CY Paris-Cergy Université.   CY TECH.

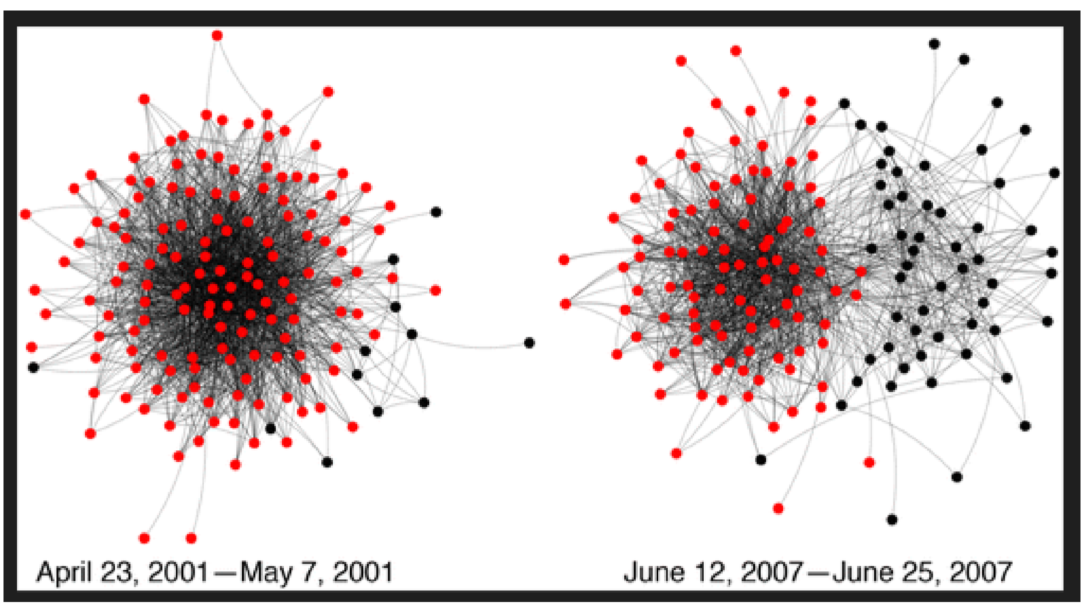
Projet ING2 Math Finance 23-24

Risques Systémiques.
Contagion dans le réseau financier.

.

Livrables.

Irina Kortchemski,   CYTECH



Introduction. Réseau financier et risque systémique d'un défaut.

La crise financière que nous avons traversé depuis 10 ans est un évènement d'une rare ampleur et lourd en conséquence. Elle a été qualifiée de systémique car elle s'est manifestée à l'échelle du système bancaire mondiale. Toutes les banques ont du faire face à de grandes difficultés de liquidités ayant conduit certaines d'entre elles à la faillite (Lehman Brothers en 2008). Depuis le début de la crise financière en 2007, plus de 370 des banques américaines (sur près de 8000 banques assurées par la Federal Deposit Insurance Corporation) ont fait faillite. Entre 2000 et 2004, seulement 30 banques ont fait faillite et aucune entre 2005 et le début de l'année 2007.

Le risque systémique est le risque d'effondrement d'un système suite à un choc sur certaines institutions financières qui entrainent par un effet domino la dégradation brutale ou la faillite de beaucoup d'autres. Ce n'est que très récemment que les institutions financières se sont intéressées à la modélisation mathématique de ces épisodes de contagion par défaut où un choc économique causant des pertes initiales et le défaut de quelques institutions sont amplifiés en raison de liens financiers complexes, pour finalement conduire à des faillites à plus grande échelle.

Modélisation du bilan d'une banque et réseaux financiers

Un système d'institutions financières est modélisé par un réseau de relations ou contreparties : un ensemble de N noeuds et des liens pondérés représentés par une matrice

$$E = (E_{ij})_{1\leq i,j\leq N}$$

• $(E_{ij})_{1\leq i,j\leq N}$ est la valeur marché de l'exposition de l'institution financière i à l'institution financière j.

A la date t, l'institution i dispose d'un capital (propre) $X_i(t)$, c'est-à-dire un matelas de sécurité pour les créanciers de l'entreprise, pour absorber les pertes potentielles.

Le bilan d'une banque se présente sous la forme d'un équilibre entre ses actifs, c'est-à-dire les bien qu'elle possède qui ont une une valeur économique positive, et ses passifs, c'est-à-dire l'ensemble de ses dettes ou de ses biens qui ont une valeur économique negative.

Entre les temps t_k et t_{k+1} , le capital d'une institution subit des fluctuations dues au marché dont la dynamique peut s'écrire :

$$X_{t_{k+1}} = e^{-\lambda\Delta t}\, X_{t_k} + \mu(1 - e^{\lambda\Delta t}) + \sigma(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})$$

• Discrétisation : $t_k = \Delta t \cdot k$
• $(W_{t_k})_{k\geq 0}$ est un mouvement Brownien.
• μ s'interprète comme l'équilibre moyen du capital
• lorsque X_t s'écarte de cette valeur le paramètre λ agit comme une force de rappel vers μ.
• le paramètre $\sigma > 0$ est l'écart-type des fluctuations du capital.

