Integrais indefinidas

Sendo $f(x)$ e $F(x)$ definidas em um intervalo $I \subset R$, para todo $x \in I$, dizemos que:

F é uma antiderivada ou uma primitiva de f, em I, se $F'(x) = f(x)$

Exemplos:

$F(x) = x^2$ é uma antiderivada (primitiva) de $f(x) = 2x$, pois $F'(x) = 2x$.
$F(x) = x^2 + 7$ é uma antiderivada (primitiva) de $f(x) = 2x$, pois $F'(x) = 2x$.
$F(x) = x^2 + ½$ é uma antiderivada (primitiva) de $f(x) = 2x$, pois $F'(x) = 2x$.
$F(x) = 2x$ é uma antiderivada (primitiva) de $f(x) = 2$, pois $F'(x) = 2$.
$F(x) = e^x$ é uma antiderivada (primitiva) de $f(x) = e^x$, pois $F'(x) = e^x$.

Observação: Se F é antiderivada de f em I, e c é uma constante, então F + c também é uma antiderivada de f em I.

De fato, se $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in I$, então $[F(x) + c]' = F'(x) = f(x)$, e portanto $F(x) + c$ também é uma antiderivada de $f(x)$ em I.

Assim, por exemplo = x^2, $x^2 + 7$, $x^2 + ½$, são primitivas de $f(x) = 2x$.

Proposição 1: Seja $F(x)$ uma função primitiva da função $f(x)$ e c uma constante qualquer. A função $G(x) = F(x) + c$ também é uma primitiva de $f(x)$.

Proposição 2: Se $f'(x)$ se anula em todos os pontos de um intervalo I, então $f(x)$ é constante em I.

Proposição 3: Se $F(x)$ e $G(x)$ são antiderivadas (primitivas) de uma função contínua f, então existe uma constante c tal que $G(x) = F(x) + c$, para todo $x \in I$.

Definição 1: (**Integral Indefinida**) Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, a expressão $F(x)+c$ é chamada de *integral indefinida* da função $f(x)$ e é denotada por:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

A ligação que existe entre derivadas e integrais permite usar regras já conhecidas de derivação para obter regras correspondentes para a integração. Assim, obtém-se as chamadas *integrais imediatas*.

Integrais Imediatas

1. $\int du = u + c$

2. $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$

3. $\int \dfrac{1}{u} du = \ln|u| + c$

4. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + c, \quad a > 0, a \neq 1$

5. $\int e^u du = e^u + c$

6. $\int \text{sen}\, u\, du = -\cos u + c$

7. $\int \cos u\, du = \text{sen}\, u + c$

8. $\int \text{tg}\, u\, du = \ln|\sec u| + c$

9. $\int \text{cotg}\, u\, du = \ln|\text{sen}\, u| + c$

10. $\int \sec u\, du = \ln|\sec u + \text{tg}\, u| + c$

11. $\int \text{cosec}\, u\, du = \ln|\text{cosec}\, u - \text{cotg}\, u| + c$

12. $\int \sec u\, \text{tg}\, u\, du = \sec u + c$

13. $\int \text{cosec}\, u\, \text{cotg}\, u\, du = -\text{cosec}\, u + c$

14. $\int \sec^2 u\, du = \text{tg}\, u + c$

15. $\int \text{cosec}^2 u\, du = -\text{cotg}\, u + c$

16. $\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} arc\ \text{tg} \dfrac{u}{a} + c$

17. $\int \dfrac{du}{a^2 - u^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{u+a}{u-a}\right| + c$

18. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + c$

19. $\int \dfrac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \dfrac{1}{a} arc \sec\left|\dfrac{u}{a}\right| + c$

20. $\int \dfrac{du}{u\sqrt{a^2 \pm u^2}} = -\dfrac{1}{a} \ln\left|\dfrac{a + \sqrt{a^2 \pm u^2}}{u}\right| + c$

21. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = arc\ \text{sen} \dfrac{u}{a} + c, \quad u^2 < a^2$

