Aufgabe 5

Sei $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Wir betrachten die Projektion p von $x \in \mathbb{R}^n$ in Richtung v. Es gilt $p = \frac{\langle v,x \rangle}{\|v\|^2} \cdot v$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt und $\|\cdot\|$ die euklidische Norm bezeichne.

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $P(x) = p$ linear ist.

b) Bestimmen Sie die zugehörige Abbildungsmatrix A.

c) Berechnen Sie Bild(P) und geben Sie eine Basis des Bildes an. Wie lautet rg(A)?

d) Bestimmen Sie ker(P) und deuten Sie ker(P) geometrisch.

e) Geben Sie eine Basis von ker(P) an.

f) Zeigen Sie, dass P keine Umkehrabbildung besitzt.

Lösung 5a

$$P : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ x \mapsto \frac{\langle v,x \rangle}{\|v\|^2} \cdot v \end{cases}$$

Die Abbildung $P(x) = p$ ist linear, genau dann wenn sie additiv und homogen ist. Zeige Additivität mit $x,y \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} P(x+y) &= \frac{\langle v,x+y \rangle}{\|v\|^2} \cdot v \\ &= \frac{\langle v,x \rangle + \langle v,y \rangle}{\|v\|^2} \cdot v \\ &= \left(\frac{\langle v,x \rangle}{\|v\|^2} + \frac{\langle v,y \rangle}{\|v\|^2} \right) \cdot v \\ &= \frac{\langle v,x \rangle}{\|v\|^2} \cdot v + \frac{\langle v,y \rangle}{\|v\|^2} \cdot v \\ &= P(x) + P(y) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Zeige Homogenität mit $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} P(\lambda \cdot x) &= \frac{\langle v,\lambda x \rangle}{\|v\|^2} \cdot v \\ &= \lambda \cdot \frac{\langle v,x \rangle}{\|v\|^2} \cdot v \\ &= \lambda \cdot P(x) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Lösung 5b

Es gilt

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{\langle v,x\rangle}{\|v\|^2} \cdot v \\ &= \frac{v_1x_1 + \cdots + v_nx_n}{v_1^2 + \cdots + v_n^2} \cdot v \end{aligned}$$

Um die Abbildungsmatrix A bzgl. der kanonischen Einheitsvektoren zu erhalten, setzen wir diese der Reihe nach ein.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} P(e_1) & P(e_2) & \cdots & P(e_n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{v_1}{\|v\|^2} \cdot v & \frac{v_2}{\|v\|^2} \cdot v & \cdots & \frac{v_n}{\|v\|^2} \cdot v \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\|v\|^2} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \cdot v & v_2 \cdot v & \cdots & v_n \cdot v \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\|v\|^2} \cdot \begin{pmatrix} v_1v_1 & v_2v_1 & \cdots & v_nv_1 \\ v_1v_2 & v_2v_2 & \cdots & v_nv_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1v_n & v_2v_n & \cdots & v_nv_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lösung 5c

Es gilt Bild$(P) = \mathcal{L}\left(P(e_1), P(e_2), \ldots, P(e_n)\right) = \mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(v)$ und somit ist (v) eine Basis von Bild(P) und $\mathrm{rg}(P) = \dim(\mathrm{Bild}(P)) = 1$.

Lösung 5d

$\ker(P) = \{x | \langle x, v\rangle = 0\}$ da die Projektion eines Vektors x auf einen anderen Vektor v nur dann 0 ist, wenn $x \perp v$ also $\langle x,v\rangle = 0$.

Lösung 5e

Für die Normalform gilt $\langle x,v\rangle = \langle p,v\rangle$.

Lösung 5f

Aus $\det(A) \neq 0$ folgt, dass A nicht invertierbar ist.

Aufgabe 6

Gilt die Beziehung

$$\det(A+B) = \det(A) + \det(B)?$$

Beweisen Sie ihre Aussage.

Lösung 6

Wir nehmen an, dass $A,B \in K^{n\times n}$ gilt. Zwar ist nach Definition 5.1 Satz 3 die Determinante additiv, jedoch nur dann, wenn nru eine Spalte/Zeile unterschiedlich ist.

Als Gegenbeispiel für den allgemeinen Fall wählen wir $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Es gilt $A + B = \mathcal{E}$ und $\det(\mathcal{E}) = 1$, jedoch ist $\det(A) + \det(B) = 0$ und damit ist gezeigt, dass $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$. ✓

Aufgabe 7

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 39 \\ 34 \\ 26 \end{pmatrix}.$$

a) Bringen Sie die Matrix A auf die obere Dreiecksgestalt, indem Sie sie von links mit den für die Zeilenumformungen erforderlichen Elementarmatrizen multiplizieren.

b) Multiplizieren Sie auch die rechte Seite b von links mit diesen Elementarmatrizen.

c) Lösen Sie anschließend das Gleichungssystem durch Rückwärtssubstitution.

Lösung 7

$$C3_{\lambda_{3,3}=\frac{15}{36}} \cdot C1_{\lambda_{3,2}=-\frac{4}{3}} \cdot C1_{\lambda_{3,1}=-1} \cdot C3_{\lambda_{2,2}=\frac{3}{5}} \cdot C1_{\lambda_{2,1}=-2} \cdot C3_{\lambda_{1,1}=\frac{1}{3}} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C3_{\lambda_{3,3}=\frac{15}{36}} \cdot C1_{\lambda_{3,2}=-\frac{4}{3}} \cdot C1_{\lambda_{3,1}=-1} \cdot C3_{\lambda_{2,2}=\frac{3}{5}} \cdot C1_{\lambda_{2,1}=-2} \cdot C3_{\lambda_{1,1}=\frac{1}{3}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{12} \end{pmatrix} \cdot b = \begin{pmatrix} 13 \\ 24/5 \\ 11/4 \end{pmatrix}$$

Durch Rückwärtssubstitution ergibt sich $x_3 = \frac{11}{4}$,

$$\begin{aligned} x_2 + \frac{1}{5}x_3 &= \frac{24}{5} \\ \Leftrightarrow x_2 &= \frac{24}{5} - \frac{11}{20} \\ \Leftrightarrow x_2 &= \frac{17}{4} \end{aligned}$$

und für x_1

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 &= 13 \\ \Leftrightarrow x_1 &= 13 - \frac{45}{12} \\ \Leftrightarrow x_1 &= \frac{37}{4}. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir $x = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 37 \\ 17 \\ 11 \end{pmatrix}$.