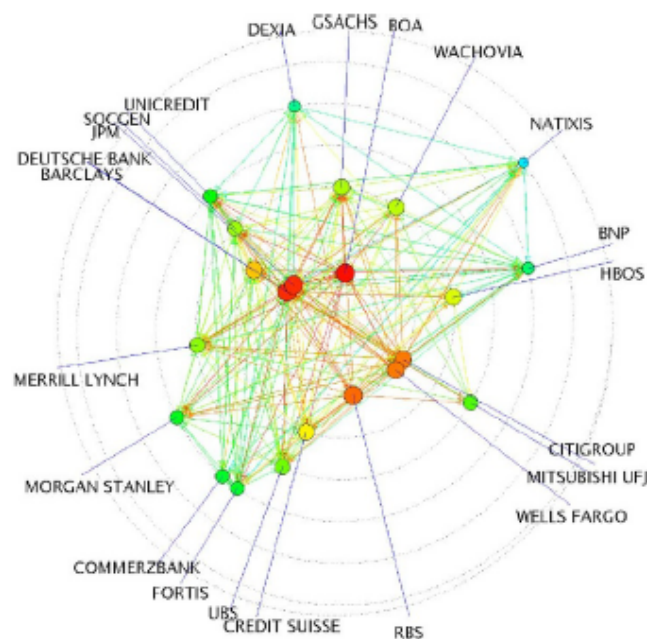
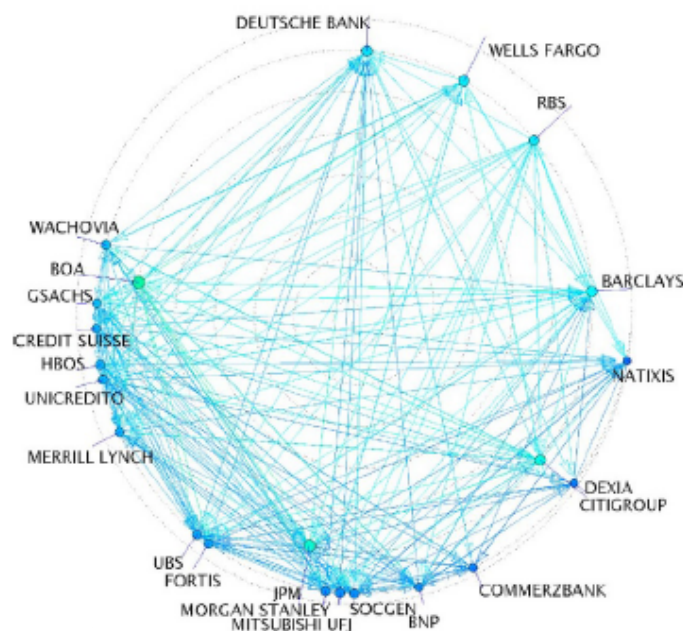


Irina Kortchemski, CYTECH

Projet MathFinance 2023-2024.

Risques Systémiques.

Contagion dans le réseau financier.



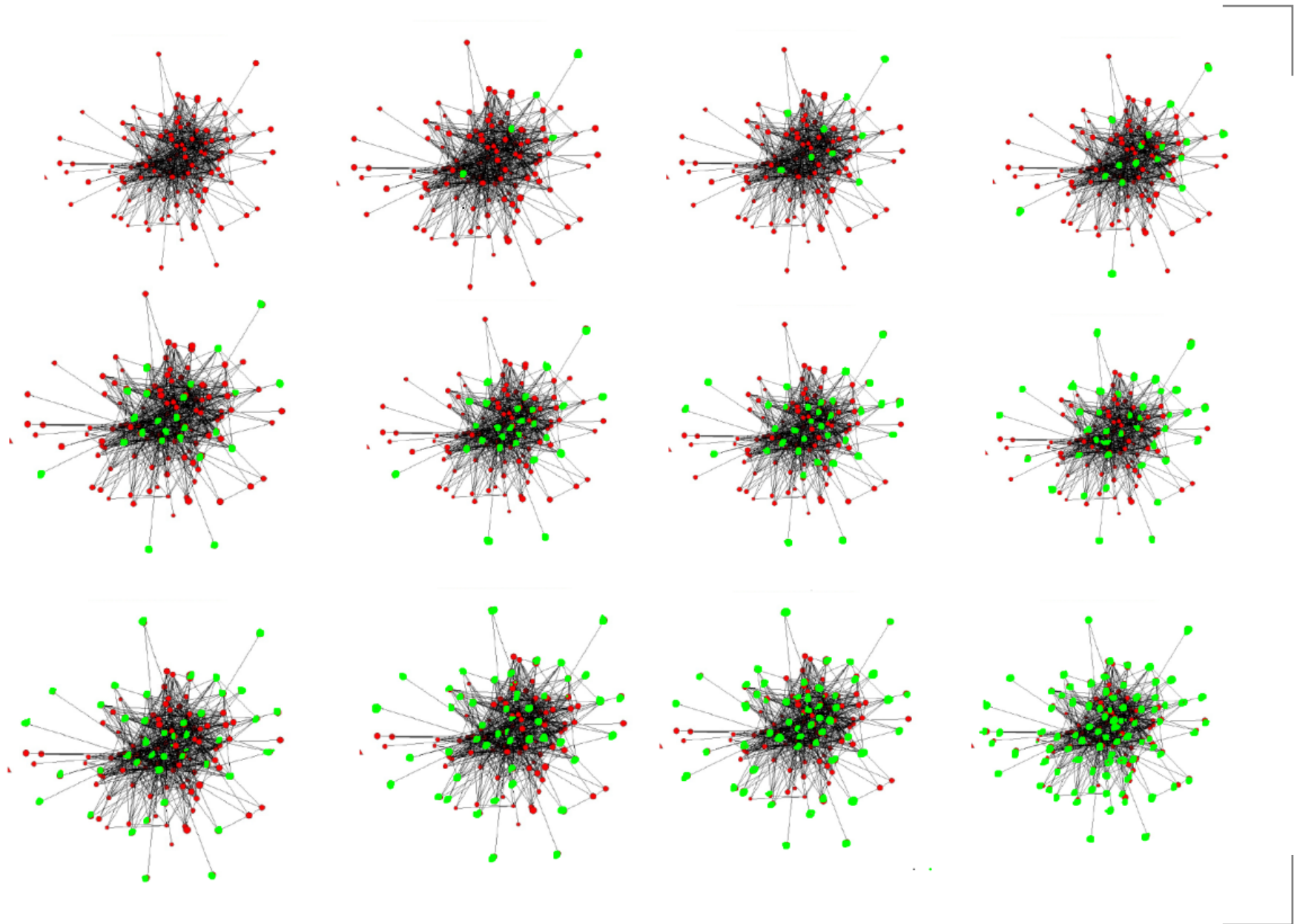
Risque systémique

- La crise financière que nous avons traversé depuis 10 ans est un événement d'une rare ampleur et lourd en conséquence.
 - La crise s'est manifestée à l'échelle du système bancaire mondiale.
 - Les banques ont du faire face à de grandes difficultés de liquidités.
- Faillite (Lehman Brothers en 2008)
 - Depuis le début de la crise financière en 2007, plus de 370 des banques américaines (sur près de 8000 banques assurées par la Federal Deposit Insurance Corporation) ont fait faillite.
 - Entre 2000 et 2004, seulement 30 banques ont fait faillite et aucune entre 2005 et le début de l'année 2007.

