# Aufgabe 1

Berechnen Sie mittels Polarkoordinaten das uneigentliche mehrdimensionale Integral

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int\limits_{y=-\infty}^{\infty}\int\limits_{x=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

## Lösung 1

Uneigentliche Integrale können mithilfe von Polarkoordinaten wie folgt gelöst werden:

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\;\mathrm{d}y,x = \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\infty} f(r\cdot\cos\phi, r\cdot\sin\phi)\cdot r\;\mathrm{d}(r,\phi)$$

Es gilt also

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\;\mathrm{d}(x,y) &= \lim_{n\to\infty}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{n} \mathrm{e}^{-\left((r\cdot\cos\phi)^2+(r\cdot\sin\phi)^2\right)}\cdot r\;\mathrm{d}(r,\phi)\\
&= \lim_{n\to\infty}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{n} \mathrm{e}^{-r^2}\cdot r\;\mathrm{d}(r,\phi)\\
&= \lim_{n\to\infty}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{n} r\cdot\mathrm{e}^{u}\frac{1}{-2r}\;\mathrm{d}(u,\phi)\\
&= \lim_{n\to\infty}\int_{\phi=0}^{2\pi}\frac{-1}{2}\cdot\int_{r=0}^{n}\mathrm{e}^{u}\;\mathrm{d}(u,\phi)\\
&= \lim_{n\to\infty}\int_{\phi=0}^{2\pi}\frac{-1}{2}\cdot\left[\mathrm{e}^{-r^2}\right]_{r=0}^{n}\;\mathrm{d}\phi\\
&= \int_{\phi=0}^{2\pi}\frac{-1}{2}\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{-n^2}-1\right)\;\mathrm{d}\phi\\
&= \int_{\phi=0}^{2\pi}\frac{-1}{2}\cdot(-1)\;\mathrm{d}\phi\\
&= \int_{\phi=0}^{2\pi}\frac{1}{2}\;\mathrm{d}\phi\\
&= \left[\frac{1}{2}\phi\right]_{\phi=0}^{2\pi}\\
&= \pi
\end{aligned}$$

# Aufgabe 2

Berechnen Sie die folgenden Dreifachintegrale:

a) $\int\limits_{x=0}^{1}\int\limits_{y=0}^{1-x}\int\limits_{z=0}^{2-x} x \cdot y \cdot z \; dz \; dy \; dx$

b) $\int\limits_{\alpha=0}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{r=0}^{1}\int\limits_{z=0}^{2} z \cdot r^2 \cdot \sin(\alpha) \; dz \; dr \; d\alpha$

## Lösung 2a

$$\begin{aligned}
\int\limits_{x=0}^{1}\int\limits_{y=0}^{1-x}\int\limits_{z=0}^{2-x} x \cdot y \cdot z \,\mathrm{d}(z,y,x) &= \int\limits_{x=0}^{1}\int\limits_{y=0}^{1-x} \left[\frac{x \cdot y}{2} \cdot z^2\right]_{z=0}^{2-x} \mathrm{d}(y,x) \\
&= \int\limits_{x=0}^{1}\int\limits_{y=0}^{1-x} \frac{1}{2} \cdot x \cdot y \cdot (2-x)^2 \,\mathrm{d}(y,x) \\
&= \int\limits_{x=0}^{1} \left[\frac{1}{4} \cdot x \cdot (2-x)^2 \cdot y^2\right]_{y=0}^{1-x} \mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{4} \cdot x \cdot (2-x)^2 \cdot (1-x)^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{4}x^5 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{13}{4}x^3 - 3x^2 + x \,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{24}x^6 - \frac{3}{10}x^5 + \frac{13}{16}x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{24} - \frac{3}{10} + \frac{13}{16} - 1 + \frac{1}{2} \\
&= \frac{13}{240}
\end{aligned}$$

## Lösung 2b

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{1} \int_{z=0}^{2} z \cdot r^2 \cdot \sin(\alpha)\ \mathrm{d}(z,r,\alpha) &= \int_{\alpha=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{1} \left[\frac{1}{2} r^2 \cdot \sin(\alpha) \cdot z^2\right]_{z=0}^{2}\ \mathrm{d}(r,\alpha) \\
&= \int_{\alpha=0}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{6} r^3 \cdot \sin(\alpha) \cdot 4\right]_{r=0}^{1}\ \mathrm{d}\alpha \\
&= \int_{\alpha=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{4}{6} \sin(\alpha)\ \mathrm{d}\alpha \\
&= \left[-\frac{2}{3}\cos(\alpha)\right]_{\alpha=0}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\frac{2}{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{3}\cos(0) \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

# Aufgabe 3

Gegeben sei die Halbkugel

$$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 9,\ z \geq 0\}$$

mit der Dichte $\rho(x, y, z) = 1$.

a) Berechnen Sie die Masse der Halbkugel.

b) Berechnen Sie anschließend den Schwerpunkt der Halbkugel.

## Lösung 3a

Für das Rechnen mit Kugelkoordinaten, mit $\phi$ **auf** der $x$-$y$-Ebene und dem Winkel $\theta$ von der $z$-Achse auf die $x$-$y$-Ebene gilt:

$$\iiint f(x,y,z)\ \mathrm{d}(z,y,x) = \iiint f(r\cos\phi\sin\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\theta) \cdot |r^2 \sin\theta|\ \mathrm{d}(\theta,\phi,r)$$

Um die Halbkugel als Integral über das Gebiet $H$ der Funktion $\rho(x, y, z)$ zu beschreiben, überlegen wir uns die Orientierung der Halbkugel im Koordinatensystem und die Darstellung in Kugelkoordinaten.

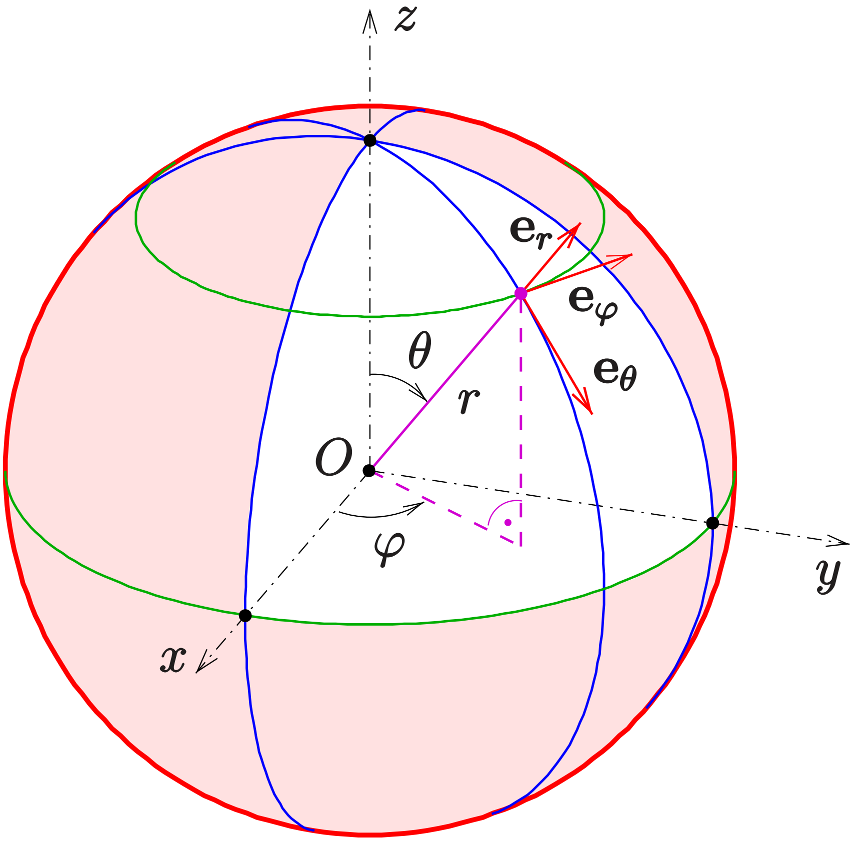


Abbildung 1: Kugelkoordinaten.CC-BY-SA by User:Ag2gaeh

Die Halbkugel liegt mit der flachen Seite auf der $x$-$y$-Ebene, entsprechend betrachten wir $\phi$ im Intervall $[0; 2\pi]$ und $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$.
Um den Betrag im Integral zu behandeln, teilen wir das Integral in die Summer zweier Integrale auf.

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_H \rho(x,y,z)\ \mathrm{d}H &= \int_{r=0}^{3}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} 1\cdot |r^2 \sin\theta|\ \mathrm{d}(\theta,\phi,r) \\
&= \int_{r=0}^{3}\int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\theta=0}^{2\pi} 1\cdot |r^2 \sin\theta|\ \mathrm{d}(\theta,\phi,r) \\
&= \int_{r=0}^{3}\int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\theta=0}^{\pi} r^2\sin\theta\ \mathrm{d}\theta + (-1)\cdot\int_{\theta=\pi}^{2\pi} r^2\sin\theta\ \mathrm{d}\theta\right)\ \mathrm{d}(\phi,r) \\
&= \int_{r=0}^{3}\int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\Big[-r^2\cos\theta\Big]_{\theta=0}^{\pi} + (-1)\cdot\Big[-r^2\cos\theta\Big]_{\theta=\pi}^{2\pi}\right)\ \mathrm{d}(\phi,r) \\
&= \int_{r=0}^{3}\int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}} \Big(\big(-r^2\cos(\pi)+r^2\cos(0)\big) - \big(-r^2\cos(2\pi)+r^2\cos(\pi)\big)\Big)\ \mathrm{d}(\phi,r) \\
&= \int_{r=0}^{3}\int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}} 4r^2\ \mathrm{d}(\phi,r) \\
&= \int_{r=0}^{3}\Big[4r^2\cdot\phi\Big]_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}}\ \mathrm{d}r \\
&= \int_{r=0}^{3} 2r^2\cdot\pi\ \mathrm{d}r \\
&= \left[\frac{2}{3}\pi r^3\right]_{r=0}^{3} \\
&= \frac{2}{3}\pi\cdot 3^3 \\
&= 18\pi
\end{aligned}$$

Zur Probe rechnen wir das Volumen einer Kugel mit dem Radius $r = 3$ aus $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi$, halbieren dies und erhalten ebenfalls $18\pi$.