22. $\int \text{senh}\, u\, du = \cosh u + c$

23. $\int \cosh u\, du = \text{senh}\, u + c$

24. $\int \text{sec}\, h^2 u\, du = \text{tgh}\, u + c$

25. $\int \text{cosech}^2 u\, du = -\text{cotgh}\, u + c$

26. $\int \text{cosech}\, u\, \text{cotgh}\, u\, du = -\text{cosech}\, u + c$

27. $\int \text{sech}\, u\, \text{tgh}\, u\, du = -\text{sech}\, u + c$

Propriedades da integral indefinida

Sejam *f, g*: I→R e c ≠ 0 uma constante. Então:

a. $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$

b. $\int \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Exemplos:

a) $\int\left(3x^2+5+\sqrt{x}\right)dx$

b) $\int\left(\dfrac{x^3+2x+7}{x}\right)dx$

c) $\int\left(\dfrac{e^x}{2}+x\sqrt{x}\right)dx$

d) $\int\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{x}\right)dx$

e) $\int\left(\dfrac{x^4+3x^{-1/2}+4}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$

f) $\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx$

g) $\int \left(\cos(t) - \sec(t)tg(t)\right)dt$

h) $\int \left(\frac{\sec^2(x)}{\cos\sec(x)}\right)dx$

i) $\int \left(\frac{2\cot g(x) - 3sen^2(x)}{sen(x)}\right)dx$

j) $\int \left(tg^2(t) + \cot g^2(t) + 4\right)dt$

k) Estima-se que daqui a t meses a população de certa cidade esteja aumentando à taxa de $4+5t^{2/3}$ habitantes por mês. Se a população atual é 10.000 habitantes, qual será a população daqui a 8 meses?

l) Um estudo ambiental realizado em certa cidade revela que daqui a t anos o índice de monóxido de carbono no ar estará aumentando a razão de 0,1t + 0,1 partes por milhão por ano. Se o índice atual de monóxido de carbono no ar é de 3,4 partes por milhão, qual será o índice daqui a 3 anos?

Método da Substituição ou Mudança de Variável para Integração

Utilizando regras de integração, é possível encontrar a primitiva de algumas funções. Entretanto, o que acontece quando temos que encontrar a primitiva de funções do tipo:

$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$

Método da substituição (Mudança de variável): Seja F(x) uma primitiva de f(x) em um intervalo I e g uma função derivável tal que $F_o g$ esteja definida.

Usando a Regra da Cadeia, temos:

$$(F(g(x)))' = F'(g(x)).g'(x) = f(g(x)).g'(x).$$

Logo, $F(g(x))$ é uma primitiva de $f(g(x)).g'(x)$. Então:

$$\int f(g(x)).[g'(x)]dx = F(g(x)) + C$$

Fazendo $u=g(x)$ tem-se $du=g'(x)dx$ temos:

$$\int f(g(x)).[g'(x)]dx = \int f(u)\,du = F(u) + C$$

Exemplos:

a) $\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$

b) $\int \sqrt{5x+7}\,dx$

c) $\int (2x^3+1)^7 x^2 dx$

d) $\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$

e) $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$

f) $\int \frac{e^t}{\cos^2(e^t-2)}\,dt$

g) $\int sen(x+7)\,dx$

h) $\int \frac{sen(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$

i) $\int sen^2(x)\cos(x)\,dx$

j) $\int (x+\sec^2(3x))\,dx$

k) $\int \sqrt{1+x^2}\,x^5\,dx$

l) $\int \sqrt{t^2-2t^4}\,dt$

m) $\int \frac{dx}{x^2+6x+13}$

n) $\int \frac{\sqrt{x-2}}{x+1}\,dx$

OBS: Utilizando a Regra da Substituição é possível obter a integral imediata de algumas funções trigonométricas.

