

## Aufgabe 5

Sei  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ .

- Lassen Sie eine KI Ihrer Wahl, z.B. ChatGPT, mehrfach die Eigenwerte und Eigenvektoren von  $A$  berechnen.
- Bewerten Sie die KI-Lösungen.
- Kopieren Sie eine fehlerhafte KI-Antwort und markieren Sie die Fehler.
- Wie kann man erkennen, dass die Lösung falsch war, ohne die gesamte Lösung durchzugehen?

## Lösung 5

Die Eigenwerte von  $A$  sind  $\lambda_1 = -3$  und  $\lambda_2 = 3$ . Die Eigenvektoren sind

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die folgende Ausgabe wurde am 14.06.2023 mit OpenAIs ChatGPT in der Version May 24 generiert. [1] Für eine bessere Darstellung in diesem Dokument wurden minimale Änderungen an der Formatierung vorgenommen und Umbrüche hinzugefügt. Die rot unterlegten Boxen wurden nachträglich hinzugefügt. Die Originalausgabe kann hier nachgelesen werden. [2].



Given the matrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ , compute its eigenvalues and eigenvectors step by step and check your results.



To compute the eigenvalues and eigenvectors of the matrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ , we follow these steps:



Step 1: Compute the characteristic equation. The characteristic equation is given by  $\det(A - \lambda I) = 0$ , where  $I$  is the identity matrix and  $\lambda$  is the eigenvalue we want to find.

Let's compute  $A - \lambda I$ :

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 4 & -1 - \lambda \end{pmatrix}.$$



Step 2: Calculate the determinant.  
We need to find the determinant of  $A - \lambda I$ .

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 4 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(-1 - \lambda) - (2 \cdot 4) = \lambda^2 - 2\lambda - 9.$$

Das charakteristische Polynom müsste  $\lambda^2 - 9$  sein. Der Fehler wird in den nächsten Schritt übernommen, jedoch wird die quadratische Gleichung dennoch richtig gelöst und die Eigenwerte korrekt bestimmt:



Step 3: Solve the characteristic equation. Set the determinant equal to zero and solve for  $\lambda$ .

$$\lambda^2 - 2\lambda - 9 = 0$$

To solve this quadratic equation, we can factor it or use the quadratic formula.

Factoring it, we get:

$$(\lambda - 3)(\lambda + 3) = 0$$

So, the eigenvalues are  $\lambda_1 = 3$  and  $\lambda_2 = -3$ .



Step 4: Compute the eigenvectors. To find the eigenvectors corresponding to each eigenvalue, we substitute the eigenvalues into the equation  $(A - \lambda I) \cdot v = 0$  and solve for  $v$ .

For  $\lambda_1 = 3$ :

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Reducing this matrix to row-echelon form, we get:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

From this, we can see that  $x_1 - x_2 = 0$ .

Choosing  $x_2 = t$  as a free variable, we get  $x_1 = t$ .

Therefore, the eigenvector corresponding to  $\lambda_1 = 3$  is  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .



For  $\lambda_2 = -3$ :

$$A - (-3)I = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Reducing this matrix to row-echelon form, we get:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

From this, we can see that  $2x_1 + x_2 = 0$ .

Choosing  $x_2 = t$  as a free variable, we get  $x_1 = -\frac{1}{2}t$ .

Therefore, the eigenvector corresponding to  $\lambda_2 = -3$  is  $v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ .



Step 5: Check the results. To check our results, we can multiply  $A$  by each eigenvector and see if we obtain the corresponding eigenvalue times the eigenvector.

For  $\lambda_1 = 3$ :

$$Av_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 v_1$$

For  $\lambda_2 = -3$ :

$$Av_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_2 v_2$$

Both results confirm that the calculated eigenvalues and eigenvectors are correct.

Das Ergebnis der zweiten Prüfung müsste  $\left(\frac{3}{2}, -3\right)^T$  lauten, aber die Schlussfolgerung ist korrekt.

Auf Rückfrage bzgl. des ersten Fehlers vermutet ChatGPT zunächst einen Vorzeichenfehler gemacht zu haben.



Are you sure about the  $-2\lambda$  in Step 2?



Apologies for the mistake. You are correct. In Step 2, the correct calculation should be:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 4 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(-1 - \lambda) - (2 \cdot 4) = \lambda^2 + 2\lambda - 9.$$

I apologize for the confusion caused by the incorrect sign in the previous response. Let me proceed with the correct calculation.

Using the corrected characteristic equation:

$$\lambda^2 + 2\lambda - 9 = 0$$

[...]

