Extremwertprobleme mit Nebenbedingung

Lagrange-Multiplikator

Extremstellen von Funktionen mit mehreren Veränderlichen

1. Partielle Ableitungen bilden
2. $\nabla f = \vec{0}$ setzen
3. F_y nach y umstellen und in F_x einsetzen
4. Neue Gleichung 0 setzen und mögliche x Stellen bestimmen
5. y Koordinaten mit nach y umgestellte Gleichung bestimmen.
6. Hesse Matrix aufstellen
7. Punkte jeweils in Hesse-Matrix einsetzen und Definitheit bestimmen

positiv definit => Tiefpunkt
negativ definit => Hochpunkt
indefinit => Sattelpunkt
Bei einer $\mathbb{R}^{2\times 2}$ Hessematrix: $D_2 < 0$ -> indefinit.
Wenn $D_2 > 0$, D_1 bestimmen: Wenn $D_1 > 0$ positiv, wenn $D_1 < 0$ negativ.

Berechne für jeden Kandidaten (x_0, y_0) die Werte $f_{xx}(x_0, y_0)$, $f_{xy}(x_0, y_0)$ und $f_{yy}(x_0, y_0)$ und daraus den Wert

$$d := f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - \left(f_{xy}(x_0, y_0)\right)^2$$

Dann gilt: $f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \;\wedge\; d > 0 \implies$ *lokales Minimum*
$f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \;\wedge\; d > 0 \implies$ *lokales Maximum*
$d < 0 \implies$ *Sattelpunkt*
$d = 0 \implies$ höhere Ableitung entscheidet

Hesse-Matrix

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

Stetigkeit

Ggf. in Polarkoordinaten umwandeln und prüfen, ob ein *winkelunabhängiger* Grenzwert existiert.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} f(r\cdot\cos\varphi, r\cdot\sin\varphi)$$

Ggf. lohnt auch eine Betrachtung entlang der Achsen, bspw. bei $x-y$ im Zähler.

Taylorentwicklung

Sei $\Delta x = (x-x_0)$, $\Delta y = (y-y_0)$ und $(x_0, y_0) = \vec{\chi}$

$$T_1(x,y) = f(\vec{\chi}) + f_x(\vec{\chi})\cdot\Delta x + f_y(\vec{\chi})\cdot\Delta y$$

$$T_2(x,y) = T_1(x,y) + \frac{f_{xx}(\vec{\chi})\cdot\Delta x^2}{2} + f_{xy}(\vec{\chi})\cdot\Delta x\cdot\Delta y + \frac{f_{yy}(\vec{\chi})\cdot\Delta y^2}{2}$$

Vektorfelder

Rotation

$$\operatorname{rot}(\vec{v}) = \nabla\times\vec{v} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \vec{v}$$

Wirbelfrei wenn $\operatorname{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$.

Divergenz

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \langle\nabla,\vec{v}\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}, \vec{v} \right\rangle$$

Punkte mit $\operatorname{div} f > 0$ heißen Quellen, $\operatorname{div} f < 0$ heißen Senken des Vektorfeldes. Quellenfrei wenn $\operatorname{div} f = 0$.

Potenzialfunktion

Prüfe ob $\operatorname{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$.

Tangentialebenen, Richtungsableitungen

Gradient

$$\text{grad}\left(f(x,y)\right) = \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix}$$

Rechenregeln: $f, g : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \nabla(f+g) &= \nabla(f) + \nabla(g) \\ \nabla(\alpha g) &= \alpha \cdot \nabla(f) \\ \nabla(f \cdot g) &= g \cdot \nabla(f) + f \cdot \nabla(g) \end{aligned}$$

Tangentialebene

$$\begin{aligned} T(x,y) &= f(x_0,y_0) + \left\langle \nabla f(x_0,y_0), (\vec{X} - \vec{X}_0) \right\rangle \\ &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0,y_0) \cdot (y - y_0) \end{aligned}$$

$$T(x,y) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0,y_0) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0,y_0) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

Richtungsableitung

$$D_{\vec{v}}\left(f\left(x_0,y_0\right)\right) = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \langle \nabla f, \vec{v} \rangle \quad \text{mit} \quad \|\vec{v}\| = 1$$

Normieren

$$\vec{v} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$$

Richtung des steilsten Anstiegs/Abstiegs

$$\vec{v}_{\text{max}} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \qquad \vec{v}_{\text{min}} = -\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$$

Steigung gleich Null

Orthogonal zur Richtung des Gradienten, also für $\vec{v}_{\text{max}} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ wäre $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} -v_y \\ v_x \end{pmatrix}$

Wert der maximalen Steigung

$$D_{\vec{v}_{\max}}\left(f\left(x_0, y_0\right)\right) = \langle \nabla f, \vec{v}_{\max} \rangle = \left\| \nabla f\left(x_0, y_0\right) \right\|$$

Partielle Ableitung

Eine Funktion heißt partiell differenzierbar, wenn alle partiellen Ableitungen existieren.

