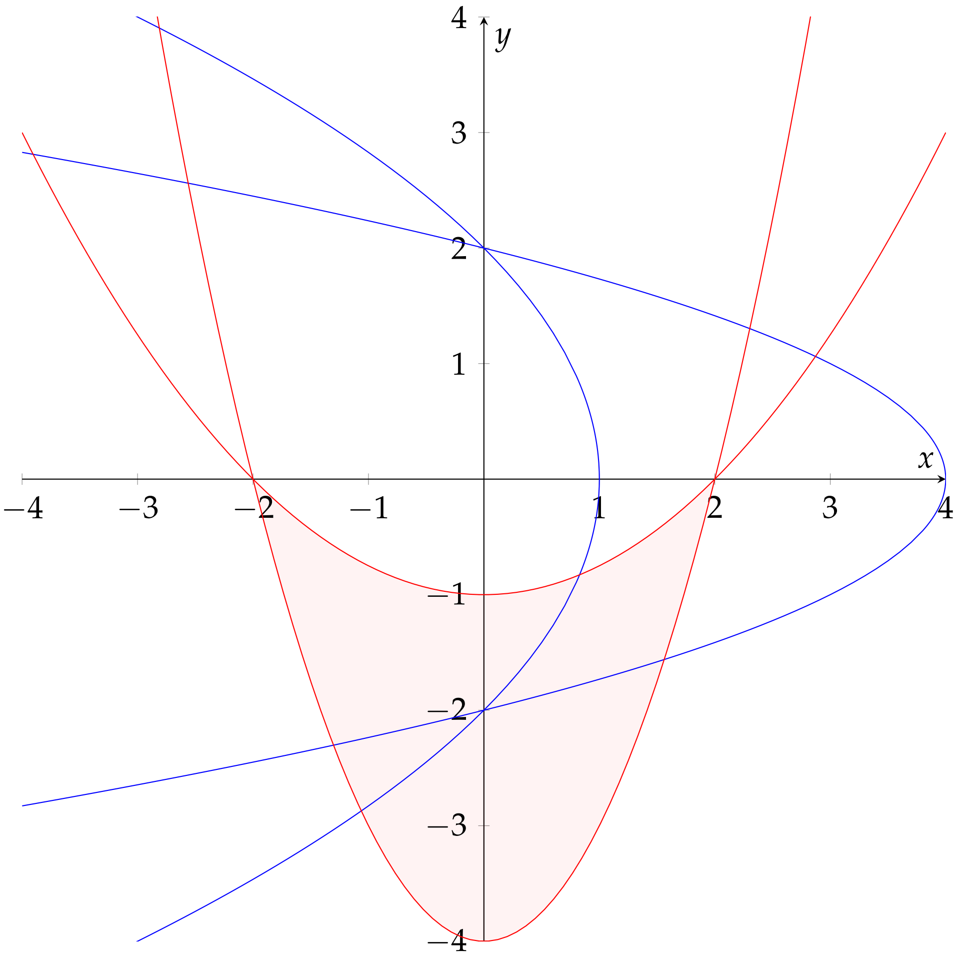
Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Fläche, die begrenzt ist durch die Parabeln

$$y^2 = 4 - x \qquad \text{und} \qquad y^2 = 4 - 4x$$

Lösung 1

Die beiden Parabeln in Blau, lassen sich durch Multiplikation mit einer Rotationsmatrix $D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ mit $\alpha = \frac{\pi}{2}$ um 90° rotieren (Parabeln in Rot).



Aus $D_{\frac{\pi}{2}} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ ergeben sich die Gleichungen

$$x^2 = 4 + x \Leftrightarrow y = x^2 - 4$$
$$x^2 = 4 + 4y \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x^2 - 1.$$

Die Fläche zwischen den blauen Graphen ist gleich der Fläche zwischen den roten Graphen.

$$\begin{aligned}
A &= \left|\int_{-2}^{2} x^2 - 4 \, \mathrm{d}x\right| - \left|\int_{-2}^{2} \frac{1}{4}x^2 - 1 \, \mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\left[\frac{1}{3}x^3 - 4x\right]_{-2}^{2}\right| - \left|\left[\frac{1}{12}x^3 - x\right]_{-2}^{2}\right| \\
&= \frac{32}{3} - \frac{8}{3} \\
&= 8
\end{aligned}$$

Zur Überprüfung vergleichen wir mit

$$\frac{1}{2}A = \int_0^4 \sqrt{4-x} \, \mathrm{d}x - \int_0^1 \sqrt{4-4x} \, \mathrm{d}x$$

und erhalt ebenfalls $A = 8$. ✓

Aufgabe 2

Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = 5 - \frac{5}{\pi^2}x^2 \qquad \text{und} \qquad g(x) = 4\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

a) Berechnen Sie die von den beiden Funktionen begrenzte Fläche.

b) Bestimmen Sie anschließend den Schwerpunkt der eingeschlossenen Fläche.

