



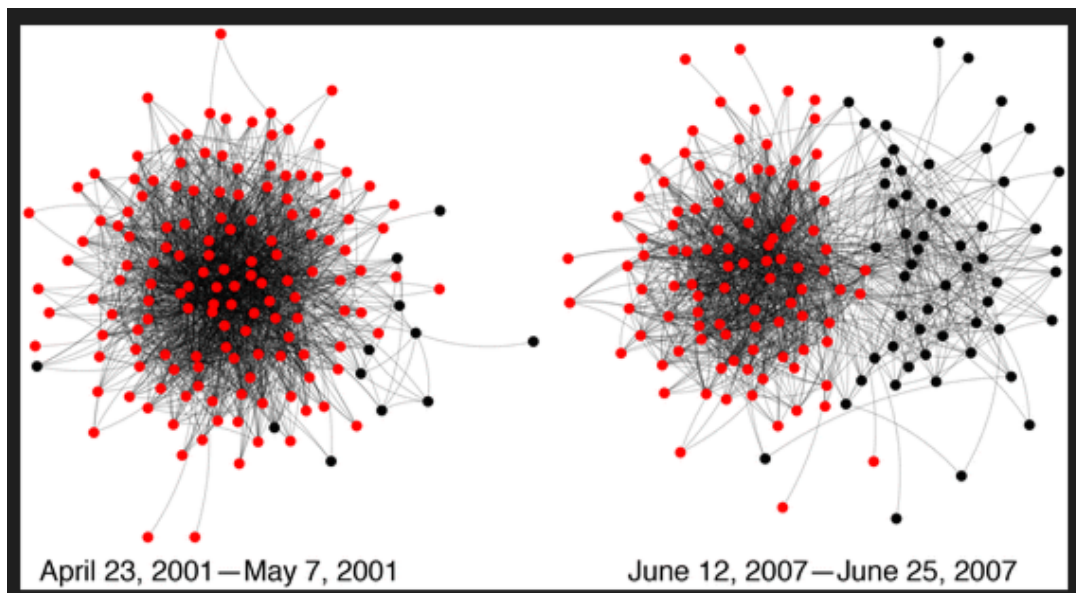
CY Paris-Cergy Université. CY TECH.

Projet ING2 Math Finance 23-24

Risques Systémiques.
Contagion dans le réseau financier.

Livrables.

Irina Kortchemski, CYTECH



Introduction. Réseau financier et risque systémique d'un défaut.

La crise financière que nous avons traversé depuis 10 ans est un évènement d'une rare ampleur et lourd en conséquence. Elle a été qualifiée de systémique car elle s'est manifestée à l'échelle du système bancaire mondiale. Toutes les banques ont du faire face à de grandes difficultés de liquidités ayant conduit certaines d'entre elles à la faillite (Lehman Brothers en 2008). Depuis le début de la crise financière en 2007, plus de 370 des banques américaines (sur près de 8000 banques assurées par la Federal Deposit Insurance Corporation) ont fait faillite. Entre 2000 et 2004, seulement 30 banques ont fait faillite et aucune entre 2005 et le début de l'année 2007.

Le risque systémique est le risque d'effondrement d'un système suite à un choc sur certaines institutions financières qui entraînent par un effet domino la dégradation brutale ou la faillite de beaucoup d'autres. Ce n'est que très récemment que les institutions financières se sont intéressées à la modélisation mathématique de ces épisodes de contagion par défaut où un choc économique causant des pertes initiales et le défaut de quelques institutions sont amplifiés en raison de liens financiers complexes, pour finalement conduire à des faillites à plus grande échelle.

Modélisation du bilan d'une banque et réseaux financiers

Un système d'institutions financières est modélisé par un réseau de relations ou contreparties : un ensemble de N noeuds et des liens pondérés représentés par une matrice

$$E = (E_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$$

• $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ est la valeur marché de l'exposition de l'institution financière i à l'institution financière j .

À la date t , l'institution i dispose d'un capital (propre) $X_i(t)$, c'est-à-dire un matelas de sécurité pour les créanciers de l'entreprise, pour absorber les pertes potentielles.