Le processus $(X_{t_k})_{k\geq 0}$ est alors un processus gaussien.

Bilan à l'horizon T

A la date T, un bilan de solvabilité a lieu permettant de conclure quant à la solidité financière de l'institution i. Si le capital de l'institution i est en dessous d'un seuil critique déterministe C_i celle-ci n'est plus solvable. Une banque est solvable si son capital restant à la date T est supérieur au seuil critique, c'est-à-dire si

$$X_i(T) > C_i$$

. Une banque insolvable fait défaut et est liquidée. Chacun de ses créanciers perd une fraction $1-R$ de l'exposition à la banque faisant défaut. Cette perte vient alors se soustraire au capital et peut entraîner à son tour l'insolvabilité des créanciers. Cette cascade de défaut dépend fortement du taux de récupération R (recovery rate) de la banque faisant défaut : pour simplifier, on suppose que ce taux de récupération est le même pour toutes les institutions (on prendra par exemple R= 5%).

On définit l'ensemble

$$D_0^T = \{i \in 1, 2, ..., N : X_i(T) < C_i\}$$

des institutions financières faisant initialement défaut dans le réseau à la date T. La cascade de défaut est la séquence d'ensemble

$$D_0^T \subset D_1^T \subset ... \subset D_{N-1}^T,$$

$$D_k^T = D_{k-1}^T \cup \{j \notin D_{k-1}^T : X_j(T) - \sum_{p \in D_{k-1}^T} (1 - R_p) \cdot E_{j,p} < C_j\}, k \geq 1$$

Dans un réseau financier de taille N, cette cascade finit après au plus $N-1$ étapes.

A l'étape k, D_k^T représente l'ensemble des institutions financières insolvables (et donc faisant défaut) suite à lŠexposition de contrepartie à des banques de l'ensemble D_{k-1}^T qui viennent de faire défaut à l'étape précédente.

Impact de défaut

Pour quantifier le risque systémique et l'effet de contagion, on définit l'impact de défaut $I(T)$ à la date T du à la cascade de défaut à l'instant T,

$$I(D_0^T) = \sum_{j \in D_q^T} (X_j(T) + \sum_{p \notin D_q^T} (1 - R_p) \cdot E_{p,j})$$

$I(D_0^T)$ est la somme des pertes générées par la contagion du défaut des banques. à la date T.

L'ensemble D_0^T répresente des institutions financières faisant initialement défaut dans le réseau à la date T.

q est le dernier étape de la cascade de contagion. Après l'étape q la configuration ne varie plus.

D_q^T est l'ensemble d'institution en défault à l'étape q.

Simulation n'une variable aléatoire conditionnelle

vous calculez des probabilités ...

for $m = 1 : N_{me}$

risques du marché
risques du contagion

$$[X^T, D^{solvables}, D^{T,ruinés}] = Risques(\ )$$

ensemble $[1,4]$

$[2,3,5]$ E_{ij}

end

$$\text{function } [X^T, D^{solvables}, D^{T,ruinés}] = Risque(\ )$$

$$C = [10, 10, \dots] \quad E = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad \Delta t = \frac{T}{n}$$

$T=1$, $n=12$

$$X[:,0] = [15, 15 \dots]$$

$t=0$

il y a N banques

for $i = 1 : N$

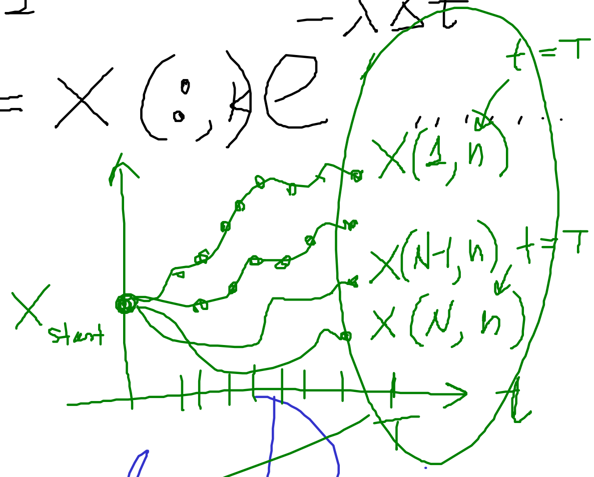
for $k = 0 : n-1$

$$X[:, k+1] = X(:, k) e^{-\lambda \Delta t}$$

il y a N banques

end

end



On analyse par la fonction de Domino le vecteur

$$X^T_{(0)} = X(:, n)$$

$t = T = 1$ an

l'entré de Domino

étape 0

on cherche l'indice "i" t.q $X^T_{(0)}(i) < C(i)$

while $q < N$

$$[X^T, D^{solvables}, D^{T,ruinés}] = Domino(X^T_{(0)}, D^{solvables}_{(0)}, D^{ruin}_{(0)})$$

$X_0^T = X^T$, $D_0^{solvable} = D^{solvable}$, $D^{T, ruinées} = D_0^{T, ruinés}$

end

On vous propose d'analyser le cas

$$X_{(0)}^T = [14, 9, 8, 13, 15]$$

$i=2$ $i=3$

Banque $N=2$ Banque $N=3$

Pour obtenir une simulation de v.a. Z sachant un évènement A, il suffit de simuler de manière répété e et indépendante une couple (Z,A), de rejeter les résultats tant que A n'est pas réalisé. Dans ce résultat, Z peut être une variable aléatoire multi-dimensionnelle.