Risque systémique

- Le risque systémique est le risque d'effondrement d'un système suite à un choc sur certaines institutions financières qui entraînent par un effet domino la dégradation brutale ou la faillite de beaucoup d'autres.
- Les défaillances des institutions financières sont principalement dues à deux formes de détresse financière : l'illiquidité et l'insolvabilité.
 - Il y a défaillance lorsqu'une institution ne remplit pas une obligation telle que le paiement d'un intérêt ou d'une dette ou l'incapacité d'assurer le service d'un prêt. Cela se produit généralement lorsque les réserves d'actifs à court terme (liquides) ne suffisent pas à couvrir les besoins à court terme.
 - L'insolvabilité survient lorsque le capital d'une institution est réduit à zéro ou à un seuil critique.
 - L'illiquidité se produit lorsque les réserves liquides, telles que la trésorerie, sont insuffisantes pour couvrir les engagements à court terme.
- Dans la structure actuelle du système financier où les institutions sont principalement financées par des dettes à court terme, qui doivent être constamment renouvelées, les institutions insolubles auraient de grandes difficultés à se procurer des liquidités au fur et à mesure que leurs actifs perdent de la valeur.
- Dans la pratique, l'insolvabilité conduit à l'illiquidité qui, à son tour, conduit à la défaillance.

Cascade de défaut



Objectifs globaux

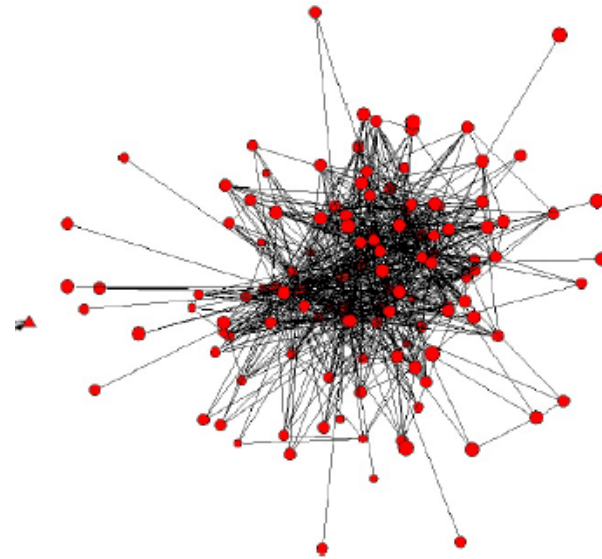
- La crise financière a simultanément souligné:
 - l'importance des effets de contagion et du RS
 - l'absence d'indicateurs adéquats pour mesurer et surveiller le risque systémique (RS)
 - le manque de données adéquates pour calculer ces indicateurs
- Objectifs et des nombreuses questions:
- Modèles de réseaux de marchés financiers
- La structure des réseaux bancaires
- La conception d'indicateurs pour le RS:
 - **Impacte de Défaut**
 - **Indice de Contagion**
 - **Indice de Risque Systémique**

Objectifs du projet

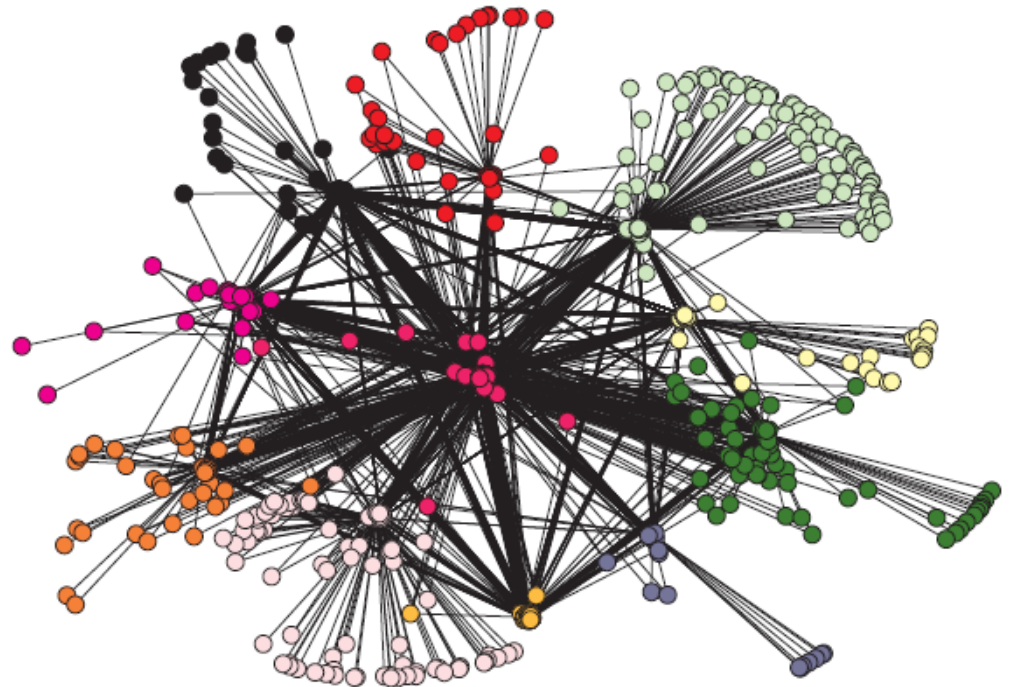
- Comprendre la **Théorie** de la modélisation mathématique de ces épisodes de contagion par défaut.
- Montrer par simulations qu'un choc économique causant des pertes initiales et le défaut de quelques institutions sont amplifiés en raison de liens financiers complexes, pour finalement conduire à des faillites à plus grande échelle.
- Calculer par **Monte Carlo** les probabilités de défaut.
- Estimer une cascade d'insolvabilité la plus probable, selon le nombre de banques en défaut.
- Identifier des liaisons de contrepartie dangereuses, des scénarios critiques menant à l'effondrement du système ainsi que des configurations (raisonnables) permettant d'améliorer la sûreté du système.

