Aufgabe 1

Gegeben seien die folgenden Differentialgleichungen 2. Ordnung.

a) $y'' - 6y' + 8y = -24 - 56x + 48x^2$

b) $y'' + 2y' = 8 + 36x$

Bestimmen Sie deren Lösung $y(x)$.

Lösung 1a

Die lineare inhomogene DGL 2. Ordnung ist in expliziter Form angegeben. Wir bestimmen homogene Lösung der DGL

$$y_h'' - 6y_h' + 8y_h = 0$$

und verwenden dazu den folgenden Ansatz:

$$\begin{aligned} y_h(x) &= \mathrm{e}^{\lambda x} \\ y_h'(x) &= \lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} \\ y_h''(x) &= \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} \end{aligned}$$

Damit lässt sich λ bestimmen.

$$\begin{aligned} & y_h'' - 6y_h' + 8y_h &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} - 6\lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} + 8\mathrm{e}^{\lambda x} &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda^2 - 6\lambda + 8 &= 0 \\ \Rightarrow \quad & \lambda_1 = 4 \ \wedge \ \lambda_2 = 2 \end{aligned}$$

$0 = \lambda^2 - 6\lambda + 8$ wird auch als *charakteristische Gleichung* bezeichnet.
Da wir zwei mögliche Lösungen für λ erhalten, lautet die Lösung

$$y_h(x) = c_1\mathrm{e}^{4x} + c_2\mathrm{e}^{2x}.$$

Die partikuläre Lösung bestimmen wir mit dem Ansatz vom Typ der rechten Seite für die Störfunktion $g(x) = -24 - 56x + 48x^2$

$$\begin{aligned} y_p(x) &= c_0 + c_1x + c_2x^2 \\ y_p'(x) &= c_1 + 2c_2x \\ y_p''(x) &= 2c_2 \end{aligned}$$

und setzten in die linke Seite ein:

$$\begin{aligned} & y_p''(x) - 6y_p'(x) + 8y_p(x) &= -24 - 56x + 48x^2 \\ \Leftrightarrow \quad & 2c_2 - 6\left(c_1 + 2c_2x\right) + 8\left(c_0 + c_1x + c_2x^2\right) &= -24 - 56x + 48x^2 \\ \Leftrightarrow \quad & (2c_2 - 6c_1 + 8c_0) - x\left(12c_2 - 8c_1\right) + 8c_2x^2 &= -24 - 56x + 48x^2 \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich zeigt, dass $c_2 = 6$, $c_1 = 2$, $c_0 = -3$. Somit erhalten wir

$$y_p(x) = -3 + 2x + 6x^2$$

und mit $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^{2x} + c_2\mathrm{e}^{4x} + 6x^2 + 2x - 3$$

Lösung 1b

Die lineare inhomogene DGL 2. Ordnung ist in expliziter Form angegeben. Wir bestimmen die homogene Lösung der DGL mit dem gleichen Ansatz wie zuvor. Die charakteristische Gleichung lautet $\lambda^2 + 2\lambda = 0$, die Lösungen sind $\lambda_1 = 0 \wedge \lambda_2 = -2$ und somit erhalten wir

$$y_h(x) = c_1\mathrm{e}^{-2x} + c_2.$$

Die partikuläre Lösung lässt sich mit gleichem Ansatz wie in 1a) durch einsetzen in die DGL so bestimmen:

$$\begin{aligned} & y_p''(x) + 2y_p'(x) &= 8 + 36x \\ \Leftrightarrow \quad & 2c_2 + 2\cdot(c_1 + 2c_2x) &= 8 + 36x \\ \Leftrightarrow \quad & (2c_2 + 2c_1) + 4c_2x &= 8 + 36x \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich zeigt, dass $c_2 = 9$, $c_1 = -5$. Somit erhalten wir

$$y_p(x) = c_0 - 5x + 9x^2.$$

Wir fassen $c_2 + c_0 := c$ zusammen wir erhalten die allgemeine Lösung der DGL.

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^{-2x} + c + 9x^2 - 5x$$

Aufgabe 2

Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem

$$y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^x \qquad y(0) = 3, \quad y'(0) = 4$$

Lösung 2

Es handelt sich um eine lineare inhomogene DGL 2. Ordnung in expliziter Form. Bestimme die homogene Lösung mit dem Ansatz

$$\begin{aligned} y_h(x) &= \mathrm{e}^{\lambda x} \\ y_h'(x) &= \lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} \\ y_h''(x) &= \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} \end{aligned}$$

zur charakteristischen Gleichung

$$\begin{aligned} y_h'' - 3y_h' + 2y_h &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} - 3\lambda \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} + 2\mathrm{e}^{\lambda x} &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 3\lambda + 2 &= 0 \end{aligned}$$

welche die Lösungen $\lambda_1 = 2 \wedge \lambda_2 = 1$ hat.

$$y_h(x) = c_1 \mathrm{e}^{2x} + c_2 \mathrm{e}^x$$

Für die partikuläre Lösung wähle Ansatz vom Typ der rechten Seite mit

$$y_p(x) =$$

$$y(x) = \mathrm{e}^x \cdot \left(-x + 2\mathrm{e}^x + 1\right)$$

Aufgabe 3

Lösen Sie die gegebenen Differentialgleichungen 2. Ordnung

a) $y'' + 4y' = -16 + 8x$

b) $y'' + 4y' + 13y = -100\mathrm{e}^{2x}$

c) $y'' + 24y = 84\sin(2x) + 152\cos(2x)$

Lösung 3a

$$y(x) = c_1 \mathrm{e}^{-4x} + c_2 + x^2 - \frac{9x}{2}$$

Lösung 3b

$$y(x) = c_1 e^{-2x} \sin(3x) + c_2 e^{-2x} \cos(3x) - 4e^{2x}$$

Lösung 3c

$$y(x) = c_2 \sin(2\sqrt{6}x) + c_1 \cos(2\sqrt{6}x) + \frac{21}{5} \sin(2x) + \frac{38}{5} \cos(2x)$$

Aufgabe 4

Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem mithilfe von Bernoulli

$$y^3 - x^2 + x \cdot y^2 \cdot y' = 0, \qquad y(1) = 1$$

Lösung 4

Es handelt sich um eine nicht-lineare inhomogene DGL 1. Ordnung in impliziter Form.

$$y(x) = \frac{\sqrt[3]{3x^5 + 1}}{\sqrt[3]{5} \cdot x}$$

Aufgabe 5

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen

$$y' + 8y = 21 - 18x - 5e^{-8x} + 40 \cos(2x) + 24 \sin(2x) + 24x^2$$

Lösung 5

Es handelt sich um eine lineare inhomogene DGL 1. Ordnung in expliziter Form.

$$y(x) = c_1 e^{-8x} + 3x^2 - 5e^{-8x}x - 3x + 4 \sin(2x) + 4 \cos(2x) + 3$$