Aufgabe 4

Die Abbildung f_A dreht einen Vektor im $\mathbb{R}^3$ innerhalb der x-z-Ebene um einen Winkel ϕ. Die Abbildung f_B spiegelt einen Vektor im $\mathbb{R}^3$ an der x-Achse.

a) Stellen Sie die zugehörigen Abbildungsmatrizen A und B auf.

b) Stellen Sie die zugehörige Abbildungsmatrix der hintereinander geschalteten Abbildungen $f_B \circ f_A$ auf.

c) Bestimmen Sie auch die zugehörige Abbildungsmatrix der Umkehrabbildung $(f_B \circ f_A)^{-1}$.

Lösung 4

a)

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix} \\ B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f_B \circ f_A &= B \cdot A \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ 0 & -1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & -\cos\phi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c) Da die Vektoren der Abbildungsmatrix von $f_B \circ f_A$ eine Orthonormalbasis bilden, liegt somit eine Orthogonalmatrix vor, die zu ihrer Hauptdiagonalen symmetrisch ist und somit ist sie ihre eigene Inverse, also gilt $f_B \circ f_A = (f_B \circ f_A)^{-1}$

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass die Matrix

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta & -\sin\alpha \\ \sin\alpha\sin\beta & \sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

eine Orthogonalmatrix ist und bestimmen Sie ihre Inverse.

Lösung 5

Die Vektoren der Matrix müssen eine Orthonormalbasis bilden, d.h. die Skalarprodukte aller Vektoren müssen 0 sein und die Normen der Vektoren sind 1.

$$\begin{aligned}
\left\langle \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\sin\beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\beta \\ \cos\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta \end{pmatrix} \right\rangle &= -\cos\beta\sin\beta + \cos^2\alpha\sin\beta\cos\beta + \sin^2\alpha\sin\beta\cos\beta \\
&= -\sin\beta\cos\beta + \sin\beta\cos\beta \\
&= 0 \\
\left\langle \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\sin\beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} \right\rangle &= -\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\alpha \\
&= 0 \\
\left\langle \begin{pmatrix} -\sin\beta \\ \cos\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} \right\rangle &= -\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\cos\alpha\cos\beta \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\| \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\sin\beta \end{pmatrix} \right\| &= \sqrt{\cos^2\beta + \cos^2\alpha\sin^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta} \\
&= \sqrt{\sin^2\beta + \cos^2\beta} \\
&= 1 \\
\left\| \begin{pmatrix} -\sin\beta \\ \cos\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta \end{pmatrix} \right\| &= \sqrt{\sin^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta \ + \sin^2\alpha\cos^2\beta} \\
&= \sqrt{\sin^2\beta + \cos^2\beta} \\
&= 1 \\
\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\alpha \\ \cos\beta \end{pmatrix} \right\| &= \sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Somit ist Q eine Orthogonalmatrix und die Inverse ist $Q^{-1} = Q^T$:

$$\begin{pmatrix} \cos\beta & \cos\alpha\sin\beta & \sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta & \sin\alpha\cos\beta \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6

Eine Lineare Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ hat bzgl. der kanonischen Basen E die Abbildungsmatrix

$$F_E^E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Stellen Sie die Transformationsmatrizen auf, die Vektoren der Basis

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \\ -1/3 \\ 0 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \\ 2/3 \\ 0 \\ -1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1/3 \\ 2/3 \\ 0 \\ 2/3 \end{pmatrix} \right\}$$

bzw.

$$Z = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

in die kanonische Basis transformiert.

b) Bestimmen Sie ohne aufwendige Rechnung die Transformationsmatrizen, die Vektoren aus der kanonischen Basis in die Basis D bzw. Z transformiert.

c) Beschreiben Sie, wie man die Abbildungsmatrix F_Z^D zu Φ bzgl. der Basen D und Z berechnen kann.

Lösung 6

a)

$$T_E^D = A_D = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2/3 & 2/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & -1/3 & 2/3 & 0 & 2/3 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2/3 & -1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$T_E^Z = A_Z = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$T_D^E = (A_D)^{-1} = (A_D)^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2/3 & 2/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & -1/3 & 2/3 & 0 & -1/3 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1/3 & 2/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$T_Z^E = (A_Z)^{-1} = (A_Z)^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{aligned} F_Z^D &= T_Z^E \cdot F_E^E \cdot T_E^D \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5/\sqrt{6} & 7/(3\sqrt{3}) & -2/(3\sqrt{3}) & -\sqrt{3/2} & -8/(3\sqrt{3}) \\ -1/(2\sqrt{3}) & (2\sqrt{2/3})/3 & -(7\sqrt{2/3})/3 & -\sqrt{3}/2 & -11/(3\sqrt{6}) \\ -1/2 & 2\sqrt{2} & 0 & 1/2 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$