

UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
CURSO DE GRADUAÇÃO
EM FÍSICA – LICENCIATURA A DISTÂNCIA

$$F(x) = \int_0^x f(x') dx'$$

CÁLCULO INTEGRAL

1º semestre



PROGRAD
UFSM



Ministério
da Educação



Presidente da República Federativa do Brasil

Luiz Inácio Lula da Silva

Ministério da Educação

Ministro do Estado da Educação

Fernando Haddad

Secretaria da Educação Superior

Maria Paula Dallari Bucci

Secretário da Educação a Distância

Carlos Eduardo Bielschowsky

Universidade Federal de Santa Maria

Reitor Felipe Martins Müller

Vice-Reitor Dalvan José Reinert

Chefe de Gabinete do Reitor

Maria Alcione Munhoz

Pró-Reitor de Administração

André Luis Kieling Ries

Pró-Reitor de Assuntos Estudantis

José Francisco Silva Dias

Pró-Reitor de Extensão

João Rodolpho Amaral Flôres

Pró-Reitor de Graduação

Orlando Fonseca

Pró-Reitor de Planejamento

Charles Jacques Prade

Pró-Reitor de Pós-Graduação e Pesquisa

Helio Leães Hey

Pró-Reitor de Recursos Humanos

Vania de Fátima Barros Estivalete

Diretor do CPD

Fernando Bordin da Rocha

Coordenação de Educação a Distância

Coordenador CEAD Fabio da Purificação de Bastos

Coordenador UAB Carlos Gustavo Martins Hoelzel

Coordenador de Pólos Roberto Cassol

Gestão Financeira Daniel Luís Arenhardt

Centro de Ciências Naturais e Exatas

Diretora do Centro de Ciências Naturais e Exatas Martha Bohrer Adaime

Coordenador do Curso de Física – Licenciatura a Distância João Carlos Denardin

Elaboração do Conteúdo

Professor pesquisador/conteudista

Celso Arami Marques da Silva

**Equipe Multidisciplinar de Pesquisa e
Desenvolvimento em Tecnologias da Informação
e Comunicação Aplicadas à Educação**

*Coordenadora da Equipe Multidisciplinar
Técnicas em Assuntos Educacionais*

Elena Maria Mallmann
Débora Marshall
Mariza Gorette Seeger

Produção de Recursos Educacionais

Coordenação Luiz Caldeira Brant de Tolentino Neto

Designers Gráficos Evandro Bertol
Marcelo Kunde

Ilustração Carlo Pozzobon de Moraes

Designer de Mediação Ingrid Nicola Souto

Coordenação **Atividades a Distância**

Ilse Abegg

Coordenação **Tecnologia Educacional**

Andre Zanki Cordenonsi

Giliane Bernardi

Professores Pesquisadores Bruno Augusti Mozzaquattro

Edgardo Gustavo Fernández

Leandro Moreira Crescencio

Rosiclei Aparecida Cavichioli Lauermann

Tarcila Gesteira da Silva

Suporte Juliano Rafael Andrade

Vanessa Cassenote

SUMÁRIO

Objetivo	5
Programa	5
Bibliografia	5
 UNIDADE 1	
FUNÇÕES IMPLÍCITAS E TRANSCENDENTAIS	6
1.1. A regra da cadeia e derivação implícita	6
1.2. Derivada de funções logarítmicas	8
1.3. Derivadas de funções trigonométricas	9
1.4. Derivadas de funções trigonométricas inversas.....	10
1.5. Regra de L'Hôpital	11
Exercícios propostos 1.1.....	17
 UNIDADE 2	
INTEGRAÇÃO	19
2.1. Noção Intuitiva de Integral	19
2.1.1. O método da exaustão.....	19
2.1.2. Área sob funções simples.....	22
2.2. Integral Indefinida	24
2.2.1. Propriedades das Integrais Indefinidas.....	24
2.2.1.1. Integrais por substituição	27
2.2.1.2. Integrais por substituição trigonométrica	32
2.2.2. Integrais de frações racionais	37
2.2.3. Integração por partes.....	41
2.3. Integrais definidas	44
2.3.1. Propriedades das Integrais Definidas	48
2.3.2. Substituição em integrais definidas.....	48
2.4. O Teorema Fundamental do Cálculo	51
2.5. Teorema do valor médio.....	53
2.6. Movimento Retilíneo usando integrais	55
2.6.1. Gráfico $v(t) \times t$	57
2.6.2. Queda de um corpo com resistência do ar.....	58
Notas explicativas	64
1. Notação de somatório.....	64
2. Diferencial.....	64
3. Coeficiente angular e a derivada	65
4. Integrais indefinidas e definidas.....	65
 UNIDADE 3	
APLICAÇÕES SIMPLES	67
3.1. Área entre duas curvas	67
3.2. Comprimento de uma curva	69
3.3. Trabalho de uma força não constante	74
 ANEXOS	
ANEXOS	79
Gabarito da Tarefa 2.2	79
Gabarito da Tarefa 2.3	80
Gabarito Tarefa 2.4	84

OBJETIVO

- Compreender e aplicar as técnicas do Cálculo Integral para funções reais de uma variável real, dando ênfase às suas aplicações.

Carga horária: 75 horas/aula

PROGRAMA

Unidade 1 – Funções Implícitas e Transcendentais

- 1.1 – A regra da cadeia e derivação implícita.
- 1.2 – Derivada de funções logarítmicas.
- 1.3 – Derivada de funções trigonométricas.
- 1.4 – Derivada de funções trigonométricas inversas.
- 1.4 – Regra de L'Hôpital.

Unidade 2 – Integração

- 2.1 – Noção intuitiva de integral.
- 2.2 - Integral indefinida: integrais por substituição e integração por partes.
- 2.3 – Integral definida: teorema fundamental do cálculo, teorema do valor médio e substituição em integrais definidas.
- 2.4 – Movimento retilíneo usando integrais: gráfico $v(t)$ versus t e queda de um corpo com resistência do ar.

Unidade 3 - Aplicações de Integrais

- 3.1 – Área entre duas curvas.
- 3.2 – Comprimento de curvas planas.
- 3.3 – Volumes por fatiamento.
- 3.4 – Volume usando cascas cilíndricas.

BIBLIOGRAFIA

Livro Texto: Anton, H., Bivens, I. e Davies, S., **CÁLCULO, Vol I**,
8ª Edição. Porto Alegre, Bookman, 2007.

Livros para consulta:

Boulos, P. **Cálculo Diferencial e Integral.**, vol. 1, São Paulo: Makron Books, 1999.

Guidorizzi, H. L. **Um Curso de Cálculo**, vol. 2, Rio de Janeiro: LTC, 1998.

UNIDADE 1
FUNÇÕES IMPLÍCITAS E TRANSCENDENTAIS

Nesta primeira unidade, vamos continuar o estudo das derivadas que iniciou no Curso de Limites e Derivadas. Você já viu grande parte daquilo que será tratado nesta unidade, no entanto, consideramos que a repetição servirá para fixar os conhecimentos e também auxiliará no entendimento dos conceitos aprendidos nestas últimas semanas.

Vamos tratar de derivadas de funções implícitas (funções em que não é possível isolar uma variável em função da outra, exemplo: $x^2 + xy + 2y^2 = 5$, e funções transcendentais (estas são funções em que as variáveis estão sujeitas a operações de expo- nenciação, logaritmo, trigonométrica, entre outras, por exemplo: $f(x) = 2x + \sin(x)$).

Como você pode ver, esta Unidade será de fácil compreensão, já que há dois meses estamos estudando derivadas.

1.1. A REGRA DA CADEIA E DERIVAÇÃO IMPLÍCITA

Considere uma função composta, ou seja, uma função de uma função, simbolizada por $gof(x)$ ou $g(f(x))$. A pergunta é: como podemos obter a derivada da função composta $gof(x)$ em relação à x ? Uma forma de fazermos isso é obter a função composta $g(f(x))$ como uma função de x , ou seja, transformando-a em uma $g(x)$. No entanto, esse procedimento, além de desnecessário, pode ser um tanto trabalhoso. Aqui vamos aprender uma regra, conhecida como regra da cadeia, que estabelece uma forma de obter a derivada da função composta em termos das funções elementares f e g .

Para compreender a regra da cadeia, basta acompanhar o esquema abaixo (observe o rigor da linguagem):

Seja $y = g(u)$ e $u = f(x)$, considerando que existem as derivadas dy/du e du/dx , então a função composta $y = gof(x) = g(f(x))$ tem a derivada dada por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} \text{ ou } y'(x) = y'(u)u'(x).$$

(Estas duas últimas fórmulas representam a mesma operação, mudando somente a notação.

É comum a utilização de y' (ípsilon linha) para designar a derivada da função y em relação à variável x . Em alguns casos, é mais conveniente deixar explícitas as variáveis e representar a derivada escrevendo diretamente a razão incremental dy/dx , como feito acima.

EXERCÍCIO RESOLVIDO 1

Sendo $y = u^4$ e $u = 4 - x^2$, use a regra da cadeia para calcular a derivada da função y em relação à x , dy/dx .

Solução

Poderíamos simplesmente substituir u na função y e obter $y = f(x)$ e fazendo a derivada como já aprendemos na outra disciplina de Cálculo. Aqui, no entanto, vamos usar a técnica explana- da acima, que, por sinal, fica mais simples. Vamos lá:

$$\frac{dy}{du} = 4u^3 \text{ e } \frac{du}{dx} = -2x$$

assim:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = 4u^3(-2x) = -8xu^3$$

substituindo a função u , obtemos:

$$\frac{dy}{dx} = -8x(4 - x^2)^3.$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO 2

Neste exercício, vamos utilizar a regra da cadeia de outra maneira. Dada uma função “não tão simples”, a operação de derivação é facilitada se a transformarmos em duas funções simples.

Encontre a derivada da função:

$$y = \sqrt[3]{3x^3 + 1}$$

Solução

Primeiro vamos transformá-la em uma função composta na seguin- te forma:

$$y = \sqrt[3]{u} \quad \text{e} \quad u = 3x^3 + 1$$

O cálculo das derivadas fica tão simples que vamos deixar para você encontrar a solução:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{\sqrt[3]{(3x^3 + 1)^2}}$$

1.2. DERIVADA DE FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

Qual é a derivada da função $y = \ln(x^2)$? E da função $y = \log_b(x^2)$? É isso que vamos aprender nesta seção.

Vamos iniciar obtendo a derivada do logaritmo natural de x , $y(x) = \ln(x)$, partindo da definição de derivada:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln(x)}{\Delta x}.\end{aligned}$$

Por questão de praticidade, vamos, em alguns momentos, usar h no lugar de Δx , alias isso é comum em muitos livros de cálculo.

Usando as propriedades dos logaritmos, a equação acima pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)\end{aligned}$$

Usando uma variável auxiliar, $v = h/x$, e verificando que, se h tende a zero, o mesmo ocorre com v , assim:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{xv} \ln(1+v) \\ &= \frac{1}{x} \lim_{v \rightarrow 0} \ln(1+v)^{1/v}\end{aligned}$$

Como a função logaritmo é contínua para valores de v maiores que zero, o limite do logaritmo é o logaritmo do limite, assim:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \ln\left(\lim_{v \rightarrow 0} (1+v)^{1/v}\right)$$

O limite entre parênteses, como também você já deve ter visto ([VER NOTA AO LADO](#)), é:

$$\lim_{v \rightarrow 0} (1+v)^{1/v} = e,$$

Como $\ln(e) = 1$, pois e é a base do logaritmo neperiano, então, finalmente, temos que:

$$\frac{d}{dx} (\ln x) = \frac{1}{x}.$$

CONTEÚDO RELACIONADO

Nota: No final desta Unidade, há uma seção dedicada ao cálculo deste e de outros limites. Se mesmo assim você não estiver convencido do valor do limite, faça o gráfico da função e verifique que, em torno de zero, a função tem o valor 2,71828 que é a base dos logaritmos neperianos (e).

Se no lugar da função $y = \ln(x)$ tivéssemos o logaritmo de uma função genérica de x , $y = \ln(f(x))$, a derivada, neste caso, seria:

$$\frac{d}{dx} (\ln f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)} ;$$

ou seja, é a derivada da função sobre a função. Seria capaz de demonstrar a derivada acima?

Vamos agora obter a derivada de uma função logarítmica com base b , ou seja, $y = \log_b x$. Como sabemos $y = \log_b x$ significa que $x = b^y$. Tomando o logaritmo natural dessa equação, vem:

$$\ln x = \ln b^y = y \ln b \text{ ou } y = \ln x / \ln b.$$

Observe que foi recuperada a função $\ln(x)$, pois $\ln(b)$ é uma constante. Daqui em diante, vale a regra obtida no item anterior para as funções do logaritmo neperiano.

1.3. DERIVADAS DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Abaixo, você encontrará uma tabela com as derivadas das funções trigonométricas. Agora vamos demonstrar o item (a) partindo da definição de derivada.

Sendo $y = \sin(x)$, vem:

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)\cos(\Delta x) + \sin(\Delta x)\cos(x) - \sin(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

Trabalhando um pouco na equação acima, facilmente chega-se a:

$$y' = \cos(x) \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}}_A + \sin(x) \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x}}_B$$

Os limites A e B são respectivamente 1 (um) e 0 (zero) (VER NOTA AO LADO).

Assim, chegamos na função que é a derivada de seno de x :

$$\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x).$$



CONTEÚDO RELACIONADO

Nota: Esses valores serão obtidos na seção 1.5, mas você pode fazer o gráfico das funções e observar o valor da função em torno de zero.

$y = \sin(x)$	$y' = \cos(x)$
$y = \cos(x)$	$y' = -\sin(x)$
$y = \tan(x)$	$y' = \sec^2(x)$
$y = \cot(x)$	$y' = -\operatorname{cosec}^2(x)$
$y = \sec(x)$	$y' = \sec(x)\tan(x)$
$y = \operatorname{cosec}(x)$	$y' = -\operatorname{cosec}(x)\cot(x)$

Tabela 1: Derivadas das funções trigonométricas

EXERCÍCIOS RESOLVIDO 3

Calcule a derivada da função: $y = \sin(3x^2)$.

Solução

Usando a regra da cadeia, toma-se:

$$y = \sin(u) \quad \text{e} \quad u = 3x^2$$

As derivadas são:

$$\frac{dy}{du} = \cos(u) \quad \text{e} \quad \frac{du}{dx} = 6x$$

$$\text{Então: } y' = 6x \cos(3x^2)$$

1.4. DERIVADAS DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Novamente, vamos iniciar com uma pequena tabela de derivadas, não se preocupe em decorá-la, o uso continuado vai facilitar a sua memorização.

$y = \arcsen(x)$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arccos(x)$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arctg(x)$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
$y = \arccot(x)$	$y' = \frac{-1}{1+x^2}$
$y = \arcsec(x)$	$y' = \frac{1}{ x \sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1$
$y = \arccosec(x)$	$y' = \frac{-1}{ x \sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1$

Tabela 2: Integrais de funções trigonométricas inversas

Vamos mostrar, como antes, o item (a): $y = \arcsen(x)$ (lê-se: y é o arco cujo seno é x). Primeiro vamos nos dar conta de que a fun-

ção y tem o domínio e imagem nos intervalos $[-1,1]$ e $[-\pi/2, \pi/2]$, respectivamente.

Vamos escrever a função inversa da função y , que é $x = \operatorname{sen}(y)$. veja nota abaixo. Então, vamos derivar x em relação à y :

$$\frac{dx}{dy} = \cos(y)$$

A relação entre os diferenciais dx e dy , pode ser invertida, assim:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(y)}}$$

Como $\operatorname{sen}(x) = x$, vem:

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arc sen}(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

ATENÇÃO

Nota: Algumas vezes você vai encontrar a seguinte notação:
 $x = f^{-1}(y)$, que significa função inversa de y – não tem nada a ver com o inverso da função, $1/f(y)$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO 4

Calcule a derivada da função: $y = \operatorname{arc sen}(2x^3 - 1)$

Solução

Vamos aproveitar para usar a regra da cadeia e escrever:

$$y = \operatorname{arc sen}(u) \quad \text{onde} \quad u = 2x^3 - 1$$

$$y'(x) = y'(u)u'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot 6x^2$$

Então:

$$y'(x) = \frac{6x^2}{\sqrt{1 - (2x^3 - 1)^2}} = 3\sqrt{\frac{x}{1 - x^3}}$$

1.5. REGRA DE L'HÔPITAL

A regra de L'Hôpital apresenta um método geral para obter o limite de funções que têm como resultado indeterminações, $0/0$, ∞/∞ e outras. Esta regra estabelece uma forma para calcular limites com o uso de derivadas.

Vamos apresentar uma prova, não muito rigorosa, do caso em que o limite de uma fração entre duas funções $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$, quando x tende para o valor a , tem como resultado a indeterminação $\frac{0}{0}$.

Inicialmente, vamos verificar que, dada a função no ponto x , $f(x)$, podemos obter a função no ponto $x+h$, $f(x+h)$, veja a figura abaixo. Podemos escrever:

$$f(x+h) = f(x) + d$$

d pode ser aproximado por $h \operatorname{tg}\theta$, para o caso em que h for muito pequeno (ou em “matematiquês” tender a zero). Como você deve lembrar-se da disciplina de Limites e Derivadas, a interpretação geométrica da derivada em um dado ponto é a inclinação da reta tangente a curva nesse ponto. Em outras palavras, a tangente do ângulo θ é a derivada da função no ponto x . Assim:

$$f(x+h) = f(x) + h \operatorname{tg}\theta = f(x) + hf'(x)$$

O que queremos é calcular o limite de uma relação entre duas funções. Usando a equação acima podemos escrever:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f(x) + hf'(x)}{g(x) + hg'(x)}$$

Tomando o limite para x tendendo ao valor a , vem:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \approx \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(a) + hf'(a)}{g(a) + hg'(a)} \quad (1)$$

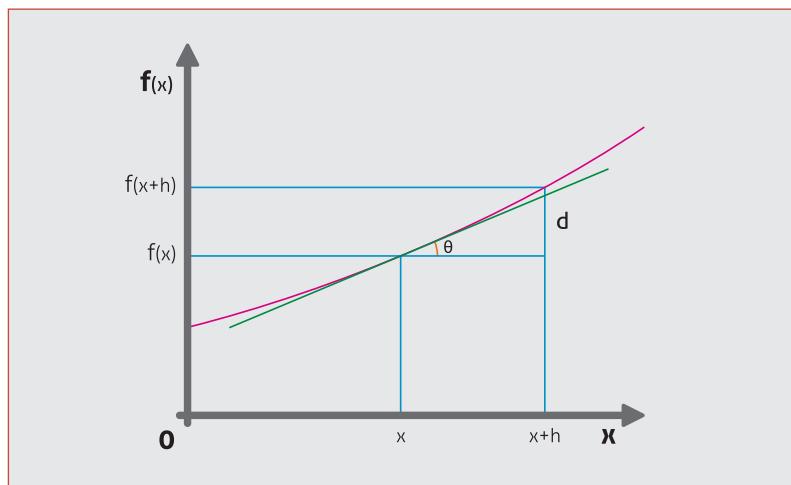


Figura 1.1

A condição que nos interessa é aquela em que o limite da relação entre $f(x)$ e $g(x)$ produza uma indeterminação, ou seja, quando x tende para a , ambas as funções são nulas:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a) = 0.$$

Nessa condição, temos uma indeterminação tipo 0/0:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$$

Com essa condição:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \approx \lim_{x \rightarrow a} \frac{0 + hf'(a)}{0 + hg'(a)} \approx \lim_{x \rightarrow a} \frac{hf'(a)}{hg'(a)}$$

Podemos simplificar h, assim:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \approx \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Mostramos que o limite da fração entre as funções é igual ao limite da fração entre as derivadas das funções, no caso em que ambas as funções forem nulas no ponto em questão.

Uma receita para calcular limites usando derivadas pode ser encontrada no nosso Livro Texto (não deixe de lê-lo, é um livro agradável, simples e vai auxiliá-lo na compreensão do que estamos aprendendo nesta unidade).

