1) SISTEMAS NUMÉRICOS

São formados por um conjunto de símbolos, utilizados para a representação de quantidades, e as regras que definem a forma de representação.

1.1) SISTEMAS NUMÉRICOS NÃO POSICIONAIS:

Nesses sistemas os símbolos sempre representam **valores absolutos**, independentemente da posição que ocupam no número representado.

Ex.: Sistema numérico romano
M = Mil unidades.
MM = Duas mil unidades.

Pode-se observar que ao deslocarmos o símbolo "M" uma casa à esquerda, seu valor (valor absoluto) permanece o mesmo (1000).

1.2) SISTEMAS NUMÉRICOS POSICIONAIS:

Nesses sistemas, os símbolos possuem dois valores: um valor absoluto (Valor associado ao símbolo quando este aparece isolado) e um valor relativo que é determinado pelo valor absoluto do símbolo, pelo valor da base do sistema em uso e pela "distância" da vírgula na qual o símbolo aparece.

Ex.: 1 = Uma unidade.
10 = Dez unidades.

Pode-se observar que ao deslocarmos o símbolo "1" uma casa à esquerda, seu valor modificou-se (O valor relativo passou a ser 10 unidades). Esse valor decorre da base utilizada (base 10 – utilizada no sistema decimal) .

Para determinarmos o valor relativo representado por um ou mais símbolos, devemos multiplicar o valor absoluto do símbolo pela base do sistema, elevada ao expoente de sua posição e então somar os produtos.

2) CARACTERÍSTICAS DOS SISTEMAS NUMÉRICOS POSICIONAIS:

a) A quantidade de símbolos utilizados corresponde ao valor da base do sistema.

b) o valor do maior símbolo corresponde ao valor da base subtraído de uma unidade e o menor é sempre zero.

c) Os expoentes da base iniciam em zero na posição imediatamente à esquerda da vírgula e são acrescidos de uma unidade a cada casa deslocada para a esquerda e subtraídos de uma unidade a cada casa deslocada para a direita.

3) ESTRUTURA DOS SISTEMAS NUMÉRICOS POSICIONAIS:

3.1) Sistema numérico decimal.

Qtde. de símbolos = 10
Base = 10

Estrutura :
Quando representamos 123 unidades, na base 10, simplesmente escrevemos 123, porém se observamos a estrutura do número temos:

Símbolos → 1 2 3

Base → 10^2 10^1 10^0

$3 \times 10^0 = 3 \times 1 = 3$
$2 \times 10^1 = 2 \times 10 = 20$
$1 \times 10^2 = 1 \times 100 = 100$

$123_{(10)}$

3.2) Sistema numérico binário:

Qtde.de símbolos: 2 (0 e 1)
Base = 2.

Esse sistema numérico é o único viável em um computador digital.

Estrutura :

1 1 0

2^2 2^1 2^0

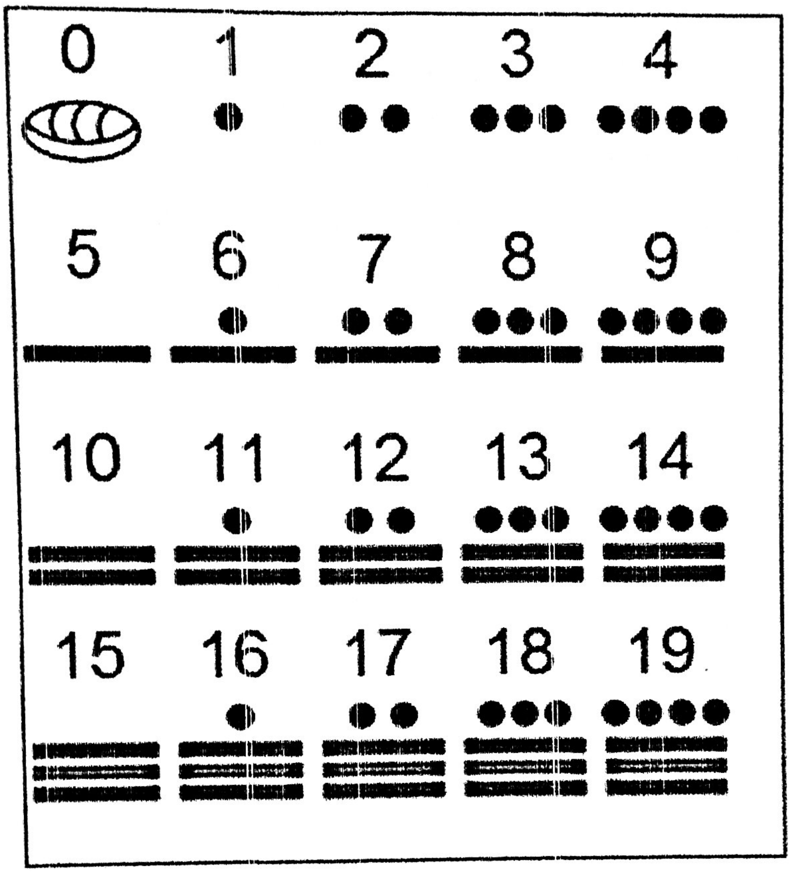
$0 \times 1 = 0$
$1 \times 2 = 2$
$1 \times 4 = 4$

