FATEC - SP
Faculdade de Tecnologia de São Paulo

ANÁLISE e DESENVOLVIMENTO de SISTEMAS

MATEMÁTICA DISCRETA

1º Semestre de 2017

Prof. Ms. Tetsuo Araki

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 - TEORIA dos CONJUNTOS

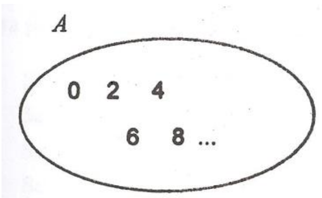
1.1 Conceito de Conjuntos

A teoria dos conjuntos tem início com o matemático Georg Cantor(1845 – 1918).

Consideramos **Conjunto, Elemento e a Relação de Pertinência** como conceitos primitivos e aceitamos sem definição, assim como **ponto**, **reta** e **plano** na Geometria Euclidiana.

Podemos descrever um conjunto citando um a um seus elementos, ou apresentando uma propriedade característica dos mesmos. Para dar nome aos conjuntos, usamos letras maiúsculas de nosso alfabeto(A, B, C, ...) e colocamos seus elementos entre chaves. Os objetos que compõem os conjuntos são denominados elementos.

Exemplo 1: Chamamos de A o conjuntos dos números pares e indicamos por A={0, 2, 4, ,6, ...}. Podemos representar o conjunto A pelo diagrama de Venn(John Venn, (1834 – 1923), matemático e lógico inglês), da seguinte forma:



Para indicarmos que um elemento *a* pertence a um conjunto *A*, escrevemos $a \in A$(leia: *a* pertence a *A*). Caso contrário, escrevemos $a \notin A$(leia: *a* **não** pertence a *A*).

Exemplo 2: Seja A = {1, 2, 3, 4, 5}. Nesse caso, $2 \in A$ e $0 \notin A$

1.2 Inclusão de Conjuntos

Dizemos que um conjunto A é subconjunto de um conjunto B se, e somente se, todo elemento de A é também elemento de B.

Notação: $A \subset B$(A é subconjunto de B ou A está contido em B). Caso contrário, $A \not\subset B$.

Exemplo 3:

a) Se A={1, 2} e B={1, 2, 3, 4}, então $A \subset B$.

b) Se A={2, 3} e B={1, 2, 3, 4}, então $A \subset B$.

c) Se A={1, 2} e B={1, 3, 4}, então $A \not\subset B$.

1.3 Igualdade

Dois conjuntos A e B são iguais se, e somente se, têm os mesmos elementos.

Simbolicamente: $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ e $B \subset A$.

Exemplo 4: Sejam A = {1, 2} e B = {1, 2}. Nesse caso A = B, pois $A \subset B$ e $B \subset A$.

1.4 Conjunto Vazio

Chama-se conjunto vazio aquele que não possui nenhum elemento. O símbolo usual para o conjunto vazio é $\varnothing$.

Exemplo 5: O conjunto dos números naturais que multiplicados por zero produz resultado 3 é vazio.

Simbolicamente: $\{x \in N /\ 0.x = 3\} = \varnothing$

Obs.: Qualquer que seja o conjunto A, tem-se $\varnothing \subset A$, ou seja, $\varnothing$ é subconjunto de A.

1.5 Conjunto das partes de um conjunto

Chama-se conjunto das partes de um conjunto *A*, e se indica $\wp(A)$, ao conjunto de todos os subconjuntos de A.

Exemplo 6: Se A={a, b, c}, então $\wp(A)=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

Exemplo 7: Dar o número de elementos do conjunto $\wp(A)$, ou seja, $n(\wp(A))$, sendo:

a) $A=\varnothing$

b) A={a}

c) A= {a, b}

Resolução:

a) $\wp(A)=\{\varnothing\}$, logo $n(\wp(A))=1=2^0$.

b) $\wp(A)=\{\varnothing, \{a\}\}$, logo $n(\wp(A))=2=2^1$.

c) $\wp(A)=\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, logo $n(\wp(A))=4=2^2$.

Conclusão: O número de elementos do conjunto das partes de A, $n(\wp(A))$, é dado por $n(\wp(A))=2^k$, onde k é o número de elementos do conjunto A.

1.6 Operações com conjuntos

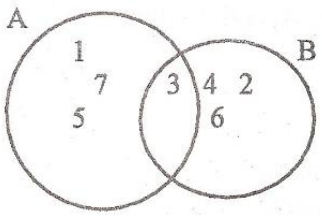
Na teoria dos números temos as operações de adição e multiplicação, que ocorrem também na teoria dos conjuntos, porém com operações próprias.

1.6.1 União(∪)

Sejam os conjuntos A e B. Chama-se união do conjunto A com o conjunto B, ao conjunto formado por elementos de A **ou** de B.

Simbolicamente: $A \cup B = \{x / x \in A \text{ ou } x \in B\}$

Exemplo 8: Sejam A={1, 3, 5, 7} e B={2, 3, 4, 6}. Então, $A \cup B$={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

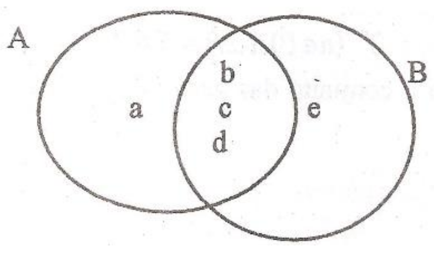


1.6.2 Intersecção(∩)

Sejam os conjuntos A e B. Chama-se intersecção dos conjuntos A e B, ao conjunto formado por elementos que pertencem a A **e** também a B.

Simbolicamente: $A \cap B = \{x / x \in A$ **e** $x \in B\}$

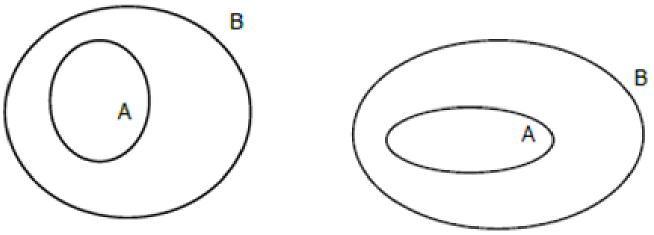
Exemplo 9: Sejam A={a, b, c, d} e B={b, c, d, e}. Então, $A \cap B$={b, c, d}



1.6.3 Propriedades

Aceitamos as propriedades da união e da intersecção que seguem, sem demonstração. Para um melhor entendimento faça o diagrama de Venn hachurando a região definida pela propriedade.

P₁. Se $A \subset B$, então $A \cap B = A$ e $A \cup B = B$



$A \cap B = A$ $\qquad$ $A \cup B = B$

P_2. Idempotência: $A \cap A = A$ e $A \cup A = A$

P_3. $A \cap \phi = \phi$ e $A \cup \phi = A$

P_4. Comutativa: $A \cap B = B \cap A$ e $A \cup B = B \cup A$

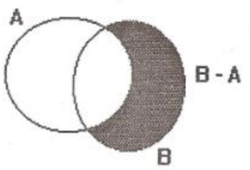
P_5. Associativa: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ e $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

P_6. Distributiva: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ e
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

1.6.4 Diferença (–)

Sejam os conjuntos A e B. Chama-se diferença de A em relação a B, ao conjunto dos elementos de B que não pertencem a A.

Simbolicamente: $B - A = \{x / x \in B \text{ e } x \notin A\}$



Exemplo 10:

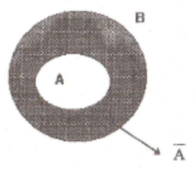
a) Se M={a, b, c, d} e N ={b, c, d, e}, então M – N ={a}

b) Se P={1, 2, 3} e Q={3}, então P – Q={1, 2}

1.6.5 Complementar ($\overline{A}$)

Se $A \subset B$, chama-se conjunto complementar de A em relação a B ao conjunto dos elementos de B que não pertencem a A.

Simbolicamente: $\overline{A} = B - A = \{x / x \in B \text{ e } x \notin A\}$



Exemplo 11:

Sejam A={1, 2, 3} e B={1, 2, 3, 4, 5}, então $\overline{A}$ ={4, 5}. Note que $A \subset B$.

Propriedades

1. $\overline{\overline{A}} = A$
2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ e $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ Leis de De Morgan
3. $A \cap \overline{A} = \phi$
4. $A \cup \overline{A} = U$ (Sendo U : universo)
5. $A - B = A \cap \overline{B}$

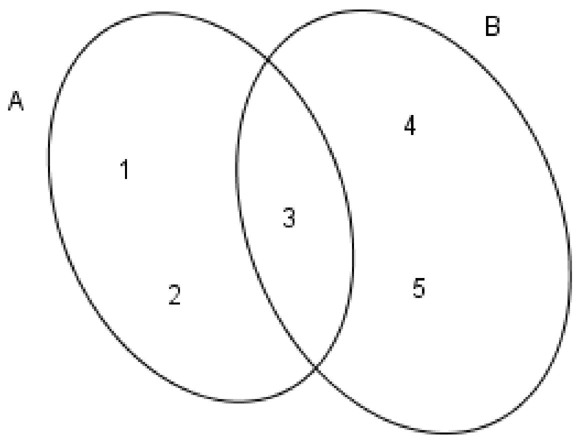
1.6.6 Diferença Simétrica (Δ)

Definimos diferença simétrica e indicamos por A Δ B ao conjunto

$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

Exemplo 12:

Sejam A={1, 2, 3} e B={3, 4, 5}. Então, A Δ B={1, 2, 4, 5}



1.7 Número de elementos de um conjunto finito

Para dois conjuntos: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

Para três conjuntos: $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

Exemplo 13:

Os cursos de Administração(A), Biologia(B) e Contábeis(C) são os mais procurados para o vestibular pelos alunos de um Colégio de Ensino Médio, conforme tabela a seguir.

Cursos	A	B	C	A e B	A e C	B e C	A, B e C
Preferência	90	130	170	20	40	30	10

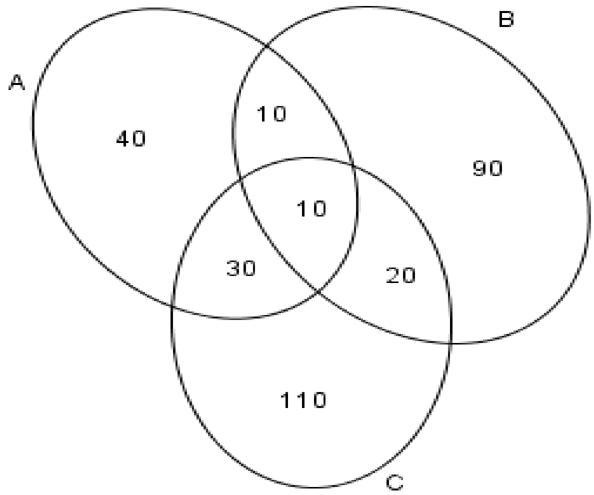
a) Quantos alunos consultados preferem só o curso A?

b) Quantos alunos consultados preferem só dois cursos?

c) Quantos alunos consultados preferem A ou C?

d) Quantos alunos consultados preferem A e não C?

Resolução: Usando o diagrama de Venn podemos escrever o número de alunos com suas preferências.



Portanto:

a) Os alunos consultados que preferem só o curso A são 40.

b) Os alunos consultados que preferem só dois cursos são 60.

c) Os alunos consultados que preferem o curso A ou B são 200.

d) Os alunos consultados que preferem A e não C são 50.

Exercícios

Nos Exercícios (1) e (2), classifique as sentenças como verdadeira(V) ou falsa(F).

1) Sejam A={1, 2, 3, 4} e B={1, 3, 4}. Então:

a) $B \subset A$ b) $3 \in A$ c) $2 \notin B$

d) $\{1, 2\} \in A$ e) $\{1, 2\} \subset A$ f) $\{4\} \in A$

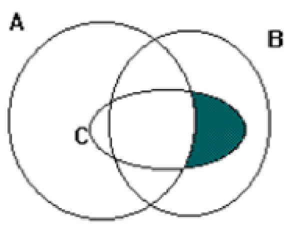
2) Sejam A={a, b, {a}, {a, b}} e B={a, b, {a, b}}. Então:

a) $B \subset A$ b) $a \in A$ c) $b \notin B$

d) $\{a, b\} \in A$ e) $\{a, b\} \subset A$ f) $\{a\} \in A$

3) Sejam X, Y e Z os conjuntos tais que $n(Y \cup Z)=20$, $n(X \cap Y)=5$, $n(X \cap Z)=4$, $n(X \cap Y \cap Z)=1$ e $n(X \cup Y \cup Z)=22$, determinar o número de elementos do conjunto $X - (Y \cap Z)$

4) A região hachurada da figura abaixo corresponde a:



a) $A - (B \cap C)$ b) $(B \cap C) - A$ c) $C - (A \cap B)$

5) Três produtos A, B e C são consumidos. Feita uma pesquisa de mercado sobre o consumo desses produtos, foram colhidos os resultados:

Produtos	A	B	C	A e B	A e C	B e C	A, B e C
Consumidores	100	140	180	20	40	30	10

a) Quantas pessoas consultadas consomem só o produto A?

b) Quantas pessoas consultadas consomem só dois produtos?

c) Quantas pessoas consultadas consomem A ou B?

d) Quantas pessoas consultadas consomem A e não consomem C?

6) Considere os conjuntos A={0, 1, 2, 3} e B ={2, 3, 4, 5}, subconjuntos do conjunto U={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}. Determine:

a) $A - B$ b) $A \cap \overline{B}$ c) $\overline{A \cup B}$ d) $\overline{A} \cap \overline{B}$

e) Qual a relação entre $A - B$ e $A \cap \overline{B}$? f) Qual a relação entre $\overline{A \cup B}$ e $\overline{A} \cap \overline{B}$?

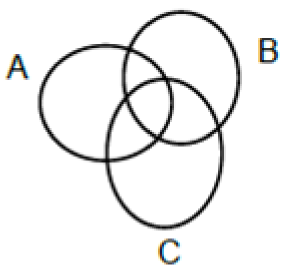
7) Sejam A={0, 1, {2}, {0, 1}}, B={1, {2}, {0, 1}} e C={0, 1, 2, {2}, {0, 1}}. Determine:

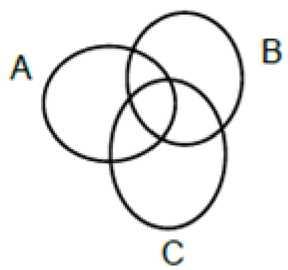
a) $A \cap B$ b) $B \cap C$

c) $(A \cap B \cap C)$ d) $C - (A \cup B)$

8) Em cada caso, hachurar o que se pede:

a) $A - (B \cup C)$ b) $(A - B) \cap (A - C)$





9) Sejam os conjuntos A, B e C finitos. Se $n(A\cap B)=18$, $n(A\cap C)=20$ e $n(A\cap B\cap C)=8$, então $n(A\cap(B\cup C))$ é:

a) 10 b) 20 c) 25 d) 30 e) 40

10) Sobre os membros de uma comissão sabe-se que 9 são solteiros, 5 são homens, 10 não são mulheres casadas, 8 não são homens solteiros.

Responda:

a) Quantos membros existem nessa comissão?

b) Quantos membros dessa comissão são homens casados?

11) Coloque (V) nas verdadeiras e (F) nas falsas, justificando.

a) $\overline{A-B}\cup\overline{B}\cup\overline{B-A}=\left(\overline{A}\cup B\right)\cup\left(A\cap B\right)$

d) $\overline{A}\Delta\overline{B}=A\Delta B$

b) $\left(A\cup B\right)\cap\overline{A}=\overline{B}\cup A$

e) $A-\left(B\cap C\right)=\left(A-B\right)\cup\left(A-C\right)$

c) $\overline{\overline{B}\cup\left(B-A\right)}=A\cap B$

12) Mostre que $A=B\Leftrightarrow\left(\overline{A}\cap B\right)\cup\left(A\cap\overline{B}\right)=\phi$

13) Mostre as propriedades(Leis de De Morgan):

a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

14) Mostre que $\left(\overline{A \cap \overline{B}}\right) \cup \left(B \cap C\right) = \overline{A} \cup B$

Teoria dos Conjuntos (Propriedades)

1) Se $A \subset B$, então $A \cap B = A$ e $A \cup B = B$

2)Idempotência : $A \cap A = A$ e $A \cup A = A$

3) $A \cap \phi = \phi$ e $A \cup \phi = A$

$A \cap U = A$ e $A \cup U = U$ (U = universo)

4)Comutativa : $A \cap B = B \cap A$ e $A \cup B = B \cup A$

5) Associativa : $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ e

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

6)Distributiva : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ e

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

7) $\overline{\overline{A}} = A$

8) Leis de De Morgan : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ e

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

9) $A \cap \overline{A} = \phi$

10) $A \cup \overline{A} = U$ (Sendo U : universo)

11) $A - B = A \cap \overline{B}$

12) $A \,\Delta\, A = \phi$

13) $A \,\Delta\, B = B \,\Delta\, A$

14) $A \,\Delta\, \phi = A$

15) $A \cap (A \cup B) = A$ e $A \cup (A \cap B) = A$

Respostas dos Exercícios

1) a) V b) V c) V d) F e) V f) F

2) a) V b) V c) F d) V e) V f) V

3) 9

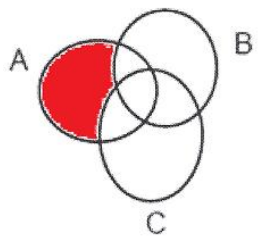
4) alternativa (b)

5) a) 50 b) 60 c) 220 d) 60

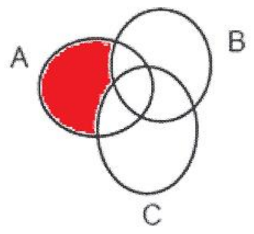
6) a) {0, 1} b) {0, 1} c) {6, 7} d) {6, 7} e) $A - B = A \cap \overline{B}$ f) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

7) a) B b) B c) B d) {2}

8) a)



b)



9) alternativa (d)

10) a) 12 b) 1

11)

a) F

$\overline{A-B} \cup \overline{B} \cup \overline{B-A}$

$\overline{A \cap \overline{\overline{B}}} \cup \overline{B} \bigcup \overline{B \cap \overline{\overline{A}}}$

$(\overline{A} \cup B) \cup \overline{B} \cup \overline{B} \cup A$

$\bigcup(\text{universo})$

$(\overline{A} \cup B) \bigcup (A \cap B)$

$\overline{A} \cup (B \cup (B \cap A))$

$\overline{A} \cup B$

b) F

$(A \cup B) \cap \overline{A}$

$(A \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{A})$

$\phi \cup (B \cap \overline{A})$

$(B \cap \overline{A})$

c) V

$\overline{\overline{B} \cup (B - A)}$

$B \cap \overline{(B - A)}$

$B \cap \overline{(B \cap \overline{A})}$

$B \cap (\overline{B} \cup A)$

$(B \cap \overline{B}) \cup (B \cap A)$

$\phi \cup (B \cap A)$

$A \cap B$

d) V

$\overline{A}\Delta\overline{B}$

$(\overline{A}-\overline{B})\cup(\overline{B}-\overline{A})$

$(\overline{A}\cap B)\cup(\overline{B}\cap A)$

$(B\cap\overline{A})\cup(A\cap\overline{B})$

$(B-A)\cup(A-B)$

$(A-B)\cup(B-A)$

$A\,\Delta\,B$

e) V

$A-(B\cap C)$

$A\cap\overline{(B\cap C)}$

$A\cap(\overline{B}\cup\overline{C})$

$(A\cap\overline{B})\cup(A\cap\overline{C})$

$(A-B)\cup(A-C)$

12) $(\Rightarrow)$

Se $A=B$, então:

$(\overline{A}\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$

$(\overline{A}\cap A)\cup(B\cap\overline{B})$

$\phi\cup\phi$

ϕ

$(\Leftarrow)$

Se $(\overline{A}\cap B)\cup(A\cap\overline{B})=\phi$, então:

$(\overline{A}\cap B)=\phi$ e $(A\cap\overline{B})=\phi$

$(B\cap\overline{A})=\phi$ e $(A\cap\overline{B})=\phi$

$(B-A)=\phi$ e $(A-B)=\phi$

$B\subset A$ e $A\subset B$

$A=B$

13)

a) $\overline{A\cup B}=\{x\,/\,x\notin A \text{ e } x\notin B\}=\{x\,/\,x\in\overline{A} \text{ e } x\in\overline{B}\}=\overline{A}\cap\overline{B}$

b) $\overline{A\cap B}=\{x\,/\,x\notin A \text{ ou } x\notin B\}=\{x\,/\,x\in\overline{A} \text{ ou } x\in\overline{B}\}=\overline{A}\cup\overline{B}$

14)

$\left(\overline{A\cap\overline{\overline{B}}}\right)\cup(B\cap C)$

$(\overline{A}\cup B)\cup(B\cap C)$

$\overline{A}\cup(B\cup(B\cap C))$

$\overline{A}\cup B$

CAPÍTULO 2 - PRINCÍPIO de INDUÇÃO FINITA (P I F)

Imagine que você está subindo uma escada infinitamente alta. Como saber se você será capaz de chegar a um degrau arbitrariamente alto? Suponha que você faça as seguintes hipóteses sobre a sua capacidade de subir:

1. Você consegue alcançar o primeiro degrau.

2. Uma vez chegando a um degrau, você é capaz de chegar ao próximo.

Se a proposição 1 e a condicional 2 forem ambas verdadeiras, então, pela proposição 1, você consegue chegar no primeiro degrau e, portanto, pela proposição 2, consegue chegar no segundo degrau; novamente pela proposição 2, você consegue chegar no terceiro degrau; mais uma vez pela proposição 2, você consegue chegar no quarto degrau; e assim por diante. Ambas as hipóteses são necessárias. Se apenas a primeira proposição fosse verdadeira, você não teria nenhuma garantia de passar do primeiro degrau e, se apenas a segunda fosse verdadeira, você poderia não ser capaz de começar nunca. Vamos supor que os degraus da escada estejam numerados pelos inteiros positivos - 1, 2, 3, etc. Agora pense sobre uma propriedade específica que um número possa ter. Em vez de "chegar a um degrau arbitrariamente alto", podemos falar sobre um inteiro positivo arbitrário tendo essa propriedade. Vamos usar a notação $P(n)$ pra dizer que o inteiro positivo n tem a propriedade P. Como usar a mesma técnica que usamos para subir a escada para provar que, qualquer que seja o inteiro positivo n, temos $P(n)$? As duas asserções que devemos provar são:

1. $P(1)$ (1 tem a propriedade P)

2. Para qualquer inteiro positivo k, $P(k) \rightarrow P(k+1)$ (Se qualquer número tem a propriedade P, o próximo também tem)

Se pudermos provar ambas as proposições 1 e 2, então $P(n)$ é válida para qualquer inteiro positivo n, da mesma forma que você poderia subir até um degrau arbitrário da escada.