LIVRABLES 1.

Livrable 1. Etude de la Cascade.

Créer une fonction DOMINO qui calcule

• l'ensemble des banques ruinées D_k^T à une étape k

• l'ensemble des banques restées solvables $D_k^{solvables}$ à l'étape k

• les capitaux de chaque banque $X_{k+2}^T = [X_{k+2}^T(t_1), X_{k+2}^T(t_2), X_{k+2}^T(t_3), X_{k+2}^T(t_4), X_{k+2}^T(t_5)]$ à l'etape $k+2$

en utilisant les capitaux de chaque banque $X_{k+1}^T = [X_{k+1}^T(t_1), X_{k+1}^T(t_2), X_{k+1}^T(t_3), X_{k+1}^T(t_4), X_{k+1}^T(t_5)]$ de l'étape $k+1$.

$$[X_{(k+2)}^T, D_{k+1}^{solvables}, D_{k+1}^T] = DOMINO(X_{(k+1)}^T, D_k^{solvables}, D_k^T)$$

Tenez compte du fait que les banques sont numérotés par les indices $[1,2,3,4,5]$. Les mêmes indices on utilise dans la matrice $(E_{ij})_{1\leq i,j\leq N}$ de l'exposition de l'institution financière i à l'institution financière j.

Exemple :

La matrice de contreparties :

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Une banque devient insolvable à une etape de la Cascade si son capital restant à cette étape

est inferieur au seuil critique :

$$X_k^T(i) < C(i), \quad i = 1:N$$

.

Soit le seuil est

$C = [10,10,10,10,10]$.

Soit à t=0 le vecteur des capitaux

$X^{start} = [15,15,15,15,15]$, ← Sont perdus

$D_{start}^{solvables} = [1,2,3,4,5]$

$D_{start}^T = [0]$

Domino détecte les banques ruinées (2 et 3) et calcule les capitaux diminués à cause de cette ruine

Supposons qu'après avoir effectué les simulations Monte Carlo que $X_{(0)}^T = [14, 9, 8, 13, 15]$ à $t = T$.

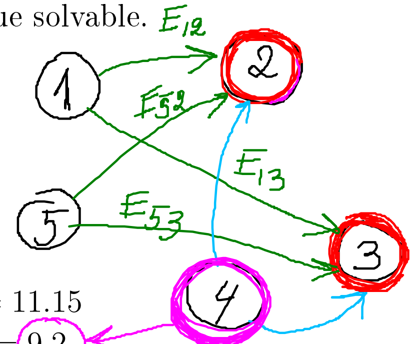
Dans cet example le vecteur $X_{(0)}^T$ est bien affiché, cependant lors de simulation MC le vecteur n'est pas visible, dont le programme (la fonction DOMINO) doit analyser le nombre de banque sonvables et ruinées faisant partie de ce vecteur.(?)

L'action initiale de la fonction DOMINO est la suivante :

$$DOMINO(X_{(0)}^T, D_{start}^{solvables}, D_{start}^T) = [X_{(1)}^T, D_0^{solvables}, D_0^T]$$

$$DOMINO([14, 9, 8, 13, 15], [1, 2, 3, 4, 5], [\quad]) = [X_{(1)}^T, D_0^{solvables}, D_0^T]$$

Compte tenu de valeurs des capitaux $[14, 9, 8, 13, 15]$ la fonction DOMINO detecte les indices des banques ruinée, celle des solvables et calcule la capital de chaque banque solvable.



Etape 0.
$D_0^{solvables} = [1, 4, 5]$
$D_0^T = [2, 3]$
$X_{(1)}^T = [11.1500, 9.0000, 8.0000, 9.2000, 10.2500]$
En effet :

$$\begin{cases} X_{(1)}^T(1) = X_{(0)}^T(1) - (1-R)(E_{12} + E_{13}) = 14 - 0.95(3+0) = 11.15 \\ X_{(1)}^T(4) = X_{(0)}^T(4) - (1-R)(E_{42} + E_{43}) = 13 - 0.95(2+2) = 9.2 \\ X_{(1)}^T(5) = X_{(0)}^T(5) - (1-R)(E_{52} + E_{53}) = 15 - 0.95(2+3) = 10.25 \end{cases}$$

Les capitaux $X_{(1)}^T(2) = 9$, et $X_{(1)}^T(3) = 8$ sont perdus.