Passo 1 – Verifique que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ é uma forma indeterminada 0/0;

Passo 2 – Derive separadamente as funções f(x) e g(x);

Passo 3 – Calcule o limite de $\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Sendo este limite finito, e ou $-\infty$, então este é igual ao limite de $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Vamos agora a uma série de exercícios resolvidos, que poderão ser encontrados no Livro Texto, como exemplo resolvido ou exercício propostos, que ilustrarão a aplicação da Regra de L'Hôpital. Esta regra é válida para vários outros tipos de indeterminações, tais como: ∞/∞ , $0\cdot\infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , ∞^0 e 1^∞ . Lembre que esta forma de calcular limites (usando derivadas) somente é válida para os casos em que há uma indeterminação, não vale, desculpem a insistência, como uma regra geral do cálculo de limites.

EXERCÍCIO RESOLVIDO 5

Obtenha o limite da função:

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

para o caso de x tender a zero. Essa é uma função que você vai encontrar muitas vezes durante o curso de Física.

Solução

Como pode ser facilmente verificado, é o caso da indeterminação 0/0. Então, vamos usar a Regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx} \sin(x)}{\frac{d}{dx} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1},$$

como $\cos(0)$ é igual a 1, não há mais a indeterminação e podemos escrever que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO 6

Calcular o limite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x}$$

Solução

Este é o caso da indeterminação ∞/∞ . A aplicação da Regra nos leva a:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x},$$

Que continua com a mesma indeterminação, o que fazer neste caso? Nada mais do que continuar o processo até que a indeterminação seja levantada (levantada é o termo correto, mas podemos dizer, sem maiores problemas, “até a indeterminação ser eliminada”). Para isto acontecer, basta aplicar n vezes a Regra e teremos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \cdots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n!}{e^x} = 0$$

O resultado indica que o crescimento da função exponencial para x muito grande, é maior que x^n , para qualquer n inteiro e positivo.

EXERCÍCIO RESOLVIDO 7

Encontre o limite da função:

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1},$$

para x muito pequeno.

Solução

Como x muito pequeno significa x tender a zero, vê-se que esta é uma indeterminação do tipo $\infty - \infty$. Para resolvemos este tipo de problema, vamos colocar a função sob o mesmo denominador, com isso caímos (não se assuste esse é o termo usado) em uma indeterminação 0/0, daí em diante tudo fica fácil outra vez.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)}$$

Aplicando L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x}$$

que continua como 0/0, então, basta continuar com a aplicação da regra:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x + xe^x + e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO 8

Dada a função:

$$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x,$$

obter y para x muito grande.

Solução

Esta é uma indeterminação do tipo 1^∞ , pois x muito grande significa x tender para o infinito. A solução deste problema é um pouco mais elaborada. Vamos, inicialmente, tomar o logaritmo neperiano (\ln) de ambos os lados e, na seqüência, calcular o limite.

$$\ln(y) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

Calculando o limite do logaritmo da função para x tendendo ao infinito, vemos que a indeterminação ficou do tipo $\infty \cdot 0$. Para resolver este tipo de indeterminação vamos reescrever a função como uma fração:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

Agora a indeterminação é do tipo 0/0. Assim:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-1/x^2}{1+\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1$$

Mostramos que $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln y$ tende a 1, como já vimos para funções continuas é valido afirmar que o limite do logaritmo é o logaritmo do limite, assim:

$$\ln \lim_{x \rightarrow \infty} y = 1$$

Pela definição de logaritmo temos que o logaritmo da base é um, então o limite de y é a base dos logaritmos neperianos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Aproveite para mostrar que o limite desta função, quando x tende a zero, é 1.

EXERCÍCIO RESOLVIDO 9

Obtenha o limite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{sen}(\pi/x)$$

Solução

Agora é o caso de indeterminação $\infty \cdot 0$. Novamente é simples, pois queremos obter $0/0$ ou ∞/∞ . Então:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{sen}(\pi/x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen}(\pi/x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(\pi/x) \frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}}.$$

Portanto:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{sen}(\pi/x) = 1 .$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO 10

Por último uma indeterminação do tipo ∞^0 . Calcule o limite da função:

$$y = x^{1/x}$$

para x muito grande.

Solução

Vamos tomar o logaritmo de ambos os lados e considerar que o limite do logaritmo é o logaritmo do limite, assim:

$$\ln(y) = \ln(x^{1/x}) = \frac{1}{x} \ln(x)$$

Agora vamos tomar o limite:

$$\ln(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln(x)$$

Como o limite da direita é uma indeterminação do tipo ∞/∞ , aplica-se a regra de L'Hôpital:

$$\ln(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Finalmente, como o logaritmo de y é nulo, implica que y é igual a 1, temos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x} = 1 .$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS 1.1

Para facilitar, use uma tabela de derivadas. Sugiro a tabela encontrada no “site” <http://www.ime.unicamp.br/~msantos/tabc-integrals.pdf>, simples, mas perfeitamente adequada ao nosso caso.

Obtenha as derivadas pela regra da cadeia das seguintes funções:

OBTENHA AS DERIVADAS PELA REGRA DA CADEIA DAS SEGUINTE FUNÇÕES	RESPOSTA
1. $y = \sqrt[11]{x^n + x^2}$	$\frac{1}{11} \frac{nx^{n-1}+2x}{\sqrt[11]{(x^n+2)^{10}}}$
2. $f(x) = (3x^2+1)^3$	$18x(3x^2+1)^2$
3. $y = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$	$\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$
4. $f(x) = \ln(x^2+3)$	$\frac{2x}{x^2+3}$
5. $f(x) = \operatorname{sen}(x^3 - 1)$	$3x^2 \cos(x^3 - 1)$
6. $f(x) = \operatorname{arcsec}(e^x)$	$\frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}$
7. $y = x^2 e^{3x}$	$xe^{3x}(2+3x)$
8. $y = \operatorname{sen}(\sqrt{1+\cos x})$	$-\frac{\operatorname{sen}(x)\cos\sqrt{1+\cos(x)}}{2\sqrt{1+\cos(x)}}$
9. $f(x) = \operatorname{tg}^2(x)$	$2 \operatorname{tg}x \sec 2x$
ENCONTRE OS LIMITES DAS FUNÇÕES	
10. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1 - \cos(x-1)}{\frac{x^2}{2} - x} \right)$	1
11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x}$	$+\infty$
12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x}$	0
13. $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$	0
14. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^n} \right)$	∞
15. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$	1
16. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x} \right)^x$	e^{-3}

Tarefa 1.1

Utilize **a regra da cadeia** para calcular as derivadas propostas.

1. Obtenha a derivada da função y em relação à x , dy/dx , sendo:

$$y = u^6 + 1 \quad \text{e} \quad u = \sqrt[3]{x+4}$$

Calcule a derivada da função:

2. $y = \frac{e^{4x+1}}{\ln(x)}$

3. $y = \cos^3(x)$

4. $y = \operatorname{tg}(\sqrt{x}) \cdot e^{5x}$

5. $y = \frac{\operatorname{tg}(x) - 1}{\sec(x)}$

6. $y = \operatorname{arctg}(x^3 + 2)$.

7. $y = \operatorname{arctg}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

Tarefa 1.2

Utilize **a regra de L'Hôpital** para calcular os limites propostos.

1. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{x^n - a}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{senh}(x)}{\operatorname{sen}(x)}$

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{\ln x} - \frac{1}{\ln x} \right)$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^x$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{a/x}$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{10^x - e^x}{x}$

UNIDADE 2
INTEGRAÇÃO

2.1. NOÇÃO INTUITIVA DE INTEGRAL

Na outra disciplina de matemática, estudamos a operação de derivação, que também é conhecido como Cálculo Diferencial. Lá, vimos que a derivada de uma função $y(x)$, simbolizada por $y'(x)$, é dada pelo limite da razão incremental:

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

Aqui vamos estudar outra operação matemática: a **integração**. Primeiramente, vamos dar uma noção intuitiva desse novo conceito para, posteriormente, evoluirmos para definições mais elaboradas.

2.1.1. O MÉTODO DA EXAUSTÃO

Vamos iniciar com a bem conhecida equação do círculo de raio 1 (um) e tomar o intervalo entre 0 e 1, ou seja, no primeiro quadrante cujo domínio é $[0,1]$.

$$y(x) = \sqrt{1 - x^2} .$$

Pergunta-se: como podemos calcular a área sob a curva? Para responder essa questão, vamos usar o chamado método da exaustão, que, como o nome está dizendo, é um tanto cansativo/demorado.

Vamos iniciar supondo que a área pode ser aproximada pelo quadrado mostrado na figura abaixo.

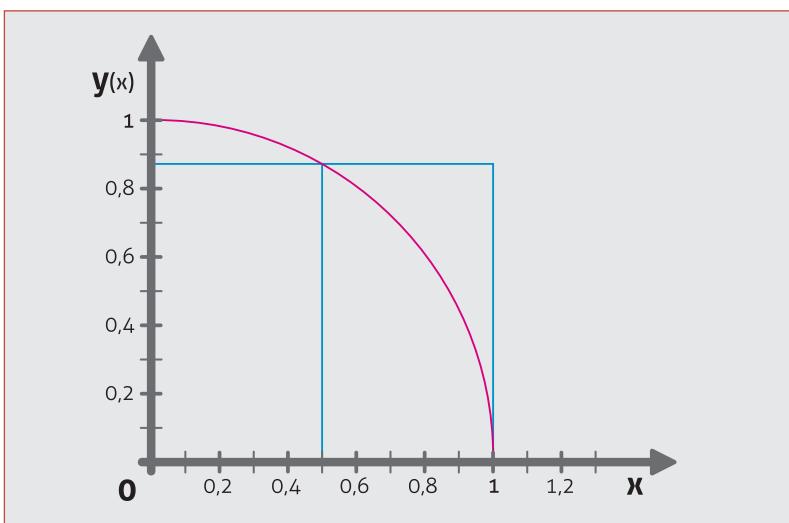


Figura 2.1 – aproximação da área por um quadrado

Esse quadrado tem a base $\Delta x = 1$ e altura dada pelo valor da função calculada na posição correspondente à metade da base. Assim:

$$AREA1 = y(1/2)\Delta x .$$

como $y(1/2) = \sqrt{1 - 1/4} = 0,8660$ e $\Delta x = 1$, vem:

$$AREA1 = 0,8660 .$$

Como já sabemos, o resultado dessa área é $\pi/4$, pois é um quarto da área de um círculo com raio igual à unidade. Com quatro casas após a vírgula, a área deve ser 0,7854. Como se vê, a área está com valor a maior, o que pode ser verificado pela observação da Figura 2.1.

Vamos melhorar um pouco dividindo a base em dois, $\Delta x = 1/2$, como mostrado na figura 2.2.

$$AREA2 = (y(1/4) + y(3/4))\Delta x,$$

como $\Delta x = 1/2$, temos:

$$AREA2 = \left(\sqrt{1 - \frac{1}{16}} + \sqrt{1 - \frac{9}{16}} \right) 0,5$$

após álgebra elementar temos o resultado:

$$AREA2 = 0,8148$$

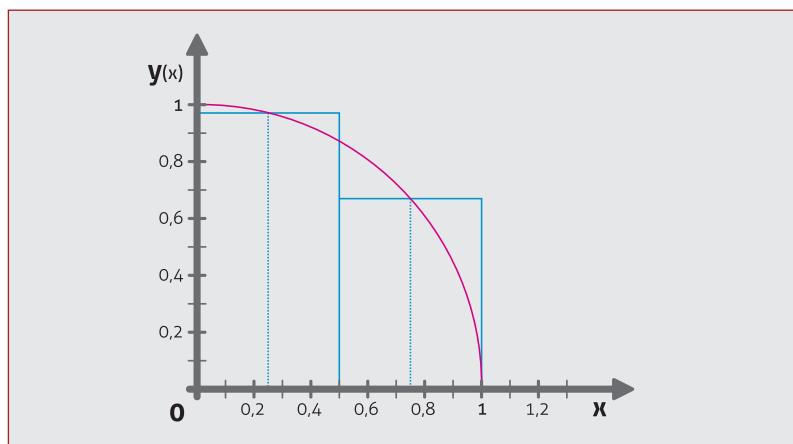


Figura 2.2 – aproximação da área por dois quadrados.

Continuando o nosso método, na figura 2.3, tomamos Δx igual a $1/4$. Como antes:

$$AREA4 = (y(1/8) + y(3/8) + y(5/8) + y(7/8))\Delta x,$$

O resultado é 0,7960. Você pode ver que estamos, lentamente, nos aproximando do valor “correto”, que é, como já foi dito, 0,7854 (“correto” entre aspas, pois o valor correto é um número real cujo valor é $\delta/4$). Podemos inferir que quanto maior for o número de retângulos mais próximos estaremos do valor exato.

Partindo deste ponto de vista, vamos generalizar a equação acima para um número genérico de quadrados. A fórmula acima pode ser escrita como:

$$AREA4 = (y(x_1) + y(x_2) + y(x_3) + y(x_4)) \Delta x$$

Essa soma de quatro termos pode ser escrita na notação de somatório (ver Nota explicativa no final da Unidade) como:

$$AREA4 = \sum_{i=1}^4 y(x_i) \Delta x$$

Para um número genérico (n) de retângulos, o somatório fica:

$$AREAn = \sum_{i=1}^n y(x_i) \Delta x$$

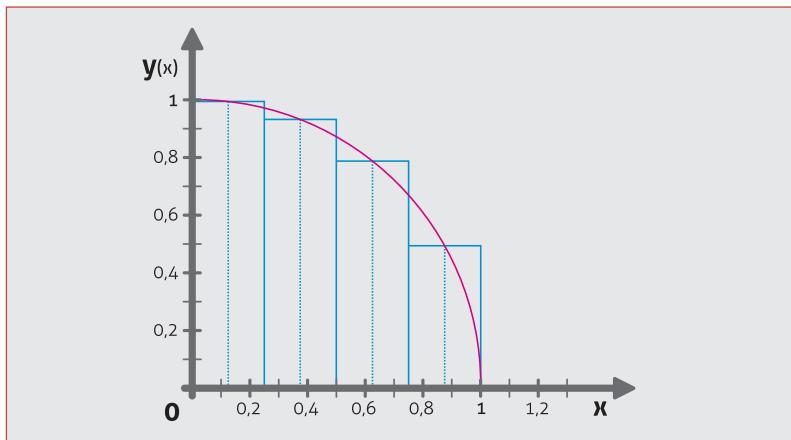


Figura 2.3 – aproximação da área por quatro quadrados.

Como já vimos, quanto maior for o número de retângulos, mais próximo estaremos do valor $\delta/4$. Qual seria o número de retângulos que daria valor correto (agora sem aspas)? Um número muito grande, ou seja, quando o número de retângulos tende ao infinito. Dessa forma, a equação acima pode ser escrita como:

$$AREA = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} y(x_i) \Delta x$$

É uma soma de infinitos termos infinitamente pequenos. Essa soma é simbolizada pela letra S espichada (\int), assim:

$$AREA = \int y(x) dx$$

lê-se “AREA é igual a integral da função $y(x)$ ”; dx (diferencial de x) é o símbolo usado para Δx quando este tende a zero.

Para sermos mais rigorosos e considerando que a área abaixo da curva, representada pela função $y(x) = \sqrt{1 - x^2}$, é calculada entre os pontos 0 e 1, a notação da integral deve conter essa informação. Assim, essa integral é denominada de integral definida no intervalo $[0, 1]$. A notação tem a seguinte forma:

$$AREA = \int_0^1 y(x)dx$$

Repetimos que a variável AREA é um número que representa uma área e não é uma função de x . AREA é função dos limites de integração, daqui a pouco veremos que esse fato nos permitirá definir uma nova função.

Acabamos de ver que a operação de integração (ou se você quiser: a integral) representa geometricamente a área abaixo de uma curva. Vamos, então, partir dessa idéia, e calcular algumas áreas sob curvas representadas por funções simples. Com isso, vamos dar um passo adiante e tornar a idéia de integral um pouco mais geral (mais abstrata), em que a integral de $f(x)$ é outra função de x , a primitiva $F(x)$. Se quiser ter, e eu aconselho, outra forma de ver o método da exaustão, leia o início da Capítulo 6 do Livro Texto.

2.1.2. ÁREA SOB FUNÇÕES SIMPLES

Vamos calcular agora a área sob uma função muito simples, a função constante, $y(x) = C$, representada na figura 2.4.

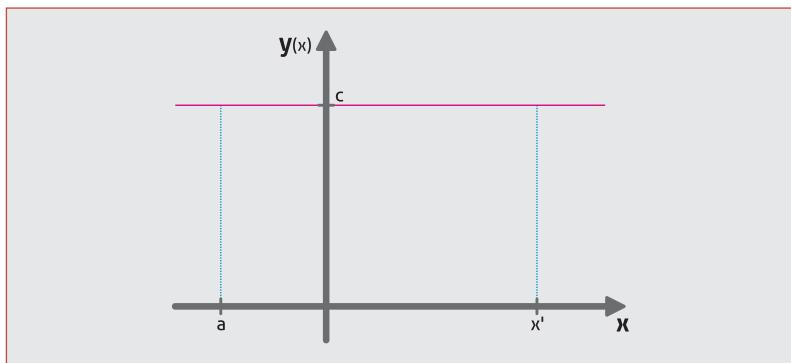


Figura 2.4 – gráfico da função constante $y(x) = C$.

A área do retângulo de altura C e base $x' + a$ é:

$$F_1 = (x' + a)C = Cx' + Ca.$$

Aqui, vê-se claramente que F_1 é proporcional a x' , portanto, podemos dizer que F_1 é uma função de x' , ou seja:

$$F_1(x') = Cx' + Ca.$$

Vamos, agora, calcular a área sob a função linear $y(x) = ax + b$, mostrada na figura 5, abaixo.

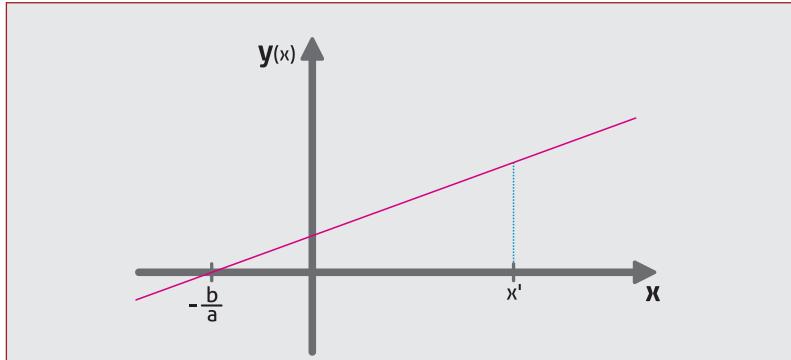


Figura 2.5 – gráfico da função linear $f(x) = ax + b$.

A área do triângulo é dada pela metade do produto entre a base e a altura. Como a base é o comprimento da reta entre $-b/a$ e x' , temos:

$$F_2 = \frac{1}{2} \left(x' - \left(-\frac{b}{a} \right) \right) y(x') = \frac{1}{2} \left(x' + \frac{b}{a} \right) (ax' + b)$$

colocando a dependência da variável de forma explícita:

$$F_2(x') = \frac{1}{2} ax'^2 + bx' + \frac{b^2}{a}$$

Agora, observe a tabela abaixo na qual mostramos na primeira coluna a função constante, $f(x') = C$, e a linear, $f(x') = ax' + b$; na segunda coluna, estão as funções que representam as áreas $F_1(x')$ e $F_2(x')$ (como x' é, neste caso, uma variável muda, podemos trocar x' por x sem perda de nenhuma informação). A terceira coluna é deixada em branco para que você calcule as derivadas de $F(x)$.

Complete a terceira coluna da tabela abaixo.

$f(x)$	$F(x)$	$\frac{dF(x)}{dx}$
C	$Cx + Ca$	
$ax + b$	$\frac{1}{2}ax^2 + bx + b^2/a$	

Podemos ver que a operação de derivação das funções $F(x)$ nos levou às funções $f(x)$. Em outras palavras, e sendo um tanto repetitivo, a operação derivada recuperou a função inicial.

Para fixar bem esse conceito: dada uma função $f(x)$ que tem como integral $F(x)$, a derivada de $F(x)$ é a função original $f(x)$.

Podemos, então, afirmar que a operação de integração é inversa a operação derivação. Adiante, vamos demonstrar este teorema que é o conhecido “Teorema Fundamental do Cálculo”. Aqui o vimos como um caso particular das funções constante e linear.