Vollständiges/totales Differential

$$\mathrm{d}z = f_x(x_0, y_0) \cdot \,\mathrm{d}x + f_y(x_0, y_0) \cdot \,\mathrm{d}y$$

Jacobi-Matrix

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Kurvenintegral

Kurve/Weg: $\vec{X} : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \end{cases}$
Ist immer eine Funktion in Abhängigkeit von t.

Vektorfeld: $\vec{F} : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to \mathbb{R}^n \\ (x, y) & \mapsto \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix} \end{cases}$

1. Wenn nur Punkte gegeben sind: Kurvendarstellung $\vec{X}(t)$ bestimmen
2. Ableitung der Kurve $\vec{X}'(t) = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$
3. Kurvenpunkte in Vektorfeld einsetzen $\vec{F}\left(\vec{X}(t)\right) = \vec{F}\left(x_1(t), x_2(t)\right)$.

$$W = \int_K \vec{F} \,\mathrm{d}\vec{X} = \int_a^b \left\langle \vec{F}\left(\vec{X}(t)\right), \vec{X}'(t) \right\rangle \,\mathrm{d}t$$

Tangentenvektor einer Kurve ist $\vec{X}'(t)$.
Tangente ist $T(t) = \vec{X}(t) + \lambda \cdot \vec{X}'(t)$.

Potentialfunktion

Sei $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Erfüllt $\vec{f}(x,y)$ die Integrabilitätsbedingung,

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} \overset{?}{=} \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

dann existiert eine Potentialfunktion $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\nabla V = \vec{f}$.

$$V(x,y) = \int f_1(x,y)\ \mathrm{d}x = F_1(x,y) + c(y)$$

$c'(y)$ berechnen mit $\frac{\partial V}{\partial y} \overset{!}{=} f_2(x,y)$ und Koeffizientenvergleich.
Dann $c(y) = \int c'(y)\ \mathrm{d}y$ in $V(x,y)$ einsetzen.

Mehrdimensionale Integration

Polarkoordinaten

$$\iint f(x,y)\ \mathrm{d}(x,y) = \iint f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \cdot r\ \mathrm{d}(\varphi,r)$$

Kreisfläche: $A = \pi \cdot r^2$

Kugelkoordinaten

$$\iiint f(x,y,z)\ \mathrm{d}(x,y,z) = \iiint f\left(r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta\right) |r^2\sin\theta|\ \mathrm{d}(\theta,\varphi,r)$$

Kugelvolumen: $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$

Schwerpunkte

Implizite Funktionen

1. $F(x,y)$ nach 0 umstellen.
2. Stelle (x_0, y_0) einsetzen und überprüfen ob Gleichung erfüllt.
3. F_x und F_y bestimmen.
4. Werte von $F_x(x_0,y_0)$ und $F_y(x_0,y_0)$ ausrechnen.
5. $y'(x) = -\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}$

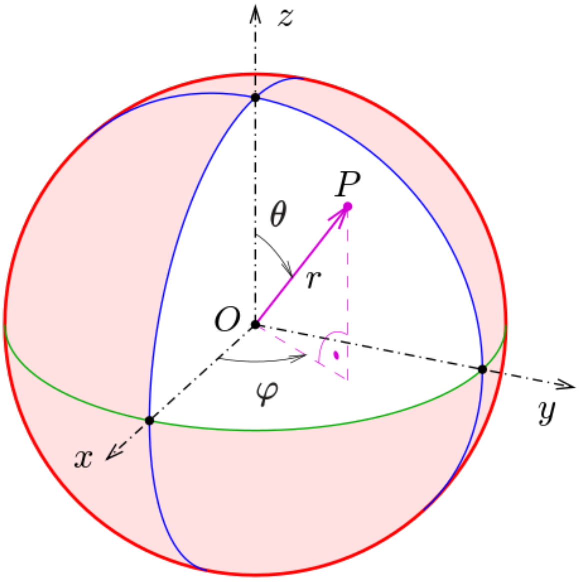

Abbildung 1: Kugelkoordinaten. CC-BY-SA by User:Ag2gaeh

Differenzialgleichungen und Anfangswertprobleme

Umformungstricks

$$a = \frac{b+1}{b-1} \Leftrightarrow b = \frac{a+1}{a-1} \quad \text{mit } a \neq 1$$

