^{-1}Z'X$ está bem-definida, dadas as hipóteses 1 e 2. Sob tais hipóteses, o teorema de Slutsky implica que

$$\text{plim}_{T \rightarrow \infty}\left[\frac{1}{T}X'Z\left(\frac{1}{T}Z'Z\right)^{-1}\frac{1}{T}Z'X\right] = Q_{zx}'Q_{zz}^{-1}Q_{zx} \quad (\text{A.8})$$

em que Q_{zx} é uma partição de $Q_{z\tilde{x}}$, tendo posto completo. Adicionalmente, a hipótese 3 e o teorema de Slutsky implicam que

$$\text{plim}_{T \rightarrow \infty}\left\{\left[\frac{1}{T}X'Z\left(\frac{1}{T}Z'Z\right)^{-1}\frac{1}{T}Z'X\right]^{-1}\frac{1}{T}X'Z\left(\frac{1}{T}Z'Z\right)^{-1}\frac{1}{T}Z'\vartheta\right\} = 0 \quad (\text{A.9})$$

Portanto, usando (A.8) e (A.9), a probabilidade limite (A.7) torna-se:

$$\text{plim}_{T \rightarrow \infty}[\hat{\tau}] = \text{plim}_{T \rightarrow \infty}\{\pi + [X'Z(Z'Z)^{-1}Z'X]^{-1}X'Z(Z'Z)^{-1}Z'M\delta\} \quad (\text{A.10})$$

Se os instrumentos são assintoticamente ortogonais à variável omitida, isto é, $\text{plim}_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} Z' M \right\} = 0$, então

$$\text{plim}_{T \rightarrow \infty} [\hat{\tau}] = \pi \quad (\text{A.11})$$

E, como resultado, o limite em probabilidade (A.11) implica que o limite em probabilidade referente à ESI é dada por:

$$\text{plim}_{T \rightarrow \infty} [\hat{\psi}] = \frac{\psi}{\theta} \quad (\text{A.12})$$

Alternativamente, podemos reescrever (A.12) como:

$$\text{plim}_{T \rightarrow \infty} (\hat{\psi} - \psi) = \psi \frac{(1-\theta)}{\theta} \quad (\text{A.13})$$

Por outro lado, se $\text{plim}_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} Z' M \right\} \neq 0$, então

$$\text{plim}_{T \rightarrow \infty} [\hat{\tau}] = \text{plim}_{T \rightarrow \infty} \{ \pi + [X' P_Z X]^{-1} X' P_Z M \delta \} \quad (\text{A.14})$$

Como $P_Z P_Z = P_Z$ e $P_Z = P_Z'$, o segundo termo do lado direito de (D.14) pode ser reescrito como:

$$[X' P_Z X]^{-1} X' P_Z M = [(P_Z X)' P_Z X]^{-1} (P_Z X)' P_Z M \quad (\text{A.15})$$

Defina $\hat{r} \equiv P_Z r$ e $\hat{m} \equiv P_Z m$, e assuma que no conjunto de instrumentos há uma constante. Então, $P_Z X = P_Z [1 \ r] = [1 \ \hat{r}]$ e $P_Z M = P_Z [m] = [\hat{m}]$. Finalmente,

$$[X' P_Z X]^{-1} X' P_Z M = \left(\begin{bmatrix} 1' \\ \hat{r}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{r} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1' \\ \hat{r}' \end{bmatrix} [\hat{m}] = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^T \hat{r}_{i,t}^2 & - \sum_{t=1}^T \hat{r}_{i,t} \\ - \sum_{t=1}^T \hat{r}_{i,t} & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^T \hat{m}_t \\ \sum_{t=1}^T \hat{r}_{i,t} \hat{m}_t \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

em que $\Delta \equiv T \sum_{t=1}^T \hat{r}_{i,t}^2 - \left(\sum_{t=1}^T \hat{r}_{i,t} \right)^2$. Assim, (A.16) implica que:

$$[X' P_Z X]^{-1} X' P_Z M = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \left(\sum_{t=1}^T \hat{r}_{i,t}^2 \right) \left(\sum_{t=1}^T \hat{m}_t \right) - \left(\sum_{t=1}^T \hat{r}_{i,t} \right) \left(\sum_{t=1}^T \hat{r}_{i,t} \hat{m}_t \right) \\ T \left(\sum_{t=1}^T \hat{r}_{i,t} \hat{m}_t \right) - \left(\sum_{t=1}^T \hat{r}_{i,t} \right) \left(\sum_{t=1}^T \hat{m}_t \right) \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

Portanto, usando (A.17), o limite em probabilidade (A.14) torna-se:

$$\text{plim}_{T \rightarrow \infty} [\hat{\tau}] = \text{plim}_{T \rightarrow \infty} \left\{ \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \left(\sum_{t=1}^T \hat{r}_{i,t}^2 \right) \left(\sum_{t=1}^T \hat{m}_t \right) - \left(\sum_{t=1}^T \hat{r}_{i,t} \right) \left(\sum_{t=1}^T \hat{r}_{i,t} \hat{m}_t \right) \\ T \left(\sum_{t=1}^T \hat{r}_{i,t} \hat{m}_t \right) - \left(\sum_{t=1}^T \hat{r}_{i,t} \right) \left(\sum_{t=1}^T \hat{m}_t \right) \end{bmatrix} \delta \right\} \quad (\text{A.18})$$

Focando no segundo termo de (A.18) referente a $\text{plim}_{T \rightarrow \infty} [\hat{\tau}_2]$, isto é, $\text{plim}_{T \rightarrow \infty} [\hat{\psi}]$, e substituindo Δ , concluímos que:

$$\frac{T \left(\sum_{t=1}^T \hat{r}_{i,t} \hat{m}_t \right) - \left(\sum_{t=1}^T \hat{r}_{i,t} \right) \left(\sum_{t=1}^T \hat{m}_t \right)}{\sum_{t=1}^T \hat{r}_{i,t}^2 - \left(\sum_{t=1}^T \hat{r}_{i,t} \right)^2} \xrightarrow{P} \frac{\text{cov}(\hat{r}_{i,t}, \hat{m}_t)}{\text{var}(\hat{r}_{i,t})} \quad (\text{A.19})$$

Portanto, (A.18) e (A.19) implicam que

$$\text{plim}_{T \rightarrow \infty} [\hat{\tau}_2] = \text{plim}_{T \rightarrow \infty} [\hat{\psi}] = \pi_2 + \frac{\text{cov}(\hat{r}_{i,t}, \hat{m}_t)}{\text{var}(\hat{r}_{i,t})} \delta = \frac{\psi}{\theta} + \frac{\text{cov}(\hat{r}_{i,t}, \hat{m}_t)}{\text{var}(\hat{r}_{i,t})} \frac{\psi(\theta - 1)}{\theta} \quad (\text{A.20})$$

Ou, alternativamente,

$$\text{plim}_{T \rightarrow \infty} [\hat{\psi} - \psi] = \frac{\psi}{\theta} + \frac{\text{cov}(\hat{r}_{i,t}, \hat{m}_t)}{\text{var}(\hat{r}_{i,t})} \frac{\psi(\theta - 1)}{\theta} - \psi = \frac{\psi(1 - \theta)}{\theta} \left[1 - \frac{\text{cov}(\hat{r}_{i,t}, \hat{m}_t)}{\text{var}(\hat{r}_{i,t})} \right] \quad (\text{A.21})$$

■