## Lösung 3b

Aufgrund der Rotationssymmetrie um die $z$-Achse und der homogenität der Dichte ist klar, dass $x_s = y_s = 0$ sein muss.
Für $z_s$ gilt $z_s = \frac{3}{8}r = 9/8$.
Somit befindet sich der Schwerpunkt $S = (0, 0, 9/8)$.

# Aufgabe 4

Berechnen Sie den Schwerpunkt einer Fläche, die von den gegebenen Funktionen begrenzt wird

a) $x = y^2$ und $x = 1$

b) $x = y^4$ und $x = 1$

## Lösung 4a

Aufgrund der symmetrie der Parabel ist bekannt, dass $y_s = 0$ ist. Die Fläche $F$ erhalten wir mit $F = \int_{x=0}^{1} \int_{y=-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} 1 \, \mathrm{d}(y,x) = \frac{4}{3}$.
Für $x_s$ gilt

$$\begin{aligned}
x_s &= \frac{1}{F} \int_A x \, \mathrm{d}A \\
&= \frac{3}{4} \int_0^1 \int_{y=-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} x \, \mathrm{d}(y,x) \\
&= \frac{3}{4} \int_0^1 \left[ xy \right]_{y=-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{4} \int_0^1 x \cdot \sqrt{x} + x \cdot \sqrt{x} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{4} \int_0^1 2x^{\frac{3}{2}} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{4} \left[ \frac{4}{5} x^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 \\
&= \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \\
&= \frac{3}{5}.
\end{aligned}$$

Somit liegt der Schwerpunkt bei $(x_s, y_s) = \left(\frac{3}{5}, 0\right)$.

## Lösung 4b

Aufgrund der symmetrie des Polynoms vierter Ordnung ist bekannt, dass $y_s = 0$ ist. Die Fläche $F$ erhalten wir mit $F = \int_{x=0}^{1} \int_{y=-\sqrt[4]{x}}^{\sqrt[4]{x}} 1 \, \mathrm{d}(y,x) = \frac{8}{5}$.

Für $x_s$ gilt

$$\begin{aligned}
x_s &= \frac{1}{F}\int\limits_A x \,\mathrm{d}A \\
&= \frac{5}{8}\int\limits_0^1 \int\limits_{y=-\sqrt[4]{x}}^{\sqrt[4]{x}} x \,\mathrm{d}(y,x) \\
&= \frac{5}{8}\int\limits_0^1 \left[xy\right]_{y=-\sqrt[4]{x}}^{\sqrt[4]{x}} \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{5}{8}\int\limits_0^1 x\cdot\sqrt[4]{x} + x\cdot\sqrt[4]{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{5}{8}\int\limits_0^1 2x^{\frac{5}{4}} \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{5}{8}\left[\frac{8}{9}x^{\frac{9}{4}}\right]_0^1 \\
&= \frac{5}{8}\cdot\frac{8}{9} \\
&= \frac{5}{9}.
\end{aligned}$$

Somit liegt der Schwerpunkt bei $(x_s, y_s) = \left(\frac{5}{9}, 0\right)$.

# Aufgabe 5

Berechnen Sie das folgende Doppelintegral im Integrationsbereich $A$ mithilfe der Polarkoordinaten

$$\int\int\limits_A \sqrt{4-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\text{mit}\qquad A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2\le 4, y\ge |x|\right\}.$$

## Lösung 5

Das Gebiet ist ein Kreis vom Radius $r = 2$, welcher durch $y \geq x \wedge y \geq -x$ zu einem Viertelkreis beschnitten wird.

$$
\begin{aligned}
\int\int_A \sqrt{4-x^2-y^2}\ \mathrm{d}(x,y) &= \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi}\int_0^2 \sqrt{4-(r\cdot\cos\phi)^2-(r\cdot\sin\phi)^2}\cdot r\ \mathrm{d}(r,\phi) \\
&= \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi}\int_0^2 \sqrt{4-r^2\cdot(\cos^2\phi+\sin^2\phi)}\cdot r\ \mathrm{d}(r,\phi) \\
&= \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi}\int_0^2 \sqrt{4-r^2}\cdot r\ \mathrm{d}(r,\phi) \\
&= \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \left[-\frac{1}{3}\left(4-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2\ \mathrm{d}\phi \\
&= \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{1}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}}\ \mathrm{d}\phi \\
&= \left[\frac{8}{3}\phi\right]_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \\
&= \frac{8}{3}\cdot\frac{3}{4}\pi-\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{4}\pi \\
&= \frac{4}{3}\pi
\end{aligned}
$$