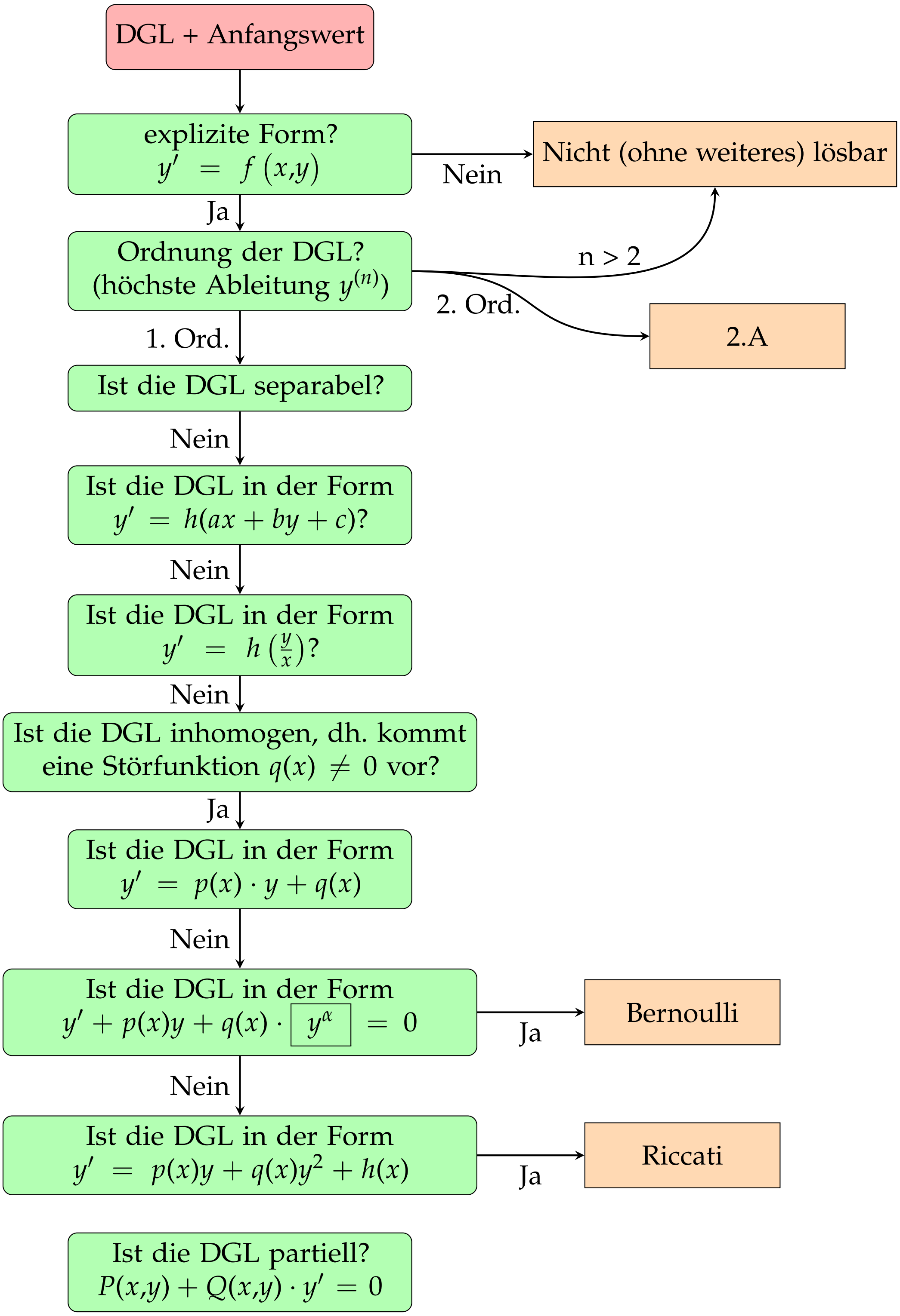
Im Zusammenhang mit *gewöhnlichen* Differenzialgleichungen (DGLs), also Gleichungen, in denen Ableitungen der Funktion $y(x)$ nach nur *einer* Veränderlichen x vorkommen, schreiben wir zu besseren Übersichtlichkeit $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ statt $y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)$. Bei *partiellen* DGLs, also jene mit mehreren Veränderlichen, werden diese wie gewohnt angegeben.