$6_{(10)}$

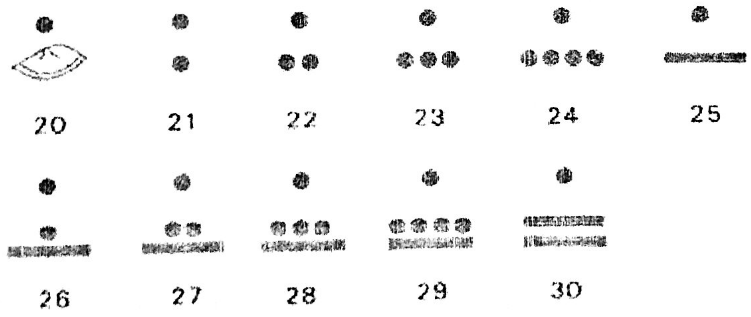
Essa estrutura pode ser utilizada para transformar em decimal, qualquer valor representado, em qualquer sistema numérico posicional, independentemente de sua base. O valor entre parênteses, à direita do número, indica a base utilizada.

3.3) Sistema numérico Maia

Símbolos e valores absolutos:



Símbolos e valores relativos:



4) CONVERSÕES ENTRE BASES:

4.1) Qualquer base para decimal:

Multiplicando cada símbolo do número a converter, pela base do sistema, elevada ao expoente correspondente e somando-se os produtos obtidos temos o valor correspondente em decimal.

4.2) Decimal para qualquer base:

Divide-se o número decimal e sucessivamente os quocientes obtidos, pelo valor da base do sistema alvo, até obter o quociente zero.
Tomando-se os restos das divisões da direita para a esquerda temos o valor equivalente ao decimal na base desejada, como descrito acima.

Exemplo: Converter $26_{(10)}$ para hexadecimal:

$$\begin{array}{llll} 26 & \underline{|\,16} & & \\ \underline{-16} & 1 & \underline{|\,16} & \\ 10\,(A) & \underline{-0} & 0 & \\ & 1 & & \end{array} \longrightarrow \quad 26_{(10)} = 1A_{(16)}$$

4.3) Hexadecimal para binário:

Substitui-se cada símbolo hexadecimal por 4 símbolos binários, conforme a tabela :

HEXA	$\longrightarrow$	BINÁRIO
0		0000
1		0001
2		0010
3		0011
4		0100
5		0101
6		0110
7		0111
8		1000
9		1001
A	(10)	1010
B	(11)	1011
C	(12)	1100
D	(13)	1101
E	(14)	1110
F	(15)	1111

Um bom método para essa conversão é utilizar a estrutura do sistema binário, colocando em "1" cada posição que, multiplicada pela base elevada ao expoente, até que a soma desses produtos resulte no valor de cada símbolo hexadecimal.

