

## Aufgabe 1

Gegeben sei das Vektorfeld  $\vec{f}$  mit:

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} x^2 + 5a \cdot y + 3y \cdot z \\ 5x + 3a \cdot x \cdot z - 2 \\ 2x \cdot y + a \cdot x \cdot y - 4z \end{pmatrix}$$

- a) Berechnen Sie die Rotation.
- b) Für welche Werte von  $a$  ist das Feld wirbelfrei?

### Lösung 1a

$$\operatorname{rot} \vec{f} = \vec{\nabla} \times \vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \\ \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \\ \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + a \cdot x - 3a \cdot x \\ 3y - (2y + a \cdot y) \\ 5 + 3a \cdot z - (5a + 3z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \cdot (1 - a) \\ y \cdot (1 - a) \\ 5 \cdot (1 - a) + 3z \cdot (a - 1) \end{pmatrix}$$

### Lösung 1b

Das Feld ist wirbelfrei, wenn  $\operatorname{rot} \vec{f} = \vec{0}$  ist, also für  $a = 1$ .

## Aufgabe 2

Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Grades im Entwicklungspunkt  $(0, 0)$  für

$$g(x, y) = x^2 \cdot y + x \cdot y - y + 1.$$

### Lösung 2

## Aufgabe 3

Bestimmen Sie die relativen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = -8x^3 - 12x^2 + 3x \cdot y^2 + y^3 + 3y^2.$$

### Lösung 3

Bestimme zunächst die partiellen Ableitungen der Funktion

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -24x^2 - 24x + y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6xy + 3y^2 + 6y$$

sowie ihre Nullstellen

$$0 = -24x^2 - 24x + y^2$$

$$\Leftrightarrow 0 = x^2 + x - \frac{y^2}{24}$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{y^2}{24}}$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{6+y^2}{24}}$$

$$0 = 6xy + 3y^2 + 6y$$

$$\Leftrightarrow 0 = y \cdot (6x + 3y + 6)$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \vee 6x + 3y + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \vee y = -2x - 2$$

## Aufgabe 4

Berechnen Sie die Extrema der folgenden Funktionen

a)  $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

b)  $h(x, y, z) = g(x, x \cdot y, x \cdot y \cdot z)$

## Lösung 4

## Aufgabe 5

Bestimmen Sie mit der Methode nach Lagrange die Punkte, die der Nebenbedingung

$$x^2 + y^2 = 4$$

genügen und deren quadratischer Abstand zum Punkt  $P(1, 2)$  extremal sind.

## Lösung 5

$$L(x, y, \lambda) = \underbrace{f(x, y)}_{\text{Zielfunktion}} + \lambda \cdot \underbrace{(x^2 + y^2 - 4)}_{\text{Nebenbedingung}}$$

Zur Bestimmung von  $\nabla L = 0$  werden die Ableitungen berechnet:

$$\begin{aligned}L_x &= \frac{\partial f}{\partial x} + 2x\lambda &= 0 \\L_y &= \frac{\partial f}{\partial y} + 2y\lambda &= 0 \\L_\lambda &= \frac{\partial f}{\partial \lambda} + x^2 + y^2 - 4 &= 0\end{aligned}$$