Modèles de réseau financier

Brazilian financial network
(Cont, Moussa Santos
2009)



The banking network of
Austria

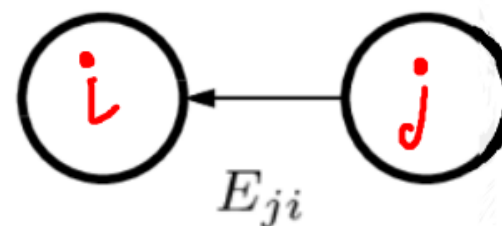
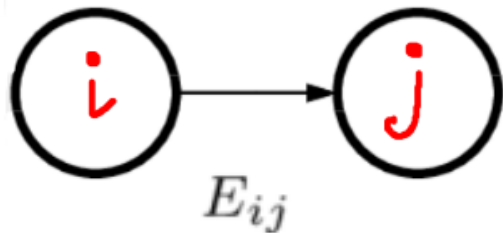


Modélisation

- Un système d'institutions financières est modélisé par un réseau de relations ou contreparties: un ensemble de n noeuds et des liens pondérés représentés par une matrice

$$E = (E_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$$

- $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ est la valeur marché de l'exposition de l'institution financière i à l'institution financière j .



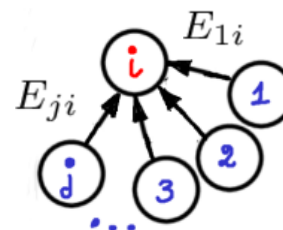
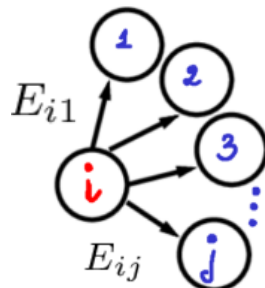
Modélisation du réseau

A la date t , l'institution i dispose d'un capital (propre) $X_i(t)$, c'est-à-dire un matelas de sécurité pour les créanciers de l'entreprise, pour absorber les pertes potentielles.

Le bilan d'une banque se présente sous la forme d'un équilibre entre ses actifs et ses passifs.

Actifs	Passifs
Actifs interbancaires $\sum_{j=1}^n E_{ij}$	Passifs interbancaires $\sum_{j=1}^n E_{ji}$
Autres actifs $A_i(t) = 0$	Capital $X_i(t)$

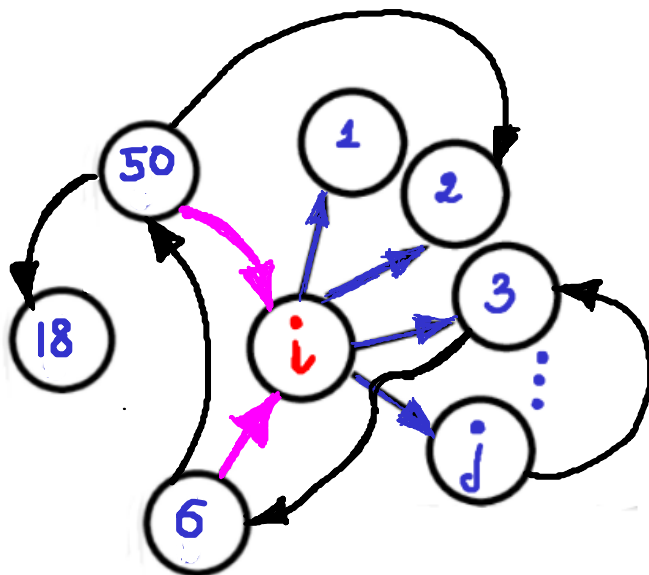
- Actifs qu'une banque possède des biens qui ont une valeur économique positive.
- Passif sont l'ensemble de ses dettes qui ont une valeur économique negative.



Actif. Passif.

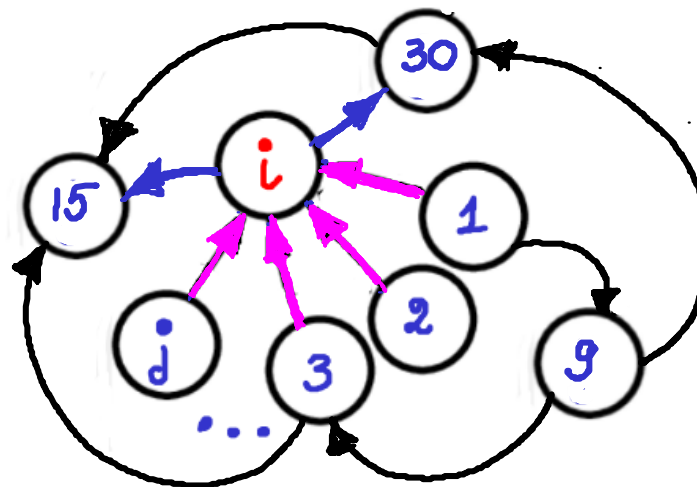
- Credit de la banque i investi à toutes les autres banques. qu'ils existent dans

$$\sum_{j=1}^N E_{ij}$$



- Credit total reçu par la banque i de la part de toutes les autres banques

$$\sum_{j=1}^N E_{ji}$$



Modelisation du réseau plus fine.

- On inclue les actifs liquides et des dépôts.

Assets A_i	Liabilities L_i
Interbank assets $\sum_j E_{ij}$ including: Liquid assets l_i^0	Interbank liabilities $\sum_j E_{ji}$ Deposits
Other assets a_i	Capital c_i

Dynamique du marché. Modélisation.

- Entre les temps t_k et t_{k+1} , le capital d'une institution subit des fluctuations dues au marché dont la dynamique peut s'écrire:

