Aufgabe 1

Weisen Sie folgende Gleichung nach:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = (d-a)(c-a)(b-a)(d-b)(c-b)(d-c)$$

Lösung 1

Lösung mit Laplace, Spalte 1:

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}
&= \begin{vmatrix} b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \\ d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ c & c^2 & c^3 \\ d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix} \\
&= b \cdot \begin{vmatrix} c^2 & c^3 \\ d^2 & d^3 \end{vmatrix} - c \cdot \begin{vmatrix} b^2 & b^3 \\ d^2 & d^3 \end{vmatrix} + d \cdot \begin{vmatrix} b^2 & b^3 \\ c^2 & c^3 \end{vmatrix} \\
&- a \cdot \begin{vmatrix} c^2 & c^3 \\ d^2 & d^3 \end{vmatrix} - c \cdot \begin{vmatrix} a^2 & a^3 \\ d^2 & d^3 \end{vmatrix} + d \cdot \begin{vmatrix} a^2 & a^3 \\ c^2 & c^3 \end{vmatrix} \\
&+ a \cdot \begin{vmatrix} b^2 & b^3 \\ d^2 & d^3 \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} a^2 & a^3 \\ d^2 & d^3 \end{vmatrix} + d \cdot \begin{vmatrix} a^2 & a^3 \\ b^2 & b^3 \end{vmatrix} \\
&- a \cdot \begin{vmatrix} b^2 & b^3 \\ c^2 & c^3 \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} a^2 & a^3 \\ c^2 & c^3 \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} a^2 & a^3 \\ b^2 & b^3 \end{vmatrix} \\
&= (b-a) \cdot \begin{vmatrix} c^2 & c^3 \\ d^2 & d^3 \end{vmatrix} + (a-c) \cdot \begin{vmatrix} b^2 & b^3 \\ d^2 & d^3 \end{vmatrix} + (d-a) \cdot \begin{vmatrix} b^2 & b^3 \\ c^2 & c^3 \end{vmatrix} \\
&- (b+c) \cdot \begin{vmatrix} a^2 & a^3 \\ d^2 & d^3 \end{vmatrix} + (d-b) \cdot \begin{vmatrix} a^2 & a^3 \\ c^2 & c^3 \end{vmatrix} + (d+c) \cdot \begin{vmatrix} a^2 & a^3 \\ b^2 & b^3 \end{vmatrix} \\
\\
&= (b-a) \cdot c^2 d^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & c \\ 1 & d \end{vmatrix} + (a-c) \cdot b^2 d^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & d \end{vmatrix} + (d-a) \cdot b^2 c^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & c \end{vmatrix} \\
&- (b+c) \cdot a^2 d^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & d \end{vmatrix} + (d-b) \cdot a^2 c^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & c \end{vmatrix} + (d+c) \cdot a^2 b^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{vmatrix} \\
\\
&= (b-a) \cdot c^2 d^2 \cdot (d-c) + (a-c) \cdot b^2 d^2 \cdot (d-b) + (d-a) \cdot b^2 c^2 \cdot (c-b) \\
&- (b+c) \cdot a^2 d^2 \cdot (d-a) + (d-b) \cdot a^2 c^2 \cdot (c-a) + (d+c) \cdot a^2 b^2 \cdot (b-a) \\
\\
&= bc^2d^3 + b^2c^3d + b^3cd^2 - b^3c^2d - bc^3d^2 - b^2cd^3 \\
&\quad - \left(ac^2d^3 + a^2c^3d + a^3cd^2 - a^3c^2d - ac^3d^2 - a^2cd^3\right) \\
&\quad + ab^2d^3 + a^2b^3d + a^3bd^2 - a^3b^2d - ab^3d^2 - a^2bd^3 \\
&\quad - \left(ab^2c^3 + a^2b^3c + a^3bc^2 - a^3b^2c - ab^3c^2 - a^2bc^3\right) \\
&= bc^2d^3 + b^2c^3d + b^3cd^2 - b^3c^2d - bc^3d^2 - b^2cd^3 \\
&\quad - ac^2d^3 - a^2c^3d - a^3cd^2 + a^3c^2d + ac^3d^2 + a^2cd^3 \\
&\quad + ab^2d^3 + a^2b^3d + a^3bd^2 - a^3b^2d - ab^3d^2 - a^2bd^3 \\
&\quad - ab^2c^3 - a^2b^3c - a^3bc^2 + a^3b^2c + ab^3c^2 + a^2bc^3 \\
&= \left(dc - da - ac + a^2\right)\left(bd - b^2 - ad + ab\right)\left(cd - c^2 - bd + bc\right) \\
&= (d-a)(c-a)(b-a)(d-b)(c-b)(d-c)
\end{aligned}
$$

Lösung 1 Variante 2

Da $\det(A) = \det(A^T)$ betachten wir A^T und ziehen das $a^{(i-1)}$-fache der ersten Zeile von den übrigen Zeilen ab und lösen mit Laplace:

