Aufgabe 1

Lösen Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y' &= 5y - z \\ z' &= 2y + 8z \end{aligned}$$

Lösung 1

Wir stellen die erste Gleichung nach z um und leiten ab.

$$\begin{aligned} z &= 5y - y' \\ z' &= 5y' - y'' \end{aligned}$$

Nun setzen wir in die zweite Gleichung ein.

$$\begin{aligned} & z' &&= 2y + 8z \\ \Leftrightarrow\quad & 5y' - y'' &&= 2y + 40y - 8y' \\ \Leftrightarrow\quad & 0 &&= 42y - 13y' + y'' \end{aligned}$$

Wir lösen die homogene DGL mit Hilfe der charakteristischen Gleichung.

$$\begin{aligned} & 0 &&= \lambda^2 - 13\lambda + 42 \\ \Leftrightarrow\quad & \lambda &&= \tfrac{13}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{13}{2}\right)^2 - 42} \\ \Rightarrow\quad & \lambda_1 = 7 \,\wedge\, \lambda_2 = 6 \end{aligned}$$

Und erhalten die allgemeine Lösung der ersten DGL, welche wir dann ableiten können.

$$\begin{aligned} y(x) &= c_0 \mathrm{e}^{7x} + c_1 \mathrm{e}^{6x} \\ y'(x) &= 7c_0 \mathrm{e}^{7x} + 6c_1 \mathrm{e}^{6x} \end{aligned}$$

Mit ersten nach z umgestellten DGL können wir durch Einsetzen sodann auch $z(x)$ bestimmen:

$$\begin{aligned} z(x) &= 5y - y' \\ &= 5c_0 \mathrm{e}^{7x} + 5c_1 \mathrm{e}^{6x} - 7c_0 \mathrm{e}^{7x} - 6c_1 \mathrm{e}^{6x} \\ &= -2c_0 \mathrm{e}^{7x} - c_1 \mathrm{e}^{6x} \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems lautet somit:

$$\begin{aligned} y &= c_0 \mathrm{e}^{7x} + c_1 \mathrm{e}^{6x} \\ z &= -2c_0 \mathrm{e}^{7x} - c_1 \mathrm{e}^{6x} \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Lösen Sie das folgende Differentialgleichungssystem

$$y' = z \tag{1}$$
$$z' = -y - 5z + \sin(x) \tag{2}$$

Lösung 2

Wir formen die Gleichung (1) nach z um und leiten nach x ab.

$$z = y' \tag{3}$$
$$z' = y'' \tag{4}$$

Dann setzen wir die Gleichungen (3) und (4) in die Gleichung (2) ein und erhalten

$$y'' = -y - 5y' + \sin(x).$$

Wir bestimmen die homogene Lösung der DGL mit Hilfe der charakteristischen Gleichung $\lambda^2 + 5\lambda + 1 = 0$, welche die Lösungen

$$\lambda = -\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{21}}{2}$$

hat. Wir erhalten somit

$$y_h = c_0 e^{-\frac{5+\sqrt{21}}{2}x} + c_1 e^{-\frac{5-\sqrt{21}}{2}x}.$$

Aus $z = y'$ folgt unser z_h.

$$\begin{aligned} y_h' &= -\frac{5+\sqrt{21}}{2} c_0 e^{-\frac{5+\sqrt{21}}{2}x} - \frac{5-\sqrt{21}}{2} c_1 e^{-\frac{5-\sqrt{21}}{2}x} \\ &= z_h \end{aligned}$$

Für die partikuläre Lösung y_p verwenden wir auf Grund der trigonometrischen Störfunktion $g(x) = \sin(x)$ den Ansatz

$$\begin{aligned} y_p &= c_0 \sin(x) + c_1 \cos(x) \\ y_p' &= c_0 \cos(x) - c_1 \sin(x) \\ y_p'' &= -c_0 \sin(x) - c_1 \cos(x) \end{aligned}$$

und bestimmen die Parameter $c_{1,2}$ durch Einsetzen der Gleichungen in $y'' + 5y' + y = \sin(x)$.

$$\begin{aligned} & \sin(x) = && y_p'' + 5y_p' + y_p \\ \Leftrightarrow\ & \sin(x) = && \cancel{-c_0 \sin(x)} \cancel{-c_1 \cos(x)} + 5\,(c_0 \cos(x) - c_1 \sin(x)) \\ & && \cancel{+c_0 \sin(x)} \cancel{+c_1 \cos(x)} \\ \Leftrightarrow\ & \sin(x) = && 5c_0 \cos(x) - 5c_1 \sin(x) \\ \Rightarrow\ & c_0 = 0 \ \wedge\ c_1 = -\tfrac{1}{5} && \end{aligned}$$

