

# Modelo de Solow Espacial com Poupança Não-Homogênea

João Plínio Juchem Neto, Pós-Doutorando no PPGE/UFRGS, jpjuchem@gmail.com

Sabino da Silva Pôrto Júnior, Professor no PPGE/UFRGS, sabino@ppge.ufrgs.br

Julio Cesar Ruiz Claeysen, Professor no PPGMAp/UFRGS, julio@mat.ufrgs.br

## Abstract

In this work we introduce a spatially non-homogeneous saving rate in a Spatial Solow Model. We then verify, numerically and in one spatial dimension, that this modification causes the aggregated economy to reach a higher level of capital per capita than when the saving rate is constant all over the economy. Besides of that, we also show that the economy as a whole reaches a higher level of capital per capita when there is economic cluster formation, and an even higher average level when it develops economic cycles.

*JEL Classification:* R12, O40.

*Keywords:* Spatial Solow Model, Regional Economics, Industrial Agglomeration.

*Thematic Area:* (10) Regional and Urban Economics.

## Resumo

Neste trabalho introduzimos uma taxa de poupança espacialmente não-homogênea no Modelo de Solow Espacial e verificamos, através de simulações numéricas em uma dimensão espacial, que tal modificação faz com que a economia agregada atinja um nível maior de capital per capita do que no caso em que a poupança é constante em todas as localidades. Além disso, também mostramos que a economia como um todo atinge um nível de capital per capita maior nos casos em que há formação de aglomerados econômicos, e um nível médio ainda maior quando a economia desenvolve ciclos econômicos.

*Classificação JEL:* R12, O40.

*Palavras-Chave:* Modelo de Solow Espacial, Economia Regional, Aglomeração Industrial.

*Área Temática:* (10) Economia Regional e Urbana.

# 1 Introdução

O modelo de crescimento econômico neoclássico, considerado canônico até nossos dias, foi proposto por Solow (1956) e Swan (1956) na década de 50. Neste modelo, a taxa de poupança e o crescimento malthusiano da mão-de-obra são dados exogenamente e, como na grande maioria dos modelos de crescimento econômico encontrados na literatura, ele é espacialmente homogêneo (Wan Jr, 1971; Barro and Sala-i Martin, 2004). Isto significa que ele não leva em consideração a movimentação da mão-de-obra e do capital pelo espaço, sendo utilizado principalmente para descrever a evolução do produto agregado da economia ao longo do tempo – do produto interno bruto (PIB), por exemplo. Se observarmos os dados empíricos do censo do IBGE de 2010, entretanto, podemos constatar que a grande maioria das cidades brasileiras com maior PIB per capita estão concentradas nas regiões sul, sudeste e centro-oeste, enquanto que as cidades com menor PIB per capita se encontram no norte e nordeste brasileiros (Rolnik and Klink, 2011). De fato, esta é uma distribuição espacial que parece ser característica da segunda metade do século XX no Brasil (Camarano and Beltrão, 2000; Pôrto Júnior and Figueiredo, 2012). É evidente, portanto, que a variável espacial é um fator importante para descrever o crescimento econômico.

Na literatura podemos encontrar duas grandes linhas de pesquisa cujo intuito é descrever e explicar a dinâmica espaço-temporal de uma economia e, em particular, descrever como se dá o processo de aglomeração econômica. A primeira destas linhas é mais antiga e advém da área de estudos denominada Ciência Regional, e a segunda, mais recente, é denominada de Nova Geografia Econômica.

A linha de pesquisa provinda da Ciência Regional (Isard, 1956, 2003; Isard and Liosatos, 1975a,b, 1979) costuma descrever a dinâmica espaço-temporal da economia com um sistema de equações diferenciais parciais, as quais são derivadas a partir de argumentos de conservação de capital e trabalho, e em seguida encontrar a evolução espaço-temporal que maximiza uma função de bem-estar social, adotando uma abordagem de planejamento central. Apesar de não serem microfundamentados, estes modelos apresentam a vantagem de que é relativamente simples de se considerar a acumulação de capital (e portanto o crescimento econômico) em seu formalismo.

A Nova Geografia Econômica, sub-área recente da Geografia Econômica (Thisse, 2011), foi proposta inicialmente por Krugman (1991), sendo desenvolvida em mais detalhes por Fujita et al. (1999), Fujita and Thisse (2002) e Combes et al. (2008). Esta abordagem, microeconômica, é uma generalização espacial da Nova Teoria do Comércio proposta por Krugman (1979), e seu modelo básico é o modelo de centro-periferia. Através de uma análise de equilíbrio geral, os autores mostram que a interação entre retornos crescentes de escala, custos de transporte e mobilidade espacial da mão-de-obra pode causar aglomeração econômica. Este modelo é bastante útil para explicar a produção, o consumo e a formação de preços na economia, assim como a formação de aglomerados e cidades, mas possui algumas limitações: uma delas é o fato de que os agentes consomem toda a renda, o que implica que, em alguns casos, pode não haver crescimento econômico (Brito, 2004; Camacho et al., 2008); outra, a de que não é muito simples de se modificá-lo para adicionar a acumulação de capital, embora já existam algumas tentativas nesta direção. Por exemplo, no Capítulo 11 de seu livro, Fujita and Thisse (2002) apresenta um modelo de crescimento endógeno de duas regiões, sendo este uma combinação de um modelo de centro-periferia ao estilo de Krugman

com um modelo de crescimento endógeno com produtos diferenciados horizontalmente do tipo Grossman-Helpman-Romer. Desta forma, a taxa de crescimento da economia é medida pela variação no número de variedades produzidas. A principal conclusão deste modelo, nas palavras dos próprios autores, é a seguinte: “In fact, our analysis strongly supports the idea that *agglomeration and growth reinforce each other*” (pag. 421, Fujita and Thisse (2002)).

O objetivo principal deste trabalho é dar uma pequena contribuição ao desenvolvimento de modelos de crescimento econômico espacial seguindo a linha de pesquisa da Ciência Regional, ao considerar uma taxa de poupança espacialmente não-homogênea no Modelo de Solow Espacial apresentado em Juchem Neto and Claeysen (2013). A idéia é comparar, através de simulações numéricas, a evolução espaço-temporal gerada por este modelo com o caso em que a poupança é espacialmente homogênea.

O modelo aqui considerado é caracterizado por uma função de produção de Cobb-Douglas e por um crescimento logístico da mão-de-obra, o que implica que ela é limitada no longo prazo (comportamento este já considerado anteriormente no modelo não-espacial, conforme Donghan (1998), Mingari Scarpello and Ritelli (2003) e Guerrini (2006)). Quanto à mobilidade dos fatores de produção, consideramos que o capital/trabalho se move de regiões com alta densidade para regiões com baixa densidade de capital/trabalho de uma forma difusiva (tal comportamento está de acordo com o princípio neoclássico dos retornos marginais decrescente dos fatores) e que existe uma migração de trabalhadores induzida pelo capital, onde os trabalhadores tendem a se mover para regiões com uma maior densidade de capital disponível (onde os trabalhadores podem encontrar mais fábricas e instalações para trabalhar, por exemplo). Desta forma, a distribuição espacial de mão-de-obra determina a distribuição espacial de capital, e vice-versa.

Este artigo está estruturado da seguinte maneira: na seção dois realizamos uma breve revisão da literatura abordando modelos de crescimento econômico espaciais seguindo a linha de estudos da Ciência Regional; na seção três introduzimos o modelo considerado neste trabalho; na seção quatro apresentamos alguns resultados de estabilidade linear para o caso em que a poupança é espacialmente homogênea; e na seção cinco temos os resultados das simulações numéricas. Por fim, fechamos o artigo com as conclusões e perspectivas de pesquisa futura.

## 2 Breve Revisão Bibliográfica

Nesta seção apresentamos, em linhas gerais, o desenvolvimento da modelagem de crescimento econômico espacial seguida pela Ciência Regional, linha de pesquisa na qual este trabalho se enquadra. Embora a Ciência Regional tenha passado por uma espécie de crise no início dos anos 90, a partir dos anos 2000 houve um renovado interesse nesta área de estudos (Quigley, 2001).

