

Aufgabe 5

Hinweis: Umbenennung des Parameters von x nach a .
Berechnen Sie in Abhängigkeit von a

- a) den Kern
- b) die Dimension des Kerns
- c) den Rang
- d) das Bild

der zu der folgenden Matrix gehörenden linearen Abbildung:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & a \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Lösung 5

Dimensionsformel für lineare Abbildungen:
Für eine lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ gilt

$$\dim(\ker(f)) + \operatorname{rg}(f) = \dim(V).$$

Lösung 5a

Der Kern einer linearen Abbildung A ist die Menge aller Vektoren $x \in \mathbb{R}^4$, die von A auf den Nullvektor abgebildet werden, d.h.

$$\ker(A) = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = 0\}.$$

Durch elementare Zeilenumformungen erhalten wir die Zeilenstufenform der Koeffizientenmatrix

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & a \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \\
 \rightsquigarrow & \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3/2 & 4 & a - 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
 \rightsquigarrow & \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{6} & \frac{2a}{3} - 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
 \rightsquigarrow & \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4a - 6 \\ 0 & 0 & 0 & 20 - 4a \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Unterscheidung

$$(a \mid b \mid c)$$

Aus der letzten Zeile ergeben sich die Fälle $x_4 \cdot (20 - 4a) = 0 \Leftrightarrow x_4 = 0 \vee a = 5$.

Für $a \neq 5$ ergibt sich $x_4 = 0$ und entsprechend $x_{3,2,1} = 0$. Somit ist

$$\ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Für $a = 5$ wird die vierte Zeile zu einer Nullzeile, d.h. das LGS ist unterbestimmt und x_4 kann beliebig sein. Setze daher $x_4 := \lambda$. Entsprechend der übrigen Gleichungen ergibt sich

$$x_3 + 14\lambda = 0 \Leftrightarrow x_3 = -14\lambda \quad (1)$$

$$x_2 + \frac{1}{2} \cdot (-14)\lambda = 0 \Leftrightarrow x_2 = 7\lambda \quad (2)$$

$$x_1 + \frac{7}{2}\lambda - 14\lambda + \frac{3}{2}\lambda \Leftrightarrow x_1 = 9\lambda \quad (3)$$

Der Kern bei $a = 5$ ist also

$$\ker(A) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ -14 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lösung 5b

Aufgabe 6

Stellen Sie zu folgenden Abbildungen die zugehörigen Abbildungsmatrizen auf.

- a) $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^3$, $f(p(x)) = \int_{C=0} p(x) \, dx$
- b) $g : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^2$, $g(p(x)) = p'(x)$.
- c) Können Sie den Wertebereich von f so einschränken, dass f bijektiv ist? Falls ja, wie lautet die Umkehrabbildung von f ?

Lösung 6a

Die Abbildung der Polynome maximal zweiten Grades auf ihre Stammfunktion aus den Polynomen maximal dritten Grades

$$f : \begin{cases} \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^3 \\ p(x) \mapsto \int_{C=0} p(x) \, dx \end{cases}$$

lässt sich ebenfalls als $f(p(x)) = A \cdot p(x)$ schreiben, mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Lösung 6b

Umgekehrt lässt sich

$$g : \begin{cases} \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^2 \\ p(x) \mapsto p'(x) \end{cases}$$

als $f(p(x)) = B \cdot p(x)$ mit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

schreiben.

Lösung 6c

Begrenzt man den Wertebereich der injektiven Abbildung f auf die Menge aller Polynome maximal vierten Grades ohne die Polynome vom Grad Null $\tilde{f} : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^3 \setminus \mathbb{P}^0$, so wird die Abbildung surjektiv und damit bijektiv.

Die Umkehrabbildung f^{-1} kann nun so angegeben werden:

$$f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{P}^3 \setminus \mathbb{P}^0 \rightarrow \mathbb{P}^2 \\ p(x) \mapsto p'(x) \end{cases}$$

Die Abbildungsmatrix braucht dabei ebenfalls nur invertiert zu werden.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7

Über eine lineare Abbildung f sei folgendes bekannt.

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Für welche Werte von α ist die Abbildungsmatrix A_f von f eindeutig bestimmt?
- Bestimmen Sie die Matrix A_f in Abhängigkeit von α .
- Bestimmen Sie den Kern und das Bild der Abbildung in Abhängigkeit von α .

Lösung 7

Wir betrachten die lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ mit $V \subseteq \mathbb{R}^3$ und $W \subseteq \mathbb{R}^2$.

Sei $\mathcal{B}_V = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}\right)$ eine Basis von V und $\mathcal{B}_W = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ eine Basis von W ...

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Wenn $\alpha = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

was passiert, wenn $\alpha \neq 1$ z.B. $\alpha = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

da $\det(A_f) = \alpha + 1$ und für $\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -1$ gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$