Aufgabe 1

Sind die folgenden Funktionen im Punkt $(0,0)$ stetig?

a) $f(x,y)\begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $f(x,y)\begin{cases} \frac{x+y}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Lösung 1a

Sei

$$\overrightarrow{X_n} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_n \cdot \cos(\phi_n) \\ r_n \cdot \sin(\phi_n) \end{pmatrix} \text{ mit } \lim_{n\to\infty} r_n = 0$$

dann folgt die Stetigkeit im Punkt $(0,0)$ durch

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f(\overrightarrow{X_n}) &= \lim_{n\to\infty} \frac{(r_n \cdot \cos(\phi_n))^3 + (r_n \cdot \sin(\phi_n))^3}{(r_n \cdot \cos(\phi_n))^2 + (r_n \cdot \sin(\phi_n))^2} \\ &= \lim_{r_n\to 0} \frac{r_n^3 \cdot \left(\cos^3(\phi_n) + \sin^3(\phi_n)\right)}{r_n^2 \cdot \left(\cos^2(\phi_n) + \sin^2(\phi_n)\right)} \\ &= \lim_{r_n\to 0} r_n \cdot \frac{\cos^3(\phi_n) + \sin^3(\phi_n)}{\cos^2(\phi_n) + \sin^2(\phi_n)} \\ &= \lim_{r_n\to 0} r_n \cdot \left(\cos^3(\phi_n) + \sin^3(\phi_n)\right) \\ &= 0 \\ &= f(0,0). \checkmark \end{aligned}$$

Lösung 1b

Sei

$$\overrightarrow{X_n} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_n \cdot \cos(\phi_n) \\ r_n \cdot \sin(\phi_n) \end{pmatrix} \text{ mit } \lim_{n\to\infty} r_n = 0$$

dann folgt die Umstetigkeit im Punkt $(0,0)$ durch

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f(\overrightarrow{X_n}) &= \lim_{n\to\infty} \frac{r_n \cdot \cos(\phi_n) + r_n \cdot \sin(\phi_n)}{(r_n \cdot \cos(\phi_n))^2 + (r_n \cdot \sin(\phi_n))^2} \\
&= \lim_{r_n\to 0} \frac{r_n \cdot \big(\cos(\phi_n) + \sin(\phi_n)\big)}{r_n^2 \cdot \big(\cos^2(\phi_n) + \sin^2(\phi_n)\big)} \\
&= \lim_{r_n\to 0} \frac{1}{r_n} \big(\cos(\phi_n) + \sin(\phi_n)\big) \\
&= \pm\infty \\
&\neq f(0,0). \lightning
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die relativen Extrema und Sattelpunkte der Funktionen

a) $f(x,y) = 4x \cdot y + 2x^3 - 2y^3 + 5$

b) $f(x,y) = 10x^2 + (y-10)^2 - 10x \cdot y$

Lösung 2a

1. Ableitung:

$$f_x(x,y) = 4y + 6x^2 \tag{1}$$
$$f_y(x,y) = 4x - 6y^2 \tag{2}$$

Berechnung der Nullstellen

Für (1):

$$\begin{aligned}
0 &= 4y + 6x^2 \\
\Leftrightarrow -4y &= 6x^2 \\
\Leftrightarrow y &= -\frac{3x^2}{2}
\end{aligned}$$

Einsetzen in (2):

$$\begin{aligned} & 0 = 4x - 6\left(\frac{3x^2}{2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow\ & 0 = 4x - \frac{27x^4}{2} \\ \Leftrightarrow\ & 0 = x \cdot (27x^3 - 8) \\ \Leftrightarrow\ & 0 = x \vee 27x^3 - 8 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 0 = x \vee x = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Daraus folgen die kritischen Punkte $\left(0\middle|-\frac{3x^2}{2}\right)$ und $\left(\frac{2}{3}\middle|-\frac{3x^2}{2}\right)$.