Aufgabe 6

Welche der folgenden Abbildungen von $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sind linear? Geben Sie ggf. die zugehörige Matrix an. Bestimmen Sie jeweils den Kern (auch für die nicht-linearen Abbildungen).

a) $f_1(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ -x_1 \\ 5x_1 - 7x_2 \end{pmatrix}$

b) $f_2(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 - 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Lösung 6a

Additivität, $x, y \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f_1(x+y) &= \begin{pmatrix} -(x_2 + y_2) \\ -(x_1 + y_1) \\ 5(x_1 + y_1) - 7(x_2 + y_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -x_2 - y_2 \\ -x_1 - y_1 \\ 5x_1 - 7x_2 + 5y_1 - 7y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -x_2 \\ -x_1 \\ 5x_1 - 7x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y_2 \\ -y_1 \\ 5y_1 - 7y_2 \end{pmatrix} \\ &= f_1(x) + f_1(y) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Homogenität, $x \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lambda \cdot f_1(x) &= \lambda \cdot \begin{pmatrix} -x_2 \\ -x_1 \\ 5x_1 - 7x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\lambda x_2 \\ -\lambda x_1 \\ \lambda(5x_1 - 7x_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\lambda x_2 \\ -\lambda x_1 \\ 5\lambda x_1 - 7\lambda x_2 \end{pmatrix} \\ &= f_1(\lambda \cdot x) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Die Spalten der Abbildungsmatrix einer Funktion sind die Bilder der kanonischen Einheitsvektoren.

$$
\begin{aligned}
A_{f_1} &= \begin{pmatrix} f_1(e_1) & f_1(e_2) \end{pmatrix} \\
&= \left(f_1\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \quad f_1\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \right) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Der Kern der Abbildung ist $\ker(f_1) = \{\overrightarrow{0}\}$, da lediglich der Nullvektor aus $\mathbb{R}^2$ auf den Nullvektor im Bild der Abbildung zeigt.

Lösung 6b

Untersuche Additivität, $x, y \in \mathbb{R}^2$

$$
\begin{aligned}
f_2(x+y) &= \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + 1 \\ x_2 + y_2 - 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&\neq \begin{pmatrix} x_1 + y_2 + 2 \\ x_2 + y_2 - 2 \\ 6 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 - 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 + 1 \\ y_2 - 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= f_2(x) + f_2(y)
\end{aligned}
$$

Die Abbildung f_2 ist nicht additiv, also handelt es sich nicht um eine lineare Abbildung, also existiert keine auch Abbildungsmatrix. Der Kern der Abbildung ist die leere Menge, da der Nullvektor nicht im Bild der Abbildung liegt.

Aufgabe 7

Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Der Ausdruck λx kann als lineare Abbildung interpretiert werden:

a) $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : x \mapsto \lambda x$

b) $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^n : \lambda \mapsto \lambda x$

Wie lauten in jedem Fall die Matrizen der zugehörigen Abbildungen? Im Fall a) kann damit die Multiplikation eines Vektors mit einem Faktor als Matrixmultiplikation interpretiert werden.

Lösung 7a

Für die Abbildung

$$f_a : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to R^n \\ x \mapsto \lambda x \qquad \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ist die Abbildungsmatrix $A_{f_a} = \lambda E_n$, also das λ-fache der $n \times n$-Einheitsmatrix.

$$A_{f_a} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Lösung 7b

Hinweis: Bei λ handelt es sich um eine Variable, während x hier ein Parameter ist.
Für die Abbildung

$$f_b : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \\ \lambda \mapsto \lambda x \quad x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

hat die Abbildungsmatrix die Gestalt $A_{f_b} \in K^n \times 1$. Es handelt sich somit um einen Vektor, welcher durch Multiplikation mit λ, λ in f_b abbildet.

$$A_{f_b} = \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8

Gegeben sei die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_3, 4x_2)$.

a) Zeigen Sie, dass f linear ist.

b) Bestimmen Sie den $\ker(f)$ und geben Sie die $\dim(\ker(f))$ an.

c) Berechnen Sie die $\dim(\text{Bild}(f))$ bzw. $\text{rang}(f)$ und bestimmen Sie das $\text{Bild}(f)$.

d) Ist die Abbildung f injektiv oder surjektiv?

Lösung 8a

Additivität:

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 - 2x_3, 4x_2) \\
f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) &= (x_1 + y_1 - 2(x_3 + y_3), 4(x_2 + y_2)) \\
f(x_1, x_2, x_3) + f(y_1, y_2, y_3) &= (x_1 - 2x_3, 4x_2) + (y_1 - 2y_3, 4y_2) \\
&= (x_1 - 2x_3 + y_1 - 2y_3, 4x_2 + 4y_2) \\
&= (x_1 + y_1 - 2(x_3 + y_3), 4(x_2 + y_2)) \\
\Rightarrow \quad f(x_1, x_2, x_3) + f(y_1, y_2, y_3) &= f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Homogenität:

$$\begin{aligned}
f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) &= (\lambda \cdot x_1 - 2 \cdot \lambda \cdot x_3, 4 \cdot \lambda \cdot x_2) \\
&= (\lambda \cdot (x_1 - 2 \cdot x_3), 4 \cdot \lambda \cdot x_2) \\
\lambda f(x_1, x_2, x_3) &= \lambda \cdot (x_1 - 2x_3, 4x_2) \\
&= (\lambda \cdot (x_1 - 2x_3), 4 \cdot \lambda \cdot x_2) \\
\Rightarrow \qquad f(\lambda x_1, \lambda x_2) &= \lambda f(x_1, x_2) \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Die Abbildung ist linear.

Lösung 8b

Die Menge der Vektoren aus dem Definitionsbereich, welche auf den Nullvektor im Wertebereich abbilden, ermitteln wir durch Betrachtung der Abbildung. Es fällt auf, dass $x_2 = 0$ sein muss und dass $x_1 - 2x_3 = 0$, also $x_1 = 2x_3$ sein muss. Wählen $x_3 = \lambda \in \mathbb{R}$ beliebig:

$$\ker(f) = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Die Dimension ist die Anzahl der Vektoren in einem minimal Erzeugendensystem, welche wir aus der obrigen Darstellung einfach abzählen können. $\dim(\ker(f)) = 1$.

Lösung 8c

Aus der Rangformel $\mathrm{def}(f) + \mathrm{rg}(f) = \dim(V)$ können wir mit dem zuvor ermittelten $\mathrm{def}(f) + \dim(\ker(f)) = 1$ leicht erkennen, dass $\dim(\mathrm{Bild}(f)) = \mathrm{rg}(f) = 2$ ist.
Außerdem ist $\mathrm{Bild}(f) = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 \middle| y = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha,\beta \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2$

Lösung 8d

Die Abbildung f ist surjektiv, wie in Aufgabenteil c gezeigt, aber nicht injektv, wie in Teil b gezeigt.