$$
\begin{aligned}
A^T &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ 0 & b^3-a^3 & c^3-a^3 & d^3-a^3 \end{vmatrix} \\
&= 1 \cdot \begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ b^3-a^3 & c^3-a^3 & d^3-a^3 \end{vmatrix} \\
&= (b-a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & c-a & d-a \\ a+b & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ (a+b)^2 & c^3-a^3 & d^3-a^3 \end{vmatrix} \\
&= \underbrace{(b-a)(c-a)(d-a)}_{:=p_1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & a+c & a+d \\ (a+b)^2 & (a+c)^2 & (a+d)^2 \end{vmatrix} \\
&= p_1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a+c-(a+b) & a+d-(a+b) \\ 0 & (a+c)^2-(a+b)^2 & (a+d)^2-(a+b)^2 \end{vmatrix} \\
&= p_1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-b & d-b \\ 0 & (a+c)^2-(a+b)^2 & (a+d)^2-(a+b)^2 \end{vmatrix} \\
&= p_1 \cdot \begin{vmatrix} c-b & d-b \\ (a+c)^2-(a+b)^2 & (a+d)^2-(a+b)^2 \end{vmatrix} \\
&= p_1 \cdot \left((c-b)\left((a+d)^2-(a+b)^2\right) - (d-b)\left((a+c)^2-(a+b)^2\right)\right) \\
&= p_1 \cdot \left((c-b)\left(2ad+d^2-2ab-b^2\right) - (d-b)\left(2ac+c^2-2ab-b^2\right)\right) \\
&= p_1 \cdot \left((c-b)\left(2a\cdot(d-b)+d^2-b^2\right) - (d-b)\left(2a\cdot(c-b)+c^2-b^2\right)\right) \\
&= p_1 \cdot ((c-b)(2a\cdot(d-b)+(d-b)(d+b)) - (d-b)(2a\cdot(c-b)+(c-b)(c+b))) \\
&= p_1 \cdot ((c-b)(d-b)\cdot(2a+(d+b)) - (d-b)(c-b)\cdot(2a+(c+b))) \\
&= p_1 \cdot ((c-b)(d-b)((2a+b+d)-(2a+b+c))) \\
&= p_1 \cdot (c-b)(d-b)(d-c) \\
&= (d-a)(c-a)(b-a)\cdot(d-b)(c-b)(d-c)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2

Für welches $\alpha \in \mathbb{R}$ hat das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & \alpha x_2 & - & 5x_3 & = & 4 \end{array}$$

keine, eine bzw. unendlich viele Lösungen? Geben Sie ggf. die Lösungen an.

Lösung 2

Wir betrachten das LGS als Abbildung $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -3 & -1 \\ 3 & \alpha & -5 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= 30 + (-9) + (-4\alpha) - 36 - (-2\alpha) - (-15) \\ &= -2\alpha \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass das LGS eindeutig lösbar ist, wenn $\alpha \neq 0$ ist. Für $\alpha = 0$ stellen wir durch Addition der ersten beiden Zeilen zu der dritten Zeile fest, dass nur zwei Zeilen linear unabhängig sind, also $\text{rg}(A) = 2$. Da jedoch $\text{rg}(A) = 2 \neq 3 = \text{rg}(A,b)$ erhalten wir keine Lösung.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen- bzw. Spaltenvektoren, also den Rang, der folgenden Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{II}+\text{I}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{II}-2\cdot\text{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{II}\leftrightarrow\text{III}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit ist $\text{rg}(A) = 2$.

Aufgabe 4

Finden Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit $K = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $x \in K^3$,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung 4

Der Kern der Abbildungsmatrix $\ker(A)$ ist die Menge aller Lösungen für die $Ax = 0$ gilt, also

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &= 0 \wedge \\ x_2 + x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $x_1 = x_2 = -x_3$ also $\ker(A) = \left\{ x \in K^3 \middle| \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \forall \lambda \in K \right\}$.

Aufgabe 5

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ c & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ d \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Werte für c und d, für die das lineare Gleichungssystem $Ax = b$

a) genau eine Lösung

b) keine Lösung

c) unendlich viele Lösungen

hat.

Lösung 5

Aufgabe 6

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcr} 2\mathrm{i}x & + & y & = & -1 \\ (1+\mathrm{i})x & + & (1-\mathrm{i})y & = & 0 \end{array}$$

wobei i die imaginäre Einheit ist.

Lösung 6

Aufgabe 7

Untersuchen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $a \times x = b$ für gegebene Vektoren a und b des $\mathbb{R}^3$. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

a) Stellen Sie die zugehörige Abbildungsmatrix A auf.

b) Bestimmen Sie alle Lösungen z mit $Az = 0$.

c) Bestimmen Sie den Wert für c, für den das LGS $a \times x = b$ mit

$$a = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 8 \\ c \\ -2 \end{pmatrix}$$

lösbar ist.

d) Bestimmen Sie die Lösungsmenge für diesen konkreten Fall.

Lösung 7

Aufgabe 8

Ein:e Unternehmer:in legt folgende Umsatzermittlungstabelle dem Finanzamt vor:

	Produkt 1	Produkt 2	Umsatz [Euro]
Januar	10	20	70
Februar	20	10	80
März	15	15	50

a) Begründen Sie, warum der Beamte/die Beamtin an der Korrektheit der Zahlen zweifelt.

b) Korrigieren Sie den Umsatz im März so, dass das Finanzamt nicht misstrauisch wird.

Lösung 8

Aus den Angaben von Januar und Februar lässt sich ein LGS aufstellen, dessen Lösung anzeigt, dass der Handel mit Produkt 1 zu einem Umsatz von 3 Euro pro Stück und der Handel mit Produkt 2 zu einem Umsatz von 2 Euro pro Stück führt.

Überträgt man dies auf die Angaben vom März, so wäre ein Umsatz von $3 \cdot 15 + 2 \cdot 30 = 75$ Euro zu erwarten. Da der gemeldete Umsatz gerade mal zwei Drittel der erwarteten Zahl beträgt, bleibt der/die Unternehmende eine Erklärung dafür schuldig, warum der erzielte Umsatz pro gehandeltem Produkt sich zwischen Februar und März derart signifikat verändert hat.

Statt den Umsatz im März in den Bereich von 75 Euro (abzüglich einer betriebswirtschaftlich glaubhaft erklärbaren Schwankung der Umsatzrate) zu korrigieren, wäre es natürlich sinnvoller gewesen die Umsätze bereits im Januar mit entsprechender "Korrektur"glaubhaft zu machen.