Aufgabe 7

Die Abbildung $f : A \to B$, wobei $A = \mathbb{Z}$ und $B = \mathbb{Z}$ sind, sei folgendermaßen definiert:

$$f(a) = a \bmod 17.$$

a) Handelt es sich um eine lineare Abbildung?

b) Wie lautet der Kern von f?

c) Zeigen Sie, dass die Abbildung weder surjektiv noch injektiv ist.

d) Welche Möglichkeiten gibt es, A und B zu wählen, damit die Abbildung bijektiv ist?

Lösung 7a

Die Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ist genau dann linear, wenn sie additiv und homogen ist.
Additivität:

$$f(a+y) = (a+y) \mod 17$$

$$f(a) + y = (a \bmod 17) + y$$

$$\Rightarrow f(a+y) \neq f(a) + y$$

Die Abbildung ist nicht linear, da sie nicht additiv ist.

Lösung 7b

Der Kern von f ist die Menge aller Vielfachen von 17:

$$\ker(f) = f^{-1}(0) = \{n \cdot 17 | n \in \mathbb{Z}\}$$

Lösung 7c

Die Abbildung ist nicht injektiv, da nicht jedes Element der Zielmenge maximal einmal als Funktionswert angenommen wird. Beispiel: $f(1) = f(18) = 1$.

Die Abbildung ist nicht surjektiv, weil nicht jedes Element der Zielmenge mindestens einmal als Funktionswert angenommen wird. Beispiel: $18 \in \mathbb{Z}$ aber $18 \notin B$.

Lösung 7d

Man könnte den Definitionsbereich auf das Intervall $A = [n; n + 16]$, $n \in \mathbb{Z}$ für ein beliebiges $n \geq 0$ einschränken um die Abbildung injektiv zu machen und den Wertebereich auf das Intervall $B = [0; 16]$ zuschneiden, damit die Abbildung surjektiv wird.

Die Abbildung $f : [n; n + 16] \rightarrow [0; 16], n \in \mathbb{Z}$ wäre bijektiv.