DGL + Anfangswert
explizite Form? $y' = f(x,y)$
Nein
Nicht (ohne weiteres) lösbar
Ja
Ordnung der DGL? (höchste Ableitung $y^{(n)}$)
n > 2
2. Ord.
2.A
1. Ord.
Ist die DGL separabel?
Nein
Ist die DGL in der Form $y' = h(ax + by + c)$?
Nein
Ist die DGL in der Form $y' = h\left(\frac{y}{x}\right)$?
Nein
Ist die DGL inhomogen, dh. kommt eine Störfunktion $q(x) \neq 0$ vor?
Ja
Ist die DGL in der Form $y' = p(x) \cdot y + q(x)$
Nein
Ist die DGL in der Form $y' + p(x)y + q(x) \cdot \boxed{y^\alpha} = 0$
Ja
Bernoulli
Nein
Ist die DGL in der Form $y' = p(x)y + q(x)y^2 + h(x)$
Ja
Riccati
Ist die DGL partiell? $P(x,y) + Q(x,y) \cdot y' = 0$

Lösen von gewöhnlichen Differenzialgleichungen

Ist die DGL nicht in expliziter From gegeben, also ist y' nicht freigestellt, so können wir sie nicht ohne Weiteres lösen.
Ist sie in expliziter Form gegeben, also in der Form $y'(x) = f(x,y(x))$ bestimmen wir als nächstes die Ordnung der DGL.
1. Ordnung siehe [1.A] 2. Ordnung siehe [2.A] Höherer Ordnung: Können wir nicht lösen.

DGLs 1. Ordnung

[1.A]

Ist die DGL separabel? Ja -> [1.B], Nein -> [1.C]

[1.B]

Die DGL ist separabel, also können wir durch Trennung der Variablen lösen.

Beispiel:

$$y' = x \cdot y^2$$

1. Fall: $y(x) = 0$ ist eine triviale Lösung.
2. Fall: $y(x) \neq 0$ Trennung der Variablen.

$$\begin{aligned} && \int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y &= \int x\,\mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow && -\frac{1}{y} &= \frac{x^2}{2} + c \\ \Leftrightarrow && y &= -\frac{2}{x^2} + \tilde{c} \end{aligned}$$

[1.C]

Die DGL ist nicht separabel.

Ist die DGL in der Form

$$y' = h(ax + by + c)\ ?$$

Dann können wir durch Substitution lösen.
Beispiel:

$$y' = (x - y + 3)^2, \quad y(1) = 1$$

Wir substituieren mit $z(x) := x - y + 3$ und leiten nach x ab:

$$\begin{aligned} z(x) &= x - y(x) + 3 \\ z'(x) &= 1 - y'(x) \\ &= 1 - z^2(x) \end{aligned}$$

Nun können wir den Anfangswert $y(1) = 1$ an der Stell $x = 1$ in die Funktion einsetzen.

$$\begin{array}{rcllr} z(1) & = & 1 & -y(1) & +3 \\ & = & 1 & -1 & +3 \\ & = & 3 & & \end{array}$$

Wenn die neue DGL, die wir durch die Substitution erhalten haben, separabel ist, können wir nach **[1.B]** weiterverfahren. Da unser Beispiel $z' = 1 - z^2$ nicht separabel ist, müssen wir stattdessen Lösen und Rücksubstituieren.
Im Beispiel fahren wir fort mit
Ist die DGL in der Form

$$y' = h\left(\frac{y}{x}\right)$$

[D]

Wenn nicht der Form $y'(x) = p(x) \cdot y + g(x)$, dann untersuchen wir, ob die DGL in einer speziellen Form vorliegt.
Liegt eine Bernoulli DGL vor?

$$\begin{aligned} y'(x) + f(x) \cdot y(x) &= g(x) \cdot y^{\alpha} \\ y'(x) + p(x) \cdot y(x) &= q(x) \cdot {\color{red} y(x)^{\alpha}} \end{aligned}$$

Wenn ja:

$$\begin{aligned} z(x) &= y(x)^{1-\alpha} \\ z'(x) &= \underbrace{(1-\alpha) \cdot p(x)}_{=\tilde{p}} \cdot z(x) + \underbrace{(1-\alpha) \cdot q(x)}_{=\tilde{q}} \end{aligned}$$

Wir erhalten die Form wie [C.1] und lösen entsprechend.