Exemplos:

a) $\int \text{tg}\, x\, dx$

b) $\int \cot g\, x\, dx$

c) $\int \sec x\, dx$

d) $\int \operatorname{cosec} x\, dx$

Exercícios:

a) $\int x^3 \cos x^4 dx$

b) $\int \frac{dx}{x \ln x}$

c) $\int \frac{\sec^2 x}{3+2tg\, x} dx$

d) $\int \frac{1}{x} \cos(\ln x) dx$

e) $\int \left(\sqrt[7]{x^3} + sen \frac{x}{5} \right) dx$

f) $\int sen^5 x \, \cos x\, dx$

g) $\int (x+1) sen(x+1)^2 dx$

h) $\int tg\, x \, \sec^2 x\, dx$

i) $\int \frac{tg \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

j) $\int \sec(5x-\pi) dx$

Método da Integração por Partes

"A integração por partes corresponde a regra do produto para a derivação."

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções deriváveis no intervalo I $\subset$ R. Então, para cada x em I, temos:

$$[f(x)\, g(x)]' = f(x)\, g'(x) + g(x) f'(x)$$

$$f(x)\, g'(x) = [f(x)\, g(x)]' - g(x)\, f'(x)$$

Integrando ambos os lados desta equação:

$$\int f(x) g'(x)\; dx = \int \left[f(x)\; g(x) \right]' dx - \int g(x)\, f'(x) dx$$

$$\int f(x) g'(x)\; dx = f(x)\; g(x)\; dx - \int g(x)\, f'(x) dx$$

Sendo:

$$u = f(x) \quad \Rightarrow \quad du = f'(x)dx$$

$$dv = g'(x)dx \quad \Rightarrow \quad v = g(x)$$

podemos escrever a formula da *integração por partes*, expressa por:

$$\boxed{\int u\, dv = u\, v - \int v\, du}$$

Exemplos:

a) $\int \ln x \, dx$

b) $\int x\, senx\, dx$

c) $\int x \ln x\, dx$

d) $\int xe^{2x} dx$

Uma estratégia para integrar por partes

Ao integrar $\int f(x)g(x)\,dx$, devemos sempre escolher, dentre as duas funções da expressão $f(x)g(x)dx$, uma delas como sendo o fator u e a outra como parte de uma diferencial dv. Esta escolha deve ser feita de modo que ao passarmos da integral $\int u dv$ para a integral $\int v du$, passemos a uma integral mais simples de ser calculada.

Uma sugestão que funciona bem na **grande maioria das vezes** é escolher as funções u e dv segundo o critério: ("*Publicado como uma pequena nota em uma edição antiga da revista American Mathematical Monthly*")

L	**I**	**A**	**T**	**E**
Logarítmicas	Inversas de trigonométricas	Algébricas elementares	Trigonométricas	exponenciais

Estratégia:

Escolher entre as duas funções como:

- ✓ função u: a função cuja letra inicial de caracterização posiciona-se mais à esquerda no anagrama;
- ✓ diferencial dv: a função cuja letra inicial de caracterização posiciona-se mais à direita no anagrama.

Resumindo: u deve caracterizar-se pela letra mais próxima de L, e dv pela letra mais próxima de E.

Exemplos

a) $\int t^2 \ln t\, dt$

b) $\int x\, sen\, 4x\, dx$

c) $\int t^2 e^t\, dt$

d) $\int e^x sen\, x\, dx$

e) $\int sen(\ln x)\, dx$

Integração de algumas funções envolvendo funções trigonométricas

Algumas identidades trigonométricas serão utilizadas para integrar certas combinações de funções trigonométricas.

Integrais da forma $\int sen^m x\,dx$ e $\int \cos^n x\,dx$ com m e n inteiros não negativos

Identidades trigonométricas utilizadas:

- ✓ $sen^2(x) + \cos^2(x) = 1$ (identidade trigonométrica)
- ✓ $\mathrm{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ (ângulo-metade)
- ✓ $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$ (ângulo-metade)
- ✓ $\mathrm{sen}(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\mathrm{sen}(2x)$

Para potências de seno e cosseno <u>ímpares</u>, fazemos:

- ✓ $\int sen^m x\,dx = \int sen^{m-1} x\, senx\,dx$
- ✓ $\int \cos^n x\,dx = \int \cos^{n-1} x \cos x\,dx$

Em seguida, utiliza-se a identidade trigonométrica $sen^2(x) + \cos^2(x) = 1$ para chegar a uma fórmula fácil de integrar.

