

Aufgabe 1

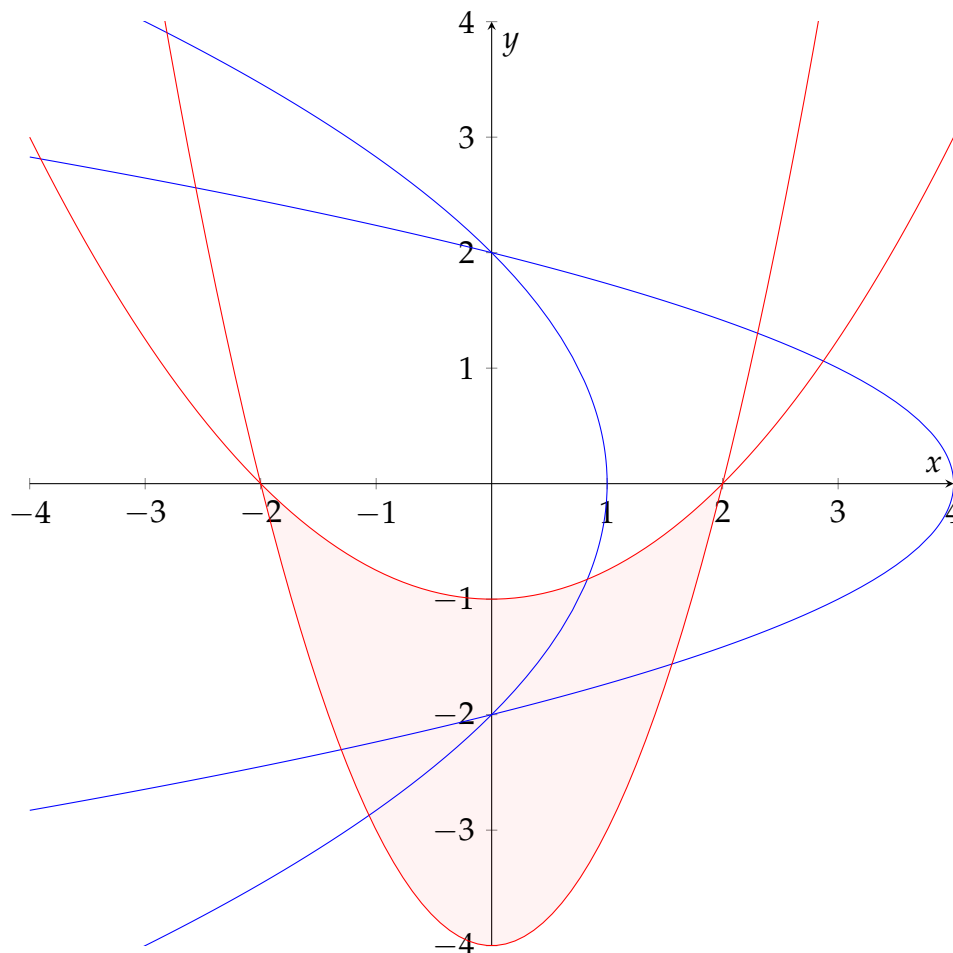
Bestimmen Sie die Fläche, die begrenzt ist durch die Parabeln

$$y^2 = 4 - x \quad \text{und} \quad y^2 = 4 - 4x$$

Lösung 1

Die beiden Parabeln in Blau, lassen sich durch Multiplikation mit einer Rotationsmatrix

$D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ mit $\alpha = \frac{\pi}{2}$ um 90° rotieren (Parabeln in Rot).



Aus $D_{\frac{\pi}{2}} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ ergeben sich die Gleichungen

$$x^2 = 4 + x \Leftrightarrow y = x^2 - 4$$

$$x^2 = 4 + 4y \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x^2 - 1.$$

Die Fläche zwischen den blauen Graphen ist gleich der Fläche zwischen den roten Graphen.