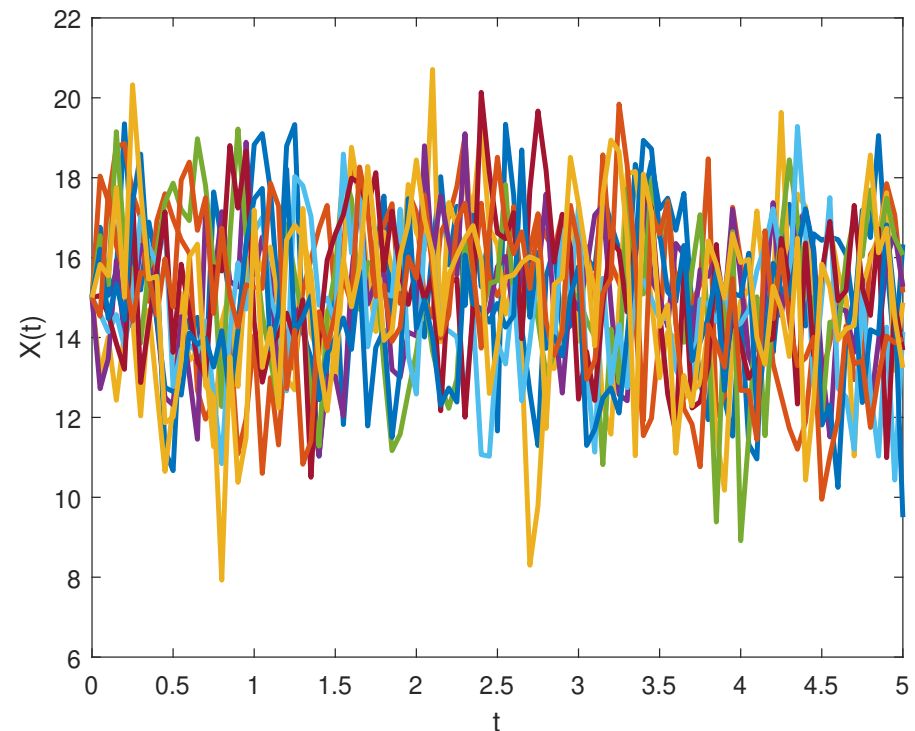
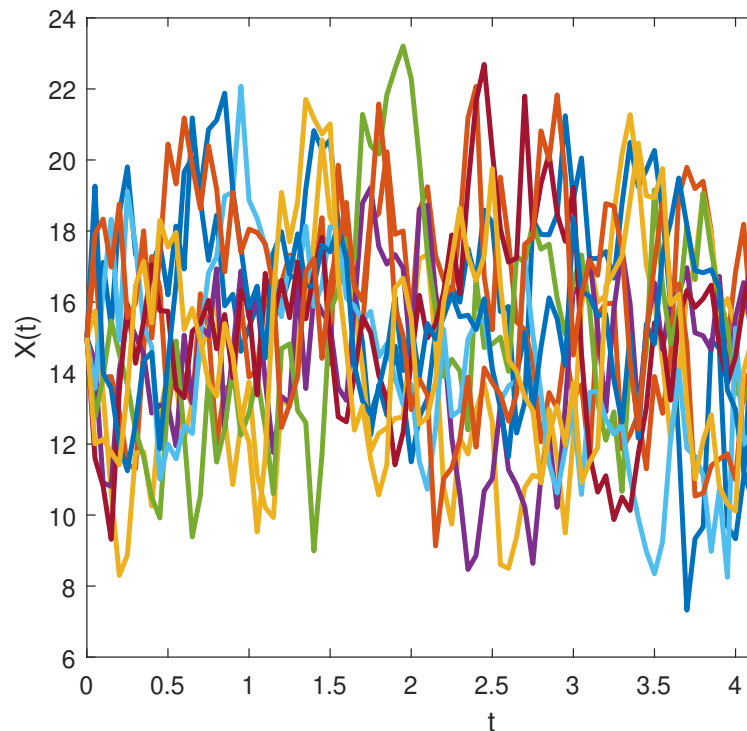
$$X_{t_{k+1}} = e^{-\lambda \Delta t} X_{t_k} + \mu(1 - e^{\lambda \Delta t}) + \sigma(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})$$

- Discrétisation: $t_k = \Delta t \cdot k$
 - $(W_{t_k})_{k \geq 0}$ est un mouvement Brownien.
 - μ s'interprète comme l'équilibre moyen du capital
 - lorsque X_t s'écarte de cette valeur le paramètre λ agit comme une force de rappel vers μ .
 - le paramètre $\sigma > 0$ est l'écart-type des fluctuations du capital.
- Le processus $(X_{t_k})_{k \geq 0}$ est alors un processus gaussien.

Dynamique du marché. Modélisation.

- Capital d'une institution subit des fluctuations dues au marché dont la dynamique peut s'écrire:

$$X_{t_{k+1}} = e^{-\lambda \Delta t} X_{t_k} + \mu(1 - e^{-\lambda \Delta t}) + \sigma \sqrt{\Delta t} \cdot (randn)$$



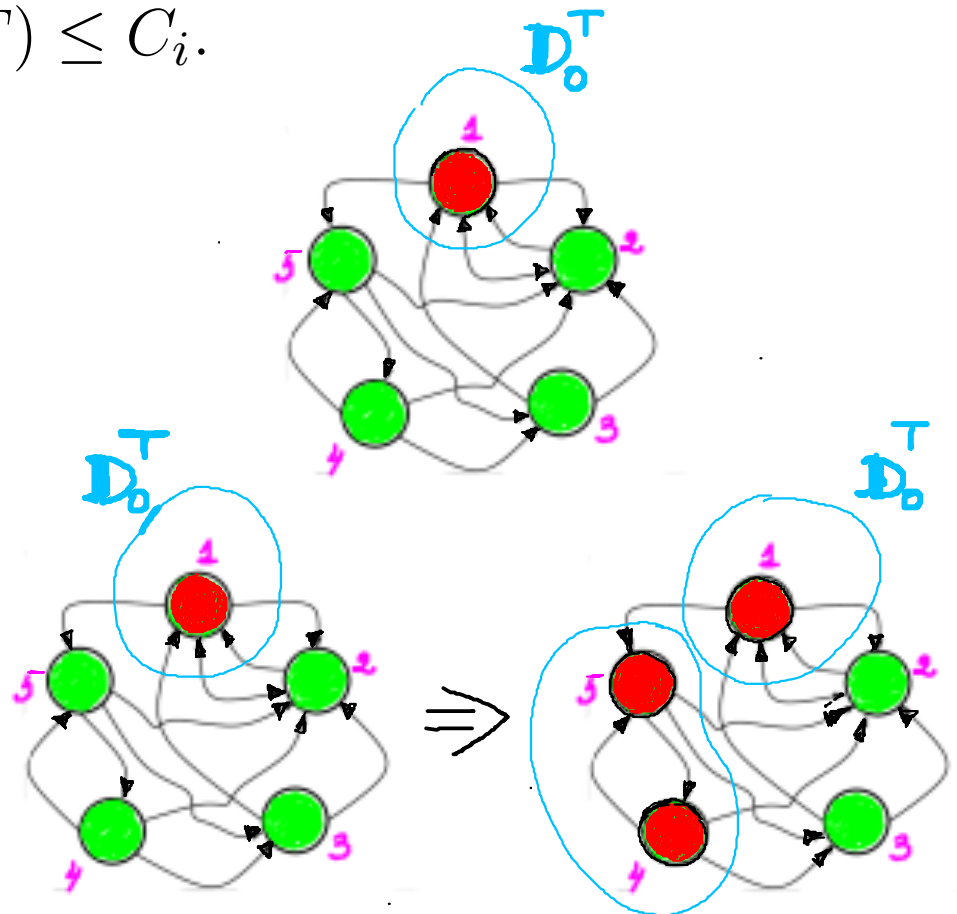
Bilan à l'horizon T

- Une banque est insolvable si son capital restant à la date T est inférieur au seuil critique:

$$X_i(T) \leq C_i.$$

- A cause d'un choc sur le marché $i=1$

- A cause de l'exposition à une banque $i=1$ faisant défaut



Bilan à l'horizon T

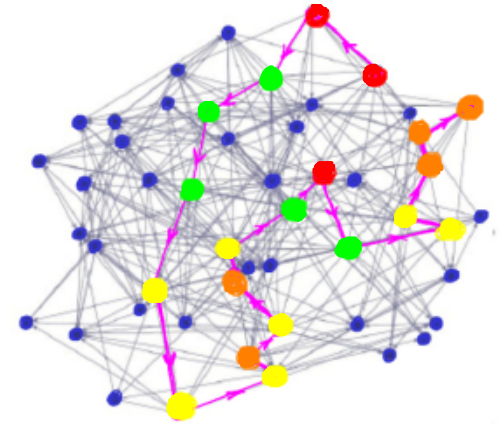
- Une banque est insolvable si son capital restant à la date T est inférieur au seuil critique:

$$X_i(T) \leq C_i.$$

Une banque insolvable fait défaut et elle est liquidée.

