

## Aufgabe 1

Seit Jahrtausenden wird Sauerteig zur Herstellung von Brotteig verwendet. Dabei werden gezielt Bakterien im Teig vermehrt. Für einen bestimmten Vermehrungsprozess werden 1g Mehl etwa 100 Bakterien zugesetzt. Nach 4 Stunden sind etwa 3.500 Bakterien vorhanden. Die Sättigungsgrenze liegt bei etwa 7.000 Bakterien.

- Ermitteln Sie für die Anzahl  $y(t)$  der Bakterien in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  in Stunden einen geeigneten Funktionsterm.
- Wie viele Bakterien sind in einem 8 Stunden gereiften Sauerteig vorhanden?

## Lösung 1

Wir modellieren den Wachstumsprozess mit  $y_n(t) = y_0 \cdot e^{k \cdot t}$ , wobei  $y_0 = 100$ . Wir erhalten  $k$  durch  $3.500 = 100 \cdot e^{4k} \Leftrightarrow k = \frac{\ln(3,5)}{4}$  und durch die Sättigungsgrenze von 7.000 eine obere Grenze von  $t = \frac{4 \cdot \ln(70)}{\ln(3,5)} = 13,5652 \dots$

$$y(t) = 100 \cdot e^{\frac{\ln(3,5)}{4} \cdot t} \quad t \in \left[0; \frac{4 \cdot \ln(70)}{\ln(3,5)}\right]$$

Nach 8 Stunden befinden sich somit  $y(8) = 1.225$  Bakterien im Hefeteig.

## Aufgabe 2

Lösen Sie das Anfangswertproblem  $y' = -2x \cdot y + 10x$ ,  $y(0) = 2$

## Lösung 2

$$\begin{aligned} y' &= -2xy + 10x \\ &= \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{(10 - 2y)}_{g(y)} \end{aligned}$$

Wir trennen die Variablen und erhalten

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{10-2y} dy(x) &= \int x dx \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \ln(5-y(x)) &= \frac{x^2}{2} + C \\ \Leftrightarrow \ln(5-y(x)) &= -x^2 - 2C \\ \Leftrightarrow 5-y(x) &= e^{-x^2-2C} \\ \Leftrightarrow y(x) &= 5 - e^{-x^2-2C} \end{aligned}$$

Da  $y(0) = 5 - e^{-2C} = 2 \Leftrightarrow C = -\frac{\ln(3)}{2}$  folgt somit

$$y(x) = 5 - 3e^{-x^2}$$

## Aufgabe 3

Lösen Sie folgende Differentialgleichungen mit Hilfe einer geeigneten Substitution.

a)  $y' = (x + y + 1)^2$

b)  $x^2 \cdot y' = y^2 \quad (x \neq 0)$

### Lösung 3a

Substituiere  $z = x + y + 1$ . Es ergibt sich

$$\begin{aligned} y = z - x - 1 &\implies y' = z' - 1 \\ z' &= 1 + z^2 \end{aligned}$$

## Aufgabe 4

Berechnen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichungen mittels Variation der Konstanten

a)  $y' + (1 + x) \cdot y = e^{-\frac{x^2+x}{2}}$

b)  $x \cdot y' = 4y + x^2$

### Lösung 4

## Aufgabe 5

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$x \cdot y' - y = x^3 + 3x^2 - 2x, \quad y(1) = 4.$$

### Lösung 5