Começamos com Isard and Liossatos (1975a,b), que propõem um modelo evolutivo bastante geral de crescimento econômico com dependência espacial, onde as variáveis espaço e tempo são contínuas. Este modelo é descrito por um sistema de duas equações diferenciais parciais governando a evolução espaço-temporal da densidade de capital/trabalho: a primeira equação é de conservação de capital/trabalho, o que em termos econômicos es-

tabelece o balanço entre oferta e demanda; e a segunda equação descreve a dinâmica do fluxo (ou migração espacial) do capital/trabalho, a qual depende do gradiente das suas respectivas densidades. Dois importantes casos particulares deste modelo são: (i) caso reativo-difusivo-advectivo, de caráter parabólico, onde os fluxos de capital/trabalho respondem instantaneamente às alterações nos gradientes das densidades de capital/trabalho; e (ii) caso ondulatório, de caráter hiperbólico, onde os fluxos de capital/trabalho respondem com um certo atraso às mudanças nos gradientes das densidades de capital/trabalho. Seguindo Cattaneo (1958), este segundo caso é modelado com a aplicação da lei de Fourier modificada para descrever os fluxos de capital/trabalho, o que implica que este modelo pode gerar comportamento econômico cíclico e propagação de ondas. Utilizando estas equações, são então resolvidos problemas de otimização dinâmica em um horizonte finito de planejamento. Sistematizando e aprofundando estes trabalhos, Isard and Liossatos (1979) propõem uma teoria geral de dinâmica espacial e desenvolvimento espaço-temporal ótimo, considerando tanto modelos discretos quanto contínuos.

Nos anos 2000 há uma retomada destes trabalhos de Isard e Liossatos, com Camacho and Zou (2004) propondo o Modelo de Solow Espacial para uma economia de tamanho infinito, onde cada ponto do espaço representa um agente econômico imóvel que produz e consome um único bem agregado, identificado como o capital. Os autores apresentam este modelo como uma generalização espacial direta do Modelo de Solow, onde apenas o capital se move pelo espaço, se difundindo de regiões com alta densidade para regiões com baixa densidade de capital. De fato, este modelo é um caso particular – reativo-difusivo – do modelo proposto por Isard-Liossatos na década de 70. Em seguida, Brito (2005) adiciona a este modelo uma distribuição de mão-de-obra seguindo um crescimento malthusiano exógeno. Uma característica destes modelos é que só há aglomeração econômica – ou a evolução para uma distribuição de capital e trabalho espacialmente não-homogênea – se for introduzido exogenamente no modelo uma tecnologia espacialmente assimétrica e constante ao longo do tempo.

Seguindo nesta linha, Brito (2004), considerando a dinâmica espaço-temporal proposta por Camacho and Zou (2004), propõe uma generalização espacial para o modelo de Ramsey, supondo uma economia centralizada, onde o planejador escolhe a alocação espaço-temporal de consumo que maximiza um funcional de utilidade social de Bergson-Samuelson. Para lidar com um domínio ilimitado, o autor se utiliza de uma função de utilidade (média) de Millian. Entre as conclusões deste trabalho está a de que este modelo pode gerar aglomerados endogenamente, através de um processo reativo-difusivo similar à formação de padrões espaciais proposto por Turing (1952), o qual foi aplicado em problemas de quimiotaxia<sup>1</sup> na área de Biomatemática primeiramente por Keller and Segel (1970). Este mesmo tipo de comportamento também aparece em modelos da Nova Geografia Econômica, quando o espaço é considerado contínuo (Fujita et al., 1999). Camacho et al. (2008) obtém resultados de existência rigorosos para um modelo similar a este proposto por Brito (2004), mas em um domínio compacto e considerando uma função de utilidade linear. Além disso, propõem um esquema numérico para aproximar a solução do problema de otimização dinâmica resultante. Observe que neste modelo o problema de otimização associado está sujeito a restrições dadas por equações diferenciais parciais, o que dificulta substancialmente a sua resolução.

---

<sup>1</sup>Quimiotaxia é o processo em que células, ou organismos, migram em resposta a gradientes químicos externos, seguindo na direção destes gradientes (Painter and Hillen, 2011). No presente contexto temos a mão-de-obra (células) migrando na direção do gradiente do capital (químico).

Mais recentemente, Engbers (2009) e Capasso et al. (2010), consideraram uma função de produção convexa-côncava no Modelo de Solow Espacial em um domínio limitado. Em Capasso et al. (2012), os autores introduzem uma mão-de-obra malthusiana exógena no modelo, considerando taxas de crescimento populacional espacialmente não-homogêneas, e mostram que, dependendo da distribuição inicial de capital, armadilhas de pobreza podem se formar em tal economia (Sachs, 2001).

Juchem Neto (2013) e Juchem Neto and Claeysen (2013) propõem uma generalização do Modelo de Solow Espacial até então encontrado na literatura, levando em consideração a interação entre as distribuições de capital e mão-de-obra. Este modelo é, simultaneamente, um caso particular de uma versão modificada do Modelo de Isard-Liossatos (Isard and Liossatos, 1979) de crescimento econômico espacial<sup>2</sup>, e uma generalização do Modelo de Solow Espacial encontrado na literatura até o momento (Camacho and Zou, 2004; Brito, 2004, 2005; Capasso et al., 2010). Além de considerar um movimento difusivo para a mão-de-obra e o capital, este modelo considera a existência de uma migração de trabalhadores induzida pelo capital, onde estes se movem de regiões com baixa densidade de capital para regiões com alta densidade de capital. Desta forma, a distribuição de mão-de-obra também é determinada endogenamente. Através de uma análise de estabilidade linear, neste trabalho é mostrado que a introdução desta migração de mão-de-obra induzida pelo capital é uma condição necessária para o modelo entrar em um regime instável, no qual pode haver a formação de aglomerados econômicos ou ser gerada uma rica variedade de dinâmicas espaço-temporais de forma completamente endógena. Além disso, são apresentadas simulações numéricas em uma dimensão espacial mostrando que, dependendo da intensidade desta migração e do tamanho da economia, este modelo pode gerar endogenamente quatro tipos de comportamentos, fazendo a economia: (i) convergir para um estado estacionário homogêneo; (ii) convergir para um estado estacionário não-homogêneo; (iii) desenvolver ciclos espaço-temporais periódicos; (iv) e desenvolver ciclos espaço-temporais irregulares e aperiódicos.

### 3 O Modelo de Solow Espacial

O modelo considerado neste trabalho descreve a evolução espaço-temporal das densidades de capital e mão-de-obra em um continuum de economias locais representadas por um intervalo compacto  $\Omega = [0, l]$ . Desta forma,  $l > 0$  é o tamanho do segmento de reta representando a economia. Em cada ponto  $x \in \Omega$ , existe uma densidade de capital  $K(t, x) \geq 0$  e de trabalho  $L(t, x) \geq 0$ , fatores que são utilizados para produzir um bem agregado através de uma função de produção de Cobb-Douglas  $f(K, L) = AK^\phi L^{1-\phi}$ . Aqui,  $\phi \in [0, 1]$  informa a intensividade do uso do capital no processo produtivo e  $A > 0$  é um fator tecnológico constante. Observe que todas as economias locais utilizam a mesma função de produção e que a taxa de crescimento natural da mão-de-obra é dada pela mesma função logística  $g(L) = aL - bL^2$ , onde  $a, b \geq 0$ . Isto implica que  $\frac{b}{a} \geq 0$  é a quantidade máxima de trabalhadores que cada localidade suporta. O modelo, que por simplicidade consideramos em uma dimensão espacial, é derivado em Juchem Neto and Claeysen (2013) para uma taxa de poupança espacialmente homogênea  $s(x) = s$ ,  $s \in [0, 1]$ , a partir de leis de conservação de capital e mão-de-obra. Se a poupança não é constante, o modelo pode ser descrito pelas seguintes equações diferenciais parciais não-lineares acopladas, com as respectivas condições

---

<sup>2</sup>Tal modificação foi introduzida para evitar a existência de soluções negativas, o que seria irrealista.