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{-2}^2 x^2 - 4 \, dx \right| - \left| \int_{-2}^2 \frac{1}{4}x^2 - 1 \, dx \right| \\ &= \left| \left[\frac{1}{3}x^3 - 4x \right]_{-2}^2 \right| - \left| \left[\frac{1}{12}x^3 - x \right]_{-2}^2 \right| \\ &= \frac{32}{3} - \frac{8}{3} \\ &= 8 \end{aligned}$$

Zur Überprüfung vergleichen wir mit

$$\frac{1}{2}A = \int_0^4 \sqrt{4-x} \, dx - \int_0^1 \sqrt{4-4x} \, dx$$

und erhält ebenfalls $A = 8$. ✓

Aufgabe 2

Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = 5 - \frac{5}{\pi^2}x^2 \quad \text{und} \quad g(x) = 4 \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

- a) Berechnen Sie die von den beiden Funktionen begrenzte Fläche.
- b) Bestimmen Sie anschließend den Schwerpunkt der eingeschlossenen Fläche.

Hinweise: Die Schnittstellen der beiden Funktionen sind die Nullstellen. Nutzen Sie zur Berechnung der Fläche ggfls. die Symmetrie der Funktionen.

Lösung 2a

Berechne die Nullstellen der Funktionen.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 0 &= 5 - \frac{5}{\pi^2}x^2 \\ \Leftrightarrow x_{1,2} &= \pm\pi \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt F einer Grundfläche A ergibt sich durch Integration mit $f(x,y) = 1$, also

$$\begin{aligned}
 F &= \int_A 1 \, dA \\
 &= \int_{x=-\pi}^{\pi} \int_{y=g(x)}^{f(x)} 1 \, dy \, dx \\
 &= \int_{x=-\pi}^{\pi} \int_{y=4\cos(\frac{x}{2})}^{5-\frac{5}{\pi^2}x^2} 1 \, dy \, dx \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(5 - \frac{5}{\pi^2}x^2 \right) - \left(4\cos\left(\frac{x}{2}\right) \right) dx \\
 &= \left[5x - \frac{5}{\pi^2 \cdot 3}x^3 - 8\sin\left(\frac{x}{2}\right) \right]_{-\pi}^{\pi} \\
 &= \left(5\pi - \frac{5}{\pi^2 \cdot 3}\pi^3 - 8\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) - \left(-5\pi + \frac{5}{\pi^2 \cdot 3}\pi^3 - 8\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) \right) \\
 &= \frac{20}{3}\pi - 16
 \end{aligned}$$

Lösung 2b

Der Schwerpunkt mit den Koordinaten (x_s, y_s) einer solchen Fläche mit homogener Dichte ergibt sich mit der zuvor berechneten Flächenmaßzahl F durch

$$x_s = \frac{1}{F} \int_A x \, dA \quad \wedge \quad y_s = \frac{1}{F} \int_A y \, dA.$$