Primeiro Princípio de Indução Matemática

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ P(1)\ \acute{e}\ verdade \\ 2.\ (\forall k)[P(k)\ verdade \rightarrow P(k+1)\ verdade] \end{array}\right\}\ P(n)\ verdade\ para\ todo\ inteiro\ \ positivo\ \ n$$

Demonstrações por Indução Matemática

Exemplo: Vamos provar que $1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) = n^2$ (1)

P(1): $1 = 1^2$ (Base de indução)

P(k): $1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2k - 1) = k^2$ (Hipótese de Indução)

Devemos provar que $P(k + 1) = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + [2(k + 1) - 1] = (k + 1)^2$

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2k - 1)}_{k^2} + [2(k + 1) - 1] =$$

$$k^2 + [2(k + 1) - 1] = k^2 + 2k + 2 - 1 = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$$

Portanto, $1 + 3 + 5 + 7 + ... + [2(k + 1) - 1] = (k + 1)^2$, o que mostra que a equação 1 é verdadeira para qualquer inteiro positivo n.

Exercícios

Use indução matemática para provar que as proposições dadas são verdadeiras

1) $2 + 6 + 10 + ... +(4n - 2) = 2n^2$

2) $2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n + 1)$

3) $1 + 5 + 9 + ... + (4n – 3) = n(2n – 1)$

4) $4 + 10 + 16 + ... + (6n – 2) = n(3n + 1)$

5) $5 + 10 + 15 + ... + 5n = \frac{5n(n+1)}{2}$

6) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, $n \geq 1$

7) $n^2 > 3n$, $n \geq 4$

8) $2^{2n} - 1$ é divisível por 3, $n > 0$.

9) $7^n - 1$ é divisível por 6, $n \geq 0$

10) Mostre pelo PIF que o produto de dois números inteiros e consecutivos é sempre par, ou seja, $n(n + 1)$ é par.

Respostas dos Exercícios

1)

$P(1):\ 2.1^2 = 2.1 = 2$ (Base de indução)

$P(k): 2 + 6 + 10 + ... + (4k - 2) = 2k^2$ (hipótese de indução)

$P(k+1)$: Devemos provar que $2 + 6 + 10 + ... + (4k - 2) + [4(k+1) - 2] = 2(k+1)^2$

$$2 + 6 + 10 + ... + (4k - 2) + [4(k+1) - 2] = 2k^2 + 4k + 2 = 2(k^2 + 2k + 1) = 2(k+1)^2$$

2)

$P(1):\ 1(1+1) = 1.2 = 2$ (Base de indução)

$P(k): 2 + 4 + 6 + ... + 2k = k(k+1)$ (hipótese de indução)

$P(k+1)$: Devemos provar que $2 + 4 + 6 + ... + 2k + 2(k+1) = (k+1)[(k+1)+1] = k^2 + 3k + 2$

$$2 + 4 + 6 + ... + 2k + 2(k+1) = k(k+1) + 2(k+1) = k^2 + k + 2k + 2 = k^2 + 3k + 2$$

3)

$P(1): 1(2.1 - 1) = 1$ (Base de indução)

$P(k): 1 + 5 + 9 + ... + (4k - 3) = k(2k - 1)$ (hipótese de indução)

$P(k+1)$: Devemos provar que $1 + 5 + 9 + ... + (4k - 3) + [4(k+1) - 3] = (k+1)[2(k+1) - 1] = 2k^2 + 3k + 1$

$$1 + 5 + 9 + ... + (4k - 3) + [4(k+1) - 3] = k(2k - 1) + [4(k+1) - 3] = 2k^2 - k + 4k + 1 = 2k^2 + 3k + 1$$

4)

$P(1):\ 1(3.1 + 1) = 1.4 = 4$ (Base de indução)

$P(k): 4 + 10 + 16 + ... + (6k - 2) = k(3k + 1)$ (hipótese de indução)

$P(k+1)$: Devemos provar que $4 + 10 + 16 + ... + (6k - 2) + [6(k+1) - 2] = (k+1)[3(k+1) + 1] = 3k^2 + 7k + 4$

$$4 + 10 + 16 + ... + (6k - 2) + [6(k+1) - 2] = k(3k + 1) + [6(k+1) - 2] = 3k^2 + k + 6k + 4 = 3k^2 + 7k + 4$$

5)

$P(1):\ \dfrac{5.1(1+1)}{2} = 5$ (Base de indução)

$P(k): 5 + 10 + 15 + ... + 5k = \dfrac{5k(k+1)}{2}$ (hipótese de indução)

$P(k+1)$: Devemos provar que $5 + 10 + 15 + ... + 5(k+1) = \dfrac{5(k+1)[(k+1)+1]}{2} = \dfrac{5k^2 + 15k + 10}{2}$

$$5 + 10 + 15 + ... + 5k + 5(k+1) = \frac{5k(k+1)}{2} + 5(k+1) = \frac{5k(k+1) + 10(k+1)}{2} = \frac{5k^2 + 15k + 10}{2}$$

6)

$P(1): \frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1$ (Base de indução)

$P(k): 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$ (hipótese de indução)

$P(k+1):$ Devemos provar que $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2\left[(k+1)+1\right]^2}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} = \frac{(k+1)^2(k^2 + 4(k+1))}{4} =$

$\frac{(k+1)^2(k^2 + 4k + 4)}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$

7)

$P(4):\ 4^2 > 3.4 \quad 16 > 12$ (Base de indução)

$P(k):\ k^2 > 3k,\ k \geq 4$ (hipótese de indução)

$P(k+1):$ Devemos provar que $(k+1)^2 > 3(k+1)$

$k^2 > 3k$

$k^2 + 2k + 1 > 3k + 2k + 1$

$(k+1)^2 > 3k + 2 + 1$ $(2k > 2$, pois $k \geq 4)$

$(k+1)^2 > 3k + 3$

$(k+1)^2 > 3(k+1)$

8)

$P(1):\ 2^{2.1} - 1 = 3$ (Base de indução)

$P(k): 2^{2k} - 1$ é divisível por 3 (hipótese de indução)

$P(k+1):$ Devemos provar que $2^{2(k+1)} - 1$ é divisível por 3

$2^{2k} - 1 = 3m \Rightarrow 2^{2k} = 3m + 1$

$2^{2(k+1)} - 1 = 2^{2k}.2^2 - 1 = (3m+1).4 - 1 = 12m + 3 = 3(4m+1)$, que é divisísvel por 3.

9)

$P(0):\ 7^0 - 1 = 0$ (Base de indução)

$P(k): 7^k - 1$ é divisível por 6 (hipótese de indução)

$P(k+1)$: Devemos provar que $7^{k+1} - 1$ é divisível por 6

$$7^k - 1 = 6m \Rightarrow 7^k = 6m + 1$$

$7^{k+1} - 1 = 7^k.7 - 1 = (6m+1).7 - 1 = 42m + 6 = 6(7m+1)$, que é divisísvel por 6.

10)

$P(1): 1(1+1) = 2$ (Base de indução)

$P(k): k(k+1)$ é par (hipótese de indução)

$P(k+1)$: Devemos provar que $(k+1)[(k+1)+1] = (k+1)(k+2) = k^2 + 3k + 2$ é par

$k^2 + 3k + 2 = k^2 + k + 2k + 2 = k(k+1) + 2(k+1)$, que é par

CAPÍTULO 3 - LÓGICA FORMAL

3.1 O que é lógica?

Lógica, em termos de Filosofia, é o estudo do raciocínio correto.[1]

O raciocínio é uma atividade mental em busca do conhecimento, em busca daquilo que queremos saber se é verdadeiro, falso ou indefinido.[2]

Há muitas denominações relativas ao estudo da Lógica, tais como: Lógica Proposicional, Lógica Simbólica, Lógica Matemática, Lógica das Proposições, Lógica Clássica, Lógica Formal, Lógica Aristotélica, Lógica Menor, Lógica de Predicados, Lógica de 1ª Ordem, etc. A nomenclatura sobre Lógica não é uniforme e pode ser até considerada confusa, em virtude dos vários enfoques utilizados pelos diversos estudiosos de Lógica, desde Aristóteles até o presente momento.

Além de ser um ramo da Filosofia, a Lógica é considerada, também, como sendo um ramo da Matemática, onde recebe a denominação de Lógica Matemática, além de outras.

A Lógica Aristotélica (também denominada Lógica Clássica ou Lógica Bivalente Clássica), estuda as proposições e os argumentos, vistos do modo que os utilizamos na linguagem natural (no nosso caso é a Língua Portuguesa) ou sob a forma de símbolos, quando passa a se denominar Lógica Simbólica, Lógica Formal ou Lógica Proposicional.[3]

A Lógica Matemática estuda as proposições e os argumentos, portanto dentro dos conceitos de Lógica Simbólica, porém com o intuito de estudar o raciocínio matemático. Atua como complementação da Lógica Aristotélica, permitindo eliminar (ou pelo menos diminuir) as ambiguidades muitas vezes existentes na linguagem natural e, também, possibilitando redações com maior rigor nos trabalhos científicos. Além disso, a Lógica Matemática possui pontos em comum com outros ramos da Matemática, tais como a Teoria dos Conjuntos e a Álgebra de Boole.

---

1 Stanford Encyclopedia of Philosophy (plato.stanford.edu/)

2 http://pt.wikipedia.org/wiki/Racioc%C3%ADnio

3 É importante observar que essa nomenclatura pode ter significado diferente em outros textos sobre Lógica.

3.2 Conceito de Proposição

Na linguagem natural nos acostumamos a vários tipos de proposições ou sentenças:

Declarativas: Exemplos: 1) Márcio é engenheiro. 2) Todos os homens são maus.

Interrogativas: Exemplos: 1) Será que o Roberto vai ao cinema? 2) Quantos candidatos foram aprovados no concurso para o Banco Central?

Exclamativas: Exemplos: 1) Que garota! 2) Feliz Natal!

Imperativas: Exemplos: 1) Feche a porta. 2) Não falte ao colégio.

Estudaremos somente as proposições declarativas, pois elas podem facilmente ser classificadas em verdadeiras e falsas e, assim, tornando-se objeto de nosso estudo.

Como vimos, na Lógica Proposicional são utilizadas somente orações declarativas, que são as proposições. Note-se que uma expressão matemática (exemplo: $x > y$) também é uma oração declarativa, com a única diferença de serem utilizados símbolos matemáticos ao invés de palavras da linguagem natural. No exemplo "$x > y$" a proposição, em linguagem natural, é "x é maior do que y".

Uma proposição é uma oração declarativa, que pode ser ou verdadeira ou falsa.
Exemplos:

A lua é um satélite da Terra.

Paris é a capital da França.

Dois mais dois são três.

Nos três primeiros exemplos, em decorrência de nosso conhecimento podemos afirmar que as duas primeiras proposições são verdadeiras e que a terceira proposição é falsa. Sobre a quarta proposição, como não conhecemos os valores de "x" e de "y", somente podemos afirmar que "ou ela é verdadeira ou ela é falsa".

3.3 Princípios da Lógica Proposicional

Os seguintes princípios regem a Lógica Proposicional:

Princípio do terceiro excluído

Uma proposição só pode assumir um de dois valores possíveis, ou verdadeiro ou falso, nunca um terceiro valor.

Princípio da não contradição

Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

Princípio da identidade

Se uma proposição é verdadeira ela é verdadeira e se uma proposição é falsa ela é falsa.

3.4 Valor lógico de uma proposição

Toda proposição possui um valor lógico, que é o valor VERDADE(indicado por V), se ela for verdadeira, ou FALSIDADE (indicado por F) se ela for falsa.

A lua é um satélite da Terra. (V)

Paris é a capital da França. (V)

Dois mais dois são três. (F)

Esses valores foram atribuídos porque nós conhecemos o conteúdo dessas três proposições. No estudo da Lógica Proposicional, na realidade, não é importante conhecer o conteúdo das proposições. A Lógica Proposicional enfatiza mais a relação que existe entre as proposições do que o conteúdo de cada uma delas.

3.5 Proposições Simples e Proposições Compostas

Uma proposição é denominada "proposição simples" quando ela não pode ser decomposta em outras proposições. Os exemplos dados até agora são de proposições simples.

Uma proposição é denominada “proposição composta” quando ela pode ser decomposta em outras proposições. Proposições compostas são formadas com proposições simples utilizando-se “conectivos”.

Para estabelecer o conceito de "proposição composta", há necessidade, portanto, de se definir o que são conectivos.

Exemplo:

A lua é um satélite da terra.

Paris é a capital da França.

As duas proposições simples acima podem formar uma proposição composta por meio do conectivo “E”:

A lua é um satélite da terra ***e*** *Paris é a capital da França.*

3.6 Conectivos

Conectivos são palavras ou símbolos com os quais obtemos novas proposições a partir de proposições já existentes. São conhecidos, também, como “operadores lógicos”.

A definição de um conectivo é baseada em uma tabela-verdade, onde é estabelecido o valor lógico da proposição formada com a aplicação dos conectivos.

Existem dois tipos de conectivos:

Conectivo unário, que se aplica a apenas uma proposição.

Conectivo binário, que se aplica a duas proposições.

3.6.1 Conectivo NÃO (¬) (Negação) (NOT)

O conectivo **NÃO** é um conectivo unário, pois se aplica a apenas uma proposição. É, também, denominado **Negação (**ou **NOT,** nas notações em inglês).

Vamos utilizar para esse conectivo o símbolo "¬" (às vezes é utilizado o símbolo "~” ou um símbolo diferente).

O conectivo **NÃO** altera o valor lógico da proposição de V para F ou de F para V. O termo conectivo parece impróprio, pois dá a ideia de conectar duas ou mais coisas, porém é assim que é normalmente denominado.

É definido pela seguinte tabela-verdade:

P	¬ P
V	F
F	V

Exemplos:

P: *A lua é um satélite da Terra.*

¬ ***P****: A lua* **não** *é um satélite da Terra.*

Pode-se expressar a negação, na linguagem natural, de várias formas, como por exemplo:

¬ ***P****:* ***Não é verdade que*** *a lua é um satélite da Terra.*

¬ ***P****:* ***É falso que*** *a lua é um satélite da Terra.*

3.6.2 Conectivo “E” (∧) (Conjunção) (AND)

O conectivo **E** é um conectivo binário, pois é aplicado a duas proposições. É, também, denominado **Conjunção** (ou **AND**, nas notações em inglês).

Vamos utilizar para esse conectivo o símbolo "∧" (às vezes é utilizado o símbolo "**&**” ou um símbolo diferente).

É definido pela tabela-verdade seguinte:

P	Q	P ∧ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemplos:

P: *A lua é um satélite da Terra.*

Q: *Paris é a capital da França.*

R: *Dois mais dois são três.*

P ∧ Q*: A lua é um satélite da Terra* ***e*** *Paris é a capital da França. (V)*

R ∧ Q*: Dois mais dois são três* ***e*** *Paris é a capital da França. (F)*

3.6.3 Conectivo “OU” ($\vee$) (Disjunção ou Disjunção Inclusiva) (OR)

O conectivo **OU** é um conectivo binário, pois é aplicado a duas proposições. É, também, denominado **Disjunção** ou **Disjunção Inclusiva** (ou **OR**, nas notações em inglês).

Vamos utilizar para esse conectivo o símbolo "$\vee$" (às vezes é utilizado o símbolo "|” ou um símbolo diferente).

É definido pela tabela-verdade seguinte:

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

A disjunção inclusiva de duas proposições **P** e **Q** é a proposição “$P \vee Q$”, que é <u>falsa</u> quando o valor lógico das proposições **P** e **Q** forem ambos falsos, e <u>verdadeira</u> nos demais casos, ou seja, quando pelo menos uma das proposições é verdadeira. O conectivo “ou” inclusivo é também chamado de soma lógica.

Exemplos:

P: A lua é um satélite da Terra. *Q: Paris é a capital da França.*

R: Dois mais dois são três. *S: Cinco é um número par.*

P $\vee$ ***Q****: A lua é um satélite da Terra* ***ou*** *Paris é a capital da França. (V)*

R $\vee$ ***Q****: Dois mais dois são três* ***ou*** *Paris é a capital da França. (V)*

R $\vee$ ***S****: Dois mais dois são três* ***ou*** *cinco é um número par. (F)*

3.6.4 Conectivo “Se e somente se” ($\leftrightarrow$) (Bi-condicional) (EQV)

O conectivo “**Se e somente se”** é um conectivo binário, pois é aplicado a duas proposições. É, também, denominado **Bi-condicional** (ou **EQV**, nas notações em inglês).

Vamos utilizar para esse conectivo o símbolo "$\leftrightarrow$" (às vezes é utilizado o símbolo “$\Leftrightarrow$” ou um símbolo diferente).

É definido pela tabela-verdade seguinte:

P	Q	P $\leftrightarrow$ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Este conectivo expressa a condição de uma proposição com valor lógico verdade ser necessária e suficiente para que outra seja verdadeira. A proposição composta P $\leftrightarrow$ **Q** é a bi-condicional de P e Q. Pode-se dizer que:

P é condição necessária e suficiente para Q.

Q é condição necessária e suficiente para P

Note que o símbolo possui seta para os dois lados.

Exemplo:

***P**: A lua é um satélite da terra.*

***Q**: Paris é a capital da França.*

P $\leftrightarrow$ Q: *A lua é um satélite da terra se, e somente se, Paris é a capital da França.* (V)

Chama-se bicondicional à proposição representada por "**P** se, e somente se, **Q**" cujo valor lógico é a verdade(V) , quando **P** e **Q** são ambos verdadeiros ou ambos falsos e, a falsidade(F) quando **P** e **Q** têm valores lógicos diferentes, como podemos observar na tabela acima.

3.6.5 Conectivo "Se ... então" ($\rightarrow$) (Condicional) (IMP)

O conectivo "**Se ... então"** é um conectivo binário, pois é aplicado a duas proposições. É, também, denominado C**ondicional** (ou **IMP**, nas notações em inglês).

Vamos utilizar para esse conectivo o símbolo "$\rightarrow$" (às vezes é utilizado o símbolo "$\Rightarrow$" ou um símbolo diferente).

É definido pela tabela-verdade seguinte:

P	Q	$P \rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Este conectivo expressa a condição de uma proposição com valor lógico verdade ser suficiente para que uma outra seja verdadeira e expressa também a condição de uma proposição com valor lógico verdade ser necessária para que a outra seja verdadeira. Pode-se dizer que:

P é condição suficiente para Q

Q é condição necessária para P

Exemplos:

***P**: Aracajú é a capital de Sergipe.* ***Q**: 9 – 7 = 2*

***R**: Paris é a capital da França.* ***S**: Seis é um número primo.*

$P \rightarrow Q$: Se Aracajú é a capital de Sergipe, então 9-7=2. (V)

$R \rightarrow S$: Se Paris é a capital da França, então seis é um número primo. (F)

3.7 Regras de precedência em proposições compostas

Uma proposição composta, na linguagem natural, exige um esforço de interpretação para que seu sentido seja apreendido corretamente. Mesmo assim, quem a redige necessita de um bom conhecimento da "lógica" da língua (língua portuguesa, no nosso caso) para que não haja dubiedade na sua interpretação.