iniciais e de fronteira:

$$\frac{\partial K}{\partial t} = s(x)AK^\phi L^{1-\phi} - \delta K + d_K \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}, \text{ para } x \in (0, l), t > 0 \quad (1a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = aL - bL^2 + d_L \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} - \chi_L \frac{\partial}{\partial x} \left( L \frac{\partial K}{\partial x} \right), \text{ para } x \in (0, l), t > 0 \quad (1b)$$

$$K(t, x) = K_0(x), L(t, x) = L_0(x), \text{ para } x \in \Omega = [0, l], t = 0 \quad (1c)$$

$$\frac{\partial K}{\partial x} = 0, \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \text{ para } x \in \partial\Omega = \{0, l\}, t > 0. \quad (1d)$$

A equação (1a) governa a evolução espaço-temporal do capital na economia, onde  $s(x)$  é a taxa de poupança na localidade  $x$  tomando valores no intervalo  $[0, 1]$ ;  $\delta > 0$  é a taxa de depreciação do capital (constante);  $d_K > 0$  é o coeficiente de difusão do capital, o qual informa a intensidade do movimento do capital para regiões onde há menos capital disponível. Já (1b) governa a evolução da mão-de-obra, sendo  $a, b > 0$  os parâmetros do crescimento logístico,  $d_L > 0$  o coeficiente de difusão da mão-de-obra e  $\chi_L \geq 0$  a intensidade da migração da mão-de-obra induzida pelo capital, a qual faz com que os trabalhadores se movam para regiões onde haja mais capital disponível. Neste modelo não são considerados custos de transporte. Observe que a difusão é uma força de dispersão espacial tanto de capital quanto do trabalho, enquanto que a migração induzida pelo capital, representada pelo termo  $\chi_L \frac{\partial}{\partial x} \left( L \frac{\partial K}{\partial x} \right)$ , se caracteriza como uma força de agregação, pois a medida que os trabalhadores se movem para onde há mais capital, este tende a crescer mais rapidamente neste local de destino, enquanto que o contrário ocorre na região de origem. Desta forma, a diferença no nível do capital entre as duas localidades se acentua, aumentando a intensidade da migração de trabalhadores para onde há mais capital.

Completando o modelo, temos as distribuições iniciais de capital ( $K_0(x) \geq 0$ ) e mão-de-obra ( $L_0(x) \geq 0$ ), dadas por (1c), e as condições de fronteira de Neumann homogêneas (1d), que garantem que não haja transferência de capital e de trabalhadores através das fronteiras da economia,  $\partial\Omega$ , ou seja, a economia como um todo é uma autarquia.

A seguir mostramos que, se as distribuições iniciais de capital e trabalho são não-negativas, então as soluções  $K(t, x)$  e  $L(t, x)$  de (1a)-(1d) também são sempre não-negativas:

**Proposição 1** - Considere as distribuições iniciais não-negativas de capital e mão-de-obra  $K_0(x) \geq 0$  e  $L_0(x) \geq 0$ . Se  $K(t, x)$  e  $L(t, x)$  são  $\mathcal{C}^1$  em relação à  $t$  e  $\mathcal{C}^2$  em relação à  $x$ , então as soluções de (1a)-(1d) são sempre não-negativas.

**Prova:** A equação para a evolução espaço-temporal da mão-de-obra pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial t} &= aL - bL^2 + d_L \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} - \chi_L \frac{\partial}{\partial x} \left( L \frac{\partial K}{\partial x} \right) \\ &= aL - bL^2 + d_L \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} - \chi_L L \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - \chi_L \frac{\partial L}{\partial x} \frac{\partial K}{\partial x}. \end{aligned}$$

Seguindo Edelstein (1971), observe que, como  $L$  é contínua em relação ao tempo, e  $L_0(x)$  é função não-negativa, deve existir um primeiro ponto  $x_0 \in \Omega \cup \partial\Omega$  onde  $L = 0$  (para algum  $t_0$ ), antes que este se torne negativo. Se isto ocorre em  $\Omega$ , deve haver um mínimo local em  $x_0$ , e portanto:

$$L = 0, \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \text{ e } \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} > 0 \text{ em } (t_0, x_0).$$

Substituindo estes resultados na equação anterior obtemos que:

$$\frac{\partial K}{\partial t} = d_L \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} \geq 0 \text{ em } (t_0, x_0), \text{ pois } d_L \geq 0,$$

e assim  $L$  não pode se tornar negativo neste ponto, e desta forma não pode se tornar negativo em  $\Omega$ . Se  $L$  assumisse valor negativo na fronteira  $\partial\Omega$ ,  $L$  também deveria assumir valor negativo em algum ponto interior do domínio, pois  $L$  é contínua em relação à  $x$ , mas isto não pode ocorrer pelo argumento anterior. De forma similar mostramos que  $K(t, x)$  também não pode assumir valores negativos  $\square$

Quanto à existência de soluções, Senba and Suzuki (2004) demonstraram, no capítulo 7 de seu livro, a existência local (no tempo) de soluções clássicas para o problema (1a)-(1d). Em Osaki et al. (2001), Osaki et al. (2002) e Hillen and Potapov (2004) foi estabelecida existência global para um problema similar.

Temos os seguintes casos particulares do modelo aqui considerado: se  $s(x) = s$  for constante, recuperamos o modelo tratado em Juchem Neto and Claeysen (2013), e se, além disso, considerarmos condições iniciais constantes, não haverá movimentação espacial de capital e mão-de-obra pela economia, e a solução do modelo será a mesma que a do modelo não-espacial, considerado em Mingari Scarpello and Ritelli (2003); se também fizermos  $b = 0$  na função logística, teremos crescimento malthusiano, e assim recuperamos o modelo de Solow-Swan (Solow, 1956; Swan, 1956). Por outro lado, se considerarmos uma economia de tamanho infinito  $\Omega = \mathbb{R}$  e  $a = b = d_L = \chi_L = 0$ , recuperamos o Modelo de Solow Espacial tratado por Camacho and Zou (2004); se  $\Omega = \mathbb{R}$  e  $b = \chi_L = 0$ , então temos o modelo considerado por Brito (2005).

Finalizando a apresentação do modelo, cabe notar que (1a)-(1d) guarda certa semelhança com modelos utilizados no estudo do movimento de células por quimiotaxia, os quais podem levar a formação de padrões (ou aglomerados) espaciais estáveis (Keller and Segel, 1970; Zhu and Murray, 1995; Murray, 2003; Edelstein-Keshet, 2005) e a dinâmicas espaço-temporais mais complexas (Pearce et al., 2007; Painter and Hillen, 2011; Banerjee et al., 2012).

## 4 Resultados de Estabilidade Linear para o Caso em que a Poupança é Homogênea

Se considerarmos a taxa de poupança homogênea em toda a economia,  $s(x) \equiv s$ , temos que o único ponto de equilíbrio espacialmente homogêneo de (1a)-(1d), em que capital e trabalho são ambos não-nulos, é dado por<sup>3</sup>:

$$K_\infty = \frac{a}{b} \left( \frac{sA}{\delta} \right)^{\frac{1}{1-\phi}} \quad (2a)$$

$$L_\infty = \frac{a}{b} \quad (2b)$$

---

<sup>3</sup>Para encontrar estes pontos, fazemos  $\frac{\partial K}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t} = 0$ ,  $\frac{\partial K}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial x} = 0$  e  $\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 0$  nas equações (1a) e (1b).