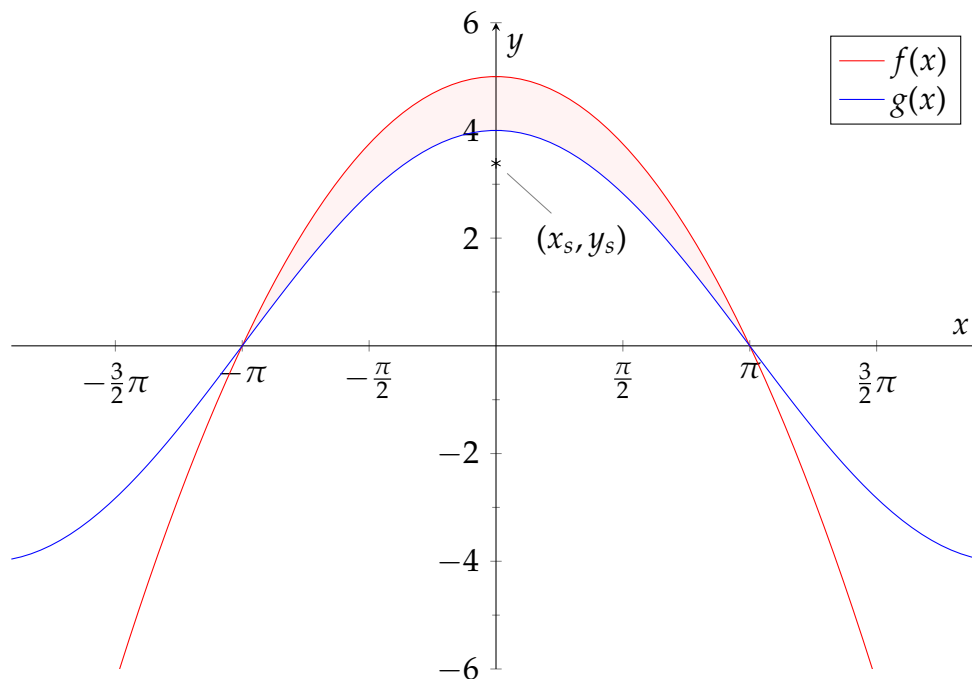
Für x_s also

$$\begin{aligned}
 x_s &= \frac{1}{F} \int_A x \, dA \\
 &= \frac{1}{F} \int_{x=-\pi}^{\pi} \int_{y=g(x)}^{f(x)} x \, dy \, dx \\
 &= \frac{1}{F} \int_{x=-\pi}^{\pi} x \int_{y=g(x)}^{f(x)} 1 \, dy \, dx \\
 &= \frac{1}{F} \int_{x=-\pi}^{\pi} x \left(5 - \frac{5}{\pi^2}x^2 - 4\cos\left(\frac{x}{2}\right) \right) dx \\
 &= \frac{1}{F} \left[\frac{5}{2}x^2 - \frac{5}{\pi^2 \cdot 4}x^4 - 8x\sin\left(\frac{x}{2}\right) - 16\cos\left(\frac{x}{2}\right) \right]_{x=-\pi}^{\pi} \\
 &= \frac{1}{F} \left(\frac{5}{2}\pi^2 - \frac{5}{4}\pi^2 - 8\pi - \frac{5}{2}\pi^2 + \frac{5}{4}\pi^2 + 8\pi \right) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

und entsprechend für y_s

$$\begin{aligned}
 y_s &= \frac{1}{F} \int_A y \, dA \\
 &= \frac{1}{F} \int_{x=-\pi}^{\pi} \int_{y=g(x)}^{f(x)} y \, dy \, dx \\
 &= \frac{1}{F} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{y^2}{2} \right]_{g(x)}^{f(x)} dx \\
 &= \frac{1}{F} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \left(5 - \frac{5}{\pi^2} x^2 \right)^2 - \frac{1}{2} \left(4 \cos \left(\frac{x}{2} \right) \right)^2 dx \\
 &= \frac{1}{F} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{5^2}{2} - \frac{5^2 \cdot x^2}{\pi^2} + \frac{5^2 \cdot x^4}{\pi^4 \cdot 2} \right) - 8 \cos^2 \left(\frac{x}{2} \right) dx \\
 &= \frac{1}{F} \int_{-\pi}^{\pi} 5^2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{\pi^2} + \frac{x^4}{2\pi^4} \right) - 8 \cos^2 \left(\frac{x}{2} \right) dx \\
 &= \frac{1}{F} \left[5^2 \cdot \left(\frac{1}{2} x - \frac{x^3}{3\pi^2} + \frac{x^5}{10\pi^4} \right) - 4x + \sin(x) \right]_{-\pi}^{\pi} \\
 &= \frac{1}{F} \left(5^2 \cdot \left(\frac{1}{2} \pi - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{10} \right) - 4\pi \right) - \left(5^2 \cdot \left(\frac{-\pi}{2} + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{10} \right) + 4\pi \right) \\
 &= \frac{1}{F} \left(5^2 \pi \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} \right) - 5^2 \cdot \pi \left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} \right) - 8\pi \right) \\
 &= \frac{1}{F} \left(5^2 \pi \cdot \frac{8}{15} - 8\pi \right) \\
 &= \frac{1}{\frac{20}{3}\pi - 16} \pi \cdot \frac{16}{3} \\
 &= \frac{16\pi}{20\pi - 48} \\
 &= \frac{4\pi}{5\pi - 12}
 \end{aligned}$$

Damit befindet sich der Schwerpunkt der Koordinaten an der Stelle $(x_s, y_s) = \left(0, \frac{4\pi}{5\pi-12} \right)$.