Se as potências de seno e cosseno são pares, utilizamos as identidades dos ângulos-metades. Algumas vezes pode ser útil utilizar a identidade $\mathrm{sen}(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\mathrm{sen}(2x)$.

Para nas integrais da forma $\int sen^m x \cos^n x\,dx$ com m e n inteiros não negativos, quando pelo menos um dos expoentes é <u>ímpar</u>, usamos a identidade trigonométrica e, quando os dois expoentes são pares, usamos as identidades dos ângulos-metade. Algumas vezes pode ser útil utilizar $\mathrm{sen}(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\mathrm{sen}(2x)$.

Exemplos:

a. $\int \cos^5(x)dx$

b. $\int sen^4(x)dx$

c. $\int sen^3(2\theta)d\theta$

d. $\int \cos^3(x)sen^4(x)dx$

e. $\int sen^2(x)\cos^4(x)dx$

f. $\int sen^4(x)\cos^4(x)dx$

Integrais da forma $\int tg^m x\, dx$ e $\int \text{cotg}^n x\, dx$ com *m* e *n* inteiros não negativos

Identidades trigonométricas utilizadas:

- ✓ $tg^2(x) = sec^2(x) – 1$
- ✓ $cotg^2(x) = cossec^2(x) - 1$

Os artifícios utilizados consistem em:

- ✓ $\int tg^m x\, dx = \int tg^{m-2} x\, tg^2 x\, dx = \int tg^{m-2} x\,(\sec^2 x - 1)\, dx$
- ✓ $\int cotg^n x\, dx = \int cotg^{n-2} x\, cotg^2 x\, dx = \int cotg^{n-2} x\,(\cos\sec^2 x - 1)\, dx$

Exemplos:

a) $\int tg^3 x\, dx$

b) $\int \text{cotg}^4 (2x)\, dx$

Integrais da forma $\int \sec^m x\, dx$ e $\int \text{cossec}^n x\, dx$ com m e n inteiros não negativos

Quando m e n forem números pares, os artifícios utilizados consistem em:

- ✓ $\int \sec^m x\, dx = \int (\sec^2 x)^{\frac{m-2}{2}} \sec^2 x\, dx = \int (tg^2 x + 1)^{\frac{m-2}{2}} \sec^2 x\, dx$
- ✓ $\int \text{cossec}^n x\, dx = \int (\text{cossec}^2 x)^{\frac{n-2}{2}} \text{cossec}^2 x\, dx = \int (\text{cotg}^2 x + 1)^{\frac{n-2}{2}} \text{cossec}^2 x\, dx$

Quando m e n forem ímpares, utiliza-se o método da integração por partes.

Exemplos:

a) $\int \text{cossec}^6 x\, dx$

b) $\int \sec^3 x\, dx$

Integrais da forma $\int tg^m x \sec^n x\, dx$ e $\int \text{cotg}^m x\ \text{cossec}^n x\, dx$ com *m* e *n* inteiros não negativos

Quando *m* for ímpar e *n* for par, podemos preparar o integrando e aplicar o método da substituição.

Quando *m* for par e *n* for ímpar, a integral deve ser resolvida por integração por partes.

Exemplos:

a) $\int \text{tg}^6 x \sec^4 x\, dx$

b) $\int \text{tg}^5 x \sec^7 x\, dx$

c) $\int \text{tg}^2 x \sec^3 x \, dx$

Integração de funções envolvendo seno e cosseno de arcos diferentes

Para a resolução dessas integrais, as seguintes identidades trigonométricas serão utilizadas:

- ✓ sen(a)cos(b) = ½ [sen(a+b) + sen(a-b)]
- ✓ sen(a)sen(b) = ½ [cos(a-b) - cos(a+b)]
- ✓ cos(a)cos(b) = ½ [cos(a+b) + cos(a-b)]

Exemplos:

a) $\int \text{sen}\, 4x \cos 2x \, dx$

b) $\int \cos 5x \cos 3x \, dx$

Integração de funções racionais por frações parciais

Uma função racional $f(x)$ é definida como o quociente de duas funções polinomiais, ou seja, $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, em que $p(x)$ e $q(x)$são polinômios e $q(x) \neq 0$.