Proposições em linguagem simbólica dispensam esse esforço de interpretação, porém há necessidade do estabelecimento de regras de precedência (regras de prioridade) das operações lógicas.

Usamos a seguinte ordem de precedência de operação:

$\neg \ \wedge \ \vee \ \leftrightarrow \ \rightarrow$

Tal como na álgebra convencional, os parênteses servem para a definição da precedência de operações, ou seja, as operações internas são prioritárias em relação às operações externas.

Do mesmo modo, quando tivermos dois ou mais operadores iguais no mesmo nível de parênteses a prioridade é do que está à esquerda (prioridade da esquerda para a direita).

Para que não haja dependência do esquema de prioridade adotado, uma solução é forçar as prioridades desejadas através de parênteses. Uma proposição em que as prioridades de operação são definidas somente por parênteses é denominada "proposição bem formulada".

Como as linguagens de programação adotam critérios de prioridade de operação diferentes, é interessante adotar sempre o critério de definição de prioridades por meio de parênteses. Deste modo, fica mais fácil para quem lê o texto interpretar as prioridades que foram definidas e, igualmente, quem escreve uma linha de programa usando esse critério, não precisa lembrar qual o esquema de prioridades da linguagem.

Exemplo:

$$P \overset{4}{\wedge} Q \overset{5}{\vee} \overset{2}{\neg} R \overset{7}{\rightarrow} \overset{3}{\neg} P \overset{6}{\leftrightarrow} (P \overset{1}{\rightarrow} Q)$$

As prioridades de operação no exemplo acima estão numeradas de 1 a 4 no nível mais interno. Para as duas operações do tipo "condicional" (3 e 4), a da esquerda (número 3) é prioritária.

No nível mais externo de parênteses temos as operações de 5 a 8. Para as três operações do tipo "condicional" (6, 7 e 8), a da esquerda (número 6) é prioritária.

No nível sem parênteses temos as operações de 9 a 15. Para as duas operações do tipo "condicional" (14 e 15), a da esquerda (número 14) é prioritária.

Algumas operações podem ser executadas em ordem diferente da convencionada sem alterar o resultado do valor lógico da proposição. Todavia, é conveniente estabelecer um método e seguir o método sem perder tempo para verificar se há outras possibilidades. Há um ganho de tempo e uma menor probabilidade de erro se for seguido um método.

Exercícios

1) Considere as proposições: A: O rato entrou no buraco. B: O gato seguiu o rato.

Escreva em linguagem corrente:

a) $\neg A$

b) $\neg B$

c) $A \wedge B$

d) $A \vee B$

e) $\neg A \wedge B$

f) $A \vee \neg B$

g) $\neg(A \wedge B)$

h) $\neg A \vee \neg B$

2) Considere as sentenças:

P: Carolina é alta. Q: Carolina é elegante.

Escreva as sentenças abaixo em linguagem simbólica.

a) Carolina é alta e elegante.

b) Carolina é alta, mas não é elegante.

c) É falso, que Carolina é baixa ou elegante.

d) Carolina é alta, ou é baixa e elegante.

3) Dar o valor lógico das proposições:

a) $3 > 5$ ou 7 é ímpar

b) $\neg(\neg$(Porto Alegre é a capital do Estado de São Paulo))

c) Se 9 é par, então, hoje é terça-feira.

d) 9 é um número quadrado perfeito e π é um número irracional.

e) $\neg(3x4=12$ e $5x3=15)$

3.8 Tabela -Verdade

Vimos até agora os valores lógicos dos conectivos e alguns valores lógicos de proposições. Quando se tem uma proposição qualquer composta de várias proposições P, Q, R, é possível construir uma tabela da mesma, contemplando todos os valores lógicos possíveis dessa proposição. Essa tabela é a tabela-verdade da proposição. A última coluna da tabela-verdade pode ser denominada de "resultado" da tabela-verdade, que nos exemplos abaixo é apresentada em negrito.

As tabelas-verdade abaixo foram construídas com a convenção de prioridades estabelecida anteriormente para este texto.

Exemplos:

P	Q	R	P	$\rightarrow$	Q	$\wedge$	R	$\vee$	(P	$\wedge$	Q)
V	V	V		**V**		V		V		V	
V	V	F		**V**		F		V		V	
V	F	V		**F**		F		F		F	
V	F	F		**F**		F		F		F	
F	V	V		**V**		V		V		F	
F	V	F		**V**		F		F		F	
F	F	V		**V**		F		F		F	
F	F	F		**V**		F		F		F	

P	Q	R	$\neg$	P	$\vee$	R	$\leftrightarrow$	P	$\wedge$	(Q	$\rightarrow$	P)
V	V	V	F		V		**V**		V		V	
V	V	F	F		F		**F**		V		V	
V	F	V	F		V		**V**		V		V	
V	F	F	F		F		**F**		V		V	
F	V	V	V		V		**F**		F		F	
F	V	F	V		V		**F**		F		F	
F	F	V	V		V		**F**		F		V	
F	F	F	V		V		**F**		F		V	

P	Q	R	R	$\wedge$	Q	$\leftrightarrow$	P	$\vee$	(Q	$\rightarrow$	P	$\vee$	(R	$\leftrightarrow$	P)	$\rightarrow$	Q)
V	V	V		V		**V**		V		V		V		V		V	
V	V	F		F		**F**		V		V		V		F		V	
V	F	V		F		**F**		V		V		V		V		F	
V	F	F		F		**F**		V		V		V		F		F	
F	V	V		V		**V**		V		F		F		F		V	
F	V	F		F		**F**		V		V		V		V		V	
F	F	V		F		**V**		F		V		F		F		F	
F	F	F		F		**V**		F		V		V		V		F	

Exercícios

Construir a tabela verdade relativa à forma sentencial.

4) $(P \vee Q) \wedge (\neg P \wedge \neg Q)$

P	Q	$(P \vee Q) \wedge (\neg P \wedge \neg Q)$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

5) $[A \rightarrow (B \wedge C)] \vee \neg(A \leftrightarrow \neg C)$

A	B	C	$[A \rightarrow (B \wedge C)] \vee \neg(A \leftrightarrow \neg C)$
V	V	V	
V	V	F	
V	F	V	
V	F	F	
F	V	V	
F	V	F	
F	F	V	
F	F	F	

6) $[(\neg A \wedge B) \rightarrow (C \vee D)] \rightarrow (\neg D \leftrightarrow A)$

A	B	C	D	$[(\neg A \wedge B) \rightarrow (C \vee D)] \rightarrow (\neg D \leftrightarrow A)$
V	V	V	V	
V	V	V	F	
V	V	F	V	
V	V	F	F	
V	F	V	V	
V	F	V	F	
V	F	F	V	
V	F	F	F	
F	V	V	V	
F	V	V	F	
F	V	F	V	
F	V	F	F	
F	F	V	V	
F	F	V	F	
F	F	F	V	
F	F	F	F	

7) $[(A \wedge C) \vee (B \rightarrow \neg C)] \leftrightarrow [(B \wedge \neg A) \vee (A \rightarrow \neg C)]$

A	B	C	$[(A \wedge C) \vee (B \rightarrow \neg C)] \leftrightarrow [(B \wedge \neg A) \vee (A \rightarrow \neg C)]$
V	V	V	
V	V	F	
V	F	V	
V	F	F	
F	V	V	
F	V	F	
F	F	V	
F	F	F	

8) $[(A \vee B) \wedge (\neg C \rightarrow A)] \leftrightarrow \neg[(\neg A \leftrightarrow B) \vee (C \wedge A)]$

A	B	C	$[(A \vee B) \wedge (\neg C \rightarrow A)] \leftrightarrow \neg[(\neg A \leftrightarrow B) \vee (C \wedge A)]$
V	V	V	
V	V	F	
V	F	V	
V	F	F	
F	V	V	
F	V	F	
F	F	V	
F	F	F	

9) $[(A \vee B) \rightarrow (\neg C \wedge A)] \rightarrow \neg[(A \vee \neg B) \wedge (C \leftrightarrow B)]$

A	B	C	$[(A \vee B) \rightarrow (\neg C \wedge A)] \rightarrow \neg[(A \vee \neg B) \wedge (C \leftrightarrow B)]$
V	V	V	
V	V	F	
V	F	V	
V	F	F	
F	V	V	
F	V	F	
F	F	V	
F	F	F	

3.9 Tautologia

Definição – Chama-se **tautologia** toda a proposição composta cuja coluna referente ao "resultado" da sua tabela-verdade encerra somente a letra V(verdade).

Em outros termos, **tautologia** é toda proposição composta P cujo valor lógico é sempre V(verdade), quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições simples que a compõem.

As tautologias são também denominadas **proposições tautológicas** ou **proposições logicamente verdadeiras.**

Exemplo: A proposição "P $\vee$ ¬(P $\wedge$ Q)" é **tautológica**, conforme se vê pela tabela-verdade:

P	Q	P $\vee$ ¬ (P $\wedge$ Q)
V	V	**V** F V
V	F	**V** V F
F	V	**V** V F
F	F	**V** V F

3.10 Contradição

Definição – Chama-se **contradição** toda a proposição composta cuja coluna referente ao "resultado" de sua tabela-verdade encerra somente a letra F(falsidade).

Em outros termos, **contradição** é toda proposição composta P(p, q, r, ...) cujo valor lógico é sempre F(falsidade), quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições simples componentes p, q, r, ...

Como uma tautologia é sempre verdadeira(V), a negação de uma tautologia é sempre falsa(F), ou seja, é uma contradição, e vice-versa.

As contradições são também denominadas **proposições contraválidas** ou **proposições logicamente falsas**.

Exemplo: A proposição "¬p $\wedge$ (p $\wedge$ ¬q)" é uma **contradição**, conforme mostra a sua tabela-verdade:

P	Q	¬ P $\wedge$ (P $\wedge$ ¬ Q)
V	V	F **F** F F
V	F	F **F** V V
F	V	V **F** F F
F	F	V **F** F V

3.11 Contingência

Definição – Chama-se **contingência** toda a proposição composta em cuja coluna referente ao “resultado” da sua tabela-verdade figuram as letras V e F cada uma pelo menos uma vez.

Em outros termos, **contingência** é toda proposição composta que não é nem tautologia nem contradição.

As proposições são também denominadas **proposições contingentes** ou **proposições indeterminadas.**

Exemplo:

A proposição “p $\vee$ q $\rightarrow$ p” é uma **contingência**, conforme mostra a sua tabela-verdade:

P	Q	P $\vee$ Q $\rightarrow$ P
V	V	V **V**
V	F	V **V**
F	V	V **F**
F	F	F **V**

Exemplo

Se a forma sentencial $(A \leftrightarrow (\neg B \wedge C)) \rightarrow (B \rightarrow C)$ é falsa, quais valores possíveis podem assumir A, B e C?

$(A \leftrightarrow (\neg B \wedge C)) \rightarrow (B \rightarrow C)$

____________________0__________ 1ª conclusão

____ 1__________________0____ 2ª conclusão

_________1____0_______1_____0__ 3ª conclusão

________0______________________ 4ª conclusão

__0___________0_________________ 5ª conclusão

Assim, A = 0, B = 1 e C = 0

Exercicios

As formas sentenciais que seguem são falsas. Quais valores possíveis podem assumir A, B, C, D e E?

10) $(\neg A \wedge B) \rightarrow (B \leftrightarrow C)$

11) $(A \vee \neg B) \rightarrow [(B \vee C) \rightarrow C]$

12) $A \rightarrow [(\neg (B \vee C) \leftrightarrow D) \vee ((B \wedge E) \rightarrow (\neg C \wedge D))]$

13) $(A \vee \neg B) \vee [((C \vee B) \wedge A) \vee (\neg B \wedge (B \vee D))]$

14) $[(A \wedge B) \rightarrow C] \rightarrow [(B \vee C) \rightarrow A]$

3.12 Implicações e Equivalências Lógicas

Dizemos que uma forma sentencial X implica logicamente uma forma sentencial Y, se a forma sentencial $X \leftrightarrow Y$ for uma tautologia.

Exemplos

Eliminação da Condicional

$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

A	B	$A \rightarrow B$		$\neg A \vee B$
V	V	**V**		F **V** V
V	F	**F**		F **F** F
F	V	**V**		V **V** V
F	F	**V**		V **V** F

Conclusão: $A \rightarrow B$ e $\neg A \vee B$ são equivalentes.

Leis de De Morgan

$\neg (A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

A	B	$\neg (A \vee B)$		$\neg A \wedge \neg B$
V	V	**F** V		F **F** F
V	F	**F** V		F **F** V
F	V	**F** V		V **F** F
F	F	**V** F		V **V** V

Conclusão: $\neg (A \vee B)$ e $\neg A \wedge \neg B$ são equivalentes

$\neg (A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

A	B	$\neg (A \wedge B)$		$\neg A \vee \neg B$
V	V	**F** V		F **F** F
V	F	**V** F		F **V** V
F	V	**V** F		V **V** F
F	F	**V** F		V **V** V

Conclusão: $\neg (A \wedge B)$ e $\neg A \vee \neg B$ são equivalentes

Eliminação da Bicondicional

$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$

A	B	$(A \leftrightarrow B)$		$(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$
V	V	**F** V		F **F** F
V	F	**F** V		F **F** V
F	V	**F** V		V **F** F
F	F	**V** F		V **V** V

Conclusão: $A \leftrightarrow B$ e $(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$ são equivalentes

Vimos, então, algumas equivalências lógicas. Na tabela a seguir, podemos encontrar outras equivalências lógicas que, para verificar sua validade, basta construir a tabela verdade como foi feito nos exemplos anteriores.

Outras equivalências Lógicas:

1) $\neg\neg A \Leftrightarrow A$ *Lei da Dupla Negação*	7) $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$ *Leis de Absorção* $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$ $[(A \wedge B) \vee \neg B] \Leftrightarrow (A \vee \neg B)$ $[(A \vee B) \wedge \neg B] \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$
2) $(A \wedge A) \Leftrightarrow A$ *Leis da Idempotência* $(A \vee A) \Leftrightarrow A$	8) $T \wedge A \Leftrightarrow A$ $C \wedge A \Leftrightarrow C$ *(T é tautologia ; C é contradição)* $T \vee A \Leftrightarrow T$ $C \vee A \Leftrightarrow A$
3) $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$ *Leis da Comutatividade* $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$	9) $(A \to B) \Leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$ *(Contra positivo)* $(A \to B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$ *Eliminação da Condicional* $(A \to B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$
4) $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$ *Leis da Associatividade* $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$	10) $(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow [(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)]$ *Eliminação da Bicondicional* $(A \leftrightarrow B) \Leftrightarrow [(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)]$
5) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ *Leis de De Morgan* $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$	11) $(A \wedge \neg A) \Leftrightarrow C$ $(A \vee \neg A) \Leftrightarrow T$ *(T é tautologia ; C é contradição)*
6) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ *Leis Distributivas* $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	

Exercícios

15) A forma sentencial $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B) \wedge B$ é logicamente equivalente a:

a) $A \rightarrow B$ b) $A \wedge B$ c) $A \vee B$ d) $A \leftrightarrow B$

16) A forma sentencial $[(B \rightarrow C) \rightarrow \neg A] \vee (\neg C \rightarrow B)$ é logicamente equivalente a:

a) $\neg C \rightarrow (A \rightarrow B)$ b) $C \wedge (A \rightarrow B)$ c) $C \rightarrow (A \rightarrow B)$

17) A forma sentencial $(\neg A \vee A) \rightarrow B \rightarrow [A \rightarrow (B \wedge \neg B)]$ é logicamente equivalente a:

a) $\neg(A \vee B)$ b) $A \wedge B$ c) $A \vee B$ d) $\neg(B \wedge A)$

18) A forma sentencial $[A \wedge (B \rightarrow C)] \rightarrow [(A \rightarrow B) \vee C]$ é logicamente equivalente a:

a) $C \rightarrow (A \rightarrow B)$ b) $C \wedge (A \rightarrow B)$ c) $A \rightarrow (B \vee C)$

19) A forma sentencial $[(\neg A \vee B) \wedge \neg(B \wedge \neg A)] \vee \{[\neg(A \wedge \neg B) \wedge (\neg B \vee A) \wedge (C \rightarrow A)] \wedge (C \rightarrow C)\}$ é logicamente equivalente a:

a) $A \leftrightarrow B$ b) $C \wedge (A \rightarrow B)$ c) $A \rightarrow (B \vee C)$ d) $(A \vee B) \wedge C$

20) A forma sentencial $\neg[(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)] \wedge (A \wedge \neg B)$ é logicamente equivalente a:

a) $A \wedge \neg B$ b) $\neg A \wedge B$ c) Tautologia d) Contradição

3.13 Negação

Observação: Em muitas situações é importante conhecer a leitura das proposições e sua simbologia.

$A \rightarrow B$ Lê-se: Se A, então B

A, somente se B

A é condição suficiente para B

B é condição necessária para A

$A \leftrightarrow B$ Lê-se: A se, e somente se, B

A é condição necessária e suficiente para B

Exemplo

Dar a negação em linguagem corrente da proposição seguinte.

“As rosas são amarelas e os cravos brancos”

Definindo:

A: As rosas são amarelas.

B: Os cravos são brancos.

Assim, podemos escrever $A \wedge B$

A negação de $(A \wedge B)$ é $\neg(A \wedge B)$ que, pela Lei de De Morgan, é $\neg A \vee \neg B$. Em linguagem corrente, a negação de “As rosas são amarelas **e** os cravos brancos” é “As rosas não são amarelas **ou** os cravos não são brancos”.

Agora, vamos dar a negação em linguagem corrente da proposição “Se estiver cansado ou com fome, não consigo estudar.

C: estiver cansado

F: com fome

E: consigo estudar

$\neg E$: não consigo estudar

Assim, escrevemos $(C \vee F) \rightarrow \neg E$

Negando.... $\neg [(C \vee F) \rightarrow \neg E]$

$\neg [\neg(C \vee F) \vee \neg E]$

$(C \vee F) \wedge E$

Em linguagem corrente: “Mesmo cansado **ou** com fome, consigo estudar”

Exercícios

Dar a negação em linguagem corrente das proposições seguintes.

21) Fará sol se, e somente se, não chover.

22) Bruno é aluno de Matemática Discreta ou pesquisador.

23) Todo menino gosta de futebol.

24) Tudo que é bom engorda.

25) Todos os homens são mortais.

26) Se eu estudar Matemática Discreta e tiver sorte na prova, então serei aprovado.

27) Ficarei rico, se estudar ou ganhar na loteria

3.14 Lógica da Argumentação

3.14.1 Argumento

Um argumento(ou inferência) é uma afirmação na qual um dado conjunto de proposições P_1, P_2, P_3, ..., P_n, chamadas de **premissas**, implica(tem como consequência) outra proposição Q, chamada de **conclusão**. Tal argumento é denotado por $P_1, P_2, P_3, ..., P_n \mid\!\!\text{———} Q$

O símbolo $\vdash\!\!\!\!\text{——}$, chamado de "traço de inserção", afirma que a proposição Q, à sua direita, pode ser deduzido utilizando como premissas as proposições que estão à sua esquerda.

Observação: Todo argumento que consiste em duas premissas e uma conclusão denomina-se **silogismo**.

3.14.2 Validade de um argumento

Diz-se que é válido um argumento se, e somente se, a conclusão for verdadeira, todas as vezes que as premissas forem verdadeiras.

Assim, o argumento $P_1, P_2, P_3, ..., P_n \vdash\!\!\!\!\text{——} Q$ é **válido** se, e somente se, , a conclusão Q for verdadeira todas as vezes que as premissas $P_1, P_2, P_3, ..., P_n$ forem verdadeiras. Um argumento não válido é chamado de **falácia(**ou sofisma). As premissas dos argumentos são verdadeiras ou, pelo menos, admitidos como verdadeiras. Aliás, a lógica só se preocupa com a validade dos argumentos e não com a verdade ou falsidade de suas premissas e das conclusões.

A validade de um argumento depende tão somente da relação existente entre as premissas e a conclusão. Logo, afirmar que um dado argumento é **válido** significa afirmar que as premissas estão de tal modo relacionadas com a conclusão que não é possível ter a conclusão falsa se as premissas forem verdadeiras.

Observação: Quando um argumento é válido, a condicional da conjunção das premissas com a conclusão é tautológica.

Importante*

Suponha que o argumento que queremos provar tenha a forma $(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge ... \wedge P_n) \rightarrow (R \rightarrow S)$, ou seja, temos as premissas(hipóteses) $P_1, P_2, P_3, ..., P_n$ e a conclusão $(R \rightarrow S)$ que é uma implicação. Nesses casos, ao invés de usarmos $P_1, P_2, P_3, ..., P_n$ e inferir $(R \rightarrow S)$, podemos adicionar R como uma premissa(hipótese) adicional e depois inferir S. Desta forma, o argumento terá a forma $(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge ... \wedge P_n \wedge R) \rightarrow S$.

