Aufgabe 1

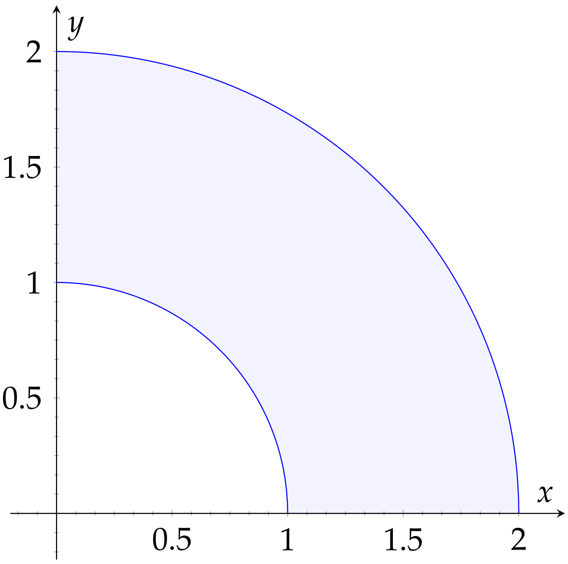
Wir betrachten den Bereich

$$B = \{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

a) Skizzieren Sie B.

b) Über diesen Bereich wird die Funktion $f(x,y) = (x^2+y^2)^2$ integriert. Wie groß ist das Integral?

Lösung 1



$$\begin{aligned}
\int_0^2 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_0^2 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (x^2+y^2)^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} x^4 + 2x^2y^2 + y^4\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 \left[x^4y + \frac{2}{3}x^2y^3 + \frac{y^5}{5}\right]_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 x^4\sqrt{4-x^2} + \frac{2}{3}x^2(\sqrt{4-x^2})^3 + \frac{(\sqrt{4-x^2})^5}{5} - x^4\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{3}x^2(\sqrt{1-}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Gegeben sei eine Halbkugel mit dem Radius R, deren Schnittfläche in einem kartesischen Koordinatensystem auf der xy-Ebene liegt. Berechnen Sie den Schwerpunkt dieser Halbkugel.

Lösung 2

Für das Rechnen mit Kugelkoordinaten, mit ϕ **auf** der x-y-Ebene und dem Winkel θ von der z-Achse auf die x-y-Ebene gilt:

$$\iiint f(x,y,z)\ \mathrm{d}(z,y,x) = \iiint f(r\cos\phi\sin\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\theta)\cdot|r^2\sin\theta|\ \mathrm{d}(\theta,\phi,r)$$

Wir integrieren über das Gebiet

$$H = \left\{r \in [0;R] \wedge \theta \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right] \wedge \phi \in [0;2\pi]\right\}.$$

Die x_S und y_S Koordinaten des Schwerpunkts liegen im Mittelpunkt der Kugel, also im Koordinatenursprung.
Für die Koordinate in Richtung der z-Achse gilt:

$$z_S = \frac{\iiint\limits_H z\ \mathrm{d}(z,y,x)}{\iiint\limits_H 1\ \mathrm{d}(z,y,x)}$$

Wir berechnen den Zähler.

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_H z\ \mathrm{d}(z,y,x) &= \int_{r=0}^{R}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} r\cdot\cos\theta\cdot\left|r^2\sin\theta\right|\ \mathrm{d}(\theta,\phi,r)\\
&= \int_{r=0}^{R}\int_{\phi=0}^{2\pi}\left[\frac{r^3}{2}\cdot\sin(\theta)\cdot|\sin(\theta)|\right]_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\ \mathrm{d}(\phi,r)\\
&= \int_{r=0}^{R}\int_{\phi=0}^{2\pi}\frac{r^3}{2}\ \mathrm{d}(\phi,r)\\
&= \int_{r=0}^{R}\left[\frac{r^3}{2}\phi\right]_{\phi=0}^{2\pi}\ \mathrm{d}r\\
&= \int_{r=0}^{R} r^3\cdot\pi\ \mathrm{d}r\\
&= \left[\frac{r^4}{4}\cdot\pi\right]_{r=0}^{R}\\
&= \frac{1}{4}R^4\cdot\pi
\end{aligned}$$

Wir berechnen den Nenner:

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_H 1 \, \mathrm{d}(z,y,x) &= \int_{r=0}^{R} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot \left| r^2 \sin\theta \right| \, \mathrm{d}(\theta,\phi,r) \\
&= \int_{r=0}^{R} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cdot \sin\theta \, \mathrm{d}(\theta,\phi,r) \\
&= \int_{r=0}^{R} \int_{\phi=0}^{2\pi} \left[-r^2 \cdot \cos\theta \right]_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \, \mathrm{d}(\phi,r) \\
&= \int_{r=0}^{R} \int_{\phi=0}^{2\pi} r^2 \, \mathrm{d}(\phi,r) \\
&= \int_{r=0}^{R} \left[r^2 \cdot \phi \right]_{\phi=0}^{2\pi} \, \mathrm{d}r \\
&= \int_{r=0}^{R} r^2 \cdot 2\pi \, \mathrm{d}r \\
&= \left[\frac{2}{3} r^3 \cdot \pi \right]_{r=0}^{R} \\
&= \frac{2}{3} R^3 \cdot \pi
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir für

$$\begin{aligned}
z_S &= \frac{\iiint\limits_H z \, \mathrm{d}(z,y,x)}{\iiint\limits_H 1 \, \mathrm{d}(z,y,x)} \\
&= \frac{\frac{1}{4} R^{\cancel{4}} \cdot \cancel{\pi}}{\frac{2}{3} \cancel{R^3} \cdot \cancel{\pi}} \\
&= \frac{3}{8} R.
\end{aligned}$$

Der Schwerpunkt der Halbkugel $S = (x_S|y_S|z_S)$ liegt also bei $\left(0\middle|0\middle|\frac{3}{8}R\right)$.

