Aufgabe 5

Der Konzern MATSE Chemicals stellt seine Umsätze aus den Sparten Kunststoffe, Petrochemie und Organische Chemie mit Hilfe des Vektors $x = (x_K, x_P, x_O)^T$ dar. Der Vektor $y = (y_E, y_A)^T$ gibt die Einnahmen und Ausgaben des Gesamtkonzern in M€ wieder und berechnet sich nach derzeitigem Stand wie folgt:

- Die Einnahmen ergeben sich als Summe der Umsätze der einzelnen Sparten.
- Die Ausgaben belaufen sich auf 95% der Umsätze aus dem Kunststoffbereich plus 90% der Umsätze aus dem Bereich Petrochemie plus 85% der Umsätze aus dem Bereich der Organischen Chemie.

a) Stellen Sie den Vektor y als Lineare Abbildung des Vektors x dar, indem Sie die zugehörige Abbildungsmatrix M_y^x aufstellen.

Die Sparte Petrochemie soll nun aufgelöst werden und zu 80% in die Sparte Kunststoffe sowie 20% in Organische Chemie eingegliedert werden.

b) Stellen Sie die Umsätze $x' = (x'_K, x'_O)^T$ der Sparten Kunststoffe und Organische Chemie nach Umgliederung des Konzerns allgemein dar, indem Sie die Transformationsmatrix $T_{x'}^x$ für die Transformation von x nach x' berechnen.

c) Begründen Sie inhaltlich sowie mathematisch, warum Sie die Abbildungsmatrix $M_y^{x'}$ zur Bestimmung der Einnahmen und Ausgaben nach der neuen Konzernstruktur nicht allgemein aufstellen können.

d) Geben Sie ein sinnvolles Beispiel an, wie $M_y^{x'}$ aussehen könnte.

Lösung 5a

Die Abbildungsmatrix M_y^x muss von der Form $\mathbb{R}^{2\times 3}$ sein, um die Gleichung $M_y^x \cdot x = y$ zu erfüllen. Aus Satz 1 lässt sich ableiten, dass die erste Zeile nur Einsen enthalten soll. Aus Satz 2 lässt sich die zweite Zeile ablesen. Wir erhalten somit:

$$M_y^x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0{,}95 & 0{,}9 & 0{,}85 \end{pmatrix}$$

Lösung 5b

Die Transformationsmatrix $T_{x'}^x$ muss von der Form $\mathbb{R}^{2\times 3}$ sein, um die Gleichung $T_{x'}^x \cdot x = x'$ zu erfüllen. Dabei soll $x' = \begin{pmatrix} x_K + 0{,}8x_P \\ x_O + 0{,}2x_P \end{pmatrix}$ gelten. Entsprechend ergibt sich:

$$T_{x'}^x = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung 5c

Aus den gegebenen Informationen lässt sich eine Abbildungsmatrix $M_y^{x'}$ nicht eindeutig aufstellen, da eine Abbildung $x'(x_P) \to y$ abhängig von x_P wäre.

Ohne zu wissen, wie hoch der absolute Umsatz aus dem Bereich der Petrochemie vor der Umstrukturierung war, lässt sich nicht sagen, wie die Auflösung der Sparte sich auf die relativen Umsätze der anderen Geschäftsbereiche auswirken wird.

Lösung 5d

Kunststoffbereich mit dem Geld von der Petrochemie einfach hochskalieren kann und dann immer noch Ausgaben i.H.v. 95% seiner Umsätze macht
Sicher ist, dass eine solche Abbildungsmatrix $M_y^{x'}$ von der Form $\mathbb{R}^{2\times 2}$ sein muss und weiterhin nur Einsen in der ersten Zeile enthalten darf.

Betriebswirtschaftlich kann man nun zwei Szenarien unterscheiden. Das eine Szenario besteht darin, dass eine völlständige Auflösung des Geschäftsbereiches Petrochemie erfolgt und die Bereiche Kunststoff und Organische Chemie ihre Produktion ohne Verzögerung hochskalieren können und daruch, unter Vernachlässigung von Skaleneffekten (*economies of scale*), also unter Annahe einer gleichbleibenden Umsatz-Ausgaben-Relation, weiterhin Ausgaben in Höhe von 95% respektive 85% ihrer Umsätze haben. Eine solche Abbildungsmatrix würde dann so aussehen:

$$M_y^{x'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}95 & 0{,}85 \end{pmatrix}$$

Das andere Szenario wäre eine Umstrukturierung verwaltungstechnischer Art, also keine Veränderung der tatsächlichen Produktion, sondern lediglich eine andere Zuordnung der Umsätze und Ausgaben. Für diesen Fall kann jedoch keine eindeutige Abbildungsmatrix erstellt werden, da nicht bekannt ist wie groß die Umsätze der Petrochemie im Verhältnis zu den anderen Geschäftsbereichen war.

Aufgabe 6

Welche der folgenden Matrizen sind Elementarmatrizen? Geben Sie die Zeilenoperationen an, die einer Multiplikation von links mit den folgenden Matrizen entsprechen.

$$a)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \qquad b)\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad c)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad d)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung 6

Die Matrizen a, c und d sind Elementarmatrizen.

Matrix a entspricht der Elementarmatirx $C1$ mit $\lambda_{2,1} = -5$ und bewirkt die Addition des (-5)-fachen der ersten zur zweiten Zeile.

Bei Matrix b handelt es sich nicht um eine Elementarmatirx.

Matrix c entspricht der Elementarmatirx $C3$ mit $\lambda_{2,2} = \sqrt{3}$ und bewirkt die Multiplikation der zweiten Zeile mit dem Faktor $\sqrt{3}$.

Matrix d entspricht der Elementarmatirx $C2$ mit $i = 1, j = 3$ und bewirkt die Vertauschung der ersten mit der letzten Zeile.

