Aufgabe 5

Berechnen Sie jeweils die Inverse folgender Matrizen, falls diese existiert:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Lösung 5

Eine quadtratsiche Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn gilt: $\det(A) \neq 0$.

Lösung 5a

Aus $\det(A) = 2 + 12 + 6 - 9 - 4 - 4 = 3 \neq 0$ folgt, dass die Matrix invertierbar ist. Durch elementare Zeilenumformungen lässt sich A^{-1} wie folgt bestimmen:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -7 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 4 & -7 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Lösung 5b

Da $\det(B) = -4 + 3 - (-1) = 0$, ist die Matrix B nicht invertierbar.

Aufgabe 6

Gegeben sei die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie A^k für $k = 1 \ldots 3$.

b) Stellen Sie eine Vermutung auf für A^n und beweisen Sie diese.

Lösung 6a

$$A^1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung 6b

Zu zeigen:

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^n - 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Induktionsanfang mit $n = 1$:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 2^1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^1 - 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

Induktionsvoraussetzung: Es sei

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^n - 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

für ein festes, aber beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsbehauptung: Dann gilt für $n+1$ ebenso

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n+1}-1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned} A^{n+1} = A^n \times A &= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^n-1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n \cdot 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ (2^n-1)\cdot 2+1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n+1}-2+1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n+1}-1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark \end{aligned}$$

Aufgabe 7

A sei eine 3×3-Matrix.

a) Welche Beziehung ($=, \neq, \subseteq, \subset, \supset, \supseteq$) besteht zwischen dem Kern von A und dem Kern von A^2 (und dem von A^3)?

b) Verifizieren Sie ihr Ergebnis aus (a) mit der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Lösung 7

Aufgabe 8

Die Spur einer quadratischen Matrix $A = (a_{ij})$ ist definiert durch

$$\mathrm{Spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Spur eine lineare Abbildung darstellt.

b) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = A^T$. Verifizieren Sie $\text{Spur}(AB) = \text{Spur}(BA)$.

c) Zeigen Sie, dass $\text{Spur}(AB) = \text{Spur}(BA)$, wobei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

d) Zeigen Sie, dass $\text{Spur}(A^T A) = 0$ genau dann, wenn $A = (0)$.

e) Man zeige weiter: $\text{Spur}(ABC) = \text{Spur}(BCA)$, aber i.a. $\text{Spur}(ABC) \neq \text{Spur}(BAC)$.

Lösung 8a

Die Abbildung

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R} \\ A \mapsto \text{Spur}(A) \end{cases}$$

ist genau dann lineare, wenn sie homogen und additiv ist.

Zeige Homogenität mit $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &\text{Spur}(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot \text{Spur}(A) \\ \Leftrightarrow &\sum_{i=1}^{n} \lambda a_{ii} = \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \checkmark \end{aligned} \tag{1}$$

Zeige Additivität mit $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

$$\begin{aligned} &\text{Spur}(A+B) = \text{Spur}(B) + \text{Spur}(A) \\ \Leftrightarrow &\sum_{i=1}^{n} (a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} \checkmark \end{aligned} \tag{2}$$

Lösung 8b

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Es ergibt sich somit für $\text{Spur}(A \times B) = 14 + 1 = 15$ und für $\text{Spur}(B \times A) = 1 + 5 + 9 = 15$.

Lösung 8c