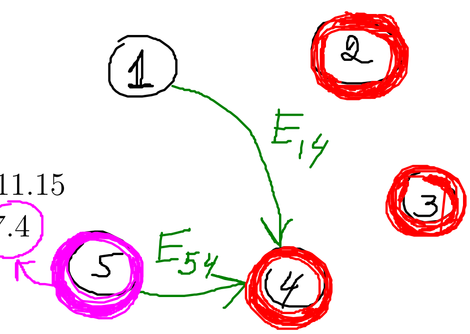
$R = 0.05 \quad 5\%$

Etape 1

$$DOMINO(X_{(1)}^T, D_0^{solvables}, D_0^T) = [X_{(2)}^T, D_1^{solvables}, D_1^T]$$

$$DOMINO([11.1500,\ 9.0000,\ 8.0000,\ 9.2000,\ 10.2500], [1, 4, 5], [2, 3]) = [X_{(2)}^T, D_1^{solvables}, D_1^T]$$

sont perdus



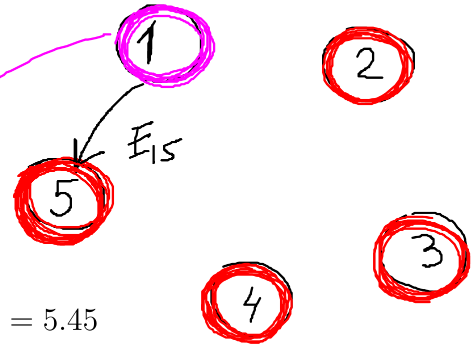
$D_1^{solvables} = [1, 5]$
$D_1^T = [2, 3, 4]$
$X_{(2)}^T = [11.15,\ 9.0000,\ 8.0000,\ 9.2000,\ 7.4000]$
En effet

$$\begin{cases} X_{(2)}^T(1) = X_{(1)}^T(1) - (1-R)E_{14} = 11.15 - 0.95 \cdot 0 = 11.15 \\ X_{(2)}^T(5) = X_{(1)}^T(5) - (1-R)E_{54} = 15 - 0.95 \cdot 3 = 7.4 \end{cases}$$

Etape 2

$$DOMINO(X_{(2)}^T, D_1^{solvables}, D_1^T) = [X_{(3)}^T, D_2^{solvables}, D_2^T]$$

$$DOMINO([11.15,\ 9.0000,\ 8.0000,\ 9.2000,\ 7.4000], [1, 5], [2, 3, 4]) = [X_{(3)}^T, D_2^{solvables}, D_2^T]$$



$D_2^{solvables} = [1]$ $D_2^T = [2, 3, 4, 5]$
$X_{(3)}^T = [5.45,\ 9.0000,\ 8.0000,\ 9.2000,\ 7.4000]$
En effet

$$\left\{ \ X_{(3)}^T(1) = X_{(2)}^T(1) - (1 - R)E_{15} = 11.15 - 0.95 \cdot 6 = 5.45 \right.$$

Etape 3

$$DOMINO(X_{(3)}^T, D_2^{solvables}, D_2^T) = [X_{(4)}^T, D_3^{solvables}, D_3^T]$$

$DOMINO([5.45,\ 9.0000,\ 8.0000,\ 9.2000,\ 7.4000], [1, 5], [2, 3, 4]) = [X_{(4)}^T, D_3^{solvables}, D_3^T] =$

$D_3^{solvables} = [\quad]$ Tout est ruiné.
$D_3^T = [2, 3, 4, 5, 1]$
$X_{(4)}^T = [5.45,\ 9.0000,\ 8.0000,\ 9.2000,\ 7.4000]$
C'est sont des valeurs artificielles (calculés).

vous calculez

Impact de défaut // I VAR de I .

Capitaux initiales perdus

$$I(D_0^T) = \sum_{j \in D_q^T} (X_j(T) + \sum_{p \notin D_q^T} (1 - R_p) \cdot E_{p,j}) = \sum_{j \in D_q^T} X_j(T) + \underbrace{\sum_{j \in D_q^T} \sum_{p \notin D_q^T} (1-R_p) E_{pj}}_{\text{les pertes des banques survenus}}$$

D_q^T est l'ensemble de banques ruinées au derniere étape $q = 3$.

$$I([2, 3]) = \sum_{j \in [2,3,4,5,1]} X_j(T) = 14 + 9 + 8 + 13 + 15 = 59$$

En effet le reseau des banques est ruiné, dont le capital initiale est perdue.

Déposez un rapport avec les codes attachés

Livrable 1. Travail 1 à faire. Etude de la Cascade.

1. Ecrire la fonction DOMINO et montrer le fonctionnement correcte de cette fonction en utilisant : $X_{(0)}^T = [14, 9, 8, 13, 15]$

banque N=2

2. a) Imprimer les resultats de chaque étape de la Cascade de la même facon que vous a été proposé pour un Jeu de données 1 : $X_{(0)}^T = [12, 9, 11, 13, 12]$
   b) Calculer l'Impacte de defaut $I(D_0^T), D_0^T = [2]$

3. a) Imprimer les resultats de chaque étape de la Cascade de la même facon que vous a été proposé pour un Jeu de données 2 : $X_{(0)}^T = [15, 9, 8, 18, 12]$
   b) Calculer l'Impacte de defaut $I(D_0^T), \quad D_0^T = [2, 3]$

4. Imprimer les resultats de chaque étape de la Cascade de la même facon que vous a été proposé pour un Jeu de données 3 :
   $X_{(0)}^T = [14, 15, 11, 9, 12, 12, 13, 14, 15, 12]$ et $C = [10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10]$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 6 & 0 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 5 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 6 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 0 & 5 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 6 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 6 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

choc du marché

4. Imprimer les resultats de chaque étape de la Cascade de la même facon que vous a été proposé pour $X^T_{(0)} = [20, 9, 20, 9, 25, 20, 12, 14, 15, 13]$

Calculer l'Impacte de défaut $I(D^T_0), D^T_0 = [2, 4]$

Livrable 1. Travail 2 à faire. Etude théorique de l'évolution des capitaux.

