Aufgabe 5

Hinweis: Umbenennung des Parameters von x nach a.
Berechnen Sie in Abhängigkeit von a

a) den Kern

b) die Dimension des Kerns

c) den Rang

d) das Bild

der zu der folgenden Matrix gehörenden linearen Abbildung:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & a \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Lösung 5

Dimensionsformel für lineare Abbildungen:
Für eine lineare Abbildung $f : V \to W$ gilt

$$\dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f) = \dim(V).$$

Statt $\dim(\ker(f))$ kann man auch $\mathrm{def}(f)$ schreiben.
Der Kern einer linearen Abbildung A ist die Menge aller Vektoren $x \in \mathbb{R}^4$, die von A auf den Nullvektor abgebildet werden. Ganz allgemein bedeutet das, dass der Kern die Menge der Lösungen des Gleichungssystems $Ax = 0$ ist:

$$\ker(A) = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \middle| Ax = 0 \right\}.$$

Um diese Menge konkret zu bestimmen, formen wir durch elementare Zeilenoperationen die Abbildungsmatrix so lange um, bis wir die Zeilenstufenform erhalten und dabei den Parameter a möglichst frei stehend haben.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & a \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{Z_2-Z_1 \\ Z_4-Z_1}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & a \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{Z_1:2 \\ Z_2:2 \\ Z_3-Z_1}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & {}^1/_2 & 1 & {}^3/_2 \\ 0 & 1 & {}^1/_2 & 0 \\ 0 & {}^3/_2 & 4 & a - {}^3/_2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{Z_3-{}^3/_2 Z_2 \\ Z_3\cdot {}^4/_{13}}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & {}^1/_2 & 1 & {}^3/_2 \\ 0 & 1 & {}^1/_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & {}^{4a-6}/_{13} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{Z_4-Z_3 \\ Z_{3,4}\cdot {}^{13}/_4 \\ Z_3+Z_4}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & {}^1/_2 & 1 & {}^3/_2 \\ 0 & 1 & {}^1/_2 & 0 \\ 0 & 0 & {}^{13}/_4 & {}^{13}/_2 \\ 0 & 0 & 0 & 8-a \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{Z_1\cdot 4 \\ Z_1-2\cdot Z_2 \\ Z_1-3\cdot Z_3 \\ Z_1:4}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & {}^1/_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 8-a \end{pmatrix}$$

Aus der letzten Zeile entnehmen wir, dass $(8-a)\cdot x_4 = 0$ ist. Dadurch erhalten wir zwei Fälle, die wir unterscheiden müssen:

<u>1. Fall, $a = 8$:</u>
Wenn $a = 8$ ist, so kann x_4 einen beliebigen Wert annehmen, daher wählen wir $x_4 = \lambda \in \mathbb{R}$ *beliebig* und setzen ein um die übrigen Koordinaten von x zu bestimmen: $x_3 + 2\lambda = 0 \Leftrightarrow x_3 = -2\lambda$, $x_2 + \frac{1}{2}x_3 \Leftrightarrow x_2 = \lambda$ und $x_1 = 0$. Daraus folgt:

$$\ker(A_{a=8}) = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Die Dimension des Kerns (oder auch Defekt def genannt) ist $\dim(\ker(A_{a=8})) = \operatorname{def}(A_{a=8}) = 1$.

Mit der Rangformel ergibt sich für den Rang

$$\mathrm{rg}(A_{a=8}) = \dim(V) - \mathrm{def}(A_{a=8}) = 4 - 1 = 3.$$

Das Bild der Matrix ist die Menge aller Linearkombinationen der Spaltenvektoren, sodass wir diese einfach wie folgt angeben können:

$$\mathrm{Bild}(A) = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \lambda_{1,2,3} \in \mathbb{R} \right\}$$

