

## Aufgabe 1

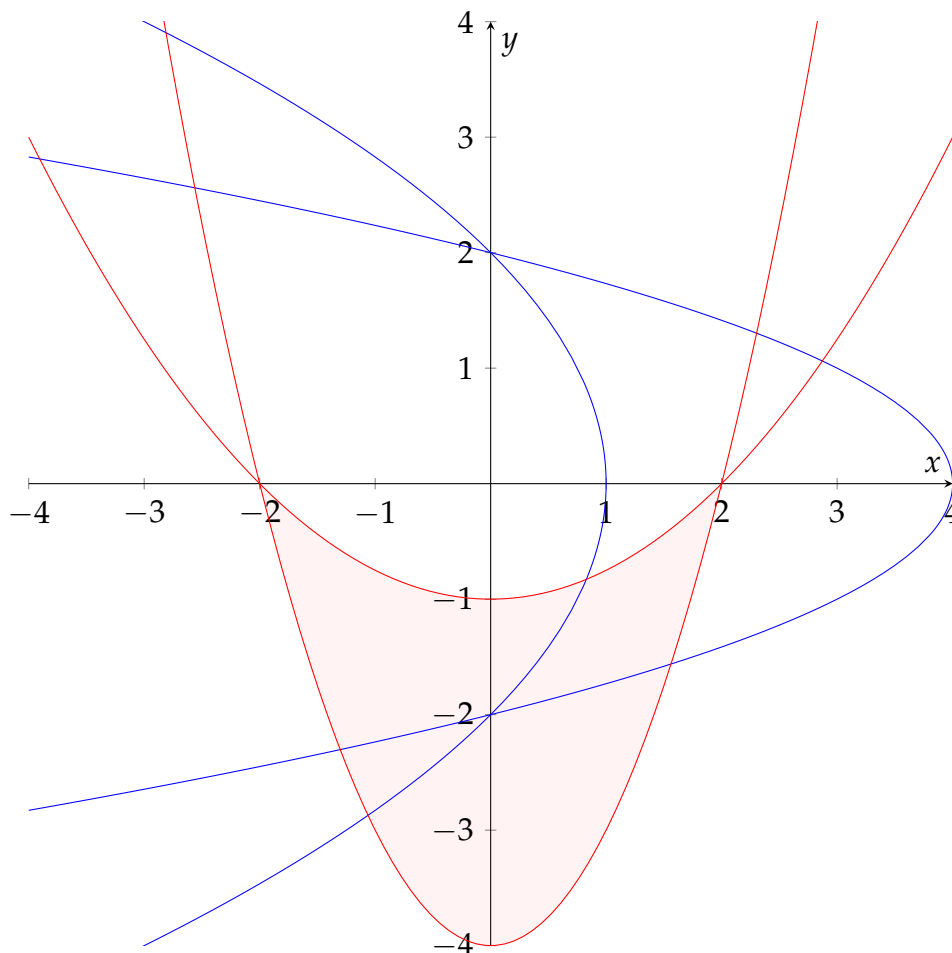
Bestimmen Sie die Fläche, die begrenzt ist durch die Parabeln

$$y^2 = 4 - x \quad \text{und} \quad y^2 = 4 - 4x$$

### Lösung 1

Die beiden Parabeln in Blau, lassen sich durch Multiplikation mit einer Rotationsmatrix

$D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$  mit  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  um  $90^\circ$  rotieren (Parabeln in Rot).



Aus  $D_{\frac{\pi}{2}} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$  ergeben sich die Gleichungen

$$x^2 = 4 + x \Leftrightarrow y = x^2 - 4$$

$$x^2 = 4 + 4y \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x^2 - 1.$$

Die Fläche zwischen den blauen Graphen ist gleich der Fläche zwischen den roten Graphen.

