

Aufgabe 5

Matse Maik plant eine Cafeteria und unterhält sich mit verschiedenen Freunden bzgl. angemessener Preise. Es werden Kuchen und Kaffee verkauft. Er hat in Erinnerung, letzstens für **zwei Kaffee und ein Stück Kuchen 3 Euro** bezahlt zu haben. Zwei Freundinnen erzählen ihm, für **einen Kaffee und zwei Stücke Kuchen 3,50 Euro**, bzw. für **zwei Kaffee und drei Stücke Kuchen 4 Euro** bezahlt zu haben.

Berechnen Sie Preise, die möglichst wenig von den erfragten Preisen abweichen.

Lösung 5

Aus dem gegebenen Text ergibt sich das überbestimmte Gleichungssystem $Ax = b$ wie folgt.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} \text{☕} \\ \text{🍰} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3,5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Für ein Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, m \geq n, \text{rg}(A) = n$$

lässt sich die Näherungslösung x_s nach der *Methode der kleinsten Quadrate* mit

$$x_s = (A^T A)^{-1} A^T b$$

oder in Form der Normalgleichung

$$A^T A x = A^T b$$

bestimmen.

$$A^T A = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}$$
$$A^T b = \begin{pmatrix} 17,5 \\ 22 \end{pmatrix}$$

Mit dem Gauß-Jordan-Algorithmus lösen wir das Normalgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 10 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{☕} \\ \text{🍰} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17,5 \\ 22 \end{pmatrix}$$

und erhalten $\text{☕} = \frac{25}{26}$ und $\text{🍰} = \frac{23}{26}$

Aufgabe 6

Lösung 6

Aufgabe 7

Lösung 7

Aufgabe 8

Lösung 8