Le bilan d'une banque se présente sous la forme d'un équilibre entre ses actifs, c'est-à-dire les biens qu'elle possède qui ont une valeur économique positive, et ses passifs, c'est-à-dire l'ensemble de ses dettes ou de ses biens qui ont une valeur économique négative.

Entre les temps t_k et t_{k+1} , le capital d'une institution subit des fluctuations dues au marché dont la dynamique peut s'écrire :

$$X_{t_{k+1}} = e^{-\lambda \Delta t} X_{t_k} + \mu(1 - e^{-\lambda \Delta t}) + \sigma(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})$$

- Discrétisation : $t_k = \Delta t \cdot k$
 - $(W_{t_k})_{k \geq 0}$ est un mouvement Brownien.
 - μ s'interprète comme l'équilibre moyen du capital
 - lorsque X_t s'écarte de cette valeur le paramètre λ agit comme une force de rappel vers μ .
 - le paramètre $\sigma > 0$ est l'écart-type des fluctuations du capital.
- Le processus $(X_{t_k})_{k \geq 0}$ est alors un processus gaussien.

Bilan à l'horizon T

A la date T , un bilan de solvabilité a lieu permettant de conclure quant à la solidité financière de l'institution i . Si le capital de l'institution i est en dessous d'un seuil critique déterministe C_i celle-ci n'est plus solvable. Une banque est solvable si son capital restant à la date T est supérieur au seuil critique, c'est-à-dire si

$$X_i(T) > C_i$$

. Une banque insolvable fait défaut et est liquidée. Chacun de ses créanciers perd une fraction $1-R$ de l'exposition à la banque faisant défaut. Cette perte vient alors se soustraire au capital et peut entraîner à son tour l'insolvabilité des créanciers. Cette cascade de défaut dépend fortement du taux de récupération R (recovery rate) de la banque faisant défaut : pour simplifier, on suppose que ce taux de récupération est le même pour toutes les institutions (on prendra par exemple $R=5\%$).

On définit l'ensemble

$$D_0^T = \{i \in 1, 2, \dots, N : X_i(T) < C_i\}$$

des institutions financières faisant initialement défaut dans le réseau à la date T . La cascade de défaut est la séquence d'ensemble

$$D_0^T \subset D_1^T \subset \dots \subset D_{N-1}^T,$$

$$D_k^T = D_{k-1}^T \cup \{j \notin D_{k-1}^T : X_j(T) - \sum_{p \in D_{k-1}^T} (1 - R_p) \cdot E_{j,p} < C_j\}, k \geq 1$$

Dans un réseau financier de taille N , cette cascade finit après au plus $N - 1$ étapes.

A l'étape k , D_k^T représente l'ensemble des institutions financières insolubles (et donc faisant défaut) suite à l'exposition de contrepartie à des banques de l'ensemble D_{k-1}^T qui viennent de faire défaut à l'étape précédente.

Impact de défaut

Pour quantifier le risque systémique et l'effet de contagion, on définit l'impact de défaut $I(T)$ à la date T du à la cascade de défaut à l'instant T ,

$$I(D_0^T) = \sum_{j \in D_q^T} (X_j(T) + \sum_{p \notin D_q^T} (1 - R_p) \cdot E_{p,j})$$

$I(D_0^T)$ est la somme des pertes générées par la contagion du défaut des banques, à la date T .

L'ensemble D_0^T représente des institutions financières faisant initialement défaut dans le réseau à la date T .

q est le dernier étape de la cascade de contagion. Après l'étape q la configuration ne varie plus.

D_q^T est l'ensemble d'institution en défaut à l'étape q .

Simulation n'une variable aléatoire conditionnelle

Pour obtenir une simulation de v.a. Z sachant un évènement A , il suffit de simuler de manière répétée et indépendante une couple (Z, A) , de rejeter les résultats tant que A n'est pas réalisé. Dans ce résultat, Z peut être une variable aléatoire multi-dimensionnelle.

LIVRABLES 1.

Livraison 1. Etude de la Cascade.