Exemplos:

$$f(x) = \frac{2}{x^2+1}, \quad f(x) = \frac{3x}{x^2+4x}, \quad f(x) = \frac{1}{x^2+6x+1}$$

Para calcular a integral de qualquer função racional, escrevemos a função como uma soma de frações mais simples.

Proposição: Se q(x) é um polinômio com coeficientes reais, então q(x) pode ser expresso como o produto de fatores lineares e/ou quadráticos, todos com coeficientes reais.

Para a decomposição da função racional em funções mais simples, o coeficiente do termo de mais alto grau do polinômio $q(x) = 1$. Se isso não ocorrer, dividimos $p(x)$ e $q(x)$ por esse coeficiente.

Além disso, é possível expressar $f(x)$como uma soma de frações mais simples desde que o grau de $p(x)$ seja menor que o grau de $q(x)$ (*função racional própria*). Se o grau de $p(x)$ for maior que o grau de $q(x)$, dividimos $p(x)$ por $q(x)$ até que o resto $r(x)$ tenha grau menor que o grau de $q(x)$.

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

Situações que podem ocorrer:

Caso 1: O denominador $q(x)$é um produto de fatores lineares distintos.

$$q(x) = (x + a_1)(x + a_2) \ldots (x + a_n)$$

em que nenhum fator é repetido (e nenhum fator é múltiplo constante do outro). Nesse caso, existem constantes $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tais que:

$$f(x) = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - a_n}$$

Exemplos:

a. $\int \frac{x-2}{x^3-3x^2-x+3}dx$

b. $\int \frac{4x^3}{2x^3 + x^2 - 2x - 1}\,dx$

c. $\displaystyle\int \frac{6x^2+6}{(1-x)(x+2)(x+3)}\,dx$

Caso 2: O denominador $q(x)$é um produto de fatores lineares sendo que alguns deles se repetem

Se na decomposição de q(x) há fatores da forma $(x - a_i)^r$, $r \geq 2$, a cada um desses fatores corresponderá uma soma de frações da forma:

$$f(x) = \frac{B_1}{x - a_i} + \frac{B_2}{(x - a_i)^2} + \frac{B_3}{(x - a_i)^3} + \cdots + \frac{B_r}{(x - a_i)^r}$$

Exemplos:

a) $\int \frac{x^3 + 3x - 1}{x^4 - 4x^2} dx$

b) $\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$

c) $\int \frac{1-2x^2}{x^4+x^3}\,dx$

Caso 3: Os fatores de $q(x)$ são quadráticos irredutíveis que não se repetem.

Se $q(x)$ tiver um fator $ax^2 + bx + c$, em que $b^2 - 4ac < 0$, então, a cada fator quadrático corresponderá uma fração parcial da forma:

$$\frac{Cx + D}{x^2 + bx + c}$$

Exemplos:

a) $\displaystyle\int \frac{2x^2 - 5x - 3}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^2 + 2x + 4}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{2x^2+5x+4}{x^3+x^2+x-3}\,dx$

Caso 4: Os fatores de $q(x)$ são quadráticos irredutíveis e se repetem.

Se $q(x)$ tiver um fator $(ax^2 + bx + c)^r$, em que $b^2 - 4ac < 0$ e $r \geq 2$, então, a cada um desses fatores corresponderá uma soma de frações parciais da forma:

$$\frac{C_1x + D_1}{(x^2 + bx + c)} + \frac{C_2x + D_2}{(x^2 + bx + c)^2} + \ldots + \frac{C_rx + D_r}{(x^2 + bx + c)^r}$$

Exemplos:

a) $\displaystyle\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{5x^3 - 3x^2 + 7x - 3}{(x^2+1)^2}\,dx$

Integração de funções racionais de seno e cosseno

Se na integral o integrando for uma função racional de sen(x) e cos(x), podemos reduzir a integral a uma função racional de uma nova variável t fazendo a substituição:

$$t = tg\left(\frac{1}{2}x\right), -\pi < x < \pi$$

Para obter as fórmulas de sen(x) e cos(x) em termos de t, usamos as identidades:

