

## Algèbre de Boole

### Repères historiques

**Georges Boole** (1815–1864) était un mathématicien britannique qui a, entre autre, défini une représentation des opérations logiques à l'aide d'opérations mathématiques.

On appelle cette modélisation **l'algèbre de Boole** et elle est à la base du fonctionnement des ordinateurs et plus généralement de tous les systèmes électroniques.



### Tu sais compter jusqu'à 1 ?

L'algèbre de Boole est basée sur un ensemble de 2 valeurs  $B = \{0; 1\}$  sur lequel on définit 2 opérations **et** et **ou**. On appelle **booléens** les éléments de  $B$ .

Puisqu'il y a peu de cas possibles, on définit ces opérations à l'aide des tableaux de ci-contre, qu'on appelle **table de vérité**.

$a$	$b$	$a \text{ et } b$	$a$	$b$	$a \text{ ou } b$
0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Le 0 et le 1 servent généralement à représenter une proposition fausse ou vraie. Ainsi, le **et** peut être considéré comme étant "les deux propositions sont vraies" et le **ou** comme "au moins une des deux propositions est vraie". On remarque que  $a \text{ ou } b$  est vraie même si les deux sont vraies. On dit que c'est le **ou inclusif**.

On définit également une transformation **non** qui inverse la valeur de l'élément.

$a$	non $a$
0	1
1	0

Il existe de nombreuses notations pour  $B$  et les opérations.

	0	1	$a \text{ et } b$	$a \text{ ou } b$	non $a$
logique	$\perp$	$\top$	$a \wedge b$	$a \vee b$	$\neg a$
informatique	False	True	$a \& b$	$a   b$	$!a$
algébrique	0	1	$a \cdot b$	$a + b$	$\overline{b}$

### Propriétés

Toutes les égalités suivantes sont vraies pour tous booléens  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

- Complémentarité :**

$$a \text{ ou } (\text{non } a) = 1$$

$$a \text{ et } (\text{non } a) = 0$$

$$\text{non } (\text{non } a) = a$$

- Commutativité :**

$$a \text{ ou } b = b \text{ ou } a$$

$$a \text{ et } b = b \text{ et } a$$

- Associativité :**

$$(a \text{ ou } b) \text{ ou } c = a \text{ ou } (b \text{ ou } c) = a \text{ ou } b \text{ ou } c$$

$$(a \text{ et } b) \text{ et } c = a \text{ et } (b \text{ et } c) = a \text{ et } b \text{ et } c$$

- Distributivité :**

$$a \text{ et } (b \text{ ou } c) = (a \text{ et } b) \text{ ou } (a \text{ et } c)$$

$$a \text{ ou } (b \text{ et } c) = (a \text{ ou } b) \text{ et } (a \text{ ou } c)$$

## Démonstrations

L'avantage de n'avoir que 2 valeurs, c'est qu'il est facile de vérifier qu'une propriété est vraie en testant toutes les valeurs possibles.

**EXERCICE 1 :** Démontrer les deux égalités de la distributivité à l'aide des tables de vérité suivantes :

a	b	c	b ou c	a et (b ou c)
0	0	0		
0	0	1		
0	1	0		
0	1	1		
1	0	0		
1	0	1		
1	1	0		
1	1	1		

a	b	c	a et b	a et c	(a et b) ou (a et c)
0	0	0			
0	0	1			
0	1	0			
0	1	1			
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

a	b	c	b et c	a ou (b et c)
0	0	0		
0	0	1		
0	1	0		
0	1	1		
1	0	0		
1	0	1		
1	1	0		
1	1	1		

a	b	c	a ou b	a ou c	(a ou b) et (a ou c)
0	0	0			
0	0	1			
0	1	0			
0	1	1			
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

**EXERCICE 2 :** Le mathématicien britannique **Auguste de Morgan** (1806–1871) a également contribué à développer l'algèbre de Boole à l'aide de son théorème :

$$\text{non } (a \text{ ou } b) = (\text{non } a) \text{ et } (\text{non } b)$$

$$\text{non } (a \text{ et } b) = (\text{non } a) \text{ ou } (\text{non } b)$$

Démontrer ce théorème à l'aide des tables ci-dessous :

a	b	a ou b	non (a ou b)
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		

a	b	non a	non b	(non a) et (non b)
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

a	b	a et b	non (a et b)
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		

a	b	non a	non b	(non a) ou (non b)
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

## Une nouvelle opération

En français, quand on dit "fromage ou dessert", c'est l'un ou l'autre. Ce qui n'est pas le cas du **ou** utilisé dans les booléens.