Créer une fonction DOMINO qui calcule

- l'ensemble des banques ruinées D_k^T à une étape k
- l'ensemble des banques restées solvables $D_k^{solvable}$ à l'étape k
- les capitaux de chaque banque $X_{k+2}^T = [X_{k+2}^T(t_1), X_{k+2}^T(t_2), X_{k+2}^T(t_3), X_{k+2}^T(t_4), X_{k+2}^T(t_5)]$ à l'étape $k + 2$

en utilisant les capitaux de chaque banque $X_{k+1}^T = [X_{k+1}^T(t_1), X_{k+1}^T(t_2), X_{k+1}^T(t_3), X_{k+1}^T(t_4), X_{k+1}^T(t_5)]$ de l'étape $k + 1$.

$$[X_{k+2}^T, D_{k+1}^{solvable}, D_{k+1}^T] = DOMINO(X_{k+1}^T, D_k^{solvable}, D_k^T)$$

Tenez compte du fait que les banques sont numérotés par les indices $[1, 2, 3, 4, 5]$. Les mêmes indices on utilise dans la matrice $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ de l'exposition de l'institution financière i à l'institution financière j .

Exemple :

La matrice de contreparties :

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Une banque devient insolvable à une étape de la Cascade si son capital restant à cette étape est inférieur au seuil critique :

$$X_k^T(i) < C(i), \quad i = 1 : N$$

Soit le seuil est

$$C = [10, 10, 10, 10, 10].$$

Soit à $t=0$ le vecteur des capitaux

$$X^{start} = [15, 15, 15, 15, 15],$$

$$D_{start}^{solvable} = [1, 2, 3, 4, 5]$$

$$D_{start}^T = [0]$$

Supposons qu'après avoir effectué les simulations Monte Carlo que $X_{(0)}^T = [14, 9, 8, 13, 15]$ à $t = T$.

Dans cet exemple le vecteur $X_{(0)}^T$ est bien affiché, cependant lors de simulation MC le vecteur n'est pas visible, dont le programme (la fonction DOMINO) doit analyser le nombre de banque sonvables et ruinées faisant partie de ce vecteur.(?)

L'action initiale de la fonction DOMINO est la suivante :

$$DOMINO(X_{(0)}^T, D_{start}^{solvable}, D_{start}^T) = [X_{(1)}^T, D_0^{solvable}, D_0^T]$$

$$DOMINO([14, 9, 8, 13, 15], [1, 2, 3, 4, 5], [\quad]) = [X_{(1)}^T, D_0^{solvable}, D_0^T]$$

Compte tenu de valeurs des capitaux $[14, 9, 8, 13, 15]$ la fonction DOMINO detecte les indices des banques ruinée, celle des solvables et calcule la capital de chaque banque solvable.

Etape 0.

$$D_0^{solvable} = [1, 4, 5]$$

$$D_0^T = [2, 3]$$

$$X_{(1)}^T = [11.1500, 9.0000, 8.0000, 9.2000, 10.2500]$$

En effet :

$$\begin{cases} X_{(1)}^T(1) = X_{(0)}^T(1) - (1 - R)(E_{12} + E_{13}) = 14 - 0.95(3 + 0) = 11.15 \\ X_{(1)}^T(4) = X_{(0)}^T(4) - (1 - R)(E_{42} + E_{43}) = 13 - 0.95(2 + 2) = 9.2 \\ X_{(1)}^T(5) = X_{(0)}^T(5) - (1 - R)(E_{52} + E_{53}) = 15 - 0.95(2 + 3) = 10.25 \end{cases}$$

Les capitaux $X_{(1)}^T(2) = 9$, et $X_{(1)}^T(3) = 8$ sont perdus.

Etape 1

$$DOMINO(X_{(1)}^T, D_0^{solvable}, D_0^T) = [X_{(2)}^T, D_1^{solvable}, D_1^T]$$

$$DOMINO([11.1500, 9.0000, 8.0000, 9.2000, 10.2500], [1, 4, 5], [2, 3]) = [X_{(2)}^T, D_1^{solvable}, D_1^T]$$

$$D_1^{solvable} = [1, 5]$$

$$D_1^T = [2, 3, 4]$$

$$X_{(2)}^T = [11.15, 9.0000, 8.0000, 9.2000, 7.4000]$$

En effet

$$\begin{cases} X_{(2)}^T(1) = X_{(1)}^T(1) - (1 - R)E_{14} = 11.15 - 0.95 \cdot 0 = 11.15 \\ X_{(2)}^T(5) = X_{(1)}^T(5) - (1 - R)E_{54} = 15 - 0.95 \cdot 3 = 7.4 \end{cases}$$