Adicionando uma perturbação espacialmente não-homogênea de pequena amplitude a este ponto de equilíbrio, temos que este será (linearmente) estável se a amplitude desta perturbação tender a zero quando o tempo tender ao infinito. Caso contrário, dizemos que o equilíbrio é (linearmente) instável. Quando o equilíbrio é estável, a economia sempre irá convergir para o estado homogêneo (2a)-(2b), enquanto que, quando ele for instável, podemos observar tanto a convergência da economia para um novo estado de equilíbrio espacialmente não-homogêneo, quanto o aparecimento de ciclos espaço-temporais periódicos e aperiódicos (Juchem Neto and Claeysen, 2013). Neste mesmo trabalho foi demonstrado o seguinte resultado:

**Proposição 2** - Seja  $d_K d_L > 0$ . O ponto de equilíbrio dado por (2a)-(2b) é instável se a seguinte desigualdade for satisfeita:

$$\chi_L \geq b \left( \frac{\delta \phi}{sA} \right)^{\frac{1}{1-\phi}} \left( \sqrt{\frac{\delta d_L}{a}} + \sqrt{\frac{d_K}{1-\phi}} \right)^2 =: \chi_c. \quad (3)$$

Assim, existe um valor crítico,  $\chi_c$ , para a intensidade da migração de mão-de-obra induzida pelo capital, no qual a dinâmica do sistema muda: se  $\chi_L < \chi_c$ , a economia converge para um estado homogêneo; se  $\chi_L > \chi_c$ , comportamentos espaço-temporais mais complexos podem se formar. Observe que, coeficientes de difusão maiores,  $d_K$  ou  $d_L$ , assim como uma taxa de depreciação do capital maior,  $\delta$ , implicam em um maior  $\chi_c$ , i.e., a intensidade da migração deve ser maior para desestabilizar o sistema. Da mesma forma, uma menor capacidade de mão-de-obra na economia,  $a/b$  (mantendo  $a$  fixo), e um menor fator tecnológico,  $A$ , também implicam em um maior  $\chi_c$ . Por outro lado, uma maior taxa de crescimento exponencial para a mão-de-obra,  $a$ , e uma maior taxa de poupança,  $s$ , implicam em um menor  $\chi_c$ .

## 5 Simulações Numéricas

O objetivo desta seção é comparar, através de simulações numéricas<sup>4</sup>, a solução do modelo quando a poupança é espacialmente não-homogênea, com o caso em que ela é constante em toda a economia, i.e.,  $s(x) = 0.2$  para todo  $x \in [0, 100]$ . Então, considerando este último caso com o seguinte conjunto de parâmetros:

$$l = 100, a = 0.02, b = 0.01, \delta = 0.05, s = 0.2, A = 1, \phi = 0.5$$

obtemos que o equilíbrio espacialmente homogêneo do sistema (2a)-(2b) é  $K_\infty = 32$ ,  $L_\infty = 2$ , enquanto que o valor crítico para o coeficiente de migração induzida pelo capital (3) é igual a  $\chi_c = 0.112$ .

Em todas as simulações iremos considerar as seguintes distribuições iniciais de capital e mão-de-obra:

$$K_0(x) = \exp \left( -\frac{(x-50)^2}{100} \right) \quad (4a)$$

$$L_0(x) = 16 \exp \left( -\frac{(x-50)^2}{100} \right) \quad (4b)$$

---

<sup>4</sup>Como não é possível obter soluções analíticas para (1a)-(1d), nos utilizamos de um esquema numérico explícito, baseado em diferenças-finitas, conforme descrito no Apêndice A de Juchem Neto (2013). Nas simulações vamos considerar uma economia de tamanho  $l = 100$ , um tempo máximo  $T = 5000$ , um passo espacial  $dx = 0.5$  e um passo temporal  $dt = 0.0075$ .



e três funções para a taxa de poupança: (i) poupança constante,  $s(x) = 0.2$  para  $x \in [0, 100]$ , onde todas as localidades poupam igualmente; (ii) poupança constante por partes,  $s(x) = 0.1$  para  $x \in [0, 50]$  e  $s(x) = 0.3$  para  $x \in [50, 100]$ , onde a metade esquerda da economia poupa menos do que a metade direita; e poupança linear,  $s(x) = -0.004x + 0.4$  para  $x \in [0, 100]$ , onde as taxas de poupança são mais altas na metade esquerda, mas decrescem linearmente até zero na localidade  $x = 100$ . Na Figura 1 apresentamos os gráficos destas três funções: observe que todas elas resultam numa taxa de poupança média de 0.2 para a economia como um todo. Além disso, mudanças nas distribuições iniciais de capital e trabalho não alteram, qualitativamente, o comportamento do sistema.

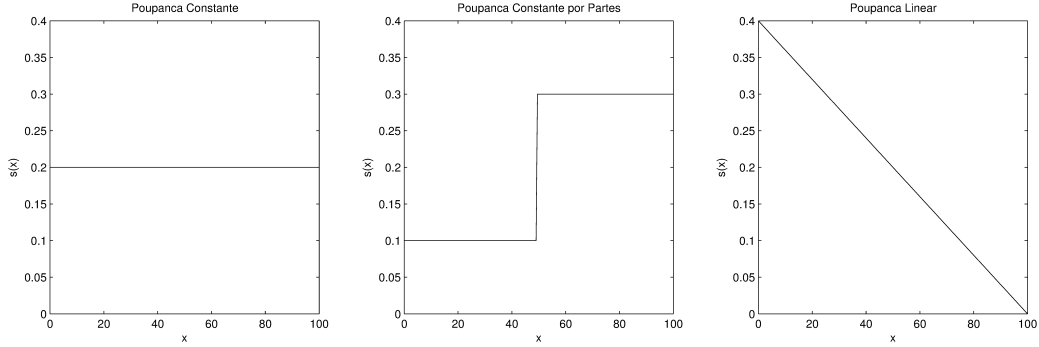


Figura 1: Funções para a Taxa de Poupança

A seguir, consideramos três valores para a intensidade de migração da mão-de-obra induzida pelo capital: (a)  $\chi_L = 0$ , (b)  $\chi_L = 0.125$  e (c)  $\chi_L = 0.25$ . Quando a poupança é constante ( $s(x) = 0.2$ ), temos  $\chi_c = 0.112$ , e os seguintes cenários aparecem nas simulações: o caso (a) implica em estabilidade, e portanto a economia converge para uma distribuição homogênea de capital e trabalho (primeira coluna das Figuras 2 e 3); o caso (b) é instável, havendo formação de aglomerados de capital e mão-de-obra estáveis ao longo de toda a economia (primeira coluna das Figuras 4 e 5); e o caso (c) também é instável, mas agora há formação de ciclos econômicos ao longo da economia (primeira coluna das Figuras 6 e 7).

Segue de (3) que, quando  $\chi_L = 0.125$ , temos estabilidade para  $s(x) > 0.189$  e instabilidade para  $s(x) < 0.189$ , o que implica que: no caso em que a poupança é constante por partes (ii), a região esquerda  $[0, 50]$  será estável e a direita  $[50, 100]$  será instável; no caso em que a poupança é linear (iii), a região  $[0, 53]$  será instável e a  $[53, 100]$  será estável. Já quando  $\chi = 0.25$ , temos estabilidade quando  $s(x) > 0.134$  e instabilidade quando  $s(x) < 0.134$ , e assim: para (ii) temos o mesmo comportamento anterior; enquanto que para (iii) a região  $[0, 67]$  será instável e  $[67, 100]$  será estável.

Então, para o caso (ii) temos os seguintes resultados: (a) na segunda coluna das Figuras 2 e 3 podemos ver que o capital converge para um estado não-homogêneo, o qual é consequência direta da não-homogeneidade introduzida exogenamente pela função de poupança, onde um maior nível de capital é atingido nas regiões onde a taxa de poupança é maior, enquanto que a mão-de-obra converge para um estado homogêneo (lembre que os parâmetros da logística são constantes); (b) na segunda coluna das figuras de 4 e 5 podemos verificar a formação de aglomerados estáveis de capital e mão-de-obra no intervalo onde a taxa de poupança é maior  $[50, 100]$ , e a convergência a um estado homogêneo onde ela é menor, em

$[0, 50]$ , o que confirma as considerações do parágrafo anterior; (c) na segunda coluna das Figuras 6 e 7 temos a formação de ciclos periódicos de capital e mão-de-obra no intervalo  $[50, 100]$ , enquanto que no intervalo  $[0, 50]$  estas distribuições convergem para um estado aproximadamente homogêneo.

Já no caso (iii) verificamos que, quando há estabilidade em toda a economia (a), podemos observar a convergência da distribuição de capital para um estado estacionário não-homogêneo (terceira coluna das Figuras 2 e 3), causado exogenamente pela forma linear da poupança. Nos casos onde há instabilidade, (b) e (c), o comportamento dinâmico do sistema é similar ao apresentado no parágrafo anterior, mas considerando as regiões  $[0, 53]$  (instável) e  $[53, 100]$  (estável) para (b) – terceira coluna das Figuras 4 e 5, e  $[0, 67]$  (instável) e  $[67, 100]$  (estável) para (c) – terceira coluna das Figuras 6 e 7. A diferença mais perceptível é que, como agora a poupança decresce linearmente com  $x$ , o valor máximo dos picos nos aglomerados de capital também apresenta um decaimento quando  $x$  aumenta.