On appelle **ou exclusif** ou **xor** l'opération définie par la table ci-contre.

a	b	a xor b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

**EXERCICE 3 :** Donner une expression utilisant **ou**, **et** et **non** et équivalente à  $a \text{ xor } b$ .

**EXERCICE 4 :** Soit en simplifiant les expressions, soit en utilisant les tables de vérités, simplifier les expressions suivantes :

- 1)  $a \text{ ou } (a \text{ et } b)$
- 2)  $a \text{ et } (a \text{ ou } b)$
- 3)  $a \text{ ou } ((\text{non } a) \text{ et } b)$
- 4)  $(a \text{ ou } b) \text{ et } ((\text{non } a) \text{ ou } b)$
- 5)  $(a \text{ xor } b) \text{ ou } (a \text{ et } b)$
- 6)  $(a \text{ xor } b) \text{ et } (a \text{ ou } (\text{non } b))$

### *Pour aller plus loin*

L'algèbre de Boole sert pour définir les bases de la logique. Pour cela, il faut définir l'implication  $a \Rightarrow b$  qui signifie que si  $a$  est vraie, alors  $b$  l'est aussi. La table de vérité est ci-contre.

On peut définir l'implication par l'expression  $(\text{non } a) \text{ ou } b$ .

$a$	$b$	$a \Rightarrow b$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

**EXERCICE 5 :** À l'aide de tables de vérité ou en simplifiant les expressions, démontrer que  $a \Rightarrow b$  et  $(\text{non } b) \Rightarrow (\text{non } a)$ .

**EXERCICE 6 :** Les opérateurs **et**, **ou**, **xor** et  $\Rightarrow$  ne sont pas les seuls opérateurs à 2 paramètres que l'on peut définir. En fait il y en a 16.

- 1) Justifier pourquoi il n'y a que 16 opérateurs logiques à 2 paramètres. Vous pourrez regarder les tableaux de valeurs des opérateurs de base.
- 2) Compléter la table suivante en indiquant tous les opérateurs et en identifiant les opérateurs connus et en essayant d'exprimer les autres à partir des opérateurs connus.

$a$	$b$	$o_0$	$o_1$	$o_2$	$o_3$	$o_4$	$o_5$	$o_6$	$o_7$	$o_8$	$o_9$	$o_{10}$	$o_{11}$	$o_{12}$	$o_{13}$	$o_{14}$	$o_{15}$
0	0																
0	1																
1	0																
1	1																

**EXERCICE 7 : David Hilbert** (1862–1943) était un mathématicien allemand qui a essayé de déterminer les axiomes de base permettant de définir et démontrer l'ensemble des propriétés mathématiques. Pour la logique il a donné une liste d'axiomes, qui peuvent s'exprimer ainsi :

- $a \Rightarrow (b \Rightarrow a)$
- $((\text{non } b) \Rightarrow (\text{non } a)) \Rightarrow (a \Rightarrow b)$
- $(a \text{ et } b) \Rightarrow a$
- $a \Rightarrow (a \text{ ou } b)$
- $(a \text{ ou } b) \Rightarrow ((a \Rightarrow c) \Rightarrow ((b \Rightarrow c) \Rightarrow c))$
- $(a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) \Rightarrow ((a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow c))$
- $a \Rightarrow (b \Rightarrow (a \text{ et } b))$
- $(a \text{ et } b) \Rightarrow b$
- $b \Rightarrow (a \text{ ou } b)$

Vérifier que ces axiomes sont vérifiés dans l'algèbre de Boole. C'est-à-dire que leurs tables de vérité ne contiennent que des 1.