

Aufgabe 5

Berechnen Sie in Abhängigkeit von x

- a) den Kern
- b) die Dimension des Kerns
- c) den Rang
- d) das Bild

der zu der folgenden Matrix gehörenden linearen Abbildung:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & x \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Lösung 5a

Der Kern einer linearen Abbildung A ist die Menge aller Vektoren $x \in \mathbb{R}^4$, die von A auf den Nullvektor abgebildet werden, d.h.

$$\ker(A) = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = 0\}.$$

Durch elementare Zeilenumformungen erhalten wir die Zeilenstufenform der Koeffizientenmatrix

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & x \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \\ & \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3/2 & 4 & x - 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ & \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{6} & \frac{2x}{3} - 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ & \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4x - 6 \\ 0 & 0 & 0 & 20 - 4x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 6

Stellen Sie zu folgenden Abbildungen die zugehörigen Abbildungsmatrizen auf.

- a) $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^3, f(p(x)) = \int_{C=0} p(x) dx$
- b) $g : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^2, g(p(x)) = p'(x).$
- c) Können Sie den Wertebereich von f so einschränken, dass f bijektiv ist? Falls ja, wie lautet die Umkehrabbildung von f ?

Lösung 6

Aufgabe 7

Über eine lineare Abbildung f sei folgendes bekannt.

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- a) Für welche Werte von α ist die Abbildungsmatrix A_f von f eindeutig bestimmt?
- b) Bestimmen Sie die Matrix A_f in Abhängigkeit von α .
- c) Bestimmen Sie den Kern und das Bild der Abbildung in Abhängigkeit von α .

Lösung 7