

Aufgabe 1

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit.

a) $f(x) = 2 \cdot |x|$ in $x_0 = 0$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

Lösung 1a

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } x > 0 \\ -2x & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = \lim_{x \uparrow 0} -2x = 0$$

$$\lim_{x \downarrow x_0} f(x) = \lim_{x \downarrow 0} 2x = 0$$

Die Funktion $f(x)$ ist stetig in $x_0 = 0$, da $\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x)$.

Lösung 1b

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = \lim_{x \uparrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \downarrow x_0} f(x) = \lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$

Die Funktion $f(x)$ ist unstetig an der Stelle $x_0 = 0$, da $\lim_{x \uparrow x_0} f(x) \neq 0 \neq \lim_{x \downarrow x_0} f(x)$.

Aufgabe 2

Berechnen Sie folgende Integrale:

a) $\int_1^2 (3x^2 + 2x) \cdot e^{x^3+x^2} dx$

b) $\int \frac{1-x}{(x+5)^2} dx$

c) $\int_0^\pi \sin(x) \cdot x^2 dx$

Lösung 2a

Substituiere $z = x^3 + x^2$, sodass $\frac{dz}{dx} = 3x^2 + 2x \Leftrightarrow \frac{1}{3x^2+2x} dz = dx$ und damit

$$\int (3x^2 + 2x) \cdot e^{x^3+x^2} dx = \int (3x^2 + 2x) \cdot e^z \frac{1}{3x^2+2x} dz = \int e^z dz.$$

Durch Rücksubstitution und Einsetzen der Grenzen ergibt sich:

$$\int_1^2 (3x^2 + 2x) \cdot e^{x^3+x^2} dx = \left[e^{x^3+x^2} \right]_1^2 = e^{12} - e^2 = e^{10}$$

Lösung 2b

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1-x}{(x+5)^2} = \frac{A}{(x+5)} + \frac{B}{(x+5)^2}$$

$$\Leftrightarrow 1 - x = A \cdot (x + 5) + B$$

$$x = -5 : \quad 1 - (-5) = A \cdot (-5 + 5) + B$$

$$\Leftrightarrow 6 = B$$

$$x = 0 : \quad 1 = A \cdot (0 + 5) + 6$$

$$\Leftrightarrow -5 = A \cdot 5$$

$$\Leftrightarrow -1 = A$$

$$\Rightarrow \frac{1-x}{(x+5)^2} = \frac{-1}{(x+5)} + \frac{6}{(x+5)^2}$$

Integration:

$$\int \frac{1-x}{(x+5)^2} dx = \int \frac{-1}{(x+5)} + \frac{6}{(x+5)^2} dx = -\ln(|x+5|) - \frac{6}{x+5} + C$$

Lösung 2c

Partielle Integration mit $u' = \sin(x)$ und $v = x^2$.
Setze $u = -\cos(x)$ und $v' = 2x$ ein:

$$\int_0^\pi \sin(x) \cdot x^2 dx = [-x^2 \cos(x)]_0^\pi - \int_0^\pi -2x \cdot \cos(x) dx$$

Partielle Integration mit $u' = -\cos(x)$ und $v = 2x$.
Setze $u = -\sin(x)$ und $v' = 2$ ein:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin(x) \cdot x^2 dx &= [-x^2 \cos(x)]_0^\pi - \left([-2x \sin(x)]_0^\pi - \int_0^\pi -2 \sin(x) dx \right) \\ &= [-x^2 \cos(x)]_0^\pi - [-2x \sin(x)]_0^\pi + 2[\cos(x)]_0^\pi \\ &= -\pi^2 \cos(\pi) + 2\pi \sin(\pi) + 2 \cos(\pi) - 2 \cos(0) \\ &= \pi^2 - 4 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Sei der Vektorraum V und $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = y \\ 1 & \text{für } x \neq y \end{cases}$$

Zeige, dass d eine Metrik in V ist.

Lösung 3

Die Abbildung d ist eine Metrik, da sowohl

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y} \quad \checkmark$$

gilt, als auch die Dreiecksungleichung

$$d(\vec{x}, \vec{y}) \leq d(\vec{x}, \vec{z}) + d(\vec{y}, \vec{z}) \quad \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V.$$

Aufgabe 4

Durch welche der folgenden Funktionen werden Skalarprodukte auf \mathbb{R}^2 definiert?

a) $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1^2 + x_2 \cdot y_1 \cdot y_2$

b) $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2$

Lösung 4a

(\vec{x}, \vec{y}) definiert kein Skalarprodukt, da $(\vec{x}, \vec{y}) \neq (\vec{y}, \vec{x})$:

$$x_1^2 + x_2 \cdot y_1 \cdot y_2 \neq y_1^2 + y_2 \cdot x_1 \cdot x_2$$

Lösung 4b

(\vec{x}, \vec{y}) definiert kein Skalarprodukt, die Bedingung 5 $(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$ verletzt ist:

$$(\vec{x}, \vec{x}) = x_1 \cdot x_1 + x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_1 + x_2 \cdot x_2$$

$$= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$$

$$= (x_1 + x_2)^2$$

$$(\vec{x}, \vec{x}) \stackrel{\text{def}}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = (x_1 + x_2)^2$$

$$\Rightarrow x_1 = -x_2 \vee x_2 = -x_1$$

(\vec{x}, \vec{y}) definiert kein Skalarprodukt, da z.B. für $\vec{a} = (1, 1)^T$ mit $(\vec{a}, \vec{a}) = 4 \neq 0$ gilt.

Aufgabe 5

Wie lautet die Ableitung der gegebenen Funktionen nach dem genannten Parameter?

a) Ableitung von $g(x, y) = (2x - y)^2 + \ln(x \cdot y)$ nach x

b) Ableitung von $l(u, v, w) = \ln(\sqrt{u \cdot w} \cdot e^{-v})$ nach u

c) Ableitung von $m(i, j, k) = \ln\left(\frac{j \cdot \sqrt{k}}{i}\right)$ nach i

Lösung 5a

$$\frac{dg}{dx} = 2 \cdot (2x - y)^2 + y \cdot \ln(x \cdot y)$$

Lösung 5b

$$\begin{aligned}\frac{dl}{du} &= w \cdot \frac{1}{2}(u \cdot w)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-v} \cdot \frac{1}{\sqrt{u \cdot w} \cdot e^{-v}} \\ &= w \cdot \frac{1}{2 \cdot u \cdot w} \\ &= \frac{1}{2 \cdot u}\end{aligned}$$

Lösung 5c

$$\begin{aligned}\frac{dm}{di} &= \frac{-j\sqrt{k}}{i^2} \cdot \frac{i}{j \cdot \sqrt{k}} \\ &= -\frac{1}{i}\end{aligned}$$