

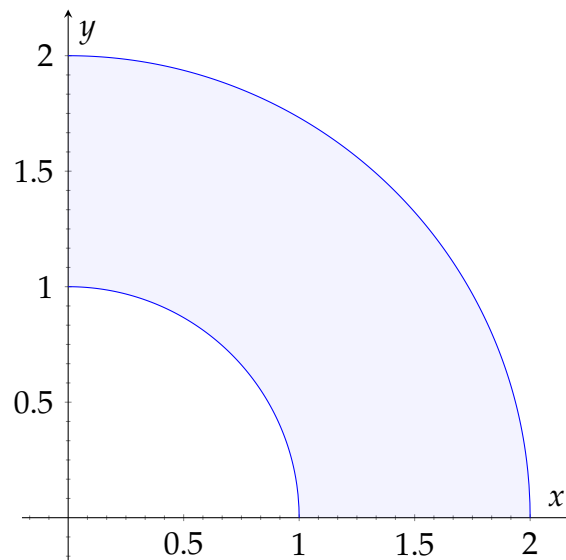
Aufgabe 1

Wir betrachten den Bereich

$$B = \{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

- Skizzieren Sie B .
- Über diesen Bereich wird die Funktion $f(x,y) = (x^2 + y^2)^2$ integriert. Wie groß ist das Integral?

Lösung 1



$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y) \, dy \, dx &= \int_0^2 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (x^2 + y^2)^2 \, dy \, dx \\ &= \int_0^2 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) \, dy \, dx \\ &= \int_0^2 \left[x^4y + \frac{2}{3}x^2y^3 + \frac{y^5}{5} \right]_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx \\ &= \int_0^2 x^4\sqrt{4-x^2} + \frac{2}{3}x^2(\sqrt{4-x^2})^3 + \frac{(\sqrt{4-x^2})^5}{5} - x^4\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{3}x^2(\sqrt{1-x^2})^3 - \frac{(\sqrt{1-x^2})^5}{5} dx \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Gegeben sei eine Halbkugel mit dem Radius R , deren Schnittfläche in einem kartesischen Koordinatensystem auf der xy -Ebene liegt. Berechnen Sie den Schwerpunkt

dieser Halbkugel.

Lösung 2

Für das Rechnen mit Kugelkoordinaten, mit ϕ auf der x - y -Ebene und dem Winkel θ von der z -Achse auf die x - y -Ebene gilt:

$$\iiint f(x,y,z) \, d(z,y,x) = \iiint f(r \cos \phi \sin \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \theta) \cdot |r^2 \sin \theta| \, d(\theta, \phi, r)$$

Wir integrieren über das Gebiet

$$H = \left\{ r \in [0; R] \wedge \theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \wedge \phi \in [0; 2\pi] \right\}.$$

Die x_S und y_S Koordinaten des Schwerpunkts liegen im Mittelpunkt der Kugel, also im Koordinatenursprung.

Für die Koordinate in Richtung der z -Achse gilt:

$$z_S = \frac{\iiint_H z \, d(z,y,x)}{\iiint_H 1 \, d(z,y,x)}$$

Wir berechnen den Zähler.

$$\begin{aligned} \iiint_H z \, d(z,y,x) &= \int_{r=0}^R \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} r \cdot \cos \theta \cdot |r^2 \sin \theta| \, d(\theta, \phi, r) \\ &= \int_{r=0}^R \int_{\phi=0}^{2\pi} \left[\frac{r^3}{2} \cdot \sin(\theta) \cdot |\sin(\theta)| \right]_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} d(\phi, r) \\ &= \int_{r=0}^R \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{r^3}{2} \, d(\phi, r) \\ &= \int_{r=0}^R \left[\frac{r^3}{2} \phi \right]_{\phi=0}^{2\pi} dr \\ &= \int_{r=0}^R r^3 \cdot \pi \, dr \\ &= \left[\frac{r^4}{4} \cdot \pi \right]_{r=0}^R \\ &= \frac{1}{4} R^4 \cdot \pi \end{aligned}$$

Wir berechnen den Nenner:

$$\begin{aligned}
 \iiint_H 1 \, d(z,y,x) &= \int_{r=0}^R \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot |r^2 \sin \theta| \, d(\theta, \phi, r) \\
 &= \int_{r=0}^R \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cdot \sin \theta \, d(\theta, \phi, r) \\
 &= \int_{r=0}^R \int_{\phi=0}^{2\pi} \left[-r^2 \cdot \cos \theta \right]_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} d(\phi, r) \\
 &= \int_{r=0}^R \int_{\phi=0}^{2\pi} r^2 \, d(\phi, r) \\
 &= \int_{r=0}^R \left[r^2 \cdot \phi \right]_{\phi=0}^{2\pi} dr \\
 &= \int_{r=0}^R r^2 \cdot 2\pi \, dr \\
 &= \left[\frac{2}{3} r^3 \cdot \pi \right]_{r=0}^R \\
 &= \frac{2}{3} R^3 \cdot \pi
 \end{aligned}$$

Somit erhalten wir für

$$\begin{aligned}
 z_S &= \frac{\iiint_H z \, d(z,y,x)}{\iiint_H 1 \, d(z,y,x)} \\
 &= \frac{\frac{1}{4} R^4 \cdot \pi}{\frac{2}{3} R^3 \cdot \pi} \\
 &= \frac{3}{8} R.
 \end{aligned}$$

Der Schwerpunkt der Halbkugel $S = (x_S | y_S | z_S)$ liegt also bei $(0 | 0 | \frac{3}{8}R)$.

Aufgabe 3

Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche B , die im 1. Quadranten liegt und durch die Funktionen

$$y^2 = x^3 \quad \text{und} \quad y = x$$

begrenzt wird.

Lösung 3

Aufgabe 4

Der Graph von $y = \sin(x)$ beschreibt eine Kurve K in der xy -Ebene:

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sin(t) \end{pmatrix} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Man berechne das Kurvenintegral $\int_K \vec{v} \, d\vec{X}$ für $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} y \cdot \cos(x) + y \\ \sin(x) + x + 2 \end{pmatrix}$ mit Hilfe einer Potentialfunktion (im Falle der Existenz).

Lösung 4

Aufgabe 5

Gegeben sei das Vektorfeld/ Kraftfeld

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + 2x \cdot y - y^2 \\ x^2 - 2x \cdot y - y^2 \end{pmatrix}$$

- Überprüfen Sie, ob Kurvenintegrale in \vec{F} wegunabhängig sind.
- Ermitteln Sie gegebenenfalls eine Potentialfunktion.
- Berechnen Sie die Arbeit zwischen den Punkten $A = (0,1)$ zu $E = (1,0)$ über die Potentialfunktion oder als Wert des Kurvenintegrals über ein Geradenstück von A nach E .

Lösung 5