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{-2}^2 x^2 - 4 \, dx \right| - \left| \int_{-2}^2 \frac{1}{4}x^2 - 1 \, dx \right| \\ &= \left| \left[ \frac{1}{3}x^3 - 4x \right]_{-2}^2 \right| - \left| \left[ \frac{1}{12}x^3 - x \right]_{-2}^2 \right| \\ &= \frac{32}{3} - \frac{8}{3} \\ &= 8 \end{aligned}$$

Zur Überprüfung vergleichen wir mit

$$\frac{1}{2}A = \int_0^4 \sqrt{4-x} \, dx - \int_0^1 \sqrt{4-4x} \, dx$$

und erhält ebenfalls  $A = 8$ . ✓

## Aufgabe 2

Gegeben seien die Funktionen

$$f(x) = 5 - \frac{5}{\pi^2}x^2 \quad \text{und} \quad g(x) = 4 \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

- Berechnen Sie die von den beiden Funktionen begrenzte Fläche.
- Bestimmen Sie anschließend den Schwerpunkt der eingeschlossenen Fläche.

*Hinweise:* Die Schnittstellen der beiden Funktionen sind die Nullstellen. Nutzen Sie zur Berechnung der Fläche ggfls. die Symmetrie der Funktionen.

## Lösung 2a

Berechne die Nullstellen der Funktionen.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 0 &= 5 - \frac{5}{\pi^2}x^2 \\ \Leftrightarrow x_{1,2} &= \pm\pi \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt  $F$  einer Grundfläche  $A$  ergibt sich durch Integration mit  $f(x,y) = 1$ , also

$$\begin{aligned}
 F &= \int_A 1 \, dA \\
 &= \int_{x=-\pi}^{\pi} \int_{y=g(x)}^{f(x)} 1 \, dy \, dx \\
 &= \int_{x=-\pi}^{\pi} \int_{y=4\cos(\frac{x}{2})}^{5-\frac{5}{\pi^2}x^2} 1 \, dy \, dx \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} \left( 5 - \frac{5}{\pi^2}x^2 \right) - \left( 4\cos\left(\frac{x}{2}\right) \right) dx \\
 &= \left[ 5x - \frac{5}{\pi^2 \cdot 3}x^3 - 8\sin\left(\frac{x}{2}\right) \right]_{-\pi}^{\pi} \\
 &= \left( 5\pi - \frac{5}{\pi^2 \cdot 3}\pi^3 - 8\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) - \left( -5\pi + \frac{5}{\pi^2 \cdot 3}\pi^3 - 8\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) \right) \\
 &= \frac{20}{3}\pi - 16
 \end{aligned}$$

## Lösung 2b

Der Schwerpunkt mit den Koordinaten  $(x_s, y_s)$  einer solchen Fläche mit homogener Dichte ergibt sich mit der zuvor berechneten Flächenmaßzahl  $F$  durch

$$x_s = \frac{1}{F} \int_A x \, dA \quad \wedge \quad y_s = \frac{1}{F} \int_A y \, dA.$$