Na Figura 8, primeira e segunda linhas, apresentamos as distribuições iniciais e finais de capital per capita ( $K(t, x)/L(t, x)$ ) para os casos (a) e (b), enquanto que na terceira linha apresentamos as distribuições per-capita para o caso (c) nos tempos  $t = 0$ ,  $t = 3000$ ,  $t = 4000$  e  $t = 5000$ , pois neste último caso temos a emergência de ciclos. Observando estes gráfico fica evidente que, independente do cenário, as localidades onde a poupança é maior gozam de um nível significativamente maior de capital per capita.

Por fim, na Figura 9 mostramos a evolução temporal do capital agregado per capita  $K_{apc}(t) = \int_0^l \frac{K(t, x)}{L(t, x)} dx$ . Nesta figura podemos observar que, quando há formação de agregados não-homogêneos na economia ( $\chi_L = 0.125$ ), um maior nível de capital per capita é atingido, comparado com o caso em que a economia converge para um estado homogêneo ( $\chi_L = 0$ ). Da mesma forma, quando há formação de ciclos ( $\chi_L = 0.25$ ), os níveis de capital per capita são substancialmente maiores do que o caso ( $\chi_L = 0.125$ ). Este resultado fica bem claro na tabela abaixo, onde apresentamos o nível de capital per capita atingido em cada caso (para  $\chi_L = 0.25$ , quando temos ciclos, apresentamos o valor médio):

| Poupança             | $\chi_L = 0.000$ | $\chi_L = 0.125$ | $\chi_L = 0.250$ |
|----------------------|------------------|------------------|------------------|
| Constante            | 1608             | 1629             | 2355             |
| Constante por Partes | 2006             | 2858             | 6435             |
| Linear               | 2145             | 3156             | 7727             |

Assim, de uma forma geral, a formação de aglomerados e ciclos econômicos levam a economia agregada a um nível maior de capital per capita. Outra informação que pode ser extraída desta tabela é que taxas de poupança não-homogêneas também levam a um  $K_{apc}$  mais elevado, mesmo que a poupança média seja igual nos três casos.

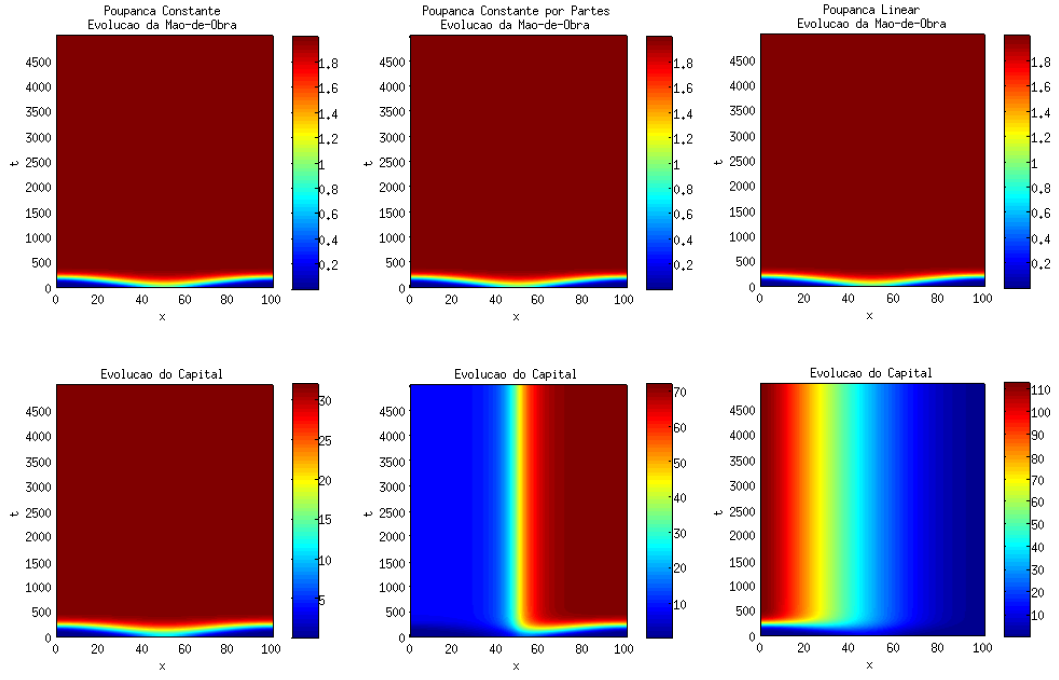


Figura 2: Evolução Espaço-Temporal no Caso Estável ( $\chi_L = 0$ )

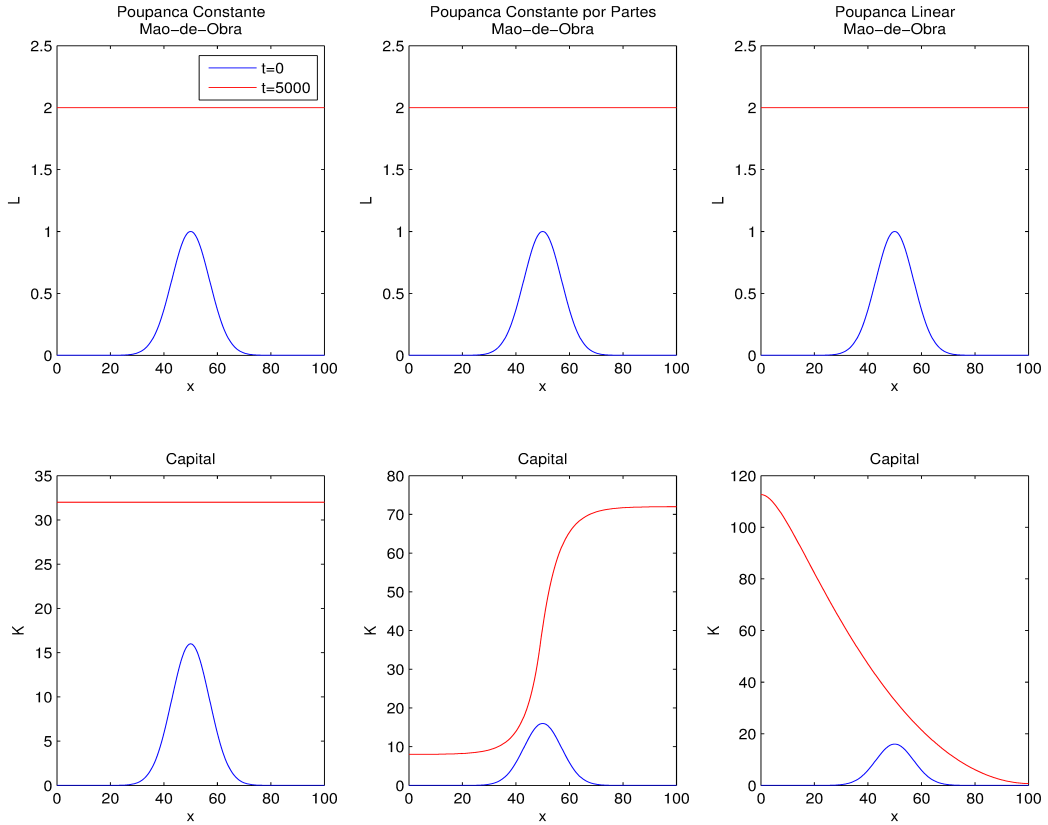


Figura 3: Distribuições Iniciais e Finais de Capital e Mão-de-Obra ( $\chi_L = 0$ )