- Chacun de ses créanciers perd une fraction $1 - R_i$ de l'exposition à la banque "i" faisant défaut. Cette perte vient alors se soustraire au capital et peut entraîner à son tour l'insolvabilité des créanciers.
- Cette cascade de défaut dépend fortement du taux de récupération R (recovery rate) de la banque faisant défaut.

Cascade de défaut



On définit l'ensemble

$$D_0^T = \{i \in 1, 2, \dots, N : X_i(T) < C_i\}$$

des institutions financières faisant initialement défaut dans le réseau à la date T .

Cascade de défaut est la séquence d'ensemble



$$D_0^T \subset D_1^T \subset \dots \subset D_{N-1}^T,$$

$$D_k^T = D_{k-1}^T \cup \{j \notin D_{k-1}^T : X_j(T) - \sum_{p \in D_{k-1}^T} (1 - R_p) \cdot E_{j,p} < C_j\}, k \geq 1$$

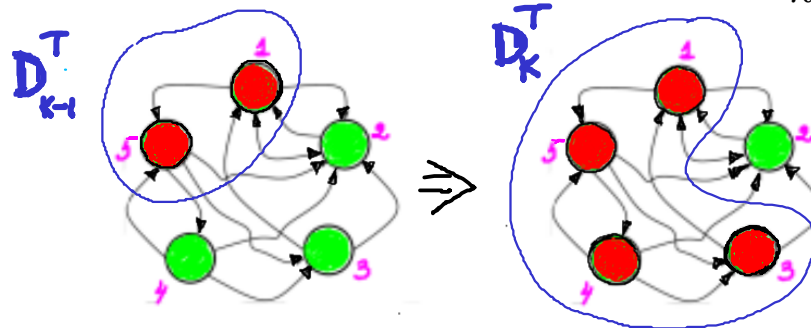
Dans un réseau financier de taille N , cette cascade finit après au plus $N - 1$ étapes.

Insolvabilité

- Banque j avec un capital $X_j(T)$ devient insolvable à cause de son exposition de contrepartie sur les établissements qui ont déjà fait défaut lors du cycle précédent (D_{k-1}^T) en raison de manque les liquidités nécessaires pour payer les flux financiers contingents:

$$X_j(T) - \sum_{p \in D_{k-1}^T} (1 - R_p) \cdot E_{j,p} < C_j$$

- $\sum_{p \in D_{k-1}^T} (1 - R_p) \cdot E_{j,p}$ l'investissement de la banque 'j' dans les banques de l'établissement (D_{k-1}^T). Il est perdu.

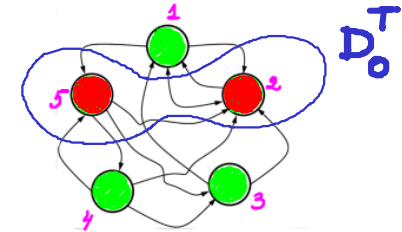


Cascade de défaut. Exemple.

D_k^T représente l'étape k , l'ensemble des institutions financières insolvable (et donc faisant défaut) suite à l'exposition de contrepartie à des banques de l'ensemble D_{k-1}^T qui viennent de faire défaut à l'étape précédente.

$D_0^T = \{i \text{ t.q. } X_i(T) < C_i, \}$

$D_0^T = \{X_2(T) < C_2, X_5(T) < C_5\} \Rightarrow D_0^T = \{2, 5\}$



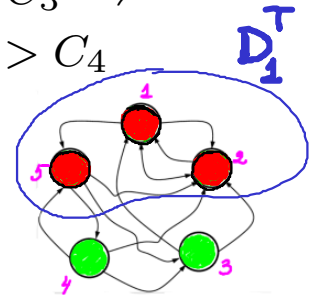
$D_1^T = \{2, 5\} \cup \{i \notin \{2, 5\}, X_i(T) - \sum_{p \in \{2, 5\}} (1 - R) \cdot E_{i,p} < C_i\}$

$X_1(T) - \sum_{p \in \{2, 5\}} (1 - R) \cdot E_{1,p} < C_1 \Rightarrow X_1(T) - (1 - R) \cdot (E_{1,2} + E_{1,5}) < C_1$

$X_3(T) - \sum_{p \in \{2, 5\}} (1 - R) \cdot E_{3,p} > C_3 \Rightarrow X_3(T) - (1 - R) \cdot (E_{3,2} + E_{3,5}) > C_3 \Rightarrow$

$X_4(T) - \sum_{p \in \{2, 5\}} (1 - R) \cdot E_{4,p} > C_4 \Rightarrow X_4(T) - (1 - R) \cdot (E_{4,2} + E_{4,5}) > C_4$

$D_1^T = \{2, 5\} \cup \{1\}$

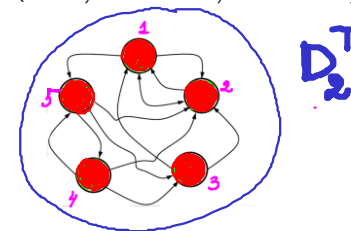


$D_2^T = \{2, 5\} \cup \{1\} \cup \{i \notin \{1, 2, 5\}, X_i(T) - \sum_{p \in \{1, 2, 5\}} (1 - R) \cdot E_{i,p} < C_i\}$

$X_3(T) - \sum_{p \in \{1, 2, 5\}} (1 - R) \cdot E_{3,p} < C_3 \Rightarrow X_3(T) - (1 - R) \cdot (E_{3,2} + E_{3,5} + E_{3,1}) < C_3$

$X_4(T) - \sum_{p \in \{1, 2, 5\}} (1 - R) \cdot E_{4,p} < C_4 \Rightarrow X_4(T) - (1 - R) \cdot (E_{4,2} + E_{4,5} + E_{4,1}) < C_4$

$D_2^T = \{1, 2, 5\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow \text{Ruine totale}$



Impact de défaut

- Pour quantifier le risque systémique et l'effet de contagion, on définit l'impact de défaut $I(T)$ à la date T du à la cascade de défaut à l'instant T ,

$$I(D_0^T) = \sum_{j \in D_q^T} (X_j(T) + \sum_{p \notin D_q^T} (1 - R_p) \cdot E_{p,j})$$

- $I(D_0^T)$ est la somme des pertes générées par la contagion du défaut des banques. à la date T .
- L'ensemble D_0^T représente des institutions financières faisant initialement défaut dans le réseau à la date T .
- q est le dernier étape de la cascade de contagion. Après l'étape q la configuration ne varie plus.
- D_q^T est l'ensemble d'institution en défaut à l'étape q .