Beispiel:

$$(1+x) \cdot y' + y = -(1+x)^2 \cdot y^4, \quad y(0) = 1$$

Um zu erkennen, dass es sich um eine Bernoulli DGL handelt, formen wir wir folgt um:

$$\begin{aligned} (1+x) \cdot y' + y &= -(1+x)^2 \cdot y^4 \\ \Leftrightarrow y' &= \frac{-y}{1+x} - \frac{(1+x)^2}{1+x} \cdot y^4, \quad x \neq -1 \\ \Leftrightarrow y' &= \underbrace{\frac{-1}{1+x}}_{p(x)} \cdot y \underbrace{- \frac{(1+x)^2}{1+x}}_{q(x)} \cdot y^4, \quad \alpha = 4 \end{aligned}$$

Substituiere: $z(x) = y(x)^{1-\alpha} = y(x)^{-3}$

$$\begin{aligned} z'(x) &= (1-\alpha)\cdot p(x)\cdot z(x) + (1-\alpha)\cdot q(x) \\ &= -3(\frac{-1}{1+x}z(x) + 3(1+x)), \quad z(0) = y(0)^{-3} = 1 \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} P(x) &= \int_0^x p(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^x \frac{3}{1+\tau}\,\mathrm{d}\tau \\ &= 3\ln(1+x) - 0 \\ &= 3\ln(1+x) \end{aligned}$$

bestimmen wir:

$$\begin{aligned} z_h(x) &= 1\cdot e^{P(x)} \\ &= 1\cdot \mathrm{e}^{\ln(1+x)^3} \\ &= (1+x)^3 \end{aligned}$$

Die Bestimmung der homogenen Lösung z_h, weicht am Standort Aachen dadurch ab, dass wir $f(x) = -p(x)$ setzen. Ansonsten sind die Verfahren gleich.

$$\begin{aligned} z_h'(x) + f(x)\cdot z(x) &= 0 \\ z_h'(x) - \frac{3}{1+x}\cdot z(x) &= 0 \\ z_h'(x) &= \frac{3}{1+x}z(x) \\ \int \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z &= \int \frac{3}{1+x}\,\mathrm{d}x \\ \ln(z_h) &= \int \frac{3}{1+x}\,\mathrm{d}x \\ z_h(x) &= \mathrm{e}^{\int \frac{3}{1+x}\,\mathrm{d}x} \\ &= \mathrm{e}^{3\ln(1+x)+\tilde{c}} \\ &= c\cdot \mathrm{e}^{\ln((1+x)^3)} \\ &= c\cdot (1+x)^3 \\ z_h(0) &= c\cdot 1 \Leftrightarrow c = 1 \\ z_h(x) &= (1+x)^3 \end{aligned}$$

Zur Bestimung der partikulären Lösung. Dies lässt sich auch mit Ansatz vom Typ der rechten Seite machen. Wir wählen jedoch Variation der Konstanten:

$$\begin{aligned}
z_p(x) &= \mathrm{e}^{P(x)} \cdot c(x) \\
&= \mathrm{e}^{P(x)} \cdot \int_0^x q(\tau)\mathrm{e}^{-P(\tau)}\, \mathrm{d}\tau \\
&= (1+x)^3 \int_0^x 3(1+\tau)\mathrm{e}^{-\ln((1+\tau)^3)}\, \mathrm{d}\tau \\
&= (1+x)^3 \int_0^x 3(1+\tau)\mathrm{e}^{\ln\frac{1}{(1+\tau)^3}}\, \mathrm{d}\tau \\
&= (1+x)^3 \int_0^x 3(1+\tau)\frac{1}{(1+\tau)^3}\, \mathrm{d}\tau \\
&= (1+x)^3 \int_0^x \frac{3}{(1+\tau)^2}\, \mathrm{d}\tau \\
&= (1+x)^3 \left[-\frac{1}{1+\tau}\right]_0^x \\
&= -3(1+x)^2 + 3(1+x)^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z(x) &= z_h(x) + z_p(x) \\
&= (1+x)^3 - 3(1+x)^2 + 3(1+x)^3 \\
&= 4(1+x)^3 - 3(1+x)^2
\end{aligned}$$

Rücksubstitution:

$$\begin{aligned}
y(x) &= \frac{1}{\sqrt[3]{z(x)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt[3]{4(1+x)^3 - 3(1+x)^2}}
\end{aligned}$$

[E]

Ist die DGL in der Form?

$$P(x,y) + Q(x,y) \cdot y' = 0$$

Wenn ja, ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt?

