

## Aufgabe 1

Analysis 2-Klausur vom 16.07.2021, A05

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y' - y = y^2 \cdot \sin(x)$$

Hinweis: Bernoulli-DGL

### Lösung 1

Es liegt eine Differentialgleichung der Form

$$y'(x) + f(x) \cdot y = g(x) \cdot y^\alpha$$

mit  $\alpha = 2$ ,  $g(x) = \sin(x)$ ,  $f(x) = -1$  vor.

Wir substituieren mit  $\alpha = 2$ .

$$z := y^{1-\alpha} = \frac{y}{y^2} \Leftrightarrow y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$y = z^{-1}$$

$$y' = -z^{-2} \cdot z'$$

Einsetzen in DGL:

$$\begin{aligned} y' - y &= y^2 \cdot \sin(x) \\ \Leftrightarrow -z^{-2} \cdot z' - z^{-1} &= z^{-2} \cdot \sin(x) \\ \stackrel{z(x) \neq 0}{\Leftrightarrow} -z' - z &= \sin(x) \end{aligned}$$

Wir bestimmen die Lösung der linearen inhomogen DGL  $-z' - z = \sin(x)$ , indem wir zunächst die Lösung der homogenen DGL  $-z'_h - z_h = 0$  bestimmen. Diese lautet

$$z_h = c_0 \cdot e^{-x}.$$

Die Rücksubstitution ergibt

$$\begin{aligned} y_h &= \frac{1}{z_h} \\ &= c \cdot e^x \end{aligned}$$

Für die partikuläre Lösung nutzen wir den trigonometrischen Ansatz

$$\begin{aligned} z_p(x) &= c_0 \sin(ax) + c_1 \cos(ax) \\ z'_p(x) &= ac_0 \cos(ax) - ac_1 \sin(ax) \end{aligned}$$

und setzen ein:

$$\begin{aligned}\sin(x) &= -z_p' - z_p \\ \Leftrightarrow \sin(x) &= -\alpha c_0 \cos(\alpha x) + \alpha c_1 \sin(\alpha x) - c_0 \sin(\alpha x) - c_1 \cos(\alpha x) \\ \stackrel{\alpha=1}{\Leftrightarrow} \sin(x) &= \underbrace{(c_1 - c_0)}_{=1} \cdot \sin(x) - \underbrace{(c_0 + c_1)}_{=0} \cdot \cos(x)\end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich liefert uns mit  $c_0 = -1/2, c_1 = 1/2$  die Funktion

$$z_p(x) = -\frac{1}{2} \sin(x) + \frac{1}{2} \cos(x).$$

Die Rücksubstitution ergibt:

$$\begin{aligned}y_p &= \frac{1}{z_p} \\ &= \frac{2}{\cos(x) - \sin(x)}\end{aligned}$$

Somit können wir die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL wie folgt angeben:

$$y(x) = c \cdot e^x + \frac{2}{\cos(x) - \sin(x)}$$

## Aufgabe 2

*Analysis 2-Klausur vom 16.07.2021, A06*

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$2y \cdot e^x + y + (2e^x + x) \cdot y' = 0$$

## Lösung 2

## Aufgabe 3

*Analysis 2-Klausur vom 24.09.2020, A04*

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y'' = 4y' - 4y + 8x + 4$$

## Lösung 3

## Aufgabe 4

*Analysis 2-Klausur vom 24.09.2020, A07*

Bestimmen Sie die Lösungen folgender Differentialgleichungen

a)  $y' = 2\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$  durch Substitution mit  $z = \frac{y}{x}$

b)  $y' + x \cdot y = x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$

## Lösung 4

## Aufgabe 5

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y^2 \, dx + (x \cdot y - 2) \, dy = 0$$

## Lösung 5