Aufgabe 4

Durch welche der folgenden Funktionen werden Skalarprodukte auf $\mathbb{R}^2$ definiert?

a) $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1^2 + x_2 \cdot y_1 \cdot y_2$

b) $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = x_1 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2$

Lösung 4a

$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ definiert kein Skalarprodukt, da $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \neq (\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x})$:

$$x_1^2 + x_2 \cdot y_1 \cdot y_2 \neq y_1^2 + y_2 \cdot x_1 \cdot x_2$$

Lösung 4b

$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ definiert kein Skalarprodukt, die Bedingung 5 $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ verletzt ist:

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) &= x_1 \cdot x_1 + x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_1 + x_2 \cdot x_2 \\
&= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \\
&= (x_1 + x_2)^2 \\
(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) &\overset{\text{def}}{=} 0 \\
\Leftrightarrow \qquad 0 &= (x_1 + x_2)^2 \\
\Rightarrow \qquad x_1 &= -x_2 \ \vee \ x_2 = -x_1
\end{aligned}$$

$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ definiert kein Skalarprodukt, da z.B. für $\overrightarrow{a} = (1,1)^T$ mit $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) = 4 \neq 0$ gilt.