

Aufgabe 5

Hinweis: Umbenennung des Parameters von x nach a .
Berechnen Sie in Abhängigkeit von a

- a) den Kern
- b) die Dimension des Kerns
- c) den Rang
- d) das Bild

der zu der folgenden Matrix gehörenden linearen Abbildung:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & a \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Lösung 5

Dimensionsformel für lineare Abbildungen:
Für eine lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ gilt

$$\dim(\ker(f)) + \operatorname{rg}(f) = \dim(V).$$

Statt $\dim(\ker(f))$ kann man auch $\operatorname{def}(f)$ schreiben.

Lösung 5a

Der Kern einer linearen Abbildung A ist die Menge aller Vektoren $x \in \mathbb{R}^4$, die von A auf den Nullvektor abgebildet werden. Ganz allgemein bedeutet das, dass der Kern die Menge der Lösungen des Gleichungssystems $Ax = 0$ ist:

$$\ker(A) = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = 0\}.$$

Um diese Menge konkret zu bestimmen, formen wir durch elementare Zeilenoperationen die Abbildungsmatrix so lange um, bis wir die Zeilenstufenform erhalten und dabei den Parameter a möglichst frei stehend haben.

$$\begin{array}{l}
 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & a \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \\
 \begin{array}{l} Z_2 - Z_1 \\ Z_4 - Z_1 \\ \rightsquigarrow \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & a \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
 \begin{array}{l} Z_1 : 2 \\ Z_2 : 2 \\ Z_3 - Z_1 \\ \rightsquigarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 3/2 & 4 & a - 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
 \begin{array}{l} Z_3 - 3/2 Z_2 \\ Z_3 \cdot 4/13 \\ \rightsquigarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4a - 6/13 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
 \begin{array}{l} Z_4 - Z_3 \\ Z_3 \cdot 13/4 \\ Z_3 + Z_4 \\ \rightsquigarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 13/4 & 13/2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 - a \end{pmatrix} \\
 \begin{array}{l} Z_1 \cdot 4 \\ Z_1 - 2 \cdot Z_2 \\ Z_1 - 3 \cdot Z_3 \\ Z_1 : 4 \\ \rightsquigarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 - a \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Aus der letzten Zeile entnehmen wir, dass $(8 - a) \cdot x_4 = 0$ ist. Dadurch erhalten wir zwei Fälle, die wir unterscheiden müssen:

1. Fall, $a = 8$:

Wenn $a = 8$ ist, so kann x_4 einen beliebigen Wert annehmen, daher wählen wir $x_4 = \lambda \in \mathbb{R}$ beliebig und setzen ein um die übrigen Koordinaten von x zu bestimmen:
 $x_3 + 2\lambda = 0 \Leftrightarrow x_3 = -2\lambda$, $x_2 + \frac{1}{2}x_3 \Leftrightarrow x_2 = \lambda$ und $x_1 = 0$. Daraus folgt:

$$\ker(A_{a=8}) = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Die Dimension des Kerns (oder auch Defekt def genannt) ist $\dim(\ker(A_{a=8})) = \text{def}(A_{a=8}) = 1$.

Mit der Rangformel ergibt sich für den Rang

$$\operatorname{rg}(A_{a=8}) = \dim(V) - \operatorname{def}(A_{a=8}) = 4 - 1 = 3.$$

2. Fall, $a \neq 8$:

Wenn $a \neq 8$ ist, dann muss $x_4 = 0$ sein. Für die übrigen Koordinaten ergibt sich so ebenfalls $x_4 = x_3 = x_2 = x_1 = 0$, was bedeutet, dass lediglich der Nullvektor eine Lösung des Gleichungssystems $Ax = 0$ ist und $\ker(A_{a \neq 8}) = \{0\}$ ist.

Der Defekt ist $\operatorname{def}(A_{a \neq 8}) = 0$.

Mit der Rangformel ergibt sich für den Rang

$$\operatorname{rg}(A_{a \neq 8}) = \dim(V) - \operatorname{def}(A_{a \neq 8}) = 4 - 0 = 4.$$

Aufgabe 6

Stellen Sie zu folgenden Abbildungen die zugehörigen Abbildungsmatrizen auf.

- a) $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^3$, $f(p(x)) = \int_{C=0} p(x) \, d$
- b) $g : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^2$, $g(p(x)) = p'(x)$.
- c) Können Sie den Wertebereich von f so einschränken, dass f bijektiv ist? Falls ja, wie lautet die Umkehrabbildung von f ?

Lösung 6a

Die Abbildung der Polynome maximal zweiten Grades auf ihre Stammfunktion aus den Polynomen maximal dritten Grades

$$f : \begin{cases} \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^3 \\ p(x) \mapsto \int_{C=0} p(x) \, d \end{cases}$$

lässt sich ebenfalls als $f(p(x)) = A \cdot p(x)$ schreiben, mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Lösung 6b

Umgekehrt lässt sich

$$g : \begin{cases} \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^2 \\ p(x) \mapsto p'(x) \end{cases}$$

als $f(p(x)) = B \cdot p(x)$ mit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

schreiben.

Lösung 6c

Begrenzt man den Wertebereich der injektiven Abbildung f auf die Menge aller Polynome maximal vierten Grades ohne die Polynome vom Grad Null $\tilde{f} : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^3 \setminus \mathbb{P}^0$, so wird die Abbildung surjektiv und damit bijektiv.

Die Umkehrabbildung f^{-1} kann nun so angegeben werden:

$$f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{P}^3 \setminus \mathbb{P}^0 \rightarrow \mathbb{P}^2 \\ p(x) \mapsto p'(x) \end{cases}$$

Die Abbildungsmatrix braucht dabei ebenfalls nur invertiert zu werden.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7

Über eine lineare Abbildung f sei folgendes bekannt.

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Für welche Werte von α ist die Abbildungsmatrix A_f von f eindeutig bestimmt?
- Bestimmen Sie die Matrix A_f in Abhängigkeit von α .
- Bestimmen Sie den Kern und das Bild der Abbildung in Abhängigkeit von α .

Lösung 7

Wir betrachten die lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ mit $V \subseteq \mathbb{R}^3$ und $W \subseteq \mathbb{R}^2$.

Sei $\mathcal{B}_V = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \right)$ eine Basis von V und $\mathcal{B}_W = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis von W ...

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Wenn $\alpha = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

was passiert, wenn $\alpha \neq 1$ z.B. $\alpha = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

da $\det(A_f) = \alpha + 1$ und für $\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -1$ gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$