Exemplo: Converter o valor $C7_{(16)}$ para binário:

$$C7_{(16)} = 11000111_{(2)} \longrightarrow 1100_{(2)} = C_{(16)} = 12_{(10)}\ ;\ 0111_{(2)} = 7_{(10)}$$

4.4) Binário para hexadecimal:
Procedimento inverso ao anterior. Agrupam-se os dígitos binários de 4 em 4, da direita para a esquerda. Substituindo cada grupo de 4 dígitos binários por seu correspondente em hexadecimal.

Exemplo: $10100101_{(2)} = A5_{(16)}$ 1010 = A e 0101 = 5

4.5) Octal para binário:

Substitui-se cada dígito octal por 3 dígitos binários correspondentes:

OCTAL	BINÁRIO
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

Lembrando que $101_{(2)}$ resulta em 5; vindo de $1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

4.6) Binário para octal:

Agrupam-se os dígitos binários de 3 em 3, da direita para a esquerda e substitui-se cada grupo de 3 dígitos binários pelo correspondente símbolo octal.

4..7) Octal para hexadecimal:

O procedimento é feito em 2 etapas :

a) Converte-se o octal em binário
b) Converte-se o binário em hexadecimal.

4.8) Hexadecimal para octal:

O procedimento é feito em 2 etapas:

a) Converte-se o hexadecimal em binário
b) Converte-se o binário em octal

Exercícios propostos:

Converter para as bases indicadas.

a) $110001011010_{(2)} = \quad {}_{(8)} = \quad {}_{(10)} = \quad {}_{(16)}$

a) $4673_{(8)} = \quad {}_{(2)} = \quad {}_{(10)} = \quad {}_{(16)}$

b) $AC9E_{(16)} = \quad {}_{(8)} = \quad {}_{(10)} = \quad {}_{(2)}$

5) OPERAÇÕES ARITMÉTICAS EM SISTEMAS NUMÉRICOS POSICIONAIS:

As regras utilizadas para operações aritméticas com sistemas numéricos posicionais aplicam-se a qualquer base utilizada, devendo-se observar que a única diferença refere-se ao valor da base em uso.

5.1) Adição:

Procede-se somando os símbolos de cada coluna, da direita para a esquerda. Uma vez encontrado o resultado, se o mesmo for inferior ao valor da base utilizada, colocamos o resultado na própria coluna. Se o resultado for igual ou superior ao valor da base em uso, verificamos quantas vezes a base pode ser extraída desse resultado (Dividindo-se o resultado pela base utilizada, expresso em decimal, o quociente da divisão indica essa quantidade). Essa quantidade é transportada para a coluna imediatamente à esquerda e o restante (resto da divisão) é colocado na própria coluna.

ex.:

$$
\begin{array}{r}
11 \\
11 \\
+\ \underline{11_{(2)}} \\
1001_{(2)}
\end{array}
$$

a) Na coluna mais à direita temos: $1 + 1 + 1 = 3_{(10)}$.
b) Dividindo-se 3 por 2 temos o quociente = 1 e o resto = 1.
c) Colocando os valores nas colunas, como indicado acima, temos:

$$
\begin{array}{rl}
1 & \longrightarrow \text{quociente da divisão.} \\
11 & \\
11 & \\
\underline{11_{(2)}} & \\
1 & \longrightarrow \text{resto da 1ª. divisão}
\end{array}
$$

d) Prosseguindo a soma na segunda coluna à esquerda temos: $1 + 1 + 1 + 1 = 4$
e) Dividindo-se 4 por 2 (base em uso) temos o quociente = 2 e resto = 0.
f) Colocando-se o quociente na coluna à esquerda e o resto na própria coluna, temos:

$$\begin{array}{r} 2\,1 \\ 1\,1 \\ 1\,1 \\ \underline{1\,1_{(2)}} \\ 0\,1 \end{array}$$

2 1 → quocientes das divisões.

resto da 2ª. divisão

g) Prosseguindo a soma na terceira coluna à esquerda temos: 2 + 0 + 0 + 0 = 2
h) Dividindo-se 2 por 2 (base em uso) temos o quociente = 1 e resto = 0.

$$\begin{array}{r} 1\,2\,1 \\ 1\,1 \\ 1\,1 \\ \underline{1\,1_{(2)}} \\ 0\,0\,1 \end{array}$$