Die partikuläre Lösung lautet somit $y_p = -\frac{1}{5}\cos(x)$ bzw. $z_p = y_p' = \frac{1}{5}\sin(x)$ und wir erhalten die allgemeine Lösungen des inhomogenen DGL Systems.

$$\begin{aligned} y(x) &= c_0 \mathrm{e}^{-\frac{5+\sqrt{21}}{2}x} + c_1 \mathrm{e}^{-\frac{5-\sqrt{21}}{2}x} - \frac{1}{5}\cos(x) \\ z(x) &= -\frac{5+\sqrt{21}}{2} c_0 \mathrm{e}^{-\frac{5+\sqrt{21}}{2}x} - \frac{5-\sqrt{21}}{2} c_1 \mathrm{e}^{-\frac{5-\sqrt{21}}{2}x} + \frac{1}{5}\sin(x) \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y' &= y + 2z \\ z' &= 2y + z - 2\mathrm{e}^x \end{aligned}$$

mit den Anfangswerten $y(0) = -3$ und $z(0) = 4$.

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems.

Lösung 3

Lösungsweg wie zuvor.

$$\begin{aligned} y(x) &= \mathrm{e}^x - 4\mathrm{e}^{-x} \\ z(x) &= 4\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung 2.Ordnung und lösen Sie das gegebene Anfangswertproblem

$$y'' - 2y' + y = 0 \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

Lösung 4

Die charakteristische Gleichung der homogenen DGL 2. Ordnung ist

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

Mit $\lambda = 1$ liegt eine doppelte Nullstelle vor, weshalb der Ansatz

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^x + c_2 x \mathrm{e}^x$$

zur Lösung gewählt werden muss. Wir bestimmen die Ableitung und setzen die beiden Anfangswerte ein um die Parameter zu bestimmen.

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 \mathrm{e}^x + c_2 x \mathrm{e}^x \\ y'(x) &= c_1 \mathrm{e}^x + c_2 \cdot \left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x x\right) \\ &= c_1 \mathrm{e}^x + c_2 \mathrm{e}^x + c_2 \mathrm{e}^x x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(0) &= 1 \\ \Leftrightarrow \quad c_1 &= 1 \\ y'(0) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad 0 &= c_1 + c_2 \\ \Leftrightarrow \quad c_2 &= -1 \end{aligned}$$

Die spezielle Lösung des Anfangswertproblems lautet somit

$$y(x) = \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x.$$

Aufgabe 5

Gegeben seien die folgenden Differentialgleichungen 2. Ordnung

a) $y'' - 6y' + 9y = -17 + 21x + 18x^2$

b) $y'' - 8y' + 16y = -72e^{-2x}$

c) $y'' - 7y' + 6y = 82\sin(2x) + 26\cos(2x)$

Bestimmen Sie jeweils die Lösung $y(x)$.

Lösung 5a

$$y_h'' - 6y_h' + 9y_h = 0$$

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 6\lambda + 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda_{1,2} &= 3 \end{aligned}$$

Doppelte Nullstelle, daher ist die Lösung der homogenen DGL

$$y_h(x) = c_0 \mathrm{e}^{3x} + c_1 x \mathrm{e}^{3x}.$$

Auf Grund der Störfunktion wählen wir für die partikuläre Gleichung den folgenden Ansatz:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \\ y_p'(x) &= c_1 + 2c_2 x \\ y_p''(x) &= 2c_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& y_p'' - 6y_p' + 9y_p && = -17 + 21x + 18x^2 \\
\Leftrightarrow\ & 2c_2 - 6c_1 - 12c_2 x + 9c_0 + 9c_1 x + 9c_2 x^2 && = -17 + 21x + 18x^2 \\
\Leftrightarrow\ & (2c_2 - 6c_1 + 9c_0) + (9c_1 - 12c_2)\, x + 9c_2 x^2 && = -17 + 21x + 18x^2
\end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich liefert $c_2 = 2$, $c_1 = 5$ und $c_0 = 1$, also erhalten wir folgende partikuläre Gleichung.