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \stackrel{?}{=} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

Beispiel:

$$x^2 - y = (x + \sin^2(y)) \cdot y'$$

Wir stellen um, damit sich diese Form ergibt:

$$\begin{aligned} x^2 - y &= (x + \sin^2(y)) \cdot y' \\ \Leftrightarrow \quad \underbrace{(x^2 - y)}_{P(x,y)} + \underbrace{(-(x + \sin^2(y)))}_{Q(x,y)} \cdot y' &= 0 \end{aligned}$$

Integrabilitätsbedingung erfüllt?

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -1$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = -1$$

$\Rightarrow$ Ja, Integrabilitätsbedingung erfüllt.

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int P(x,y)\,\mathrm{d}x = \int x^2 - y\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^3}{3} - yx + c_1(y) \\ F(x,y) &= \int Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int -x - \sin^2(y)\,\mathrm{d}y \\ &= -yx - \frac{1}{2}y + \frac{1}{y}\sin(2y) + c_2(x) \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich gibt uns die Potenzialfunktion $F(x,y)$

$$F(x,y) = \frac{x^3}{3} - xy - \frac{1}{2}y + \frac{1}{y}\sin(2y) = c$$

In Aachen setzen wir üblicherweise $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \stackrel{!}{=} Q(x,y)$ gleich und lösen dann die Gleichung nach $c_1 * y'$ auf.

[F]

Oder in der From?

$$P(x,y) + Q(x,y) \cdot y' = f(x)$$

Beispiel:

$$\underbrace{y}_{P(x,y)} \underbrace{-(2x+y)}_{Q(x,y)} \cdot y' = 0$$

Integrabilitätsbedingung:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 1$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = -2$$

Nein, ist nicht erfüllt. -> Finde den integrierenden Faktor:

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial y} = 3$$

Versuche:

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial y}}{P} = \frac{3}{y} =: g(y)$$

Suche nach einer Funktion in Abhängigkeit von y.

$$\mu(y) = \mathrm{e}^{-\int g(y)\ \mathrm{d}y} = \mathrm{e}^{-3\ln y} = \frac{1}{y^3}$$

$$y - (2x+y) \cdot y' = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{y^2}}_{P(x,y)} \underbrace{-\left(\frac{2x}{y^3} + \frac{1}{y^2}\right)}_{Q(x,y)} = 0$$

Neue Integrabilitätsbedingung:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{2}{y^3}$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = -\frac{2}{y^3}$$

IB ist nun erfüllt.

$$F(x,y) = \int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{y^2} + c_1(y) + 0$$
$$F(x,y) = \int -\frac{2}{y^3} - \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y} + c_2(x)$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$F(x,y) = \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y} = c$$

Können wir nach y freistellen? Nein, also fertig.

DGLs 2. Ordnung

[2.A]

Homogene DGL 2. Ordnung. (für inhomogene DGLs 2. Ordnung ist auch eine Lösung mit Variation der Kontanten möglich).

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad y(\zeta) = \eta_1,\, y'(\zeta) = \eta_2$$

Ansatz: $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$.

$$\lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda x} + a\lambda \mathrm{e}^{\lambda x} + b\mathrm{e}^{\lambda x} = 0$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\lambda x} \cdot \underbrace{\left(\lambda^2 + a\lambda + b\right)}_{=0} = 0$$

charakteristische Gleichung
Entscheidung anhand der Diskriminanten der Charakteristischen Gleichgung.

$$D = \frac{a^2}{4} - b \tag{1}$$

(2)

Wenn $D > 0$ haben wir zwei reelle Nullstellen, λ_1, λ_2.

$$y(x) = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + c_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$$

Wenn $D = 0$ haben wir eine reelle (doppelte) Nullstelle λ.

$$y(x) = c_1 \mathrm{e}^{\lambda x} + c_2 \cdot x \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}$$

Wenn $D < 0$ liegen zwei komplexe Nullstellen vor. $\lambda_1 = w + \mathrm{i}v$, $\lambda_2 = w - \mathrm{i}v$

$$y(x) = \mathrm{e}^{wx} \cdot (c_1 \cos(vx) + c_2 \sin(vx))$$