$$a = \frac{b-1}{b+1} \Leftrightarrow b = -\frac{a+1}{a-1} = \frac{a+1}{1-a} \quad \text{mit } a \neq 1$$

Lösen von gewöhnlichen Differenzialgleichungen

Wenn die DGL nicht in expliziter Form gegeben ist, also y' nicht freigestellt ist und wir sie auch nicht in explizite Form bringen können, so können wir sie nicht (ohne Weiteres) lösen.
Ist sie in expliziter Form gegeben, also in der Form $y'(x) = f(x,y(x))$, bestimmen wir als Nächstes die Ordnung der DGL.
1. Ordnung siehe DGLs 1. Ordnung
2. Ordnung siehe DGLs 2. Ordnung
Höherer Ordnung: Können wir nicht lösen.

DGLs 1. Ordnung

Ist die DGL separable? Ja $\rightarrow$ Trennung der Variablen, Nein $\rightarrow$ Weiter mit Substitution I

Trennung der Variablen

Die DGL ist separable, also können wir durch Trennung der Variablen lösen.

Beispiel:

$$y' = x \cdot y^2$$

1. Fall: $y = 0 \Rightarrow y' = 0$ ist eine triviale Lösung.
2. Fall: $y \neq 0$ Trennung der Variablen.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y &= \int x\,\mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{y} &= \frac{x^2}{2} + c \\ \Leftrightarrow \quad y &= -\frac{2}{x^2} + \tilde{c} \end{aligned}$$

Substitution I

Die DGL ist nicht separable.

Ist die DGL in der Form

$$y' = h(ax + by + c)\ ?$$

Dann können wir durch Substitution mit $z = ax + by + c$ lösen.
Beispiel:

$$y' = (x - y + 3)^2, \quad y(1) = 1$$

Wir substituieren mit $z(x) := x - y + 3$ und leiten nach x ab:

$$\begin{aligned} z(x) &= x - y(x) + 3 \\ z'(x) &= 1 - y'(x) \\ &= 1 - z^2(x) \end{aligned}$$

Nun können wir den Anfangswert $y(1) = 1$ an der Stell $x = 1$ in die Funktion einsetzen.

$$\begin{aligned} z(1) &= 1 \quad -y(1) \quad +3 \\ &= 1 \quad -1 \quad +3 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Wenn die neue DGL, die wir durch die Substitution erhalten haben, separable ist, können wir nach Trennung der Variablen weiterverfahren. Da unser Beispiel $z' = 1 - z^2$ nicht separable ist, müssen wir stattdessen wie folgt lösen und rücksubstituieren.

$$\int_3^z \frac{1}{1-s^2}\,\mathrm{d}s = \int_1^x 1\,\mathrm{d}t$$

Zum Lösen des Integrals führen wir mit $\frac{1}{1-s^2} = \frac{1}{-s^2+1} = -\frac{1}{s^2-1}$ eine Partialbruchzerlegung durch.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-s^2} &= \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} \\ -\frac{1}{(s+1)(s-1)} &= \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} \\ \Leftrightarrow \quad -1 &= \frac{A \cdot \cancel{(s-1)}(s+1)}{\cancel{s-1}} + \frac{B \cdot (s-1)\cancel{(s+1)}}{\cancel{s+1}} \\ \Leftrightarrow \quad -1 &= A \cdot (s+1) + B \cdot (s-1) \end{aligned}$$

Mit $s_1 = 1$ erhalten wir $A = -\frac{1}{2}$ und mit $s_2 = -1$ erhalten wir $B = \frac{1}{2}$. Somit gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-s^2} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-1} \right) \end{aligned}$$