2.2. INTEGRAL INDEFINIDA

No último parágrafo do item anterior, vimos que a integral de uma função $f(x)$ pode ser outra função $F(x)$:

$$F(x) = \int f(x)dx.$$

Ou seja, a derivada de $F(x)$ recupera a $f(x)$, por isso essa operação de integração, integral indefinida, também é chamada de **antiderivada**. Na equação acima, está faltando algo, visto que não há diferença entre a derivada de $F(x)$ e de $F(x) + C$, em que C é uma constante (a derivada de uma constante é zero). Portanto, a integral acima fica completa se acrescentarmos uma constante. Dessa maneira:

$$F(x) = \int f(x)dx + C$$

A antiderivada da função $f(x)$, ou integral indefinida, é uma operação que nos fornece a função primitiva $F(x)$ a menos de uma constante. Diz-se, então, que essa operação nos fornece uma família de funções, como muito bem explicado na página 360 (Curvas Integrais) do Livro Texto.

Até aqui, vimos o conceito de integral indefinida, ou de antiderivada (essa denominação é pouco, quase nunca, usada, mas nos auxilia muito no cálculo das integrais, como veremos a seguir). Daqui em diante, vamos aprender a calcular as integrais. Como sempre, iniciando pelas mais simples e incorporando outras técnicas no decorrer da Disciplina.

Antes de calcular integrais, vamos ver algumas de suas propriedades.

2.2.1. PROPRIEDADES DAS INTEGRAIS INDEFINIDAS

Seja uma função $f(x)$ e uma constante c :

$$1 - \int cf(x)dx = c \int f(x)dx = cF(x) + C$$

$$\begin{aligned} 2 - \int [f(x) + g(x)]dx &= \int f(x)dx + \int g(x)dx \\ &= F(x) + G(x) + C \end{aligned}$$

Em palavras simples: a primeira propriedade diz que “a integral de uma constante multiplicada por uma função é igual a constante multiplicada pela integral da função”; ou ainda: a constante pode ser tirada do sinal de integração. O inverso também vale: podemos passar uma constante para dentro do sinal de integral. A segunda propriedade diz: “a integral de uma soma é a soma das integrais”.

Vamos agora, finalmente, resolver algumas integrais. Iniciando com a pergunta: qual a integral de uma constante?

$$\int Adx = ?$$

usando as propriedades das integrais podemos escrever:

$$\int Adx = A \int dx = A \int 1dx$$

Lembrando que a operação de integração é a antiderivada, perguntamos: qual a função cuja derivada é 1? ... Pense um pouco antes de ler a próxima frase. Se a função for igual a x ($f(x) = x$), a derivada de $f(x)$ é 1, então:

$$\int Adx = Ax + C.$$

Assim, a integral de uma constante é igual a constante multiplicada pela variável x mais a constante.

Seria capaz de dizer qual é a integral de x ? É simples. Basta responder qual a função cuja derivada tem como resultado x . Se pensar um pouco verá que é $\frac{1}{2}x^2$. Então:

$$\int xdx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

Na mesma linha de funções simples, qual a integral de zero? É fácil. Qual a derivada de uma constante? Zero. Então, a integral de zero é uma constante.

E se não for uma função simples da qual se pode inferir a integral? Não se assuste, para isso existem as Tabelas de Integrais. Lá há muitas integrais, mas não todas, por isso devemos aprender algumas técnicas que nos auxiliarão no processo de obter as antiderivadas.

Como sempre, primeiro as simples, aquelas que você resolve usando diretamente uma tabela de integrais. Onde encontrar uma? Eu achei quatro digitando no “Google” “tabela de integrais”. A primeira, no meu caso, é muito boa e doravante será referida simplesmente como Tabela. O URL (esse é o nome que se dá a um endereço na internet, “Uniform Resource Locator”, Localizador Universal de Recursos) é: <http://www.profwillian.com/calculo/Integrals.htm>.

EXERCÍCIO RESOLVIDO 1

Calcular a integral: $F(x) = \int x^{n-1} dx$.

Solução:

Pergunta-se: qual a função que tem como derivada x^{n-1} ? Evidentemente, é x^n , a menos de uma constante é claro. Assim:

$$F(x) = \frac{1}{n}x^n + C$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO 2

Calcular a integral: $F(x) = \int \left(3tg(x) - \frac{4}{x} \right) dx$.

Solução:

Vamos utilizar a propriedade das integrais que estabelece que a integral de uma soma (ou diferença) é a soma (ou diferença) das integrais, assim:

$$F(x) = \int 3tg(x) dx - \int \frac{4}{x} dx = 3 \int tg(x) dx - 4 \int \frac{dx}{x}$$

Verificando na Tabela, podemos ver que estão listadas nos números 12 e 3, assim:

$$F(x) = 3\ln|\sec(x)| - 4\ln|x| + C.$$

Poderíamos parar por aqui, mas, usando as propriedades dos logaritmos, a resposta final é:

$$F(x) = \ln\left(\frac{|\sec(x)|^3}{x^4}\right) + C$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO 3

Calcular a integral: $F(x) = \int \sin(x/2)\cos(x/2) dx$.

Solução

O mais próximo que encontramos na Tabela é a fórmula 70. Se substituirmos, na dita fórmula, o primeiro termo diverge (é uma divisão por zero). Então, o jeito é lembrar a relação trigonométrica para $\sin(a + b)$ (se não lembrar poderá ir ao URL http://www.mspc.eng.br/matm/trg110.shtml#rel_som_dif_ang, onde há uma boa tabela de relações trigonométricas). Tomando $a=b$, vem que:

$$\sin(x/2)\cos(x/2) = \frac{1}{2}\sin x.$$

Verificando novamente a Tabela, vamos encontrar a integral de seno de x , então a integral toma a forma:

$$F(x) = \frac{1}{2} \int \sin(x) dx = -\frac{1}{2} \cos(x) + C$$

Este exercício, muito simples, nos mostrou que uma Tabela de Integrais não resolve tudo.

EXERCÍCIO RESOLVIDO 4

Calcular a integral: $F(x) = \int \frac{\sec(x)}{\cos(x)} dx$.

Solução

Em uma tabela de relações trigonométricas (veja outra tabela, mais simples, em um “site” que tem outras informações sobre a disciplina de matemática: (<http://www.ficharionline.com/ExibeConteudo.php5?idconteudo=5850>), temos que $\sec(x) = 1/\cos(x)$, portanto, a função a ser integrada pode ser escrita como:

$$F(x) = \int \sec^2(x) dx$$

Esta integral é tabelada, fórmula 8. Então:

$$F(x) = \tan(x) + C$$

2.2.1. INTEGRAIS POR SUBSTITUIÇÃO

As Tabelas de Integrais mostram funções do tipo: $\sin(x)$, e^x , x^3 , e muitas outras no mesmo estilo. Como faremos para integrar a função $\sin(3x)$? A técnica de integrar essas e outras funções é o que vamos aprender nesta seção.

A técnica de integração por substituição de variáveis tem o objetivo, naturalmente, de tornar a função mais simples para o cálculo da integral. Como a integral indefinida é a antiderivada, e aprendemos a regra da cadeia que se aplica para os casos de uma função de função, aqui faremos o processo inverso. Vejamos: dada uma função $F(u)$ e $u=g(x)$, aplicando-se a operação derivada, e usando a regra da cadeia, vem:

$$\frac{dF(u)}{dx} = \frac{dF(u)}{du} \frac{du}{dx}$$

Como $u=g(x)$, podemos, usando uma notação resumida ($F'(u)$ e $g'(x)$), escrever:

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))g'(x)$$

Agora, podemos integrar ambos os lados:

$$\int \frac{d}{dx}F(g(x))dx = \int F'(g(x))g'(x)dx$$

o termo a esquerda é a integral de uma derivada, que são operações inversas, então:

$$F(g(x)) + C = \int F'(g(x))g'(x)dx.$$

Como $F'(g(x))=f(g(x))$, vem:

$$F(g(x)) + C = \int f(g(x))g'(x)dx \quad (2)$$

Voltando a variável u , e considerando que:

$$g'(x) = \frac{du}{dx} \quad (3)$$

temos que o diferencial de u (du) (ver Nota no final da Unidade), é dado por:

$$du = g'(x)dx$$

Por fim, a integral toma a forma:

$$F(u) + C = \int f(u)du \quad (4)$$

Comparando as equações (1), (2) e (3), vemos que precisamos substituir a função, no caso $g(x)$, por uma variável (u) de forma que $g'(x)dx$ seja igual a du .

Antes dos exercícios resolvidos, vamos repetir a **RECEITA** para uma boa aplicação da substituição de variáveis para a solução de integrais. Esta pode ser encontrada no Livro Texto, página 366. Insisto em dizer que a leitura do livro, de linguagem acessível e leitura agradável, é muito importante para a fixação dos conhecimentos.

APLICAÇÃO PRÁTICA

Receita

1. Tente encontrar no integrando uma função $u=g(x)$ (normalmente como argumento de uma raiz, de um seno, de uma exponencial ...) que unido com $g'(x)$ produza uma função somente da nova variável u ;
2. Feita a integral, substitua a variável u por x na função $F(u)$, obtendo assim a integral desejada $F(x)$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO 5

Calcule a integral: $\int \sin(2x)dx$

Solução

Na Tabela, encontramos a integral de $\sin(x)$, então a substituição mais evidente é:

$$u = 2x \text{ e o diferencial de } u \text{ é: } du = 2dx \text{ então } dx = du/2$$

Substituindo, na integral, vem:

$$\int \sin(2x)dx = \int \sin(u) \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int \sin(u)du = \frac{-1}{2}\cos(u) + C$$

Agora, se substituirmos a nova variável, u , pela antiga, x , obtemos:

$$F(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) + C$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO 6

Agora, uma integral não tão simples: $\int x\sin(2x^2)dx$

Solução

Vamos tomar $u = 2x^2$, que tem como diferencial: $du = 4xdx$. Olhando para a integral, observamos que a expressão $x dx$ é proporcional a du , a menos de uma constante, assim:

$$\int x\sin(2x^2)dx = \int \sin(u) \frac{du}{4} = \frac{1}{4} \int \sin(u)du = \frac{-1}{4}\cos(u) + C$$

Substituindo a variável u , vem:

$$F(x) = -\frac{1}{4}\cos(2x^2) + C$$

Agora, vamos fazer alguns exercícios em que a substituição não é tão evidente.

EXERCÍCIO RESOLVIDO 7

Encontre a função $F(x) = \int \sqrt[3]{e^x}dx$

Solução

Neste caso, é suficiente escrever a função $\sqrt[3]{e^x}$ como $e^{x/3}$ e temos um caso extremamente simples. Substituindo-se $u = x/3$, consequentemente: $du = dx/3$. Substituindo-se na função $F(x)$, vem:

$$\int \sqrt[3]{e^x}dx = \int e^{x/3}dx = \int e^u 3du = 3 \int e^u du = 3e^u + C$$

Portanto:

$$F(x) = 3e^{x/3} + C \text{ ou } = 3\sqrt[3]{e^x} + C$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO 8

Calcular a integral da função $f(x) = (x - 1)\sqrt{x + 1}$ por substituição de variáveis.

Solução

Vamos pelo óbvio: $u = x + 1$ e $du = dx$. Como na função há um x , temos: $x = u - 1$. Substituindo na função, vem:

$$F(u) = \int (u - 2)\sqrt{u} du.$$

Como se vê, pouca coisa mudou, mas, se escrevermos $\sqrt{u} = u^{1/2}$, tudo fica mais simples. Vejamos:

$$F(u) = \int (u - 2)u^{1/2} du = \int (u^{3/2} - 2u^{1/2}) du$$

Aqui é suficiente usar as propriedades das integrais e a regra de integração de potência ($\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$) (fórmula 2 da Tabela).

$$F(u) = \int u^{3/2} du - 2 \int u^{1/2} du = \frac{1}{\frac{3}{2}+1}u^{\frac{3}{2}+1} + \frac{2}{\frac{1}{2}+1}u^{\frac{1}{2}+1} + C$$

ou

$$F(u) = \frac{2}{5}u^{5/2} + \frac{4}{3}u^{3/2} + C = \frac{2}{5}u^2u^{1/2} + \frac{4}{3}uu^{1/2} + C$$

Fatorando, vem:

$$F(u) = 2uu^{1/2} \left(\frac{u}{5} + \frac{2}{3} \right) + C$$

Substituindo u , após álgebra, chega-se facilmente a:

$$F(x) = \frac{2}{15}(3x^2 - 4x - 7)\sqrt{x+1} + C$$

Tente, agora, resolver o mesmo exercício com a seguinte substituição: $x + 1 = u^2$. Com isso verás que a substituição, muitas vezes, não é única.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS 2.1

Use o método da substituição de variáveis para resolver as integrais abaixo.

	SUGESTÃO	RESPOSTA
1. $\int (x^2 + 1)^{20} \cdot 2x dx$	$u = x^2 + 1$	$\frac{(x^2 + 1)^{21}}{21} + C$
2. $\int \sin(x+5) dx$	$u = x+5$	$-\cos(x+5) + C$
3. $\int (x-1)^{33} dx$	$u = x-1$	$\frac{(x-1)^{44}}{44} + C$
4. $\int \cos 3x dx$	$u = 3x$	$\frac{1}{3} \sin 3x + C$
5. $\int x(x^2 + 1)^3 dx$	$u = x^2 + 1$	$\frac{(x^2 + 1)^4}{8} + C$
6. $\int \frac{dx}{1-x}$	$u = 1-x$	$-\ln 1-x $
7. $\int \sin^3 x \cos x dx$	$u = \sin x$	$\frac{\sin^4 x}{4} + C$
8. $\int \frac{dx}{1+5x^2}$	$u = \sqrt{5}x$	$\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}(\sqrt{5}x) + C$
9. $\int e^{-6x} dx$	$u = -6x$	$\frac{-1}{6} e^{-6x}$
10. $\int \tan x dx$	$u = \cos(x)$	$-\ln(\cos(x))$
11. $\int \frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{y}} dy$		
12. $\int \cos 4\theta \sqrt{2 - \sin 4\theta} d\theta$		$-\frac{1}{6} (2 - \sin 4\theta)^{3/2} + C$
13. $\int x \sqrt{x-100} dx$		
14. $\int (2x^2 + 2x - 3)^{10} (2x+1) dx$		
15. $\int \frac{x dx}{\sqrt[5]{x^2 - 1}}$		
16. $\int \frac{2 \sec^2 \theta}{a + b \tan \theta} d\theta$		
17. $\int \frac{\ln x}{x[1+(\ln x)^2]} dx$		$\frac{1}{4} (1 + \ln x^2 - \ln(1 + \ln x^2)) + C$
18. $\int \frac{\ln 2x}{x \ln 4x} dx$		$\frac{1}{4} (\ln 4x - \ln 2 \ln(\ln 4x)) + C$
19. $\int 4^{2-3x} dx$		

TAREFA 2.1

$$1. \int (\sqrt{x} + x^2) dx \quad 2. \int \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$$

Resolva por substituição de variáveis

$$3. \int \cos(ax)dx \quad 4. \int xe^{x^2}dx$$

$$5. \int \frac{\ln x}{2x}dx \quad 6. \int \frac{5dx}{2x+1}$$

$$7. \int \sin^2 x \cos x dx \quad 8. \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$$

$$9. \int \frac{2xdx}{\sqrt{x^2+3}} \quad 10. \int \frac{\ln^2 x}{x} dx$$

$$11. \int \frac{dx}{4-x^2} \quad 12. \int \frac{xdx}{\sqrt{4-x^4}}$$

2.2.2. INTEGRAIS POR SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA

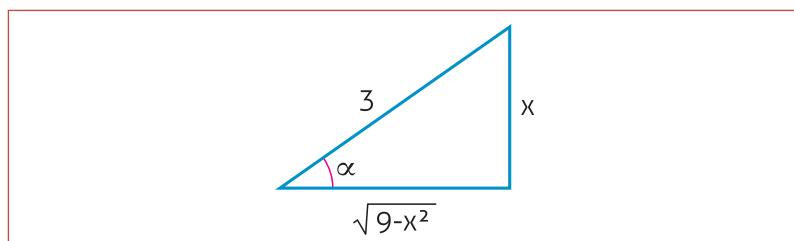
Um tipo especial de substituição de variável é a, como já diz o título, a substituição da variável de integração x por uma função trigonométrica, seno, tangente ou secante. Abaixo há uma tabela com as expressões do integrando e as substituições indicadas para cada caso

EXPRESSÃO	SUBSTITUIÇÃO APROPRIADA
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \cdot \operatorname{sen}\theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \cdot \operatorname{tg}\theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \cdot \sec\theta$

Caso 1

Integrais com expressões do tipo $a^2 - x^2$ a substituição adequada é: $x = a \operatorname{sen}(\alpha)$.

Como o seno é a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa, o triângulo que relaciona o ângulo α , e os lados x e a (em todos os casos tomamos $a=3$) é:



Vamos calcular a integral simples: $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

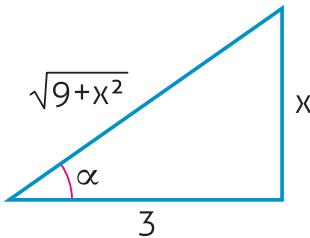
A substituição é: $x = 3\operatorname{sen}\alpha$, pois a definição de seno de um ângulo é a relação entre o cateto oposto e a hipotenusa ($\operatorname{sen}\alpha = x/a$). O diferencial de x é: $dx = 3\operatorname{cos}\alpha d\alpha$. Fazendo as substituições:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} &= \int \frac{3\operatorname{cos}\alpha d\alpha}{\sqrt{9-9\operatorname{sen}^2\alpha}} = \int \frac{3\operatorname{cos}\alpha d\alpha}{\sqrt{9\operatorname{cos}^2\alpha}} \\ &= \int d\alpha = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{3}\right) + C \end{aligned}$$

Caso 2

Integrais com expressões do tipo $a^2 + x^2$ a substituição ideal é: $x = atg(\alpha)$. Agora vamos resolver novamente uma integral simples:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$$



Do triângulo acima, se vê que $x = 3tg(\alpha)$, $dx = 3\sec^2\alpha d\alpha$.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}} &= \int \frac{3\sec^2\alpha d\alpha}{\sqrt{9+9\tg^2\alpha}} = \int \frac{3\sec^2\alpha d\alpha}{\sqrt{9\sec^2\alpha}} \\ &= \int \sec(\alpha) d\alpha \end{aligned}$$

Na Tabela, a fórmula 14 mostra a integral de secante:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}} = \ln |\operatorname{seca} + \operatorname{tg}\alpha| + C$$

Pelas definições de secante e tangente, obtemos:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}} = \ln \left| \frac{\sqrt{9+x^2}}{3} + \frac{x}{3} \right| + C$$

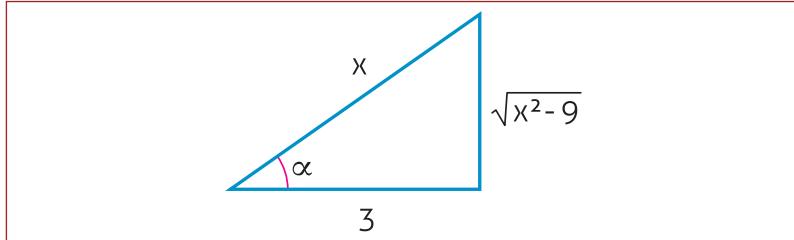
Usando as propriedades dos logaritmos, vem:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}} = \ln \left| \sqrt{9+x^2} + x \right| + C.$$

Caso 3

Em integrais com expressões do tipo $x^2 - a^2$, a substituição adequada é: $x = a \sec(\alpha)$.

