Aufgabe 5

Es sind folgende Abbildungsmatrizen gegeben:

$$A_\phi = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Durch Matrix A_ϕ wird ein Vektor im $\mathbb{R}^2$ um den Winkel ϕ gedreht, die Matrix B spiegelt selbigen an der x-Achse.

a) Veranschaulichen Sie die Behauptungen am Beispiel des Vektors $x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\phi = \frac{\pi}{2}$, wobei $A = A_{(\frac{\pi}{2})}$, in dem Sie den Vektor selber und dessen Abbildungen $f_A(x_0) = A \cdot x_0$ und $f_B(x_0) = B \cdot x_0$ in ein Koordinatensystem einzeichnen.

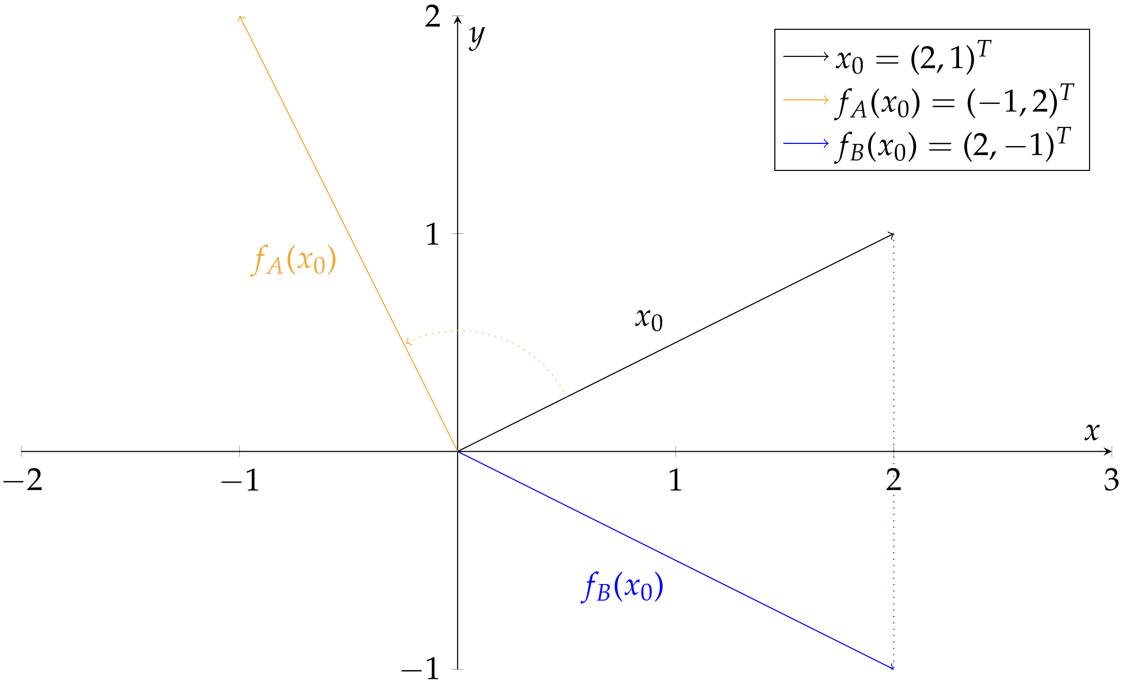
b) Zeichnen Sie auch die hintereinander geschalteten Abbildungen $f_{AB}(x_0) = A \cdot B \cdot x_0$ und $f_{BA}(x_0) = B \cdot A \cdot x_0$ von x_0.

c) Wie sehen die Umkehrabbildungen zu $f_A(X)$ und $f_B(x)$ aus? Stellen Sie dazu die Abbildungsmatrizen A^{-1} und B^{-1} auf.

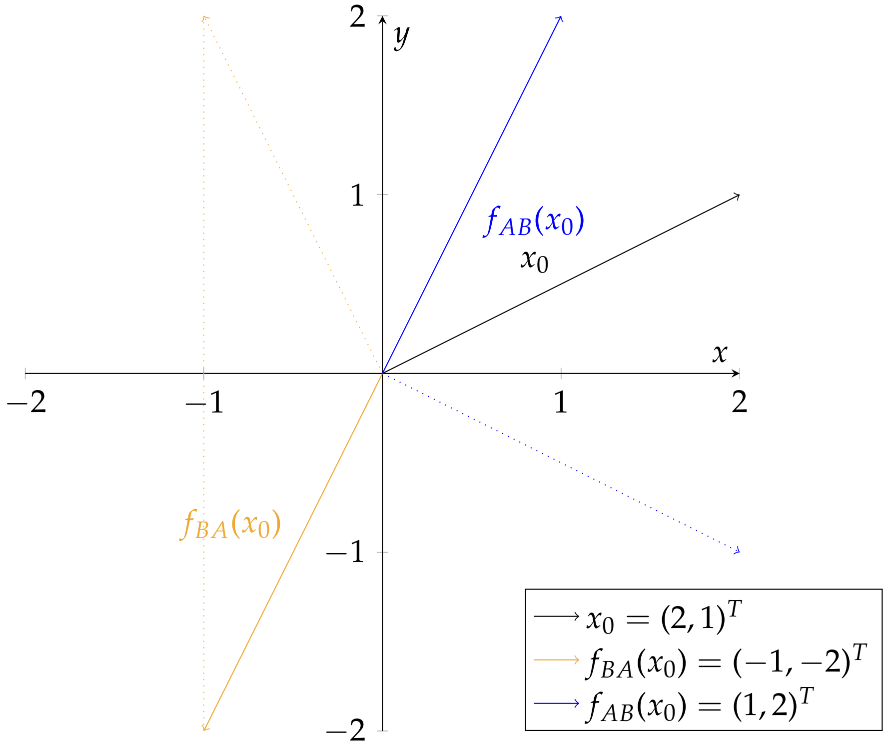
d) Bestimmen Sie die zugehörigen Abbildungsmatrizen zu den Umkehrabbildungen f_{AB}^{-1} und f_{BA}^{-1}.