Aufgabe 3

Berechnen Sie das Volumen unterhalb der Funktion

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$$

über das folgende Integrationsgebiet

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}.$$

Lösung 3

$$\begin{aligned} V &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^x x^2 + y^2 + 1 \, d(y,x) \\ &= \int_{x=0}^1 \left[x^2 \cdot y + \frac{1}{3} y^3 + y \right]_0^x dx \\ &= \int_0^1 \frac{4}{3} x^3 + x \, dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^4 + \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

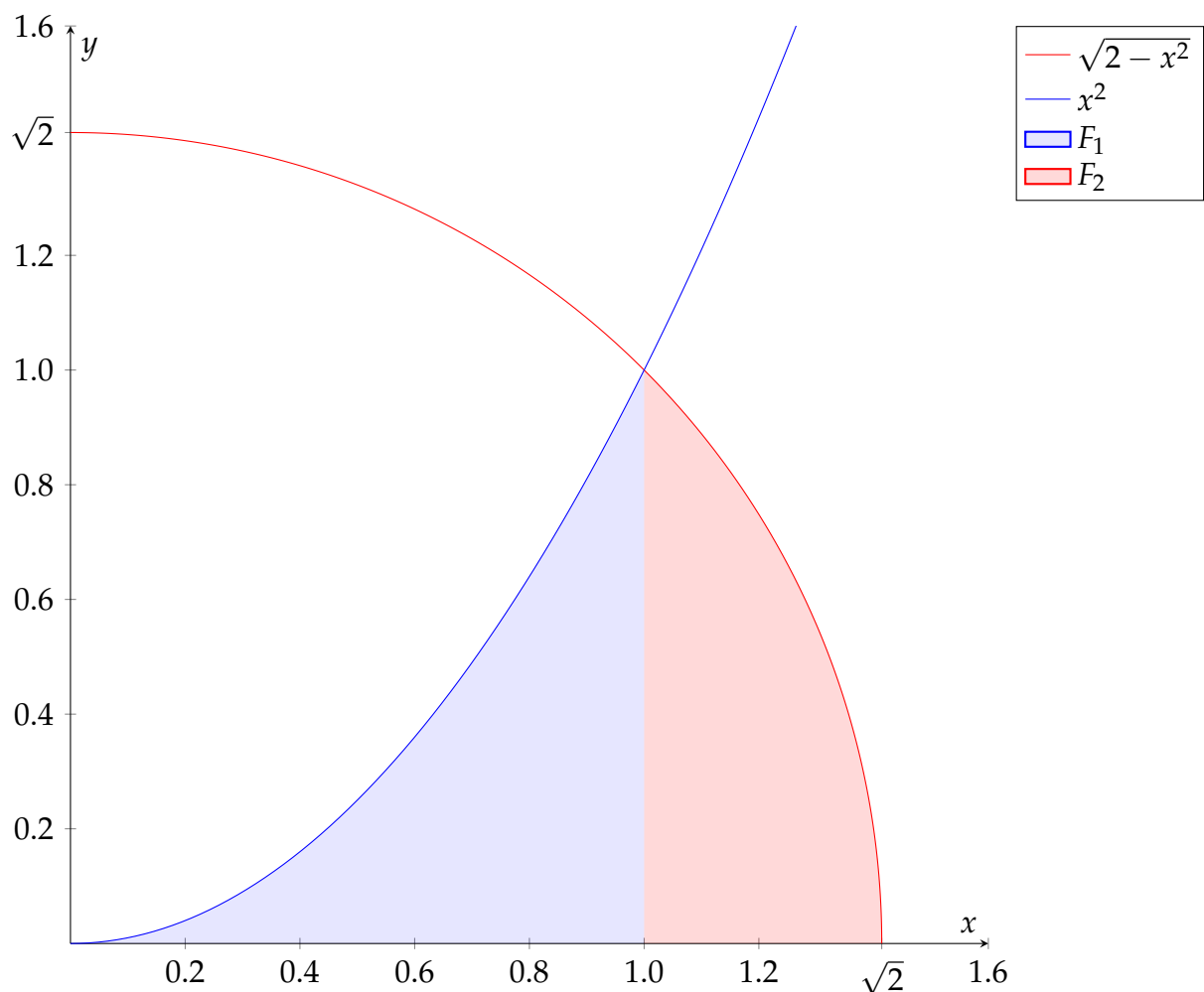
Aufgabe 4

Sei die Funktion $f(x,y) = x \cdot y$ sowie das Integrationsgebiet

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 2, y \leq x^2\}$$

gegeben. Berechnen Sie das zugehörige Volumen.

Lösung 4



Wir formen das Integrationsgebiet G in geeigneter Weise um und erhalten somit

$$\begin{aligned} G &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 2, y \leq x^2\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (0 < x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2) \wedge (1 < x < \sqrt{2}, 0 \leq y \leq \sqrt{2-x^2})\}. \end{aligned}$$

Entsprechend kann über das Gebiet F_1 wie folgt integriert werden:

$$\begin{aligned} F_1 &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{x^2} x \cdot y \, d(y,x) \\ &= \int_0^1 \left[\frac{x}{2} y^2 \right]_{y=0}^{x^2} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} x^5 dx \\ &= \left[\frac{1}{12} x^6 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Für F_2 gilt:

$$\begin{aligned} F_2 &= \int_{x=1}^{\sqrt{2}} \int_{y=0}^{\sqrt{2-x^2}} x \cdot y \, d(y,x) \\ &= \int_{x=1}^{\sqrt{2}} \left[\frac{x}{2} y^2 \right]_{y=0}^{\sqrt{2-x^2}} dx \\ &= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{x}{2} \cdot (2 - x^2) dx \\ &= \int_1^{\sqrt{2}} x - \frac{x^3}{2} dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} \right]_1^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{2}{2} - \frac{4}{8} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Das Volumen der Funktion f im Gebiet G beträgt somit $F = F_1 + F_2 = \frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{5}{24}$ VE.

