Präsenz

Aufgabe 1

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = 3y + 15x^2 - 5x \qquad y(0) = 3$$

Lösung 1

Es handelt sich um ein Anfangswertproblem mit einer DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.
Bestimmte die homogene DGL $y_h'(x) - 3y_h(x) = 0$ durch Trennung der Variablen zu $y_h(x) = c \cdot \mathrm{e}^3 x$.

Bestimme die partikuläre Lösung der Form $y_p(x) = c_2x^2 + c_1x + c_0$ und $y_p'(x) = 2c_2x + c_1$.

$$\begin{aligned} y_p'(x) - 3y_p(x) &= 15x^2 - 5x \\ \Leftrightarrow \quad (2c_2x + c_1) - 3 \cdot \left(c_2x^2 + c_1x + c_0\right) &= 15x^2 - 5x \\ \Leftrightarrow \quad (-3c_2)x^2 + (2c_2 - 3c_1)x + (c_1 - 3c_0) &= 15x^2 - 5x \end{aligned}$$

So erhalten wir für $c_2 = 5$, $c_1 = -\frac{5}{3}$ und $c_0 = -\frac{5}{9}$ und somit

$$y_p(x) = -5x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{5}{9}$$

Wir setzen die Lösungen zusammen und bestimmen c mit $y(0) = 3 \Leftrightarrow c = \frac{32}{9}$

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\ &= c \cdot \mathrm{e}^3 x - 5x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{5}{9} \\ &= \frac{32}{9}\mathrm{e}^3 x - 5x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{5}{9} \end{aligned}$$

Lösung 2

Berechnen Sie die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichungen.

$$y' - 3y = -3\mathrm{e}^{3x}$$

Aufgabe 1

Gesucht ist die allgemeine Lösung der jeweiligen Differentialgleichung.

a) $y' + 2y = 8\sin(x) - \cos(x)$

b) $y' - 4y = -28\sin(3x) + 21\cos(3x)$

Lösung 1a

Löse die homogene Differentialgleichung $y_h'(x) + 2y_h(x) = 0$ durch *Trennung der Variablen*.

$$\begin{aligned}
& y_h'(x) + 2y_h(x) &&= 0 \\
\Leftrightarrow\quad & y_h(x) &&= -\tfrac{1}{2}\tfrac{\mathrm{d}y_h}{\mathrm{d}x} \\
\Leftrightarrow\quad & 1\ \mathrm{d}x &&= -\tfrac{1}{2\cdot y_h(x)}\ \mathrm{d}y_h \\
\Leftrightarrow\quad & \textstyle\int 1\ \mathrm{d}x &&= -\tfrac{1}{2}\textstyle\int \tfrac{1}{y_h(x)}\ \mathrm{d}y_h \\
\Leftrightarrow\quad & x + c &&= -\tfrac{1}{2}\ln|y_h(x)| \\
\Leftrightarrow\quad & -2x + -2c &&= \ln|y_h(x)| \\
\Leftrightarrow\quad & \mathrm{e}^{-2x}\cdot \underbrace{\mathrm{e}^{-2c}}_{:=\tilde{c}\in\mathbb{R}^+} &&= |y_h(x)| \\
\Leftrightarrow\quad & \mathrm{e}^{-2x}\cdot \underbrace{c}_{c\in\mathbb{R}} &&= y_h(x)
\end{aligned}$$

Die homogene Lösung lautet somit $y_h(x) = c\cdot \mathrm{e}^{-2x}$.
Bestimme die partikuläre Lösung $y_p(x)$ mittels *Ansatz vom Typ der rechten Seite* für die Störfunktion $g(x) = 8\sin(x) - \cos(x)$.

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= c_0\sin(ax) + c_1\cos(ax) \\
y_p'(x) &= ac_0\cos(ax) - ac_1\sin(ax)
\end{aligned}$$

Wir setzten den Ansatz für in die DGL ein und bereiten den Koeffizientenvergleich vor.

$$\begin{aligned}
& 8\sin(x) - \cos(x) &&\overset{!}{=} y_p'(x) + 2y_p(x) \\
\Leftrightarrow\quad & 8\sin(x) - \cos(x) &&= ac_0\cos(ax) - ac_1\sin(ax) + 2c_0\sin(ax) + 2c_1\cos(ax) \\
\Leftrightarrow\quad & 8\sin(x) - \cos(x) &&= \sin(ax)\underbrace{(2c_0 - ac_1)}_{\overset{!}{=}8} + \cos(ax)\underbrace{(ac_0 + 2c_1)}_{\overset{!}{=}-1}
\end{aligned}$$

Mit $a = 1$ ergibt sich für $c_0 = 3$ und für $c_1 = -2$. Somit erhalten wir die partikuläre Lösung:

$$y_p(x) = 3\sin(x) - 2\cos(ax)$$

Zusammengesetzt bedeutet das für die allgemeine Lösung der DGL

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\ &= c \cdot \mathrm{e}^{-2x} + 3\sin(x) - 2\cos(ax) \end{aligned}$$