Damit können wir unser Integral lösen:

$$\begin{aligned} \int_3^z \frac{1}{1-s^2}\,\mathrm{d}s &= \int_1^x 1\,\mathrm{d}t \\ \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \int_3^z \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-1}\,\mathrm{d}s &= \int_1^x 1\,\mathrm{d}t \\ \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \Big[\ln(s+1) - \ln(s-1) \Big]_3^z &= \Big[t \Big]_1^x \\ \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \left[\ln\left(\frac{s+1}{s-1} \right) \right]_3^z &= x - 1 \\ \Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{z+1}{z-1} \right) - \ln(2) &= 2x - 2 \end{aligned}$$

Danach stellen wir nach z um:

$$\begin{aligned} & \ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right) - \ln(2) &&= 2x-2 \\ \Leftrightarrow\quad & \ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right) &&= 2x-2+\ln(2) \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{z+1}{z-1} &&= \mathrm{e}^{2x-2}\cdot\mathrm{e}^{\ln(2)} \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{z+1}{z-1} &&= 2\,\mathrm{e}^{2x-2} \\ \Leftrightarrow\quad & z &&= \frac{2\,\mathrm{e}^{2x-2}+1}{\underbrace{2\,\mathrm{e}^{2x-2}-1}_{\neq 0}} \end{aligned}$$

Umformungstrick:

$$a = \frac{b+1}{b-1} \Leftrightarrow b = \frac{a+1}{a-1} \quad \text{mit } a \neq 1$$

$$a = \frac{b-1}{b+1} \Leftrightarrow b = -\frac{a+1}{a-1} = \frac{a+1}{1-a} \quad \text{mit } a \neq 1$$

Rücksubstitution:

$$\begin{aligned} y &= x+3-z \\ &= x+3-\frac{2\,\mathrm{e}^{2x-2}+1}{2\,\mathrm{e}^{2x-2}-1} \end{aligned}$$

Substitution II

Die DGL ist nicht separable aber in der Form

$$y' = h\left(\frac{y}{x}\right) \; ?$$

Dann können wir sie durch Substitution mit $z = \frac{y}{x}$ und $y' = z' \cdot x + z$ lösen.

Beispiel:

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{x \cdot y}, \quad y(1) = 1$$

Wir formen um, sodass wir mit $z = \frac{y}{x}$ substituieren können.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{x^2 + y^2}{x \cdot y} \\ &= \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x} \cdot y} + \frac{y^{\cancel{2}}}{x \cdot \cancel{y}} \\ &= \underbrace{\frac{x}{y}}_{=z^{-1}} + \underbrace{\frac{y}{x}}_{=z} \end{aligned}$$

Wir sehen also, dass wir mit der Substitution $z = \frac{y}{x}$ eine Funktion $h(t^{-1} + t)$ vorliegen haben.

$$\begin{aligned} y' &= z^{-1} + z \\ \Leftrightarrow \quad z' \cdot x + \cancel{z} &= z^{-1} + \cancel{z} \\ \Leftrightarrow \quad z' \cdot x &= z^{-1} \end{aligned}$$

Diese DGL ist nun wieder separable und kann wieder leicht durch Trennung der Variablen gelöst werden.
Da wir einen Anfangswert mit $z(1) = \frac{y(1)}{1} = 1$ gegeben haben, können wir auch mit dem bestimmten Integral rechnen und dann nach z umstellen.

$$\begin{aligned} z' \cdot x &= z^{-1} \\ \Leftrightarrow \quad z' &= \frac{z^{-1}}{x} \\ \Leftrightarrow \quad \int_1^z s \, \mathrm{d}s &= \int_1^x \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t \\ \Leftrightarrow \quad \frac{z^2}{2} - \frac{1}{2} &= \ln(x) - \overbrace{\ln(1)}^{=0} \\ \Leftrightarrow \quad z &= \sqrt{2\ln(x) + 1} \end{aligned}$$

Wobei wegen des Anfangswertes $2\ln(x)+1>0$ sein muss, also gilt diese Lösung nur für $x>\sqrt{\mathrm{e}^{-1}}$.
Die Rücksubstitution liefert sodann die Lösung des Anfangswertproblemes.

