Aufgabe 5

Berechnen Sie mittels Gauß-Algorithmus die folgenden Determinanten, wobei alle Parameter ungleich Null angenommen werden dürfen:

a) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ b & 0 & a & 2 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ -b & a & -a & 3 \end{vmatrix}$

Lösung 5a

Aufgabe 6

Sei $A_n = (a_{ij})$ mit $a_{ii} = 2, a_{ij} = -1$ für $|i-j| = 1$ und $a_{ij} = 0$ sonst und $D_n = \det(A_n)$.

a) Berechnen Sie D_n für $n = 1,2,3$ und stellen Sie eine Vermutung für D_n für größere n auf.

b) Beweisen Sie Ihre Vermutung.

Lösung 6

$$A_n = (a_{ij}) \text{ mit } \begin{cases} a_{ij} = 2 \text{ für } i = j \\ a_{ij} = -1 \text{ für } |i-j| = 1 \\ a_{ij} = 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7

Es seien 3 Punkte mit den Koordinaten (x_i, y_i) gegeben. Es gilt, dass

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

die Gleichung des Kreises ist, der durch die 3 Punkte geht (Umkreis), falls

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

a) Bestimmen Sie mithilfe dieser Gleichung den Mittelpunkt und den Radius des Kreises, der durch die Punkte $(0, 0), (2, -2)$ und $(3, \sqrt{3})$ geht.

b) Was bedeutet die Bedingung für die Gültigkeit der oben genannten Kreisgleichung geometrisch?

Lösung 7

Für einen Kreis mit Mittelpunkt (a, b) und dem Radius r gilt:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Lösung 7a

Für die angegebenen Punkte gilt:

$$\begin{aligned}
0 &= \begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 0+0 & 0 & 0 & 1 \\ 2^2+(-2)^2 & 2 & -2 & 1 \\ 3^2+3 & 3 & \sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & 2 & -2 & 1 \\ 12 & 3 & \sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y \\ 8 & 2 & -2 \\ 12 & 3 & \sqrt{3} \end{vmatrix} \\
&= 2\left(x^2+y^2\right)\sqrt{3} - 24x + 24y - 24y + 6\left(x^2+y^2\right) - 8x\sqrt{3} \\
&= \left(2\sqrt{3}+6\right) \cdot \left(x^2+y^2\right) - x \cdot \left(24 + 8\sqrt{3}\right)
\end{aligned}$$

Zur Vereinfachung der Lesbarkeit bestimmen wir $\tilde{a} := 2\sqrt{3} + 6$ sowie $\tilde{b} := 24 + 8\sqrt{3}$ und formen um nach y.

$$\begin{aligned}
0 &= \tilde{a} \cdot \left(x^2+y^2\right) - x \cdot \tilde{b} \\
\Leftrightarrow \quad y &= \pm\sqrt{x \cdot \tilde{b}/\tilde{a} - x^2} \\
\Leftrightarrow \quad y &= \pm\sqrt{4x - x^2}
\end{aligned}$$

y liefert nun in Abhängigkeit von x zwei Lösungen im Definitionsbereich $x \in [0;4]$. Auf Grund der Symmetrie bezüglich der x-Achse, lässt sich schließen, dass der Mittelpunkt M auf der x-Achse und zwar in der Mitte des Definitionsbereichs liegen muss $M = (2|0)$.
Um den analytischen Nachweis allgemein zu erbringen, betrachten wir die zuvor bestimmte Gleichung, welche uns zu jeder x-Koordinate einen oberen sowie einen unteren Punkt auf dem Kreis liefert. Durch Subtraktion erhalten wir eine Gleichung $q(x)$ für die Länge des Kreisquerschnitts an der Stelle x:

$$\begin{aligned} q(x) &= \sqrt{4x - x^2} - \left(-\sqrt{4x - x^2}\right) \\ &= 2\sqrt{4x - x^2} \end{aligned}$$

Da die Länge des Kreisquerschnitts genau an der Stelle maximal ist, wo er durch den Mittelpunkt des Kreises geht, bestimmen wir das Maximum von $q(x)$ über die Nullstellen von $q'(x) = (-2x + 4)(4x - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ zu $x = 2$.
An der Stelle $x = 2$ hat die Kreisgleichung die Lösungen $y_1 = 2 \wedge y_2 = -2$. Der Radius beträgt somit $r = 2$ und die y-Koordinate des Kreismittelpunktes ist also $M_y = r + y_2 = 0$.

$$M = (2|0)$$

Lösung 7b

Bedingung verlangt, dass die Determinante ungleich Null sein muss, die Zeilenvektoren der Matrix also linear unabhängig sein müssen. Wären Sie dies nicht, wäre der Kreis nicht eindeutig beschrieben.

Die Bedingung lässt sich auch als Summennorm des Kreuzprodukts $\|x \times y\|_1 \neq 0$ schreiben.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} &= x_1y_2 + y_1x_3 + x_2y_3 - y_2x_3 - x_1y_3 - y_1x_2 \\ &= x_1 \cdot (y_2 - y_3) + x_2 \cdot (y_3 - y_1) + x_3 \cdot (y_1 - y_2) \\ &= \|x \times y\|_1 \end{aligned}$$