A justificativa formal pode ser obtida ao provar a equivalência LÓGICA entre as proposições $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ e $(A \wedge B) \rightarrow C$, como segue:

$$A \rightarrow (B \rightarrow C) \Leftrightarrow A \rightarrow (\neg B \vee C) \Leftrightarrow \neg A \vee (\neg B \vee C) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B) \vee C \Leftrightarrow \neg(A \wedge B) \vee C \Leftrightarrow (A \wedge B) \rightarrow C$$

Exemplo

Sejam as premissas:

i) Se um homem é feliz, ele não é solteiro.

ii) Se um homem não é feliz, ele morre cedo.

Conclusão: Homens solteiros morrem cedo.

Definindo: F: Homem é feliz S: Solteiro C: Morre cedo

Podemos escrever a forma simbólica da argumentação como:

$$[(F \rightarrow \neg S) \wedge (\neg F \rightarrow C)] \rightarrow (S \rightarrow C)$$

$$[(F \rightarrow \neg S) \wedge (\neg F \rightarrow C) \wedge S] \rightarrow C \quad (*)$$

[(F	→	¬	S)	∧	(¬	F	→	C)	∧	S]	→	C	
	1						1			1			1ª conclusão
			1										2ª conclusão
		0											3ª conclusão
0						0							4ª conclusão
					1			1				1	5ª conclusão
											1		conclusão final

Portanto, a argumentação é verdadeira. Observe que a condicional da conjunção das premissas com a conclusão é tautológica.

Exercícios

Em cada caso, considere as premissas e a conclusão, e verifique se a argumentação é **válida** ou é uma **falácia**.

28) Premissas:

i) Se um aluno é feliz, ele faz Matemática Discreta.

ii) Se um aluno não é feliz, ele não é estudioso.

Conclusão: alunos que não fazem Matemática Discreta, não são estudiosos.

29) Premissas:

i) Ana Carolina é estudiosa.

ii) Todo estudioso é aprovado em Matemática Discreta.

Conclusão: Ana Carolina será reprovada em Matemática Discreta.

30) Premissas:

i) Se trabalho, não posso estudar.

ii) Trabalho ou serei aprovado em Matemática Discreta.

iii) Trabalhei.

Conclusão: Fui reprovado em Matemática Discreta.

31) Premissas:

i) Todo caranguejo é crustáceo.

ii) Peixe não é caranguejo.

Conclusão: Peixe não é crustáceo.

32) Premissas:

i) Existem professores que são carecas.

ii) Todas as pessoas carecas são competentes.

Conclusão: Existem professores que são competentes.

Respostas dos Exercícios

1)

a) O rato não entrou no buraco.

b) O gato não seguiu o rato.

c) O rato entrou no buraco e o gato seguiu o rato.

d) O rato entrou no buraco ou o gato seguiu o rato.

e) O rato não entrou no buraco e o gato seguiu o rato.

f) O rato entrou no buraco ou o gato não seguiu o rato.

g) Não é verdade, que o rato entrou no buraco e o gato seguiu o rato.

h) O rato não entrou no buraco ou o gato não seguiu o rato.

2)

a) $P \wedge Q$ b) $P \wedge \neg Q$ c) $\neg(\neg P \vee Q)$ d) $P \vee (\neg P \wedge Q)$

3) a) V b) F c) V d) V e) F

4) F F F F 5) V F V F V V V V 6) F V F V F V F V V F V V V F V F

7) F V F V F V V V 8) F V F F F V F F 9) V V V F V V V F

10) A=C=0 e B=1

11) A=B=1 e C=0

12) A=B=C=D=E=1

13) A=C=D=0 e B=1 ou A=C=0 e B=D=1 ou A=D=0 e B=C=1 ou A=0 e B=C=D=1

14) A=B=0 e C=1 ou A=0, B=C=1 ou A=C=0 e B=1

15) $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B) \vee B$
$(\neg A \vee B) \rightarrow (\neg A \vee B) \wedge B$
$(A \wedge \neg B) \vee B$
$A \vee B$

16) $[(B \rightarrow C) \rightarrow \neg A] \vee (\neg C \rightarrow B)$
$[(\neg B \vee C) \rightarrow \neg A] \vee (C \vee B)$
$[(B \wedge \neg C) \vee \neg A] \vee (C \vee B)$
$B \vee [(B \wedge \neg C)] \vee \neg A \vee C$
$B \vee \neg A \vee C$
$C \vee (\neg A \vee B)$
$C \vee (A \rightarrow B)$
$\neg C \rightarrow (A \rightarrow B)$

17) $(\neg A \vee A) \rightarrow B \rightarrow [A \rightarrow (B \wedge \neg B)]$
$T \rightarrow B \rightarrow (A \rightarrow C)$
$(C \vee B) \rightarrow (\neg A \vee C)$
$B \rightarrow \neg A$
$\neg B \vee \neg A$
$\neg (B \wedge A)$ onde : T é tautologia; C é contradição

18) $[A \wedge (B \rightarrow C)] \rightarrow [(A \rightarrow B) \vee C]$

$[A \wedge (\neg B \vee C)] \rightarrow [(\neg A \vee B) \vee C]$

$[\neg A \vee \neg (\neg B \vee C)] \vee [(\neg A \vee B) \vee C]$

$[\neg A \vee (B \wedge \neg C)] \vee [(\neg A \vee B) \vee C]$

$\neg A \vee B \vee C$

$\neg A \vee (B \vee C)$

$A \rightarrow (B \vee C)$

19) $[(\neg A \vee B) \wedge \neg(B \wedge \neg A)] \vee \{[\neg(A \wedge \neg B) \wedge (\neg B \vee A) \wedge (C \rightarrow A)] \wedge (C \rightarrow C)\}$

$[(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)] \vee \{[(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A) \wedge (\neg C \vee A)] \wedge T\}$

$[(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)] \vee \{[(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A) \wedge (\neg C \vee A)]\}$

$(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$

$A \leftrightarrow B \qquad \text{onde: T é tautologia}$

20) $\neg[(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)] \wedge (A \wedge \neg B)$

$\neg[\neg(\neg A \vee B) \ \vee (\neg A \vee B)] \wedge (A \wedge \neg B)$

$\neg T \wedge (A \wedge \neg B)$

$C \ \wedge (A \wedge \neg B)$

$C \quad \text{onde: T é tautologia; C é contradição}$

21) Fará sol se, e somente se, chover.

22) Bruno não é aluno de Matemática Discreta e não é pesquisador.

23) Existe menino que não gosta de futebol.

24) Existe coisa boa que não engorda.

25) Existem homens que não são mortais.

26) Mesmo estudando Matemática Discreta e tendo sorte na prova, não serei aprovado.

27) Mesmo estudando ou ganhando na loteria, não ficarei rico.

28) Argumentação **válida**.

29) **falácia**. 30) **falácia**. 31) **falácia**. 32) Argumentação **válida**.

CAPÍTULO 4 – ÁLGEBRA de BOOLE e CIRCUITOS de CHAVEAMENTO

4.1 Álgebra de Boole

Em 1854, George Boole (1815-1864) apresentou um sistema matemático de análise lógica, que ficou conhecido como Álgebra de Boole.

Porém, foi apenas em 1938 que o engenheiro americano Claude Elwood Shannon observou a relação direta entre a lógica proposicional e lógica de circuitos. Observou, ainda, que a Álgebra de Boole poderia contribuir na sistematização desse novo ramo da eletrônica que estava surgindo, a lógica de circuitos. Claude Elwood Shannon utilizou as teorias da Álgebra de Boole para a resolução de problemas de circuitos de telefonia com relés.

4.1.1 Variáveis e expressões

As variáveis booleanas são representadas através de letras, podendo assumir apenas dois valores distintos: **0** ou **1**.

Denominamos expressão booleana à sentença matemática composta de termos cujas variáveis são booleanas, da mesma forma, podendo assumir como resultado final **0** ou **1**.

4.1.2 Postulados

- **Complementação**

Chamando de $\overline{A}$ o complemento de A, temos:

Se $A = 0 \rightarrow \overline{A} = 1$

Se $A = 1 \rightarrow \overline{A} = 0$

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

Então:

$$\text{Se } A = 0 \rightarrow \overline{A} = 1 \text{ e } \overline{\overline{A}} = 0$$

$$\text{Se } A = 1 \rightarrow \overline{A} = 0 \text{ e } \overline{\overline{A}} = 1$$

$$\boxed{\overline{\overline{A}} = A}$$

- **Adição**

Regras da adição dentro da Álgebra de Boole:

1) $1 + 1 = 1$

2) $1 + 0 = 1$

3) $0 + 1 = 1$

4) $0 + 0 = 0$

A	B	A + B
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

- **Multiplicação**

Regras da Multiplicação dentro da Álgebra de Boole:

1) $1.1 = 1$

2) $1.0 = 0$

3) $0.1 = 0$

4) $0.0 = 0$

A	B	A.B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

4.1.3 Identidades

$\boxed{A.0 = 0}$

$\text{Se } A = 0 \rightarrow 0.0 = 0$

$\text{Se } A = 1 \rightarrow 1.0 = 0$

$\boxed{A.1 = A}$

$\text{Se } A = 0 \rightarrow 0.1 = 0 = A$

$\text{Se } A = 1 \rightarrow 1.1 = 1 = A$

$\boxed{A.A = A}$

$\text{Se } A = 0 \rightarrow 0.0 = 0 = A$

$\text{Se } A = 1 \rightarrow 1.1 = 1 = A$

$\boxed{A.\overline{A} = 0}$

$\text{Se } A = 0 \rightarrow \overline{A} = 1 \rightarrow 0.1 = 0$

$\text{Se } A = 1 \rightarrow \overline{A} = 0 \rightarrow 1.0 = 0$

4.1.4 Propriedades

- **Comutativa**

  $A + B = B + A$

  $A . B = B . A$

- **Associativa**

  $A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$

  $A . (B . C) = (A . B) . C = A . B . C$

- **Distributiva**

  $A . (B + C) = A.B + A.C$

4.1.5 Teoremas de DeMorgan

- **1º Teorema**

  $\overline{A . B} = \overline{A} + \overline{B}$

  $\overline{A . B . C .....N} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + ... + \overline{N}$

- **2º Teorema**

  $\overline{A + B} = \overline{A} . \overline{B}$

  $\overline{A + B + C ..... + N} = \overline{A} . \overline{B} . \overline{C} ..... \overline{N}$

4.1.6 Identidades auxiliares

$\boxed{A + AB = A}$ $\quad A + AB = A(1 + B) = A.1 = A$

$\boxed{(A + B)(A + C) = A + BC}$ $\quad (A + B)(A + C) = A + AC + AB + BC =$

$A(1 + C + B) + BC = A.1 + BC = A + BC$

$\boxed{A + \overline{A}B = A + B}$ $\quad A + \overline{A}B = \overline{\overline{A + \overline{A}B}} = \overline{\overline{A}.\overline{\overline{A}.B}} = \overline{\overline{A}.(A + \overline{B})} =$

$\overline{\overline{A}.A + \overline{A}.\overline{B}} = \overline{\overline{A}}.\overline{\overline{B}} = A + B$

4.1.7 Álgebra de Boole(Resumo)

POSTULADOS		
Complementação	Adição	Multiplicação
$A = 0 \rightarrow \overline{A} = 1$ $A = 1 \rightarrow \overline{A} = 0$	$0 + 0 = 0$ $0 + 1 = 1$ $1 + 0 = 1$ $1 + 1 = 1$	$0 . 0 = 0$ $0 . 1 = 0$ $1 . 0 = 0$ $1 . 1 = 1$
IDENTIDADES		
Complementação	Adição	Multiplicação
$\overline{\overline{A}} = A$	$A + 0 = A$ $A + 1 = 1$ $A + A = A$ $A + \overline{A} = 1$	$A . 0 = 0$ $A . 1 = A$ $A . A = A$ $A . \overline{A} = 0$
PROPRIEDADES		
Comutativa:	$A + B = B + A$ $A . B = B . A$	
Associativa:	$A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$ $A . (B . C) = (A . B) . C = A.B.C$	
Distributiva:	$A . (B + C) = A . B + A . C$	
TEOREMAS de DE MORGAN		
	$\overline{A.B} = \overline{A} + \overline{B}$ $\overline{A + B} = \overline{A}.\overline{B}$	
IDENTIDADES AUXILIARES		
	$A + A.B = A$ $A + \overline{A}.B = A + B$ $(A + B)(A + C) = A + B.C$	

4.1.8 Simplificação de expressões booleanas

Exemplos

1) $A.B.C + A.\overline{C} + A.\overline{B} = A.(B.C + \overline{C} + \overline{B}) = A.[(B.C + \overline{C}) + \overline{B}] = A.[(\overline{C} + C.B) + \overline{B}]$

$= A.(\overline{C} + B + \overline{B}) = A.[\overline{C} + (B + \overline{B})] = = A.(\overline{C} + 1) = A.1 = A$

2) $\overline{(\overline{A} + B)} + [(\overline{A} + B).B] = A.\overline{B} + \overline{A}.B + B = A.\overline{B} + B = A + B$

Exercícios

Utilizando as propriedades e postulados da Álgebra de Boole, simplifique as expressões booleanas seguintes:

1) $\left[\overline{\left(\overline{B}+C\right)}+\overline{A}\right]+\left(C+B\right)$

2) $\overline{\overline{\left(\overline{A}+A\right)}+B}+\left[\overline{A}+\left(B.\overline{B}\right)\right]$

3) $\left[\overline{A.\left(\overline{B}+C\right)}\right]+\left[\left(\overline{A}+B\right)+C\right]$

4) $\left[\left(\overline{A}+B\right)\overline{\left(B.\overline{A}\right)}\right]+\left\{\left[\overline{\left(A.\overline{B}\right)}.\left(\overline{B}.A\right).\left(\overline{C}+A\right)\right].\left(\overline{C}+C\right)\right\}$

5) $\overline{\left(\overline{\overline{A}+B}\right)+\left(\overline{A}+B\right)}\;.\left(A.\overline{B}\right)$

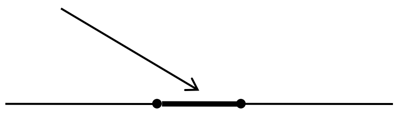
4.2 Circuitos de Chaveamento

Uma das aplicações do cálculo proposicional ocorre com os circuitos de chaveamento e, em nossos estudos, utilizaremos as notações e propriedades da Álgebra de Boole.

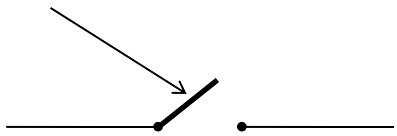
4.2.1 Conceitos

Um interruptor é um dispositivo elétrico que na posição “ligado” (diz-se que o interruptor está “fechado”) permite a passagem de corrente elétrica e na posição “desligado” (diz-se que o interruptor está “aberto”) não permite a passagem de corrente elétrica.

Interruptor “ligado”



Interruptor “desligado”



Interruptores (também denominados “chaves”) são semelhantes a proposições, pois um interruptor só assume uma de duas posições possíveis (ligado ou desligado), nunca havendo uma terceira posição (Princípio do Terceiro Excluído), assim como um interruptor não pode estar simultaneamente na posição ligado e na posição desligado (Princípio da Não Contradição). A condição de passagem de corrente corresponde a uma proposição verdadeira e a condição de não passagem de corrente corresponde a uma proposição falsa.

4.2.2 Circuitos em Série

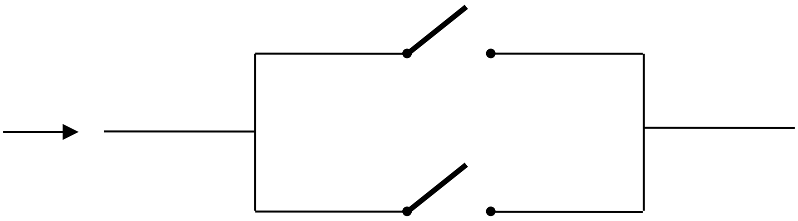
Dois interruptores em série correspondem à conjunção de duas proposições (só passa corrente se os dois estiverem ligados).

Exemplo de dois interruptores em série “ligados”:

4.2.3 Circuito paralelo

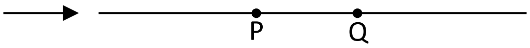
Dois interruptores em paralelo correspondem à disjunção (inclusiva) de duas proposições (só não passa corrente se os dois estiverem desligados).

Exemplo de dois interruptores em paralelo “desligados”:

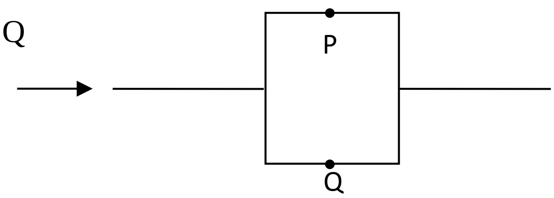


Para facilidade de representação gráfica indicamos os interruptores em um circuito por um ponto e uma letra a ele associada.

Exemplo de dois interruptores em série, representados pela conjunção de duas proposições: P . Q



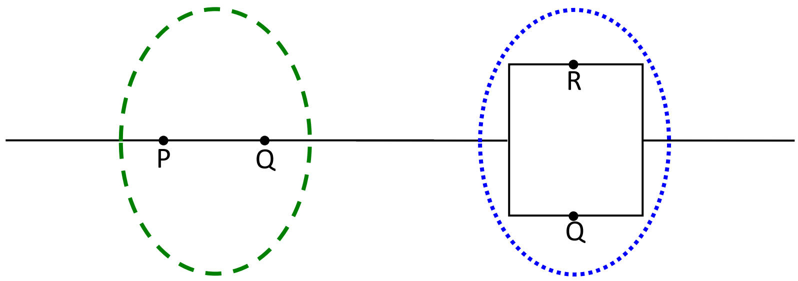
Exemplo de dois interruptores em paralelo, representados pela disjunção (inclusiva) de duas proposições: P + Q



4.2.4 Circuitos compostos

Um circuito pode ser composto de vários circuitos básicos, formando um circuito mais complexo. Cada circuito pode ser representado por uma proposição:

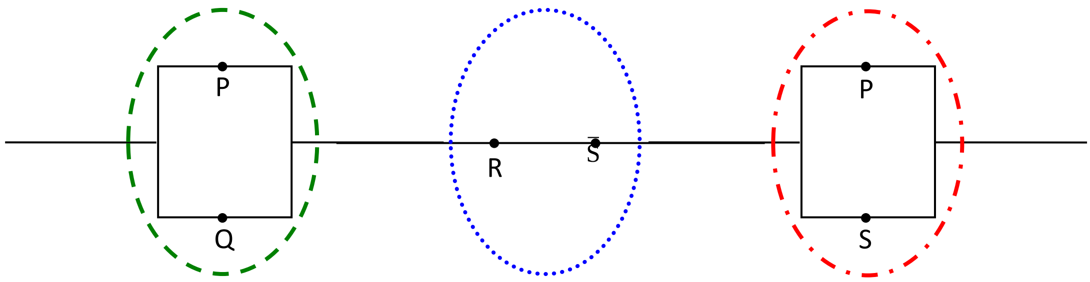
1º exemplo



A elipse verde (tracejada) está em série com a elipse azul (pontilhada).

A elipse verde é um circuito série, que pode ser representado pela proposição (P . Q) e a elipse azul é um circuito paralelo que pode ser representada pela proposição (R + Q). Como a elipse verde está em série com a elipse azul, temos um circuito série (P . Q) .(R + Q)

2º exemplo

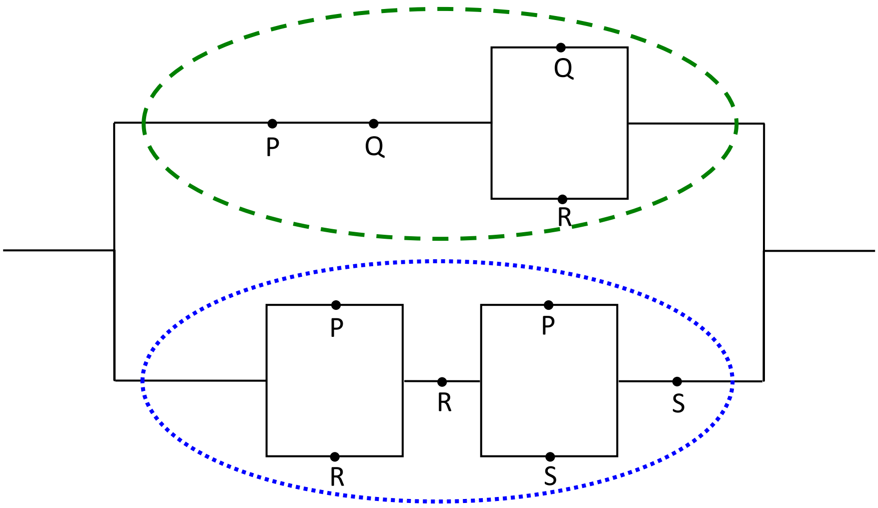


A elipse verde (tracejada) está em série com a elipse azul (pontilhada) e com a elipse vermelha (traço-ponto).