Lösung 1b

Nach dem zuvor beschriebenen Verfahren lösen wir $y_h'(x) - 4y_h(x) = 0$ zu $y_h(x) = c \cdot \mathrm{e}^{4x}$ und bestimmen mit Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} & -28\sin(3x) + 21\cos(3x) && \overset{!}{=} y_p'(x) - 4y_p(x) \\ \Leftrightarrow\quad & -28\sin(3x) + 21\cos(3x) && = ac_0\cos(ax) - ac_1\sin(ax) - 4c_0\sin(ax) - 4c_1\cos(ax) \\ \Leftrightarrow\quad & -28\sin(3x) + 21\cos(3x) && = \underbrace{-(ac_1 + 4c_0)}_{\overset{!}{=}-28}\sin(ax) + \underbrace{(ac_0 - 4c_1)}_{\overset{!}{=}21}\cos(ax) \end{aligned}$$

Wir erhalten die Koeffizienten $a = 3, c_0 = 7, c_1 = 0$ und können somit mit der partikulären Lösung $y_p(x) = 7\sin(3x)$ die allgemeine Lösung zusammensetzen:

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\ &= c \cdot \mathrm{e}^{4x} + 7\sin(3x) \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Lösen Sie die gegebene Differentialgleichung

$$y' + \frac{y}{x} - x^2 \cdot \sqrt[3]{y} = 0$$

Lösung 2

Es handelt sich um eine *Bernoullische Differentialgleichung*, also um eine nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung der Form

$$y'(x) = f(x)y(x) + g(x)y^{\alpha}(x), \quad \alpha \neq \{0,1\}$$

mit $f(x) = x^{-1}, g(x) = x^2$ und $\alpha = \frac{1}{3}$.
Durch die Substitution $z(x) = y(x)^{1-\alpha}$ kann man sie auf die lineare Differentialgleichung

$$z'(x) = (1-\alpha)\big(f(x) \cdot z(x) + g(x)\big)$$

zurückführen.

Wir erhalten die *inhomogene* Differentialgleichung

$$z'(x) = \frac{2}{3}\left(x^{-1} \cdot z(x) + x^2\right)$$
$$\Leftrightarrow z'(x) - \frac{2}{3}x^{-1}z(x) = \frac{2}{3}x^2$$

welche von der Form $y'(x) + f(x) \cdot y(x) = g(x)$ ist.
Um diese durch *Variation der Konstanten* zu lösen, lösen wir als erstes die homogene Differentialgleichung $z_h'(x) - \frac{2}{3}x^{-1}z_h(x) = 0$ mittels Trennung der Variablen und erhalten

$$z_h(x) = c \cdot \mathrm{e}^{\int \frac{2}{3}x^{-1}\,\mathrm{d}x} = \tilde{c} \cdot x^{\frac{2}{3}}.$$

Als nächstes ersetzen wir $c = c(x)$ in der Form

$$z'(x) = c'(x) \cdot \mathrm{e}^{\int -f(x)\,\mathrm{d}x} + \underbrace{c(x) \cdot \mathrm{e}^{\int -f(x)\,\mathrm{d}x}}_{z(x)} \cdot \big(-f(x)\big)$$

und vergleichen $z'(x)$ mit der ursprünglichen Störfunktion:

$$z'(x) + f(x) = c'(x) \cdot \mathrm{e}^{\int -f(x)\,\mathrm{d}x} \overset{!}{=} g(x)$$
$$z'(x) + f(x) = \underbrace{c'(x) \cdot x^{\frac{2}{3}} \overset{!}{=} \frac{2}{3}x^2}_{\text{neue DGL}}$$

Durch Lösung der neuen Differentialgleichung erhalten wir $c(x) = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{3}} + \tilde{c}$ und können dies einsetzen in $z_h(x)$ um die allgemeine Lösung zu erhalten:

$$z(x) = \left(\frac{2}{7}x^{\frac{7}{3}} + \tilde{c}\right) \cdot x^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{7}x^3 + \tilde{c} \cdot x^{\frac{2}{3}}$$

Durch Rücksubstitution mit $y(x) = z^{\frac{3}{2}}$ erhalten wir

$$y(x) = \left(\frac{2}{7}x^3 + \tilde{c} \cdot x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Aufgabe 3

Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem

$$y' + y - y^3 = 0, \qquad y(0) = \frac{1}{2}$$

Lösung 3

Aufgabe 4

Berechnen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung

$$y' - y = -4 - 81e^{-8x} - 22\sin(2x) + 4x - 11\cos(2x)$$

Lösung 4

Löse dazu die homogene DGL $y_h'(x)$

Aufgabe 5

Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Differentialgleichung

$$y' - 2y = (2\sin(x) + 5\cos(x)) \cdot e^{-3x}$$

Lösung 5