Index du Risque Systémique

- Index du Risque Systémique

$$I_S = \mathbb{E}[I(D_0^T)]$$

- $I(D_0^T)$ est la somme des pertes générées par la contagion du défaut des banques de l'ensemble D_0^T à la date T .

$$I_S = \frac{1}{N_{mc}} \sum_{k=1}^{N_{mc}} I(D_0^{T(k)})$$

- L'ensemble $D_0^{T(k)}$ représente des institutions financières faisant initialement défaut dans le réseau à la date T pour chaque scenario k .

Value at Risk

- Depuis une vingtaine d'années, sous l'impulsion du Comité de Bâle, se développe une vision globale des risques au niveau bancaire: risque de marché, risque opérationnel, risque de crédit.
- Cette vision globale a été adoptée dès 1998, avec la **Value at Risk (VaR)**, indicateur de risque mesurant le seuil de pertes potentielles à un horizon donné et pour une probabilité donnée (typiquement 99% à horizon 10 jours). Dans ce projet, nous considérons le risque systémique.

VAR d'un Risque

- La VaR répond à l'affirmation suivante : "Nous sommes certains à la probabilité $1 - \alpha = 99\%$ que nous n'allons pas perdre plus de VAR euros sur T prochains jours"

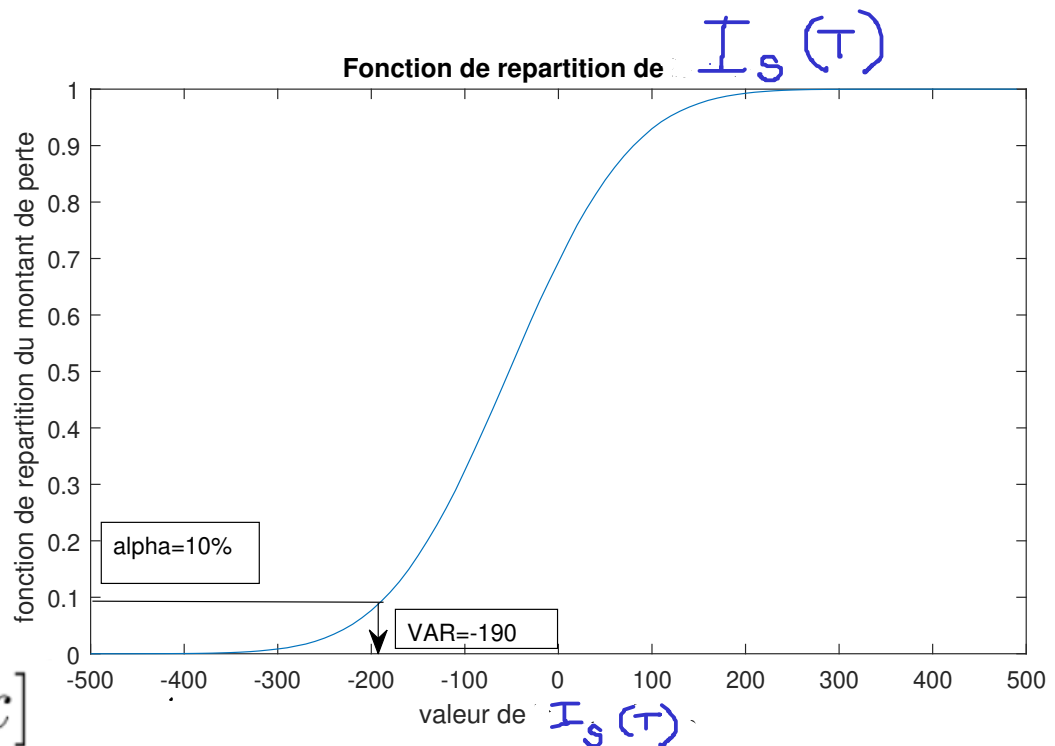
$$\mathbb{P}[I_S(T) \leq VaR] = \alpha$$

- Simulation des Impact de Risque Systemique

$$I_S = \mathbb{E} \left[\sum_{j \in D_q^T} (X_j(T) + \sum_{p \notin D_q^T} (1 - R_p) \cdot E_{p,j}) \right]$$

- Simulation de la Fonction de répartition

$$F_{I_S}(x) = \mathbb{P}[I_S(T) \leq x]$$



Capitaux indépendants.

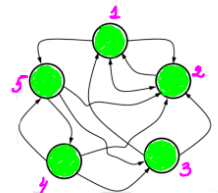
● On supposera dans un premier temps que les capitaux évoluent de manière indépendante : les mouvements brownien $(W_k)_{(k \geq 0)}$ apparaissant pour chaque institution sont mutuellement indépendantes. L'horizon T est 1 an et les dates (t_k) d'observation d'évolution du capital sont mensuelles .

● Paramètres

$$X_i(0) = \mu = 15, \sigma = 8, \lambda = 20, C_i = 10, i = 1 : 5$$

avec un réseau simple constitué de 5 institutions financières, dont les liens interbancaires pourront être donnés par la matrice

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$



Objectifs.

1. Estimation de la probabilité que le nombre de banques insolvable soit 1, 2, 3, 4 ou 5.
2. Estimation de la Value-at-Risk et de la Conditional Value-at-Risk de la distribution $I_S(T)$ pour différents seuils α aussi proches de 1 (par exemple $\alpha = 99.99\%$), ainsi que des intervalles de confiance associés aux estimateurs.
3. Estimation de la cascade d'insolvabilité la plus probable, selon le nombre de banques en défaut.
4. Identification des liaisons de contrepartie dangereuses, des scénarios critiques menant à l'effondrement du système ainsi que des configurations (raisonnables) permettant d'améliorer la sûreté du système.
5. Influence de la taille du réseau ($N = 10, 20, 50$) et des configurations dangereuses.
6. Evaluation de la distribution de l'impact de défaut $I_S(T)$ conditionnellement à l'évènement : "le réseau entier d'institutions financières s'est effondré".

Extensions.

- Contagion dynamique.

En réalité, l'insolvabilité des institutions peut avoir lieu à tout moment entre la date 0 et la date T . Il est donc nécessaire de prendre en compte ce risque de manière dynamique. Cela nous conduit à considérer des impacts de défaut dynamique $I(t_k)$, $k = 1 : n$. On définit l'impact de défaut total à la date T comme la somme de tous les impacts de défaut entre la date 0 et la date T .

$$\sum_{k=1}^N I(t_k).$$

- On reprendra les questions précédentes en intégrant le risque de contagion dynamique.

Extensions.

Modèle d'équilibre long terme. Un modèle couramment utilisé pour les simulations de risque de défaut est un modèle d'équilibre à 1 facteur idiosyncratique et 1 facteur systémique. Les capitaux de toutes les institutions ont un facteur commun $(Z_{t_k})_{k \geq 0}$ régissant l'équilibre long terme du réseau financier. Ce capital long terme est un processus gaussien de dynamique

$$Z_{t_{k+1}} = e^{-\lambda \Delta t} Z_{t_k} + \sigma_e (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})$$

où $(W_k)_{k \geq 0}$ est un mouvement Brownien indépendante. et $\lambda_e = 10, \sigma_e = 3$. Ce capital d'équilibre vient s'ajouter à chaque capital $X_i(t)$ de l'institution i . On reprendra les questions précédentes avec ce nouveau modèle.