Como o secante é a razão entre a hipotenusa e o cateto adjacente, o triângulo que relaciona o ângulo α , e os lados x e a é (não esqueça, $x=3$):



Como $x = 3 \sec(\alpha)$, $dx = 3 \sec(\alpha) \tan(\alpha) d\alpha$

EXERCÍCIO RESOLVIDO 9

Agora vamos resolver a integral $\int \frac{dx}{x^2 - 9}$

Solução

Fazendo as substituições propostas acima, $x = 3 \sec(\alpha)$, chegamos a:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 9} = \int \frac{3 \sec(\alpha) \tan(\alpha) d\alpha}{9 \sec^2(\alpha) - 9} = \int \frac{3 \sec(\alpha) \tan(\alpha) d\alpha}{9 \tan^2(\alpha)}$$

Que simplificado tem como resultado:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 9} = \frac{1}{3} \int \frac{\sec(\alpha) d\alpha}{\tan(\alpha)}$$

As propriedades trigonométricas nos permitem escrever:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 9} = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\sin(\alpha)} = \frac{1}{3} \int \csc(\alpha) d\alpha$$

A fórmula 15 nos da a integral de cossecante de α :

$$\int \frac{dx}{x^2 - 9} = \frac{1}{3} \ln(\csc(\alpha) - \cot(\alpha)) + C$$

Substituindo a cossencante e cotangente, vem:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 - 9} &= \frac{1}{3} \ln \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}} - \frac{3}{\sqrt{x^2 - 9}} \right) + C \\ &= \frac{1}{3} \ln \left(\frac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 9}} \right) + C \end{aligned}$$

Finalmente o resultado:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 9} = \frac{1}{3} \ln \left(\sqrt{\frac{x-3}{x+3}} \right) + C = \frac{1}{6} \ln \left(\frac{x-3}{x+3} \right) + C$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO 10

Obtenha a integral da função $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$

Solução

Embora a integral possa ser encontrada na Tabela, vamos fazer o cálculo usando a substituição trigonométrica. Inicialmente, vamos fatorar a constante R da equação:

$$f(x) = R \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}$$

Agora vamos fazer um pouco diferente do sugerido acima, somente para você ampliar suas opções na solução de integrais. Da figura abaixo, vemos que $\cos(\theta) = x/R$, assim podemos substituir $x/R = \cos(\theta)$, cujo diferencial é: $dx = -R\sin(\theta)d\theta$. A integral fica:

$$F(x) = \int R \sqrt{1 - \cos^2(\theta)} (-R\sin(\theta)) d\theta$$

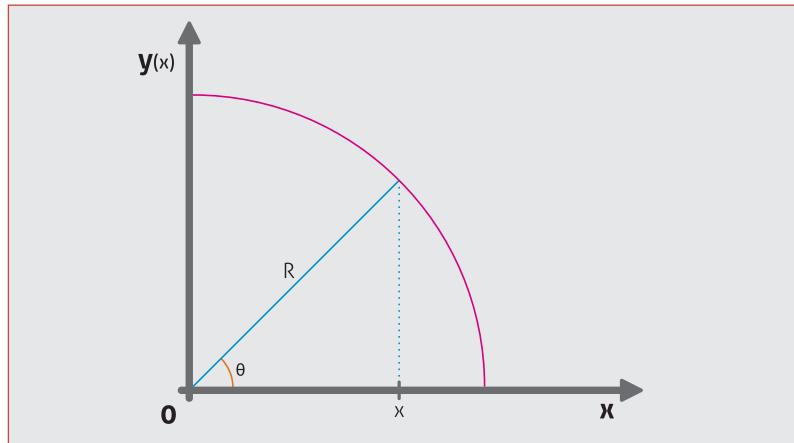


Figura 2.6

Considerando que $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$, vem:

$$F(x) = -R^2 \int \sin^2(\theta) d\theta$$

O que precisamos, portanto, é integrar $\sin^2 \theta$. Embora encontrado na tabela, vamos fazer esta integral somente para treinar mais um pouco.

Das relações trigonométricas temos que: $\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$
portanto a integral fica:

$$F(x) = -R^2 \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) d\theta = \frac{R^2}{2} \int (\cos 2\theta - 1) d\theta$$

Estas integrais já foram feitas nos exercícios anteriores, portanto:

$$F(x) = \frac{R^2}{2} \left(\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta - \theta \right) + C$$

Novamente das relações trigonométricas; $\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$
então:

$$F(x) = \frac{R^2}{2} (\operatorname{sen}\theta\cos\theta - \theta) + C$$

Podemos escrever $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$, assim:

$$F(x) = \frac{R^2}{2} \left(\sqrt{1 - \cos^2\theta} \cos\theta - \theta \right) + C$$

Substituindo-se $\cos\theta = x/R$ na equação acima, obtemos,
após um pouco de álgebra, é claro:

$$F(x) = \frac{x}{2} \sqrt{R^2 - x^2} - \frac{R^2}{2} \arccos\left(\frac{x}{R}\right) + C$$

Pode conferir na Tabela, fórmula 26, há alguma diferença?

EXERCÍCIOS PROPOSTOS 2.2

Resolva as integrais pelo método da substituição trigonométrica.

$$1. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - 9}}$$

$$2. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9 - x^2}}$$

$$3. \int \frac{x^2 dx}{x^2 + 9}$$

2.2.2. INTEGRAIS DE FRAÇÕES RACIONAIS

Nestas seção vamos tratar de integrais do tipo $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx$, em que $f(x)$ e $g(x)$ são polinômios em x ($g(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + hx^2 + ix + j$). Aqui, vamos apresentar frações em que o denominador é de ordem 2, mas a técnica vale para polinômio de qualquer grau.

Se o grau do polinômio do numerador for menor que o do denominador, a fração é denominada de fração racional própria. Já, se o referido grau for igual ou superior, dizemos que é uma fração imprópria.

Primeiro vamos tratar das frações impróprias. Como o grau do polinômio é igual ou maior que o do denominador, devemos dividir os termos da fração e obter uma soma onde um dos termos é uma fração própria. Veja o seguinte exemplo:

Dada a integral:

$$\int \frac{(x^3 + 2)dx}{x^2 - x - 2}$$

Qual o procedimento para efetuar a integração?

Como se trata de uma função imprópria, vamos proceder a divisão (que será deixada para você efetuá-la) e obter o resultado abaixo:

$$\frac{(x^3 + 2)dx}{x^2 - x - 2} = x + 1 + \frac{3x + 4}{x^2 - x - 2} .$$

A integral dos dois primeiros termos é elementar, restando a fazer a integração do terceiro termo, que é uma fração própria. Então vamos nos concentrar apenas nas frações próprias, pois, como mostrado, as frações impróprias se reduzem a frações próprias após a divisão apropriada.

Integrar frações próprias é o que vamos aprender nesta pequena lista de exercícios. A receita passa, inicialmente, por “limpar” o denominador, ou seja, deixar a potência de maior grau multiplicada pela unidade. O exemplo vai explicar melhor. Dado o denominador:

$$g(x) = 3x^2 + 2x + 6$$

Deve-se colocar em evidência o número 3 para deixar o x^2 sozinho, assim:

$$g(x) = 3 \left(x^2 + \frac{2}{3}x + 2 \right)$$

Feito esse passo, quando necessário, é claro, vamos às técnicas de integração. Se o denominador tiver raízes reais o problema é simples, pois o denominador pode ser expresso como o produto de dois binômios, por exemplo:

$$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$$

Sendo isso possível, a fração racional pode ser transformada em uma soma de frações simples, como mostrado abaixo.

Dada a integral:

$$\int \frac{3x - 4}{x^2 - x - 2} dx$$

Como o denominador tem raízes 2 e -1, podemos escrever:

$$\begin{aligned}\frac{3x - 4}{x^2 - x - 2} &= \frac{3x - 4}{(x - 2)(x + 1)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 1} \\ &= \frac{A(x + 1) + b(x - 2)}{(x - 2)(x + 1)} \\ &= \frac{(A + B)x + A - 2B}{(x - 2)(x + 1)}\end{aligned}$$

Comparando a equação final com a inicial, vemos que haverá igualdade se:

$$A + B = 3 \quad \text{e} \quad A - 2B = -4$$

Que resulta para $A = 2/3$ e $B = 7/3$. Então:

$$\frac{3x - 4}{x^2 - x - 2} = \frac{2}{3} \frac{1}{x - 2} + \frac{7}{3} \frac{1}{x + 1}$$

Transformamos a integral da fração em uma soma de integrais simples:

$$\begin{aligned}\int \frac{3x - 4}{x^2 - x - 2} dx &= \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x - 2} + \frac{7}{3} \int \frac{dx}{x + 1} \\ &= \frac{2}{3} \ln(x - 2) + \frac{7}{3} \ln(x + 1) + C\end{aligned}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO 11

Vamos, agora, fazer outro exemplo similar ao feito acima, que é calcular a integral:

$$\int \frac{-4}{x^2 - x - 2} dx$$

Solução

Aplicando o mesmo procedimento já feito, encontramos para A e B os valores $-4/3$ e $4/3$, respectivamente. Assim:

$$\begin{aligned}\int \frac{-4}{x^2 - x - 2} dx &= -\frac{4}{3} \int \frac{dx}{x - 2} + \frac{4}{3} \int \frac{dx}{x + 1} \\ &= -\frac{4}{3} \ln(x - 2) + \frac{4}{3} \ln(x + 1) + C\end{aligned}$$

Que pode ser escrito como:

$$\int \frac{-4}{x^2 - x - 2} dx = \frac{4}{3} \ln \frac{x+1}{x-2} + C$$

A técnica acima vale para os casos em que o polinômio do denominador tem raízes reais. Há outra técnica que pode ser aplicada tanto nos casos em que há raízes reais como naqueles em que este não for o caso. Essa técnica utiliza o artifício de completar quadrados. Vamos tomar o caso da segunda integral feita nesta lista para mostrá-la. O denominador é $x^2 - x - 2$ que pode ser escrito na forma $(x - 1/2)^2 - 9/4$. Isso é completar quadrados, portanto nada misterioso.

EXERCÍCIO RESOLVIDO 12

Vamos agora à integral:

$$\int \frac{-4}{x^2 - x - 2} dx = -4 \int \frac{dx}{(x - \frac{1}{2}) - \frac{9}{4}}$$

Solução

A fração pode ser escrita como

$$\frac{-4}{x^2 - x - 2} = \frac{-4}{(x - \frac{1}{2}) - \frac{9}{4}}$$

Então podemos escrever a integral acima como:

$$\int \frac{-4}{x^2 - x - 2} dx = -4 \int \frac{dx}{(x - \frac{1}{2}) - \frac{9}{4}}$$

E essa integral está na Tabela, fórmula 20, sendo $a=3/2$, assim:

$$\int \frac{-4}{x^2 - x - 2} dx = -4 \frac{1}{2\frac{3}{2}} \ln \frac{x - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{x - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = -\frac{4}{3} \ln \frac{x-2}{x+1} + C$$

Que, usando as propriedades dos logaritmos, pode ser escrita como:

$$\int \frac{-4}{x^2 - x - 2} dx = \frac{4}{3} \ln \frac{x+1}{x-2} + C$$

Vamos apresentar outro exemplo em que se utiliza a técnica de completar quadrados. Para tal, vamos calcular a integral abaixo:

$$F_2(x) = \int \frac{x+4}{2x^2 - 2x - 12}$$

Em primeiro lugar: colocar em evidência o número 2:

$$F_2(x) = \frac{1}{2} \int \frac{x+4}{x^2 - x - 6}$$

Antes de tudo, vamos dar uma olhada para essa integral. Se no numerador tivéssemos $2x-1$, que é a derivada do denominador, então seria um simples logaritmo. Podemos, então, multiplicar e dividir por dois e somar e diminuir 5, como o feito a seguir:

$$\begin{aligned} F_2(x) &= \frac{1}{2} \int \frac{\frac{2(x+4)}{2}}{x^2 - x - 6} = \frac{1}{4} \int \frac{2x + 8}{x^2 - x - 6} \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{2x + 8 - 1 + 1}{x^2 - x - 6} = \frac{1}{4} \int \frac{2x - 1 + 9}{x^2 - x - 6} \end{aligned}$$

Esta integral pode ser separada em duas integrais:

$$F_2(x) = \underbrace{\frac{1}{4} \int \frac{2x - 1}{x^2 - x - 6} dx}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{4} \int \frac{9}{x^2 - x - 6} dx}_{I_2}$$

A integral I_1 é:

$$I_1 = \frac{1}{4} \ln(x^2 - x - 6)$$

A integral I_2 , bem essa não tem jeito, devemos completar os quadrados no denominador, cujo resultado é:

$$x^2 - x - 6 = x^2 - x - 6 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$$

Com isso a segunda integral fica:

$$I_2 = \frac{1}{4} \int \frac{9}{x^2 - x - 6} dx = \frac{9}{4} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}}$$

Essa integral é tabelada na fórmula 20:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{9}{4} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}} = \frac{9}{4} \frac{1}{2\frac{5}{2}} \ln \frac{x - 1/2 - 5/2}{x - 1/2 + 5/2} \\ I_2 &= \frac{9}{20} \ln \frac{x - 3}{x + 2} + C \end{aligned}$$

ou seja:

$$F_2 = \frac{1}{4} \ln(x^2 - x - 6) + \frac{9}{20} \ln \frac{x - 3}{x + 2} + C$$

Finalmente:

$$F_2 = \frac{1}{4} \left(\ln(x - 3)(x + 2) + \frac{9}{5} \ln \frac{x - 3}{x + 2} \right) + C$$

Que após transformações simples, chega-se a:

$$F_2 = \frac{1}{10} (7 \ln(x - 3) - 2 \ln(x + 2)) + C .$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS 2.3

1. $\int \frac{dx}{2x^2 + 6x + 4}$

2. $\int \frac{(x^3 + 3)dx}{x^2 - 3x - 4}$

3. $\int \frac{dx}{x^2 - 3x + 4}$

TAREFA 2.2

1. $\int \frac{dx}{(9 - x^2)^{3/2}}$

2. $\int \frac{dx}{x(9 - x^2)}$

3. $\int \frac{dx}{x(9 + x^2)}$

4. $\int \frac{(x^3 + x^2 - 20x + 1)dx}{x^2 + x - 20}$

5. $\int \frac{(2x + 3)dx}{x^2 + x - 20}$

6. $\int \frac{dx}{3x^2 - 12x + 15}$

7. $\int \frac{(x^3 + x^2 - 20x + 1)dx}{x^2 + x - 20}$

8. $\int \frac{(2x + 3)dx}{x^2 + x - 20}$

9. $\int \frac{dx}{3x^2 - 12x + 15}$

2.2.3. INTEGRAÇÃO POR PARTES

Este assunto você vai estudar na disciplina de cálculo do segundo semestre do Curso, no entanto, por tratar-se de uma técnica muito útil para a solução de integrais, vamos apresentá-la de modo rápido e objetivo.

Vamos considerar o caso em que uma função é composta pelo produto de duas funções de x:

$$f(x) = u(x)v(x)$$

Por praticidade, não vamos explicitar a dependência das funções, ou seja, em vez de $u(x)$, escrevemos somente u .

Vamos agora tomar o diferencial da função f :

$$df = d(uv) = udv + vdu$$

Esta equação pode ser escrita como:

$$udv = d(uv) - vdu$$

e podemos integrar ambos os lados:

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du .$$

Como a integral de um diferencial, no caso $d(uv)$, é a própria função, a fórmula genérica da integração por partes é:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO 13

Calcule a integral $F(x) = \int \ln x dx$

Solução

Devemos identificar u e dv no integrando, ou seja, fazer uma boa escolha o que torna a integral $\int u dv$ mais simples. Neste caso, podemos tomar: $u = \ln x$ e $dv = dx$. Com isso, temos que: $du = \frac{1}{x}dx$ e $v = x$. Substituindo, na fórmula, obtemos:

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx$$

cujo resultado é:

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

Esse resultado é mostrado na fórmula 90 da Tabela.

EXERCÍCIO RESOLVIDO 14

Resolva a integral $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$.

Solução

Como já vimos, a integração por partes obedece a seguinte regra:

$$\int v du = uv - \int u dv$$

Repetindo: devemos identificar quais são as boas funções v e d_u . Neste caso, é conveniente a seguinte escolha:

$$du = \frac{dx}{(1+x)^2} \quad \rightarrow \quad u = \frac{-1}{1+x}$$

$$v = xe^x \quad \rightarrow \quad dv = (1+x)e^x dx$$

Substituindo na integral, vem:

$$\begin{aligned}\int \frac{xe^x dx}{(1+x)^2} &= \frac{-xe^x}{1+x} - \int \frac{-(1+x)e^x dx}{1+x} \\ &= \frac{-xe^x}{1+x} + e^x\end{aligned}$$

Efetuando as operações (denominador comum e outras mais), chegamos ao resultado:

$$\int \frac{xe^x dx}{(1+x)^2} = \frac{e^x}{1+x} + C.$$

Observem que uma integral, de aparência complicada, ficou muito simples.

Evidentemente, você tem que ter “olho” para fazer a escolha certa de u e dv. Somente o treino desenvolve essa habilidade, a menos que seja muito protegido pelos céus.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS 2.4

Usando a integração por partes resolva as seguintes questões:

$$1. \int (\ln x)^2 dx, \quad \text{tome } dv = dx$$

2. $\int x^2 e^x dx$, uma boa escolha é $u=x^2$

$$3. \int x \sin(3x) dx$$

$$4. \int x^n \ln x dx,$$

$$\text{solução: } \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\ln x - \frac{1}{n+1} \right) + C$$

$$5. \int x \sin^2 x dx$$

2.3. INTEGRAIS DEFINIDAS

Vimos, no início desta Unidade, que a área entre uma curva (função) e o eixo das abscissas, ou x , é o limite da soma:

$$A = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{l=1}^{\infty} y(x_i) \Delta x$$

Vimos, também, que esta soma é denominada de integral da função $y(x)$. A variável x tem valores dentro do intervalo $[a,b]$, intervalo no qual a área é calculada, portanto x varia desde um valor inferior (a) até um superior (b). Diz-se, então, que temos uma **integral definida** no intervalo $[a,b]$ e escrever-se:

$$A = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{l=1}^{\infty} y(x_i) \Delta x = \int_a^b y(x) dx \quad (5)$$

É claro que a relação acima somente é válida se a função $f(x)$ for integrável, isto é, se em um dado intervalo fechado $[a, b]$ a função for contínua. Sendo esta condição cumprida, a soma da equação (1) é conhecida como soma de Riemann.

Repetindo: a área líquida é dada pela integral entre os limites de integração inferior (a) e superior (b):

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

Esta integração é chamada de integral definida entre a e b .

Até o momento, esta operação representa uma área que deve ser entendida como uma área genérica, pois não é, necessariamente, em metros quadrados e pode ter valores negativos.

Qual a relação desta integral, a definida, com a antiderivada, integral indefinida? Para responder esta questão, vamos partir da figura abaixo. Conhecemos a função $f(x)$ no ponto x_n e queremos a função no ponto x_{n+1} , assim:

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + \Delta f$$

Da figura podemos ver que:

$$\operatorname{tg}\theta \approx \frac{\Delta f}{\Delta x} \text{ ou } \Delta f \approx \operatorname{tg}\theta \Delta x$$

Como você deve lembrar, a interpretação geométrica de derivada em um ponto da curva é a tangente nesse ponto. Assim, a função $f(x)$ no ponto $x+1$ pode ser aproximada por:

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$$

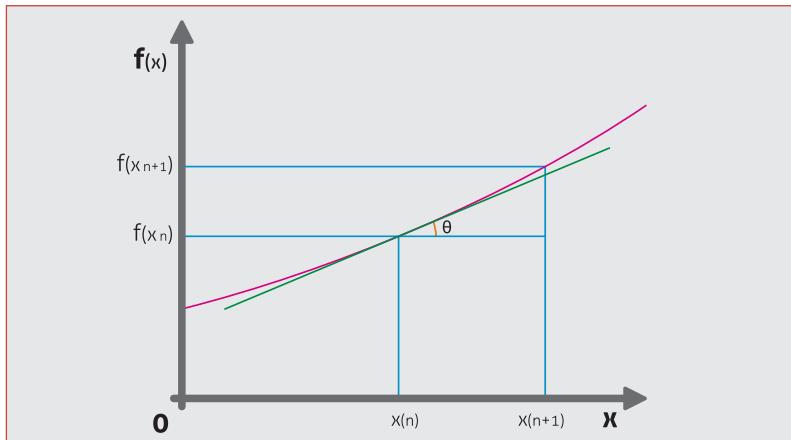


Figura 2.7

Mostramos que uma função no ponto $x + \Delta x$ pode ser obtida conhecendo-se a função e sua derivada no ponto x . Essa aproximação é tão mais verdadeira à medida que Δx tenda a zero.

