

Aufgabe 1

Analysis 2-Klausur vom 16.07.2021, A05

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y' - y = y^2 \cdot \sin(x)$$

Hinweis: Bernoulli-DGL

Lösung 1

Es liegt eine Differentialgleichung der Form

$$y'(x) + f(x) \cdot y = g(x) \cdot y^\alpha$$

mit $\alpha = 2, g(x) = \sin(x), f(x) = -1$ vor.

Wir substituieren mit

$$z := y^{1-\alpha} = \frac{y}{y^\alpha} \Leftrightarrow y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

also

$$\begin{aligned} y &= z^{-1} \\ y' &= -z^{-2} \cdot z' \end{aligned}$$

und setzen in die DGL:

$$\begin{aligned} y' - y &= y^2 \cdot \sin(x) \\ \stackrel{z(x) \neq 0}{\Leftrightarrow} -z^{-2} \cdot z' - z^{-1} &= z^{-2} \cdot \sin(x) \\ \Leftrightarrow -z' - z &= \sin(x) \end{aligned}$$

Wir bestimmen die Lösung der linearen inhomogen DGL $-z' - z = \sin(x)$, indem wir zunächst die Lösung der homogenen DGL $-z'_h - z_h = 0$ bestimmen. Diese lautet

$$z_h = c_0 \cdot e^{-x}.$$

Die Rücksubstitution ergibt

$$\begin{aligned} y_h &= \frac{1}{z_h} \\ &= c \cdot e^x \end{aligned}$$

Für die partikuläre Lösung nutzen wir den trigonometrischen Ansatz

$$\begin{aligned} z_p(x) &= c_0 \sin(\alpha x) + c_1 \cos(\alpha x) \\ z'_p(x) &= \alpha c_0 \cos(\alpha x) - \alpha c_1 \sin(\alpha x) \end{aligned}$$

und setzen ein:

$$\begin{aligned} \sin(x) &= -z'_p - z_p \\ \Leftrightarrow \sin(x) &= -\alpha c_0 \cos(\alpha x) + \alpha c_1 \sin(\alpha x) - c_0 \sin(\alpha x) - c_1 \cos(\alpha x) \\ \stackrel{\alpha=1}{\Leftrightarrow} \sin(x) &= \underbrace{(c_1 - c_0)}_{=1} \cdot \sin(x) - \underbrace{(c_0 + c_1)}_{=0} \cdot \cos(x) \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich liefert uns mit $c_0 = -1/2$ und $c_1 = 1/2$ die Funktion

$$z_p(x) = -\frac{1}{2} \sin(x) + \frac{1}{2} \cos(x).$$

Die Rücksubstitution ergibt:

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{z_p} \\ &= \frac{2}{\cos(x) - \sin(x)} \end{aligned}$$

Somit können wir die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL wie folgt angeben:

$$y(x) = c \cdot e^x + \frac{2}{\cos(x) - \sin(x)}$$

Aufgabe 2

Analysis 2-Klausur vom 16.07.2021, A06

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$2y \cdot e^x + y + (2e^x + x) \cdot y' = 0$$

Lösung 2

Gegeben ist eine lineare DGL 1. Ordnung. Wir lösen durch Trennung der Variablen.

$$\begin{aligned} 2y \cdot e^x + y + (2e^x + x) \cdot y' &= 0 \\ \Leftrightarrow y \cdot (2e^x + 1) &= -y' \cdot (2e^x + x) \\ \Leftrightarrow \int \frac{2e^x + 1}{2e^x + x} dx &= - \int \frac{1}{y} dy \quad u = 2e^x + x \\ \Leftrightarrow \int \frac{2e^x + 1}{u} \frac{1}{2e^x + 1} du &= - \int \frac{1}{y} dy \\ \Leftrightarrow \ln|u| + c_1 &= -\ln|y| + c_2 \\ \Leftrightarrow u \cdot c &= \frac{1}{y} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2e^x + x} \cdot c &= y \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Analysis 2-Klausur vom 24.09.2020, A04

Lösen Sie die Differenzialgleichung

$$y'' = 4y' - 4y + 8x + 4$$

Lösung 3

Gegeben ist eine lineare DGL 2. Ordnung mit polynomialer Störfunktion.

$$\begin{aligned} y'' &= 4y' - 4y + 8x + 4 \\ \Leftrightarrow y'' - 4y' + 4y &= 8x + 4 \end{aligned}$$

Die charakteristische Gleichung der homogenen DGL lautet $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = 2$, also liegt eine doppelte Nullstelle vor und die Lösung lautet:

$$y_h = c_0 e^{2x} + c_1 x e^{2x}$$

Zur Bestimmung der partikulären Lösung wählen wir den Ansatz

$$\begin{aligned} y_p &= ax^2 + bx + c \\ y'_p &= 2ax + b \\ y''_p &= 2a \end{aligned}$$

und setzen ein:

$$\begin{aligned} y''_p - 4y'_p + 4y_p &= 8x + 4 \\ \Leftrightarrow 2a - 8ax - 4b + 4ax^2 + 4bx + 4c &= 8x + 4 \\ \Leftrightarrow \underbrace{4a}_{\stackrel{!}{=0}} \cdot x^2 + \underbrace{(4b - 8a)}_{\stackrel{!}{=8}} \cdot x + \underbrace{2a - 4b + 4c}_{\stackrel{!}{=4}} &= 8x + 4 \end{aligned}$$