- ✓ sen(2y) = 2sen y cos y
- ✓ cos(2y) = 2cos² y – 1

Fazendo $y = \frac{1}{2}x$, temos:

✓ $sen(x) = 2sen\left(\frac{1}{2}x\right)cos\left(\frac{1}{2}x\right)$

$$= 2\frac{sen\left(\frac{1}{2}x\right)cos^2\left(\frac{1}{2}x\right)}{cos\left(\frac{1}{2}x\right)}$$

$$= 2tg\left(\frac{1}{2}x\right)\frac{1}{sec^2\left(\frac{1}{2}x\right)}$$

$$= \frac{2tg\left(\frac{1}{2}x\right)}{1+tg^2\left(\frac{1}{2}x\right)} = \frac{2t}{1+t^2}$$

Logo, $sen(x) = \frac{2t}{1+t^2}$

✓ $cos(x) = 2cos^2\left(\frac{1}{2}x\right) - 1$

$$= 2\frac{1}{sec^2\left(\frac{1}{2}x\right)} - 1$$

$$= \frac{2}{1+tg^2\left(\frac{1}{2}x\right)} - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Logo, $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Como $t = tg\left(\frac{1}{2}x\right), dt = \frac{1}{2}sec^2\left(\frac{1}{2}x\right)dx = \frac{1}{2}\left(1 + tg^2\left(\frac{1}{2}x\right)\right)dx \implies dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

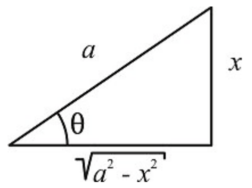
Exemplos:

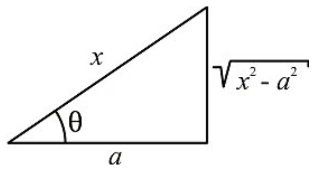
a) $\displaystyle\int \frac{1}{1 - sen\,x + \cos x}\,dx$

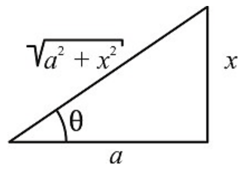
b) $\displaystyle\int \frac{1}{3 + 5\cos x}\,dx$

Integração por substituição trigonométrica

As substituições trigonométricas são substituições empregadas em integrais envolvendo uma das expressões $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$ e $\sqrt{a^2+x^2}$, nas quais a variável x é substituída (correspondentemente) por uma das funções $a sen\theta$, $a tg\theta$ e $a sec\theta$.







- ✓ Quando a função integrando envolve $\sqrt{a^2-x^2}$, fazemos $\frac{x}{a} = sen\theta$. Assim, $x = a\, sen\theta$ e $dx = a\, cos\theta\, d\theta$. Supondo que $\frac{-\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$:

$$\boxed{\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2sen^2\theta} = \sqrt{a^2(1-sen^2\theta)} = \sqrt{a^2cos^2\theta} = acos\theta}$$

- ✓ Quando a função integrando envolve $\sqrt{x^2-a^2}$, fazemos $\frac{a}{x} = cos\theta$ ou $\frac{x}{a} = sec\theta$. Assim, $x = a\, sec\theta$ e $dx = a\, sec\theta\, tg\theta\, d\theta$. Supondo que $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$:

$$\boxed{\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2sec^2\theta - a^2} = \sqrt{a^2(sec^2\theta - 1)} = \sqrt{a^2tg\theta} = a\, tg\theta}$$

OBS: Em ambos os casos, a raiz quadrada da diferença de quadrados é um cateto.

- ✓ Quando a função integrando envolve $\sqrt{a^2+x^2}$, fazemos $\frac{x}{a} = tg\theta$. Neste caso, $x = a\, tg\theta$ e $dx = a\, sec^2\theta\, d\theta$. Supondo θ tal que $\frac{-\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$:

$$\boxed{\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2+a^2tg^2\theta} = \sqrt{a^2(1+tg^2\theta)} = \sqrt{a^2sec^2\theta} = asec\theta}$$

Exemplos:

a) $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx$

b) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\,dx$

c) $\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx$