Aufgabe 1

Taylorpolynom 2. Grades um die Entwicklungspunkte (0,0) und (2,1).

$$f(x,y) = (x+2y)^2 - 3x \cdot y^2$$

Lösung 1

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= (x+2y)^2 - 3x \cdot y^2 \\
f_x(x,y) &= 2x + 4y - 3y^2 \\
f_{xx}(x,y) &= 2 \\
f_y(x,y) &= 4x + 8y - 6x \cdot y \\
f_{yy}(x,y) &= 8 - 6x \\
f_{xy}(x,y) &= 4 - 6y \\
&= f_{yx}(x,y)
\end{aligned}$$

Das Taylorpolynom 2. Ordnung um den Entwicklungspunkt (x_0, y_0) lautet:

$$\begin{aligned}
T(x,y) = {} & f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\
& + \frac{1}{2} f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + f_{xy}(x_0,y_0)(x-y_0)(y-y_0) + \frac{1}{2} f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2
\end{aligned}$$

Für den Entwicklungspunkt $(0,0)$

$$\begin{aligned}
T(x,y) &= f(0,0) + f_x(0,0)(x-0) + f_y(0,0)(y-0) \\
&\quad + \frac{1}{2} f_{xx}(0,0)(x-0)^2 + f_{xy}(0,0)(x-0)(y-0) + \frac{1}{2} f_{yy}(0,0)(y-0)^2 \\
&= x^2 + 4xy + 4 \cdot y^2
\end{aligned}$$

Für den Entwicklungspunkt $(2,1)$:

$$\begin{aligned}
T(x,y) &= 30 + 5(x-2) + 4(y-1) + (x-2)^2 - 2(x-1)(y-1) - 2(y-1)^2 \\
&= 30 + 5x - 10 + 4y - 4 + x^2 - 4x + 4 \\
&\quad - 2xy + 2x + 2y - 2 - 2y^2 + 4y - 2 \\
&= \boxed{x^2 + 3x - 2xy - 2y^2 + 10y + 16}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie alle relativen Extrema und Sattelpunkte der Funktionen

$$f(x,y) = x^2 \cdot y^2$$

Lösung 2

Bestimme ∇f

$$\begin{aligned}\nabla f &= \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x \cdot y^2 \\ 2x^2 \cdot y \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Wir setzten jede Zeile des Vektors ∇f null und lösen das Gleichungssystem. Wir erkennen leicht, dass nur $(x, y) = (0, 0)$ eine Lösung ist, also haben wir eine Extremstelle in $(0, 0)$.
Um zusätzlich die Art des Extremums zu bestimmen brauchen wir die Hesse-Matrix der Funktion, und dafür wiederum die zweiten partiellen Ableitung:

$$\begin{aligned}f_{xx} &= 2y^2 \\ f_{yy} &= 2x^2 \\ f_{xy} &= 4xy\end{aligned}$$

Dies fassen wir in der Hesse-Matrix zusammen:

$$\begin{aligned}H_f(x,y) &= \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Nun setzten wir die zuvor gefundene Extremstelle $(0, 0)$ in die Hesse-Matrix ein:

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Lösung 3

Aufgabe 4

Lösung 4

Aufgabe 5

Lösung 5