Agora vamos tomar a antiderivada de $f(x)$, que é a primitiva $F(x)$. Por definição, temos que $F'(x) = f(x)$. Tomando $x_{n+1} - x_n = \Delta x$ e considerando a equação acima, temos:

$$F(x_{n+1}) = F(x_n) + F'(x_n)\Delta x$$

Ou,

$$F(x_{n+1}) - F(x_n) = f(x_n)\Delta x \quad (6)$$

Vamos, agora, tomar o intervalo $[a,b]$, em que a função $f(x)$ é integrável, e dividi-lo em n intervalos. Podemos escrever, para cada um dos intervalos, uma relação como a obtida em (2). Assim:

$$\begin{aligned} F(x_1) - F(a) &= f(a)\Delta x \\ F(x_2) - F(x_1) &= f(x_1)\Delta x \\ F(x_3) - F(x_2) &= f(x_2)\Delta x \\ &\dots = \dots \\ F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) &= f(x_{n-2})\Delta x \\ F(b) - F(x_{n-1}) &= f(x_{n-1})\Delta x \end{aligned}$$

Somando ambos os lados, obtemos:

$$F(b) - F(a) = \sum_n f(x_n)\Delta x$$

Tomando-se o limite para Δx muito pequeno e, consequentemente, um número muito grande de intervalos, vem:

$$F(b) - F(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)\Delta x$$

O lado direito nada mais é do que a integral definida entre a e b, assim:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx \quad (7)$$

A integral definida da função $f(x)$, entre a e b, é a diferença entre a antiderivada calculada nos pontos b e a, respectivamente. A equação acima também pode ser escrita como:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b$$

Somente para reafirmar: $F(x)|_a^b$ significa $F(b) - F(a)$. Observe que a constante de integração da antiderivada $F(x)$ é cancelada.

Outra forma de entender a equação (3) é escrever $f(x) = F'(x)$ e lembrar que a derivada significa variação da função com relação a x, assim:

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

A integral é uma soma de infinitos termos muito pequenos, então, o lado esquerdo da equação acima, é a soma das variações da função $F(x)$ em cada um dos intervalos Δx . A soma de todas as variações entre a e b nada mais é do que a variação total da função entre a e b, $F(b) - F(a)$.

Uma definição mais elaborada para integrais definidas é: se $f(x)$ é uma função contínua no intervalo $[a,b]$ e positiva ($f(x) > 0$) para todo o x contido em $[a,b]$, então a área da região compreendida entre o eixo x e a curva que representa a função $f(x)$ é dada por:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_1 = \int_a^b f(x)dx$$

Entretanto, a definição de integral definida de uma função contínua num intervalo pode ser naturalmente estendida, sem a condição a respeito do sinal da função no intervalo dado, portanto se $f(x) < 0$ no intervalo $[a,b]$, então A é o valor negativo da área da região compreendida entre o eixo x e a função $f(x)$, limitada pelas retas $x=a$ e $x=b$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO 15

Considerando a figura do exercício resolvido número 9, vamos calcular a área do círculo contido no primeiro quadrante.

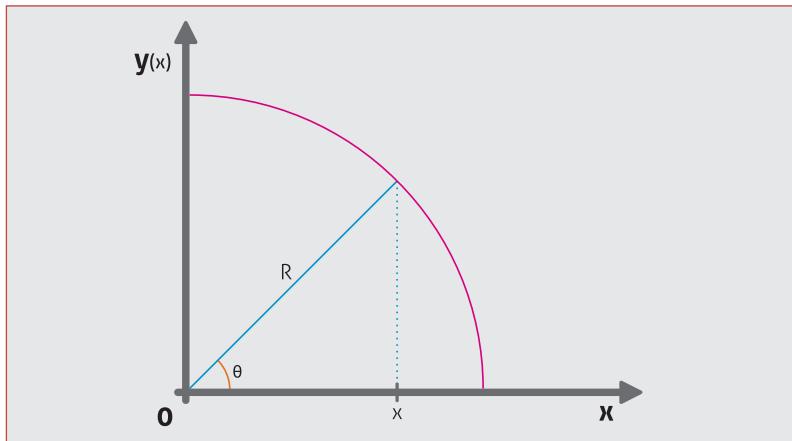


Figura 2.8

$$A = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx$$

cuja resposta nos é conhecida: $\pi R^2 / 4$.

Solução

Como vimos no Exercício 9, a antiderivada função $\sqrt{R^2 - x^2}$ é:

$$F(x) = \frac{x}{2}\sqrt{R^2 - x^2} - \frac{R^2}{2}\arccos\left(\frac{x}{R}\right) + C$$

Então:

$$A = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = \left[\frac{x}{2}\sqrt{R^2 - x^2} - \frac{R^2}{2}\arccos\left(\frac{x}{R}\right) + C \right]_0^R$$

(A constante C foi mantida somente para deixar evidente que é cancelada quando da diferença). Portanto:

$$A = \left[\frac{R}{2}\sqrt{R^2 - R^2} - \frac{R^2}{2}\arccos\left(\frac{R}{R}\right) + C \right] - \left[\frac{0}{2}\sqrt{R^2 - 0^2} - \frac{R^2}{2}\arccos\left(\frac{0}{R}\right) + C \right]$$

Efetuando as operações:

$$A = \left[0 - \frac{R^2}{2}\arccos(1) + C \right] - \left[0 - \frac{R^2}{2}\arccos(0) + C \right]$$

$$A = \frac{R^2}{2}(\arccos(0) - \arccos(1))$$

O ângulo (ou arco) cujo cosseno tem valor um, é zero. O arco cujo cosseno é zero corresponde ao ângulo $\pi/2$, (ou 90 graus). Assim:

$$A = \frac{R^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi R^2}{4}$$

Como o desejado.

2.3.1. PROPRIEDADES DAS INTEGRAIS DEFINIDAS

As propriedades das integrais definidas seguem as mesmas regras das indefinidas, mas há outras, para as quais vamos chamar a atenção:

1. sendo uma função integrável no intervalo $[a, c]$, quando dividimos esse intervalo em duas partes $[a,b]$ e $[b,c]$, vale a relação:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

2. se invertermos os limites de integração, a integral troca de sinal:

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

3. se $f(x)$ e $g(x)$ são funções integráveis no intervalo $[a,b]$, então a função $f(x)+g(x)$ é integrável em $[a,b]$ e $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

4. Sendo c uma constante e $f(x)$ uma função integrável no intervalo $[a,b]$, então a função $cf(x)$ integrável em $[a,b]$ e $\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx.$

Logo adiante, vamos demonstrar o Teorema Fundamental do Cálculo, pois agora já temos as condições necessárias para tal.

2.3.2. SUBSTITUIÇÃO EM INTEGRAIS DEFINIDAS

Para as integrais definidas, a substituição é idêntica a feita nas integrais indefinidas, ou seja:

$$\int f(x)dx = \int f(u)du$$

onde u é uma função de x . No entanto, agora temos os limites de integração que devem ser levados em conta quando da troca de variáveis.

A questão dos limites de integração é tratada de duas maneiras. Uma é resolver a integral usando a variável auxiliar $u(x)$ e, após a integração, voltar para a variável x , neste caso, nada é feito com relação aos limites. Na outra possibilidade, os limites são substituídos pelos valores correspondentes aos da variável auxiliar u , ficando a integral totalmente em termos da nova variável.

EXERCÍCIO RESOLVIDO 17

Calcular a integral:

$$A = \int_0^2 \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Solução

Inicialmente, vamos esquecer os limites de integração e resolver como se indefinida fosse. A substituição de variáveis é um tanto obvia: $x^2 + 1 = u^2$ (outra substituição possível é $x^2 + 1 = u$). A relação entre os diferenciais é: $x dx = u du$. Então:

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \int \frac{u du}{\sqrt{u^2}} = \int du = u + C$$

Agora temos duas opções: a primeira, voltar à variável x, isto é, substituir a função u, e colocar os limites da integral:

$$A = \left. \sqrt{x^2 + 1} \right|_0^2 = \sqrt{5} - 1$$

A segunda opção é substituir os limites pelos correspondentes à variável u. Como $u = \sqrt{x^2 + 1}$, então, sendo $x=0$, $u=1$ e quando $x=2$, $u=\sqrt{5}$. Assim:

$$A = u|_1^{\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 1 .$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO 18

Considerando a função abaixo, encontre o valor da integral definida no intervalo [-2,0].

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 1}$$

Solução

Em primeiro lugar, temos que: $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$, assim:

$$A = \int_{-2}^0 \frac{dx}{(x - 1)^2}$$

Aqui também a substituição é obvia: $x - 1 = u$ e, consequentemente, $dx = du$.

$$A = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$$

Agora as duas possibilidades: voltarmos à variável x e manter os limites:

$$A = -\frac{1}{x - 1} \Big|_{-2}^0 = -\left[\frac{1}{-1} - \frac{1}{-3} \right] = \frac{2}{3}$$

ou substituirmos os limites: quando $x = -2$, $u = -3$ e para $x = 0$, $u = -1$. Então:

$$A = -\frac{1}{u} \Big|_{-3}^{-1} = -\left(\frac{1}{-1} - \frac{1}{-3}\right) = \frac{2}{3}.$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS 2.5

1. Obtenha as integrais definidas. O intervalo de integração está entre colchetes.

- | | |
|---------------------------------------|---------------|
| a. $\int x^n dx$, | [0, $\pi/2$] |
| b. $\int x^2 dx$, | [1, 3] |
| c. $\int x^{-3} dx$ | [1, 2] |
| d. $\int \sqrt{t} dt$ | [0, 4] |
| e. $\int \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx$ | [1, 4] |
| f. $\int \cos x dx$ | [0, 2 π] |
| g. $\int \sin(3x) dx$ | [0, π] |
| h. $\int \sin x \cos x dx$ | [0, $\pi/2$] |
| i. $\int e^{1/2 x} dx$ | [0, 4] |
| j. $\int \sin^2(2x) dx$ | [0, $\pi/2$] |
| k. $\int (\sqrt[3]{t^2} - \sin t) dt$ | [0, π] |

Agora, demonstre as assertivas abaixo:

2. Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções integráveis no intervalo $[a,b]$ e $f(x) \geq g(x)$ em $[a,b]$ então $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.

3. Se f é uma função integrável em $[a,b]$, mostre que vale a seguinte propriedade: $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

4. Usando as propriedades da integral, verifique que:

- a. $\int_1^4 \sqrt{x^4 + 3} dx \geq 21$
- b. $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx \leq \pi^2/8$
- c. $\left| \int_0^{2x} f(x) \cos 3x dx \right| \leq \int_0^{2x} |f(x)| dx$

TAREFA 2.3

Utilize a técnica de integrais por partes para resolver os exercícios abaixo.

1. $\int xe^x dx$

2. $\int x \operatorname{sen} x dx$

3. $\int x \cos^2 x dx$

4. $\int x^2 \cos x dx$

Resolva as seguintes integrais definidas.

5. $\int_0^{\pi/2} x^2 \cos x dx$

6. $\int_1^3 (1 + 3x) dx$

7. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} dx$

8. $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$

9. a. $\int_1^{\infty} x e^{x^2} dx$

b. $\int_0^{\infty} x e^{x^2} dx$

10. $\int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

2.4. O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

O teorema afirma que:

$$\frac{d}{dx'} \int_0^{x'} f(x) dx = f(x')$$

onde a função $f(x)$ é contínua no intervalo de interesse $[0, x']$. Dito de forma simples: a operação derivação é inversa à integração.

Dada a integral definida:

$$F(x') = \int_0^{x'} f(x) dx .$$

A derivada de $F(x')$ com relação a x' é o limite da razão incremental:

$$\frac{dF(x')}{dx'} = \lim_{\Delta x' \rightarrow 0} \frac{F(x' + \Delta x') - F(x')}{\Delta x'} \quad (8)$$

Baseando-nos na definição da função $F(x')$, podemos escrever que:

$$F(x' + \Delta x') = \int_0^{x'+\Delta x'} f(x)dx$$

Pelas propriedades das integrais definidas, temos que:

$$F(x' + \Delta x') = \int_0^{x'} f(x)dx + \int_{x'}^{x'+\Delta x'} f(x)dx$$

O primeiro termo nada mais é que a própria $F(x')$, então:

$$F(x' + \Delta x') = F(x') + \int_{x'}^{x'+\Delta x'} f(x)dx$$

Dessa maneira, após dividirmos ambos os lados por $\Delta x'$, temos:

$$\frac{F(x' + \Delta x') - F(x')}{\Delta x'} = \frac{1}{\Delta x'} \int_{x'}^{x'+\Delta x'} f(x)dx$$

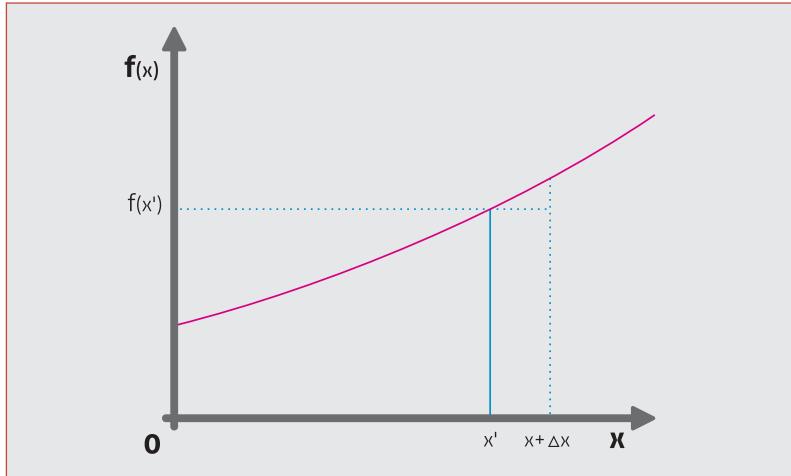


Figura 2.9

Substituindo o resultado acima na equação (3), vem:

$$\frac{dF(x')}{dx'} = \lim_{\Delta x' \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x'} \int_{x'}^{x'+\Delta x'} f(x)dx$$

Como $\Delta x'$ tende à zero, evidentemente x' e $x' + \Delta x'$ estão muito próximos. O que nos permite supor que, nesse pequeno intervalo, a função $f(x)$ é praticamente constante e igual a $f(x')$, como mostra a figura logo acima.

A integral fica:

$$\begin{aligned} \int_{x'}^{x'+\Delta x'} f(x)dx &= f(x') \int_{x'}^{x'+\Delta x'} dx = f(x') [x]_{x'}^{x'+\Delta x'} \\ &= f(x')(x' + \Delta x' - x') = f(x')\Delta x' \end{aligned}$$

Substituindo esse resultado na equação anterior, vem:

$$\frac{dF(x')}{dx'} = \lim_{\Delta x' \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x'} f(x') \Delta x' = f(x') \lim_{\Delta x' \rightarrow 0} \frac{\Delta x'}{\Delta x'}.$$

Como o limite, naturalmente, é a unidade, temos:

$$\frac{dF(x')}{dx'} = f(x')$$

Considerando que x' é uma variável muda, podemos substituir x' por x :

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

Como queríamos demonstrar.

2.5. TEOREMA DO VALOR MÉDIO

Dada uma função integrável no intervalo $[a,b]$ (em outras palavras: finita em todo o intervalo) sempre é possível encontrar $f(x')$ tal que:

$$\int_a^b f(x) dx = f(x')(b-a)$$

Dito de maneira simples: $f(x')$ é o valor médio da função no intervalo $[a, b]$. Por isso, é mais interessante escrever a fórmula acima como:

$$f(x') = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Não vamos aqui fazer uma demonstração deste Teorema. Vamos entendê-lo. Como a integral definida corresponde a uma área, esta pode ser igualada a um retângulo de base $b - a$ e altura h . Como a altura é uma média da função, esta tem valores maiores e menores que a média h no intervalo $[a, b]$. Dessa maneira, deve existir pelo menos um ponto x' em que o valor da função corresponda à altura do retângulo, ou seja, $h = f(x')$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO 19

Considerando a função $f(x) = (x+1)(5-x)$. (a) Encontre a área abaixo da curva no intervalo $[-1,5]$ e (b) o valor médio dessa função no mesmo intervalo.

Solução

- a. A área abaixo da curva nada mais é do que a integral definida entre os pontos -1 e 5, assim:

$$A = \int_{-1}^5 (x+1)(5-x)dx$$

A integral é fácil de resolver:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^5 (x+1)(5-x)dx = \int_{-1}^5 (5+4x-x^2)dx \\ &= \left[5x + 2x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^5 \\ &= \left(2 \times 5 + 2 \times 25 - \frac{1}{3} \times 125 \right) - \left(2 \times (-1) + 2 \times (-1)^2 - \frac{1}{3} \times (-1)^3 \right) \\ &= 36 \end{aligned}$$

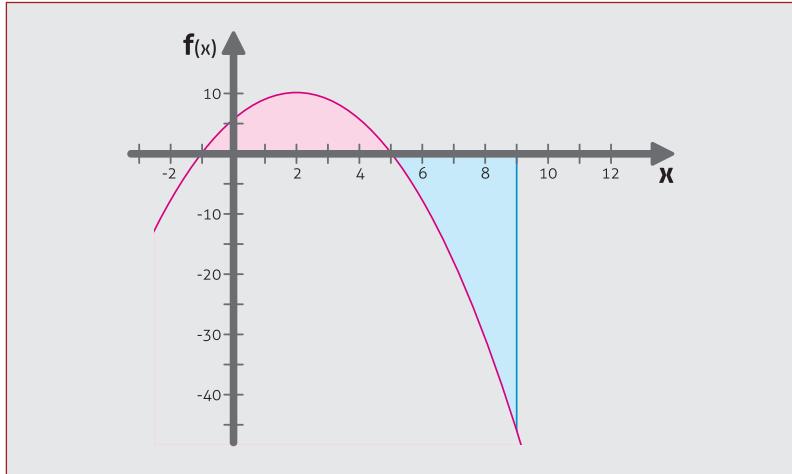


Figura 2.10 – Gráfico de $f(x)=(x+1)(5-x)$

- b. A segunda parte também é fácil, pois a integral já foi calculada.

Da definição de valor médio, temos:

$$f(x') = \frac{1}{b-a} \int_{-1}^5 f(x)dx = \frac{1}{5 - (-1)} 36$$

Portanto, o valor médio da função no intervalo é: $f(x') = 6$, que corresponde à função nos pontos $x' = 2 \pm \sqrt{3}$. Localize, na figura, esses dois pontos.

EXERCÍCIO RESOLVIDO 20

Considerando novamente a função $f(x) = (x+1)(5-x)$. Encontre a área abaixo da curva no intervalo $[-1,9]$. Ver figura acima.

Solução

Como já calculamos a integral, tudo fica fácil, basta trocar o intervalo de integração:

$$A = \left[5x + 2x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^9 = -\frac{100}{3}$$

Como uma área pode ser negativa? Verifique a figura abaixo e observe que a integral definida em um intervalo $[a,b]$ nos dá a área limitada entre a curva e o eixo dos x. Se a curva estiver acima do eixo, o sinal é positivo, se abaixo, negativo. Para convencer-se disso, calcule a integral definida entre 0 e 2π da função $\sin(x)$.

2.6. MOVIMENTO RETILÍNEO USANDO INTEGRAIS

Como o movimento retilíneo com velocidade constante é muito simples, vamos logo para o movimento com aceleração constante, o conhecido movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV). Antes de tudo, vamos relembrar as equações desse movimento.

A velocidade média (v_m) é definida como: $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Toman-do-se o Δt muito pequeno, na verdade tendendo a zero, temos a velocidade instantânea $v(t)$:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}.$$

A velocidade instantânea é a derivada da posição com relação ao tempo.

De maneira análoga definimos aceleração como a derivada da velocidade em relação ao tempo:

$$a(t) = \frac{dv}{dt}$$

Para o caso do MRUV, a aceleração é constante, ou seja, não depende de t , $a(t) = a$. Então, vamos tomar a equação $dv/dt = a$ e escrevê-la como uma relação entre diferenciais: $dv = adt$. Agora, podemos integrar ambos os lados:

$$\int dv = \int adt$$

A integração é trivial, pois a é uma constante, e o resultado é:

$$v(t) + C_v = at + C_t$$

Do processo resultaram duas constantes: uma relativa à integração em v e outra em t . Para determinar as constantes, podemos usar as condições iniciais, que, como o próprio nome diz, é a condição do início das observações, $t = t_0$. No tempo t_0 , a velocidade é v_0 , assim:

$$v_0 + C_v = at_0 + C_t \quad \text{ou} \quad C_t - C_v = v_0 - at_0$$

que, substituído na equação da velocidade, nos fornece:

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0)$$

Para facilitar, podemos fazer $t_0 = 0$, assim, temos a equação conhecida para a velocidade no MRUV:

$$v(t) = v_0 + at$$

Para encontrar a posição como função do tempo, ou a equação horária, é simples:

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

ou

$$\begin{aligned} dx &= v(t)dt \\ dx &= (v_0 + at)dt \\ dx &= v_0 dt + at dt \end{aligned}$$

Integrando ambos os lados e aplicando condições de contorno semelhante às usadas para a velocidade, em $t = 0$ a posição inicial é x_0 . Após a integração, que é muito simples, chega-se a:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2.$$

Resultado que você já conhece das disciplinas de física.

