Aufgabe 1

Analysis 2-Klausur vom 16.07.2021, A05
Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y' - y = y^2 \cdot \sin(x)$$

Hinweis: Bernoulli-DGL

Lösung 1

Es liegt eine Differentialgleichung der Form

$$y'(x) + f(x) \cdot y = g(x) \cdot y^\alpha$$

mit $\alpha = 2, g(x) = \sin(x), f(x) = -1$ vor.
Wir substituieren mit $\alpha = 2$.

$$z := y^{1-\alpha} = \frac{y}{y^\alpha} \;\Leftrightarrow\; y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\begin{aligned} y &= z^{-1} \\ y' &= -z^{-2} \cdot z' \end{aligned}$$

Einsetzen in DGL:

$$\begin{aligned} && y' - y &= y^2 \cdot \sin(x) \\ \Leftrightarrow && -z^{-2} \cdot z' - z^{-1} &= z^{-2} \cdot \sin(x) \\ \overset{z(x)\neq 0}{\Leftrightarrow} && -z' - z &= \sin(x) \end{aligned}$$

Wir bestimmen die Lösung der linearen inhomogen DGL $-z' - z = \sin(x)$, indem wir zunächst die Lösung der homogenen DGL $-z_h' - z_h = 0$ bestimmen. Diese lautet

$$z_h = c_0 \cdot \mathrm{e}^{-x}.$$

Die Rücksubstitution ergibt

$$\begin{aligned} y_h &= \frac{1}{z_h} \\ &= c \cdot \mathrm{e}^{x} \end{aligned}$$

Für die partikuläre Lösung nutzen wir den trigonometrischen Ansatz

$$\begin{aligned} z_p(x) &= c_0 \sin(\alpha x) + c_1 \cos(\alpha x) \\ z_p'(x) &= \alpha c_0 \cos(\alpha x) - \alpha c_1 \sin(\alpha x) \end{aligned}$$

und setzen ein:

$$\begin{aligned} & \sin(x) &&= -z_p' - z_p \\ \Leftrightarrow\ & \sin(x) &&= -\alpha c_0 \cos(\alpha x) + \alpha c_1 \sin(\alpha x) - c_0 \sin(\alpha x) - c_1 \cos(\alpha x) \\ \overset{\alpha=1}{\Leftrightarrow}\ & \sin(x) &&= \underbrace{(c_1 - c_0)}_{=1} \cdot \sin(x) - \underbrace{(c_0 + c_1)}_{=0} \cdot \cos(x) \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich liefert uns mit $c_0 = -1/2, c_1 = 1/2$ die Funktion

$$z_p(x) = -\frac{1}{2}\sin(x) + \frac{1}{2}\cos(x).$$

Die Rücksubstitution ergibt:

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{z_p} \\ &= \frac{2}{\cos(x) - \sin(x)} \end{aligned}$$

Somit können wir die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL wie folgt angeben:

$$y(x) = c \cdot \mathrm{e}^x + \frac{2}{\cos(x) - \sin(x)}$$

Aufgabe 2

Analysis 2-Klausur vom 16.07.2021, A06
Lösen Sie die Differentialgleichung

$$2y \cdot \mathrm{e}^x + y + (2\mathrm{e}^x + x) \cdot y' = 0$$

Lösung 2

Gegeben ist eine lineare DGL 1. Ordnung. Wir lösen durch Trennung der Variablen.

$$\begin{aligned} & 2y \cdot \mathrm{e}^x + y + \left(2\mathrm{e}^x + x\right) \cdot y' &&= 0 \\ \Leftrightarrow\ & y \cdot \left(2\mathrm{e}^x + 1\right) &&= -y' \cdot \left(2\mathrm{e}^x + x\right) \\ \Leftrightarrow\ & \int \frac{2\mathrm{e}^x + 1}{2\mathrm{e}^x + x}\,\mathrm{d}x &&= -\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y \qquad u = 2\mathrm{e}^x + x \\ \Leftrightarrow\ & \int \frac{\cancel{2\mathrm{e}^x + 1}}{u} \frac{1}{\cancel{2\mathrm{e}^x + 1}}\,\mathrm{d}u &&= -\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y \\ \Leftrightarrow\ & \ln|u| + c_1 &&= -\ln|y| + c_2 \\ \Leftrightarrow\ & u \cdot c &&= \frac{1}{y} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{2\mathrm{e}^x + x} \cdot c &&= y \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Analysis 2-Klausur vom 24.09.2020, A04
Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y'' = 4y' - 4y + 8x + 4$$

Lösung 3

Gegeben ist eine lineare DGL 2. Ordnung.

$$y'' = 4y' - 4y + 8x + 4$$

Aufgabe 4

Analysis 2-Klausur vom 24.09.2020, A07
Bestimmen Sie die Lösungen folgender Differentialgleichungen

a) $y' = 2\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$ durch Substitution mit $z = \frac{y}{x}$

b) $y' + x \cdot y = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$

Lösung 4

Aufgabe 5

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y^2 \, \mathrm{d}x + \left(x \cdot y - 2\right) \, \mathrm{d}y = 0$$

Lösung 5