Extensions.

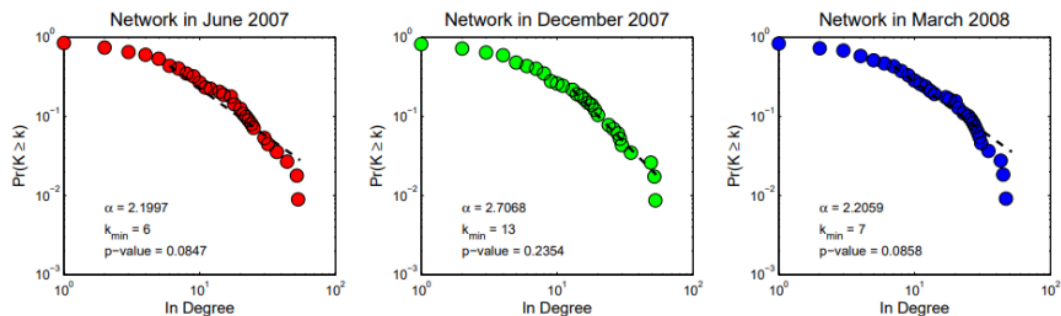


Etude des réseaux financiers.

1. Calculer les degrés d'entrée (nombre de débiteurs) K_{in} et de sortie (nombre de créanciers) K_{out} de chaque noeud et les probabilités:

$$\mathbb{P}[K_{in} = i], \quad \mathbb{P}[K_{out} = i], \quad i = 1 : N$$

Montrer que $\mathbb{P}[K_{in} = i] = \frac{C_1}{i^{\alpha_1}}$, $\mathbb{P}[K_{out} = i] = \frac{C_2}{i^{\alpha_2}}$ et trouver α_1 et α_2 .



2. Tracer

$$i \rightarrow \ln(\mathbb{P}[K_{in} \geq i])$$

$$i \rightarrow \ln(\mathbb{P}[K_{in} \geq i])$$

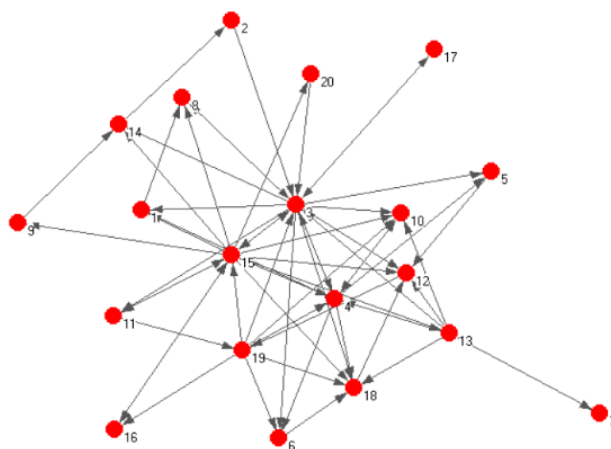
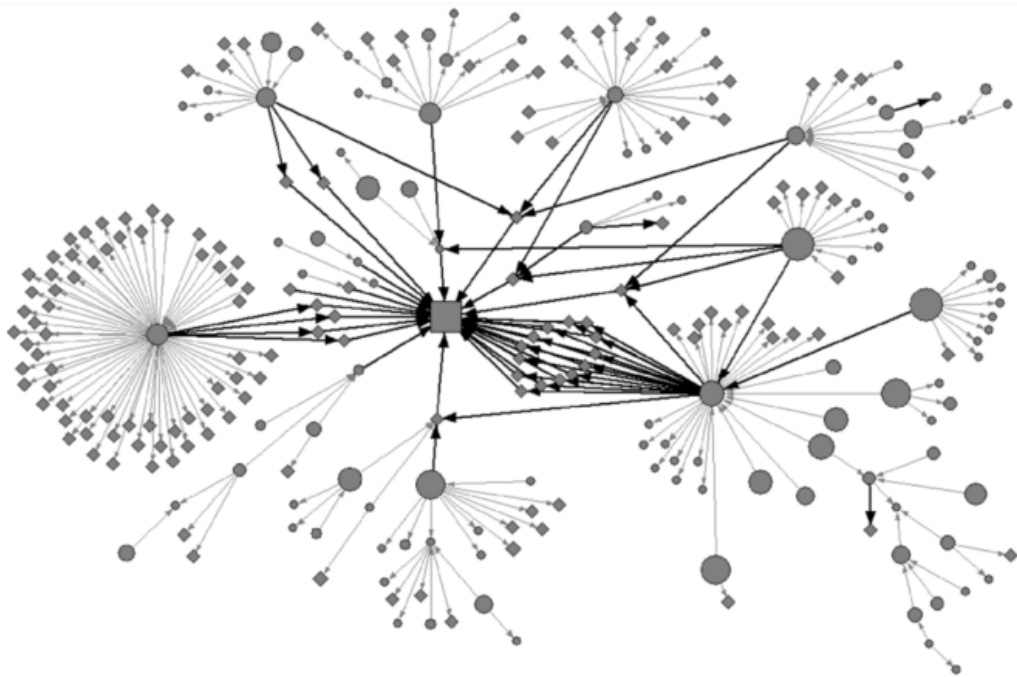
Extensions.

● Etude des réseaux financiers sur K_{in} et K_{out}

POWER-LAW DISTRIBUTIONS IN EMPIRICAL DATA

AARON CLAUSET*, COSMA ROHILLA SHALIZI†, AND M. E. J. NEWMAN‡

Abstract. Power-law distributions occur in many situations of scientific interest and have significant consequences for our understanding of natural and man-made phenomena. Unfortunately, the detection and characterization of power laws is complicated by the large fluctuations that occur in the tail of the distribution—the part of the distribution representing large but rare events—and by the difficulty of identifying the range over which power-law behavior holds. Commonly used methods for analyzing power-law data, such as least-squares fitting, can produce substantially inaccurate estimates of parameters for power-law distributions, and even in cases where such methods return accurate answers they are still unsatisfactory because they give no indication of whether the data obey a power law at all. Here we present a principled statistical framework for discerning and quantifying power-law behavior in empirical data. Our approach combines maximum-likelihood fitting methods with goodness-of-fit tests based on the Kolmogorov-Smirnov statistic and likelihood ratios. We evaluate the effectiveness of the approach with tests on synthetic data and give critical comparisons to previous approaches. We also apply the proposed methods to twenty-four real-world data sets from a range of different disciplines, each of which has been conjectured to follow a power-law distribution. In some cases we find these conjectures to be consistent with the data while in others the power law is ruled out.



Extensions.