Etape 2

$$DOMINO(X_{(2)}^T, D_1^{solvable}, D_1^T) = [X_{(3)}^T, D_2^{solvable}, D_2^T]$$

$$DOMINO([11.15, 9.0000, 8.0000, 9.2000, 7.4000], [1, 5], [2, 3, 4]) = [XCas^{(3)}, D_2^{solvable}, D_2^T]$$

$D_2^{solvable} = [1]$ $D_2^T = [2, 3, 4, 5]$
 $X_{(3)}^T = [5.45, 9.0000, 8.0000, 9.2000, 7.4000]$
 En effet

$$\{ X_{(3)}^T(1) = X_{(2)}^T(1) - (1 - R)E_{15} = 11.15 - 0.95 \cdot 6 = 5.45$$

Etape 3

$$DOMINO(X_{(3)}^T, D_2^{solvable}, D_2^T) = [X_{(4)}^T, D_3^{solvable}, D_3^T]$$

$$DOMINO([5.45, 9.0000, 8.0000, 9.2000, 7.4000], [1, 5], [2, 3, 4]) = [X_{(4)}^T, D_3^{solvable}, D_3^T] =$$

$D_3^{solvable} = []$ Tout est ruiné.
 $D_3^T = [2, 3, 4, 5, 1]$
 $X_{(4)}^T = [5.45, 9.0000, 8.0000, 9.2000, 7.4000]$
 C'est sont des valeurs artificielles (calculés).

Impact de défaut

$$I(D_0^T) = \sum_{j \in D_q^T} (X_j(T) + \sum_{p \notin D_q^T} (1 - R_p) \cdot E_{p,j})$$

D_q^T est l'ensemble de banques ruinées au dernière étape $q = 3$.

$$I([2, 3]) = \sum_{j \in [2, 3, 4, 5, 1]} X_j(T) = 14 + 9 + 8 + 13 + 15 = 59$$

En effet le reseau des banques est ruiné, dont le capital initiale est perdue.

Livable 1. Travail 1 à faire. Etude de la Cascade.

1. Ecrire la fonction DOMINO et montrer le fonctionnement correcte de cette fonction en utilisant : $X_{(0)}^T = [14, 9, 8, 13, 15]$

2. a) Imprimer les resultats de chaque étape de la Cascade de la même facon que vous a été proposé pour un Jeu de données 1 : $X_{(0)}^T = [12, 9, 11, 13, 12]$

b) Calculer l'Impacte de défaut $I(D_0^T), D_0^T = [2]$

3. a) Imprimer les resultats de chaque étape de la Cascade de la même facon que vous a été proposé pour un Jeu de données 2 : $X_{(0)}^T = [15, 9, 8, 18, 12]$

b) Calculer l'Impacte de défaut $I(D_0^T), D_0^T = [2, 3]$

4. Imprimer les resultats de chaque étape de la Cascade de la même facon que vous a été proposé pour un Jeu de données 3 :

$$X_{(0)}^T = [14, 15, 11, 9, 12, 12, 13, 14, 15, 12] \text{ et } C = [10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10]$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 6 & 0 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 5 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 6 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 0 & 5 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 6 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 6 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Imprimer les resultats de chaque étape de la Cascade de la même facon que vous a été proposé pour $X_{(0)}^T = [20, 9, 20, 9, 25, 20, 12, 14, 15, 13]$
 Calculer l'Impacte de défaut $I(D_0^T), D_0^T = [2, 4]$

Livrable 1. Travail 2 à faire. Etude théorique de l'évolution des capitaux.

L'evolution d'un capital on modélise par l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = \lambda(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t$$

1. Résoudre cette equation avec l'aide de Lemme d'Ito. Pour cela on introduit un processus stochastique

$$Y_t = e^{\lambda t} X_t$$

et on calcule dY_t . Puis on intègre $d(e^{\lambda t} X_t)$ sur l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$.