$$y_p(x) = 1 + 5x + 2x^2$$

Die allgemeine Lösung lautet somit:

$$y(x) = c_0 \mathrm{e}^{3x} + c_1 x \mathrm{e}^{3x} + 2x^2 + 5x + 1$$

Lösung 5b

Die homogene DGL, ihre charakteristische Gleichung und das vorlegen einer doppelten Nullstelle in der charakterischen Gleichung

$$\begin{aligned}
y_h'' - 8y_h' + 16y_h &= 0 \\
\lambda^2 - 8\lambda + 16 &= 0 \\
\Leftrightarrow \lambda &= 4
\end{aligned}$$

liefert uns diese Lösung.

$$y_h(x) = c_0 \mathrm{e}^{4x} + c_1 x \mathrm{e}^{4x}$$

Setzt man den Ansatz für die rechte Seite

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= c_0 \mathrm{e}^{\alpha x} \\
y_p'(x) &= c_0 \alpha \mathrm{e}^{\alpha x} \\
y_p''(x) &= c_0 \alpha^2 \mathrm{e}^{\alpha x}
\end{aligned}$$

ein, so lassen sich die Parameter bestimmen.

$$\begin{aligned}
& y_p'' - 8y_p' + 16y_p && = -72e^{-2x} \\
\Leftrightarrow\ & c_0 \alpha^2 \mathrm{e}^{\alpha x} - 8c_0 \alpha \mathrm{e}^{\alpha x} + 16 c_0 \mathrm{e}^{\alpha x} && = -72e^{-2x} \\
\overset{\alpha=-2}{\Leftrightarrow}\ & 4c_0 \mathrm{e}^{-2x} \cancel{+16c_0 \mathrm{e}^{-2x}} \cancel{-16c_0 \mathrm{e}^{-2x}} && = -72e^{-2x} \\
\Rightarrow\ & c_0 = -18
\end{aligned}$$

Wir erhalten $y_p(x) = 18\mathrm{e}^{-2x}$ und damit lautet die allgemeine Lösung der DGL

$$y(x) = c_0 \mathrm{e}^{4x} + c_1 x \mathrm{e}^{4x} - 18\mathrm{e}^{-2x}.$$

Lösung 5c

Wir lösen die homogene DGL nach dem beschriebenen Verfahren.

$$\begin{aligned}
y_h'' - 7y_h' + 6y_h &= 0 \\
\lambda^2 - 7\lambda + 6 &= 0 \\
\Leftrightarrow \lambda_{1,2} &= \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49-24}{4}} \\
\Rightarrow \lambda_1 &= 6 \ \wedge \ \lambda_2 = 1
\end{aligned}$$

$$y_h(x) = c_0 \mathrm{e}^{6x} + c_1 \mathrm{e}^{x}$$

Zur Bestimmung der partikulären Lösung wählen wir den Ansatz

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= c_0 \sin(\alpha x) + c_1 \cos(\alpha x) \\
y_p'(x) &= \alpha c_0 \cos(\alpha x) - \alpha c_1 \sin(\alpha x) \\
y_p''(x) &= -\alpha^2 c_0 \sin(\alpha x) - \alpha^2 c_1 \cos(\alpha x)
\end{aligned}$$

und setzten ein:

$$\begin{aligned}
& 82\sin(2x) + 26\cos(2x) &&= y_p'' - 7y_p' + 6y_p \\
\Leftrightarrow\ & 82\sin(2x) + 26\cos(2x) &&= -\alpha^2 c_0 \sin(\alpha x) - \alpha^2 c_1 \cos(\alpha x) - 7\alpha c_0 \cos(\alpha x) + 7\alpha c_1 \sin(\alpha x) \\
& && \quad +6c_0 \sin(\alpha x) + 6c_1 \cos(\alpha x) \\
\overset{\alpha=2}{\Leftrightarrow}\ & 82\sin(2x) + 26\cos(2x) &&= \underbrace{(2c_0 + 14c_1)}_{\overset{!}{=}82} \sin(2x) + \underbrace{(2c_1 - 14c_0)}_{\overset{!}{=}26} \cos(2x)
\end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt $c_0 = -1$ und $c_1 = 6$ und wir erhalten die partikuläre Lösung

$$y_p(x) = -\sin(2x) + 6\cos(2x),$$

sowie die allgemein Lösung der DGL:

$$y(x) = c_0 \mathrm{e}^{6x} + c_1 \mathrm{e}^{x} - \sin(2x) + 6\cos(2x)$$