● Etudes des articles sur l'analyse de systèmes financiers des pays.

Mistrulli, P. E. (2007). Assessing financial contagion in the interbank market: Maximum entropy versus observed interbank lending patterns. Bank of Italy Research Paper Series - Temi di Discussione 641, Bank of Italy, Economic Research Department, Rome, Italy.



Extensions.

- Etudes des articles sur l'analyse de systèmes financiers des pays.

Interbank Lending and Systemic Risk: An Empirical Analysis for Switzerland

GEORGE SHELDON and MARTIN MAURER*

Table 5.3: Interbank-Lending Matrix, Switzerland, 1987–95 (relative values)

	Cantonal	Large	Regional	Commercial	Investment	Consumer	Special	Foreign	Coop	Financial	Branches	Private	Domestic
Cantonal	0.028	0.093	0.008	0.013	0.005	0.001	0.000	0.028	0.000	0.005	0.004	0.000	0.18
Large	0.021	0.072	0.006	0.010	0.003	0.000	0.000	0.023	0.000	0.004	0.004	0.000	0.14
Regional	0.008	0.026	0.002	0.003	0.001	0.000	0.000	0.008	0.000	0.001	0.001	0.000	0.05
Commercial	0.006	0.018	0.002	0.003	0.001	0.000	0.000	0.005	0.000	0.001	0.001	0.000	0.03
Investment	0.005	0.017	0.001	0.002	0.001	0.000	0.000	0.005	0.000	0.001	0.001	0.000	0.03
Consumer	0.000	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.00
Special	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.00
Foreign	0.015	0.047	0.004	0.007	0.002	0.000	0.000	0.015	0.000	0.003	0.002	0.000	0.09
Coop	0.004	0.012	0.001	0.002	0.001	0.000	0.000	0.003	0.000	0.001	0.000	0.000	0.02
Financial	0.001	0.004	0.000	0.001	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.00
Branches	0.003	0.010	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.003	0.000	0.001	0.001	0.000	0.02
Private	0.005	0.015	0.001	0.002	0.001	0.000	0.000	0.005	0.000	0.001	0.001	0.000	0.03
Non-Banks	0.057	0.184	0.016	0.026	0.009	0.001	0.000	0.056	0.000	0.010	0.008	0.001	0.36
Domestic	0.154	0.500	0.043	0.069	0.025	0.003	0.000	0.152	0.001	0.029	0.023	0.002	1.00

Extensions.

● Etude de Scientific Reports



SUBJECT AREAS:
STATISTICAL PHYSICS,
THERMODYNAMICS AND
NONLINEAR DYNAMICS
THEORETICAL PHYSICS
MODELLING AND THEORY
APPLIED PHYSICS

DebtRank: Too Central to Fail? Financial Networks, the FED and Systemic Risk

Stefano Battiston¹, Michelangelo Puliga¹, Rahul Kaushik¹, Paolo Tasca¹ & Guido Caldarelli^{2,3,4}

¹Chair of Systems Design, ETH Zurich, Weinbergstrasse 56/58, 8092, Zurich, Switzerland, ²IMT Piazza San Ponziano 6, Lucca, Italy, ³Institute of Complex Systems CNR Udr Sapienza, Dip. Fisica, Piazzale Moro 2 00185, Rome, ⁴UMS 35a South St, Mayfair London W1K 2XF, UK.

Network models of financial systemic risk: a review

Fabio Caccioli^{1,2,3} · Paolo Barucca^{4,5} · Teruyoshi Kobayashi⁶

Received: 31 October 2017 / Accepted: 9 November 2017 / Published online: 21 November 2017
© The Author(s) 2017. This article is an open access publication

Abstract The global financial system can be represented as a large complex network in which banks, hedge funds and other financial institutions are interconnected to each other through visible and invisible financial linkages. Recently, a lot of attention has been paid to the understanding of the mechanisms that can lead to a breakdown of this network. This can happen when the existing financial links turn from being a means of risk diversification to channels for the propagation of risk across financial institutions. In this review article, we summarize recent developments in the modeling of financial systemic risk. We focus, in particular, on network approaches, such as models of default cascades due to bilateral exposures or to overlapping portfolios, and we also report on recent findings on the empirical structure of interbank networks. The current review provides a landscape of the newly arising interdisciplinary field lying at the intersection of several disciplines, such as network science, physics, engineering, economics, and ecology.

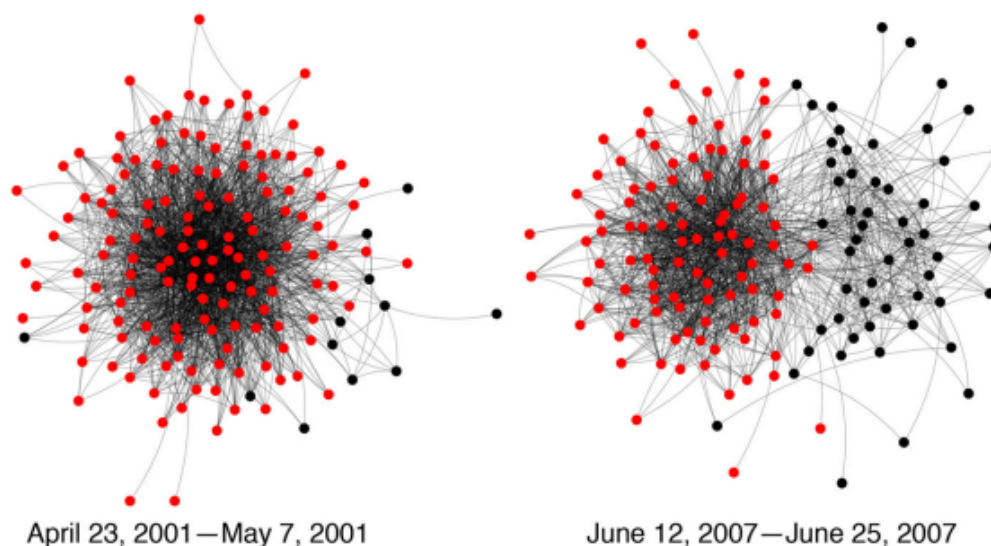


Fig. 5 Visualization of Italian interbank networks, e-MID. The networks are aggregated over 10 business days. Red and black circle denote Italian and other foreign banks, respectively. Visualization is done by python-igraph with the Kamada–Kawai algorithm [91]

Extensions.

- Vous cherchez une question intéressante à étudier dans les références de deux PhD Thésis:
- Contagion and Systemic Risk in Financial Networks. Amal Moussa. COLUMBIA UNIVERSITY.
- Modélisation mathématique de la contagion de défaut. Andreea Catalina Minca. UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE.

Extensions.

- Modèle avec des sauts

$$Z_{t_{k+1}} = Z_{t_k} + J \cdot (N_{t_{k+1}} - N_{t_k})$$

- Evolution des capitaux corrélés gouvernée par la matrice de covariance

$$Cov[X_t^i, X_t^j]$$