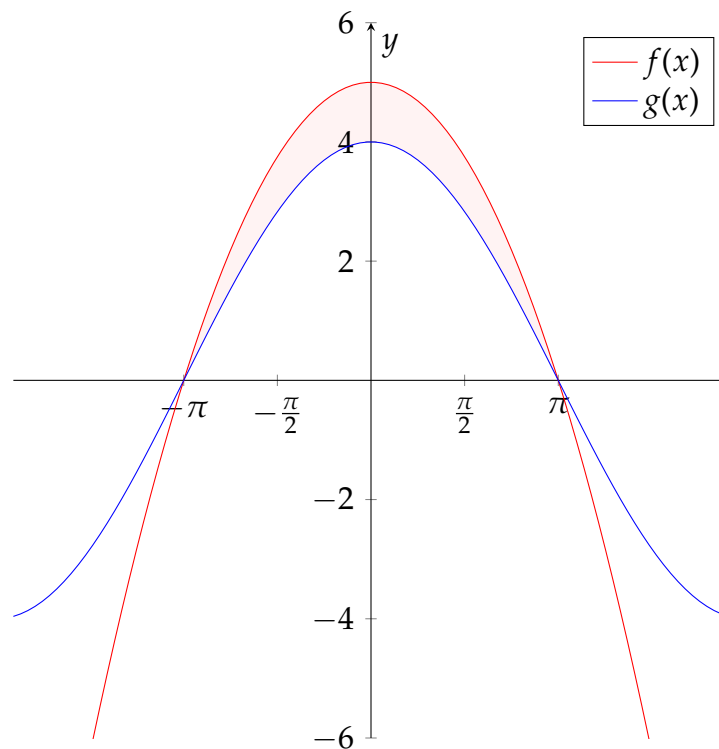
Für  $x_s$  also

$$\begin{aligned}
 x_s &= \frac{1}{F} \int_A x \, dA \\
 &= \frac{1}{F} \int_{x=-\pi}^{\pi} \int_{y=g(x)}^{f(x)} x \, dy \, dx \\
 &= \frac{1}{F} \int_{x=-\pi}^{\pi} x \int_{y=g(x)}^{f(x)} 1 \, dy \, dx \\
 &= \frac{1}{F} \int_{x=-\pi}^{\pi} x \left( 5 - \frac{5}{\pi^2}x^2 - 4\cos\left(\frac{x}{2}\right) \right) dx \\
 &= \frac{1}{F} \left[ \frac{5}{2}x^2 - \frac{5}{\pi^2 \cdot 4}x^4 - 8x\sin\left(\frac{x}{2}\right) - 16\cos\left(\frac{x}{2}\right) \right]_{x=-\pi}^{\pi} \\
 &= \frac{1}{F} \left( \frac{5}{2}\pi^2 - \frac{5}{4}\pi^2 - 8\pi - \frac{5}{2}\pi^2 + \frac{5}{4}\pi^2 + 8\pi \right) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

und entsprechend für  $y_s$

$$\begin{aligned}
 y_s &= \frac{1}{F} \int_A y \, dA \\
 &= \frac{1}{F} \int_{x=-\pi}^{\pi} \int_{y=g(x)}^{f(x)} y \, dy \, dx \\
 &= \frac{1}{F} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{g(x)}^{f(x)} dx \\
 &= \frac{1}{F} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \left( 5 - \frac{5}{\pi^2} x^2 \right)^2 - \frac{1}{2} \left( 4 \cos \left( \frac{x}{2} \right) \right)^2 dx \\
 &= \frac{1}{F} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{5^2}{2} - \frac{5^2 \cdot x^2}{\pi^2} + \frac{5^2 \cdot x^4}{\pi^4 \cdot 2} \right) - 8 \cos^2 \left( \frac{x}{2} \right) dx \\
 &= \frac{1}{F} \int_{-\pi}^{\pi} 5^2 \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{x^2}{\pi^2} + \frac{x^4}{2\pi^4} \right) - 8 \cos^2 \left( \frac{x}{2} \right) dx \\
 &= \frac{1}{F} \left[ 5^2 \cdot \left( \frac{1}{2} x - \frac{x^3}{3\pi^2} + \frac{x^5}{10\pi^4} \right) - 4x + \sin(x) \right]_{-\pi}^{\pi} \\
 &= \frac{1}{F} \left( 5^2 \cdot \left( \frac{1}{2} \pi - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{10} \right) - 4\pi \right) - \left( 5^2 \cdot \left( \frac{-\pi}{2} + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{10} \right) + 4\pi \right) \\
 &= \frac{1}{F} \left( 5^2 \pi \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} \right) - 5^2 \cdot \pi \left( \frac{-1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} \right) - 8\pi \right) \\
 &= \frac{1}{F} \left( 5^2 \pi \cdot \frac{8}{15} - 8\pi \right) \\
 &= \frac{1}{\frac{20}{3}\pi - 16} \pi \cdot \frac{16}{3} \\
 &= \frac{16\pi}{20\pi - 48} \\
 &= \frac{4\pi}{5\pi - 12}
 \end{aligned}$$

Damit befindet sich der Schwerpunkt der Koordinaten an der Stelle  $(x_s, y_s) = (0, \frac{4\pi}{5\pi-12})$



### Aufgabe 3

Berechnen Sie das Volumen unterhalb der Funktion

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$$

über das folgende Integrationsgebiet

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}.$$

### Lösung 3

### Aufgabe 4

Sei die Funktion  $f(x,y) = x \cdot y$  sowie das Integrationsgebiet

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 2, y \leq x^2\}$$

gegeben. Berechnen Sie das zugehörige Volumen.

## Lösung 4

### Aufgabe 5

Gegeben ist der Integrationsbereich

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0, y \geq 0\}.$$

Berechnen Sie mit Hilfe der Polarkoordinaten

$$\int_A y \cdot (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} dA$$

## Lösung 5