$$\begin{aligned} y &= x \cdot z \\ &= x \cdot \sqrt{2\ln(x)+1} \end{aligned}$$

Inhomogene DGL

Handelt es sich um eine inhomogene DGL, so können wir die folgenden Formen unterscheiden:
Ist die DGL in der Form

$$y' = p(x) \cdot y + q(x)\ ?$$

Dann können wir sie mithilfe des Superpositionsprinzips wie folgt lösen: Wir bestimmen die homogene Lösung y_h, für die $q(x)=0$ ist, sowie die partikuläre Lösung y_p und setzen diese zusammen:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

Bernoulli

Wenn nicht der Form $y'(x) = p(x) \cdot y + g(x)$, dann untersuchen wir, ob die DGL in einer speziellen Form vorliegt.
Liegt eine Bernoulli DGL vor?

$$\begin{aligned} y'(x) + f(x) \cdot y(x) &= g(x) \cdot y^{\alpha} \\ y'(x) + p(x) \cdot y(x) &= q(x) \cdot y(x)^{\alpha} \end{aligned}$$

Wenn ja:

$$\begin{aligned} z(x) &= y(x)^{1-\alpha} \\ z'(x) &= \underbrace{(1-\alpha)\cdot p(x)}_{=\tilde{p}} \cdot z(x) + \underbrace{(1-\alpha)\cdot q(x)}_{=\tilde{q}} \end{aligned}$$

Wir erhalten die Form wie im Abschnitt Inhomogene DGL und lösen entsprechend.

Beispiel:

$$(1+x)\cdot y' + y = -(1+x)^2 \cdot y^4, \quad y(0) = 1$$

Um zu erkennen, dass es sich um eine Bernoulli DGL handelt, formen wir wie folgt um:

$$
\begin{aligned}
(1+x)\cdot y' + y &= -(1+x)^2 \cdot y^4 \\
\Leftrightarrow y' &= \frac{-y}{1+x} - \frac{(1+x)^2}{1+x}\cdot y^4, \quad x \neq -1 \\
\Leftrightarrow y' &= \underbrace{\frac{-1}{1+x}}_{p(x)} \cdot y - \underbrace{\frac{(1+x)^2}{1+x}}_{q(x)} \cdot y^4, \quad \alpha = 4
\end{aligned}
$$

Substituiere $z = y^{1-\alpha} = y^{-3}$

$$
\begin{aligned}
z' &= (1-\alpha)\cdot p(x)\cdot z + (1-\alpha)\cdot q(x) \\
&= -3\cdot\left(\frac{-1}{1+x}\right) z + 3(1+x) \\
&= \underbrace{\frac{3}{1+x}\cdot z + 3(1+x)}_{P(x)}
\end{aligned}
$$

Mit

$$
\begin{aligned}
P(x) &= \int_0^x p(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^x \frac{3}{1+\tau}\,\mathrm{d}\tau \\
&= 3\ln(1+x) - 0 \\
&= 3\ln(1+x)
\end{aligned}
$$

bestimmen wir:

$$
\begin{aligned}
z_h(x) &= 1\cdot \mathrm{e}^{P(x)} \\
&= 1\cdot \mathrm{e}^{\ln(1+x)^3} \\
&= (1+x)^3
\end{aligned}
$$

Die Bestimmung der homogenen Lösung z_h, weicht am Standort Aachen dadurch ab, dass wir $f(x) = -p(x)$ setzen. Ansonsten sind die Verfahren gleich.

$$\begin{aligned}
z_h'(x) + f(x) \cdot z(x) &= 0 \\
z_h'(x) - \frac{3}{1+x} \cdot z(x) &= 0 \\
z_h'(x) &= \frac{3}{1+x} z(x) \\
\int \frac{1}{z} \, \mathrm{d}z &= \int \frac{3}{1+x} \, \mathrm{d}x \\
\ln(z_h) &= \int \frac{3}{1+x} \, \mathrm{d}x \\
z_h(x) &= \mathrm{e}^{\int \frac{3}{1+x} \, \mathrm{d}x} \\
&= \mathrm{e}^{3\ln(1+x)+\tilde{c}} \\
&= c \cdot \mathrm{e}^{\ln((1+x)^3)} \\
&= c \cdot (1+x)^3 \\
z_h(0) &= c \cdot 1 \Leftrightarrow c = 1 \\
z_h(x) &= (1+x)^3
\end{aligned}$$