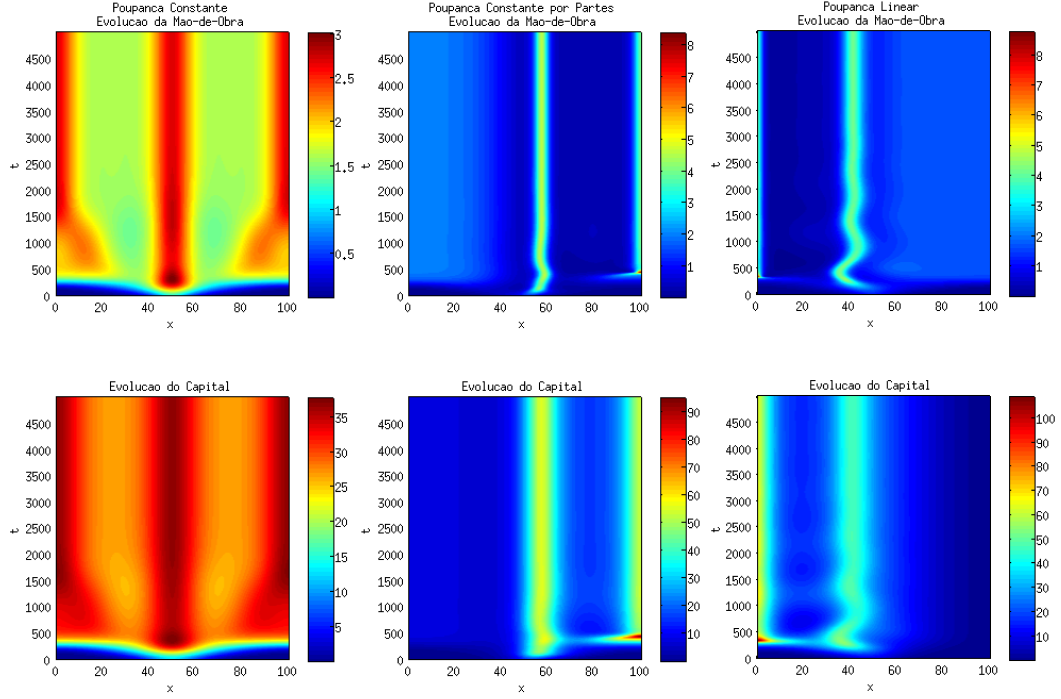


Figura 4: Evolução Espaço-Temporal no Caso Instável com Agregados ( $\chi_L = 0.125$ )

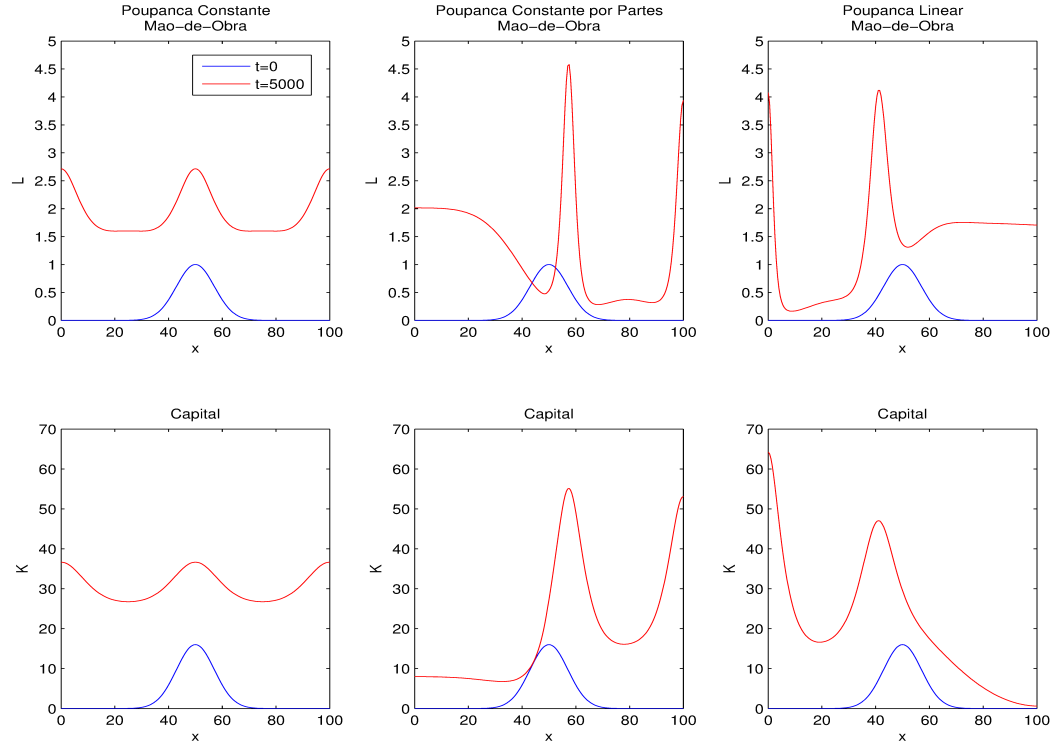


Figura 5: Distribuições Iniciais e Finais de Capital e Mão-de-Obra ( $\chi_L = 0.125$ )

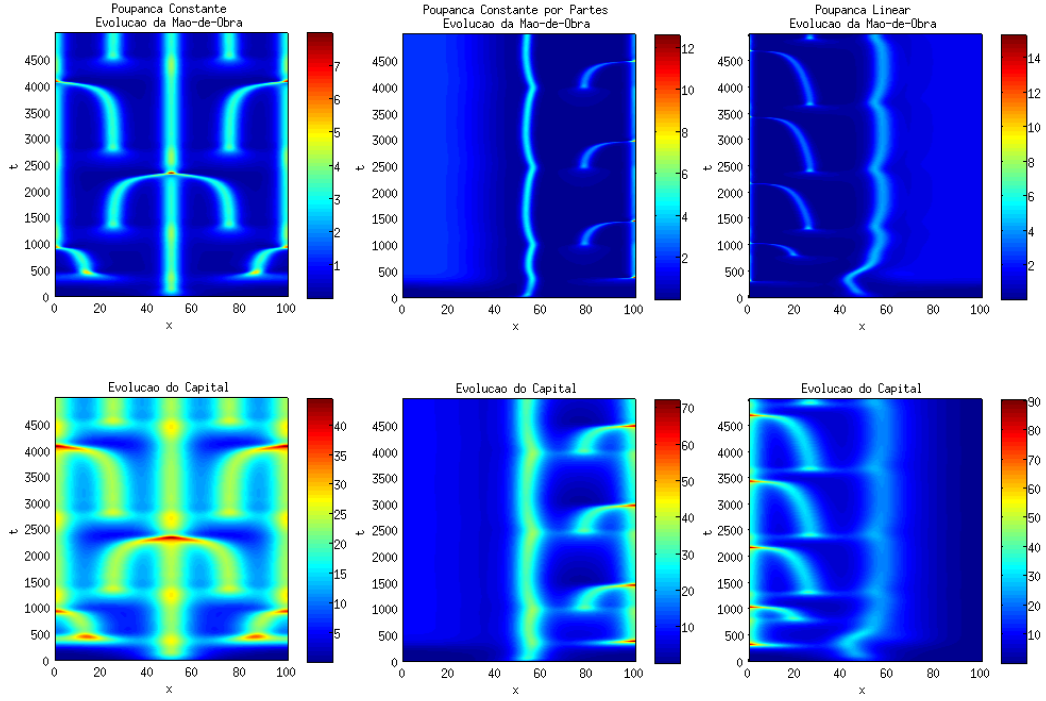


Figura 6: Evolução Espaço-Temporal no Caso Instável com Ciclos ( $\chi_L = 0.25$ )

