Aufgabe 1

Berechnen Sie mittels Polarkoordinaten das uneigentliche mehrdimensionale Integral

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \int\limits_{y=-\infty}^{\infty} \int\limits_{x=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

Lösung 1

Uneigentliche Integrale können mithilfe von Polarkoordinaten wie folgt gelöst werden:

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, \mathrm{d}y,x = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\infty} f(r\cdot\cos\phi, r\cdot\sin\phi)\cdot r\, \mathrm{d}(r,\phi)$$

Es gilt also

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\, \mathrm{d}(x,y) &= \lim_{n\to\infty} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{n} \mathrm{e}^{-\left((r\cdot\cos\phi)^2+(r\cdot\sin\phi)^2\right)}\cdot r\, \mathrm{d}(r,\phi) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{n} \mathrm{e}^{-r^2}\cdot r\, \mathrm{d}(r,\phi) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{n} r\cdot \mathrm{e}^{u}\frac{1}{-2r}\, \mathrm{d}(u,\phi) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{-1}{2}\cdot \int_{r=0}^{n} \mathrm{e}^{u}\, \mathrm{d}(u,\phi) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{-1}{2}\cdot \left[\mathrm{e}^{-r^2}\right]_{r=0}^{n}\, \mathrm{d}\phi \\
&= \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{-1}{2}\cdot \left(\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-n^2} - 1\right)\, \mathrm{d}\phi \\
&= \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{-1}{2}\cdot (-1)\, \mathrm{d}\phi \\
&= \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{1}{2}\, \mathrm{d}\phi \\
&= \left[\frac{1}{2}\phi\right]_{\phi=0}^{2\pi} \\
&= \pi
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie die folgenden Dreifachintegrale:

a) $\int\limits_{x=0}^{1}\int\limits_{y=0}^{1-x}\int\limits_{z=0}^{2-x} x\cdot y\cdot z\ dz\ dy\ dx$

b) $\int\limits_{\alpha=0}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{r=0}^{1}\int\limits_{z=0}^{2} z\cdot r^2\cdot\sin(\alpha)\ dz\ dr\ d\alpha$

Lösung 2a

$$\begin{aligned}
\int\limits_{x=0}^{1}\int\limits_{y=0}^{1-x}\int\limits_{z=0}^{2-x} x\cdot y\cdot z\ \mathrm{d}(z,y,x) &= \int\limits_{x=0}^{1}\int\limits_{y=0}^{1-x}\left[\frac{x\cdot y}{2}\cdot z^2\right]_{z=0}^{2-x}\ \mathrm{d}(y,x)\\
&= \int\limits_{x=0}^{1}\int\limits_{y=0}^{1-x}\frac{1}{2}\cdot x\cdot y\cdot(2-x)^2\ \mathrm{d}(y,x)\\
&= \int\limits_{x=0}^{1}\left[\frac{1}{4}\cdot x\cdot(2-x)^2\cdot y^2\right]_{y=0}^{1-x}\ \mathrm{d}x\\
&= \int\limits_{0}^{1}\frac{1}{4}\cdot x\cdot(2-x)^2\cdot(1-x)^2\ \mathrm{d}x\\
&= \int\limits_{0}^{1}\frac{1}{4}x^5-\frac{3}{2}x^4+\frac{13}{4}x^3-3x^2+x\ \mathrm{d}x\\
&= \left[\frac{1}{24}x^6-\frac{3}{10}x^5+\frac{13}{16}x^4-x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1\\
&= \frac{1}{24}-\frac{3}{10}+\frac{13}{16}-1+\frac{1}{2}\\
&= \frac{13}{240}
\end{aligned}$$

Lösung 2b

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{1} \int_{z=0}^{2} z \cdot r^2 \cdot \sin(\alpha)\ \mathrm{d}(z,r,\alpha) &= \int_{\alpha=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{1} \left[\frac{1}{2} r^2 \cdot \sin(\alpha) \cdot z^2\right]_{z=0}^{2}\ \mathrm{d}(r,\alpha) \\
&= \int_{\alpha=0}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{6} r^3 \cdot \sin(\alpha) \cdot 4\right]_{r=0}^{1}\ \mathrm{d}\alpha \\
&= \int_{\alpha=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{4}{6} \sin(\alpha)\ \mathrm{d}\alpha \\
&= \left[-\frac{2}{3}\cos(\alpha)\right]_{\alpha=0}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\frac{2}{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{3}\cos(0) \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Gegeben sei die Halbkugel

$$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 9,\ z \geq 0\}$$

mit der Dichte $\rho(x,y,z) = 1$.

a) Berechnen Sie die Masse der Halbkugel.

b) Berechnen Sie anschließend den Schwerpunkt der Halbkugel.

Lösung 3

Für das Rechnen mit Kugelkoordinaten, mit ϕ **auf** der x-y-Ebene und dem Winkel θ von der z-Achse auf die x-y-Ebene gilt:

$$\iiint f(x,y,z)\ \mathrm{d}(z,y,x) = \iiint f(r\cos\phi\sin\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\theta) \cdot |r^2 \sin\theta|\ \mathrm{d}(\theta,\phi,r)$$

Um die Halbkugel als Integral über das Gebiet H der Funktion $\rho(x,y,z)$ zu beschreiben, überlegen wir uns die Orientierung der Halbkugel im Koordinatensystem und die Darstellung in Kugelkoordinaten.
Um den Betrag im Integral zu behandeln, teilen wir das Integral in die Summer zweier Integrale auf.

