Aufgabe 1

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit.

a) $f(x) = 2 \cdot |x|$ in $x_0 = 0$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

Lösung 1a

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } x > 0 \\ -2x & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = \lim_{x \uparrow 0} -2x = 0$$

$$\lim_{x \downarrow x_0} f(x) = \lim_{x \downarrow 0} 2x = 0$$

Die Funktion $f(x)$ ist stetig in $x_0 = 0$, da $\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x)$.

Lösung 1b

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = \lim_{x \uparrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \downarrow x_0} f(x) = \lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$

Die Funktion $f(x)$ ist unstetig an der Stelle $x_0 = 0$, da $\lim_{x \uparrow x_0} f(x) \neq 0 \neq \lim_{x \downarrow x_0} f(x)$.

Aufgabe 2

Berechnen Sie folgende Integrale:

a) $\int_1^2 \left(3x^2 + 2x\right) \cdot e^{x^3 + x^2} \, \mathrm{d}x$

b) $\int \frac{1-x}{(x+5)^2} \, \mathrm{d}x$

c) $\int_0^{\pi} \sin(x) \cdot x^2 \, \mathrm{d}x$

Lösung 2a

Substituiere $z = x^3 + x^2$, sodass $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 3x^2 + 2x \Leftrightarrow \frac{1}{3x^2+2x}\,\mathrm{d}z = \,\mathrm{d}x$ und damit

$$\int \left(3x^2 + 2x\right) \cdot e^{x^3+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \left(3x^2 + 2x\right) \cdot e^z \frac{1}{3x^2+2x}\,\mathrm{d}z = \int e\ \ \mathrm{d}z.$$

Durch Rücksubstitution und Einsetzen der Grenzen ergibt sich:

$$\int_1^2 \left(3x^2 + 2x\right) \cdot e^{x^3+x^2}\,\mathrm{d}x = \left[e^{x^3+x^2}\right]_1^2 = e^{12} - e^2 = e^{10}$$

Lösung 2b

Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned} & \tfrac{1-x}{(x+5)^2} = \tfrac{A}{(x+5)} + \tfrac{B}{(x+5)^2} \\ \Leftrightarrow \quad & 1 - x = A \cdot (x+5) + B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = -5: \quad & 1 - (-5) = A \cdot (-5+5) + B \\ \Leftrightarrow \quad & 6 = B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = 0: \quad & 1 = A \cdot (0+5) + 6 \\ \Leftrightarrow \quad & -5 = A \cdot 5 \\ \Leftrightarrow \quad & -1 = A \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1-x}{(x+5)^2} = \frac{-1}{(x+5)} + \frac{6}{(x+5)^2}$$

Integration:

$$\int \frac{1-x}{(x+5)^2}dx = \int \frac{-1}{(x+5)} + \frac{6}{(x+5)^2}dx = -\ln(|x+5|) - \frac{6}{x+5} + C$$

Lösung 2c

Partielle Integration mit $u' = \sin(x)$ und $v = x^2$.
Setzte $u = -\cos(x)$ und $v' = 2x$ ein:

$$\int_0^\pi \sin(x) \cdot x^2 dx = \left[-x^2 \cos(x)\right]_0^\pi - \int_0^\pi -2x \cdot \cos(x) dx$$

Partielle Integration mit $u' = -\cos(x)$ und $v = 2x$.
Setze $u = -\sin(x)$ und $v' = 2$ ein:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin(x) \cdot x^2 dx &= \left[-x^2 \cos(x)\right]_0^\pi - \left([-2x \sin(x)]_0^\pi - \int_0^\pi -2\sin(x) dx\right) \\ &= \left[-x^2 \cos(x)\right]_0^\pi - [-2x \sin(x)]_0^\pi + 2[\cos(x)]_0^\pi \\ &= -\pi^2 \cos(\pi) + 2\pi \sin(\pi) + 2\cos(\pi) - 2\cos(0) \\ &= \pi^2 - 4\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Sei der Vektorraum V und $d : V \times V \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$d(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = y \\ 1 & \text{für } x \neq y \end{cases}$$

Zeige, dass d eine Metrik in V ist.

Lösung 3

Die Abbildung d ist eine Metrik, da sowohl

$$d(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{x} = \overrightarrow{y} \checkmark$$

gilt, als auch die Dreiecksungleichung

$$d(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \leq d(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{z}) + d(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}) \quad \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z} \in V.$$

Aufgabe 4

Durch welche der folgenden Funktionen werden Skalarprodukte auf $\mathbb{R}^2$ definiert?

a) $\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right) = x_1^2 + x_2 \cdot y_1 \cdot y_2$

b) $\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right) = x_1 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2$

Lösung 4a

$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ definiert kein Skalarprodukt, da $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \neq (\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x})$:

$$x_1^2 + x_2 \cdot y_1 \cdot y_2 \neq y_1^2 + y_2 \cdot x_1 \cdot x_2$$

Lösung 4b

$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ definiert kein Skalarprodukt, die Bedingung 5 $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ verletzt ist:

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) &= x_1 \cdot x_1 + x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_1 + x_2 \cdot x_2 \\
&= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \\
&= (x_1 + x_2)^2 \\
(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) &\overset{\text{def}}{=} 0 \\
\Leftrightarrow \qquad 0 &= (x_1 + x_2)^2 \\
\Rightarrow \qquad x_1 &= -x_2 \ \vee \ x_2 = -x_1
\end{aligned}$$

$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ definiert kein Skalarprodukt, da z.B. für $\overrightarrow{a} = (1,1)^T$ mit $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) = 4 \neq 0$ gilt.

Aufgabe 5

Wie lautet die Ableitung der gegebenen Funktionen nach dem genannten Parameter?

a) Ableitung von $g(x,y) = (2x - y)^2 + \ln(x \cdot y)$ nach x

b) Ableitung von $l(u,v,w) = \ln\left(\sqrt{u \cdot w} \cdot e^{-v}\right)$ nach u

c) Ableitung von $m(i,j,k) = \ln\left(\frac{j \cdot \sqrt{k}}{i}\right)$ nach i

Lösung 5a

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2 \cdot 2 \cdot (2x - y) + \frac{1}{x \cdot y} \cdot y = 8x - 4y + \frac{1}{x}$$

Lösung 5b

$$\frac{\partial l}{\partial u} = w \cdot \frac{1}{2}(u \cdot w)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-v} \cdot \frac{1}{\sqrt{u \cdot w \cdot e^{-v}}}$$

$$= w \cdot \frac{1}{2 \cdot u \cdot w}$$

$$= \frac{1}{2 \cdot u}$$

Lösung 5c

$$\frac{\partial m}{\partial i} = \frac{-j\sqrt{k}}{i^2} \cdot \frac{i}{j \cdot \sqrt{k}}$$

$$= -\frac{1}{i}$$