Aufgabe 7

Es sei $S(x)$ eine Spiegelung an der Ebene $\langle n, x \rangle = 0$ mit $\|n\| = 1$.
Dann gilt $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, S(x) = x - 2\langle x, n \rangle n$.

a) Bezüglich der Einheitsmatrix im Definitions- und Wertebereich, zeigen Sie: $S(x) = M \cdot x$ mit $M = E - 2 \cdot n \cdot n^T$. E bezeichnet die Einheitsmatrix.

b) Bestimmen Sie für $n = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T$ die zu M inverse Matrix M^{-1}.

c) Bestimmen Sie die Matirx B^{-1}, mit welcher Koordinaten bezüglich der Standardbasis in Koordinaten bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ umgerechnet werden.

d) Bestimmen Sie nun die Matrix M^{-1} bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ im Definitions- und Wertebereich.

Lösung 7a

Es gilt $n \in \mathbb{R}^3$ und $S(x) = x - 2 \cdot (x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3) \cdot n$. Durch ausmultiplizieren ergibt sich:

$$\begin{aligned}
S(x) &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} (x_1n_1 + x_2n_2 + x_3n_3) \cdot n_1 \\ (x_1n_1 + x_2n_2 + x_3n_3) \cdot n_2 \\ (x_1n_1 + x_2n_2 + x_3n_3) \cdot n_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} x_1n_1n_1 + x_2n_2n_1 + x_3n_3n_1 \\ x_1n_1n_2 + x_2n_2n_2 + x_3n_3n_2 \\ x_1n_1n_3 + x_2n_2n_3 + x_3n_3n_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} x_1n_1^2 + x_2n_2n_1 + x_3n_3n_1 \\ x_1n_1n_2 + x_2n_2^2 + x_3n_3n_2 \\ x_1n_1n_3 + x_2n_2n_3 + x_3n_3^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Für die Abbildungsmatrix M mit $M = E - 2 \cdot n \cdot n^T$ ergibt sich Schrittweise

$$\begin{aligned}
n \cdot n^T &= \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} n_1^2 & n_1n_2 & n_1n_3 \\ n_2n_1 & n_2^2 & n_2n_3 \\ n_3n_1 & n_3n_2 & n_3^2 \end{pmatrix} \\
M = E - 2 \cdot n \cdot n^T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} n_1^2 & n_1n_2 & n_1n_3 \\ n_2n_1 & n_2^2 & n_2n_3 \\ n_3n_1 & n_3n_2 & n_3^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1-2n_1^2 & -2n_1n_2 & -2n_1n_3 \\ -2n_2n_1 & 1-2n_2^2 & -2n_2n_3 \\ -2n_3n_1 & -2n_3n_2 & 1-2n_3^2 \end{pmatrix} \\
S(x) = M \cdot x &= \begin{pmatrix} 1-2n_1^2 & -2n_1n_2 & -2n_1n_3 \\ -2n_2n_1 & 1-2n_2^2 & -2n_2n_3 \\ -2n_3n_1 & -2n_3n_2 & 1-2n_3^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (1-2n_1^2)x_1 - 2n_1n_2x_2 - 2n_1n_3x_3 \\ -2n_2n_1x_1 + (1-2n_2^2)x_2 - 2n_2n_3x_3 \\ -2n_3n_1x_1 - 2n_3n_2x_2 + (1-2n_3^2)x_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2n_1^2x_1 - 2n_1n_2x_2 - 2n_1n_3x_3 \\ -2n_2n_1x_1 - 2n_2^2x_2 - 2n_2n_3x_3 \\ -2n_3n_1x_1 - 2n_3n_2x_2 - 2n_3^2x_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} n_1^2x_1 + n_1n_2x_2 + n_1n_3x_3 \\ n_2n_1x_1 + n_2^2x_2 + n_2n_3x_3 \\ n_3n_1x_1 + n_3n_2x_2 + n_3^2x_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

wodruch gezeigt ist, dass $S(x) = M \cdot x = x - 2\langle x,n \rangle n$. ✓

Lösung 7b

Für $n = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$ ist nach dem zuvor gezeigten

$$\begin{aligned} M &= E - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= E - \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Diese Matrix ist ihre eigene Inverse, es gilt: $M = M^{-1}$.

Lösung 7c

Mit der Standardbasis $A = \mathcal{E}$ gilt:

$$T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = B^{-1}A.$$

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ \rightsquigarrow & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}\right) \\ \rightsquigarrow & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -1/2 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}\right) \\ \rightsquigarrow & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}\right) \\ \Rightarrow B^{-1} = & \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lösung 7d

Aus Satz 4.81 ergibt sich, dass $M^{-1} = B^{-1}M^{-1}B$, also

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-2n_1^2 & -2n_1n_2 & -2n_1n_3 \\ -2n_2n_1 & 1-2n_2^2 & -2n_2n_3 \\ -2n_3n_1 & -2n_3n_2 & 1-2n_3^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{-2n_2^2-2n_3^2+1}{-2n_1^2-2n_2^2-2n_3^2+1} & \frac{-n_1n_2}{-2n_1^2-2n_2^2-2n_3^2+1} & 0 \\ 0 & \frac{-2n_1^2-2n_3^2+1}{-2n_1^2-2n_2^2-2n_3^2+1} & \frac{-4n_2n_3}{3(-2n_1^2-2n_2^2-2n_3^2+1)} \\ 0 & 0 & \frac{-2n_1^2-2n_2^2+1}{-2n_1^2-2n_2^2-2n_3^2+1} \end{pmatrix}$$

Für $n = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$ wie in 7b würde sich die folgende Matrix M_n^{-1} ergeben:

$$M_n^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4/3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$