Aufgabe 1

Lösen Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y' &= 5y - z \\ z' &= 2y + 8z \end{aligned}$$

Lösung 1

Aufgabe 2

Lösen Sie das folgende Differentialgleichungssystem

$$y' = z \tag{1}$$
$$z' = -y - 5z + \sin(x) \tag{2}$$

Lösung 2

Wir formen die Gleichung (1) nach z um und leiten nach x ab.

$$z = y' \tag{3}$$
$$z' = y'' \tag{4}$$

Dann setzen wir die Gleichungen (3) und (4) in die Gleichung (2) ein und erhalten

$$y'' = -y - 5y' + \sin(x).$$

Wir bestimmen die homogene Lösung der DGL mit Hilfe der charakteristischen Gleichung $\lambda^2 + 5\lambda + 1 = 0$, welche die Lösungen

$$\lambda = -\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{21}}{2}$$

hat. Wir erhalten somit

$$y_h = c_0 e^{-\frac{5+\sqrt{21}}{2}x} + c_1 e^{-\frac{5-\sqrt{21}}{2}x}.$$

Aus $z = y'$ folgt unser z_h.

$$\begin{aligned} y_h' &= -\frac{5+\sqrt{21}}{2} c_0 e^{-\frac{5+\sqrt{21}}{2}x} - \frac{5-\sqrt{21}}{2} c_1 e^{-\frac{5-\sqrt{21}}{2}x} \\ &= z_h \end{aligned}$$

Für die partikuläre Lösung y_p verwenden wir auf Grund der trigonometrischen Störfunktion $g(x) = \sin(x)$ den Ansatz

$$\begin{aligned} y_p &= c_0 \sin(x) + c_1 \cos(x) \\ y_p' &= c_0 \cos(x) - c_1 \sin(x) \\ y_p'' &= -c_0 \sin(x) - c_1 \cos(x) \end{aligned}$$

und bestimmen die Parameter $c_{1,2}$ durch Einsetzen der Gleichungen in $y'' + 5y' + y = \sin(x)$.

$$\begin{aligned}
&\sin(x) = && y_p'' + 5y_p' + y_p \\
\Leftrightarrow\ &\sin(x) = && \cancel{-c_0 \sin(x)} \cancel{-c_1 \cos(x)} + 5\,(c_0 \cos(x) - c_1 \sin(x)) \\
& && \cancel{+c_0 \sin(x)} \cancel{+c_1 \cos(x)} \\
\Leftrightarrow\ &\sin(x) = && 5c_0 \cos(x) - 5c_1 \sin(x) \\
\Rightarrow\ & c_0 = 0 \ \wedge\ c_1 = -\tfrac{1}{5}
\end{aligned}$$

Die partikuläre Lösung lautet somit $y_p = -\frac{1}{5}\cos(x)$ bzw. $z_p = y_p' = \frac{1}{5}\sin(x)$ und wir erhalten die allgemeine Lösungen des inhomogenen DGL Systems.

$$\begin{aligned}
y(x) &= c_0 \mathrm{e}^{-\frac{5+\sqrt{21}}{2}x} + c_1 \mathrm{e}^{-\frac{5-\sqrt{21}}{2}x} - \frac{1}{5}\cos(x) \\
z(x) &= -\frac{5+\sqrt{21}}{2} c_0 \mathrm{e}^{-\frac{5+\sqrt{21}}{2}x} - \frac{5-\sqrt{21}}{2} c_1 \mathrm{e}^{-\frac{5-\sqrt{21}}{2}x} + \frac{1}{5}\sin(x)
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}
y' &= y + 2z \\
z' &= 2y + z - 2e^x
\end{aligned}$$

mit den Anfangswerten $y(0) = -3$ und $z(0) = 4$.

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems.

Lösung 3

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung 2.Ordnung und lösen Sie das gegebene Anfangswertproblem

$$y'' - 2y' + y = 0 \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

Lösung 4

Aufgabe 5

Gegeben seien die folgenden Differentialgleichungen 2.Ordnung

a) $y'' - 6y' + 9y = -17 + 21x + 18x^2$

b) $y'' - 8y' + 16y = -72e^{-2x}$

c) $y'' - 7y' + 6y = 82\sin(2x) + 26\cos(2x)$

Bestimmen Sie jeweils die Lösung $y(x)$.

Lösung 5