Aufgabe 3

Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche B, die im 1. Quadranten liegt und durch die Funktionen

$$y^2 = x^3 \qquad \text{und} \qquad y = x$$

begrenzt wird.

Lösung 3

Wir berechnen die Schnittpunkte der Funktionen.

$$\begin{aligned}
x^3 &= x^2 \\
\Leftrightarrow \quad x &= 1 \vee x = 0
\end{aligned}$$

Sodann integrieren wir in dem Intervall $[0;1]$, wobei wir die Funktion $y = x$ von der Funktion $y^2 = x^3$ abziehen.

$$\begin{aligned}\int_0^1 x - \sqrt{x^3}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{2}{5} \\ &= \frac{1}{10}\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Der Graph von $y = \sin(x)$ beschreibt eine Kurve K in der x-y-Ebene:

$$\overrightarrow{X}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sin(t) \end{pmatrix} \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Man berechne das Kurvenintegral $\int_K \overrightarrow{v}\ d\overrightarrow{X}$ für $\overrightarrow{v}(x,y) = \begin{pmatrix} y \cdot \cos(x) + y \\ \sin(x) + x + 2 \end{pmatrix}$ mit Hilfe einer Potentialfunktion (im Falle der Existenz).

Lösung 4

Potenzialfunktion existiert, da

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v_1}}{\mathrm{d}y} = \cos(x) + 1 = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v_2}}{\mathrm{d}x}$$

Bestimmung der Potenzialfunktion:

$$\begin{aligned} V(x,y) &= \int \overrightarrow{v_1}dx \\ &= y \cdot \sin(x) + xy + c(y) \\ \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y} &= \sin(x) + x + c'(y) \\ &= \overrightarrow{v_2} = sin(x) + x + 2 \\ \Rightarrow \qquad c'(y) &= 2 \\ \Rightarrow \qquad c(y) &= 2y + c \\ \Rightarrow \qquad V &= y \cdot \sin(x) + xy + 2y + c \end{aligned}$$

Bestimmung des Anfangs- und Endpunktes:

$$\begin{aligned} A &= \overrightarrow{X}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ E &= \overrightarrow{X}\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} \pi/2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Einsetzen in $\int_K \overrightarrow{v}\,\mathrm{d}\overrightarrow{X} = V(E) - V(A)$:

$$\begin{aligned}\int_K \overrightarrow{v}\,\mathrm{d}\overrightarrow{X} &= V\left(\tfrac{\pi}{2},1\right) - V(0,0)\\ &= 1 + \tfrac{\pi}{2} + 2\\ &= \tfrac{6+\pi}{2}\end{aligned}$$

Aufgabe 5

Gegeben sei das Vektorfeld/ Kraftfeld

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + 2x \cdot y - y^2 \\ x^2 - 2x \cdot y - y^2 \end{pmatrix}$$

a) Überprüfen Sie, ob Kurvenintegrale in $\overrightarrow{F}$ wegunabhängig sind.

b) Ermitteln Sie gegebenenfalls eine Potentialfunktion.

c) Berechnen Sie die Arbeit zwischen den Punkten $A = (0,1)$ zu $E = (1,0)$ über die Potentialfunktion oder als Wert des Kurvenintegrals über ein Geradenstück von A nach E.

Lösung 5a

Ein Gradientenfeld ist konservativ, wenn es eine Funktion $f(x,y) : D \to \mathbb{R}$ gibt, mit der $F = \nabla f$.
Wir bestimmen ∇f und prüfen die Integrabilitätsbedingung:

$$\begin{aligned}\nabla f &= \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}\\ \frac{\partial \overrightarrow{f_x}}{\partial y} &= 2x - 2y\\ \frac{\partial \overrightarrow{f_y}}{\partial x} &= 2x - 2y\end{aligned}$$

Die Integrabilitätsbedingung ist erfüllt und das Vektorfeld damit konservativ, also Kurvenintegrale wegunabhängig.

Lösung 5b

$$
\begin{aligned}
V(x,y) &= \int \overrightarrow{F_1}\,\mathrm{d}x \\
&= \tfrac{1}{3}x^3 + x^2y - xy^2 + c(y) \\
\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y} &= x^2 - 2xy + c'(y) \\
= \overrightarrow{F_2} &= x^2 - 2xy - y^2 \\
\Rightarrow \quad c'(y) &= -y^2 \\
\Rightarrow \quad c(y) &= -\tfrac{1}{3}y^3 + c \\
\Rightarrow \quad V(x,y) &= \tfrac{1}{3}x^3 + x^2y - xy^2 - \tfrac{1}{3}y^3 + c
\end{aligned}
$$

Lösung 5c

$$
\begin{aligned}
W &= V(E) - V(A) \\
&= V(1,0) - V(0,1) \\
&= \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3} \\
&= 0
\end{aligned}
$$