L'evolution d'un capital on modélise par l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = \lambda(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t$$

1. Résoudre cette equation avec l'aide de Lemme d'Ito. Pour cela on introduit un processus stochastique

déterminis.

$$Y_t = e^{\lambda t} X_t$$

$dY_t = d(e^{\lambda t}) \cdot X_t + e^{\lambda t}\, dX_t + 0$

et on calcule dY_t. Puis on intégre $d(e^{\lambda t} X_t)$ sur l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$.

2. Calculer l'espérance $\mathbb{E}[X_{t_{k+1}} | X_{t_k}]$. Montrer que

$$\mathbb{E}[X_{t_{k+1}} | X_{t_k}] = e^{-\lambda \Delta t} X_{t_k} + \mu(1 - e^{\lambda \Delta t})$$

3. Calculer la variance $\mathbb{V}ar[X_{t_{k+1}} | X_{t_k}]$. Montrer que

$X_t = \dots\dots$

$$\mathbb{V}ar[X_{t_{k+1}} | X_{t_k}] == \frac{\sigma^2}{2\lambda}(1 - e^{-2\lambda \Delta t}).$$

$t \to \infty$

$t \to 0$

4. Simuler l'evolution d'un capital

5. Etudier le sens de chaque paramètre de l'équation : λ, μ, σ.

Livrable 1. Travail 3 à faire. Etude de la Cascade à l'aide de donnée simulées par Monte Carlo.

Paramètres

$$X_(0)(i) = \mu = 15, \sigma = 8, \lambda = 20, C(i) = 10, i = 1 : 5$$

1. Pour cela simuler l'evolutions de capitaux sur 12 moins ($T = 1, n = 12, \Delta t = T/12$) , pour chaque scenario récupérer le vecteur final des capitaux : $X^T_{(0)}$. Appliquer la fonction DOMINO

et analyser les résultats des Jeux de données 1,2,3, c'est -à -dire le nombre les banques ruinés et le nombre des banques solvables.

2. Estimer les probabilités que le nombre de banques insolvables (ruinées) soit 1, 2, 3, 4 ou 5.

Pour cela compte les scenarios pour lequels le nombre de banques ruinées sont 1, 2, 3, 4 ou 5.

Livrable 1. Travail 4 à faire. Evolution dépendante de N capitaux.

Supposons maintenant que les mouvements browniens sont corrélés positivement. Typiquement, la loi de

$$W(t) = (W^1(t), ..., W^N(t))$$

est gaussienne, centrée, de matrice de covariance

$$\mathbb{C}ov = \begin{pmatrix} 1 & \rho & ... & ... & \rho \\ \rho & 1 & \rho & ... & \rho \\ & ... & 1 & ... & ... \\ & ... & ... & 1 & \rho \\ \rho & ... & ... & \rho & 1 \end{pmatrix}$$

avec $\rho \in [0, 1]$.

Reprendre aux questions précédentes du travail 3, tout en identifiant l'impact de la corrélation.

Indication :

On introduit les mouvements browniens indépendants de chaque banque :

$$B(t) = (B^1(t), ..., B^N(t)).$$

Alors les mouvements browniens corrélés $W(t)$ sont les combinaisons linéaires de $B(t)$:

$$W^i(t) = \sum_{j=1}^{N} M_{ij} B^j(t).$$

$\mathbb{E}[W^i, W^j]$

$\sum_m M_{jm} B^m$

Il est possible de montrer que

$$\mathbb{E}[W^i(t)\, W^j(t)] = (Cov)_{ij} \cdot t, \qquad \mathbb{C}ov = M\, M^T.$$

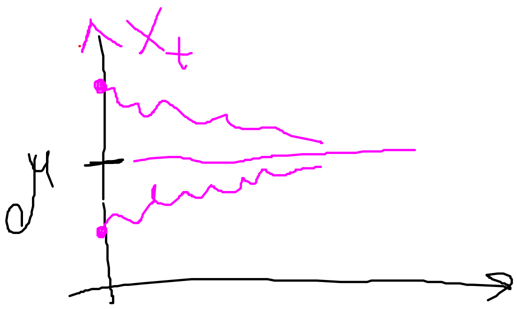
On vous propose de programmer la décomposition de Cholesky ou la factorisation de Cholesky. La factorisation de Cholesky consiste, pour une matrice symétrique définie positive ρ, à déterminer une matrice triangulaire inférieure M telle que : $\mathbb{C}ov = M\, M^T$.