A elipse verde é um circuito paralelo, representado pela proposição (P + Q), a elipse azul é um circuito série, representado pela proposição ($R.\bar{S}$) e a elipse vermelha é um circuito paralelo, representado pela proposição (P + S). As três elipses estão em série e, portanto, o circuito todo pode ser representado pela proposição correspondente à série das três elipses: $(P+Q).(R.\bar{S}).(P+S)$

Obs,: O interruptor $\bar{S}$ é a negação do interruptor S, o que significa que, quando o interruptor S está ligado o interruptor $\bar{S}$ está desligado e vice-versa.

3º exemplo



Neste exemplo visualizamos um circuito composto de dois circuitos em paralelo, representados pela elipse verde (tracejada) e pela elipse azul (pontilhada).

Fazendo uma análise da elipse verde separadamente, verificamos que ela pode ser representada pela seguinte proposição:

(P.Q) . (Q + R)

Do mesmo modo, fazendo uma análise da elipse azul separadamente, verificamos que ela pode ser representada pela seguinte proposição:

(P + R).R.(P + S).S

Assim, temos um circuito representado pelo circuito paralelo das elipses verde e azul[4]:

((P.Q) . (Q + R))+ (P + R).R.(P + S).S

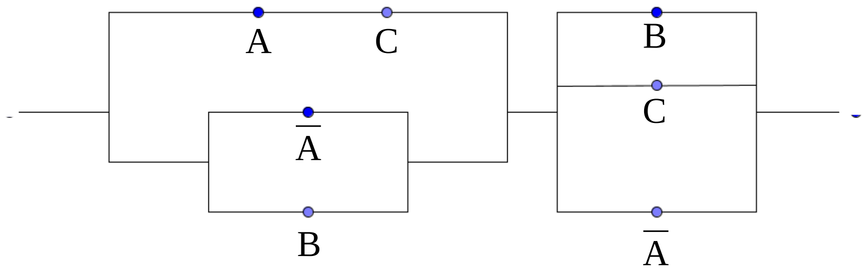
A fim de se evitar erros de precedência de operações, a proposição correspondente a cada elipse utilizada para isolar um circuito mais simples deve ser colocada entre parênteses ao se montar a proposição correspondente ao circuito mais complexo. Depois, se houver conveniência, os parênteses desnecessários poderão ser eliminados.

Qualquer circuito mais complexo pode ser decomposto em circuitos mais simples, que podem ser analisados separadamente de modo a se encontrar as correspondentes proposições, obtendo-se um conjunto de proposições "parciais". Em seguida compomos a proposição correspondente ao circuito mais complexo por meio das proposições "parciais".

É interessante verificar-se que o primeiro passo é visualizar se o circuito é um paralelo de outros circuitos ou uma série de outros circuitos.

EXEMPLOS de APLICAÇÃO

1) Dado o circuito de chaveamento, vamos determinar a expressão booleana correspondente.

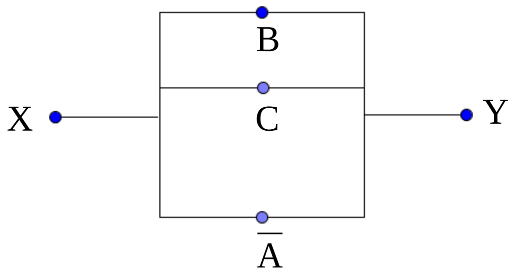


$$\left[(AC)+(\overline{A}+B)\right](B+C+\overline{A})$$

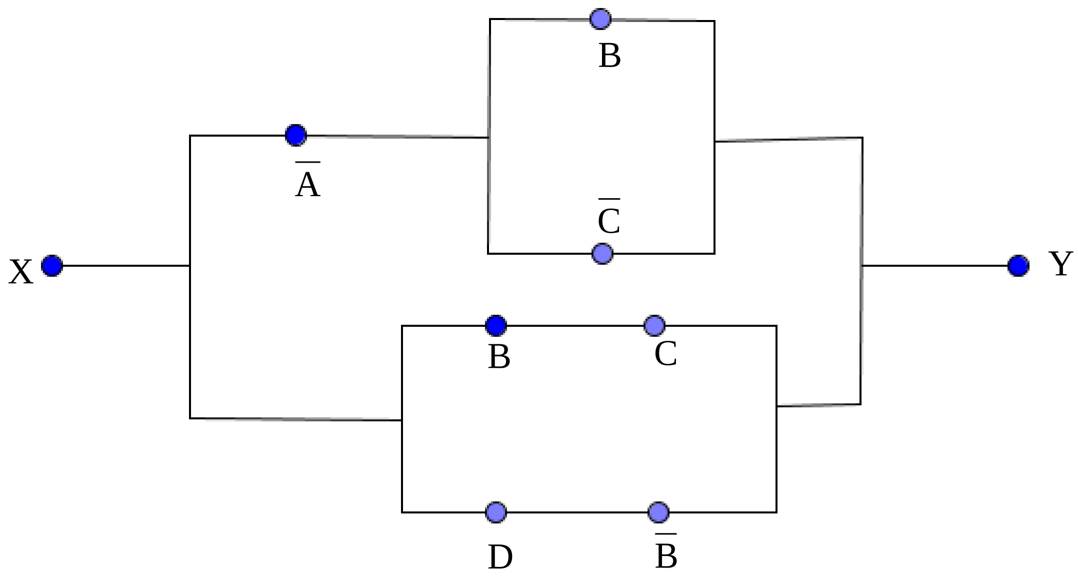
[4] Note que existem parênteses desnecessários na expressão.

Agora, vamos construir um circuito de chaveamento equivalente ao circuito acima, utilizando o menor número de interruptores possível. Para isso, vamos simplificar a expressão booleana referente ao circuito.

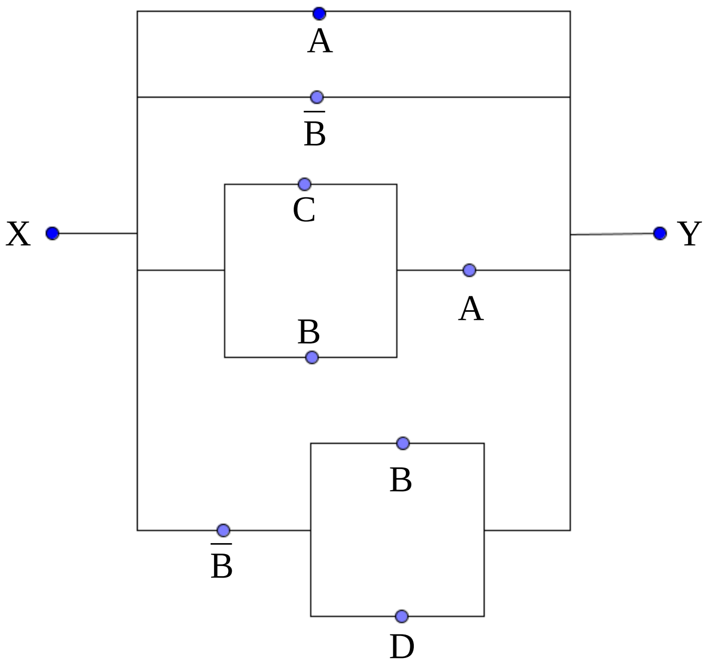
$$\left[(AC)+(\overline{A}+B)\right](B+C+\overline{A})$$
$$(\overline{A}+AC+B)(B+C+\overline{A})$$
$$(\overline{A}+C+B)(B+C+\overline{A})$$
$$B+C+\overline{A}$$



2) Dada a expressão booleana, vamos construir o circuito de chaveamento correspondente. $(\overline{A}.(B+\overline{C}))+((B.C)+(D.\overline{B}))$



3) Dado o circuito seguinte, vamos escrever a expressão booleana e verificar para quais valores de A, B, C e D, não passa corrente.



$$A + \overline{B} + \big((C + B).A\big) + \big(\overline{B}.(B + D)\big)$$

Para determinarmos os valores de A, B, C e D, é conveniente simplificarmos a expressão.

$$A + \overline{B} + \big((C + B).A\big) + \big(\overline{B}.(B + D)\big)$$

$$A + \big(A.(C + B)\big) + \overline{B} + \big(\overline{B}.(B + D)\big)$$

$$A + \overline{B}$$

Logo, não passa corrente se A = 0 e B = 1.

Considerando, então, todas as possibilidades, temos:

A = 0   B = 1   C = 0   D = 0

A = 0   B = 1   C = 0   D = 1

A = 0   B = 1   C = 1   D = 0

A = 0   B = 1   C = 1   D = 1

Exercícios

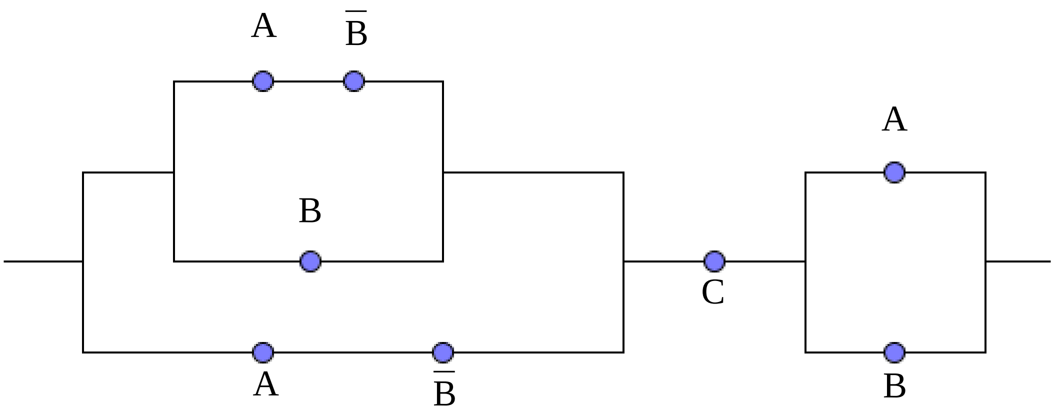
6) Dada a expressão booleana: $(A + C).\left[\left(A.\overline{B}\right) + \left(B + \overline{A}\right)\right].\left[(A.B) + \left(\overline{A} + \overline{B}\right)\right]$

a) escreva o circuito de chaveamento correspondente.

b) Construa um circuito de chaveamento equivalente ao circuito acima, utilizando o menor número de interruptores possível.

7) Idem para $\left[\left(B + \overline{A}\right).\left(\overline{A}.\overline{B}\right)\right] + \left[\left(\overline{B} + A\right).(A + B)\right]$

8) Considere o circuito de chaveamento seguinte:

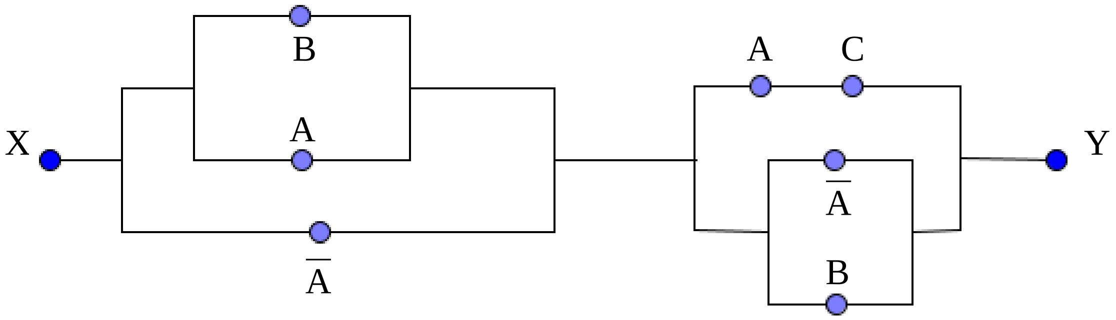


a) Escreva a expressão booleana correspondente.

b) Construir um circuito de chaveamento equivalente ao circuito acima, utilizando o menor número de interruptores possível.

c) Para quais valores de A, B e C, não passa corrente?

9) Idem para o circuito de chaveamento abaixo.



Respostas dos exercícios

1) $\left[\overline{(\overline{B}+C)}+\overline{A}\right]+(C+B)$

$(B.\overline{C}+\overline{A})+C+B$

$B+B.\overline{C}+\overline{A}+C$

$B+\overline{A}+C$

2) $\overline{\overline{(\overline{A}+A)}+B}+\left[\overline{A}+(B.\overline{B})\right]$

$\overline{\overline{T}+B}+(\overline{A}+C)$ $\quad T:\text{Tautologia} \quad C:\text{Contradição}$

$\overline{C+B}+\overline{A}$

$\overline{B}+\overline{A}$

3) $\left[\overline{A.(\overline{B}+C)}\right]+\left[(\overline{A}+B)+C\right]$

$\overline{A}+\overline{\overline{B}+C}+\overline{A}+B+C$

$\overline{A}+B.\overline{C}+B+C$

$\overline{A}+B+C$

4) $\left[(\overline{A}+B)\left(\overline{B.\overline{A}}\right)\right]+\left\{\left[\overline{(A.\overline{B})}.(\overline{B}.A).(\overline{C}+A)\right].(\overline{C}+C)\right\}$

$(\overline{A}+B)(\overline{B}+A)+\left[(\overline{A}+B)(\overline{B}.A)(\overline{C}+A)\right]$

$\overline{A}\overline{B}+AB$

5) $\overline{\left(\overline{\overline{A}+B}\right)+\left(\overline{A}+B\right)}\,.\left(A.\overline{B}\right)$

$\overline{A.\overline{B}+\left(\overline{A}+B\right)}.\left(A.\overline{B}\right)$

$\overline{\overline{\overline{A}}+\overline{B}+B}.\left(A.\overline{B}\right)$

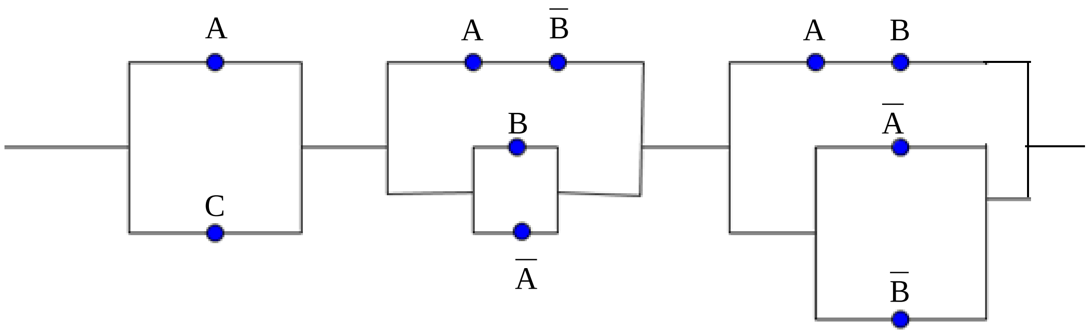
$\overline{T}.\left(A.\overline{B}\right)$ $\qquad$ T : Tautologia

$C.\left(A.\overline{B}\right)$ $\qquad$ C : Contradição

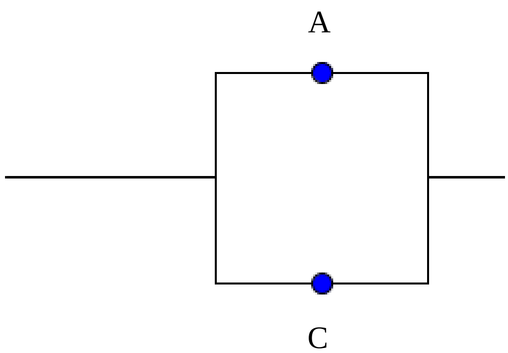
C

6)

a)

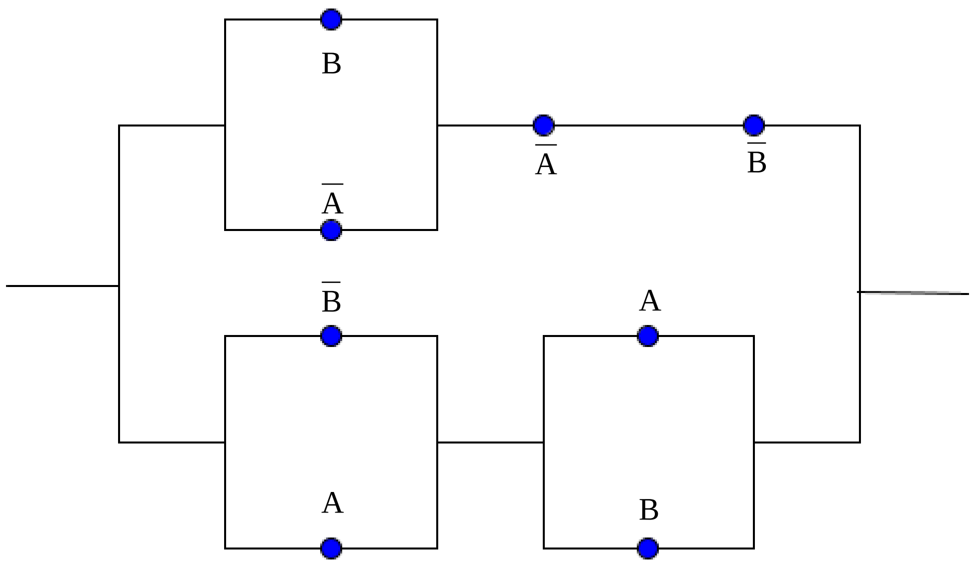


b)

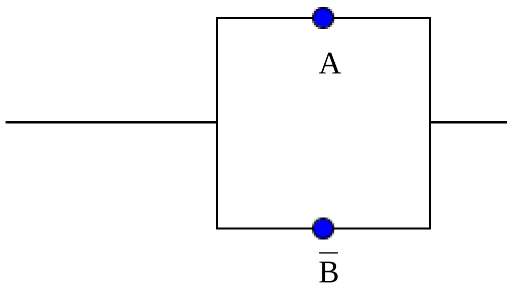


7)

a)



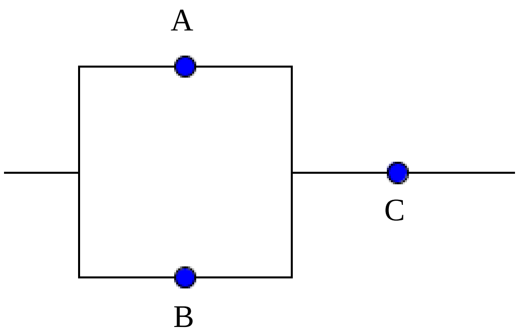
b)



8)

a) $[(A\overline{B}+B)+(A\overline{B})]C.(A+B)$

b)



c) A = B = C = 0

	A	B	C	(A v B)	^ C
0)	0	0	0	0	0
1)	0	0	1	0	0
2)	0	1	0	1	0
3)	0	1	1	1	1
4)	1	0	0	1	0
5)	1	0	1	1	1
6)	1	1	0	1	0
7)	1	1	1	1	1

A=B=0 e C = 1

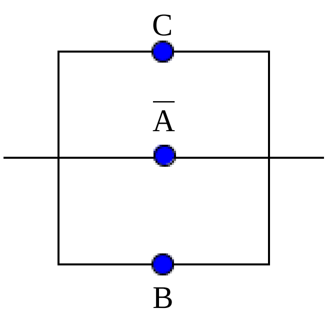
A=C=0 e B = 1

A=1 e B=C=0

A=B=1 e C = 0

9) a) $[(A+B)+\overline{A}][(AC)+(\overline{A}+B)]$

b)



c)

	A	B	C	C v	~A	v B
0)	0	0	0	1	1	1
1)	0	0	1	1	1	1
2)	0	1	0	1	1	1
3)	0	1	1	1	1	1
4)	1	0	0	0	0	0
5)	1	0	1	1	0	1
6)	1	1	0	0	0	1
7)	1	1	1	1	0	1

A=1 e B=C=0

CAPÍTULO 5 - RELAÇÕES

5.1 Definição

Sejam *A* e *B* conjuntos. Uma *relação binária* ou, simplesmente, *relação* de *A* para *B* é um subconjunto de *A* x *B*.

Suponha que *R* é uma relação de *A* para *B*. Então *R* é um conjunto de pares ordenados onde cada primeiro elemento pertence a *A* e cada segundo elemento pertence a *B*. Se $(a, b) \in R$, escrevemos *aRb*, caso contrário, ou seja, se $(a, b) \notin R$, escrevemos $a \not R b$.

Se *R* é uma relação de um conjunto *A* para si mesmo, isto é, se *R* é um subconjunto de *A* x *A*, então dizemos que *R* é uma relação em *A*.

O domínio de uma relação *R* é o conjunto de todos os primeiros elementos de um par ordenado que pertence a *R*, e a imagem de *R* é o conjunto dos segundos elementos.