2. Calculer l'espérance $\mathbb{E}[X_{t_{k+1}}|X_{t_k}]$. Montrer que

$$\mathbb{E}[X_{t_{k+1}}|X_{t_k}] = e^{-\lambda \Delta t} X_{t_k} + \mu(1 - e^{-\lambda \Delta t})$$

3. Calculer la variance $\mathbb{V}ar[X_{t_{k+1}}|X_{t_k}]$. Montrer que

$$\mathbb{V}ar[X_{t_{k+1}}|X_{t_k}] = \frac{\sigma^2}{2\lambda}(1 - e^{-2\lambda \Delta t}).$$

4. Simuler l'evolution d'un capital
 5. Etudier le sens de chaque paramètre de l'équation : λ, μ, σ .

Livrable 1. Travail 3 à faire. Etude de la Cascade à l'aide de donnée simulées par Monte Carlo.

Paramètres

$$X(0)(i) = \mu = 15, \sigma = 8, \lambda = 20, C(i) = 10, i = 1 : 5$$

1. Pour cela simuler l'evolutions de capitaux sur 12 mois ($T = 1, n = 12, \Delta t = T/12$), pour chaque scenario récupérer le vecteur final des capitaux : $X_{(0)}^T$. Appliquer la fonction DOMINO

et analyser les résultats des Jeux de données 1,2,3, c'est -à -dire le nombre les banques ruinés et le nombre des banques solvables.

2. Estimer les probabilités que le nombre de banques insolubles (ruinées) soit 1, 2, 3, 4 ou 5.

Pour cela compte les scenarios pour lesquels le nombre de banques ruinées sont 1, 2, 3, 4 ou 5.

Livraison 1. Travail 4 à faire. Evolution dépendante de N capitaux.

Supposons maintenant que les mouvements browniens sont corrélés positivement. Typiquement, la loi de

$$W(t) = (W^1(t), \dots, W^N(t))$$

est gaussienne, centrée, de matrice de covariance

$$\mathbb{C}ov = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \dots & \dots & \rho \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho \\ & \dots & 1 & \dots & \dots \\ & \dots & \dots & 1 & \rho \\ \rho & \dots & \dots & \rho & 1 \end{pmatrix}$$

avec $\rho \in [0, 1]$.

Reprendre aux questions précédentes du travail 3, tout en identifiant l'impact de la corrélation.

Indication :

On introduit les mouvements browniens indépendants de chaque banque :

$$B(t) = (B^1(t), \dots, B^N(t)).$$

Alors les mouvements browniens corrélés $W(t)$ sont les combinaisons linéaires de $B(t)$:

$$W^i(t) = \sum_{j=1}^N M_{ij} B^j(t).$$

Il est possible de montrer que

$$\mathbb{E}[W^i(t) W^j(t)] = (\mathbb{C}ov)_{ij} \cdot t, \quad \mathbb{C}ov = M M^T.$$

On vous propose de programmer la décomposition de Cholesky ou la factorisation de Cholesky. La factorisation de Cholesky consiste, pour une matrice symétrique définie positive ρ , à déterminer une matrice triangulaire inférieure M telle que : $\mathbb{C}ov = M M^T$.

Pour la suite vous appliquer la formule obtenue à l'aide du Lemme d'Ito (vous étudiez ce Lemme avec les détails en semestre 2)

Au lieu de l'évolution

$$X_{t_{k+1}} = e^{-\lambda \Delta t} X_{t_k} + \mu(1 - e^{\lambda \Delta t}) + \sigma \sqrt{\Delta t} \cdot (randn)$$

utiliser

$$X_{t_{k+1}}^i = e^{-\lambda \Delta t} X_{t_k}^i + \mu(1 - e^{-\lambda \Delta t}) + \sigma \sum_{j=1}^N M_{ij} B^j(\Delta t), \quad i \leq N, k = 1 : 12$$

et analyser les questions sur la probabilité de nouveau.

- Si $N = 2$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1 - \rho^2} \end{pmatrix}$$

- Vérifiez vos codes : si $\rho = 0$ vous devez retrouver le cas d'évolution indépendantes.

Livrable 1. Simulation de loi Beta

On pourra considérer le cas de récupération R indépendants et aléatoires de loi Beta(a, b) de moyenne 5% et d'écart-type autour de 20%.

Une variable aléatoire de loi Beta $B(\alpha, \beta)$ (avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0$) a pour densité

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} 1_{0 \leq x \leq 1}$$

Supposons que $\alpha < 1$ et $\beta < 1$ de sorte que cette densité soit bornée. On peut alors utiliser l'algorithme de Jork.