2. Fall, $a \neq 8$:
Wenn $a \neq 8$ ist, dann muss $x_4 = 0$ sein. Für die übrigen Koordinaten ergibt sich so ebenfalls $x_4 = x_3 = x_2 = x_1 = 0$, was bedeutet, dass lediglich der Nullvektor eine Lösung des Gleichungssystems $Ax = 0$ ist und $\ker(A_{a\neq 8}) = \{0\}$ ist.
Der Defekt ist $\mathrm{def}(A_{a\neq 8}) = 0$.
Mit der Rangformel ergibt sich für den Rang

$$\mathrm{rg}(A_{a\neq 8}) = \dim(V) - \mathrm{def}(A_{a\neq 8}) = 4 - 0 = 4.$$

Da der Rang der Matrix gleich der Anzahl der Spaltenvektoren ist, können wir das Bild mit den Spalten der Ausgangsmatrix beschreiben.

$$\mathrm{Bild}(A) = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \lambda_4 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ a \\ 5 \end{pmatrix} \middle| \lambda_{1,2,3,4} \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe 6

Stellen Sie zu folgenden Abbildungen die zugehörigen Abbildungsmatritzen auf.

a) $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^3,\ f(p(x)) = \int_{C=0} p(x)\ \mathrm{d}$

b) $g : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^2,\ g(p(x)) = p'(x)$.

c) Können Sie den Wertebereich von f so einschränken, dass f bijektiv ist? Falls ja, wie lautet die Umkehrabbildung von f?

Lösung 6a

Die Abbildung der Polynome maximal zweiten Gerades auf ihre Stammfunktion aus den Polynomen maximal dritten Gerades

$$f : \begin{cases} \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^3 \\ p(x) \mapsto \int_{C=0} p(x)\ \mathrm{d} \end{cases}$$

lässt sich ebenfalls als $f(p(x)) = A \cdot p(x)$ schreiben, mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Lösung 6b

Umgekehrt lässt sich

$$g : \begin{cases} \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^2 \\ p(x) \mapsto p'(x) \end{cases}$$

als $f(p(x)) = B \cdot p(x)$ mit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

schreiben.

Lösung 6c

Begrenzt man den Wertebereich der injektiven Abbildung f auf die Menge aller Polynome maximal vierten Gerades ohne die Polynome vom Grad Null $\tilde{f} : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^3 \setminus \mathbb{P}^0$, so wird die Abbildung surjektiv und damit bijektiv.

Die Umkehrabbildung f^{-1} kann nun so angegeben werden:

$$f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{P}^3 \setminus \mathbb{P}^0 \to \mathbb{P}^2 \\ p(x) \mapsto p'(x) \end{cases}$$

Die Abbildungsmatrix braucht dabei ebenfalls nur invertiert zu werden.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7

Über eine lineare Abbildung f sei folgendes bekannt.

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Für welche Werte von α ist die Abbildungsmatrix A_f von f eindeutig bestimmt?

b) Bestimmen Sie die Matrix A_f in Abhängigkeit von α.

c) Bestimmen Sie den Kern und das Bild der Abbildung in Abhängigkeit von α.

Lösung 7

Wir betrachten die lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $V \subseteq \mathbb{R}^3$ und $W \subseteq \mathbb{R}^2$.
Sei $\mathcal{B}_V = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \right)$ eine Basis von V und $\mathcal{B}_W = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis von W...

$$\begin{pmatrix} 1\,0\,1 \\ 1\,1\,0 \\ 0\,1\,\alpha \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1\,0 & 1 \\ 1\,1 & -1 \end{pmatrix}$$

Wenn $\alpha = 1$

$$\begin{pmatrix} 1\,0\,1 \\ 1\,1\,0 \\ 0\,1\,1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1\,0 & 1 \\ 0\,1 & -1 \\ 0\,1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1\,0 & 1 \\ 0\,1 & -1 \\ 0\,0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \end{pmatrix}$$

was passiert, wenn $\alpha \neq 1$ z.B. $\alpha = 0$

$$\begin{pmatrix} 1\,0\,1 \\ 1\,1\,0 \\ 0\,1\,0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0\,0\,1 \\ 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \end{pmatrix}$$

da $\det(A_f) = \alpha + 1$ und für $\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -1$ gilt:

$$\begin{pmatrix} 1\,0 & 1 \\ 1\,1 & 0 \\ 0\,1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1\,0\,1 \\ 1\,1\,0 \\ 1\,1\,0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1\,0\,1 \\ 1\,1\,0 \end{pmatrix}$$