Escuela Politécnica Nacional

Álgebra Lineal

Jean Pierre Arenas 21/07/2021

GR1O

Examen 1

2. Considere a $\mathbb{R}^2$ con la operación suma definida de la siguiente manera

$$x \oplus y = (x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1 + 17, x_2 + y_2 + 17).$$

donde $x, y \in \mathbb{R}^2$ y el producto por un escalar definido por.

$$\alpha \odot x = \alpha \odot (x_1, x_2) = (17\alpha + \alpha x_1 - 17, 17\alpha + \alpha x_2^2 - 17)$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Con las operaciones de suma y producto definidas sobre $\mathbb{R}^2$, demuestre o refute si se satisfacen las siguientes propiedades.

1. Existencia del elemento neutro aditivo

Sea $x \in \mathbb{R}^2$ vamos a suponer que existe O_E por lo tanto

$$x \oplus O_E = x$$
$$(x_1, x_2) \oplus (a, b) = (x_1, x_2)$$
$$(x_1 + a + 17, x_2 + b + 17) = (x_1, x_2)$$
$$\begin{cases} x_1 + a + 17 = x_1 \\ x_2 + b + 17 = x_2 \end{cases}$$

$$\cancel{x_1} + a + 17 = \cancel{x_1}$$
$$a + 17 = 0$$
$$a = -17$$

$$\cancel{x_2} + b + 17 = \cancel{x_2}$$
$$b + 17 = 0$$
$$b = -17$$

Por lo tanto, existe O_E tal que.

$$O_E = (-17, -17)$$

2. Existencia del elemento inverso aditivo.

Sea $x \in \mathbb{R}$, suponemos que existe $\hat{x}$ tal que:

$$\Rightarrow x \oplus \hat{x} = 0_E$$

$$\Rightarrow (x_1, x_2) \oplus (c, d) = (-17, -17)$$

$$\Rightarrow (x_1 + c + 17, x_2 + c + 17) = (-17, -17)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + c + 17 = -17 & ① \\ x_2 + d + 17 = -17 & ② \end{cases}$$

①

$x_1 + c + 17 = -17$
$x_1 + c = -34$
$c = -34 - x_1$

②

$x_2 + d + 17 = -17$
$x_2 + d = -34$
$d = -34 - x_2$

En conclusión, existe $\hat{x}$ o $(-x)$ tal que:

$$\hat{x} = (-34 - x_1, -34 - x_2)$$

3. Distributiva del producto 1

Sea $x, y \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ vamos a demostrar:

$$\alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot x \oplus \alpha \odot y$$

$$\alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot ((x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2))$$
$$= \alpha \odot (x_1 + y_1 + 17, x_2 + y_2 + 17)$$
$$= (17\alpha + \alpha(x_1 + y_1 + 17) - 17, 17\alpha + \alpha(x_1 + y_1 + 17) - 17)$$
① $$= (34\alpha + \alpha x_1 + \alpha y_1 - 17, 34\alpha + \alpha x_2 + \alpha y_2 - 17)$$
$$= (17\alpha + \alpha x_1 + \alpha y_1 + 17\alpha - 17, 17\alpha + \alpha x_2 + \alpha y_2 + 17\alpha - 17)$$

$$\alpha \odot x \oplus \alpha \odot y = (17\alpha + \alpha x_1 - 17, 17\alpha + \alpha x_2 - 17) \oplus (17\alpha + \alpha y_1 - 17, 17\alpha + \alpha y_2 - 17)$$
$$= (34\alpha + \alpha x_1 + \alpha y_1 - 34 + 17, 34\alpha + \alpha x_2 + \alpha y_2 - 34 + 17)$$
② $$= (34\alpha + \alpha x_1 + \alpha y_1 - 17, 34\alpha + \alpha x_2 + \alpha y_2 - 17)$$

$$① = ②$$

Por lo tanto, queda demostrado que:

$$\alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot x \oplus \alpha \odot y$$

7. Asociativa del producto

Sea $x \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, vamos a demostrar que:

$$\alpha \odot (\beta \odot x) = (\alpha\beta) \odot x$$