Hinweise: Die Schnittstellen der beiden Funktionen sind die Nullstellen. Nutzen Sie zur Berechnung der Fläche ggfls. die Symmetrie der Funktionen.

Lösung 2a

Berechne die Nullstellen der Funktionen.

$$\begin{aligned}
f(x) &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad 0 &= 5 - \tfrac{5}{\pi^2}x^2 \\
\Leftrightarrow \quad x_{1,2} &= \pm\pi
\end{aligned}$$

Der Flächeninhalt F einer Grundfläch A ergibt sich durch Integration mit $f(x,y) = 1$, also

$$\begin{aligned}
F &= \int_A 1 \, \mathrm{d}A \\
&= \int_{x=-\pi}^{\pi} \int_{y=g(x)}^{f(x)} 1 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{x=-\pi}^{\pi} \int_{y=4\cos\left(\frac{x}{2}\right)}^{5-\frac{5}{\pi^2}x^2} 1 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left(5 - \frac{5}{\pi^2}x^2\right) - \left(4\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) \, \mathrm{d}x \\
&= \left[5x - \frac{5}{\pi^2 \cdot 3}x^3 - 8\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \left(5\pi - \frac{5}{\pi^2 \cdot 3}\pi^3 - 8\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - \left(-5\pi + \frac{5}{\pi^2 \cdot 3}\pi^3 - 8\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right) \\
&= \frac{20}{3}\pi - 16
\end{aligned}$$

Lösung 2b

Der Schwerpunkt mit den Koordinaten (x_s, y_s) einer solchen Fläche mit homogener Dichte ergibt sich mit der zuvor berechneten Flächenmaßzahl F durch

$$x_s = \frac{1}{F}\int_A x \, \mathrm{d}A \quad \wedge \quad y_s = \frac{1}{F}\int_A y \, \mathrm{d}A.$$

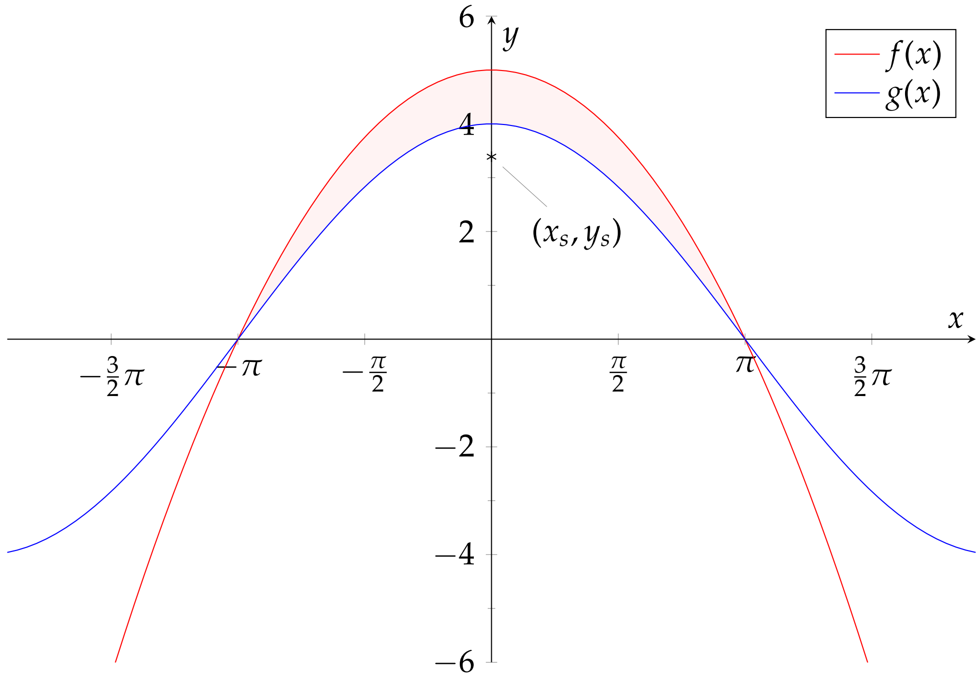
Für x_s also

$$\begin{aligned}
x_s &= \frac{1}{F}\int_A x \, \mathrm{d}A \\
&= \frac{1}{F}\int_{x=-\pi}^{\pi} \int_{y=g(x)}^{f(x)} x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{F}\int_{x=-\pi}^{\pi} x \int_{y=g(x)}^{f(x)} 1 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{F}\int_{x=-\pi}^{\pi} x \left(5 - \frac{5}{\pi^2}x^2 - 4\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{F}\left[\frac{5}{2}x^2 - \frac{5}{\pi^2 \cdot 4}x^4 - 8x\sin\left(\frac{x}{2}\right) - 16\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{x=-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{F}\left(\frac{5}{2}\pi^2 - \frac{5}{4}\pi^2 - 8\pi - \frac{5}{2}\pi^2 + \frac{5}{4}\pi^2 + 8\pi\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