Pour la suite vous appliquer la formule obtenue à l'aide du Lemme d'Ito (vous étudiez ce Lemme avec les details en semestre 2)

Au lieu de l'evolution

$$X_{t_{k+1}} = e^{-\lambda \Delta t} X_{t_k} + \mu(1 - e^{-\lambda \Delta t}) + \sigma \sqrt{\Delta t} \cdot (randn)$$

Discussion livrable 1.



- Analyse μ, λ, σ avec MC sans Domino
- Après (pour calculer les probabilités dernières) $X_0(:) = \mu$ ← Aylan + ...

Vérifier Impacte de Default Q4 bis 132.19 (au lieu ~~91.10~~)

Bilal +

- Analyser l'influence de la correlation des capitaux sur les proba de default $= 0.05\%$ de R variable
- - - - - - - - - - suit $\sim$ Beta(α, β)

utiliser

$$X^i_{t_{k+1}} = e^{-\lambda \Delta t} X^i_{t_k} + \mu(1 - e^{\lambda \Delta t}) + \sigma \sum_{j=1}^{N} M_{ij} B^j(\Delta t), \quad i \leq N, k = 1 : 12$$

et analyser les questions sur la probabilité de nouveau.

- Si $N = 2$

$\rho = 0.5, 0.9, 1$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix}$$

- Vérifiez vos codes : si $\rho = 0$ vous devez retrouver le cas d'evolution indépendantes.

Livrable 1. Simulation de loi Beta

On pourra considérer le cas de récupération R indépendants et aléatoires de loi Beta(a, b) de moyenne 5% et d'écart-type autour de 20%.

Une variable aléatoire de loi Beta $B(\alpha, \beta)$ (avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0$) a pour densité

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha - 1}(1 - x)^{\beta - 1} 1_{0 \leq x \leq 1}$$

Supposons que $\alpha < 1$ et $\beta < 1$ de sorte que cette densité soit bornée. On peut alors utiliser l'algorithme de J~~o~~rk. Jönk

Livrable 1. Travail 6 à faire. Simulation de loi Beta.

1. Simuler la variable aléatoire Beta avec $(\alpha, \beta) = (1/2, 1/2)$
2. Calculer α et β pour l'espérance 5% et d'écart-type autour de 20%. $\longrightarrow$ Calculer α et β
3. Tracer la fonction de densité empirique pour chaque cas.

LIVRABLE 2.

Livrable 2. Travail 1 à faire. Calcul de l'Indice du Risque Systémique

v.a. Impact de default

$$I_S = \frac{1}{N_{mc}} \sum_{i=1}^{N_{mc}} I(D_0^{T(i)}) \quad = \frac{1}{N_{mc}} \sum_{i=1}^{N_{mc}} I^{(i)}$$

Calculer l'Indice du Risque Systémique pour les Jeux de données 1,2,3.

Pour cela simuler l'evolutions de capitaux, pour chaque scenario récupérer le vecteur final $X_{(0)}^T$. Appliquer à ce vecteur la fonction DOMINO et calculer

$$[X_{(q+1)}^T, D_q^{solvables}, D_q^T]$$

q est le dernier étape de la cascade de contagion après lequelle plus rien ne change.

$$I(D_0^T) = \sum_{j \in D_q^T} (X_j(T)) + \sum_{j \in D_q^T} \sum_{p \notin D_q^T} (1 - R_p) \cdot E_{p,j}) \qquad \text{v.a}$$

Le terme $\sum_{j \in D_q^T} (X_j(T))$ calcule la somme les capitaux initiales des banques ruinées que sont completement perdu.

Le terme $\sum_{j \in D_q^T} \sum_{p \notin D_q^T} (1 - R_p) \cdot E_{p,j})$ represente l'investissement des banques solvables $'p'$ ($p \notin D_q^T$) dans les banques ruinées de l'etablissement (D_q^T). Il est perdu.

Livrable 2. Travail 2 à faire. Fonction de répartition et de densité de l'Indice du Risque Systémique.

I – impact de default

1. ~~L'Indice du Risque Systémique~~ est une variable aléatoire.

Tracer sa fonction de répartition et de densité.

l'impact de default I

2. Tracer sa fonction de répartition et de densité de ~~l'Indice du Risque Systémique~~ conditionnellement à l'évènement : "le réseau entier d'institutions financières s'est effondré".

Pour cela choisir les scenarios avec "le réseau effondré" et les compter afin de determiner la taille de réalisations de I. On ne compte pas les scenarions dans lesquels le réseau completement ou en partie solvable.

3. Calculer $I_S = \mathbb{E}[I]$

Livrable 2. Value-at-Risk.

Le risque d'effondrement d'un réseau d'institutions financières est le risque que les institutions ne remplissent pas une obligation telle que le paiement d'un intérêt ou d'une dette ou l'incapacité d'assurer le service d'un prêt.

Value at Risk (VaR), indicateur réglementaire est relié au montant de fonds propres des banques en regard des risques endossés, pour faire face à des pertes a priori rares. Une partie du projet se concentre sur l'évaluation des pertes sous l'angle de la probabilité, sévérité et scénario les engendrant, en considérant des seuils 99% et en particulier peut être des seuils à 99.99% voire plus.