Zur Bestimung der partikulären Lösung. Dies lässt sich auch mit Ansatz vom Typ der rechten Seite machen. Wir wählen jedoch Variation der Konstanten:

$$\begin{aligned}
z_p(x) &= \mathrm{e}^{P(x)} \cdot c(x) \\
&= \mathrm{e}^{P(x)} \cdot \int_0^x q(\tau) \, \mathrm{e}^{-P(\tau)} \, \mathrm{d}\tau \\
&= (1+x)^3 \int_0^x 3(1+\tau) \, \mathrm{e}^{-\ln((1+\tau)^3)} \, \mathrm{d}\tau \\
&= (1+x)^3 \int_0^x 3(1+\tau) \, \mathrm{e}^{\ln \frac{1}{(1+\tau)^3}} \, \mathrm{d}\tau \\
&= (1+x)^3 \int_0^x 3(1+\tau) \frac{1}{(1+\tau)^3} \, \mathrm{d}\tau \\
&= (1+x)^3 \int_0^x \frac{3}{(1+\tau)^2} \, \mathrm{d}\tau \\
&= (1+x)^3 \left[-\frac{1}{1+\tau} \right]_0^x \\
&= -3(1+x)^2 + 3(1+x)^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z(x) &= z_h(x) + z_p(x) \\
&= (1+x)^3 - 3(1+x)^2 + 3(1+x)^3 \\
&= 4(1+x)^3 - 3(1+x)^2
\end{aligned}$$

Rücksubstitution:

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{\sqrt[3]{z(x)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{4(1+x)^3 - 3(1+x)^2}} \end{aligned}$$

Exakte DGLs I

Ist die DGL in der Form

$$P(x,y) + Q(x,y) \cdot y' = 0$$

Wenn ja, ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt?

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \stackrel{?}{=} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

Beispiel:

$$x^2 - y = (x + \sin^2(y)) \cdot y'$$

Wir stellen um, damit sich diese Form ergibt:

$$\begin{aligned} x^2 - y &= (x + \sin^2(y)) \cdot y' \\ \Leftrightarrow \quad \underbrace{(x^2 - y)}_{P(x,y)} + \underbrace{(-(x + \sin^2(y)))}_{Q(x,y)} \cdot y' &= 0 \end{aligned}$$

Integrabilitätsbedingung erfüllt?

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) &= -1 \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) &= -1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Ja, Integrabilitätsbedingung erfüllt.

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int P(x,y)\ \mathrm{d}x = \int x^2 - y\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{x^3}{3} - yx + c_1(y) \\ F(x,y) &= \int Q(x,y)\ \mathrm{d}y = \int -x - \sin^2(y)\ \mathrm{d}y \\ &= -yx - \frac{1}{2}y + \frac{1}{y}\sin(2y) + c_2(x) \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich gibt uns die Potenzialfunktion $F(x,y)$

$$F(x,y) = \frac{x^3}{3} - xy - \frac{1}{2}y + \frac{1}{y}\sin(2y) = c$$

In Aachen setzen wir üblicherweise $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \stackrel{!}{=} Q(x,y)$ gleich und lösen dann die Gleichung nach $c_1 \cdot y'$ auf.

Exakte DGLs II

Oder in der From?

$$P(x,y) + Q(x,y) \cdot y' = f(x)$$

Beispiel:

$$\underbrace{y}_{P(x,y)} \underbrace{-(2x+y)}_{Q(x,y)} \cdot y' = 0$$

Integrabilitätsbedingung:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 1$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = -2$$

Nein, ist nicht erfüllt. → Finde den integrierenden Faktor:

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 3$$

Nun müssen wir überprüfen, ob

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P}$$

von y abhängig ist, oder ob

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial y}}{P}$$

Versuche:

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial y}}{P} = \frac{3}{y} =: \mu(y)$$

Suche nach einer Funktion in Abhängigkeit von y.

$$\begin{aligned}
\mu(y) = \mathrm{e}^{-\int g(y)\ \mathrm{d}y} = \mathrm{e}^{-3\ln y} &= \frac{1}{y^3} \\
y - (2x + y) \cdot y' &= 0 \\
\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{y^2}}_{P(x,y)} \underbrace{- \left(\frac{2x}{y^3} + \frac{1}{y^2}\right)}_{Q(x,y)} &= 0
\end{aligned}$$

Neue Integrabilitätsbedingung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) &= -\frac{2}{y^3} \\
\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) &= -\frac{2}{y^3}
\end{aligned}$$

IB ist nun erfüllt.

$$\begin{aligned}
F(x,y) = \int \frac{1}{y^2}\ \mathrm{d}x &= \frac{x}{y^2} + c_1(y) + 0 \\
F(x,y) = \int -\frac{2}{y^3} - \frac{1}{y^2}\ \mathrm{d}y &= \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y} + c_2(x)
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$F(x,y) = \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y} = c$$

Können wir nach y freistellen? Nein, also fertig.

