Aufgabe 1

Sei $\Sigma = \{o, p, t, r\}$. Bestimmen Sie die Mächtigkeit der folgenden Sprachen:

a) $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält } otto \text{ als Teilwort und } |w| = 7\}$

b) $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält } otto \text{ als Teilwort und } |w| \leq 7\}$

c) $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid |w| = 5 \vee |w| = 6\}$

d) $L_4 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_o = 2 \wedge |w|_t = 2 \wedge |w| = 5\}$

e) $L_5 = \big\{w \in \Sigma^* \bigm| |w| = 7 \wedge \big(w \in L_2 \vee |w|_r = 2\big)\big\}$

Lösung 1a

Es gibt vier Positionen, an denen das Wort *otto* stehen kann, sowie jeweils drei weitere Stellen, an denen ein beliebiger Buchstabe stehen kann. Außerdem gibt es noch eine Dopplung im Fall *ottotto*, welche nicht doppelt gezählt werden darf.

$$|L_1| = 4 \cdot 4^3 - 1 = 255$$

Lösung 1b

Für $|w| \leq 4$ gibt es genau ein Wort, nämlich das Teilwort selbst. Für $|w| = 5$ gibt es zwei mögliche Positionen für das Teilwort und jeweils eine weitere Stelle $2 \cdot 4^1$. Für $|w| = 6$ gibt es drei mögliche Positionen und jeweils zwei weitere Stellen $3 \cdot 4^2$ und für $|w| = 7$ entsprechend $|L_1|$ viele Möglichkeiten.

$$|L_2| = 1 + 2 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4^3 - 1 = 1 + 8 + 48 + 255 = 312$$

Lösung 1c

$$|L_3| = 4^5 + 4^6 = 5120$$

Lösung 1d

Für den ersten Buchstaben gibt es 2 von 5 möglichen Positionen, für den zweiten Buchstaben gibt es 2 von 3 verbliebenen Positionen. Der letzte Buchstabe kann entweder p oder r sein.

$$\begin{aligned}
|L_4| &= \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} \cdot 2^1 \\
&= \frac{5!}{(5-2)! \cdot 2!} \cdot \frac{3!}{(3-2)! \cdot 2!} \cdot 2^1 \\
&= 10 \cdot 3 \cdot 2 \\
&= 60
\end{aligned}$$

Lösung 1e

Es gilt $L_1 = \{w \in L_2 || w| = 7\}$, jedoch muss beachtet werden, dass die Anzahl der Konfigurationen in L_1, in denen bereits zweimal der Buchstabe r auftritt $\{w \in \Sigma^* \mid w \in L_1 \wedge |w|_r = 2\}$, also

$$\binom{4}{1} \cdot \binom{3}{2} \cdot 3^1 = 4 \cdot 3 \cdot 3 = 36,$$

nicht doppelt gezählt werden.
Betrachtet man die Ziehung ohne Zurücklegen von 2 aus 7 Positionen, multipliziert mit den jeweils 3 möglichen Belegungen der übrigen 5 Positionen, so ergeben sich insgesamt

$$\binom{7}{2} \cdot 3^5 = \frac{7!}{(7-2)! \cdot 2!} \cdot 3^5 = 21 \cdot 243 = 5103$$

Möglichkeiten den Buchstaben r in einem Wort der Länge 7 unterzubringen.

Für die Mächtigkeit von L_5 ergibt sich sodann

$$\begin{aligned} |L_5| &= |L_1| - 36 + 5103 \\ &= 5322. \end{aligned}$$