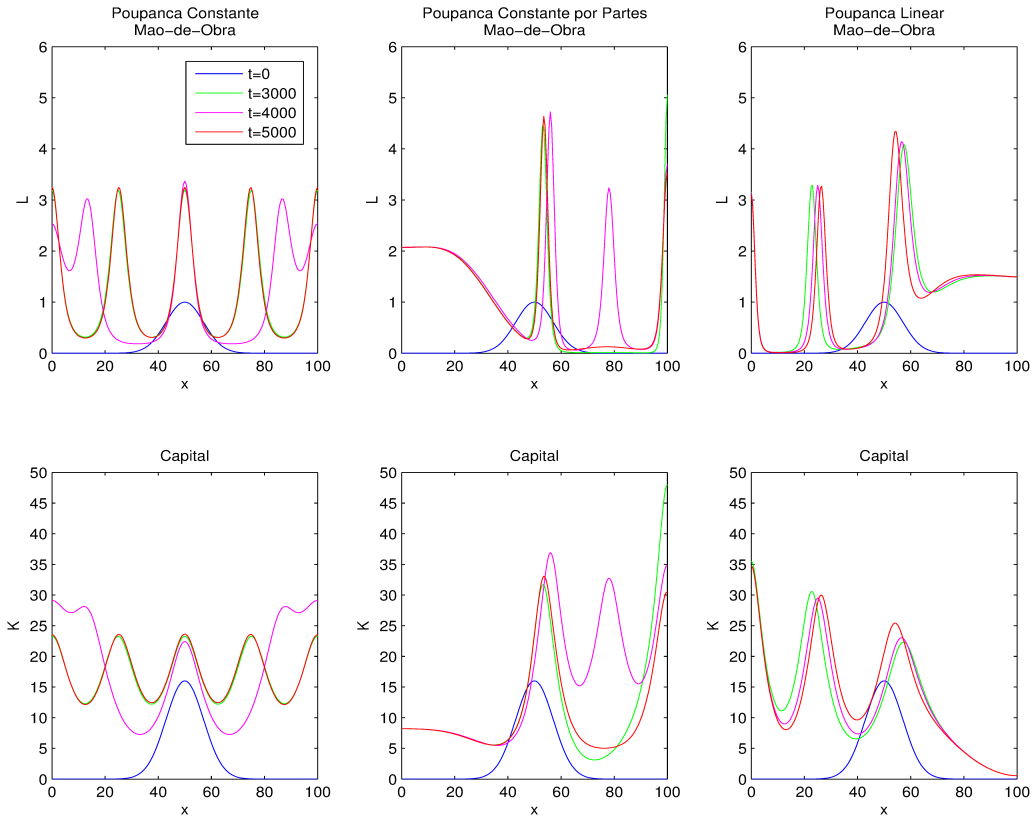


Figura 7: Alguns Perfis Temporais das Distribuições de  $K$  e  $L$  ( $\chi_L = 0.25$ )

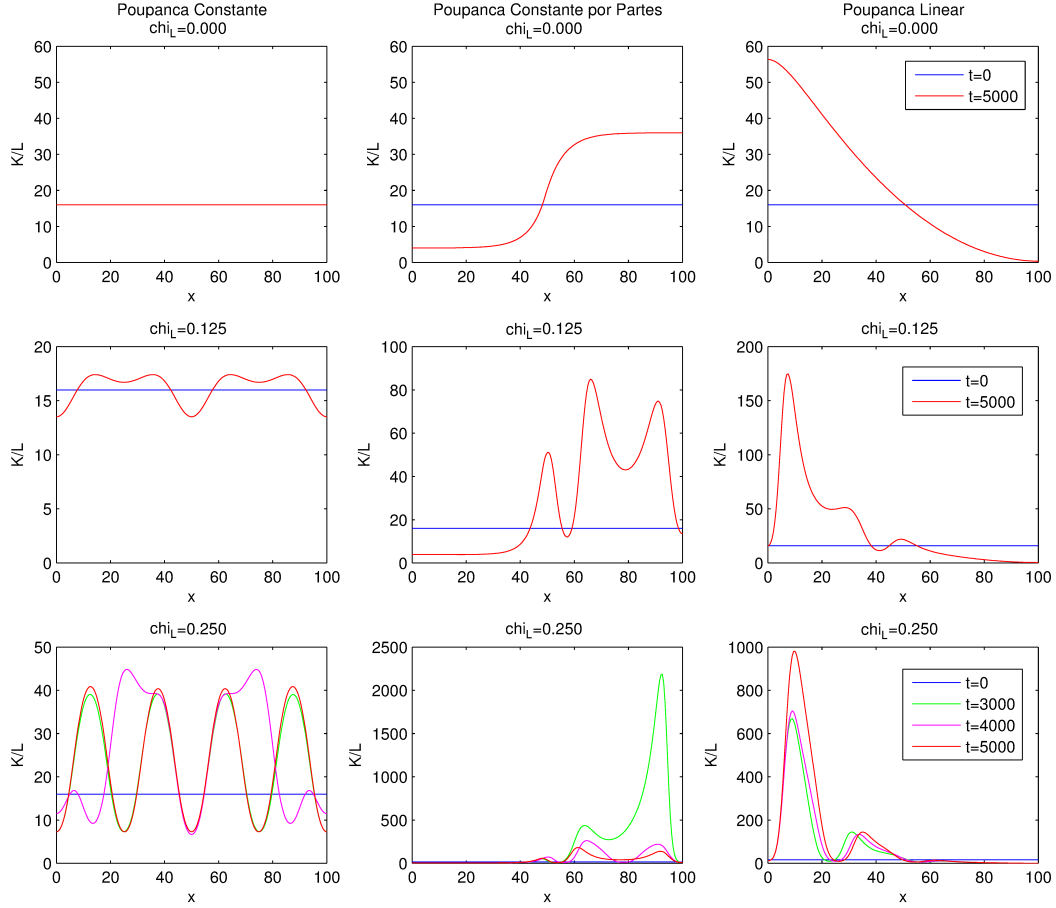


Figura 8: Capital per Capita

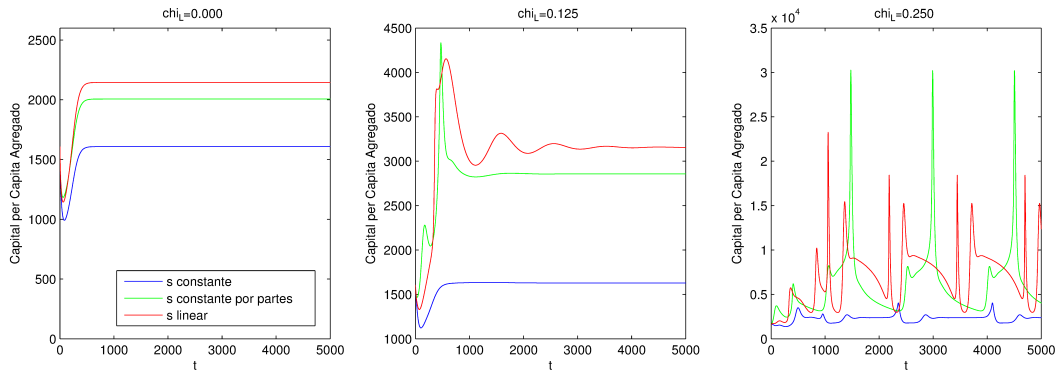


Figura 9: Evolução do Capital per Capita Agregado

## 6 Conclusões e Perspectivas

Neste artigo introduzimos uma taxa de poupança espacialmente não-homogênea no Modelo de Solow Espacial considerado em Juchem Neto and Claeysen (2013), e verificamos, através de simulações numéricas, que tal modificação faz com que a economia agregada atinja um nível maior de capital per capita do que no caso em que a poupança é constante

em todas as localidades. Além disso, também obtivemos o resultado de que a economia como um todo atinge um maior nível de capital per capita nos casos em que há formação de aglomerados econômicos ( $\chi_L = 0.125$ ), e um nível médio maior ainda quando a economia desenvolve ciclos econômicos ( $\chi_L = 0.25$ ). Isto nos leva à conclusão de que uma economia onde há aglomerações e formação de ciclos econômicos é capaz de gerar um maior produto agregado do que o caso homogêneo, o que de certo modo vai de encontro, em um contexto diferente, a conclusão obtida por Fujita and Thisse (2002) e citada na introdução deste artigo.

No caso em que a poupança é constante, existe um certo valor crítico para a intensidade da migração da mão-de-obra induzida pelo capital,  $\chi_c$ , tal que, se  $\chi_L > \chi_c$ , a economia desenvolve, de forma completamente endógena, uma dinâmica espaço-temporal mais complexa, com a formação de aglomerados e ciclos econômicos ao longo de toda sua extensão, sendo este comportamento consequência apenas da interação entre as distribuições de capital e mão-de-obra. No caso em que a poupança é não-homogênea, é introduzido no modelo uma não-homogeneidade exógena, que se soma àquela gerada endogenamente, o que resulta numa dinâmica espaço-temporal mais complexa para as distribuições de capital e mão-de-obra apenas nas regiões onde a taxa de poupança é grande o suficiente para iniciar o processo endógeno de agregação.