Livrable 1. Travail 6 à faire. Simulation de loi Beta.

1. Simuler la variable aléatoire Beta avec $(\alpha, \beta) = (1/2, 1/2)$
2. Calculer α et β pour l'espérance 5% et d'écart-type autour de 20%.
3. Tracer la fonction de densité empirique pour chaque cas.

LIVRABLE 2.

Livrable 2. Travail 1 à faire. Calcul de l'Indice du Risque Systémique

$$I_S = \frac{1}{N_{mc}} \sum_{i=1}^{N_{mc}} I(D_0^{T(i)})$$

Calculer l'Indice du Risque Systémique pour les Jeux de données 1,2,3.

Pour cela simuler l'évolutions de capitaux, pour chaque scenario récupérer le vecteur final $X_{(0)}^T$. Appliquer à ce vecteur la fonction DOMINO et calculer

$$[X_{(q+1)}^T, D_q^{solvable}, D_q^T]$$

q est le dernier étape de la cascade de contagion après laquelle plus rien ne change.

$$I(D_0^T) = \sum_{j \in D_q^T} (X_j(T)) + \sum_{j \in D_q^T} \sum_{p \notin D_q^T} (1 - R_p) \cdot E_{p,j}$$

Le terme $\sum_{j \in D_q^T} (X_j(T))$ calcule la somme les capitaux initiales des banques ruinées que sont complètement perdu.

Le terme $\sum_{j \in D_q^T} \sum_{p \notin D_q^T} (1 - R_p) \cdot E_{p,j}$ represente l'investissement des banques solvables ' p ' ($p \notin D_q^T$) dans les banques ruinées de l'établissement (D_q^T). Il est perdu.

Livable 2. Travail 2 à faire. Fonction de répartition et de densité de l'Indice du Risque Systémique.

1. L'Indice du Risque Systémique est une variable aléatoire.

Tracer sa fonction de répartition et de densité.

2. Tracer sa fonction de répartition et de densité de l'Indice du Risque Systémique conditionnellement à l'évènement : "le réseau entier d'institutions financières s'est effondré".

Pour cela choisir les scenarios avec "le réseau effondré" et les compter afin de déterminer la taille de réalisations de I_S . On ne compte pas les scenarios dans lesquels le réseau complètement ou en partie soluble.

Livable 2. Value-at-Risk.

Le risque d'effondrement d'un réseau d'institutions financières est le risque que les institutions ne remplissent pas une obligation telle que le paiement d'un intérêt ou d'une dette ou l'incapacité d'assurer le service d'un prêt.

Value at Risk (VaR), indicateur réglementaire est relié au montant de fonds propres des banques en regard des risques endossés, pour faire face à des pertes a priori rares. Une partie du projet se concentre sur l'évaluation des pertes sous l'angle de la probabilité, sévérité et scénario les engendrant, en considérant des seuils 99% et en particulier peut être des seuils à 99.99% voire plus.

Définition. Pour tout $\alpha \in (0, 1)$, le quantile d'ordre α de la densité F_X est la quantité

$$x_\alpha = \inf\{x : F_X(x) \geq \alpha\}$$

, c'est-à-dire que x_α est la plus petite valeur pour laquelle la probabilité que la variable aléatoire X prenne des valeurs plus petites ou égales à x_α est plus grande ou égale à α .

Pourquoi ne pas avoir défini le quantile d'ordre α comme étant la quantité x_α satisfaisant l'équation

$$F_X(x_\alpha) = \alpha, \quad \text{ou} \quad x_\alpha = F_X^{-1}(\alpha)?$$

Si la fonction de répartition est strictement croissante alors, oui, $F_X(x_\alpha) = \alpha$.

La définition plus générale est nécessaire pour pouvoir traiter les 3 cas.

Lorsque le portefeuille ou la richesse est constituée d'instruments nombreux et complexes, il n'est généralement pas possible de connaître analytiquement la densité de la valeur du portefeuille à un instant futur donné. On peut alors procéder par simulation. Dans d'autres cas, l'estimation d'un quantile se fait par échantillonnage.