$$
\begin{aligned}
\iiint\limits_H \rho(x,y,z)\ \mathrm{d}H &= \int_{r=0}^{3}\int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\theta=0}^{2\pi} 1\cdot |r^2\sin\theta|\ \mathrm{d}(\theta,\phi,r)\\
&= \int_{r=0}^{3}\int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\theta=0}^{\pi} r^2\sin\theta\ \mathrm{d}\theta + (-1)\cdot\int_{\theta=\pi}^{2\pi} r^2\sin\theta\ \mathrm{d}\theta\right)\ \mathrm{d}(\phi,r)\\
&= \int_{r=0}^{3}\int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\left[-r^2\cos\theta\right]_{\theta=0}^{\pi} + (-1)\cdot\left[-r^2\cos\theta\right]_{\theta=\pi}^{2\pi}\right)\ \mathrm{d}(\phi,r)\\
&= \int_{r=0}^{3}\int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(-r^2\cos(\pi)+r^2\cos(0)\right) - \left(-r^2\cos(2\pi)+r^2\cos(\pi)\right)\right)\ \mathrm{d}(\phi,r)\\
&= \int_{r=0}^{3}\int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}} 4r^2\ \mathrm{d}(\phi,r)\\
&= \int_{r=0}^{3}\left[4r^2\cdot\phi\right]_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}}\ \mathrm{d}r\\
&= \int_{r=0}^{3} 2r^2\cdot\pi\ \mathrm{d}r\\
&= \left[\frac{2}{3}\pi r^3\right]_{r=0}^{3}\\
&= \frac{2}{3}\pi\cdot 3^3\\
&= 18\pi
\end{aligned}
$$

Zur Probe rechnen wir das Volumen einer Kugel mit dem Radius $r = 3$ aus $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi$, halbieren dies und erhalten ebenfalls 18π.

Aufgabe 4

Berechnen Sie den Schwerpunkt einer Fläche, die von den gegebenen Funktionen begrenzt wird

a) $x = y^2$ und $x = 1$

b) $x = y^4$ und $x = 1$

Lösung 4a

Aufgrund der symmetrie der Parabel ist bekannt, dass $y_s = 0$ ist. Die Fläche F erhalten wir mit $F = \int_{x=0}^{1}\int_{y=-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} 1\ \mathrm{d}(y,x) = \frac{4}{3}$.

Für x_s gilt

$$\begin{aligned}
x_s &= \frac{1}{F}\int\limits_A x \; \mathrm{d}A \\
&= \frac{3}{4}\int\limits_0^1 \int\limits_{y=-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} x \; \mathrm{d}(y,x) \\
&= \frac{3}{4}\int\limits_0^1 \left[xy\right]_{y=-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \; \mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{4}\int\limits_0^1 x\cdot\sqrt{x} + x\cdot\sqrt{x} \; \mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{4}\int\limits_0^1 2x^{\frac{3}{2}} \; \mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{4}\left[\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 \\
&= \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5} \\
&= \frac{3}{5}.
\end{aligned}$$

Somit liegt der Schwerpunkt bei $(x_s, y_s) = \left(\frac{3}{5}, 0\right)$.

Lösung 4b

Aufgrund der symmetrie des Polynoms vierter Ordnung ist bekannt, dass $y_s = 0$ ist. Die Fläche F erhalten wir mit $F = \int_{x=0}^{1}\int_{y=-\sqrt[4]{x}}^{\sqrt[4]{x}} 1 \; \mathrm{d}(y,x) = \frac{8}{5}$.

Für x_s gilt

$$\begin{aligned}
x_s &= \frac{1}{F} \int\limits_A x \, \mathrm{d}A \\
&= \frac{5}{8} \int\limits_0^1 \int\limits_{y=-\sqrt[4]{x}}^{\sqrt[4]{x}} x \, \mathrm{d}(y,x) \\
&= \frac{5}{8} \int\limits_0^1 \left[xy \right]_{y=-\sqrt[4]{x}}^{\sqrt[4]{x}} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{5}{8} \int\limits_0^1 x \cdot \sqrt[4]{x} + x \cdot \sqrt[4]{x} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{5}{8} \int\limits_0^1 2x^{\frac{5}{4}} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{5}{8} \left[\frac{8}{9} x^{\frac{9}{4}} \right]_0^1 \\
&= \frac{5}{8} \cdot \frac{8}{9} \\
&= \frac{5}{9}.
\end{aligned}$$

Somit liegt der Schwerpunkt bei $(x_s, y_s) = \left(\frac{5}{9}, 0\right)$.

Aufgabe 5

Berechnen Sie das folgende Doppelintegral im Integrationsbereich A mithilfe der Polarkoordinaten

$$\int\limits_A \int \sqrt{4 - x^2 - y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

$$\text{mit} \qquad A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 4, y \geq |x| \right\}.$$

Lösung 5

Das Gebiet ist ein Kreis vom Radius $r = 2$, welcher durch $y \geq x \land y \geq -x$ zu einem Viertelkreis beschnitten wird.

$$
\begin{aligned}
\int\int_A \sqrt{4-x^2-y^2}\, \mathrm{d}(x,y) &= \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \int_0^2 \sqrt{4-(r\cdot\cos\phi)^2-(r\cdot\sin\phi)^2}\cdot r\ \mathrm{d}(r,\phi) \\
&= \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \int_0^2 \sqrt{4-r^2\cdot(\cos^2\phi+\sin^2\phi)}\cdot r\ \mathrm{d}(r,\phi) \\
&= \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \int_0^2 \sqrt{4-r^2}\cdot r\ \mathrm{d}(r,\phi) \\
&= \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \left[-\frac{1}{3}\left(4-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2\ \mathrm{d}\phi \\
&= \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{1}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}}\ \mathrm{d}\phi \\
&= \left[\frac{8}{3}\phi\right]_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \\
&= \frac{8}{3}\cdot\frac{3}{4}\pi-\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{4}\pi \\
&= \frac{4}{3}\pi
\end{aligned}
$$