Définition. Pour tout $\alpha \in (0, 1)$, le quantile d'ordre α de la densité F_X est la quantité

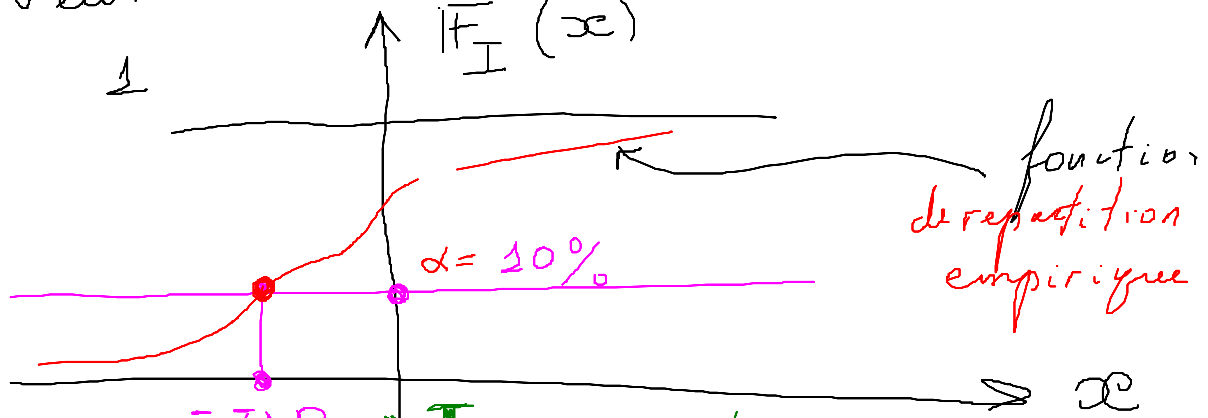
$$x_\alpha = \inf\{x \quad : F_X(x) \geq \alpha\}$$

, c'est-à-dire que x_α est la plus petite valeur pour laquelle la probabilité que la variable aléatoire X prenne des valeurs plus petites ou égales à x_α est plus grande ou égale à α.

Impact de Default I est une v.a. ($I<0$ perte totale)

$$I_s = \mathbb{E}[I]$$

On veut calculer VAR de I.



$VAR \approx I_{(100)}$ si $N_{me} = 1000$

$$\boxed{\mathbb{P}[I < VAR] = \alpha \quad \text{ou}}$$

quantile

$$\mathbb{F}_I(VAR) = \alpha \Rightarrow VAR = \mathbb{F}_I^{-1}(\alpha)$$

Nous somme certain à la proba $1-\alpha$ que nous n'allons pas perdre plus que VAR sur T prochains jours.

$$\mathbb{P}[I \geq VaR] = 1 - \alpha$$

Vous simulez I N_{me} fois

Methode 1 Vous tracez la fonction de répartition empirique. Vous calculez VAR sur le graphe.

Algo d'ordonnement

Method 2

Vous simulez I N_{me} fois

$$I_1, I_2, I_3, \dots I_{N_{me}}$$

Vous ordonnez ces valeurs (réalisation)

$$\underbrace{I_{(1)} \le I_{(2)} \le \dots I_{(k-1)} \le}_{\text{il a } k \text{ simulation}} I_{(k)} \le I_{k+1} \dots \le I_{(N_{me})}$$

a proportion des simulation $\le I_{(k)}$

$$\mathbb{P}\left[I \le I_{(k)}\right] = \frac{k}{N_{me}} = \alpha$$

$$\parallel$$

$$\mathbb{F}_I\left(I_{(k)}\right)$$

on identifie avec VAR

$$\frac{k}{N_{me}} = \alpha \Rightarrow k = \alpha \cdot N_{me}$$

$$VAR = I_{(k)} = I_{[\alpha \cdot N_{me}]}$$

Exemple : $N_{me} = 1000$

$\alpha = 10\% = 0.1$

$\alpha \cdot N_{me} = 100$

Dans l'échantillon ordonné de réalisations de I

VAR = I (100)

Pourquoi ne pas avoir défini le quantile d'ordre α comme étant la quantité xa satisfaisant l'équation

$$F_X(x_\alpha) = \alpha, \quad ou \quad x_\alpha = F_X^{-1}(\alpha)?$$

Si la fonction de répartition est strictement croissante alors , oui, $F_X(x_\alpha) = \alpha$.

La définition plus générale est nécessaire pour pouvoir traiter les 3 cas.

Lorsque le portefeuille ou la richesse est constituée d'instruments nombreux et complexes, il n.est généralement pas possible de connaître analytiquement la densité de la valeur du portefeuille à un instant futur donné. On peut alors procéder par simulation. Dans d'autres cas, l'estimation d'un quantile se fait par échantillonnage.

