Aufgabe 1

Gegeben sei das Vektorfeld $\overrightarrow{f}$ mit:

$$\overrightarrow{f} = \begin{pmatrix} x^2 + 5a \cdot y + 3y \cdot z \\ 5x + 3a \cdot x \cdot z - 2 \\ 2x \cdot y + a \cdot x \cdot y - 4z \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Rotation.

b) Für welche Werte von a ist das Feld wirbelfrei?

Lösung 1a

$$\text{rot}\,\overrightarrow{f} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \\ \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \\ \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + a \cdot x - 3a \cdot x \\ 3y - (2y + a \cdot y) \\ 5 + 3a \cdot z - (5a + 3z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \cdot (1-a) \\ y \cdot (1-a) \\ 5 \cdot (1-a) + 3z \cdot (a-1) \end{pmatrix}$$

Lösung 1b

Das Feld ist wirbelfrei, wenn $\text{rot}\,\overrightarrow{f} = \overrightarrow{0}$ ist, also für $a = 1$.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Grades im Entwicklungspunkt $(0,0)$ für

$$g(x,y) = x^2 \cdot y + x \cdot y - y + 1.$$

Lösung 2

Für $f(x,y)$ ist die quadratische Approximation gegeben mit

$$\begin{aligned} f(x,y) = {} & f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\ & + \frac{f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2}{2} + f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2}{2}. \end{aligned}$$

Man bestimme die Ableitungen

$$\begin{aligned} g_x(x_0,y_0) &= 2x_0 \cdot y_0 + y_0 \\ g_y(x_0,y_0) &= x_0^2 + x_0 - 1 \\ g_{xx}(x_0,y_0) &= 2y_0 \\ g_{xy}(x_0,y_0) &= 2x_0 + 1 \\ g_{yy}(x_0,y_0) &= 0 \end{aligned}$$

und setze entsprechend ein

$$\begin{aligned}g(x,y) &= x_0^2 \cdot y_0 + x_0 \cdot y_0 - y_0 + 1 + (2x_0 \cdot y_0 + y_0)(x - x_0) + (x_0^2 + x_0 - 1)(y - y_0) \\ &+ \frac{2y_0(x-x_0)^2}{2} + (2x_0+1)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{0 \cdot (y-y_0)^2}{2} \\ &= x_0^2 \cdot y_0 + x_0 \cdot y_0 - y_0 + 1 + (2x_0 \cdot y_0 + y_0)(x - x_0) + (x_0^2 + x_0 - 1)(y - y_0) \\ &+ \frac{2y_0(x-x_0)^2}{2} + (2x_0+1)(x-x_0)(y-y_0)\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die relativen Extrema der Funktion

$$f(x,y) = -8x^3 - 12x^2 + 3x \cdot y^2 + y^3 + 3y^2.$$

Lösung 3

Bestimme zunächst die partiellen Ableitungen der Funktion

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -24x^2 - 24x + y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6xy + 3y^2 + 6y$$

sowie ihre Nullstellen

$$0 = -24x^2 - 24x + y^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = x^2 + x - \tfrac{y^2}{24}$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} + \tfrac{y^2}{24}}$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{6+y^2}{24}}$$

$$0 = 6xy + 3y^2 + 6y$$

$$\Leftrightarrow 0 = y \cdot (6x + 3y + 6)$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \vee 6x + 3y + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \vee y = -2x - 2$$

Aufgabe 4

Berechnen Sie die Extrema der folgenden Funktionen

a) $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

b) $h(x, y, z) = g(x, x \cdot y, x \cdot y \cdot z)$

Lösung 4

Aufgabe 5

Bestimmen Sie mit der Methode nach Lagrange die Punkte, die der Nebenbedingung

$$x^2 + y^2 = 4$$

genügen und deren quadratischer Abstand zum Punkt $P(1, 2)$ extremal sind.

Lösung 5

$$L(x, y, \lambda) = \underbrace{f(x, y)}_{\text{Zielfunktion}} + \lambda \cdot \underbrace{(x^2 + y^2 - 4)}_{\text{Nebenbedingung}}$$

Zur Bestimmung von $\nabla L = 0$ werden die Ableitungen berechnet:

$$\begin{aligned}
L_x &= \frac{\partial f}{\partial x} + 2x\lambda &&= 0 \\
L_y &= \frac{\partial f}{\partial y} + 2y\lambda &&= 0 \\
L_\lambda &= \frac{\partial f}{\partial \lambda} + x^2 + y^2 - 4 &&= 0
\end{aligned}$$