Outra maneira de obter as equações para a velocidade e para a posição é usar integrais definidas e colocar as condições iniciais como limites de integração. Vejamos: no início das observações, $t=0$, a velocidade é v_0 e no tempo t a velocidade é v , assim:

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t adt$$

Integrando (e fazendo todos os passos), vem:

$$v|_{v_0}^v = a t|_0^t \quad \text{ou} \quad v - v_0 = at$$

ou seja:

$$v = v_0 + at$$

Esse procedimento torna a obtenção das equações mais simples.

Aplicando essa mesma regra para a equação das posições, $x(t)$, chega-se facilmente na equação horária pra o MREV. Faça isso como um exercício.

2.6.1. GRÁFICO $v(t) \times t$

O gráfico $v(t)$ versus t , para um movimento genérico, está esquematizado na figura a seguir, na qual, entre outras coisas, marcamos a área entre t_2 e t_4 . Na seção anterior, vimos que a integral definida representa uma área, que, neste caso, é dada pela integral da função velocidade:

$$\int_{t_2}^{t_4} v(t) dt$$

Como $v(t)dt = dx$, a integral pode ser escrita como:

$$\int_{t_2}^{t_4} v(t) dt = \int_{t_2}^{t_4} dx = x|_{x_2}^{x_4} = x(t_4) - x(t_2) = \Delta x$$

ou seja, a área assinalada no gráfico corresponde à distância percorrida pelo móvel entre os tempos t_2 e t_4 .

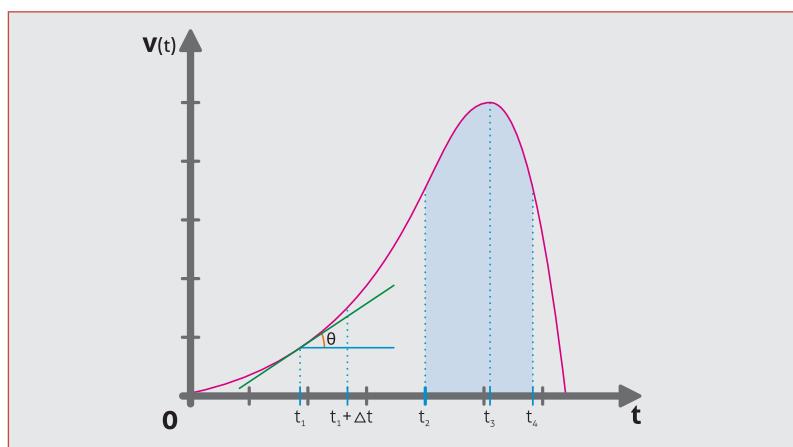


Figura 2.11

Outra informação que podemos extrair do gráfico $v \times t$ é a aceleração do móvel em um dado tempo. A velocidade no tempo $t_1 + \Delta t$, figura acima, é dada por:

$$v(t_1 + \Delta t) = v(t_1) + \Delta v$$

Para Δt pequeno, tendendo a zero, Δv pode ser aproximado por:

$$\Delta v = \operatorname{tg}\theta \Delta t \text{ ou } \operatorname{tg}\theta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \text{ ou ainda } \operatorname{tg}\theta = \frac{dv}{dt} = a(t)$$

ou seja, a aceleração é o coeficiente angular da reta tangente a curva.

Observe no gráfico que em t_2 a aceleração é positiva, em t_4 é negativa. Você saberia dizer qual é a aceleração em t_3 ?

2.6.2. QUEDA DE UM CORPO COM RESISTÊNCIA DO AR

Aqui vamos estudar o problema de um objeto abandonado na altura y_0 e considerar o efeito da resistência do ar. Sendo esse efeito desconsiderando, você já resolveu o problema e encontrou para a velocidade e a posição as seguintes equações:

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 - gt \\ y(t) &= y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2. \end{aligned}$$

Observe, ou relembrre, a convenção de sinais.

O atrito é uma força resistente e, neste caso, vamos tomá-la proporcional a velocidade, $f_a = -\beta v$. O sinal negativo indica que a força de atrito é contrária a velocidade.

Até este momento, você resolveu problemas com aceleração, ou força, constante. O problema aqui tratado é um pouco mais elaborado, pois a aceleração muda com a velocidade do objeto.

Vamos iniciar, e não poderia ser diferente, pela aplicação da segunda lei de Newton, $\vec{F}_R = m\vec{a}$ (força resultante é igual a massa vezes a aceleração). Neste caso, a força resultante é composta pelas forças peso e de atrito. Assim, usando notação vetorial, temos:

$$\vec{P} + \vec{f}_a = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

As forças são mostradas na figura, onde há dois casos a considerar: velocidade inicial para cima (positiva) e para baixo (negativa). Colocamos objetos de formatos diferentes para destacar que a constante β depende de muitos fatores, sendo um deles, a forma do objeto. Também o fato da força de atrito ser proporcional a velocidade é uma aproximação, pois, em alguns casos, a melhor relação é tomar a força resistente proporcional ao quadrado da velocidade.

Considerando que o problema é na vertical e levando em conta a convenção de sinais, temos:

$$-mg - \beta v = m \frac{dv}{dt}$$

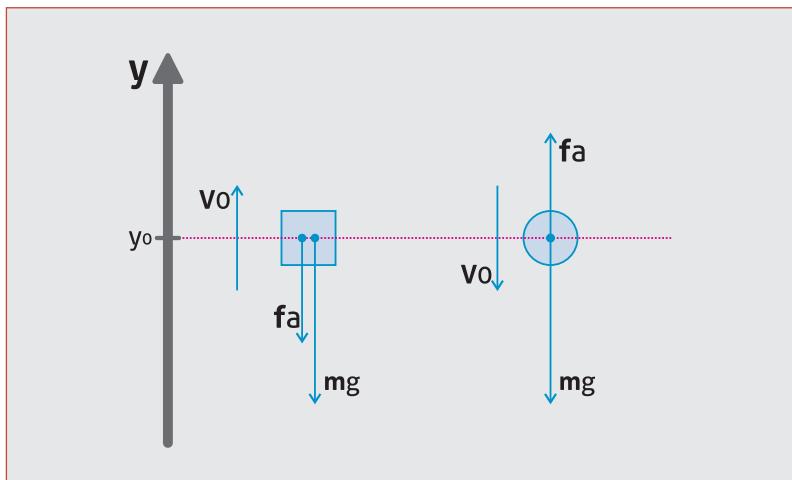


Figura 2.12

Antes de continuarmos, pense um pouco e verifique, com o auxílio da figura, que a equação acima é válida tanto para a velocidade inicial positiva ou negativa. Isso não será válido para o caso em que a força de atrito for proporcional ao quadrado da velocidade, $f_a = \gamma v^2$, neste caso, a equação do movimento para cima é diferente da do movimento para baixo.

A equação acima relaciona as variáveis e seus respectivos diferenciais, que, neste caso, tem solução simples, basta separar as variáveis como segue:

$$\begin{aligned} -dt &= \frac{mdv}{mg + \beta v} \\ -\frac{\beta}{m}dt &= \frac{dv}{\frac{mg}{\beta} + v} \end{aligned}$$

Agora, vamos integrar ambos os lados com as seguintes condições: em $t=0$ a velocidade é v_0 e no tempo t a velocidade é v . Assim:

$$-\frac{\beta}{m} \int_0^t dt = \int_{v_0}^v \frac{dv}{v + \frac{mg}{\beta}}$$

Ambas as integrais são simples, a integral em t é tão elementar que vamos escrever somente o resultado e o lado direito da integral é o logaritmo natural da função, assim o resultado é:

$$\begin{aligned} -\frac{\beta}{m}t &= \ln \left(v + \frac{mg}{\beta} \right) \Big|_{v_0}^v \\ -\frac{\beta}{m}t &= \ln \left(v + \frac{mg}{\beta} \right) - \ln \left(v_0 + \frac{mg}{\beta} \right) \end{aligned}$$

Usando as propriedades dos logaritmos, obtemos:

$$-\frac{\beta}{m}t = \ln \left(\frac{v + mg/\beta}{v_0 + mg/\beta} \right)$$

Dos logaritmos, sabemos que se $x = \ln y$, então $e^x = y$, disso segue:

$$e^{-\frac{\beta}{m}t} = \frac{v + mg/\beta}{v_0 + mg/\beta}$$

Rearranjando os termos, por fim, obtemos:

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{\beta}{m}t} - \frac{mg}{\beta} \left(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t}\right) . \quad (9)$$

Agora vamos examinar os casos limites: $t=0$ e t muito grande. Para t nulo o resultado é trivial, verifique, $v(0) = v_0$. Para t muito grande, ou seja, ($t \rightarrow \infty$), devemos calcular o $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{\beta}{m}t}$, cujo resultado é zero, assim, obtemos o valor máximo da velocidade de queda do objeto, que vamos denominar de velocidade final, ou terminal, $v_T = -mg/\beta$. Quanto maior a massa maior a velocidade e quanto menor o atrito maior a velocidade final, ver gráficos abaixo. No caso da queda livre (sem resistência do ar), a velocidade é independente da massa.

Por último, o sinal negativo para a velocidade. Como foi dito no início do exercício, íamos seguir a convenção que estabelece que: para cima o sinal é positivo e para baixo é negativo. Então, é natural que a velocidade final, de um objeto em queda livre, seja negativa

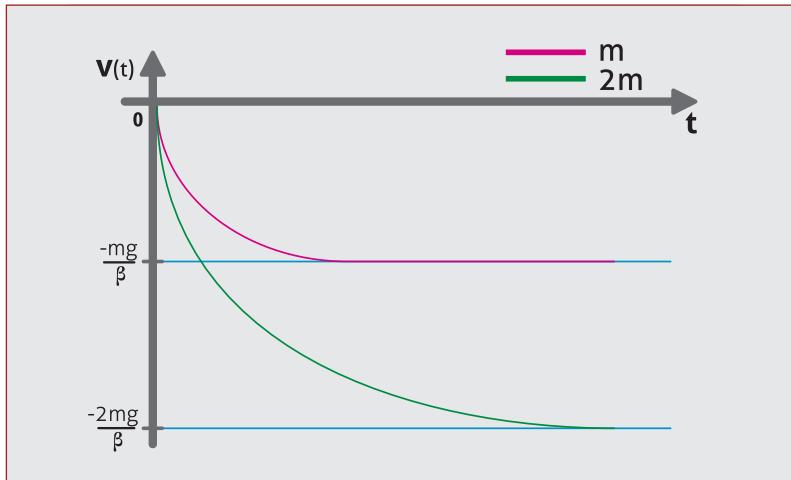


Figura 2.13 – Gráfico da velocidade para objetos com massas diferentes

Na próxima figura, mostramos o comportamento da velocidade para três valores da velocidade inicial, para cima, nula e para baixo.

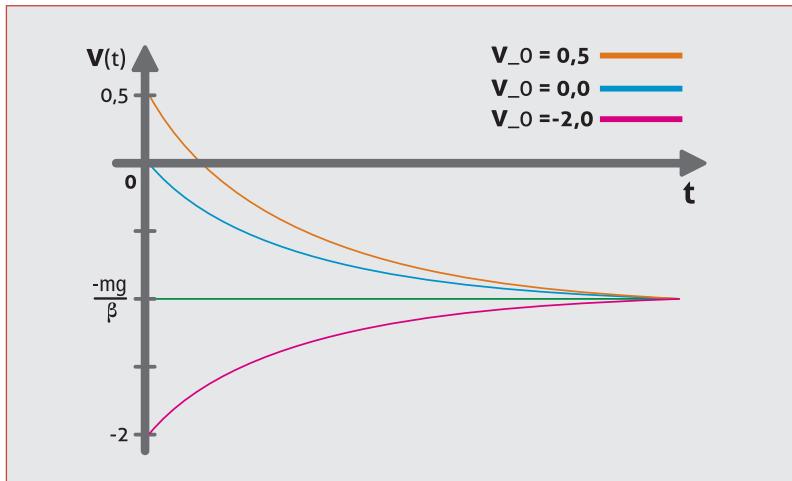


Figura 2.14 – Gráficos da velocidade com diferentes velocidades iniciais

EXERCÍCIO RESOLVIDO 21

Obtenha a posição vertical como função do tempo, $y(t)$, para o caso da força resistiva se $f_a = -\beta v$.

Solução

Vamos iniciar pela relação entre posição e velocidade:

$$v(t) = \frac{dy}{dt} \quad \text{ou} \quad dy = v(t)dt$$

Integrando ambos os lados com os limites adequados:

$$\int_{y_0}^y dy = \int_0^t v(t)dt .$$

A velocidade como função do tempo é conhecida da equação (1), assim;

$$\begin{aligned} \int_{y_0}^y dy &= \int_0^t \left(v_0 e^{-\frac{\beta}{m}t} - \frac{mg}{\beta} \left(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t} \right) \right) dt \\ y - y_0 &= v_0 \int_0^t e^{-\frac{\beta}{m}t} dt - \frac{mg}{\beta} \int_0^t \left(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t} \right) dt \end{aligned}$$

As integrais são simples e, facilmente, chega-se a:

$$y(t) = y_0 - \frac{mg}{\beta}t + \frac{m}{\beta} \left(v_0 + \frac{mg}{\beta} \right) \left(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t} \right) . \quad (\text{10})$$

Verifique os casos limites: $t=0$ e t muito grande. São os resultados esperados fisicamente?

EXERCÍCIO RESOLVIDO 22

Mostre que para β muito pequeno as equações da velocidade e da altura se reduzem às equações da queda livre (sem atrito).

Solução

Uma verificação simples vai mostrar que não basta simplesmente fazer β igual a zero. Para esta tarefa, devemos escrever a exponencial como uma soma de potências do expoente, a conhecida série de Taylor (se ainda não a conhece não se preocupe, logo tomará contato com esta importante ferramenta matemática). A expansão em série de potências da função exponencial é:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Para x menor que 1, os termos da série diminuem para n crescente.

Como a velocidade é dada por:

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{\beta}{m}t} - \frac{mg}{\beta} \left(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t}\right) .$$

E a função exponencial é dada pela série:

$$e^{-\beta t/m} = 1 - \frac{\beta t}{m} + \frac{1}{2} \frac{\beta^2 t^2}{m^2} + \dots$$

A equação da velocidade pode ser aproximada, tomando somente dois termos da série, por:

$$v(t) = v_0 \left(1 - \frac{\beta t}{m} \dots\right) - \frac{mg}{\beta} \left(1 - \left(1 - \frac{\beta t}{m} + \dots\right)\right)$$

Efetuando as operações simples:

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 - v_0 \frac{\beta t}{m} + \dots - \frac{mg}{\beta} \left(\frac{\beta t}{m} + \dots\right) \\ &= v_0 - v_0 \frac{\beta t}{m} - gt + \dots \end{aligned}$$

Agora sim podemos fazer o β igual a zero e obter;

$$v(t) = v_0 - gt.$$

Faça o mesmo para $y(t)$.

TAREFA 2.4

- Obter a equação para a velocidade no caso da força resistiva proporcional a velocidade ao quadrado, $f_r v = \gamma v^2$. Faça somente para o caso da velocidade inicial para baixo. Neste caso, a equação para a velocidade inicial para baixo e para cima são diferentes.

Considere o gráfico $v(t)$ versus t , onde a equação que relaciona a velocidade com o tempo é: $v(t) = 2\sin(\pi t)$. Baseando-se nesse gráfico, responda as questões abaixo. (Observe que o eixo das abscissas está em múltiplos de π , por exemplo, se no gráfico estiver o número 1, o tempo é 1vez π ($= 3.1416$)).

Gráfico $v(t) \times t$ para as questões: 2, 3 e 4.

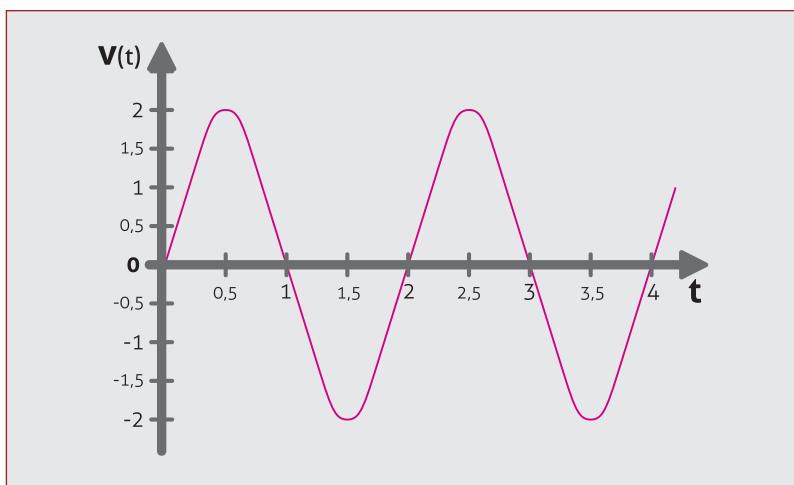


Figura 2.15

- Em quais regiões do gráfico, no intervalo entre 0 e 2π , a aceleração é (a) negativa e (b) positiva?
- Supondo que você não conheça a equação da velocidade, sómente o gráfico, como se obtém o deslocamento?
- Qual o deslocamento entre 0 e π ? Já que a equação da velocidade é conhecida.

NOTAS EXPLICATIVAS

1. NOTAÇÃO DE SOMATÓRIO

A letra grega Σ (sigma maiúscula) é usada para designar a soma de termos que guardam entre si uma relação conhecida. Por exemplo:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \sum_{k=1}^5 k$$

$$1 + 4 + 9 + 16 = \sum_{k=1}^4 k^2$$

Uma soma até um termo genérico n , é representada por:

$$1 + 2 + 5 + 10 + \dots = \sum_{k=0}^n (k^2 + 1)$$

A soma de um número infinito de termos pode ser representada de duas maneiras:

$$1 + 2 + 5 + 10 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (k^2 + 1)$$

OU

$$1 + 2 + 5 + 10 + \dots = \sum_k (k^2 + 1)$$

Para terminar, uma soma conhecida dos matemáticos:

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2,71828\dots = e$$

Onde e é a base dos logaritmos naturais (ou neperianos).

2. DIFERENCIAL

O diferencial da função $y(x)$ significa a variação da função y diante de um pequeno acréscimo (dx) na variável x . Assim, dada uma função $y = f(x)$, o diferencial de y , dy , é dado por:

$$dy = \frac{df(x)}{dx} dx = f'(x) dx$$

Por exemplo: sendo $y = 3x^2 + \ln(x)$, o diferencial de y será:
 $dy = (6x + 1/x)dx$, pois a $f'(x) = 6x + 1/x$.

3. COEFICIENTE ANGULAR E A DERIVADA

A equação da reta é dada pela função genérica: $y = ax + b$, onde b é o coeficiente linear e a o angular.

Considerando a figura, podemos escrever:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x}$$

Isolando a variável independente y , vem:

$$y = \operatorname{tg}\theta x + y_0$$

Comparando com a equação da reta, podemos ver que o coeficiente angular a é a tangente do ângulo formado entre a reta tangente, a curva e o eixo horizontal. Como a $\operatorname{tg}\theta$ é a derivada da função no ponto, conclui-se que o coeficiente angular da reta tangente à curva é a derivada da função no dito ponto.

