Aufgabe 5

Berechnen Sie jeweils die Inverse folgender Matrizen, falls diese existiert:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Lösung 5

Eine quadtratsiche Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn gilt: $\det(A) \neq 0$.

Lösung 5a

Aus $\det(A) = 2 + 12 + 6 - 9 - 4 - 4 = 3 \neq 0$ folgt, dass die Matrix invertierbar ist. Durch elementare Zeilenumformungen lässt sich A^{-1} wie folgt bestimmen:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -7 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 4 & -7 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Lösung 5b

Da $\det(B) = -4 + 3 - (-1) = 0$, ist die Matrix B nicht invertierbar.

Aufgabe 6

Gegeben sei die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie A^k für $k = 1 \dots 3$.

b) Stellen Sie eine Vermutung auf für A^n und beweisen Sie diese.

Lösung 6

Aufgabe 7

A sei eine 3×3-Matrix.

a) Welche Beziehung ($=, \neq, \subseteq, \subset, \supset, \supseteq$) besteht zwischen dem Kern von A und dem Kern von A^2 (und dem von A^3)?

b) Verifizieren Sie ihr Ergebnis aus (a) mit der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Lösung 7

Aufgabe 8

Die Spur einer quadratischen Matrix $A = (a_{ij})$ ist definiert durch

$$\mathrm{Spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Spur eine lineare Abbildung darstellt.

b) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = A^T$. Verifizieren Sie $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$.

c) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$, wobei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

d) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Spur}(A^T A) = 0$ genau dann, wenn $A = (0)$.

e) Man zeige weiter: $\mathrm{Spur}(ABC) = \mathrm{Spur}(BCA)$, aber i.a. $\mathrm{Spur}(ABC) \neq \mathrm{Spur}(BAC)$.

Lösung 8