Por exemplo, sejam *A*={1, 2, 3} e B={x, y, z}, e seja *R*={(1, y), (1, z), (3, y)}. Então *R* é uma relação de *A* para *B*, uma vez que *R* é um subconjunto de *A* x *B*. Com respeito a essa relação, 1*R*y, 1*R*z, 3*R*y, mas $1 \not R x$, $2 \not R x$, $2 \not R y$, $2 \not R z$, $3 \not R x$, $3 \not R z$. O domínio de *R* é {1, 3} e a imagem é {y, z}

5.2 Tipos de relações

5.2.1 Reflexivas

Uma relação *R* em um conjunto *A* é reflexiva se a*R*a para todo $a \in A$, isto é, se $(a, a) \in R$ para todo $a \in A$. Portanto, *A* não é reflexiva se existe um $a \in A$ tal que $(a, a) \notin R$.

5.2.2 Simétricas

Uma relação *R* em um conjunto *A* é simétrica se *aRb* implica *bRa*, isto é, se $(a, b) \in R$ implica $(b, a) \in R$. Logo, *R* não é simétrica se existe $(a, b) \in R$, mas $(b, a) \notin R$.

5.2.3 Antissimétricas

Uma relação *R* em um conjunto *A* é antissimétrica se *aRb* e *bRa* implica $a = b$, isto é, se *(a, b)* e $(b, a) \in R$, então $a = b$. Portanto, *R* não é antissimétrica se existem *a*, $b \in A$ tais que *(a, b) e* $(b, a) \in R$, mas $a \neq b$.

Observação: As propriedades de simetria e antissimetria não são mutuamente excludentes. Por exemplo, *R*={(1, 3), (3, 1), (2, 3)} não é nem simétrica nem antissimétrica. Por outro lado, a relação *R*'={(1, 1), (2, 2), (3, 3)} é simétrica e antissimétrica.

5.2.4 Transitivas

Uma relação R em um conjunto A é transitiva se aRb e bRc, implica aRc, isto é, se (a, b) e $(b, c) \in R$, então $(a, c) \in R$. Logo, R não é transitiva se existirem a, b e $c \in A$ tais que (a, b) e $(b, c) \in R$, mas $(a, c) \notin R$.

Tipos de Relações: Exemplo: Seja $A = \{1, 2, 3\}$. Para cada uma das relações em A, determine se é reflexiva, simétrica, antissimétrica e transitiva.

	Reflexiva	Simétrica	Antissimétrica	Transitiva
$R_1 = \{(1, 2), (1, 1), (2, 2), (2, 1), (3, 3)\}$	sim	sim	não	sim
$R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)\}$	sim	não	sim	não
$R_3 = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$	não	não	sim	não
$R_4 = A \text{x} A$	sim	sim	não	sim

5.3 Relações de Equivalência

Considere um conjunto S não vazio. Uma relação R sobre S é uma relação de equivalência se R é reflexiva, simétrica e transitiva.

No exemplo anterior, R_1 e R_4 são relações de equivalência, mas R_2 e R_3 não são.

Outro exemplo: Seja S={1, 2, 3, ..., 14, 15} e R a relação sobre S definida por aRb $\leftrightarrow$ (a – b) é divisível por 5.

Verifique que R é uma relação de equivalência.

$\forall$a $\in$A , aRa, pois (a – a) é divisível por 5. Logo, R é **reflexiva**.

Se aRb, então bRa, pois se (a – b) é divisível por 5, então (b – a) também é. Logo, R é **simétrica**.

Se aRb e bRc, então (a – b) e (b – c) são divisíveis por 5, ou seja, para m, n inteiros, temos a – b = 5m

$\underline{b - c = 5n}$

a – c = 5(m + n), ou seja, (a – c) é múltiplo de 5 e, portanto, aRc.

Logo, R é **transitiva**.

Como R é reflexiva, simétrica e transitiva, ***R* é relação de equivalência**.

5.4 Classe de equivalência e Partições

Uma partição *P* de *S* é uma coleção $\{A_i\}$ de subconjuntos não vazios de *S* com as duas propriedades a seguir:

(1) Cada $a \in S$ pertence a algum A_i
(2) Se $A_i \neq A_j$, então $A_i \cap A_j = \varnothing$ (são disjuntos)

Suponha que *R* é uma relação de equivalência em um conjunto *S*. Para cada $a \in S$, seja [a] o conjunto de elementos de *S* que estão relacionados com *a* por *R*, isto é, $[a]=\{x \ / \ (a, x) \in R\}$. [a] é a classe de equivalência de *a* em *S* e qualquer $b \in [a]$ é um representante da classe de equivalência.

A coleção de todas as classes de equivalência de *a* em *S*, relativamente a uma relação de equivalência em *R*, é chamada de conjunto quociente de *S* por *R* e é denotada por *S/R*, ou seja, $S/R=\{[a] \ / \ a \in S\}$

Exemplo: Para a relação R = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)} em S = {1, 2, 3, 4}, temos:

[1] = {1, 2}   [2] = {1, 2}   [3] = {3, 4}   [4]={3, 4}   e   S/R = { {1, 2}, {3, 4} }

Exercícios

1) Para cada uma das relações binárias R definidas a seguir em N, decida quais entre os pares ordenados dados pertencem a R.

a) $x \ R \ y \leftrightarrow x = y + 1$; (2, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 2)

b) $x \ R \ y \leftrightarrow$ x divide y; (2, 4), (2, 5), (2, 6)

c) $x \ R \ y \leftrightarrow$ x é ímpar; (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)

d) $x \ R \ y \leftrightarrow x > y^2$; (1, 2), (2, 1), (5, 2), (6, 4), (4, 3)

2) Seja S = {1, 2, 3}

a) Se uma relação R em S é reflexiva, que pares ordenados têm que pertencer a R?

b) Se uma relação R em S é simétrica e se $(a, b) \in R$, que outro par ordenado tem que pertencer a R?

c) Se uma relação R em S é antissimétrica e se (a, b) e (b, a) pertencem a R, o que tem que ser verdade?

d) A relação R = {(1, 2)} em S é transitiva? Justifique.

3) Diga quais propriedades são válidas para as relações definidas a seguir:

Relação	Reflexiva	Simétrica	Antissimétrica	Transitiva
a) R={(a, a), (b, b), (c, c), (c, a)} sobre A={a, b, c}				
b) R={(a, a), (a, b)} sobre A={a, b}				
c) R={(a, a), (b, b), (b, a)} sobre A={a, b}				
d) R={(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)} sobre A={a, b, c}				
e) $R=\{(x, y)\in R^2 / x^2 + y^2 = 1\}$				

4) Teste cada relação binária no conjunto dado S para verificar se é reflexiva, simétrica, antissimétrica ou transitiva.

Relação	Reflexiva	Simétrica	Antissimétrica	Transitiva
a) S = N; $xRy \leftrightarrow x + y$ é par				
b) S = Z^+(inteiros positivos); $xRy \leftrightarrow$ x divide y				
c) S = Conjunto de todas as retas do plano; $xRy \leftrightarrow$ x é paralela a y ou x coincide com y.				
d) S = N; $xRy \leftrightarrow x = y^2$				
e) S = {0, 1}; $xRy \leftrightarrow x = y^2$				
f) S = {x/x é uma pessoa que mora em São Paulo}; $xRy \leftrightarrow$ x é mais velho do que y.				

5) Entre as relações do exercício anterior, quais são de Equivalência?

6) Verifique se a relação de paralelismo no plano euclidiano, ou seja, $\forall r, s \in S$, r R s $\leftrightarrow$ r // s, é uma relação de equivalência.

7) Sejam A=Z e a relação definida por aRb $\leftrightarrow$ 3/a – b. (lê-se: 3 divide a – b).

Verifique se a relação é de equivalência

8) Para a relação de equivalência R = {(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (c, a)}, qual é o conjunto [a]?

9) Dada a partição {1, 2} e {3, 4} do conjunto S = {1, 2, 3, 4}, liste os pares ordenados pertencentes à relação de equivalência correspondente.

10) Para a relação de equivalência R = {(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (4, 5), (5, 4)}, qual é o conjunto [3]? E o conjunto [4]?

11) Dadas as partições {a, b, c} e {d, e} do conjunto {a, b, c, d, e}, liste os pares ordenados pertencentes à relação de equivalência correspondente.

Respostas dos Exercícios

1)

a) (3, 2)

b) (2, 4), (2, 6)

c) (3, 4), (5, 6)

d) (2, 1), (5, 2)

2)

a) (1, 1), (2, 2), (3, 3)

b) (b, a)

c) a=b

d) Sim. Por definição, 1R2 e 2Rk $\rightarrow$ 1Rk

$$V \wedge F \rightarrow F$$

$$F \rightarrow F$$

$$V$$

3) Diga quais propriedades são válidas para as relações definidas a seguir:

Relação	Reflexiva	Simétrica	Antissimétrica	Transitiva
a) R={(a, a), (b, b), (c, c), (c, a)} sobre A={a, b, c}	Sim	**Não**	Sim	Sim
b) R={(a, a), (a, b)} sobre A={a, b}	**Não**	**Não**	Sim	Sim
c) R={(a, a), (b, b), (b, a)} sobre A={a, b}	Sim	**Não**	Sim	Sim
d) R={(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)} sobre A={a, b, c}	Sim	Sim	**Não**	Sim
e) R={(x, y)$\in$R^2/ $x^2 + y^2 = 1$}	**Não**	Sim	**Não**	**Não**

4) Teste cada relação binária no conjunto dado S para verificar se é reflexiva, simétrica, antissimétrica ou transitiva.

Relação	Reflexiva	Simétrica	Antissimétrica	Transitiva
a) S = N; xRy $\leftrightarrow$ x + y é par	Sim	Sim	Não	Sim
b) S = Z^+(inteiros positivos); xRy $\leftrightarrow$ x divide y	Sim	Não	Sim	Sim
c) S = Conjunto de todas as retas do plano; xRy $\leftrightarrow$ x é paralela a y ou x coincide com y.	Sim	Sim	Não	Sim
d) S = N; xRy $\leftrightarrow$ $x = y^2$	Não	Não	Sim	Não
e) S = {0, 1}; xRy $\leftrightarrow$ $x = y^2$	Sim	Sim	Sim	Sim
f) S = {x/x é uma pessoa que mora em São Paulo}; xRy $\leftrightarrow$ x é mais velho do que y.	Não	Não	Sim	Sim

5) (a), (c) e (e)

6)Seja S o plano euclidiano e R a relação de paralelismo.

Reflexiva: $\forall r \in S$, rRr, ou seja, $(r, r) \in R$

Simétrica: $\forall r, t \in S$, rRt $\rightarrow$ tRr, ou seja, se $(r, t) \in R$, então $(t, r) \in R$.

Transitiva: $\forall r, s$ e $t \in S$, rRs e sRt $\rightarrow$ rRt, ou seja, $(r, s)\in R$ e $(s, t)\in R$, então $(r, t)\in R$

Portanto, a relação de paralelismo no plano euclidiano é uma relação de equivalência.

7)

$\forall a \in A$, 3/a – a, ou seja, 3 divide zero. Logo, aRa e, então, a relação é **Reflexiva**.

Se aRb, então 3/a – b. Considerando a – b = 3m, temos b – a = - 3m e 3/b – a. Logo, se aRb$\rightarrow$bRa. Assim, a relação é **Simétrica**.

Se aRb e bRc, temos que 3/a – b e 3/b – c. Então, 3 divide [(a – b) + (b – c)], ou seja, 3 divide (a – c) e, assim, aRc. Desta forma, a relação é **Transitiva**.

Como a relação é reflexiva, simétrica e transitiva, ela é uma relação de equivalência.

8) [a] ={a, c}

9) R={(1,1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)}

10) [3]={1, 2, 3} [4]={4, 5}

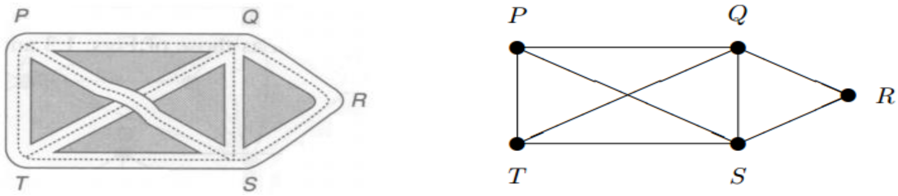
11) {(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c), (d, d), (d, e), (e, d), (e, e)}

CAPÍTULO 6 – TEORIA dos GRAFOS

6.1 Introdução

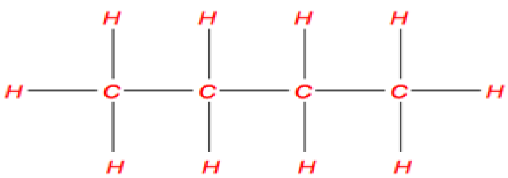
A Teoria dos Grafos tem sido aplicada a muitas áreas (Informática, Investigação Operacional, Logística, etc.), pois um grafo constitui o modelo matemático ideal para o estudo das relações entre objetos discretos de qualquer tipo.

Exemplo 1: Mapa de Estrada

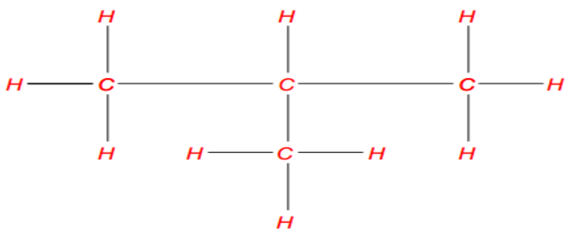


Exemplo 2:

Estruturas de Moléculas de Hidrocarbonetos



Butano



Isobutano

6.2 Grafos: conceitos e definições

Definição 01: Grafo

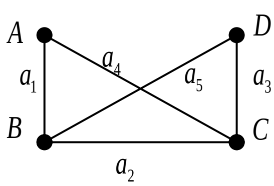
Grafo é uma terna ordenada (V,A,g) sendo

i) V: um conjunto não vazio de vértices ou nós.

ii) A: um conjunto de arestas ou arcos.

iii) *g*: uma função que associa cada aresta a um par não ordenado *x*-*y* de vértices chamados extremos da aresta.

Exemplo:



i) V: vértices ou nós { A,B,C e D }

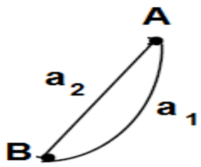
ii) A: um conjunto de arestas (arcos) $\{a_1,a_2,a_3, a_4,a_5\}$

iii) *g*: uma função que associa cada aresta a um par não ordenado:

$g(a_1)=$ A - B $g(a_2)=$ B - C $g(a_3)=$ C - D $g(a_4)=$ A - C $g(a_5)=$ B - D

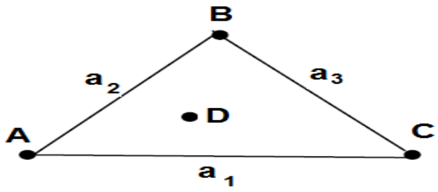
Definição 02: Arestas paralelas

São as arestas que possuem os mesmos extremos.



Definição 03: Vértices adjacentes

Dois vértices são adjacentes se forem extremos de uma mesma aresta.



Na figura, A e B são adjacentes.

Definição 04: Vértice isolado

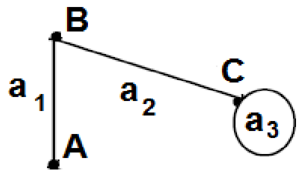
Não é adjacente a qualquer outro vértice.

Na figura anterior, D é um vértice isolado.

Definição 05: Laço

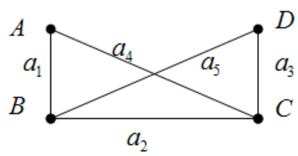
Laço é uma aresta com extremos no mesmo vértice.

a_3 é um laço.



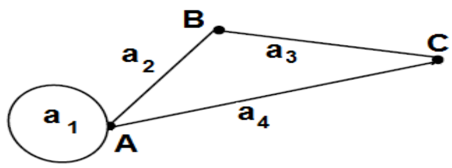
Definição 06: Grafo simples

São grafos que não têm arestas paralelas e nem laços.



Definição 07: Grau de um vértice

O grau de um vértice de um grafo é o número de arestas incidentes nesse vértice.



Na figura ao lado, A tem grau 4. B e C têm grau 2.

Definição 08: Grau par ou ímpar

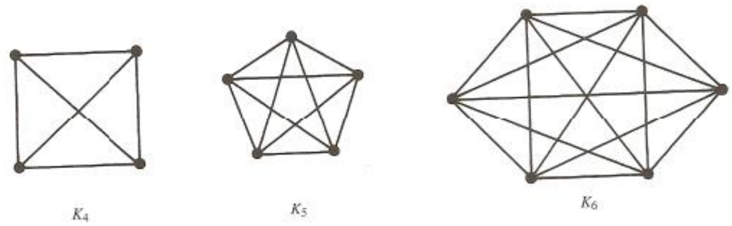
Um vértice é par ou ímpar dependendo de seu grau ser par ou ímpar.

Um vértice de grau zero é dito vértice isolado.

Definição 09: Grafo completo

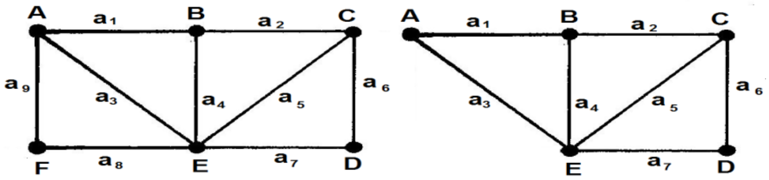
Um Grafo se diz completo se todos os seus vértices distintos

são adjacentes.



Definição 10: Subgrafo

Subgrafo de um grafo G é um subconjunto de arestas e vértices do grafo original. Podemos dizer que o subgrafo é um grafo obtido apagando-se parte do grafo original.



Definição 11: Caminho

Caminho de um vértice A_1 a um vértice A_n é uma sequência alternada de vértices e arestas : A_1 , a_1 , A_2 , a_2 , A_3 , a_3 , ... , A_{n-1} , a_{n-1} , A_n.

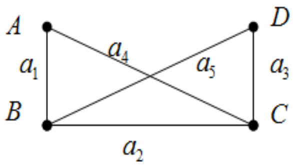
Definição 12: Comprimento de um caminho

Comprimento de um caminho é o número de arestas que ele contém.

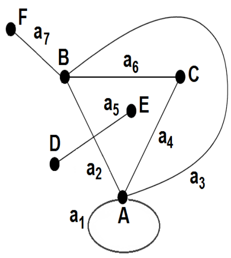
Na figura acima, o caminho A, a_1, B, a_2 , C tem comprimento 2.

Definição 13: Grafo conexo

Um grafo se diz conexo se existir um caminho entre quaisquer dois vértices.



Grafo conexo

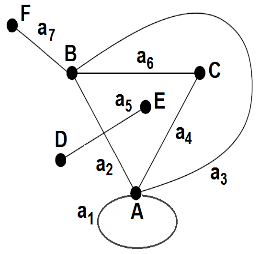


Grafo não conexo

Definição 14: Ciclo

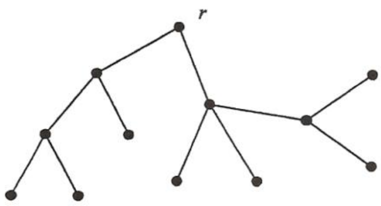
Ciclo em um grafo é o caminho (comprimento ≥ 3) de algum vértice n_0 até n_0 de novo, de forma que nenhum vértice ocorra mais de uma vez no caminho.

No grafo ao lado, A, a_4, C, a_6, B, a_3, A é um ciclo.



Definição 15: Árvores

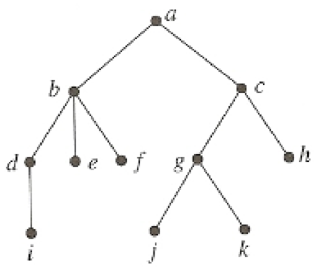
Uma árvore é um grafo acíclico e conexo com um nó designado como raiz da árvore



Definição 16: Profundidade de um vértice (nó)

Profundidade de um vértice de uma árvore é o comprimento do caminho da raiz até o vértice.

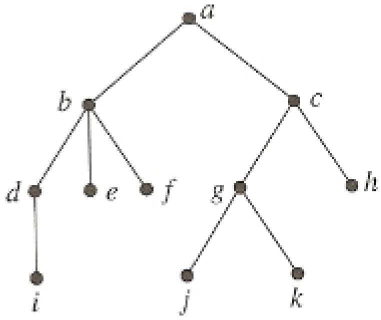
a: raiz   Profundidade do nó j: 3



Definição 17: Altura da Árvore

Altura da árvore é a maior profundidade de todos os seus vértices. É o comprimento do maior caminho entre a raiz e um vértice.

Altura da árvore: 3



Definição 18: Folha

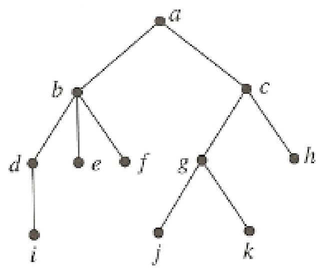
Um vértice sem filhos é denominado folha.

Na figura anterior, os vértices *i*, *e*, *f*, *j*, *k* e *h* são folhas.