Da mesma forma que consideramos a poupança dependente da variável espacial, podemos fazer o mesmo com os parâmetros da função logística que governa o crescimento orgânico da mão-de-obra, assim como com os coeficientes de difusão e de migração de mão-de-obra induzida pelo capital. Tópicos para pesquisa futura incluem a obtenção de possíveis resultados analíticos, a adição de custos de transporte para o capital e a mão-de-obra, assim como a análise de um Modelo de Ramsey Espacial, considerando a dinâmica espaço-temporal gerada pelo modelo aqui apresentado.

## Referências Bibliográficas

- Banerjee, S., Misra, A. P., and Rondoni, L. (2012). Spatiotemporal evolution in a (2+1)-dimensional chemotaxis model. *Physica A*, 391:107–112.
- Barro, R. J. and Sala-i Martin, X. (2004). *Economic Growth*. MIT Press, 2 edition.
- Brito, P. (2004). The dynamics of growth and distribution in a spatially heterogeneous world. Working Paper, ISEG, WP13/2004/DE/UECE.
- Brito, P. (2005). *Essays in Honour of Antonio Simoes Lopes*, chapter A Spatial Solow Model with Unbounded Growth, pages 277–298. ISEG/UTL.
- Camacho, C. and Zou, B. (2004). The spatial solow model. *Economics Bulletin*, 18(2):1–11.
- Camacho, C., Zou, B., and Briani, M. (2008). On the dynamics of capital accumulation across space. *European Journal of Operational Research*, (186):451–465.
- Camarano, A. A. and Beltrão, K. I. (2000). Distribuição espacial da população brasileira: Mudanças na segunda metade deste século. Texto para discussão n. 766, Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (IPEA), Rio de Janeiro, RJ.

- Capasso, V., Engbers, R., and La Torre, D. (2010). On a spatial solow model with technological diffusion and nonconcave production function. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, (11):3858–3876.
- Capasso, V., Engbers, R., and La Torre, D. (2012). *Population dynamics in a spatial Solow model with a convex-concave production function*, pages 61–68. Mathematical and Statistical Methods for Actuarial Sciences and Finance. Springer-Verlag, Milano, Italy.
- Cattaneo, C. (1958). Sur une forme de l’equation de la chaleur eliminat le paradoxe d’une propagation instantanee. *Comptes Rendus de Seances de L’Academie des Sciences*, 247:431–433.
- Combes, P.-P., Mayer, T., and Thisse, J.-F. (2008). *Economic Geography - The Integration of Regions and Nations*. Princenton University Press, UK.
- Donghan, C. (1998). An improved solow-swan model. *Chinese Quarterly Journal of Mathematics*, 13(2):72–78.
- Edelstein, B. B. (1971). Cell specific diffusion model and morphogenesis. *Journal of Theoretical Biology*, 30:515–532.
- Edelstein-Keshet, L. (2005). *Mathematical Models in Biology*. Classics in Applied Mathematics. SIAM, Philadelphia, US.
- Engbers, R. (2009). *Spatial Structures in Geographical Economics - Mathematical Modeling, Simulation and Inverse Problems*. PhD thesis, Westfälische Wilhelms-Universität, Münster.
- Fujita, M., Krugman, P., and Venables, A. J. (1999). *The Spatial Economy*. MIT Press.
- Fujita, M. and Thisse, J.-F. (2002). *Economics of Agglomeration: Cities, Industrial Location, and Regional Growth*. Cambridge University Press, UK.
- Guerrini, L. (2006). The solow-swan model with a bounded population growth rate. *Journal of Mathematical Economics*, 42:14–21.
- Hillen, T. and Potapov, A. (2004). The one-dimensional chemotaxis model: global existence and asymptotic profile. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 27:1783–1801.
- Isard (2003). *History of Regional Science and the Regional Science Association International - The Beginnings and Early History*. Springer-Verlag, Berlin.
- Isard, W. (1956). *Location and space-economy: a general theory relating to industrial location, market areas, land use, trade, and urban structure*. MIT Press & Wiley, NY.
- Isard, W. and Liossatos, P. (1975a). Parallels from physics for space-time development models: Part i. *Regional Science and Urban Economics*, 1(1):5–40.
- Isard, W. and Liossatos, P. (1975b). Parallels from physics for space-time development models: Part ii - interpretation and extensions of the basic model. *Regional Science Association*, 35:43–66.
- Isard, W. and Liossatos, P. (1979). *Spatial Dynamics and Optimal Space-Time Development*, volume 4 of *Studies in Regional and Urban Economics*. North-Holland, New York, US.



- Juchem Neto, J. (2013). *Modelos Evolutivos de Crescimento Econômico com Dependência Espacial*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (<http://hdl.handle.net/10183/69937>), Porto Alegre, RS.
- Juchem Neto, J. and Claeysen, J. C. R. (2013). Capital-induced labor migration in a spatial solow model. In *XVI Encontro de Economia da Região Sul (Anpec-Sul)*, Curitiba, PR.
- Keller, E. F. and Segel, L. A. (1970). Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability. *Journal of Theoretical Biology*, 26(3):399–415.
- Krugman, P. (1979). Increasing returns, monopolistic competition and international trade. *Journal of International Economics*, 9:469–479.
- Krugman, P. (1991). Increasing returns and economic geography. *Journal of Political Economy*, (99):483–499.
- Mingari Scarpello, G. and Ritelli, D. (2003). The solow model improved through the logistic manpower growth law. *Annali Università di Ferrara - Sez VII - Sc. Mat.*, II:73–83.
- Murray, J. D. (2003). *Mathematical Biology - II: Spatial Models and Biomedical Applications*. Springer-Verlag, New York, US, third edition edition.
- Osaki, K., Tsujikawa, T., and Yagi, A. (2001). Finite dimensional attractor for one-dimensional keller-segel equations. *Funkcialaj Ekvacioj*, 44:441–469.
- Osaki, K., Tsujikawa, T., Yagi, A., and Mimura, M. (2002). Exponential attractor for a chemotaxis-growth system of equations. *Nonlinear Analysis*, 51:119–144.
- Painter, K. J. and Hillen, T. (2011). Spatio-temporal chaos in a chemotaxis model. *Physica D*, 240:363–375.
- Pearce, I. G., Chaplain, M. A. J., Schofield, P. G., Anderson, A. R. A., and Hubbard, S. F. (2007). Chemotaxis-induced spatio-temporal heterogeneity in multi-species host-parasitoid systems. *Journal of Mathematical Biology*, 55:365–388.
- Pôrto Júnior, S. S. and Figueiredo, E. A. (2012). Persistência das desigualdades regionais no brasil: Divergência, polarização e divergência. Texto para Discussão n. 2012/06, PPGE/UFRGS.
- Quigley, J. M. (2001). The renaissance in regional research. *The An*, 35:167–178.
- Rolnik, R. and Klink, J. (2011). Crescimento econômico e desenvolvimento urbano - por que nossas cidades continuam tão precárias? *Novos Estudos*, 89:89–109.
- Sachs, J. (2001). The strategic significance of global inequality. *The Washington Quarterly*, 24(3):189–198.
- Senba, T. and Suzuki, T. (2004). *Applied Analysis: Mathematical Methods in Natural Science*. Imperial College Press, London, UK.
- Solow, R. (1956). A contribution to the theory of economic growth. *Quarterly Journal of Economics*, LXX:65–94.

- Swan, T. W. (1956). Economic growth and capital accumulation. *Economic Record*, (32):334–361.
- Thisse, J.-F. (2011). *Economia Regional e Urbana - Teorias e métodos com ênfase no Brasil*, chapter Geografia Econômica, pages 17–42. Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (IPEA).
- Turing, A. M. (1952). The chemical basis of morphogenesis. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, B237:37–72.
- Wan Jr, H. Y. (1971). *Economic Growth: A critical review and summary of the modern theories of economic growth*. Harcourt Brace Jovanovich, Inc., US.
- Zhu, M. and Murray, J. D. (1995). Parameter domains for generating spatial pattern: A comparison of reaction-diffusion and cell-chemotaxis models. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 5(6):1503–1524.