Aufgabe 8

Gegeben sei die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_3, 4x_2)$.

a) Zeigen Sie, dass f linear ist.

b) Bestimmen Sie den $\ker(f)$ und geben Sie die $\dim(\ker(f))$ an.

c) Berechnen Sie die $\dim(\text{Bild}(f))$ bzw. $\text{rang}(f)$ und bestimmen Sie das $\text{Bild}(f)$.

d) Ist die Abbildung f injektiv oder surjektiv?

Lösung 8a

Additivität:

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 - 2x_3, 4x_2) \\
f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) &= (x_1 + y_1 - 2(x_3 + y_3), 4(x_2 + y_2)) \\
f(x_1, x_2, x_3) + f(y_1, y_2, y_3) &= (x_1 - 2x_3, 4x_2) + (y_1 - 2y_3, 4y_2) \\
&= (x_1 - 2x_3 + y_1 - 2y_3, 4x_2 + 4y_2) \\
&= (x_1 + y_1 - 2(x_3 + y_3), 4(x_2 + y_2)) \\
\Rightarrow \quad f(x_1, x_2, x_3) + f(y_1, y_2, y_3) &= f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \checkmark
\end{aligned}
$$

Homogenität:

$$
\begin{aligned}
f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) &= (\lambda \cdot x_1 - 2 \cdot \lambda \cdot x_3, 4 \cdot \lambda \cdot x_2) \\
&= (\lambda \cdot (x_1 - 2 \cdot x_3), 4 \cdot \lambda \cdot x_2) \\
\lambda f(x_1, x_2, x_3) &= \lambda \cdot (x_1 - 2x_3, 4x_2) \\
&= (\lambda \cdot (x_1 - 2x_3), 4 \cdot \lambda \cdot x_2) \\
\Rightarrow \qquad f(\lambda x_1, \lambda x_2) &= \lambda f(x_1, x_2) \checkmark
\end{aligned}
$$

Die Abbildung ist linear.

Lösung 8b

Lösung 8c

Lösung 8d