Dans ce qui suit,

$$X_1, X_2, ..., X_n$$

représente un échantillon constitué de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées à la variable aléatoire X de fonction de répartition F_X. De plus, $X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n)}$ désigne le même échantillon ordonné, c'est-à-dire que

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq X_{(3)} ..., X_{(k-1)} \leq X_{(k)}, ..., X_{(n)}$$

Définition. La fonction de répartition empirique construite à partir de l'échantillon $X_1, X_2, ..., X_n$ de taille N_{mc} est

$$\forall x \in R \quad F_X(x) = \frac{1}{N_{mc}} \sum_{i=1} 1_{X_i \leq x}$$

Définition. Pour tout $\alpha \in (0, 1)$, VAR d'ordre α de la densité F_X est la quantité

$$VAR \approx x_\alpha = \inf\{x \quad : F_X^{(n)}(x) \geq \alpha\}$$

, c'est-à-dire que x_α est la plus petite valeur pour laquelle la probabilité que la variable aléatoire X prenne des valeurs plus petites ou égales à x_α est plus grande ou égale à α.

Notons que si

$$\frac{k-1}{n} < \alpha \leq \frac{k}{n}, \quad k = \{1, 2, ...n\}$$

alors $VAR = X_{(k)}$. En effet pour un nombre réel x $F_X^{(n)}(x)$ est la proportion des observations de l'échantillon qui sont inférieures ou égales à x car

$$F_X^{(n)}(\overset{X_{(k)}}{\cancel{x}}) = P[\underset{X \leq X_{(k)}}{\cancel{x \leq X_{(k)}}}] = \frac{k}{n} = \alpha$$

Par conséquent, puisque $k - 1 < n\alpha \leq k$

$$VAR = X_{[n\alpha]} = X_{(k)}$$

. où $[n\alpha]$ est le plus petit entier inferieur ou égal à k

Livrable 2. Travail 3 à faire. Value-at-Risk

1. Estimer la Value-at-Risk et de la Conditional Value-at-Risk de la distribution I pour différents seuils α aussi proches de 1 (par exemple $\alpha = 99.9\%, 99.99\%$).

Algorithme d'ordonnement pour trouver VAR.

- Simuler un échantillon $X = \cancel{I_S}$ I impact de default
- Ordonner l'échantillon

$$\cancel{X}_{(1)} \leq \cancel{X}_{(2)} \leq \cancel{X}_{(3)}, ..., \cancel{X}_{(n)}$$

$$I_{(1)} \leq I_{(2)} \leq I_{(3)}, ..., I_{(n)}$$

- $VAR = \cancel{X}_{[n\alpha]}$ I

Verifier si le VAR trouvé par l'aldorithme d'ordonnement est en coherence avec Var trouvé visuelement à partir du graphe de fonction de répartition.

Livrable 2. Travail 4 à faire. Etude d'insolvabilité. Influence de la taille du réseau.

1. Estimation de la cascade d'insolvabilité la plus probable, selon le nombre de banques en défaut.

2. Identification des liaisons de contrepartie dangereuses, des scénarios critiques menant à l'effondrement du système ainsi que des configurations (raisonnables) permettant d'améliorer la sûreté du système.

N=5

3. Influence de la taille du réseau ($N = 10, 20, 50$) et des configurations dangereuses.

Idée PhD

Verifier connectivité de E?

Livrable 2. Travail 5 à faire. Contagion dynamique.

En réalité, l'insolvabilité des institutions peut avoir lieu à tout moment entre la date 0 et la date T. Il est donc nécessaire de prendre en compte ce risque de manière dynamique. Cela nous conduit à considérer des impacts de défaut dynamique $I(t_k)$, $k = 1 : n$. On définit l'impact de défaut total à la date T comme la somme de tous les impacts de défaut entre la date 0 et la date T.

Vous analyze l'influence de ce modèle

$$\sum_{k=1}^{N} I(t_k).$$

Domino vous appliquez à chaque t_i

t_0 Δt t_i T

On reprendra les questions précédentes en intégrant le risque de contagion dynamique.

sur VAR $I = \sum I_k$

Livrable 2. Travail 6 à faire. Etude des réseaux financiers.

sur chaque Δt

1. Calculer les degrés d'entrée (nombre de débiteurs) K_{in} et de sortie (nombre de créanciers) K_{out} de chaque noeud et les probabilités :

$$\mathbb{P}[K_{in} = i], \quad \mathbb{P}[K_{out} = i], \quad i = 1 : N$$

Montrer que $\mathbb{P}[K_{in} = i] = \frac{C_1}{i^{\alpha_1}}$, $\mathbb{P}[K_{out} = i] = \frac{C_2}{i^{\alpha_2}}$ et trouver α_1 et α_2.

2. Tracer

$$i \to ln(\mathbb{P}[K_{in} \geq i])$$

$$i \to ln(\mathbb{P}[K_{in} \geq i])$$

$\boxed{\text{L'ouverture !}}$

Cascade d'insolvabilité la plus probable

$$\left[I, D^{\text{solvables}}, D^{\text{ruinés}} \right] = \text{Risque}(\quad)$$

évolution sur $[0,T]$ par MC

Domino

l'ordre est importante

$N=5$

Nme fois

[1 2 5 3 4]	1er scenario
[1 5 2 3 4]	2ème scenario
[3 1 2 4 5]	3ème scen
⋮	
[ ]	

Vous comptez toutes les transitions (i,j)

1 avec 2, 3, 4, 5

2 avec 1, 3, 4, 5

⋮

5 avec 1, 2, 3, 4

Vous formez une matrice de transition

$$\underset{N\times N}{D} = \left(N \times N \right)$$