Aufgabe 5

Gegeben ist der Integrationsbereich

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0, y \geq 0\}.$$

Berechnen Sie mit Hilfe der Polarkoordinaten

$$\int_A y \cdot (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} dA.$$

Lösung 5

Durch umformen des Integrationsgebietes erhalten wir

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0, y \geq 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 < x \leq 0, 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\} \\ \tilde{A} &= \{(r, \phi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < r \leq 2, \frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \pi\}. \end{aligned}$$

Für die Umwandlung kartesischer Koordinaten (x, y) in Polarkoordinaten gilt

$$f(x, y) = f(r \cdot \cos(\phi), r \cdot \sin(\phi)) \quad \wedge \quad dy \, dx = r \, dr \, d\phi.$$

Somit können wir das Integral berechnen.

$$\begin{aligned} \int_A y \cdot (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \, dA &= \int_{\tilde{A}} r \cdot \sin(\phi) \cdot \left((r \cdot \cos(\phi))^2 + (r \cdot \sin(\phi))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot r \, dr \, d\phi \\ &= \int_{\tilde{A}} r \cdot \sin(\phi) \cdot \left(r^2 \cdot (\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot r \, dr \, d\phi \\ &= \int_{\tilde{A}} r \cdot \sin(\phi) \cdot (r^2)^{\frac{1}{2}} \cdot r \, dr \, d\phi \\ &= \int_{\tilde{A}} r^3 \cdot \sin(\phi) \, dr \, d\phi \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^2 r^3 \cdot \sin(\phi) \, dr \, d\phi \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left[\frac{\sin(\phi)}{4} r^4 \right]_0^2 \, d\phi \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 4 \sin(\phi) \, d\phi \\ &= [-4 \cos(\phi)]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &= -4 \cos(\pi) + 4 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 4 \end{aligned}$$