und entsprechend für y_s

$$\begin{aligned}
y_s &= \frac{1}{F}\int_A y \, \mathrm{d}A \\
&= \frac{1}{F}\int_{x=-\pi}^{\pi}\int_{y=g(x)}^{f(x)} y \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{F}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{g(x)}^{f(x)} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{F}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left(5-\frac{5}{\pi^2}x^2\right)^2-\frac{1}{2}\left(4\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{F}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{5^2}{2}-\frac{5^2\cdot x^2}{\pi^2}+\frac{5^2\cdot x^4}{\pi^4\cdot 2}\right)-8\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{F}\int_{-\pi}^{\pi}5^2\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{\pi^2}+\frac{x^4}{2\pi^4}\right)-8\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{F}\left[5^2\cdot\left(\frac{1}{2}x-\frac{x^3}{3\pi^2}+\frac{x^5}{10\pi^4}\right)-4x+\sin(x)\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{F}\left(5^2\cdot\left(\frac{1}{2}\pi-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{10}\right)-4\pi\right)-\left(5^2\cdot\left(\frac{-\pi}{2}+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{10}\right)+4\pi\right) \\
&= \frac{1}{F}\left(5^2\pi\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}\right)-5^2\cdot\pi\left(\frac{-1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{10}\right)-8\pi\right) \\
&= \frac{1}{F}\left(5^2\pi\cdot\frac{8}{15}-8\pi\right) \\
&= \frac{1}{\frac{20}{3}\pi-16}\pi\cdot\frac{16}{3} \\
&= \frac{16\pi}{20\pi-48} \\
&= \frac{4\pi}{5\pi-12}
\end{aligned}$$

Damit befindet sich der Schwerpunkt der Koordinaten an der Stelle $(x_s, y_s) = \left(0, \frac{4\pi}{5\pi-12}\right)$.



Aufgabe 3

Berechnen Sie das Volumen unterhalb der Funktion

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$$

über das folgende Integrationsgebiet

$$G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\right\}.$$

Lösung 3

$$\begin{aligned}
V &= \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x} x^2 + y^2 + 1 \,\mathrm{d}(y,x) \\
&= \int_{x=0}^{1} \left[x^2 \cdot y + \frac{1}{3}y^3 + y\right]_0^x \,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{4}{3}x^3 + x \,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \\
&= \frac{5}{6}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Sei die Funktion $f(x,y) = x \cdot y$ sowie das Integrationsgebiet

$$G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 2,\ y \leq x^2\right\}$$

gegeben. Berechnen Sie das zugehörige Volumen.

Lösung 4

Wir formen das Integrationsgebiet G in geeigneter Weise um und erhalten somit

$$\begin{aligned} G &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 2, y \leq x^2\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 < x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\right\}. \end{aligned}$$

Entsprechend kann über das Gebiet wie folgt integriert werden:

$$\begin{aligned} F &= \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x^2} x \cdot y \, \mathrm{d}(y,x) \\ &= \int_0^1 \left[\frac{x}{2} y^2\right]_{y=0}^{x^2} \, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} x^5 \, \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{12} x^6\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Das Volumen der Funktion f im Gebiet G beträgt $\frac{1}{12}$ VE.

Aufgabe 5

Gegeben ist der Integrationsbereich

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4,\ x \leq 0,\ y \geq 0\right\}.$$

Berechnen Sie mit Hilfe der Polarkoordinaten

$$\int_A y \cdot (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}A.$$

Lösung 5

Durch umformen des Integrationsgebietes erhalten wir

$$\begin{aligned}A &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2+y^2 \leq 4,\ x \leq 0,\ y \geq 0\right\}\\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| -2 < x \leq 0,\ 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\right\}\\ \tilde{A} &= \left\{(r,\phi) \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 < r \leq 2,\ \frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \pi\right\}.\end{aligned}$$

Für die Umwandlung kartesischer Koordinaten (x,y) in Polarkoordinaten gilt

$$f(x,y) = f\left(r \cdot \cos(\phi), r \cdot \sin(\phi)\right) \quad \wedge \quad \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x = r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\phi.$$

Somit können wir das Integral berechnen.

$$\begin{aligned}\int_A y \cdot (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}A &= \int_{\tilde{A}} r \cdot \sin(\phi) \cdot \left(\left(r \cdot \cos(\phi)\right)^2 + \left(r \cdot \sin(\phi)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\phi\\ &= \int_{\tilde{A}} r \cdot \sin(\phi) \cdot \left(r^2 \cdot \left(\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)\right)\right)^{\frac{1}{2}} \cdot r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\phi\\ &= \int_{\tilde{A}} r \cdot \sin(\phi) \cdot \left(r^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\phi\\ &= \int_{\tilde{A}} r^3 \cdot \sin(\phi)\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\phi\\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^2 r^3 \cdot \sin(\phi)\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\phi\\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left[\frac{\sin(\phi)}{4} r^4\right]_0^2\ \mathrm{d}\phi\\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 4\sin(\phi)\ \mathrm{d}\phi\\ &= \left[-4\cos(\phi)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\\ &= -4\cos(\pi) + 4\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\\ &= 4\end{aligned}$$