Erst mit dem folgenden Hinweis, kommt ChatGPT auf die richtige Fährte.



What if I told you, that the characteristic equation is in fact  $\lambda^2 - 9 = 0$ ?



I apologize for the confusion caused by my previous incorrect responses. You are absolutely right. The characteristic equation for the matrix  $A$  should indeed be  $\lambda^2 - 9 = 0$ .

Let's continue with the computation of eigenvectors using the corrected characteristic equation.

For  $\lambda_1 = 3$ :

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 1 - 3 & 2 \\ 4 & -1 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Reducing this matrix to row-echelon form, we have:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

From this, we can see that  $x_1 - x_2 = 0$ .

Choosing  $x_2 = t$  as a free variable, we get  $x_1 = t$ .

Therefore, the eigenvector corresponding to  $\lambda_1 = 3$  is  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .



For  $\lambda_2 = -3$ :

$$A - (-3)I = \begin{pmatrix} 1+3 & 2 \\ 4 & -1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Reducing this matrix to row-echelon form, we have:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

From this, we can see that  $2x_1 + x_2 = 0$ .

Choosing  $x_2 = -2t$  as a free variable, we get  $x_1 = t$ .

Therefore, the eigenvector corresponding to  $\lambda_2 = -3$  is  $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

Again, I apologize for the previous mistakes, and thank you for pointing them out.

Auch diese Ergebnisse kann man, wie ChatGPT in Schritt 5 richtig beschrieben hat, wie folgt überprüfen:

$$Av_i \stackrel{?}{=} \lambda_i v_i$$

Ob die Argumentation und die Zwischenschritte jedoch richtig sind, kann man allein durch die Prüfung der Endergebnisse nicht herausfinden. Wie Turpin et al. [3] gezeigt haben, dürfen die Erklärungen beim Chain-of-Thought Prompting auch nicht mit den tatsächlichen Gründen verwechselt werden, aus denen LLM eine Ausgabe generiert.

## Aufgabe 6

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrizen

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{b) } B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie auch eventuelle komplexe Eigenwerte und Eigenvektoren. Ein komplexes Gleichungssystem können Sie wie ein reelles Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren lösen.

## Lösung 6a

Wir ermitteln die Eigenwerte durch lösen der charakteristischen Gleichung.

$$\begin{aligned} 0 &= \det(A - \lambda E) \\ \Leftrightarrow 0 &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ \Leftrightarrow 0 &= (2-\lambda)^2 - 4 \\ \Leftrightarrow 0 &= \lambda^2 - 4\lambda \end{aligned}$$

Somit erhalten wir die Eigenwerte  $\lambda_1 = 4$  und  $\lambda_2 = 0$ . Um die zugehörigen Eigenvektoren zu erhalten, setzen wir lösen wir die Gleichung  $(A - \lambda E) \cdot v = 0$  nach  $v$ .

$$\begin{aligned} 0 &= (A - \lambda_1 E) \cdot v \\ \Leftrightarrow 0 &= \begin{pmatrix} 2-4 & 4 \\ 1 & 2-4 \end{pmatrix} \cdot v \\ \Leftrightarrow 0 &= \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot v \end{aligned}$$

Wir addieren zwei mal die zweite Zeile zur ersten Zeilen und bestimmen  $x_1 = t$  als freie Variable. Damit erhalten wir  $x_2 = t/2$  und den zu  $\lambda_1 = 4$  gehörigen Eigenvektor  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ .

Für  $\lambda_2 = 0$  verfahren wir ebenso und erhalten  $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

## Lösung 6b

Wir bestimmen  $|B - \lambda E| = 0$  also  $(3 - \lambda)(5 - \lambda) + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 17 = 0$  und erhalten die komplexen Eigenwerte  $\lambda_1 = 4 + i$  und  $\lambda_2 = 4 - i$ .

Für  $\lambda_1$  bestimmen wir  $v_1$ .

$$\begin{aligned} 0 &= (B - \lambda_1 E) \cdot v \\ \Leftrightarrow 0 &= \begin{pmatrix} -1-i & -1 \\ 2 & 1-i \end{pmatrix} \cdot v \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} -1-i & -1 \\ 2 & 1-i \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & (1-i)/2 \\ 2 & 1-i \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & (1-i)/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit  $x_2 = t$  erhalten wir  $x_1 = t \cdot (-\frac{1}{2} + \frac{i}{2})$  und den zu  $\lambda_1 = 4 + i$  gehörigen Eigenvektor  $v_1 = \begin{pmatrix} -1+i \\ 2 \end{pmatrix}$ .