e) Verifizieren Sie die Ergebnisse aus b) und d), indem Sie die Vektoren $f_{AB}(x_0)$ und $f_{BA}(x_0)$, die Sie zeichnerisch bei b) erhalten haben, mit den Matrizen aus d) multiplizieren.

Lösung 5a



Lösung 5b



Lösung 5c

Bestimmung der Inversen von A für $\cos(\phi) \neq 0$ und $\sin(\phi) \neq 0$, also $\phi \neq \pi \cdot n \wedge \phi \neq \pi \cdot n - \frac{\pi}{2} \ \forall\, n \in \mathbb{Z}$.

$$
\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{cc|cc} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 1 & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 & 1 \end{array}\right) \\
\rightsquigarrow &\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} & \cos^{-1}(\phi) & 0 \\ 1 & \frac{\cos(\phi)}{\sin(\phi)} & 0 & \sin^{-1}(\phi) \end{array}\right) \\
\rightsquigarrow &\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} & \cos^{-1}(\phi) & 0 \\ 0 & \frac{\cos(\phi)}{\sin(\phi)} - \frac{-\sin(\phi)}{\cos(\phi)} & -\cos^{-1}(\phi) & \sin^{-1}(\phi) \end{array}\right) \\
\rightsquigarrow &\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} & \cos^{-1}(\phi) & 0 \\ 0 & \frac{\cos^2(\phi)+\sin^2(\phi)}{\sin(\phi)\cdot\cos(\phi)} & -\frac{1}{\cos(\phi)} & \frac{1}{\sin(\phi)} \end{array}\right) \\
\rightsquigarrow &\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \cos^{-1}(\phi) - \frac{\sin^2(\phi)}{\cos(\phi)} & \sin(\phi) \\ 0 & 1 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{array}\right) \\
\rightsquigarrow &\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1-\sin^2(\phi)}{\cos(\phi)} & \sin(\phi) \\ 0 & 1 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{array}\right) \\
\rightsquigarrow &\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & 1 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

Für $\phi = \pi \cdot n$ gilt $\cos(\phi) = \pm 1 \wedge \sin(\phi) = 0$:

$$
\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{cc|cc} \cos(\phi) & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & 0 & 1 \end{array}\right) \\
\rightsquigarrow &\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \cos^{-1}(\phi) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cos^{-1}(\phi) \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

Für $\phi = \pi \cdot n - \frac{\pi}{2}$ gilt $\cos(\phi) = 0 \wedge \sin(\phi) = \pm 1$:

$$
\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -\sin(\phi) & 1 & 0 \\ \sin(\phi) & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
\rightsquigarrow &\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & -\sin^{-1}(\phi) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \sin^{-1}(\phi) \end{array}\right) \\
\rightsquigarrow &\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -2\sin^{-1}(\phi) & \sin^{-1}(\phi) \\ 0 & 1 & -\sin^{-1}(\phi) & 0 \end{array}\right) \\
\rightsquigarrow &\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & \sin^{-1}(\phi) \\ 0 & 1 & -\sin^{-1}(\phi) & 0 \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6

Ein Architekt plant, auf dem Dach eines Hauses eine Antenne anzubringen (siehe Skizze). Von seinem Bezugspunkt A aus gesehen soll sie senkrecht über der Stelle, die auf der Grundfläche des Hauses 5m nach rechts (x-Richtung) und 2m nach hinten (y-Richtung) liegt, auf dem Dach angebracht werden.

a) Berechnen Sie den Anfangspunkt der Antenne auf dem Dach vom Bezugspunkt A aus gesehen.

b) Der Dachdecker, der an dieser Stelle Dachziegel weglassen muss, nimmt als Bezugssystem die rechte untere Ecke des Daches B und als Basisvektoren die eingezeichneten Richtungsvektoren x' , y' und z' (der Länge 1). Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes C bzgl. seines Koordinatensystems.

c) Wie lauten die Koordinaten des Bezugspunktes A des Architekten im Koordinatensystem des Dachdeckers?

d) Wie muss die Transformation (Matrix und Verschiebungsvektor) aussehen, die einen beliebigen Punkt des Hauses aus dem Koordinatensystem des Dachdeckers in das des Architekten umrechnet? Überprüfen Sie ihr Ergebnis, indem Sie das Ergebnis von (b) in das Ergebnis von (a) umrechnen.

e) Wie muss die Transformation (Matrix und Verschiebungsvektor) aussehen, die einen beliebigen Punkt des Hauses aus dem Koordinatensystem des Architekten in das des Dachdeckers umrechnet?

Lösung 6