Aufgabe 1

Gegeben sei die Kurve $\overrightarrow{X}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie das Kurvenintegral im Vektorfeldes

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + yz \\ y + x \cdot z \\ z + x \cdot y \end{pmatrix}$$

entlang der Kurve.

Lösung 1

Das Kurvenintegral W im Vektorfeld $\overrightarrow{F}(x,y,z)$ ist gegeben mit

$$W = \int \overrightarrow{F}(\overrightarrow{X}(t)) \cdot \overrightarrow{X}'(t)\ \mathrm{d}t$$

Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
W &= \int \overrightarrow{F}(\overrightarrow{X}(t)) \cdot \overrightarrow{X}'(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int \begin{pmatrix} t + t^2t^3 \\ t^2 + t \cdot t^3 \\ t^3 + t \cdot t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}\ \mathrm{d}t \\
&= \int \begin{pmatrix} t + t^5 \\ t^2 + t^4 \\ 2t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}\ \mathrm{d}t \\
&= \int t + t^5 + 2t \cdot (t^2 + t^4) + 3t^2 \cdot 2t^3\ \mathrm{d}t \\
&= \int 9t^5 + 2t^3 + t\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{3}{2}t^6 + \frac{1}{2}t^4 + 1 + C
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Potentialfunktion von

a) $\overrightarrow{f}(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 + 2\mathrm{e}^{2x-y} - 1 \\ 2x \cdot y - \mathrm{e}^{2x-y} + 4y^3 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{g}(x,y) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x + 2x \cdot y \cdot \cos(x^2 + y) \\ \sin(x^2 + y) + y \cdot \cos(x^2 + y) + 6y \end{pmatrix}$

Lösung 2

$\overrightarrow{f}$ heißt Gradientenfeld, wenn es eine skalare Funktion V gibt, mit der gilt $\nabla(V) = \overrightarrow{f}$.
Die Funktion V heißt dann Potentialfunktion oder mehrdimensionale Stammfunktion von $\overrightarrow{f}$.
Im $\mathbb{R}^2$ existiert die Potentialfunktion nur, wenn gilt

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}.$$

Lösung 2a

Wir prüfen die Existenz der Potentialfunktion

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial y} &= 2y - 2\mathrm{e}^{2x-y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} &= 2y - 2\mathrm{e}^{2x-y}\end{aligned}$$

und rechnen die Stammfunktion mit der ersten Komponenten aus:

$$\begin{aligned}V(x,y) &= \int f_1(x,y)\,\mathrm{d}x \\ &= \int y^2 + 2\mathrm{e}^{2x-y} - 1\,\mathrm{d}x \\ &= xy^2 + \mathrm{e}^{2x-y} - x + c(y)\end{aligned}$$

Die Konstante $c(y)$ wird nun berechnet durch partielle Ableitung nach y.

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial y} &= 2x \cdot y - \mathrm{e}^{2x-y} + c'(y) \\ &= f_2(x,y) \\ &= 2x \cdot y - \mathrm{e}^{2x-y} + 4y^3\end{aligned}$$

Daraus folgt für $c(y)$:

$$\begin{aligned}c'(y) &= 4y^3 \\ c(y) &= \int 4y^3\,\mathrm{d}y \\ &= y^4 + c\end{aligned}$$

und damit für $V(x,y)$

$$V(x,y) = xy^2 + \mathrm{e}^{2x-y} - x + y^4 + c$$

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass das folgende Vektorfeld

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{y}{x^2+y^2} + y \\ x - \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

kein Potential in $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \neq (0,0)\}$ besitzt.

Lösung 3

Aufgabe 4

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ 2x \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Arbeit entlang des Weges $\overrightarrow{X}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix}$ mit $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

b) Besitzt $\overrightarrow{F}$ ein Potential? Berechnen Sie dies ggfls.

c) Welche Arbeit wird unter Verwendung von b) längs des Weges $\overrightarrow{X}$ verrichtet, der die Punkte $P_1 = (1,0)$ und $P_2 = (0,2)$ verbindet?

Lösung 4

Aufgabe 5

Ein Punkt bewege sich entlang der Kurve $\overrightarrow{X}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t-1 \end{pmatrix}$ durch das folgende ortsabhängiges Kraftfeld:

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x - y^2 \end{pmatrix}$$

a) Gibt es zu diesem Kraftfeld eine Potentialfunktion?

b) Wenn ja, bestimmen Sie diese.

c) Berechnen Sie die auf dem Weg von $t = 0$ bis $t = 3$ geleistete Arbeit.

Lösung 5