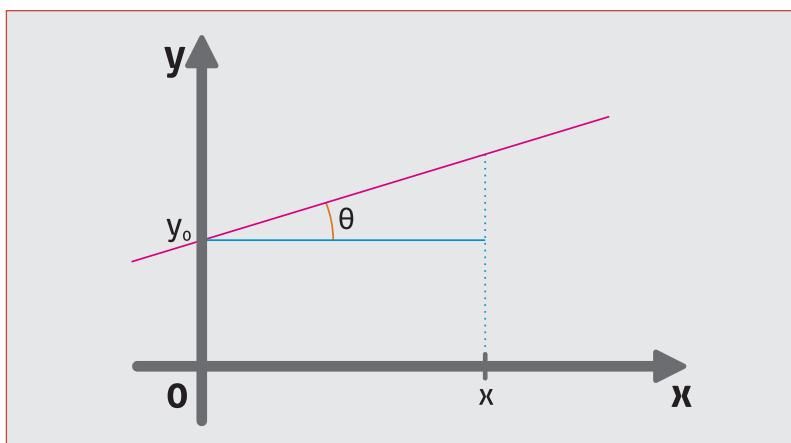


Figura 2.16

4. INTEGRAIS INDEFINIDAS E DEFINIDAS

Em seções anteriores desta Unidade, vimos que a integral definida representa uma área, um número, evidentemente essa área depende dos limites de integração. Por outro lado, a integral indefinida é uma função, é a anti-derivada, ou seja, queremos encontrar a função primitiva $F(x)$ cuja derivada resultou na função $f(x)$. Portanto a integral definida e a indefinida são entes matemáticos diferentes.

Para obtermos a equação da velocidade em função do tempo, usamos integrais definidas em um dado intervalo de tempo e obtendo funções do tempo. O objetivo aqui é clarear esse ponto.

Em linguagem rigorosa se escreve:

$$x(t) = \int_0^t v(t') dt'$$

Em que a variável de integração é t' e os limites são entre zero e um dado valor de t' , que é t . Isso resulta em uma primitiva que é função dos limites de integração.

Concluindo: a variável de integração é uma, t' , e o limite superior é um valor da variável t' , que, por praticidade, tomamos como t . Como o limite superior pode variar, temos uma função que depende do limite superior (desculpem a insistência).

Por questões práticas, é comum o uso da mesma variável, tanto para a integração propriamente dita, como para os limites de integração.

UNIDADE 3
APLICAÇÕES SIMPLES

3.1. ÁREA ENTRE DUAS CURVAS

Inicialmente vamos lembrar que: dada uma função $f(x)$ contínua no intervalo $[a,b]$, esta tem como integral definida a soma de Riemann:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_1^n f(x_i)\Delta x_i .$$

A integral definida corresponde à área entre a curva dada pela função $f(x)$ e o eixo das abscissas (eixo do x , no caso presente). Tendo esta informação em mente, vamos à pergunta: **como calcular a área entre duas curvas?** Para responder essa questão vamos usar o conceito de integral definida: a integral definida entre dois limites é a área abaixo da curva, então basta obter a integral da diferença das funções no intervalo considerado, ou seja:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx . \quad (11)$$

Isso é equivalente a fazer a área sob a função $f(x)$ menos a área sob a função $g(x)$. O resultado é a área entre as curvas. E se a função $g(x)$ for maior que a função $f(x)$? Teríamos uma área negativa entre as curvas. Para resolver esse pequeno inconveniente, basta inverter a ordem das funções no intervalo em que $g(x)$ é maior que $f(x)$. Com isso podemos afirmar que a equação representa a área entre as duas curvas, se, e somente se, $f(x) \geq g(x)$ no intervalo $[a, b]$. No Livro Texto, esse assunto é tratado, e muito bem, na seção 7.1, página 442.

Resumindo, a área entre duas curvas é dada por:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \quad \text{para } f(x) \geq g(x) .$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO 1

Obtenha a área entre as curvas representadas pelas funções:

$$f(x) = x(2 - x) \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{1}{2}x$$

no intervalo $[0:1]$.

Solução

O gráfico das funções está representado no gráfico abaixo. Nele podemos ver que, no intervalo $[0;1,5]$, a função $f(x)$ é maior que a $g(x)$.

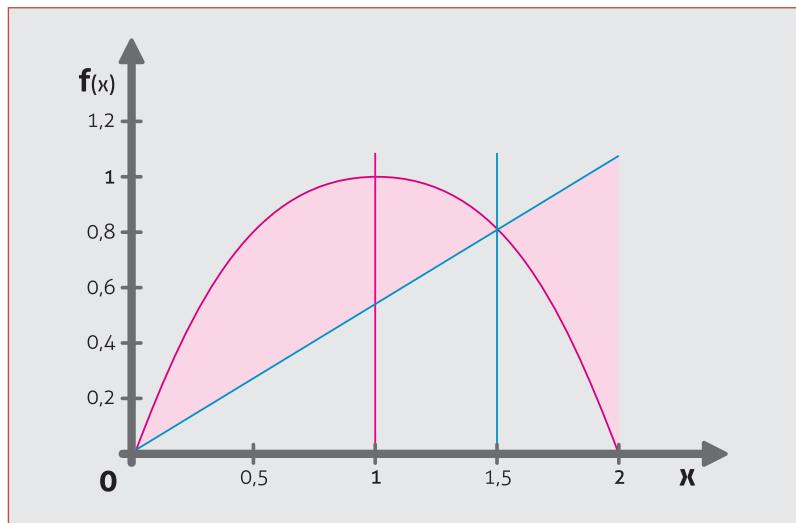


Figura 3.1

Então basta resolver a integral da equação (1):

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

com as respectivas funções e os limites adequados. Assim:

$$A = \int_0^1 \left(x(2-x) - \frac{1}{2}x \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x - x^2 \right) dx$$

O resultado da integração é:

$$A = \left[\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \left(\frac{3}{4}1^2 - \frac{1}{3}1^3 \right) - (0) = \frac{5}{12}$$

A área entre as curvas no intervalo $[0,1]$ é cinco doze avos, ou aproximadamente 0,42 unidades de área.

Aqui uma observação: como na figura não há unidades nos eixos x e y , trata-se de uma área genérica. Por exemplo: no gráfico $v \times t$ a área representa a distância percorrida em um dado intervalo de tempo.

EXERCÍCIO RESOLVIDO 2

Obtenha a área entre as curvas representadas pelas mesmas funções do exercício 1, mas no intervalo $[0:2]$.

Solução

O gráfico das funções mostra que acima de 1,5 a função $g(x)$ é maior que $f(x)$. Portanto no intervalo $[1,5; 2]$ devemos inverter as funções $f(x)$ e $g(x)$. A área será dada pela soma de duas integrais nos intervalos $[0; 1,5]$ e $[1,5; 2]$:

$$A = \int_0^{1,5} [f(x) - g(x)] dx + \int_{1,5}^2 [g(x) - f(x)] dx$$

Substituindo as funções:

$$A = \int_0^{1,5} \left(x(2-x) - \frac{1}{2}x \right) dx + \int_{1,5}^2 \left(\frac{1}{2}x - x(2-x) \right) dx$$

ou:

$$A = \int_0^{1,5} \left(\frac{3}{2}x - x^2 \right) dx + \int_{1,5}^2 \left(x^2 - \frac{3}{2}x \right) dx$$

A integração tem como resultado:

$$A = \left[\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^{1,5} + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 \right]_{1,5}^2 = \frac{19}{24}$$

A área no intervalo [0,2] é aproximadamente 0,79 unidades de área.

3.2. COMPRIMENTO DE UMA CURVA

Outra aplicação de integrais é o cálculo do comprimento de uma curva qualquer. Verificando a figura abaixo, podemos ver que quando dx é muito pequeno podemos escrever:

$$(dL)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

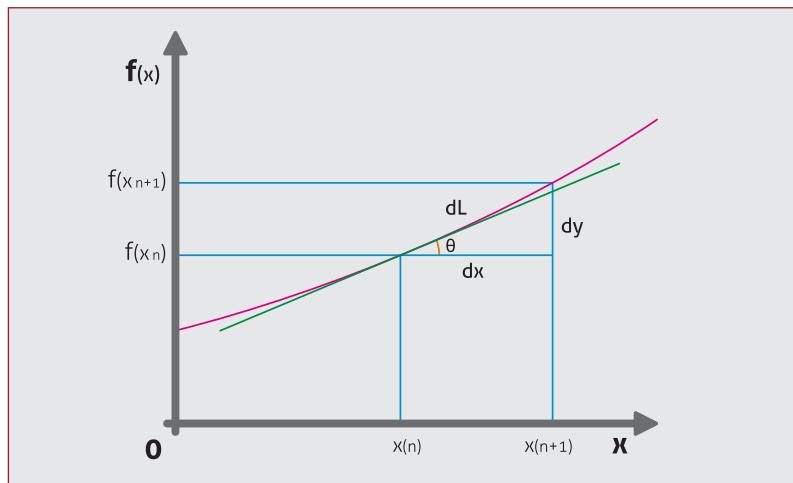


Figura 3.2

Ou:

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

Podemos agora colocar em evidencia dx :

$$dL = \sqrt{(dx)^2 \left(1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right)} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx$$

OU

$$dL = \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

O elemento de comprimento de curva, dL , depende da derivada da função que representa a curva, assim para obtermos o comprimento total, L , é suficiente integrar dL entre os pontos considerados, assim:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx . \quad (12)$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO 3

Obtenha o comprimento do semicírculo de raio unitário.

Solução

Antes de iniciar, vamos lembrar que o perímetro de um círculo é $2\pi R$. Como o nosso caso é metade de um círculo de raio um, o comprimento da curva é π .

A função que representa o semicírculo é $y(x) = \sqrt{1 - x^2}$ definida no intervalo $[-1, 1]$.

O comprimento da curva é dado pela integral (2), onde precisamos encontrar a derivada da função que é:

$$y'(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Substituindo na equação (2), vem:

$$L = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)^2} dx$$

Efetuando as operações algébricas, vem:

$$L = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1}{1 - x^2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Essa é uma integral tabelada cujo resultado é:

$$L = \text{arcsen}(x)|_{-1}^1$$

(lê-se: arco cujo seno é x). Substituindo os limites, vem:

$$L = \text{arcsen}(1) - \text{arcsen}(-1) = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{-\pi}{2}\right) = \pi$$

Que é o resultado esperado.

EXERCÍCIO RESOLVIDO 4

Compare o comprimento da curva $f(x) = x^2$ com a reta $g(x) = 2x$ no intervalo $[0,2]$.

Solução

O gráfico das funções é mostrado na figura abaixo. Para dar uma idéia real dos comprimentos, a figura está com a mesma escala nos eixos x e y.

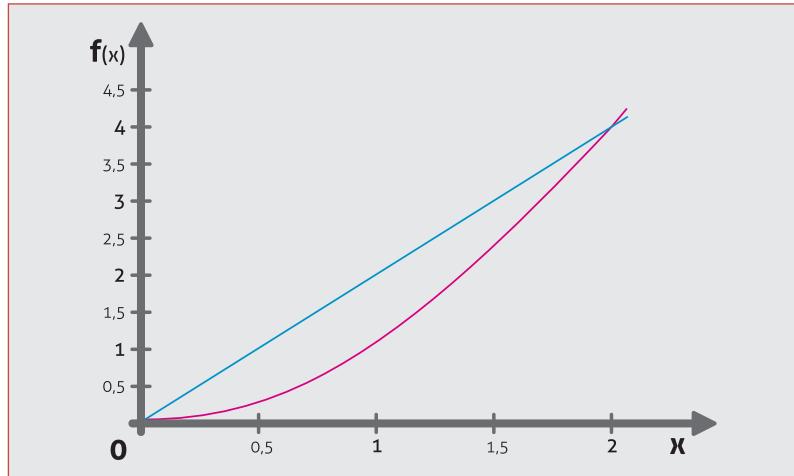


Figura 3.2

Como foi visto, o comprimento de uma curva é dado pela integral (2):

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Primeiro vamos calcular o comprimento da reta. Isso pode ser feito usando o triângulo de Pitágoras, mas vamos usar a integral, já que é disso que estamos tratando aqui.

Como a função é $g(x) = 2x$ sua derivada é $g'(x) = 2$, com isso o comprimento da reta é:

$$L_1 = \int_0^2 \sqrt{1 + 2^2} dx = \sqrt{5} \int_0^2 dx = \sqrt{5} x|_0^2 = 2\sqrt{5}$$

Portanto, o comprimento da reta é $2\sqrt{5}$, ou, se achar melhor, $\sqrt{20} \approx 4,47$.

Agora, vamos calcular o comprimento da curva dada pela função $f(x) = x^2$, cuja derivada é $f'(x) = 2x$. Substituindo na fórmula (2), vem:

$$L_2 = \int_0^2 \sqrt{1 + (2x)^2} dx$$

Já que estamos na disciplina de Cálculo integral, vamos fazer a integral passo a passo. Iniciando pela substituição: $2x = t$, então: $2dx = dt$, ou $dx = dt/2$.

Como é uma integral definida, podemos/devemos trocar os limites de integração. Neste caso, é muito simples, pois $t = 2x$. Sendo $x = 0$, $t = 0$ e para $x = 2$, $t = 4$. Com isso a integral fica:

$$L_2 = \frac{1}{2} \int_0^4 \sqrt{1+t^2} dt \quad (13)$$

Essa é uma integral que está na fórmula 21 da Tabela:

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C$$

Esta integral é resolvida na caixa de texto a seguir. Se souber fazer os cálculos pode ir lá para o final, mas é instrutivo seguir os passos da conta.

Vamos ao cálculo da integral:

$$I = \int \sqrt{1+x^2} dx$$

A soma no integrando indica que devemos usar uma substituição trigonométrica, neste caso a adequada é:

$$x = \operatorname{tg}\alpha,$$

pois $a=1$. Com isso, temos que $dx = \sec^2\alpha d\alpha$. Substituindo em I , vem:

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} \sec^2\alpha d\alpha \\ &= \int \sec^3\alpha d\alpha \end{aligned}$$

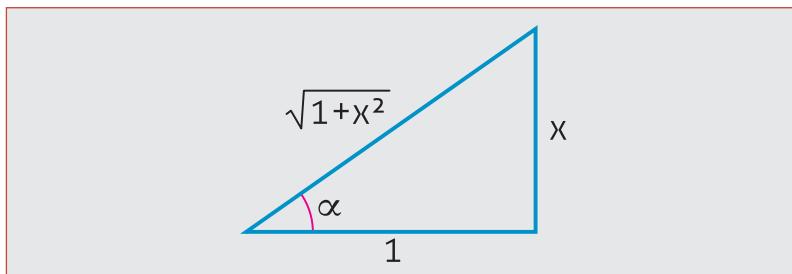


Figura 3.3

Poderíamos olhar na Tabela, pois lá está a integral de $\sec^n \alpha$, mas vamos resolver, neste caso, por partes. Assim:

$$\begin{aligned}
 \int \sec^3 \alpha d\alpha &= \int \sec \alpha (1 + \tan^2 \alpha) d\alpha \\
 &= \int \sec \alpha d\alpha + \int \sec \alpha \tan^2 \alpha d\alpha \\
 &= \int \sec \alpha d\alpha + \int \underbrace{\sec \alpha \tan \alpha}_{dv} \underbrace{\tan \alpha}_{u} d\alpha
 \end{aligned}$$

Como $u = \tan \alpha$, então $du = \sec^2 \alpha d\alpha$. Sendo $dv = \sec \alpha \tan \alpha d\alpha$, implica que $v = \sec \alpha$.

A fórmula geral da integração por partes é:

$$\begin{aligned}
 \int u dv &= uv - \int v du \\
 \int \sec^3 \alpha d\alpha &= \int \sec \alpha d\alpha + \tan \alpha \sec \alpha - \int \sec \alpha \sec^2 \alpha d\alpha \\
 &= \int \sec \alpha d\alpha + \tan \alpha \sec \alpha - \int \sec^3 \alpha d\alpha
 \end{aligned}$$

Passando a integral de secante na terceira potencia para o lado direito, vem:

$$2 \int \sec^3 \alpha d\alpha = \int \sec \alpha d\alpha + \tan \alpha \sec \alpha$$

Como a integral de secante é tabelada, a solução é:

$$\int \sec^3 \alpha d\alpha = \frac{1}{2} \ln(\sec \alpha + \tan \alpha) + \frac{1}{2} \tan \alpha \sec \alpha$$

Considerando que, pela figura 4, $\tan \alpha = x$ e $\sec \alpha = \sqrt{1+x^2}$, temos:

$$I = \int \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left(\sqrt{1+x^2} + x \right) + \frac{1}{2} x \sqrt{1+x^2} + C$$

Idêntico, como não poderia deixar de ser, ao resultado da Tabela para o caso de $a=1$.

Voltando ao comprimento da curva, equação (3):

$$L_2 = \frac{1}{2} \int_0^4 \sqrt{1+t^2} dt = \frac{1}{4} \left[\ln \left(\sqrt{1+x^2} + x \right) + x \sqrt{1+x^2} \right]_0^4$$

A substituição pelos limites de integração nos dá o resultado:

$$L_2 = \frac{1}{4} \left(\ln(\sqrt{17} + 4) + 4\sqrt{17} \right) = \frac{1}{8} \ln 17 + \sqrt{17}$$

Ou $L_2 \approx 4,65$, um pouco maior, como o esperado, que o comprimento da reta, $L_1 = \approx 4,47$.

3.3. TRABALHO DE UMA FORÇA NÃO CONSTANTE

Como é sabido das disciplinas de física, o trabalho(w) de uma força constante é dado pelo produto escalar:

$$w = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x}$$

Essa equação pode ser escrita como:

$$w = F \Delta x \cos \theta$$

onde θ é o ângulo entre a força e o deslocamento. Sendo assim, o trabalho pode ser positivo ou negativo, dependendo do ângulo θ .

Vamos agora repetir o cálculo do trabalho feito pela força peso sobre um copo de massa m que se desloca de uma altura h_1 até uma altura menor, h_2 .

Como a força (mg) e o deslocamento ($\Delta x = h_1 - h_2$) são na direção vertical e mesmo sentido, para baixo, o ângulo é nulo ($\theta = 0$). Com isso, o trabalho é dado por:

$$w = mg \Delta x \cos(0) = mg(h_1 - h_2) = mgh_1 - mgh_2$$

mgh é a energia potencial, U , de um corpo na posição h , podemos dizer que o trabalho realizado pela força peso é a diferença entre a energia no ponto inicial diminuída da energia no ponto final, assim:

$$w = U_1 - U_2 .$$

Visto dessa maneira, podemos considerar somente a posição inicial e a final, ou seja, não importa qual trajetória o corpo fez para ir da h_1 até h_2 , interessa somente o ponto final e o inicial.

Forças cujo trabalho realizado depende somente da posição inicial e final, ou seja, não depende do caminho, são chamadas de forças conservativas.

Como será o trabalho quando a força F não é constante durante um dado deslocamento?

Vamos considerar que o deslocamento é muito pequeno, então podemos considerar que durante esse pequeno deslocamento a força é aproximadamente constante e o trabalho realizado, também pequeno, é dado por:

$$dw = \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

O trabalho total para um deslocamento finito, $\Delta x = x_2 - x_1$, será dado pela soma dos trabalhos em cada um dos intervalos $d\vec{x}$, ou seja, como já deves ter intuído, é a integral:

$$w = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

Ou, deixando explícita a dependência da força com a posição:

$$w = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}(x) \cdot d\vec{x}$$

Para calcularmos o trabalho de uma força não constante, basta fazermos a integral acima, evidentemente deve-se conhecer a dependência da força com a posição.

EXERCÍCIO RESOLVIDO 5

Considere que temos uma força dada por $F = -kx$, ou seja, proporcional ao deslocamento, mas com sentido contrário ao da posição (se x for positivo a força é negativa e vice-versa). Qual o trabalho realizado por essa força quando o móvel é deslocado da posição $x = -A$ até $x = 0$?

Solução

Vamos logo ao cálculo da integral:

$$w = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}(x) \cdot d\vec{x}$$

O deslocamento e a força têm a mesma direção, assim:

$$w = \int_{-A}^0 -kx dx$$

É uma integral muito simples cujo resultado é:

$$w = -\frac{1}{2}kA^2$$

Esse resultado você vai obter na cadeira de Oscilações e Ondas quando do estudo do oscilador harmônico simples.

