Aufgabe 5

Matse Maik plant eine Cafeteria und unterhält sich mit verschiedenen Freunden bzgl. angemessener Preise. Es werden Kuchen und Kaffee verkauft. Er hat in Erinnerung, letztens für **zwei Kaffee und ein Stück Kuchen 3 Euro** bezahlt zu haben. Zwei Freundinnen erzählen ihm, für **einen Kaffee und zwei Stücke Kuchen 3,50 Euro**, bzw. für **zwei Kaffee und drei Stücke Kuchen 4 Euro** bezahlt zu haben.
Berechnen Sie Preise, die möglichst wenig von den erfragten Preisen abweichen.

Lösung 5

Aus dem gegebenen Text ergibt sich das überbestimmte Gleichungssystem $Ax = b$ wie folgt.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} \text{☕} \\ \text{🍰} \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3{,}5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Für ein Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, m \geq n,\ \operatorname{rg}(A) = n$$

lässt sich die Näherungslösung x_s nach der *Methode der kleinsten Quadrate* mit

$$x_s = \left(A^T A\right)^{-1} A^T b$$

oder in Form der Normalgleichung

$$A^T A x = A^T b$$

bestimmen.

$$A^T A = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}$$
$$A^T b = \begin{pmatrix} 17{,}5 \\ 22 \end{pmatrix}$$

Mit dem Gauß-Jordan-Algorithmus lösen wir das Normalgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 10 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{☕} \\ \text{🍰} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17{,}5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

und erhalten ☕ $= \frac{25}{26}$ und 🍰 $= \frac{23}{26}$

Aufgabe 6

Bestimmen Sie die Lösung mit der kleinsten Norm des folgenden unterbestimmten Gleichungssystems.

$$\begin{aligned} x \quad +2y \quad +3z \quad &= 4 \\ 3x \quad +2y \quad +z \quad &= 2 \end{aligned}$$

Lösung 6

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 \\ 8 & 8 & 8 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A^T b = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Aus $A^T Ax = A^T b$ ergibt sich die erweiterte Koeffizientenmatrix, welche mit dem freien Parameter $x_3 = \lambda \in \mathbb{R}$ folgende Lösungsmenge für $x \in \mathbb{R}^3$ liefert.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 8 & 6 & 10 \\ 8 & 8 & 8 & 12 \\ 6 & 8 & 10 & 14 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0{,}8 & 0{,}6 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 5/2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Aufgabe 7

Mit der Wassertiefe ändert sich der Druck, der auf einen im Wasser befindlichen Körper wirkt. Es wird ein Experiment durchgeführt, um den vermuteten Zusammenhang

$$P = \alpha + \beta \cdot d$$

zwischen Wassertiefe d und Druck P zu überprüfen. Es wurden folgende Messwerte aufgenommen:

Wassertiefe	1	3	5	7	9
Druck	2	4	5,5	8,5	10

a) Bestimmen Sie die Parameter α und β nach der Methode der kleinsten Quadrate.

b) Ermitteln Sie mit diesen Werten den Druck in einer Tiefe von 15 Metern.

Lösung 7

Aufgabe 8

Die Punkte $A = (6|0|0)$, $B = (2|1|3)$ und $C = (-2|-2|2)$ liegen in einer Ebene E.

a) Stellen Sie die Hessesche Normalform der Ebene auf. Wie groß ist der Abstand der Ebene zum Ursprung?

b) Welcher Punkt in der Ebene hat den kleinsten Abstand zum Ursprung? Stellen Sie dazu das zugehörige unterbestimmte LGS auf und finden Sie die Lösung mithilfe der verallgemeinerten Inverse.

Lösung 8a

Um die Hessesche Normalform der Ebene zu bestimmen, können wir den Normalenvektor der Ebene finden. Der Normalenvektor ist orthogonal zu jedem Vektor, der in der Ebene liegt.
Wir können zwei Vektoren in der Ebene verwenden, um den Normalenvektor zu bestimmen. Zum Beispiel können wir die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ verwenden.
Der Vektor $\overrightarrow{AB}$ ist gegeben durch:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2-6 \\ 1-0 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Der Vektor $\overrightarrow{AC}$ ist gegeben durch:

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2-6 \\ -2-0 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Um den Normalenvektor zu bestimmen, berechnen wir das Kreuzprodukt von $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -16 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Wir normieren zunächst noch den Normalenvektor

$$n_0 = \frac{\overrightarrow{n}}{\| \overrightarrow{n} \|}$$
$$n_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und stellendie Hessesche Normalform der Ebene dann mit de Normalenvektor $\overrightarrow{n_0}$ und einem Punkt in der $A = (6|0|0)$ als Stützvektor auf:

$$E : \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left[\overrightarrow{x} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0$$