Dans ce qui suit,

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

représente un échantillon constitué de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées à la variable aléatoire X de fonction de répartition F_X . De plus, $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ désigne le même échantillon ordonné, c'est-à-dire que

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq X_{(3)} \dots, X_{(k-1)} \leq X_{(k)}, \dots, X_{(n)}$$

Définition. La fonction de répartition empirique construite à partir de l'échantillon X_1, X_2, \dots, X_n de taille N_{mc} est

$$\forall x \in R \quad F_X(x) = \frac{1}{N_{mc}} \sum_{i=1} 1_{X_i \leq x}$$

Définition. Pour tout $\alpha \in (0, 1)$, VAR d'ordre α de la densité F_X est la quantité

$$x_\alpha = \inf\{x : F_X^{(n)}(x) \geq \alpha\}$$

, c'est-à-dire que x_α est la plus petite valeur pour laquelle la probabilité que la variable aléatoire X prenne des valeurs plus petites ou égales à x_α est plus grande ou égale à α .

Notons que si

$$\frac{k-1}{n} < \alpha \leq \frac{k}{n}, \quad k = \{1, 2, \dots, n\}$$

alors $VAR = X_{(k)}$. En effet pour un nombre réel x $F_X^{(n)}(x)$ est la proportion des observations de l'échantillon qui sont inférieures ou égales à x car

$$F_X^{(n)}(x) = P[x \leq X_{(k)}] = \frac{k}{n} = \alpha$$

Par conséquent, puisque $k-1 < n\alpha \leq k$

$$VAR = X_{[n\alpha]} = X_{(k)}$$

. où $[n\alpha]$ est le plus petit entier inférieur ou égal à k

Livable 2. Travail 3 à faire. Value-at-Risk

1. Estimer la Value-at-Risk et de la Conditional Value-at-Risk de la distribution $IS(T)$ pour différents seuils α aussi proches de 1 (par exemple $\alpha = 99.9\%, 99.99\%$).

Algorithme d'ordonnement pour trouver VAR.

- Simuler un échantillon $X = I_S$
- Ordonner l'échantillon

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq X_{(3)}, \dots, X_{(n)}$$

- $VAR = X_{[n\alpha]}$

Verifier si le VAR trouvé par l'algorithme d'ordonnement est en coherence avec Var trouvé visuellement à partir du graphe de fonction de répartition.

Livable 2. Travail 4 à faire. Etude d'insolvabilité. Influence de la taille du réseau.

1. Estimation de la cascade d'insolvabilité la plus probable, selon le nombre de banques en défaut.

2. Identification des liaisons de contrepartie dangereuses, des scénarios critiques menant à l'effondrement du système ainsi que des configurations (raisonnables) permettant d'améliorer la sûreté du système.

3. Influence de la taille du réseau ($N = 10, 20, 50$) et des configurations dangereuses.

Livable 2. Travail 5 à faire. Contagion dynamique.

En réalité, l'insolvabilité des institutions peut avoir lieu à tout moment entre la date 0 et la date T . Il est donc nécessaire de prendre en compte ce risque de manière dynamique. Cela nous conduit à considérer des impacts de défaut dynamique $I(t_k)$, $k = 1 : n$. On définit l'impact de défaut total à la date T comme la somme de tous les impacts de défaut entre la date 0 et la date T .

$$\sum_{k=1}^N I(t_k).$$

On reprendra les questions précédentes en intégrant le risque de contagion dynamique.

Livable 2. Travail 6 à faire. Etude des réseaux financiers.

1. Calculer les degrés d'entrée (nombre de débiteurs) K_{in} et de sortie (nombre de créanciers) K_{out} de chaque noeud et les probabilités :

$$\mathbb{P}[K_{in} = i], \quad \mathbb{P}[K_{out} = i], \quad i = 1 : N$$

Montrer que $\mathbb{P}[K_{in} = i] = \frac{C_1}{i^{\alpha_1}}$, $\mathbb{P}[K_{out} = i] = \frac{C_2}{i^{\alpha_2}}$ et trouver α_1 et α_2 .

2. Tracer

$$i \rightarrow \ln(\mathbb{P}[K_{in} \geq i])$$

$$i \rightarrow \ln(\mathbb{P}[K_{in} \geq i])$$