Definição 19: Vértices Internos

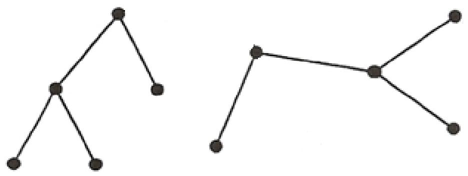
Os vértices que não são folhas são denominados vértices internos.

Alguns vértices internos: *b* e *d*.



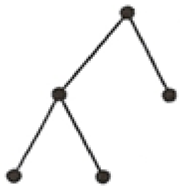
Definição 20: Floresta

Floresta é uma coleção de árvores disjuntas.



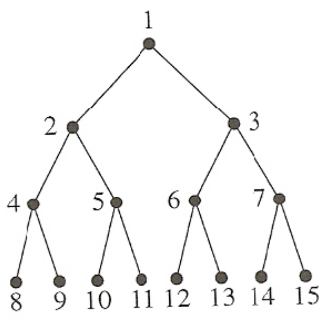
Definição 21: Árvore Binária

Uma árvore é binária se cada nó tem no máximo dois filhos, sendo denominados *filho à direita e filho à esquerda*.

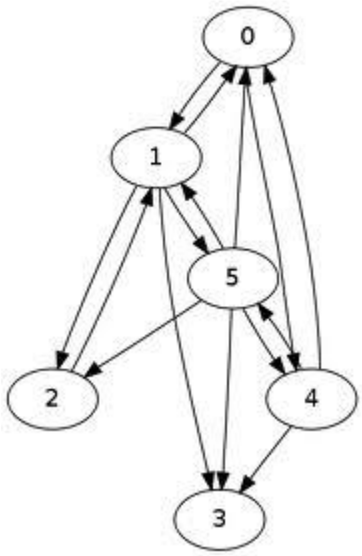


Definição 22: Árvore binária completa

Uma árvore binária é completa se todos os nós internos têm dois filhos e todas possuem a mesma profundidade.



Definição 23: Grafos direcionados



Grafo direcionado é uma terna ordenada (V,A,g) sendo:

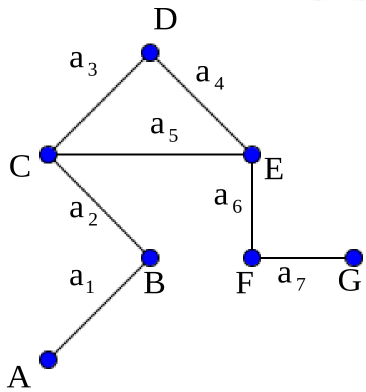
i) V: um conjunto não vazio de vértices ou nós.

ii) A: um conjunto de arestas ou arcos.

iii) *g*: uma função que associa cada aresta a um par ordenado *(x, y)* de vértices chamados extremos da aresta, sendo x o ponto inicial e y, o ponto final

Exercícios

1) Observe o grafo ao lado e responda as questões



a) Este grafo é simples? Justifique.

b) Este grafo é completo? Justifique.

c) Este grafo é conexo? Justifique.

d) Quais os dois caminhos entre os vértices C e F?

e) Cite um ciclo.

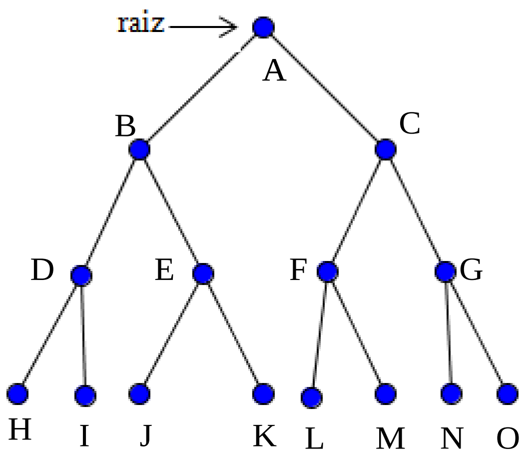
f) O grafo possui uma aresta cuja remoção o tornaria uma árvore. Qual é a aresta?

2) Esboce um diagrama para cada um do seguintes grafos.

a) Um grafo simples com 3 vértices, cada qual com 2 graus.

b) Uma árvore com 5 vértices de altura 1.

3) Responda as questões, observando a árvore.



a) Qual a altura?

b) Qual o filho à esquerda do nó B?

c) Qual a profundidade do nó E?

d) É binária completa?

e) Cite 3 nós internos.

f) Quais são suas folhas?

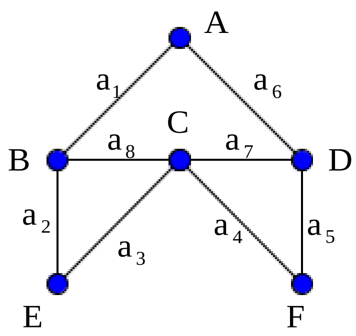
4) Com relação a grafo a seguir:

a) descreva-o formalmente.

b) dê o grau de seus vértices.

c) determine o número de arestas.

d) determine a soma dos graus dos vértices.

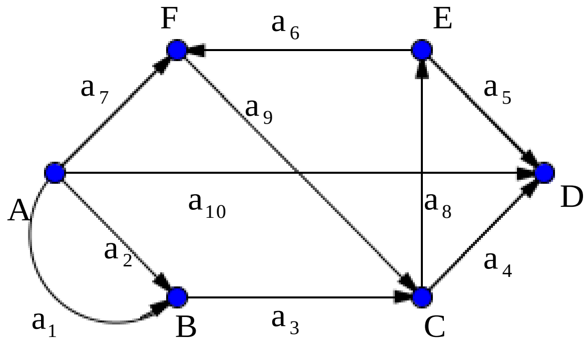


5) Responder as questões observando o grafo direcionado.

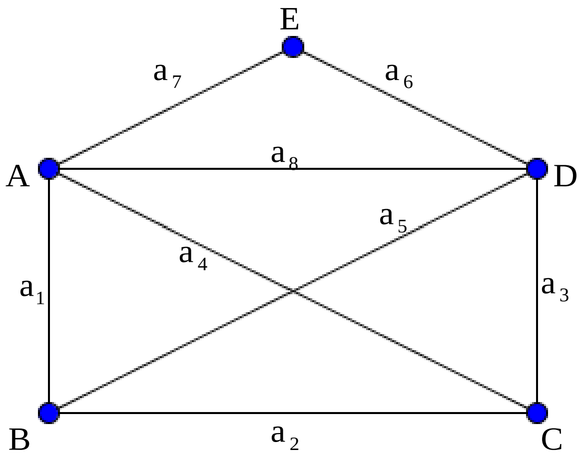
a) Quais os nós acessíveis a partir do vértice A?

b) Qual o caminho mais curto de A para C?

c) Qual o caminho de comprimento 6 de A para D?



6) Transforme o grafo abaixo em grafo direcionado de tal forma que partindo de um vértice passe por todos os vértices, sem usar duas vezes a mesma aresta. Se isto for feito, teremos um grafo atravessável.



6.3 Grafos Isomorfos

Definição 24: Grafos isomorfos

Os grafos G= (V,A,g) e G'= (V',A',g') são isomorfos se existir uma aplicação bijetora $f_1 : V \to V'$ e $f_2 : A \to A'$ tais que, para cada arco $a \in$ A, g(a) = x – y se, e somente se, $g'[f_2(a)] = f_1(x) - f_1(y)$.

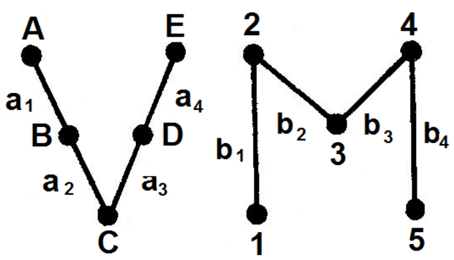
Exemplo:

Os grafos abaixo podem parecer muito diferentes em sua representação visual. Mas, possuem os mesmos nós, os mesmos arcos e a mesma função que associa as extremidades a cada arco. Assim, os grafos são isomorfos.

As bijeções que estabelecem o isomorfismo são dadas a seguir:

f_1: $A \to 1$, $B \to 2$, $C \to 3$, $D \to 4$, $E \to 5$

f_2: $a_1 \to b_1$, $a_2 \to b_2$, $a_3 \to b_3$, $a_4 \to b_4$



Exemplo : Grafos não isomorfos

Existem certas condições sob as quais se torna mais fácil ver que dois grafos

não são isomorfos.

1.Um grafo tem mais vértices que o outro.

2.Um grafo tem mais arestas que outro.

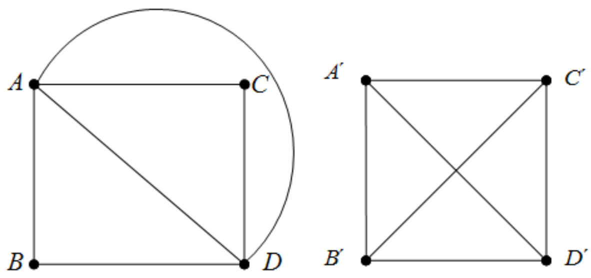
3.Um grafo tem arestas paralelas e o outro não.

4.Um grafo tem um laço e o outro não.

5.Um grafo tem um vértice de grau K e o outro não.

6.Um grafo é conexo e o outro não.

7.Um grafo tem um ciclo e o outro não.



Os grafos ao lado não são isomorfos. Observe

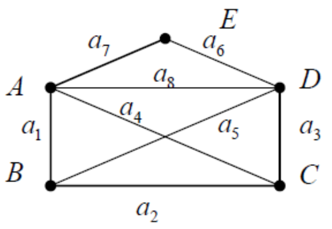
os itens 3 e 5 .

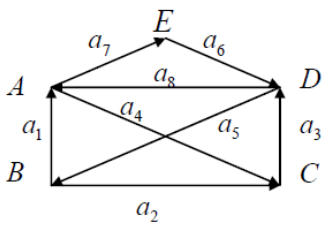
6.4 Grafo Atravessável

Definição 25: Grafo Atravessável

Um grafo se diz atravessável se pode ser desenhado sem quebras nas curvas e sem repetição de arestas, isto é, se existir um caminho que inclua todos os vértices e use cada aresta uma única vez.

Exemplo: Exercício (6)





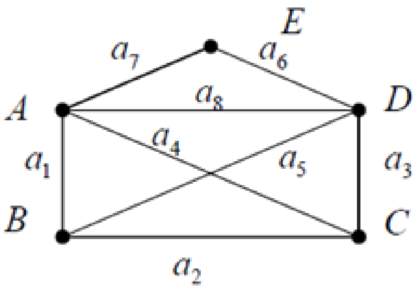
O caminho B, a_1, A, a_7, E, a_6, D, a_8, A, a_4, C, a_3, D, a_5, B, a_2, C é uma trilha*. A trilha é atravessável e, portanto, o **grafo é atravessável**.

* Um caminho no qual todas as arestas são distintas chama-se trilha.

Definição 26: Grafo Euleriano e Hamiltoniano

26.1) Caminho de Euler em um grafo G é um caminho que usa cada arco de G exatamente uma vez.

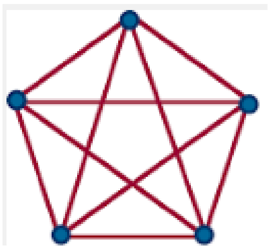
Exemplo: Exercício (6)

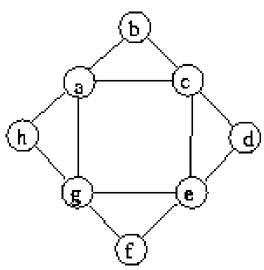


B, a_1, A, a_7, E, a_6, D, a_8, A, a_4, C, a_3, D, a_5, B, a_2, C

26.2) Um grafo conexo finito G é euleriano se, e somente se, cada vértice tem grau par.

Exemplos:



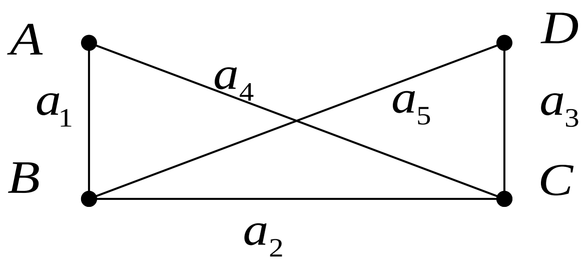


26.3) Um circuito hamiltoniano em um grafo G é um caminho fechado que visita cada vértice de G exatamente uma vez. Tal caminho dever ser um ciclo.

Se G admite um caminho hamiltoniano, então G é um grafo hamiltoniano.

Exemplo: o grafo abaixo é hamiltoniano, pois admite,

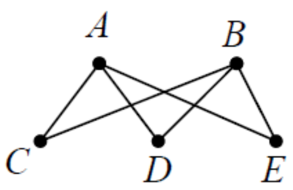
por exemplo, o ciclo A, a_4, C, a_3, D, a_5, B, a_1, A.



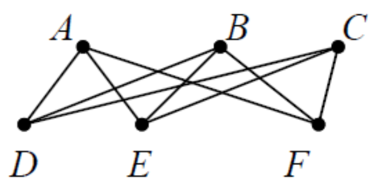
Definição 27: Grafo Bipartido Completo

Um grafo é dito bipartido se seus vértices V podem ser particionados em 2 subconjuntos M e N tais que cada aresta de G conecta um vértice de M a um vértice de N. Por grafo bipartido completo, queremos dizer que cada vértice de M é conectado a cada vértice de N, e indicamos por $K_{m,n}$, onde m é o número de vértices em M e N é o número de vértices em N.

Exemplos:



$k_{2,3}$



$k_{3,3}$

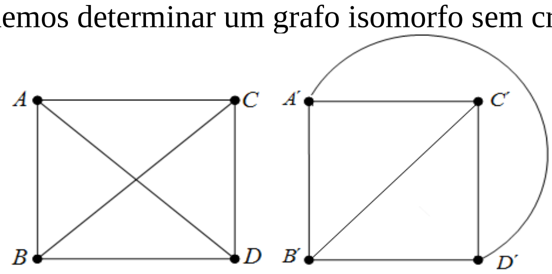
6.5 Grafo Planar

Definição 28: Grafo planar

Um grafo se diz planar se pode ser desenhado em um plano de forma que suas arestas se interceptem apenas nos vértices.

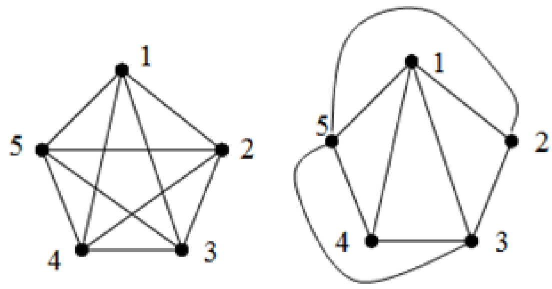
Muitas vezes o grafo é planar e é desenhado com cruzamentos de arestas. No entanto, podemos determinar um grafo isomorfo sem cruzamentos.

Exemplo :

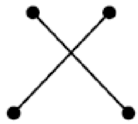


Exemplo de Grafo não planar

Observe que é impossível desenharmos a aresta com extremidades nos vértices (2) e (4) sem ocorrer o "cruzamento" de arestas. Trata-se de um grafo não planar.

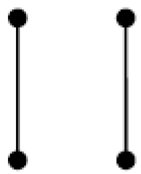


Vamos verificar se o grafo (a) é planar.



(a)

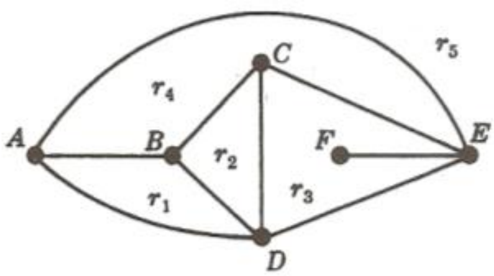
Observe que o grafo possui cruzamento, mas é isomorfo ao grafo (b)



(b). Logo, o grafo (a) é planar.

Definição 29: Região

Um grafo conexo simples e planar com seu diagrama planar sem intersecções entre arestas, divide o plano em regiões.



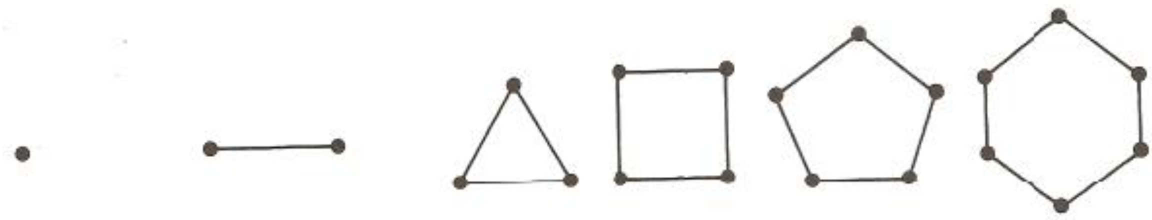
Grau de uma região: é o comprimento do ciclo ou caminho fechado que circunda *r*.

$\deg(r_1) = \deg(r_2) = \deg(r_5) = 3$; $\deg(r_3) = 5$; $\deg(r_4) = 4$

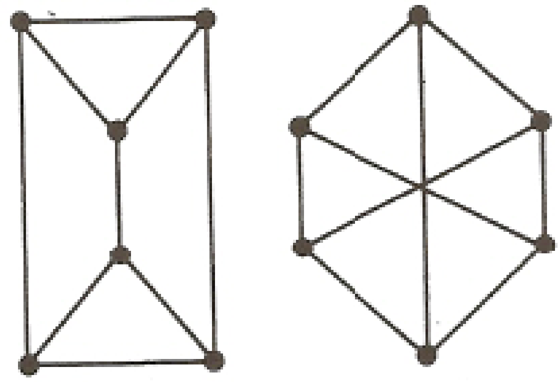
Teorema: A soma dos graus das regiões é igual ao dobro do número de arestas.

Definição 30: Grafos regulares

Um grafo G é dito regular de grau k se todo vértice tem grau k.



0-regular (ii) 1-regular (iii) 2-regular



3-regular

Fórmula de Euler

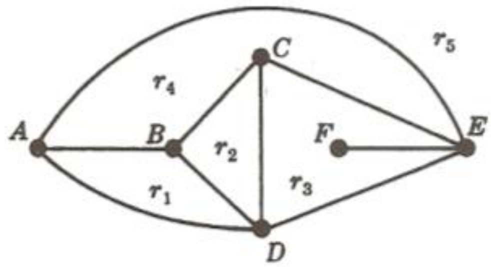
Se G é um grafo conexo, simples, planar e com *r* regiões, então:

1) **n – a + r = 2**. (n: número de vértices; a: número de arestas; r: número de regiões)

No grafo abaixo, temos n = 6; a = 9 e r = 5. Então: 6 – 9 + 5 = 2

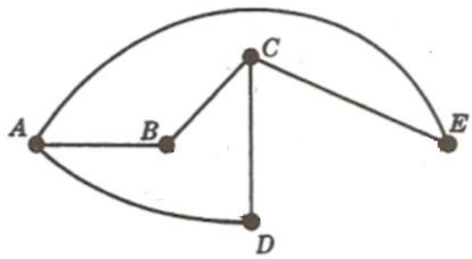
2) Se n ≥ 3, então a ≤ 3n – 6

No grafo ao lado, temos: 9 ≤ 18 – 6



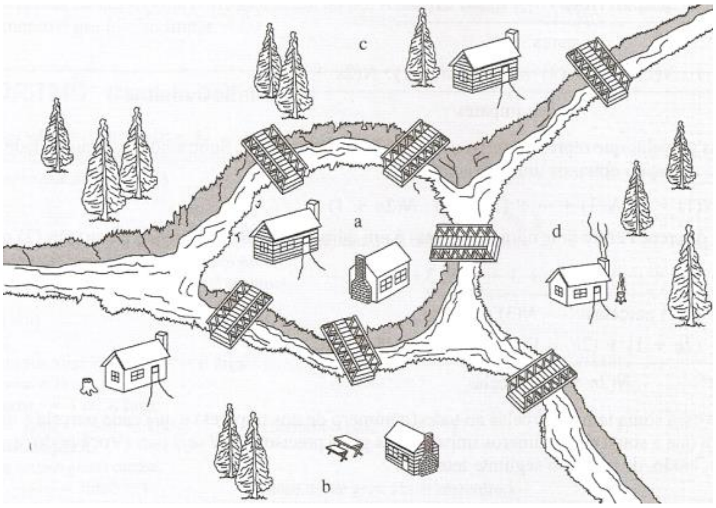
3) Se n ≥ 3, e não existem ciclos de comprimento 3, então a ≤ 2n – 4

Nesse grafo, temos 6 ≤ 10 – 4

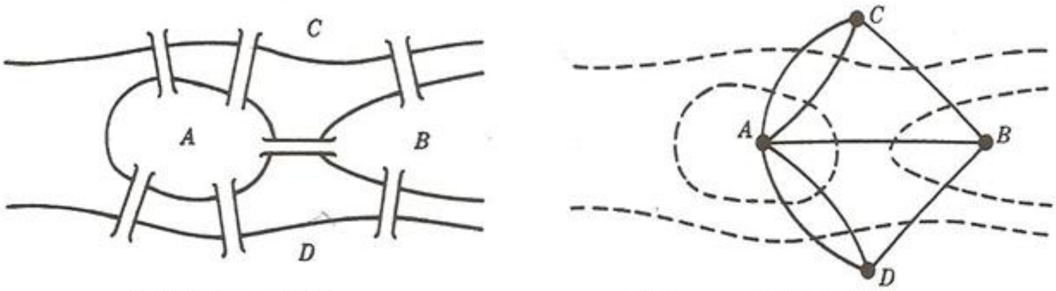


6.6 O problema do caminho de Euler(1707-1783)

Uma pessoa pode caminhar pela cidade atravessando todas as 7 pontes, sem passar por qualquer ponte 2 vezes?



