Aufgabe 5

Hinweis: Umbenennung des Parameters von x nach a.
Berechnen Sie in Abhängigkeit von a

a) den Kern

b) die Dimension des Kerns

c) den Rang

d) das Bild

der zu der folgenden Matrix gehörenden linearen Abbildung:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & a \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Lösung 5

Dimensionsformel für lineare Abbildungen:
Für eine lineare Abbildung $f : V \to W$ gilt

$$\dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f) = \dim(V).$$

Statt $\dim(\ker(f))$ kann man auch $\mathrm{def}(f)$ schreiben.
Der Kern einer linearen Abbildung A ist die Menge aller Vektoren $x \in \mathbb{R}^4$, die von A auf den Nullvektor abgebildet werden. Ganz allgemein bedeutet das, dass der Kern die Menge der Lösungen des Gleichungssystems $Ax = 0$ ist:

$$\ker(A) = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \middle| Ax = 0 \right\}.$$

Um diese Menge konkret zu bestimmen, formen wir durch elementare Zeilenoperationen die Abbildungsmatrix so lange um, bis wir die Zeilenstufenform erhalten und dabei den Parameter a möglichst frei stehend haben.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & a \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} Z_2-Z_1 \\ Z_4-Z_1 \\ \rightsquigarrow \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & a \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} Z_1:2 \\ Z_2:2 \\ Z_3-Z_1 \\ \rightsquigarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & {}^{1}/_{2} & 1 & {}^{3}/_{2} \\ 0 & 1 & {}^{1}/_{2} & 0 \\ 0 & {}^{3}/_{2} & 4 & a - {}^{3}/_{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} Z_3-{}^{3}/_{2}Z_2 \\ Z_3\cdot{}^{4}/_{13} \\ \rightsquigarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & {}^{1}/_{2} & 1 & {}^{3}/_{2} \\ 0 & 1 & {}^{1}/_{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & {}^{4a-6}/_{13} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} Z_4-Z_3 \\ Z_{3,4}\cdot{}^{13}/_{4} \\ Z_3+Z_4 \\ \rightsquigarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & {}^{1}/_{2} & 1 & {}^{3}/_{2} \\ 0 & 1 & {}^{1}/_{2} & 0 \\ 0 & 0 & {}^{13}/_{4} & {}^{13}/_{2} \\ 0 & 0 & 0 & 8-a \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} Z_1\cdot 4 \\ Z_1-2\cdot Z_2 \\ Z_1-3\cdot Z_3 \\ Z_1:4 \\ \rightsquigarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & {}^{1}/_{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 8-a \end{pmatrix}$$

Aus der letzten Zeile entnehmen wir, dass $(8-a)\cdot x_4 = 0$ ist. Dadurch erhalten wir zwei Fälle, die wir unterscheiden müssen:

<u>1. Fall, $a = 8$:</u>
Wenn $a = 8$ ist, so kann x_4 einen beliebigen Wert annehmen, daher wählen wir $x_4 = \lambda \in \mathbb{R}$ *beliebig* und setzen ein um die übrigen Koordinaten von x zu bestimmen: $x_3 + 2\lambda = 0 \Leftrightarrow x_3 = -2\lambda$, $x_2 + \frac{1}{2}x_3 \Leftrightarrow x_2 = \lambda$ und $x_1 = 0$. Daraus folgt:

$$\ker(A_{a=8}) = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Die Dimension des Kerns (oder auch Defekt def genannt) ist $\dim(\ker(A_{a=8})) = \operatorname{def}(A_{a=8}) = 1$.

Mit der Rangformel ergibt sich für den Rang

$$\mathrm{rg}(A_{a=8}) = \dim(V) - \mathrm{def}(A_{a=8}) = 4 - 1 = 3.$$

Das Bild der Matrix ist die Menge aller Linearkombinationen der Spaltenvektoren, sodass wir diese einfach wie folgt angeben können:

$$\mathrm{Bild}(A) = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \lambda_{1,2,3} \in \mathbb{R} \right\}$$