DGLs 2. Ordnung

[2.A]

Homogene DGL 2. Ordnung. (für inhomogene DGLs 2. Ordnung ist auch eine Lösung mit Variation der Kontanten möglich).

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad y(\zeta) = \eta_1, y'(\zeta) = \eta_2$$

Ansatz: $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$.

$$\begin{aligned} \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda x} + a\lambda \mathrm{e}^{\lambda x} + b \mathrm{e}^{\lambda x} &= 0 \\ \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\lambda x} \cdot \underbrace{\left(\lambda^2 + a\lambda + b\right)}_{=0} &= 0 \end{aligned}$$

charakteristische Gleichung
Entscheidung anhand der Diskriminanten der Charakteristischen Gleichgung.

$$D = \frac{a^2}{4} - b \tag{1}$$

$$\tag{2}$$

Wenn $D > 0$ haben wir zwei reelle Nullstellen, λ_1, λ_2.

$$y(x) = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + c_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$$

Wenn $D = 0$ haben wir eine reelle (doppelte) Nullstelle λ.

$$y(x) = c_1 \mathrm{e}^{\lambda x} + c_2 \cdot x \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}$$

Wenn $D < 0$ liegen zwei komplexe Nullstellen vor. $\lambda_1 = w + \mathrm{i}v$, $\lambda_2 = w - \mathrm{i}v$

$$y(x) = \mathrm{e}^{wx} \cdot (c_1 \cos(vx) + c_2 \sin(vx))$$

Mitschrift 13.06.2023

$$A = \int_G f(x,y)\ \mathrm{d}A = \int_0^? \int \dots$$

Jakobi Matrix

$$\begin{aligned} g(r,\phi) &= \big(r \cdot \cos\phi, r\sin\phi\big) \\ J_{g(r,\phi)} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial r}(r,\phi) & \frac{\partial g_2}{\partial r}(r,\phi) \\ \frac{\partial g_1}{\partial \phi}(r,\phi) & \frac{\partial g_2}{\partial \phi}(r,\phi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -r\cdot\sin\phi & r\cdot\cos\phi \end{pmatrix} \\ \det J_{g(r,\phi)} &= r\cdot\cos^2\phi + r\sin^2\phi - \sin\phi + r\cdot\sin\phi \end{aligned}$$

Abbildung A
Abbildung B

$$\int_\alpha^\beta \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(v)} f\left(r\cdot\cos\phi, r\sin\phi\right) v\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\phi$$

Beispiel: Abbildung C
Aufgabe: Volumen berechnen. Siehe 2.

$$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

Die Funktion $f(x,y)$ beschreibe eine flach liegende Halbkugel.
Volumen über Grunfläche G

$$\begin{aligned} V &= \int_G f(x,y)\ \mathrm{d}(x,y) \\ &= \int_0^{2\phi} \int_0^1 \sqrt{1 - r^2\cos^2\phi - r\sin^2\phi} \cdot r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\phi \\ &= \int_0^{2\phi} \underbrace{\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\cdot r\ \mathrm{d}r}_{t=1-r^2}\ \mathrm{d}\phi \end{aligned}$$

Substitution mit

$$\begin{aligned} t &= 1 - r^2 \\ \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r} &= -2r \\ &= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{r}\int_1^0 \sqrt{t}\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}\phi \end{aligned}$$