Vamos agora ao cálculo do trabalho da força resultante sobre um corpo de massa m . Vamos considerar que o ângulo entre a força e o deslocamento é nulo, portanto a integral fica:

$$w = \int_{x_1}^{x_2} F dx$$

Como a força F é a resultante de um conjunto de forças podemos escrever que:

$$F = ma = m \frac{dv}{dt}$$

Então:

$$w = \int_{x_1}^{x_2} m \frac{dv}{dt} dx$$

Como $\frac{dx}{dt} = v$, temos a integral em dv :

$$w = \int_{v_1}^{v_2} mv dv$$

Se não entendeu a troca dos limites de integração, pense um pouco e verá que é isso mesmo. A integral é simples:

$$w = \frac{1}{2}mv^2 \Big|_{v_1}^{v_2} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

Você já deve ter visto a expressão $\frac{1}{2}mv^2$, é a energia cinética (K) da partícula, assim podemos afirmar que o trabalho da força resultante é a diferença das energias cinéticas na posição 2 e na posição 1:

$$w = K_2 - K_1$$

O trabalho é a variação da energia, tanto cinética - devido ao movimento – como a potencial – devido à posição. O trabalho realizado pode ser dado tanto pela variação da energia cinética como pela variação da energia potencial. Ambos devem ser iguais, portanto:

$$K_2 - K_1 = U_1 - U_2$$

Que pode ser rearranjado como:

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

De um lado da igualdade, temos grandezas que dependem das condições do móvel na posição 1 e do outro das condições na posição 2, e estas são iguais. Então existe uma grandeza que mantém o valor quando o móvel muda de posição, ou seja, é uma constante. Essa grandeza é a soma da energia cinética mais a potencial, que denominamos energia mecânica, E :

$$E = K + U$$

Invista um pouco de tempo pensando neste assunto, a energia se conserva. Agora, vamos ver em quais condições o enunciado acima é estritamente verdadeiro, qual seja: a energia mecânica (E) é conservada.

Observe que a energia mecânica depende somente das condições nos pontos 1 e 2, independe do caminho (trajetória) percorrido para ir de 1 a 2. Quando isso acontece, diz-se que o móvel está sob a ação de forças conservativas. Quando este não for o caso, havendo força de atrito, que é uma força que depende da trajetória, a energia total é conservada, mas não a energia mecânica, assim:

$$E_1 + w_f = E_2$$

A energia mecânica no ponto 2 é igual a energia mecânica no ponto 1 mais o trabalho da força de atrito (w_f) (o trabalho da força de atrito é sempre negativo, pois a força é contrária ao deslocamento).

EXERCÍCIOS PROPOSTOS 3.1

Para a solução destes exercícios, siga a seguinte regra: primeiro faça o gráfico da/das função/ções. Isso dará uma idéia, uma imagem, do problema; após faça os cálculos usando a relação matemática adequada.

Obtenha a área entre as curvas:

1. $f(x) = 4 - x^2$ e $g(x) = 2$, no intervalo $[-1, 1]$.

2. $f(x) = 4 - x^2$ e $g(x) = -1$, no intervalo $[-1, 1]$.

3. $f(x) = 4 - x^2$ e $g(x) = 4$, no intervalo $[-1, 1]$.

4. $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \sin x$, no intervalo $[0, \pi/4]$.

5. $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \sin x$, no intervalo $[0, \pi/2]$.

Obtenha o comprimento das curvas:

6. $y = 2\sqrt{x}$, no intervalo $[0, 2]$.

Dica: para fazer a integral substitua $x = t^2$ e use a Tabela.

7. $y = \frac{1}{2}(1 - x^2)$ no intervalo $[0, 5]$

Dica: complete quadrados para efetuar a integral e use a Tabela.

8. Calcule o trabalho realizado pela força $F = 3 \cos \pi x$ (a) no intervalo $[0 : 1]$ e (b) no intervalo $[0 : 2]$. Neste último caso, você tem uma explicação para o resultado? (O gráfico da função ajuda, e muito)

Este enunciado é para as questões 9 e 10.

Um corpo de massa $m = 3\text{kg}$, desliza sobre um plano inclinado cuja superfície faz um ângulo θ com a horizontal. A cinco metros (5m) de altura do solo tem velocidade de 4m/s . (considere $g = 10\text{m/s}^2$).

9. Qual será a velocidade no solo, se o plano for considerado sem atrito?

10. Considerando que o plano inclinado tem atrito e a velocidade no solo é 10m/s , qual foi o trabalho da força de atrito?

TAREFA 3.1

1. Esboce o gráfico e calcule a área entre as curvas $f(x) = x^3 - x$ e $g(x) = 3x$, nos intervalos: (a) $[-2, 0]$ e (b) $[-2, 2]$

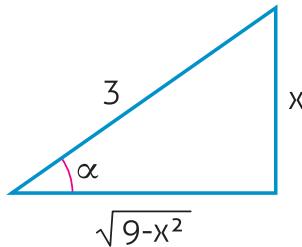
2. Obtenha o comprimento da curva dada pela função $y = x^2 - 3x + 2$ no intervalo $[0,2]$

3. Em um corpo em repouso de massa $m = 2$ aplica-se uma força $F = 3\sqrt{x}$. Qual será a velocidade do corpo após percorridos 4 metros? Resposta: $4m/s$.

ANEXOS

GABARITO DA TAREFA 2.2

1. $\int \frac{dx}{(9-x^2)^{3/2}}$



Usaremos a seguinte substituição trigonométrica:

$$x = 3 \cdot \sin \alpha \quad dx = 3 \cdot \cos \alpha \ d\alpha$$

que aplicada no denominador do integrando, fornecerá:

$$9 - x^2 = 9 - 9 \cdot \sin^2 \alpha = 9 \cdot (1 - \sin^2 \alpha) = 9 \cdot \cos^2 \alpha$$

Com isto, teremos:

$$\int \frac{dx}{(9-x^2)^{3/2}} = \int \frac{1}{(9 \cdot \cos^2 \alpha)^{3/2}} (3 \cdot \cos \alpha \ d\alpha) = \frac{1}{9} \int \frac{1}{\cos^2 \alpha} \ d\alpha = \frac{1}{9} \int \sec^2 \alpha \ d\alpha = \frac{1}{9} \operatorname{tg} \alpha + C$$

Observando o triângulo acima, concluímos que:

$$\int \frac{dx}{(9-x^2)^{3/2}} = \frac{1}{9} \operatorname{tg} \alpha + C = \frac{1}{9} \cdot \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} + C.$$

2. $\int \frac{dx}{x(9-x^2)}$

Neste problema, usaremos exatamente a mesma substituição trigonométrica do problema anterior, o que nos levará ao seguinte resultado:

$$\int \frac{dx}{x(9-x^2)} = \int \frac{1}{(3 \cdot \sin \alpha)(9 \cdot \cos^2 \alpha)} (3 \cdot \cos \alpha \ d\alpha) = \frac{1}{9} \int \frac{d\alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{1}{9} \int \frac{\sec^2 \alpha \ d\alpha}{\operatorname{tg} \alpha}$$

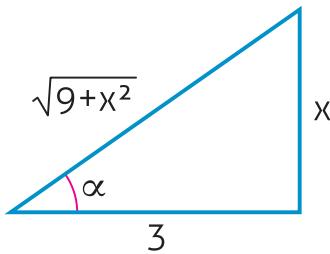
Que é a derivada da tangente sobre a tangente, então a integral é logaritmo da tangente, assim:

$$\int \frac{dx}{x(9-x^2)} = \frac{1}{9} \ln |\operatorname{tg} \alpha| + C$$

Recorrendo a mesma figura do exercício anterior, teremos:

$$\int \frac{dx}{x(9-x^2)} = \frac{1}{9} \ln \left| \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} \right| + C$$

3. $\int \frac{dx}{x(9+x^2)}$



Usaremos a seguinte substituição trigonométrica:

$$x = 3 \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad dx = 3 \cdot \sec^2 \alpha \, d\alpha$$

que aplicada no denominador do integrando, fornecerá:

$$x(9+x^2) = 3\operatorname{tg} \alpha \cdot (9 + 9 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha) = 3\operatorname{tg} \alpha \cdot 9(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = 3\operatorname{tg} \alpha \cdot 9 \sec^2 \alpha$$

O resultado acima, levado à integral, nos conduzirá ao seguinte (após simplificações):

$$\int \frac{dx}{x(9+x^2)} = \frac{1}{9} \cdot \int \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \, d\alpha = \frac{1}{9} \cdot \int \operatorname{Cotg} \alpha \, d\alpha = \frac{1}{9} \cdot \ln |\operatorname{sen} \alpha| + C$$

Observando o triângulo acima, concluímos que:

$$\int \frac{dx}{x(9+x^2)} = \frac{1}{9} \cdot \ln \left| \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} \right| + C$$

GABARITO DA TAREFA 2.3

A fórmula geral da integração por partes é:

$$\int f(x) g'(x) = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)$$

Na prática utilizamos:

$$u = f(x) \quad du = f'(x)$$

$$v = g(x) \quad dv = g'(x)$$

Assim:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Questão 1

$$\int xe^x dx$$

A escolha é: $u = x$ $dv = e^x$, que resulta em: $du = dx$ $v = e^x$

Substituindo, vem:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

Questão 2

$$\int x \sin x dx = x(-\cos x) - \int -\cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$$

$$u = x \quad dv = \sin x dx$$

$$du = dx \quad v = \int \sin x dx = -\cos x$$

Questão 3

$$\begin{aligned} \int x \cos^2 x dx &= x \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x \right) - \int \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4} \sin 2x \\ &\quad - \left[\int \frac{x}{2} dx + \frac{1}{4} \int \sin 2x dx \right] = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4} \sin 2x - \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4} \int \sin 2x dx \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4} \sin 2x - \frac{x^2}{4} - \frac{1}{8} \int \sin u du = \frac{x^2}{2} + \frac{x \sin 2x}{4} - \frac{x^2}{4} + \frac{\cos 2x}{8} + C \\ &= \frac{x^2}{4} + \frac{x \sin 2x}{4} + \frac{\cos 2x}{8} + C \end{aligned}$$

Fazendo as substituições trigonométricas:

$$\int x \cos^2 x dx = \frac{x^2}{4} + \frac{x \sin x \cos x}{2} + \frac{\cos^2 x}{4} + C$$

A escolha de u e dv foi:

$$u = x \quad dv = \cos^2 x dx$$

$$du = dx \quad v = \int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int 1 + \cos 2x dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

Outra escolha possível é: $u = x \cos(x)$ e $dv = \cos(x)$.

Tente usar esta substituição e veja como fica mais fácil.

Questão 4

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - \int \sin x \cdot 2x dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx =$$

$$u = x^2 \quad dv = \cos x dx$$

$$du = 2x dx \quad v = \int \cos x dx = \sin x$$

Aplicando integral por partes novamente temos:

$$\int \sin x \cdot x dx = -x \cos x - \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$$

$$u = x \quad dv = \sin x dx$$

$$du = dx \quad v = \int \sin x dx = -\cos x$$

Substituindo novamente temos

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos x dx &= x^2 \sin x - \int \sin x \cdot 2x dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx = x^2 \sin x \\ &\quad - 2(-x \cos x + \sin x) \\ &= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C \end{aligned}$$

Questão 5

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \cos(x) dx = ?$$

$$\begin{aligned} u &= x^2 \quad e \quad dv = \cos(x) dx, \text{ então}'' \\ du &= 2x dx \quad e \quad v = \sin(x). \end{aligned}$$

Substituindo na fórmula de integrais por partes, vem:

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \cos(x) dx = x^2 \sin(x) \Big|_0^{\pi/2} - 2 \int_0^{\pi/2} x \sin(x) dx$$

Integrando novamente por partes o segundo termos, temos:

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \cos(x) dx = [x^2 \sin(x) + 2x \cos(x) - 2 \sin(x)]_0^{\pi/2}$$

Ou:

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \cos(x) dx = (\pi/2)^2 \sin(\pi/2) + 2(\pi/2) \cos(\pi/2) - 2 \sin(\pi/2)$$

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \cos(x) dx = (\pi/2)^2 - 2 \approx 0,47$$

Questão 6

$$\int_1^3 (1 + 3x)dx = \int_1^3 1 dx + \int_1^3 3xdx = x|_1^3 + \frac{3x^2}{2} \Big|_1^3 = (3 - 1) + \left(\frac{27}{2} - \frac{3}{2}\right) = 2 + \frac{24}{2} = 14$$

Questão 7

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{u^2} \frac{du}{\cos x} = \int_{0,5}^1 \frac{du}{u^2} = -u^{-1}|_{1,0,5} = -\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{0,5}\right) = 1,0$$

$u = \sin x \quad du = \cos x$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0,5 \quad \text{e} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Questão 8

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{l \rightarrow +\infty} \int_0^{\infty} e^{-x} = \lim_{l \rightarrow +\infty} -e^{-x}]_0^l = \lim_{l \rightarrow +\infty} -e^{-l} - (-e^0) = 1$$

Questão 9

a. $\int_1^{\infty} xe^{x^2} dx = \lim_{l \rightarrow +\infty} \int_1^{\infty} xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \lim_{l \rightarrow +\infty} e^{x^2}]_1^l = \frac{1}{2} (e^{l^2} - e^1) = \infty$

b. $\int_0^{\infty} xe^{x^2} dx = \lim_{l \rightarrow +\infty} \int_0^{\infty} xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \lim_{l \rightarrow +\infty} e^{x^2}]_0^l = \frac{1}{2} (e^{l^2} - e^0) = \infty$

Questão 10

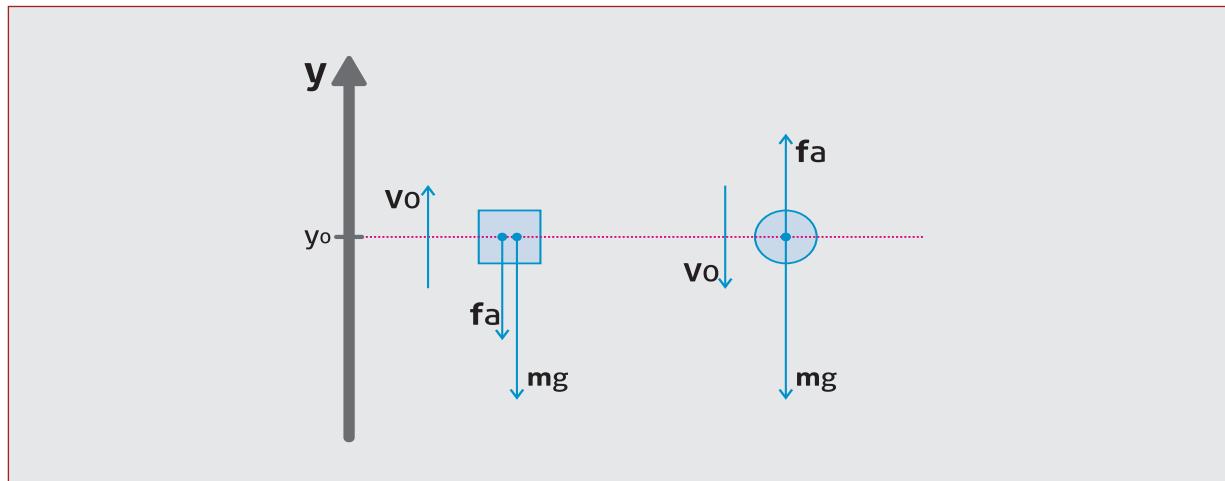
$$\int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{2} \Big|_{-2}^2 = \arcsen(1) - \arcsen(-1) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

GABARITO TAREFA 2.4

Questão 1

Inicialmente, vamos considerar (para tornar o problema mais fácil) que o sentido para baixo é positivo.

Vamos tomar a velocidade inicial (v_0) é para baixo. O arranjo de forças pode ser visto no exercício similar da apostila.



Como estamos considerando positivo para baixo, a aplicação da segunda lei de Newton nos dá a equação:

$$mg - \gamma v^2 = ma$$

Onde a é aceleração, $a = \frac{dv}{dt}$, assim:

$$mg - \gamma v^2 = m \frac{dv}{dt}$$

Devemos separar as variáveis v e t :

$$\frac{mg}{\gamma} - v^2 = \frac{m}{\gamma} \frac{dv}{dt} \quad a^2 - v^2 = \frac{m}{\gamma} \frac{dv}{dt}$$

Aqui a^2 é uma constante dada por: $a^2 = \frac{mg}{\gamma}$. Isso é somente para facilitar a escrita, deixa a equação mais limpa.

$$\frac{\gamma}{m} dt = \frac{dv}{a^2 - v^2}$$

Agora podemos integrar com os seguintes limites de integração: em $t = 0$ a velocidade é v_0 e no tempo t a velocidade é v . Assim:

$$\frac{\gamma}{m} \int_0^t dt = \int_{v_0}^v \frac{dv}{a^2 - v^2}$$

A integral tem como resultado:

$$\frac{\gamma}{m}t = \frac{1}{2a} \ln \left. \frac{a+v}{a-v} \right|_{v_0}^v$$

Que pode ser rearranjado como:

$$2a \frac{\gamma}{m}t = \ln \frac{a+v}{a-v} - \ln \frac{a+v_0}{a-v_0}$$

Substituindo o a e unindo os logaritmos:

$$2\sqrt{\frac{\gamma g}{m}}t = \ln \left[\frac{a+v}{a-v} \frac{a-v_0}{a+v_0} \right]$$

Novamente, para facilitar, vamos substituir: $\sqrt{\frac{\gamma g}{m}}t = t'$

$$e^{2t'} = \frac{a+v}{a-v} \frac{a-v_0}{a+v_0}$$

Vamos considerar o caso mais simples, $v_0 = 0$. A equação fica:

$$e^{2t'} = \frac{a+v}{a-v}$$

Agora vamos isolar v :

$$a+v = (a-v)e^{2t'} = ae^{2t'} - ve^{2t'}$$

$$v + ve^{2t'} = ae^{2t'} - a$$

ou

$$v = a \frac{e^{2t'} - 1}{e^{2t'} + 1}$$

Podemos colocar em evidência $e^{t'}$:

$$v = a \frac{e^{t'} e^{t'} - e^{-t'}}{e^{t'} e^{t'} + e^{-t'}} = a \frac{e^{t'} - e^{-t'}}{e^{t'} + e^{-t'}} = a \frac{\sinh(t')}{\cosh(t')} = a \operatorname{tgh}(t')$$

A velocidade depende da tangente hiperbólica do tempo. Após substituir a e t' , temos, finalmente:

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{\gamma}} \operatorname{tgh} \left(\sqrt{\frac{\gamma g}{m}} t \right)$$

Qual é a velocidade final do objeto?

É simples. Para t tendendo a um valor muito grande, a tangente hiperbólica tende a 1, assim

$$v_{max} = \sqrt{\frac{mg}{\gamma}}$$

Como ficara a solução para o caso de v_0 ser diferente de zero?

$$e^{2t'} = \frac{a+v}{a-v} \frac{a-v_0}{a+v_0}$$

Após uma página de conta chega-se, facilmente, a:

$$v(t) = a \frac{v_0 + a \operatorname{tgh}(t')}{a + v_0 \operatorname{tgh}(t')}$$

Para deixar a equação mais simples não substituímos a e t' .

Outra forma de solucionar esse problema, é considerar positivo para cima. Nesse caso tome cuidado com a integral, pois na Tabela a solução da integral é o logaritmo do módulo de uma função. Nesse caso, deve-se tornar cuidado em tornar a função positiva para nos “livrar” do módulo.

Vamos agora ao caso de v_0 para cima (positiva). Neste caso, a equação fica:

$$\begin{aligned} -mg - \gamma v^2 &= m \frac{dv}{dt} \\ -\frac{mg}{\gamma} - v^2 &= \frac{m}{\gamma} \frac{dv}{dt} \quad -a^2 - v^2 = \frac{m}{\gamma} \frac{dv}{dt} \end{aligned}$$

Novamente $a^2 = \frac{mg}{\gamma}$:

$$-\frac{\gamma}{m} dt = \frac{dv}{a^2 + v^2}$$

Os limites de integração: em $t = 0$ a velocidade é v_0 e no tempo t a velocidade é v . Assim:

$$\begin{aligned} -\frac{\gamma}{m} \int_0^t dt &= \int_{v_0}^v \frac{dv}{a^2 + v^2} \\ -t' &= \operatorname{arctg} \left(\frac{v}{a} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{v_0}{a} \right) \end{aligned}$$

Aqui, como antes, $t' = \sqrt{\gamma g / m}$. Isolando v :

$$\operatorname{arctg} \left(\frac{v}{a} \right) = \operatorname{arctg} \left(\frac{v_0}{a} \right) - t'$$

Neste problema, velocidade inicial para cima, a velocidade inicial não pode ser nula. Finalmente temos:

$$v(t) = a \operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{v_0}{a} \right) - t' \right) .$$