

Präsenz

Aufgabe 1

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = 3y + 15x^2 - 5x \quad y(0) = 3$$

Lösung 1

Es handelt sich um ein Anfangswertproblem mit einer DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Bestimme die homogene DGL $y'_h(x) - 3y_h(x) = 0$ durch Trennung der Variablen zu $y_h(x) = c \cdot e^{3x}$.

Bestimme die partikuläre Lösung der Form $y_p(x) = c_2x^2 + c_1x + c_0$ und $y'_p(x) = 2c_2x + c_1$.

$$\begin{aligned} y'_p(x) - 3y_p(x) &= 15x^2 - 5x \\ \Leftrightarrow (2c_2x + c_1) - 3 \cdot (c_2x^2 + c_1x + c_0) &= 15x^2 - 5x \\ \Leftrightarrow (-3c_2)x^2 + (2c_2 - 3c_1)x + (c_1 - 3c_0) &= 15x^2 - 5x \end{aligned}$$

So erhalten wir für $c_2 = 5$, $c_1 = -\frac{5}{3}$ und $c_0 = -\frac{5}{9}$ und somit

$$y_p(x) = -5x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{5}{9}$$

Wir setzen die Lösungen zusammen und bestimmen c mit $y(0) = 3 \Leftrightarrow c = \frac{32}{9}$

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\ &= c \cdot e^{3x} - 5x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{5}{9} \\ &= \frac{32}{9}e^{3x} - 5x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{5}{9} \end{aligned}$$

Lösung 2

Berechnen Sie die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichungen.

$$y' - 3y = -3e^{3x}$$

Aufgabe 1

Gesucht ist die allgemeine Lösung der jeweiligen Differentialgleichung.

a) $y' + 2y = 8 \sin(x) - \cos(x)$

b) $y' - 4y = -28 \sin(3x) + 21 \cos(3x)$

Lösung 1a

Löse die homogene Differentialgleichung $y'_h(x) + 2y_h(x) = 0$ durch *Trennung der Variablen*.

$$\begin{aligned} y'_h(x) + 2y_h(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow y_h(x) &= -\frac{1}{2} \frac{dy_h}{dx} \\ \Leftrightarrow 1 \, dx &= -\frac{1}{2 \cdot y_h(x)} \, dy_h \\ \Leftrightarrow \int 1 \, dx &= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{y_h(x)} \, dy_h \\ \Leftrightarrow x + c &= -\frac{1}{2} \ln|y_h(x)| \\ \Leftrightarrow -2x + -2c &= \ln|y_h(x)| \\ \Leftrightarrow e^{-2x} \cdot \underbrace{e^{-2c}}_{:=\tilde{c} \in \mathbb{R}^+} &= |y_h(x)| \\ \Leftrightarrow e^{-2x} \cdot \underbrace{c}_{c \in \mathbb{R}} &= y_h(x) \end{aligned}$$

Die homogene Lösung lautet somit $y_h(x) = c \cdot e^{-2x}$.

Bestimme die partikuläre Lösung $y_p(x)$ mittels *Ansatz vom Typ der rechten Seite* für die Störfunktion $g(x) = 8 \sin(x) - \cos(x)$.

$$\begin{aligned} y_p(x) &= c_0 \sin(ax) + c_1 \cos(ax) \\ y'_p(x) &= ac_0 \cos(ax) - ac_1 \sin(ax) \end{aligned}$$

Wir setzen den Ansatz für in die DGL ein und bereiten den Koeffizientenvergleich vor.

$$\begin{aligned} 8 \sin(x) - \cos(x) &\stackrel{!}{=} y'_p(x) + 2y_p(x) \\ \Leftrightarrow 8 \sin(x) - \cos(x) &= ac_0 \cos(ax) - ac_1 \sin(ax) + 2c_0 \sin(ax) + 2c_1 \cos(ax) \\ \Leftrightarrow 8 \sin(x) - \cos(x) &= \sin(ax) \underbrace{(2c_0 - ac_1)}_{\stackrel{!}{=} 8} + \cos(ax) \underbrace{(ac_0 + 2c_1)}_{\stackrel{!}{=} -1} \end{aligned}$$

Mit $a = 1$ ergibt sich für $c_0 = 3$ und für $c_1 = -2$. Somit erhalten wir die partikuläre Lösung:

$$y_p(x) = 3 \sin(x) - 2 \cos(ax)$$

Zusammengesetzt bedeutet das für die allgemeine Lösung der DGL

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\ &= c \cdot e^{-2x} + 3 \sin(x) - 2 \cos(ax) \end{aligned}$$

