

Aufgabe 5

Berechnen Sie jeweils die Inverse folgender Matrizen, falls diese existiert:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Lösung 5

Aufgabe 6

Gegeben sei die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Berechnen Sie A^k für $k = 1 \dots 3$.
- b) Stellen Sie eine Vermutung auf für A^n und beweisen Sie diese.

Lösung 6

Aufgabe 7

A sei eine 3×3 -Matrix.

- a) Welche Beziehung ($=, \neq, \subseteq, \subset, \supset, \supseteq$) besteht zwischen dem Kern von A und dem Kern von A^2 (und dem von A^3)?
- b) Verifizieren Sie ihr Ergebnis aus (a) mit der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Lösung 7

Aufgabe 8

Die Spur einer quadratischen Matrix $A = (a_{ij})$ ist definiert durch

$$\text{Spur}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

- a) Zeigen Sie, dass die Spur eine lineare Abbildung darstellt.
- b) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = A^T$. Verifizieren Sie $\text{Spur}(AB) = \text{Spur}(BA)$.
- c) Zeigen Sie, dass $\text{Spur}(AB) = \text{Spur}(BA)$, wobei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$.
- d) Zeigen Sie, dass $\text{Spur}(A^T A) = 0$ genau dann, wenn $A = (0)$.
- e) Man zeige weiter: $\text{Spur}(ABC) = \text{Spur}(BCA)$, aber i.a. $\text{Spur}(ABC) \neq \text{Spur}(BAC)$.

Lösung 8