Für  $\lambda_2 = 4 - i$  kommt man entsprechend auf den Eigenvektor  $v_2 = \begin{pmatrix} -1-i \\ 2 \end{pmatrix}$ .

## Aufgabe 7

Eine Abbildung im  $\mathbb{R}^2$  ist wie folgt definiert: Ein gegebener Vektor  $x$  wird zuerst um  $90^\circ$  im Uhrzeigersinn gedreht und anschließend an der  $y$ -Achse gespiegelt.

- Das Vielfache welchen Vektors wird auf sich selbst abgebildet?
- Die Abbildung welchen Vektors (bzw. des Vielfachen diesen Vektors) zeigt genau in die entgegengesetzte Richtung?
- Stellen Sie die zugehörige Abbildungsmatrix  $A$  auf.

- d) Bestimmen Sie die Eigenwerte von  $A$ . Passen diese zu den Beobachtungen aus a) und b)?

### Lösung 7a

Dreht man bspw. den Vektor  $(1, -1)^T$  um  $90^\circ$  im Uhrzeigersinn  $(-1, -1)^T$  und spiegelt ihn an der  $y$ -Achse, so erhält man wieder den Ursprungsvektor  $(1, -1)^T$ . Dies gilt auch alle Vielfachen des Vektors.

### Lösung 7b

In die entgegengesetzte Richtung nach Anwendung der Transformationen zeigen die Vektoren  $(1, 1)^T$ ,  $(-1, -1)^T$ , sowie weitere Vielfache.

### Lösung 7c

Die Abbildungsmatrix der Transformationen ergibt sich als Produkt der Rotationsmatrix

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

sowie der Spiegelmatrix

$$S_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

zu

$$\begin{aligned} A &= S_y \cdot R_{\frac{\pi}{2}} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### Lösung 7d

Die charakteristische Gleichung der Abbildungsmatrix  $A$  lautet  $\lambda^2 - 1 = 0$  und die Eigenwerte sind somit  $\lambda_1 = 1$  und  $\lambda_2 = -1$ .

Zu  $\lambda_1$  gehört der Eigenvektor  $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  und zu  $\lambda_2$  der Eigenvektor  $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Der Vektor  $v_1$  passt zu unserem Ergebnis aus 7a) mit  $(-1) \cdot v_1 = (1, -1)^T$ . Der Vektor  $v_2$  passt zu dem Ergebnis aus 7b).

## Aufgabe 8

Bei welchen Werten  $a, b$  hat die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

- a) zwei verschiedene reelle Eigenwerte?
- b) einen (doppelten) reellen Eigenwert?
- c) keine reellen Eigenwert?

## Lösung 8

Wir bestimmen die allgemeine charakteristische Gleichung und formen in einer Weise um, die uns den Koeffizientenvergleich mit der  $p$ - $q$ -Formel erlaubt.

$$\begin{aligned} 0 &= \det(A - \lambda E) \\ &= \begin{vmatrix} a - \lambda & -1 \\ 1 & b - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (a - \lambda)(b - \lambda) + 1 \\ &= ab - a\lambda - b\lambda + \lambda^2 + 1 \\ &= \lambda^2 - \underbrace{(a + b)}_{:=p} \cdot \lambda + \underbrace{ab + 1}_{:=q} \end{aligned}$$

Mit  $\lambda = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$  können wir nun durch Betrachtung der Diskriminante erkennen, dass

- a) zwei verschiedene reelle Eigenwerte genau dann vorliegen, wenn  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 > q$ , also  $(a - b)^2 > 4$
- b) ein doppelter reeller Eigenwert genau dann vorliegt, wenn  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = q$ , also  $(a - b)^2 = 4$
- c) keine reellen Eigenwerte vorliegen, genau dann wenn  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 < q$ , also  $(a - b)^2 < 4$ .



## Literatur

- [1] OpenAI, *ChatGPT*, <https://openai.com>, Version May 24, accessed on 2023-06-14, 2021.
- [2] C. R. Thelen, *Conversation with ChatGPT: Eigenvalues & Eigenvectors*, Chat with OpenAI's ChatGPT model, Version May 24, accessed on 2023-06-14, Juni 2023. Adresse: <https://chat.openai.com/share/c48bc91a-607c-4f7f-ba5c-b763724586ce>.
- [3] M. Turpin, J. Michael, E. Perez und S. R. Bowman, *Language Models Don't Always Say What They Think: Unfaithful Explanations in Chain-of-Thought Prompting*, 2023. arXiv: [2305.04388](https://arxiv.org/abs/2305.04388) [cs.CL].