Aufgabe 6

Welche der folgenden Abbildungen von $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sind linear? Geben Sie ggf. die zugehörige Matrix an. Bestimmen Sie jeweils den Kern (auch für die nicht-linearen Abbildungen).

a) $f_1(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ -x_1 \\ 5x_1 - 7x_2 \end{pmatrix}$

b) $f_2(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 - 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Lösung 6a

Lösung 6b

Aufgabe 7

Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Der Ausdruck λx kann als lineare Abbildung interpretiert werden:

a) $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : x \mapsto \lambda x$

b) $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^n : \lambda \mapsto \lambda x$

Wie lauten in jedem Fall die Matrizen der zugehörigen Abbildungen? Im Fall a) kann damit die Multiplikation eines Vektors mit einem Faktor als Matrixmultiplikation interpretiert werden.

Lösung 7a

Lösung 7b

Aufgabe 8

Gegeben sei die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_3, 4x_2)$.

a) Zeigen Sie, dass f linear ist.

b) Bestimmen Sie den $\ker(f)$ und geben Sie die $\dim(\ker(f))$ an.

c) Berechnen Sie die $\dim(\text{Bild}(f))$ bzw. $\text{rang}(f)$ und bestimmen Sie das $\text{Bild}(f)$.

d) Ist die Abbildung f injektiv oder surjektiv?

Lösung 8a

Additivität:

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 - 2x_3, 4x_2) \\
f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) &= (x_1 + y_1 - 2(x_3 + y_3), 4(x_2 + y_2)) \\
f(x_1, x_2, x_3) + f(y_1, y_2, y_3) &= (x_1 - 2x_3, 4x_2) + (y_1 - 2y_3, 4y_2) \\
&= (x_1 - 2x_3 + y_1 - 2y_3, 4x_2 + 4y_2) \\
&= (x_1 + y_1 - 2(x_3 + y_3), 4(x_2 + y_2)) \\
\Rightarrow \quad f(x_1, x_2, x_3) + f(y_1, y_2, y_3) &= f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \checkmark
\end{aligned}$$

Homogenität:

$$\begin{aligned}
f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) &= (\lambda \cdot x_1 - 2 \cdot \lambda \cdot x_3, 4 \cdot \lambda \cdot x_2) \\
&= (\lambda \cdot (x_1 - 2 \cdot x_3), 4 \cdot \lambda \cdot x_2) \\
\lambda f(x_1, x_2, x_3) &= \lambda \cdot (x_1 - 2x_3, 4x_2) \\
&= (\lambda \cdot (x_1 - 2x_3), 4 \cdot \lambda \cdot x_2) \\
\Rightarrow \qquad f(\lambda x_1, \lambda x_2) &= \lambda f(x_1, x_2) \checkmark
\end{aligned}$$

Die Abbildung ist linear.

Lösung 8b

Lösung 8c

Lösung 8d