Lösung 1b

Nach dem zuvor beschriebenen Verfahren lösen wir $y'_h(x) - 4y_h(x) = 0$ zu $y_h(x) = c \cdot e^{4x}$ und bestimmen mit Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} -28 \sin(3x) + 21 \cos(3x) &\stackrel{!}{=} y'_p(x) - 4y_p(x) \\ \Leftrightarrow -28 \sin(3x) + 21 \cos(3x) &= ac_0 \cos(ax) - ac_1 \sin(ax) - 4c_0 \sin(ax) - 4c_1 \cos(ax) \\ \Leftrightarrow -28 \sin(3x) + 21 \cos(3x) &= \underbrace{-(ac_1 + 4c_0)}_{\stackrel{!}{=} -28} \sin(ax) + \underbrace{(ac_0 - 4c_1)}_{\stackrel{!}{=} 21} \cos(ax) \end{aligned}$$

Wir erhalten die Koeffizienten $a = 3, c_0 = 7, c_1 = 0$ und können somit mit der partikulären Lösung $y_p(x) = 7 \sin(3x)$ die allgemeine Lösung zusammensetzen:

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\ &= c \cdot e^{4x} + 7 \sin(3x) \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Lösen Sie die gegebene Differentialgleichung

$$y' + \frac{y}{x} - x^2 \cdot \sqrt[3]{y} = 0$$

Lösung 2

Es handelt sich um eine *Bernoullische Differentialgleichung*, also um eine nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung der Form

$$y'(x) = f(x)y(x) + g(x)y^\alpha(x), \quad \alpha \neq \{0,1\}$$

mit $f(x) = x^{-1}, g(x) = x^2$ und $\alpha = \frac{1}{3}$.

Durch die Substitution $z(x) = y(x)^{1-\alpha}$ kann man sie auf die lineare Differentialgleichung

$$z'(x) = (1 - \alpha) (f(x) \cdot z(x) + g(x))$$

zurückführen.

Wir erhalten die *inhomogene* Differentialgleichung

$$z'(x) = \frac{2}{3} (x^{-1} \cdot z(x) + x^2)$$

$$\Leftrightarrow z'(x) - \frac{2}{3} x^{-1} z(x) = \frac{2}{3} x^2$$

welche von der Form $y'(x) + f(x) \cdot y(x) = g(x)$ ist.

Um diese durch *Variation der Konstanten* zu lösen, lösen wir als erstes die homogene Differentialgleichung $z'_h(x) - \frac{2}{3} x^{-1} z_h(x) = 0$ mittels Trennung der Variablen und erhalten

$$z_h(x) = c \cdot e^{\int \frac{2}{3} x^{-1} dx} = \tilde{c} \cdot x^{\frac{2}{3}}.$$

Als nächstes ersetzen wir $c = c(x)$ in der Form

$$z'(x) = c'(x) \cdot e^{\int -f(x) dx} + \underbrace{c(x) \cdot e^{\int -f(x) dx}}_{z(x)} \cdot (-f(x))$$

und vergleichen $z'(x)$ mit der ursprünglichen Störfunktion:

$$z'(x) + f(x) = c'(x) \cdot e^{\int -f(x) dx} \stackrel{!}{=} g(x)$$

$$z'(x) + f(x) = \underbrace{c'(x) \cdot x^{\frac{2}{3}}}_{\text{neue DGL}} \stackrel{!}{=} \frac{2}{3} x^2$$

Durch Lösung der neuen Differentialgleichung erhalten wir $c(x) = \frac{2}{7} x^{\frac{7}{3}} + \tilde{c}$ und können dies einsetzen in $z_h(x)$ um die allgemeine Lösung zu erhalten:

$$z(x) = \left(\frac{2}{7} x^{\frac{7}{3}} + \tilde{c} \right) \cdot x^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{7} x^3 + \tilde{c} \cdot x^{\frac{2}{3}}$$

Durch Rücksubstitution mit $y(x) = z^{\frac{3}{2}}$ erhalten wir

$$y(x) = \left(\frac{2}{7} x^3 + \tilde{c} \cdot x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Aufgabe 3

Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem

$$y' + y - y^3 = 0, \quad y(0) = \frac{1}{2}$$

Lösung 3

Mit Bernoulli ergibt sich $y(x) = \frac{1}{\sqrt{3e^{2x}+1}}$.

Aufgabe 4

Berechnen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung

$$y' - y = -4 - 81e^{-8x} - 22 \sin(2x) + 4x - 11 \cos(2x)$$

Lösung 4

$$y(x) = c \cdot e^x - 4x + 9e^{-8x} + 11 \cos(2x)$$

Aufgabe 5

Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Differentialgleichung

$$y' - 2y = (2 \sin(x) + 5 \cos(x)) \cdot e^{-3x}$$

Lösung 5

$$y(x) = c \cdot e^{2x} - \frac{5}{26}e^{-3x} \sin(x) - \frac{27}{26}e^{-3x} \cos(x)$$