Aufgabe 1

Seit Jahrtausenden wird Sauerteig zur Herstellung von Brotteig verwendet. Dabei werden gezielt Bakterien im Teig vermehrt. Für einen bestimmten Vermehrungsprozess werden 1g Mehl etwa 100 Bakterien zugesetzt. Nach 4 Stunden sind etwa 3.500 Bakterien vorhanden. Die Sättigungsgrenze liegt bei etwa 7.000 Bakterien.

a) Ermitteln Sie für die Anzahl $y(t)$ der Bakterien in Abhängigkeit von der Zeit t in Stunden einen geeigneten Funktionsterm.

b) Wie viele Bakterien sind in einem 8 Stunden gereiften Sauerteig vorhanden?

Lösung 1

Wir modellieren den Wachstumsprozess mit $y_n(t) = y_0 \cdot \mathrm{e}^{k \cdot t}$, wobei $y_0 = 100$. Wir erhalten k durch $3.500 = 100 \cdot \mathrm{e}^{4k} \Leftrightarrow k = \frac{\ln(3{,}5)}{4}$ und durch die Sättigungsgrenze von 7.000 eine obere Grenze von $t = \frac{4 \cdot \ln(70)}{\ln(3{,}5)} = 13{,}5652\ldots$

$$y(t) = 100 \cdot \mathrm{e}^{\frac{\ln(3,5)}{4} \cdot t} \qquad t \in \left[0; \frac{4 \cdot \ln(70)}{\ln(3{,}5)}\right]$$

Nach 8 Stunden befinden sich somit $y(8) = 1.225$ Bakterien im Hefeteig.

Aufgabe 2

Lösen Sie das Anfangswertproblem $\quad y' = -2x \cdot y + 10x, \quad y(0) = 2$

Lösung 2

$$\begin{aligned} y' &= -2xy + 10x \\ &= \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{(10 - 2y)}_{g(y)} \end{aligned}$$

Wir trennen die Variablen und erhalten

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{10-2y}\,\mathrm{d}y(x) &&= \int x\,\mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow\quad & -\frac{1}{2}\ln(5 - y(x)) &&= \frac{x^2}{2} + C \\ \Leftrightarrow\quad & \ln(5 - y(x)) &&= -x^2 - 2C \\ \Leftrightarrow\quad & 5 - y(x) &&= \mathrm{e}^{-x^2-2C} \\ \Leftrightarrow\quad & y(x) &&= 5 - \mathrm{e}^{-x^2-2C} \end{aligned}$$

Da $y(0) = 5 - \mathrm{e}^{-2C} = 2 \Leftrightarrow C = -\frac{\ln(3)}{2}$ folgt somit

$$y(x) = 5 - 3\mathrm{e}^{-x^2}$$

Aufgabe 3

Lösen Sie folgende Differentialgleichungen mit Hilfe einer geeigneten Substitution.

a) $y' = (x + y + 1)^2$

b) $x^2 \cdot y' = y^2 \qquad (x \neq 0)$

Lösung 3a

Zur Lösung der Differentialgleichung $y'(x) = (x + y(x) + 1)^2$ substituieren wir $z(x) = x + y(x) + 1$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} y'(x) &= z(x)^2 \\ z'(x) &= 1 + y'(x) \end{aligned}$$

also die separable Differentialgleichung

$$z'(x) = 1 + z(x)^2$$

für die gilt:

$$z'(x) = 1 + z(x)^2$$

$$\begin{aligned} y = z - x - 1 \implies y' &= z' - 1 \\ z' &= 1 + z^2 \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Berechnen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichungen mittels Variation der Konstanten

a) $y' + (1 + x) \cdot y = \mathrm{e}^{-\frac{x^2+x}{2}}$

b) $x \cdot y' = 4y + x^2$

Lösung 4b

$$\begin{aligned} & x \cdot y' &= 4y + x^2 \\ \Leftrightarrow \quad & y' &= \tfrac{4y}{x} + x \\ \Leftrightarrow \quad & \tfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \tfrac{4y}{x} + x \\ \Leftrightarrow \quad & \mathrm{d}y &= \tfrac{4y}{x} + x \end{aligned}$$

Aufgabe 5

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$x \cdot y' - y = x^3 + 3x^2 - 2x, \quad y(1) = 4.$$

Lösung 5