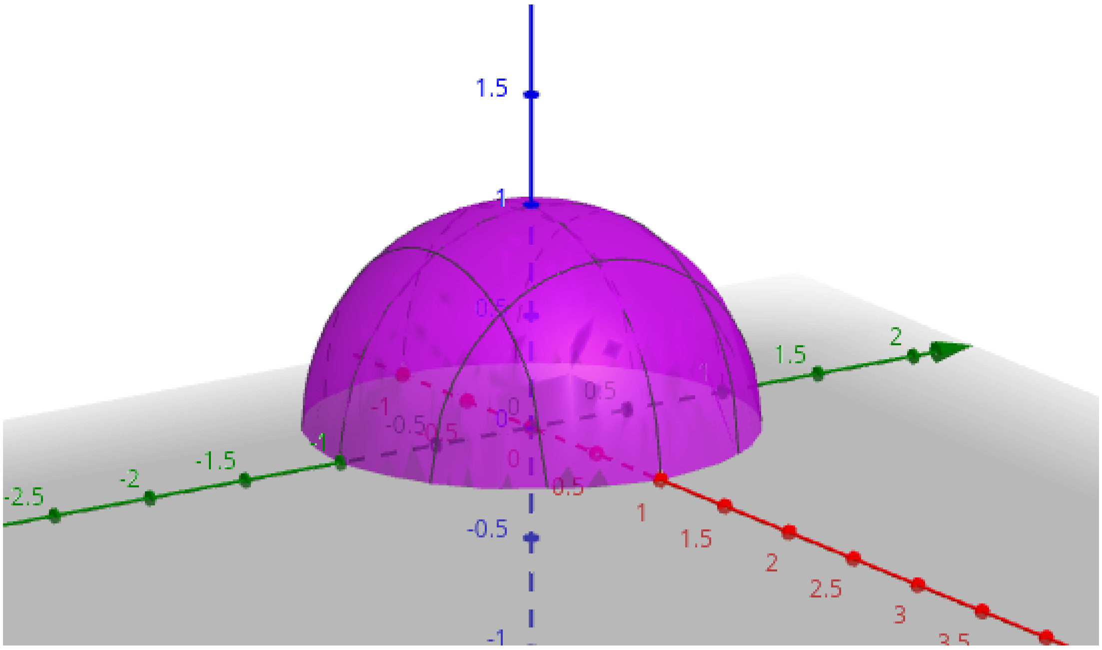

Abbildung 2: $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Schwerpunkt Berechnung

Um den Schwerpunkt $(x_s|y_s)$ eines Gebietes G zu berrechnen, können wir diese Formel verwenden:

$$x_s = \frac{\int_G x \, \mathrm{d}(x,y)}{\int_G 1 \, \mathrm{d}(x,y)} \qquad y_s = \frac{\int_G y \, \mathrm{d}(x,y)}{\int_G 1 \, \mathrm{d}(x,y)}$$

Hinweis:

$$\int_a^b \int_c^d f(x) \cdot g(y) \, \mathrm{d}(x,y)$$
$$= \int_a^b g(y) \cdot \underbrace{\int_c^d f(x) \, \mathrm{d}x}_{z} \, \mathrm{d}y$$

Arbeitsintegral

Arbeit durch ein Vektorfeld

$$W = \int_a^b \vec{F}(g(t)) \cdot g'(t) \, \mathrm{d}t$$
$$= \int_\gamma$$

Prüfen der Integrabilitätsbedingung. Wenn erfüllt existiert eine Potentialfunktion; dann ist das Vektorfeld konservativ und es ist egal, welchen Weg wir gehen.

Beispiel:

$$g_1(t) = (t,t^2) \quad t \in [0;1]$$
$$g_2(t) = (t^2, t) \quad t \in [0;1]$$

Vektorfeld:

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + 2y \\ 2x + y^2 \end{pmatrix}$$

Einsetzen durch $x = g_1(t)$ und $y = g_2(t)$

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_0^1 \vec{F}(g_1(t)) \cdot g_1'(t) \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 + \alpha t^2 \\ 2t + t^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 3t^2 + 4t^2 + 2t^5 \, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$\int_0^1 7t^2 + 2t^5 \, \mathrm{d}t$$

Der zweite Weg liefert das gleiche Ergebnis $W_1 = W_2$, weil das Vektorfeld konservativ ist, also die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist.
Integrabilitätsbedingung:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \stackrel{?}{=} \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)$$

Im Beispiel: 2=2 Potentialfunktion:

$$\begin{aligned} v(x,y) &= \int f_1(x,y) \, \mathrm{d}x = \int x^2 + 2y \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{x^3}{3} + 2xy + c(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(x,y) &= \int f_2(x,y) \, \mathrm{d}x = \int 2 + y^2 \, \mathrm{d}y \\ &= 2xy + \frac{y^3}{3} + \tilde{c}(x) \end{aligned}$$

$$v(x,y) = \frac{x^3}{3} + 2xy + \frac{y^3}{3}$$