Aufgabe 5

Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x & + & 3y & + & 3z & = & -2 \\ x & + & 2y & + & 4z & = & 3 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \end{pmatrix}$$

a) nach dem Gauß-Verfahren

b) nach der Cramerschen Regel und

c) durch Invertierung von der Abbildungsmatrix.

Lösung 5a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow x = 1, \quad y = -3, \quad z = 2$$

Lösung 5b

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

sowie $Ax = b$.
Um die Cramersche Regel anzuwenden berechnen wir zunächst $|A|$ mit der Regel von Sarrus

$$|A| = 2 + 12 + 3 - 6 - 4 - 3 = 4.$$

Betrachten wir nun die Spaltenvektoren von A mit $A = (a_1, a_2, a_3) \in K^{3\times 3}$ und bestimmen A_i mit $i \in \{1, 2, 3\}$ nach Satz 6.28.

$$A_1 = (b,\ a_2,\ a_3)$$
$$A_2 = (a_1,\ b,\ a_3)$$
$$A_3 = (a_1,\ a_2,\ b)$$

Durch Anwendung der Regel von Sarrus bestimmen wir die Determinanten wie folgt:

$$\begin{aligned}
|A_1| &= \det(b,\ a_2,\ a_3) \\
&= \det\begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= -4 + 9 - 0 - (-8) - 9 \\
&= 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|A_2| &= \det(a_1,\ b,\ a_3) \\
&= \det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= 3 + (-8) + 0 - 9 - 0 - (-2) \\
&= -12
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|A_3| &= \det(a_1,\ a_2,\ b) \\
&= \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 0 + 9 + (-2) - (-4) - 3 - 0 \\
&= 8
\end{aligned}$$

Mit $x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{4}{4} = 1 \\
x_2 &= \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-12}{4} = -3 \\
x_3 &= \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{8}{4} = 2
\end{aligned}$$

Lösung 5c

Das Gleichungssystem $Ax = b$ löst sich durch Multiplikation von links mit dem Inversen von A zu $x = A^{-1}b$ auf:

$$\begin{aligned} & Ax &&= b \\ \Leftrightarrow\quad & A^{-1}Ax &&= A^{-1}b \\ \Leftrightarrow\quad & Ex &&= A^{-1}b \\ \Leftrightarrow\quad & x &&= A^{-1}b \end{aligned}$$

Wir bestimmen A^{-1}.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 & -1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/2 & -1/4 \end{array}\right) \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -5/4 & 3/2 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 & -1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/2 & -1/4 \end{array}\right) \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 & -1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/2 & -1/4 \end{array}\right) \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Durch Anwendung der zuvor bestimmten Gleichung erhalten wir den Lösungsvektor.

$$\begin{aligned} x &= A^{-1}b \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 6

Welchen Rang haben die Matrizen $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times 2}$ mit $n \geq 2$?

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ -2 & 1 & -8 \\ 1 & 5 & -7 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $b_{ij} = \begin{cases} -i & i \text{ gerade} \\ i & i \text{ ungerade} \\ n & i = n, j = 1 \\ n-1 & i = n, j = 2 \end{cases}$

Lösung 6a

Durch Anwendung des Gauß-Jordan-Verfahrens lässt sich eine Nullzeile wegstreichen und es bleiben drei lineare unabhängige Zeilen übrigen, sodass $\operatorname{rg}(A) = 3$ ist.

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ -2 & 1 & -8 \\ 1 & 5 & -7 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 0 & 11 & -22 \\ 1 & 5 & -7 \\ 0 & -1 & -7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -17 & -22 \\ 0 & 0 & -99 \\ 1 & 5 & -7 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung 6b

Wir betrachten die Matrizen B_n mit $n \in \{2, 3, 4\}$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$
$$B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

sowie eine allgemeine Form für $n > 4$

$$B_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \\ 3 & 3 \\ -4 & -4 \\ \vdots & \vdots \\ n & n-1 \end{pmatrix}$$

Es ist leicht erkennbar das die Zeilen $i \in \{1, \dots, n-1\}$ linear abhängig voneinander sind und auf die erste Zeile reduziert werden können. Somit ist

$$\operatorname{rg}(B) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n & n-1 \end{pmatrix} = 2.$$

Alternativ lässt isch auch mit Satz 6.24 argumentieren, nämlich dass $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}_S(A) \leq 2$ und durch die erste und letzte Zeile $\operatorname{rg}_S(A) \geq 2$ sein muss, also $\operatorname{rg}(A) = 2$ ist.

Aufgabe 7

Gegeben seien die folgenden Vektoren

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R}$$

sowie die zugehörigen LGS

$$(1)\ (a_1, a_2, a_3)x = b \quad \text{und} \quad (2)\ (a_1, a_2, a_3, b)x = 0.$$

a) Berechnen Sie $\det(a_1, a_2, a_3, b)$ in Abhängigkeit von λ und bestimmen Sie den Wert λ^*, für den die Determinante Null wird.

b) Bestimmen Sie die Lösbarkeit der LGS (1) und (2) für den Fall $\lambda = \lambda^*$.

c) Bestimmen Sie die Lösbarkeit der LGS (1) und (2) für den Fall $\lambda \neq \lambda^*$.

d) Geben Sie die Lösungsmengen für b) und c) an, sollten unendlich viele Lösungen existieren.

Lösung 7a

Zur Berechnung der Determinanten bietet sich die Anwendung des Laplaceschen Entwicklungssatzes mit der zweite Zeile an.

$$\begin{aligned}
\det(a_1, a_2, a_3, b) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \\
&= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & \lambda \end{pmatrix} \\
&= \lambda + 0 + 2 - 1 - 0 - 2\lambda \\
&= 1 - \lambda
\end{aligned}$$

Somit ist $\lambda^* = 1$.

Lösung 7b

Wir untersuchen das LGS (1) mit $\lambda = \lambda^* = 1$. Sei $A = (a_1, a_2, a_3)$, so bestimmen wir zunächst $\operatorname{rg}(A) = 3 = \operatorname{rg}(A, b)$. Da die Anzahl der Spalten der Matrix A gleich ihrem Rang ist $\operatorname{rg}(A) = n$, existiert genau eine Lösung, nämlich die Triviallösung $x = 0$.

Da für das LGS (2) die Determinante, wie in 7a) gezeigt, $\det(a_1, a_2, a_3, b) = 0$ ist, betrachten wir den Rang $\operatorname{rg}(A) = 3 = \operatorname{rg}(A, \overrightarrow{0})$. Daher existieren unendlich viele Lösungen mit $n - \operatorname{rg}(A) = 1$ Parametern.

Lösung 7c

Für $\lambda \neq \lambda^*$ ist das LGS (1) mit $\operatorname{rg}(A) = 3 \neq 4 = \operatorname{rg}(A,b)$ nicht lösbar. Es existiert also keine Lösung.

Da die Determinante für das LGS (2) $\det(a_1, a_2, a_3, b) \neq 0$ ist, existiert genau eine Lösung, nämlich die Triviallösung $x = 0$.

Lösung 7d

Bestimme die Lösungsmenge für das LGS (2) $(a_1, a_2, a_3, b)x = 0$ mit $\lambda = \lambda^* = 1$.

$$\mathcal{L} = \left\{ \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \mu \in \mathbb{R} \right\}$$