Aufgabe 1

Geben Sie für die folgende Rekursionsgleichung eine möglichst genaue Abschätzung in $\mathcal{O}$-Notation an:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{sonst} \\ 7 \cdot T\left(\frac{16n}{81}\right) + \sqrt{n} & \text{falls } n > 1 \end{cases}$$

Lösung 1

Aufstellen der Erzeugenden Funktion.

Aufgabe 2

Lösen Sie die folgende lineare Rekursionsgleichung mit Hilfe von Erzeugenden Funktionen:

$$T(n) = \begin{cases} 4 \cdot T(n-3) + 4 \cdot T(n-2) - 1 \cdot T(n-1) & \text{falls } n > 2 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lösung 2

Aufstellen der Erzeugenden Funktion.

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} T(n)x^n \\
&= 1 + x + x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} T(n)x^n \\
&= 1 + x + x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \left(4 \cdot T(n-3) + 4 \cdot T(n-2) - 1 \cdot T(n-1)\right) x^n \\
&= 1 + x + x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} 4 \cdot T(n-3)x^n + \sum_{n=3}^{\infty} 4 \cdot T(n-2)x^n - \sum_{n=3}^{\infty} T(n-1)x^n \\
&= 1 + x + x^2 + 4x^3 \underbrace{\sum_{n=3}^{\infty} T(n-3)x^{n-3}}_{F(x)} + 4x^2 \sum_{n=3}^{\infty} T(n-2)x^{n-2} - x \sum_{n=3}^{\infty} T(n-1)x^{n-1} \\
&= 1 + x + x^2 + 4x^3 F(x) + 4x^2 \left(F(x) - 1\right) - x\left(F(x) - 1 - x\right) \\
&= \frac{-2x^2 + 2x + 1}{-4x^3 - 4x^2 + x + 1}
\end{aligned}$$

Das reflexierte Polynom lautet $-4 - 4x + x^2 + x^3$
Nullstellen zu $-4x^3 - 4x^2 + x + 1$ sind $x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = -\frac{1}{2}$.

Kehrwerte hierzu: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$
Ansatz für Partialbruchzerlegung:

$$\frac{-2x^2 + 2x + 1}{(1+x)(1+2x)(1-2x)} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{1+2x} + \frac{C}{1-2x}$$

Wir erhalten $A = 1, B = \frac{-1}{2}, C = \frac{1}{2}$.
Der Koeffizientenvergleich der Nenner mit der Formel

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n x^n = \frac{1}{1 - \gamma x}$$

liefert uns die entsprechenden Werte für γ (hier mit $d_{1,2,3}$ bezeichnet), welche wir summieren können.

$$\begin{aligned} F(x) &= \underbrace{1}_{A} \sum_{n=0}^{\infty} (\underbrace{-1}_{d_1})^n \cdot x^n + \underbrace{\frac{-1}{2}}_{B} \sum_{n=0}^{\infty} (\underbrace{-2}_{d_2})^n x^n + \underbrace{\frac{1}{2}}_{C} \sum_{n=0}^{\infty} (\underbrace{2}_{d_3})^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left((-1)^n - \frac{(-2)^n}{2} + \frac{2^n}{2} \right)}_{T(n)} x^n \end{aligned}$$

Die erzeugenden Funktion lautet somit:

$$T(n) = (-1)^n - \frac{(-2)^n}{2} + \frac{2^n}{2}$$