2. Fall, $a \neq 8$:
Wenn $a \neq 8$ ist, dann muss $x_4 = 0$ sein. Für die übrigen Koordinaten ergibt sich so ebenfalls $x_4 = x_3 = x_2 = x_1 = 0$, was bedeutet, dass lediglich der Nullvektor eine Lösung des Gleichungssystems $Ax = 0$ ist und $\ker(A_{a\neq 8}) = \{0\}$ ist.
Der Defekt ist $\mathrm{def}(A_{a\neq 8}) = 0$.
Mit der Rangformel ergibt sich für den Rang

$$\mathrm{rg}(A_{a\neq 8}) = \dim(V) - \mathrm{def}(A_{a\neq 8}) = 4 - 0 = 4.$$

Da der Rang der Matrix gleich der Anzahl der Spaltenvektoren ist, können wir das Bild mit den Spalten der Ausgangsmatrix beschreiben.

$$\mathrm{Bild}(A) = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ a \\ 5 \end{pmatrix} \middle| \lambda_{1,2,3,4} \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe 6

Stellen Sie zu folgenden Abbildungen die zugehörigen Abbildungsmatritzen auf.

a) $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^3,\ f(p(x)) = \int_{C=0} p(x)\ \mathrm{d}$

b) $g : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^2,\ g(p(x)) = p'(x)$.

c) Können Sie den Wertebereich von f so einschränken, dass f bijektiv ist? Falls ja, wie lautet die Umkehrabbildung von f?

Lösung 6a

Die Abbildung der Polynome maximal zweiten Grades auf ihre Stammfunktion aus den Polynomen maximal dritten Grades.

$$f : \begin{cases} \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^3 \\ p(x) \mapsto \int_{C=0} p(x)\ \mathrm{d} \end{cases}$$

Zur Bestimmung der Abbildungsmatrix nehmen wir die Monombasis $(1, x, x^2) \in \mathbb{P}^2$ und wenden die Abbildung f auf ihre Vektoren an.

$$f(1) = x \qquad f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 \qquad f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\\1/2\\0\end{pmatrix}$$

$$f\left(x^2\right) = \frac{1}{3}x^3 \qquad f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1/3\end{pmatrix}$$

Die Bilder der Basisvektoren sind die Spalten der Abbildungsmatrix. Somit erhalten wir:

$$A_f = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 1/2 & 0\\0 & 0 & 1/3\end{pmatrix}$$

Lösung 6b

Nach dem gleichen Verfahren erhalten wir für die Abbildung

$$g : \begin{cases}\mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^2\\ p(x) \mapsto p'(x)\end{cases}$$

die Abbildungsmatrix

$$A_g = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

Lösung 6c

Begrenzt man den Wertebereich der injektiven Abbildung f auf die Menge aller Polynome maximal vierten Grades ohne die Polynome vom Grad Null $\tilde{f} : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^3 \setminus \mathbb{P}^0$, so wird die Abbildung surjektiv und damit bijektiv.

Die Umkehrabbildung f^{-1} kann nun so angegeben werden:

$$f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{P}^3 \setminus \mathbb{P}^0 \to \mathbb{P}^2 \\ p(x) \mapsto p'(x) \end{cases}$$

Die Abbildungsmatrix von $A_{f^{-1}}$ ist entsprechend A_g aus dem Aufgabenteil b.

Aufgabe 7

Über eine lineare Abbildung f sei folgendes bekannt.

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\\alpha\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

a) Für welche Werte von α ist die Abbildungsmatrix A_f von f eindeutig bestimmt?

b) Bestimmen Sie die Matrix A_f in Abhängigkeit von α.

c) Bestimmen Sie den Kern und das Bild der Abbildung in Abhängigkeit von α.

Lösung 7

Wir betrachten die lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $V \subseteq \mathbb{R}^3$ und $W \subseteq \mathbb{R}^2$.
Wenn $\mathcal{B}_V = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\\alpha\end{pmatrix}\right)$ eine Basis von V ist, dann ist die Abbildungsmatrix eindeutig bestimmt. Also prüfen wir die Vektoren auf lineare Unabhängigkeit und stellen fest, dass für $\alpha = -1$ der dritte Vektor zu einer Linearkombination der ersten beiden wird. In einem solchen Fall ist die Abbildungsmatrix nicht eindeutig bestimmt. Wenn α