1 2 1 → quocientes das divisões.

resto da 3ª. divisão

i) Prosseguindo a soma na quarta coluna à esquerda temos: 1 + 0 + 0 + 0 = 1
j) Como a soma da coluna é inferior à base 2, colocamos o resultado na própria coluna, obtendo o resultado da adição:

$$\begin{array}{r} 1\,2\,1 \\ 1\,1 \\ 1\,1 \\ \underline{1\,1_{(2)}} \\ 1\,0\,0\,1 \end{array}$$

1 2 1 → quocientes das divisões.

resto da 3ª. divisão

k) Portanto temos que $11_{(2)} + 11_{(2)} + 11_{(2)} = 1001_{(2)}$

Esse procedimento resolve adições em qualquer base, devendo-se observar que o divisor utilizado deve ser o valor da base em uso.

5.2) <u>Multiplicação:</u>

Na multiplicação usa-se o mesmo método de extração da base.

Ex.:
$$\begin{array}{r} 1\,F \\ \underline{x\ E_{(16)}} \end{array}$$

a) Multiplicando $E \times F_{(16)} = 14 \times 15_{(10)} = 210_{(10)}$
b) Dividindo 210 por 16 (base em uso), temos quociente igual a 13 (D) e resto igual a 2.
c) Deslocando o quociente (D) para a coluna à esquerda e mantendo o resto (2) na própria coluna temos:

$$\begin{array}{r} D \\ 1\,F \\ \underline{x\ E_{(16)}} \\ 2 \end{array}$$

d) Multiplicando E por 1 e somando o transporte (D) temos E x 1 + D = 27 $_{(10)}$
e) Dividindo 27 por 16 (base) temos quociente igual a 1 e resto igual a $11_{(10)}$ (B).

```
 1 D    ──────▶  quocientes das divisões.
 0 1 F
   x E(16)
 ───────
   B 2
```

f) Multiplicando E por 0 e somando 1 temos: E x 0 + 1 = $14_{(10)}$ x 0 + 1 = $1_{(10)}$ = $1_{(16)}$

```
 1 D    ──────▶  quocientes das divisões.
 01 F
   x E(16)
 ───────
 1 B 2(16)
```

5.3) <u>Subtração.</u>

Sempre que o subtraendo for menor ou igual ao minuendo calculamos a diferença entre ambos, utilizando apenas os símbolos da própria coluna. Quando o subtraendo for maior que o minuendo, pedimos 1 "emprestado" à coluna imediatamente à esquerda e aumentamos o valor do minuendo o correspondente a uma vez à base utilizada.

```
Ex.:   3  0  D
     - 2  1  F(16)
     ─────────────
       0  E  E(16)
```

a) Como não podemos subtrair F ($15_{(10)}$) de D ($13_{(10)}$), pedimos 1 para a casa imediatamente à esquerda. Como essa casa possui 0, pedimos 1 para a casa mais à esquerda (3) que é subtraída de 1, e aumentos uma base (16) na casa à sua direita (0). Portanto teremos:

```
    2  +16
    ↗   ↗
   3̸  0̸  D
 - 2  1  F(16)
 ─────────────
```

b) Como agora a casa à esquerda da primeira à direita, possui 16 (0 + $16_{(10)}$), esta pode emprestar um para a casa à sua direita (ficando com F ou $15_{(10)}$), sendo então a casa mais à direita aumentada de uma base, $13_{(10)}$ (D) + 16 = $29_{(10)}$. Portanto teremos:

```
          29(10)
          ↗
      +16(uma base)
 2  F  D̸
```

c) Agora podemos prosseguir a subtração:

$$\begin{array}{rccc} & 2 & F & (29_{(10)}) \\ - & 2 & 1 & F_{(16)} \\ \hline & 0 & E & E \end{array}$$

6) Exercícios propostos:

a)
$$\begin{array}{r} FD9F \\ \underline{+\ 8FB9_{(16)}} \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} E9C \\ \underline{x\ \ D9_{(16)}} \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r} C00E \\ \underline{-\ \ D8F_{(16)}} \end{array}$$