Königsberg (1736)



(*a*) Königsberg em 1736 (*b*) Representação gráfica de Euler

Mostramos agora como Euler provou que o grafo na figura (b) não é atravessável e, portanto, que a caminhada em KÖNIGSBERG é impossível. Lembre que um vértice é par ou ímpar. Suponha que um grafo é atravessável e que uma trilha atravessável não começa ou termina em um vértice P. Afirmamos que P é um vértice par. Afinal, sempre que a trilha atravessável entra em P por uma aresta, deve haver uma aresta não usada anteriormente, pela qual a trilha deve sair de P. Assim, as arestas da trilha incidentes sobre P devem aparecer aos pares e, logo, P é um vértice par. Portanto, se um vértice Q é ímpar, a trilha atravessável deve começar ou terminar em Q. Consequentemente, um grafo com mais de dois vértices ímpares não pode ser atravessável. Observe que o grafo correspondente ao problema da ponte de KÖNIGSBERG tem quatro vértices ímpares. Logo, não se pode caminhar por KÖNIGSBERG, de modo que cada ponte seja atravessada exatamente uma vez.

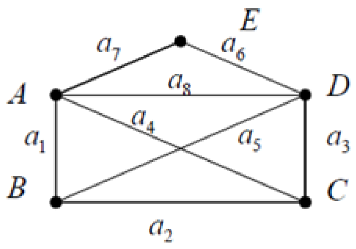
Teoremas:

1) Existe um caminho de Euler em um grafo conexo se, e somente se, não existem nós ímpares ou existirem exatamente dois nós ímpares. No caso em que não existem nós ímpares, o caminho pode começar e terminar em qualquer nó; no caso de dois nós ímpares, o caminho precisa começar em um deles e terminar no outro.

Exemplo: Observe que o grafo abaixo admite um caminho de Euler, pois possui exatamente 2 nós ímpares.

2) O número de nós ímpares em qualquer grafo é par.

Exemplo: No grafo ao lado, temos 2 vértices (B e C) ímpares



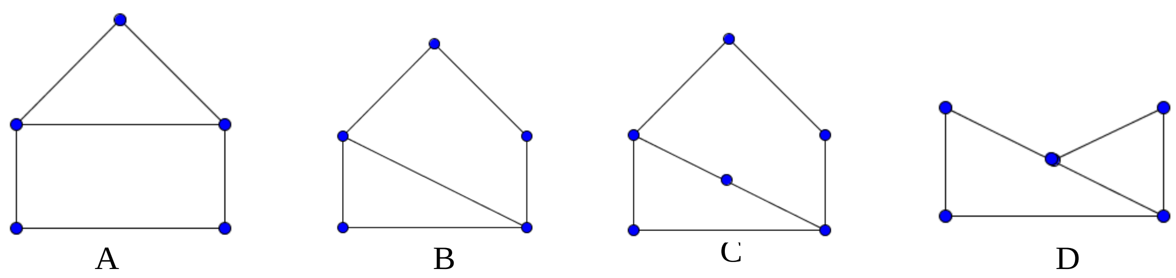
3) A soma dos graus dos vértices de um grafo G é igual ao dobro do número de arestas de G.

Exemplo: No grafo acima, temos deg(A) + deg(B) + deg(C) + deg(D) + deg(E) = 4 + 3 + 3 + 4 + 2 = 16, que é o dobro de 8(número de arestas).

4) A soma dos graus das regiões é igual ao dobro do número de arestas.

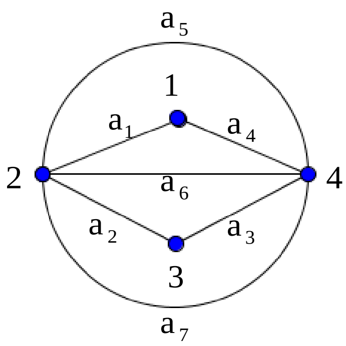
Exercícios

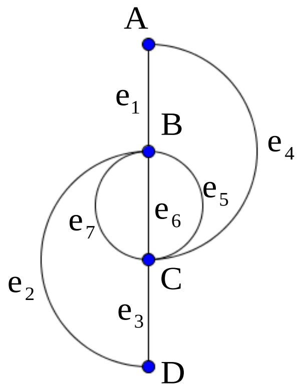
7) Qual dos grafos que seguem não é isomorfo aos outros? Por que?



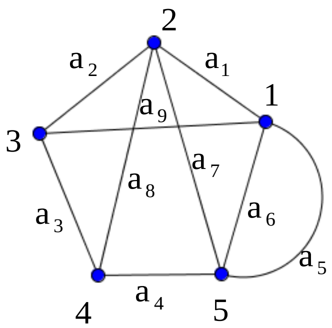
8) Verifique se os grafos são ou não isomorfos. Se forem, apresente a função que estabelece o isomorfismo entre eles. Caso contrário, explique por quê.

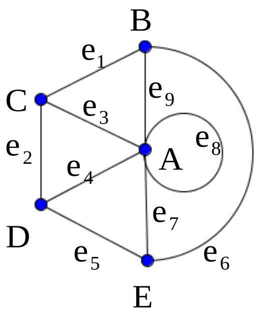
a)



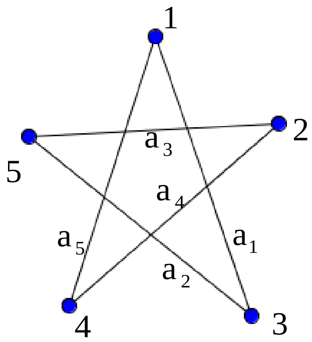


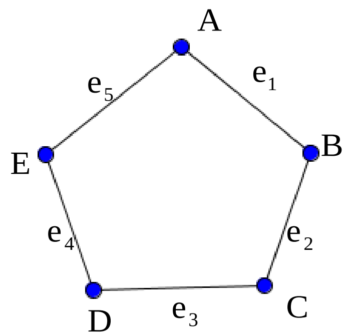
b)



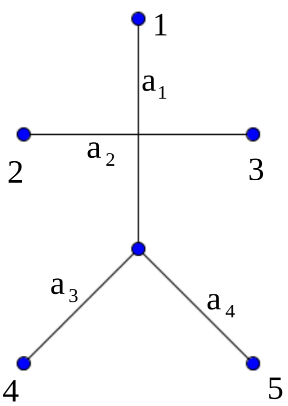


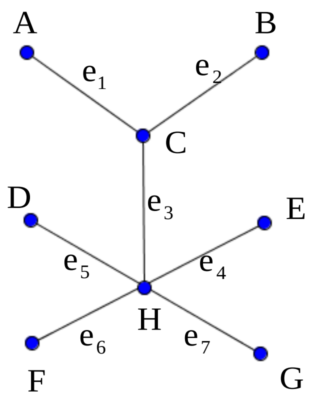
c)



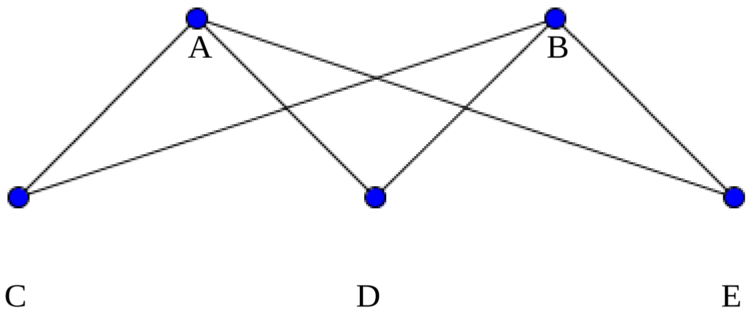


d)

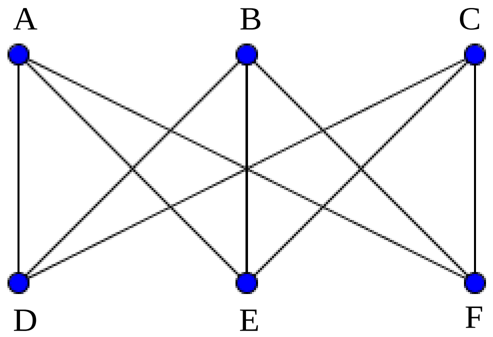




9) Verifique se o grafo $K_{2,3}$ é planar.

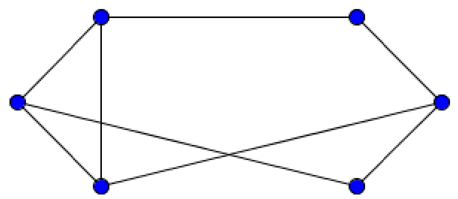


10) Verifique se o grafo $K_{3,3}$ é planar.

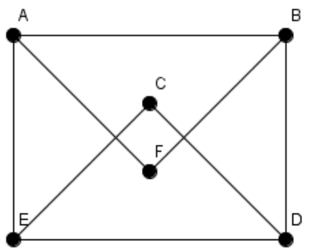


11) Em cada caso, verificar se o grafo é planar e, em caso afirmativo, dar o número de regiões que divide o plano.

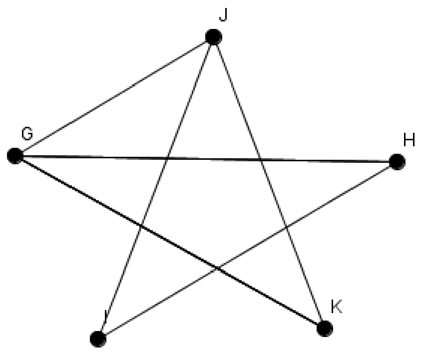
a)



b)



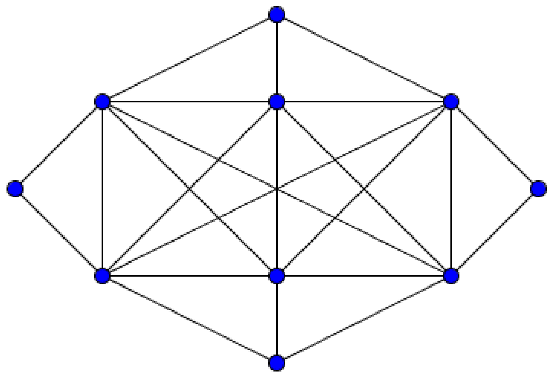
c)



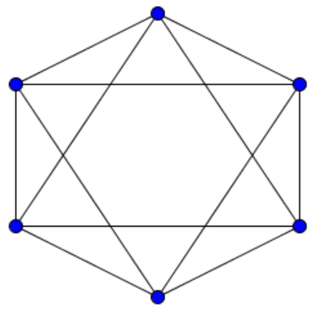
12) Se todos os vértices de um grafo simples conexo e planar tem grau 4 e o número de arestas é 12, em quantas regiões divide o plano?

13) Em cada caso, verifique se o grafo é atravessável e se é euleriano.

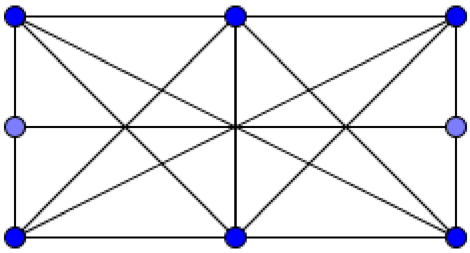
a)



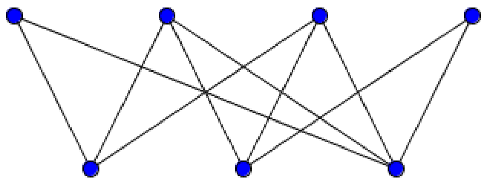
b)



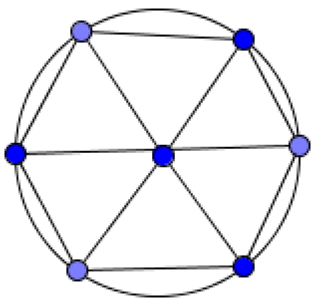
c)



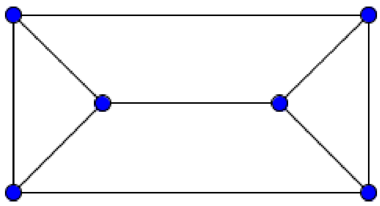
d)



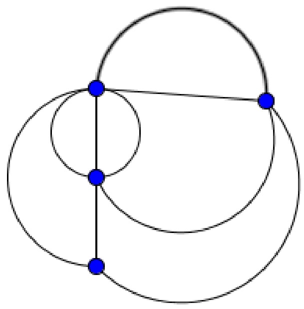
14) Conte o número ***n*** de vértices, o número ***a*** de arestas e o número ***r*** de regiões de cada grafo abaixo e verifique a fórmula de Euler.



A

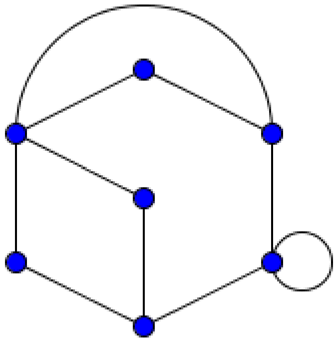


B



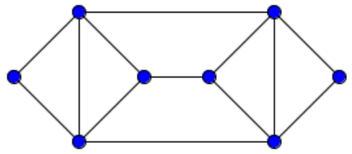
C

15) No grafo abaixo, verifique que a soma dos graus dos vértices é igual ao dobro do número de arestas.

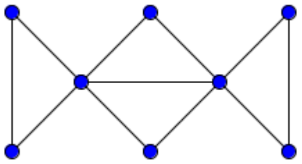


16) Em cada caso, verifique se o grafo é hamiltoniano.

a)



b)



17) Um grafo possui 9 vértices, alguns de grau 4 e, outros, de grau 6. Além disso, sabe-se que a soma dos graus dos vértices é 40.

a) Determine o número de vértices de grau 4.

b) O grafo é atravessável? Por que?

c) O grafo é euleriano? Por que?

d) Determine o número de arestas.

Respostas dos Exercícios

1)

a) Sim, pois não possui arestas paralelas e nem laços.

b) Não, pois existem vértices não adjacentes como, por exemplo, A e F.

c) Sim, pois existe caminho entre dois vértices quaisquer do grafo.

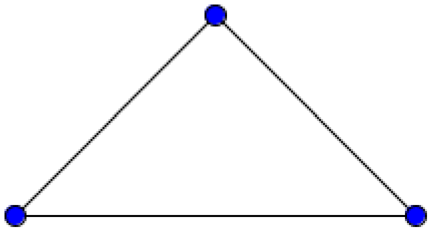
d) C, a_3, D, a_4, E, a_6, F e C, a_5, E, a_6, F.

e) C, a_3, D, a_4, E, a_5, C

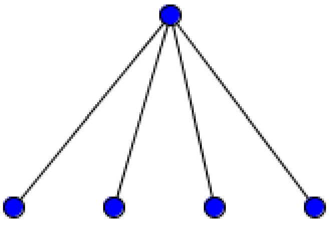
f) a_5

2)

a)



b)



3) a) 3 b) D c) 2

d) Sim, pois todos os vértices têm a mesma profundidade.

e) Por exemplo, D, E e F.

f) H, I, J, K, L, M, N e O.

4) a) V = {A, B, C, D, E, F}

A = {a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8}

g(a_1) = A – B, g(a_2) = B – E, g(a_3) = C – E, g(a_4) = C – F

g(a_5) = D – F, g(a_6) = A – D, g(a_7) = C – D, g(a_8) = B – C

b) gr(A) = gr(E) = gr(F) =2, gr(B) = gr(D) = 3, gr(C) = 4

c) 8

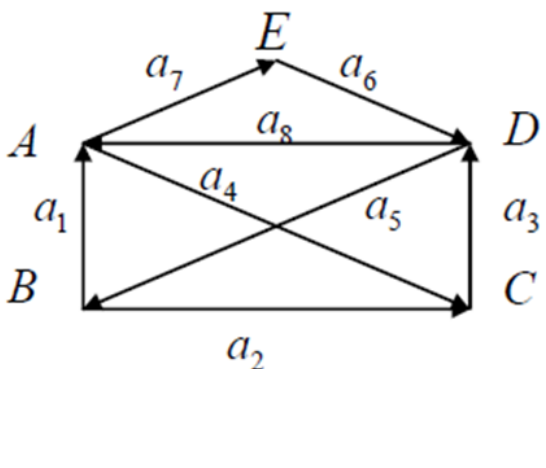
d) 16

5) a) B, C, D, E e F

b) A, a_7, F, a_9, C ou A, $a_{1(\text{ou } a_2)}$, B, a_3, C

c) A, $a_{1(\text{ou } a_2)}$, B, a_3, C, a_8, E, a_6, F, a_9, C, a_4, D.

6) Exemplo de resposta



7) O grafo C, pois possui 6 vértices(os demais possuem 5) e 7 arestas(os demais possuem 6)

8) a) f_1: $1 \to A$, $2 \to B$, $3 \to D$, $4 \to C$

f_2: $a_1 \to e_1$, $a_2 \to e_2$, $a_3 \to e_3$, $a_4 \to e_4$, $a_5 \to e_5$, $a_6 \to e_6$, $a_7 \to e_7$

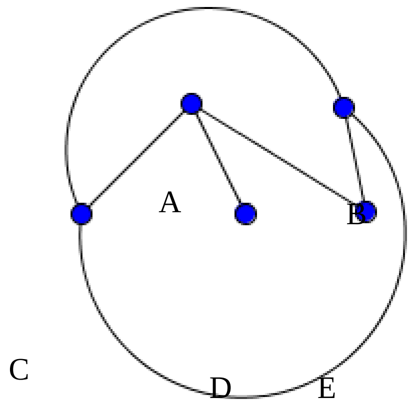
b) Não são isomorfos, pois o primeiro grafo possui um vértice de grau 4 e, o outro, não.

c) f_1: $1 \to A$, $2 \to D$, $3 \to B$, $4 \to E$, $5 \to C$

f_2: $a_1 \to e_1$, $a_2 \to e_2$, $a_3 \to e_3$, $a_4 \to e_4$, $a_5 \to e_5$

d) Não são isomorfos, pois os grafos possuem quantidade de vértices diferentes.

9) É planar



10) Não é planar.

11) a) É planar e divide o plano em 4 regiões.

b) É planar e divide o plano em 4 regiões.

c) É planar e divide o plano em 3 regiões.

12) A soma dos graus dos vértices é 24, pois é igual ao dobro do número de arestas(12). Se todos os vértices têm grau 4, então o grafo tem 6 vértices($n = 6$). Assim, pela fórmula de Euler, temos: $6 – 12 + r = 2$, de onde se conclui que o grafo divide o plano em 8 regiões.

13) a) Não euleriano e atravessável.

b) É euleriano e atravessável.

c) Não euleriano e natravessável.

d) Não euleriano e não atravessável

14) A) 7 – 18+ 13 = 2 B) 6 – 9 + 5 = 2 C) 4 – 9 + 7 = 2

15) O grafo possui 2 vértices de grau 4, 2 vértices de grau 3 e 3 vértices de grau 2. Assim, a soma dos graus dos vértices é igual a 20, dobro do número de arestas, que é 10.

16) É hamiltoniano b) Não é hamiltoniano

17) a) 7

b) Sim, pois para ser atravessável, um grafo deve ter 0 ou 2 nós ímpares.

c) Sim, pois todos os vértices têm grau par.

d) 20

Referências Bibliográficas

GERSTING, Judith L. FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS PARA A CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO. 4ª Ed. Rio de Janeiro: Editora LTC. 2001

IDOETA, Ivan Valeije; CAPUANO, Francisco Gabriel. ELEMENTOS DE ELETRÔNICA DIGITAL. 29 ed. São Paulo: Editora Érica.

LIPSCHUTZ, Seymour; LIPSON, Marc. MATEMÁTICA DISCRETA. Tradução técnica de Adonai Schlup Sant'anna. 3ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.

LIPSCHUTZ, S; M. LIPSON. Teoria e Problemas de Matemática Discreta. Coleção Schaum.Bookman.2ªed-Porto Alegre – 2004.

PAULETTE, Walter. Matemática Discreta. FATEC-SP.2º semestre 2011.

SÉRATES, Jonofon. RACIOCÍNIO LÓGICO. 8ª Ed. Brasília: Jonofon, 1998.