Mit $b = 2$ und $c = 3$ erhalten wir als partikuläre Lösung

$$y_p = 2x + 3$$

und somit als allgemeine Lösung der DGL

$$y(x) = c_0 e^{2x} + c_1 x e^{2x} + 2x + 3.$$

Aufgabe 4

Analysis 2-Klausur vom 24.09.2020, A07

Bestimmen Sie die Lösungen folgender Differentialgleichungen

a) $y' = 2\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$ durch Substitution mit $z = \frac{y}{x}$

b) $y' + x \cdot y = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$

Lösung 4a

Wir substituieren mit $z = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = z \cdot x$ und entsprechend $y' = z' \cdot x + z$:

$$\begin{aligned}
 y' &= 2\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} \\
 \Leftrightarrow z' \cdot x + z &= 2\sqrt{z} + z \\
 \Leftrightarrow z' \cdot x &= 2\sqrt{z} \\
 \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} z' &= \frac{1}{x} \cdot 2\sqrt{z} \\
 \Leftrightarrow \frac{dz}{dx} &= \frac{1}{x} \cdot 2\sqrt{z} \\
 \Rightarrow \int \frac{1}{2\sqrt{z}} dz &= \int \frac{1}{x} dx \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \int z^{-\frac{1}{2}} dz &= \ln|x| + c \\
 \Leftrightarrow z &= (\ln|x| + c)^2 \\
 \Leftrightarrow y &= x \cdot (\ln|x| + c)^2
 \end{aligned}$$

Lösung 4b

Gegeben ist eine inhomogene DGL 1. Ordnung. Wir lösen zunächst die homogene DGL durch *Trennung der Variablen* zur Bestimmung der homogenen Lösung:

$$\begin{aligned}
 y'_h + x \cdot y_h &= 0 \\
 \Rightarrow \ln|y| + c &= -\int x dx \\
 \Leftrightarrow \ln|y| + c &= -\frac{1}{2}x^2 \\
 \Leftrightarrow y \cdot \tilde{c} &= e^{-\frac{1}{2}x^2} \\
 \Leftrightarrow y &= c \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}
 \end{aligned}$$

Durch *Variation der Konstanten* bestimmen wir mit

$$\begin{aligned}
 y(x) &= c(x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \\
 y'(x) &= c'(x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} - c(x) \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \\
 &= e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot (c'(x) - c(x) \cdot x) \\
 \Leftrightarrow y'(x) + x \cdot \underbrace{c(x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}}_{:=y(x)} &= c'(x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \\
 \Leftrightarrow y'(x) + x \cdot y(x) &= c'(x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \stackrel{!}{=} g(x)
 \end{aligned}$$

Wir stellen zur c' -Funktion um, damit wir die neue DGL lösen und $c(x)$ bestimmen können.

$$\begin{aligned} c'(x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} &= g(x) \\ \Leftrightarrow c'(x) &= g(x) \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} \\ \Rightarrow c(x) = \int c'(x) \, dx &= \int g(x) \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} \, dx \\ \text{mit der ursprünglichen Störfunktion } g(x) &= e^{-\frac{1}{2}x^2} \\ \Leftrightarrow c(x) &= \int \frac{1}{\cancel{e^{\frac{1}{2}x^2}}} \cdot \cancel{e^{\frac{1}{2}x^2}} \, dx \\ \Leftrightarrow c(x) &= x + \tilde{c} \end{aligned}$$

Durch einsetzen in die zuvor bestimmte Funktion erhalten wir nun die allgemeine Lösung der DGL.

$$\begin{aligned} y(x) &= c(x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \\ &= (x + \tilde{c}) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \\ &\equiv \left(\frac{x^2}{2} + \tilde{c} \right) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \end{aligned}$$

Aufgabe 5

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y^2 \, dx + (x \cdot y - 2) \, dy = 0$$

Lösung 5

$$\begin{aligned} y^2 \, dx + (x \cdot y - 2) \, dy &= 0 \\ \Leftrightarrow y^2 \, dx &= -(x \cdot y - 2) \, dy \\ \Leftrightarrow \frac{1}{(x \cdot y - 2)} \, dx &= -\frac{1}{y^2} \, dy \\ \Rightarrow \int \frac{1}{(x \cdot y - 2)} \, dx &= -\int \frac{1}{y^2} \, dy \\ \Rightarrow \ln(x \cdot y - 2) \cdot \frac{1}{y} + c &= -\frac{1}{y} + c \end{aligned}$$