Aufgabe 5

Berechnen Sie jeweils die Inverse folgender Matrizen, falls diese existiert:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Lösung 5

Eine quadtratsiche Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn gilt: $\det(A) \neq 0$.

Lösung 5a

Aus $\det(A) = 2 + 12 + 6 - 9 - 4 - 4 = 3 \neq 0$ folgt, dass die Matrix invertierbar ist. Durch elementare Zeilenumformungen lässt sich A^{-1} wie folgt bestimmen:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -7 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 4 & -7 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Lösung 5b

Da $\det(B) = -4 + 3 - (-1) = 0$, ist die Matrix B nicht invertierbar.

Aufgabe 6

Gegeben sei die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie A^k für $k = 1 \dots 3$.

b) Stellen Sie eine Vermutung auf für A^n und beweisen Sie diese.

Lösung 6a

$$\begin{aligned}
A^1 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
A^2 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
A^3 &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Lösung 6b

Zu zeigen:

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^n - 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Induktionsanfang mit $n = 1$:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 2^1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^1 - 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

Induktionsvoraussetzung: Es sei

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^n - 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsbehauptung: Dann gilt für $n+1$ ebenso

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n+1}-1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned} A^{n+1} = A^n \times A &= \begin{pmatrix} 2^{n} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n}-1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n}\cdot 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ (2^{n}-1)\cdot 2+1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n+1}-2+1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n+1}-1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark \end{aligned}$$

Aufgabe 7

A sei eine 3×3-Matrix.

a) Welche Beziehung ($=, \neq, \subseteq, \subset, \supset, \supseteq$) besteht zwischen dem Kern von A und dem Kern von A^2 (und dem von A^3)?

b) Verifizieren Sie ihr Ergebnis aus (a) mit der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Lösung 7a

Der Kern einer Matrix A ist die Menge aller Vektoren $x \in \mathbb{R}^3$, die von A auf den Nullvektor abgebildet werden, d.h.

$$\ker(A) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \middle| Ax = 0 \right\}.$$

Für A^2 gilt entsprechend

$$\ker\left(A^2\right) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \middle| A^2 x = 0 \right\}.$$

Da Ax ein Vektor in $\mathbb{R}^3$ ist, bedeutet $Ax \in \ker(A)$, dass $A^2x = A(Ax) = 0$. Daher gilt

$$\begin{aligned}\ker\left(A^2\right) &= \left\{x \in \mathbb{R}^3 \middle| A(Ax) = 0\right\}\\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^3 \middle| Ax \in \ker(A)\right\}\\ &\supseteq \ker(A)\end{aligned}$$

Das bedeutet, dass $\ker(A^n) \subseteq \ker\left(A^{n+1}\right) \ \forall n \in \mathbb{N}_0$.

Lösung 7b

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen nun den Kern von A und A^2 bestimmen. Der Kern von A ist der Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = 0,\ x_3 = 0$$

Das bedeutet, dass der Kern von A durch den Vektor $(1,0,0)^T$ aufgespannt wird.
Der Kern von A^2 ist der Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems $A^2x = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_3 = 0$$

Das bedeutet, dass der Kern von A^2 durch die Vektoren $(1,0,0)^T$ und $(0,1,0)^T$ aufgespannt wird.
Wie erwartet ist der Kern von A ein Unterraum des Kerns von A^2.

Aufgabe 8

Die Spur einer quadratischen Matrix $A = (a_{ij})$ ist definiert durch

$$\mathrm{Spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}. \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass die Spur eine lineare Abbildung darstellt.

b) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = A^T$. Verifizieren Sie $\text{Spur}(AB) = \text{Spur}(BA)$.

c) Zeigen Sie, dass $\text{Spur}(AB) = \text{Spur}(BA)$, wobei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

d) Zeigen Sie, dass $\text{Spur}(A^T A) = 0$ genau dann, wenn $A = (0)$.

e) Man zeige weiter: $\text{Spur}(ABC) = \text{Spur}(BCA)$, aber i.a. $\text{Spur}(ABC) \neq \text{Spur}(BAC)$.

Lösung 8a

Die Abbildung

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R} \\ A \mapsto \text{Spur}(A) \end{cases}$$

ist genau dann lineare, wenn sie homogen und additiv ist.

Zeige Homogenität mit $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\text{Spur}(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot \text{Spur}(A)$$
$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda a_{ii} = \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \checkmark$$

Zeige Additivität mit $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

$$\text{Spur}(A + B) = \text{Spur}(B) + \text{Spur}(A)$$
$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}(a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} \checkmark$$

Lösung 8b

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$B \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Es ergibt sich somit für $\text{Spur}(A \times B) = 14 + 1 = 15$ und für $\text{Spur}(B \times A) = 1 + 5 + 9 = 15$.

Lösung 8c

Das Produkt der Matrizen $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ist von der Form $AB = C \in \mathbb{R}^{m \times m}$ bzw. $BA = D \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Nach Definition 4.56 gilt für die Koordinaten (c_{ik}) des Produkts der Matrizen A und B, sowie entsprechend für die Koordinaten (d_{ik})

$$\begin{aligned} c_{ik} &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \\ d_{ik} &= \sum_{j=1}^{m} b_{ij} a_{jk}. \end{aligned}$$

Aus der Definition der Spur 1 ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathrm{Spur}(C) &= \sum_{i=1}^{m} c_{ii} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji} \\ \mathrm{Spur}(D) &= \sum_{i=1}^{n} d_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_{ij} a_{ji}. \end{aligned}$$

Durch umordnung der Summenzeichen zeigt sich, dass die beiden Darstellung isomorph (gleich bis auf Umbenennung der Indizes i und j) zueinander sind.

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_{ij} a_{ji} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} b_{ij} a_{ji} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ji} b_{ij} \simeq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji}$$

Somit ist gezeigt, dass $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$. ✓

Lösung 8d

Für eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist bekannt, dass $A^T = (a_{ji}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$.
Für das Produkt $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $B = (b_{ik}) = A^T \times A$ gilt

$$b_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_{kj}.$$

Entsprechend der Definition der Spur 1 ergibt sich

$$\mathrm{Spur}(B) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2.$$

Es gilt $\mathrm{Spur}(A^T \times A) = 0$ genau dann wenn $a_{ij} = 0 \ \forall i \in [1; m], j \in [1; n]$. ✓

Lösung 8e

Durch Anwendung des Assoziativgesetzes der Matrixmultiplikation (Satz 4.59 Abs. 1) und der Kommutativität aus 8c lässt sich für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $BC \in \mathbb{R}^{n\times m}$ zeigen

$$\operatorname{Spur}(ABC) = \operatorname{Spur}\left(A(BC)\right) = \operatorname{Spur}\left((BC)A\right) = \operatorname{Spur}(BCA).$$