Aufgabe 5

Berechnen Sie in Abhängigkeit von x

a) den Kern

b) die Dimension des Krens

c) den Rang

d) das Bild

der zu der folgenden Matrix gehörenden linearen Abbildung:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & x \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Lösung 5a

Der Kern einer linearen Abbildung A ist die Menge aller Vektoren $x \in \mathbb{R}^4$, die von A auf den Nullvektor abgebildet werden, d.h.

$$\ker(A) = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \middle| Ax = 0 \right\}.$$

Durch elementare Zeilenumformungen erhalten wir die Zeilenstufenform der Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & x \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3/2 & 4 & x - 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{6} & \frac{2x}{3} - 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4x - 6 \\ 0 & 0 & 0 & 20 - 4x \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6

Stellen Sie zu folgenden Abbildungen die zugehörigen Abbildungsmatritzen auf.

a) $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^3,\ f(p(x)) = \int_{C=0} p(x)\,\mathrm{d}x$

b) $g : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^2,\ g(p(x)) = p'(x)$.

c) Können Sie den Wertebereich von f so einschränken, dass f bijektiv ist? Falls ja, wie lautet die Umkehrabbildung von f?

Lösung 6

Aufgabe 7

Über eine lineare Abbildung f sei folgendes bekannt.

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\\alpha\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

a) Für welche Werte von α ist die Abbildungsmatrix A_f von f eindeutig bestimmt?

b) Bestimmen Sie die Matrix A_f in Abhängigkeit von α.

c) Bestimmen Sie den Kern und das Bild der Abbildung in Abhängigkeit von α.

Lösung 7

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&\alpha\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

Wenn $\alpha = 1$

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&1&1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&2\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

was passiert, wenn $\alpha \neq 1$ z.B. $\alpha = 0$

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

da $\det(A_f) = \alpha + 1$ und für $\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -1$ gilt:

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&-1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\1&1&0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$