Aufgabe 5

Welche der folgenden Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sind linear?

a) $f_a(x_1, x_2) = (x_1, 0)$

b) $f_b(x_1, x_2) = (x_1 x_2, 0)$

c) $f_c(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_2)$

Lösung 5a

$$f_a = \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) \mapsto (x_1, 0) \end{cases}$$

Die Abbildung f_a ist genau dann linear, wenn f additiv und homogen ist.
Additivität:

$$f_a(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (x_1 + y_1, 0)$$

$$\begin{aligned} f_a(x_1, x_2) + f(y_1, y_2) &= (x_1, 0) + (y_1, 0) \\ &= (x_1 + y_1, 0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \; f_a(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = f_a(x_1, x_2) + f(y_1, y_2) \checkmark$$

Homogenität:

$$f_a(\lambda x_1, \lambda x_2) = (\lambda x_1, 0)$$

$$\lambda f_a(x_1, x_2) = (\lambda x_1, 0)$$

$$\Rightarrow \; f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda f(x_1, x_2) \checkmark$$

Die Abbildung ist linear.

Lösung 5b

$$f(x_1, x_2) = (x_1 x_2, 0)$$

Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist genau dann linear, wenn f additiv und homogen ist.

Additivität:

$$\begin{aligned} f(x_1+y_1, x_2+y_2) &= ((x_1+y_1)\cdot(x_2+y_2), 0) \\ &= ((x_1x_2 + x_1y_2 + y_1x_2 + y_1y_2), 0) \\ f(x_1,x_2)+f(y_1,y_2) &= (x_1x_2, 0) + (y_1y_2, 0) \\ &= (x_1x_2 + y_1y_2, 0) \\ \Rightarrow \quad f(x_1+y_1, x_2+y_2) &\neq f(x_1,x_2)+f(y_1,y_2) \end{aligned}$$

Die Abbildung ist nicht additiv, also auch nicht linear.

Lösung 5c

$$f(x_1,x_2) = (x_1+x_2, x_2)$$

Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist genau dann linear, wenn f additiv und homogen ist.
Additivität:

$$\begin{aligned} f(x_1+y_1, x_2+y_2) &= (x_1+y_1+x_2+y_2, x_2+y_2) \\ f(x_1,x_2)+f(y_1,y_2) &= (x_1+x_2, x_2) + (y_1+y_2, y_2) \\ &= (x_1+x_2+y_1+y_2, x_2+y_2) \\ \Rightarrow \quad f(x_1+y_1, x_2+y_2) &= f(x_1,x_2)+f(y_1,y_2) \checkmark \end{aligned}$$

Homogenität:

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1, \lambda x_2) &= (\lambda x_1 + \lambda x_2, \lambda x_2) \\ \lambda f(x_1,x_2) &= \lambda(x_1+x_2, x_2) \\ &= (\lambda(x_1+x_2), \lambda x_2) \\ &= (\lambda x_1 + \lambda x_2, \lambda x_2) \\ \Rightarrow f(\lambda x_1, \lambda x_2) &= \lambda f(x_1,x_2) \checkmark \end{aligned}$$

Die Abbildung ist linear.

Aufgabe 6

a) Sei $0 \neq a \in \mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f(x) = a \cdot x$. Zeigen Sie: f ist zwar surjektiv, aber nicht injektiv.

b) Wir betrachten $\mathcal{C}[0,1]$, die Menge der stetigen Funktionen auf $[0,1]$. Man zeige: Die Auswertung einer stetigen Funktion in einem festen Punkt $a \in [0,1]$, d.h. die Abbildung
$$\varphi_a : \mathcal{C}[0,1] \to \mathbb{R},\ \varphi_a(f) = f(a)$$
ist linear. Ist φ_a bijektiv?

c) Der Vektorraum $\mathcal{C}^1[a,b]$ der stetig differenzierbaren Funktionen ist in den Vektorraum der stetigen Funktionen $\mathcal{C}[a,b]$, $a < b \in \mathbb{R}$, eingebettet durch die Einbettung $\varphi : \mathcal{C}^1[a,b] \to \mathcal{C}[a,b],\ \varphi(f) = f$. Man schreibt $\mathcal{C}^1[a,b] \hookrightarrow \mathcal{C}[a,b]$. Man zeige: Die Einbettung φ ist linear, injektiv, aber nicht surjektiv.

Lösung 6a

Gemeint scheint hier die Skalarmultiplikation zu sein.

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \langle a, x \rangle \end{cases}$$

Die Abbildung ist surjektiv, da $\text{Bild}(f) = \mathbb{R}$ gilt und daher auch $\text{rg}(f) = \dim(\text{Bild}(f)) = \dim(\mathbb{R}) = 1$.

Sie ist jedoch nicht injektiv, da $\ker(f) \neq \{0\}$.

Notiz: $\text{Bild}\left(f\right) = \left\{f(x) \middle| x \in \tilde{X}\right\} \subseteq \mathbb{R},\ \tilde{X} \subseteq \mathbb{R}^n$

Lösung 6b

Die Abbildung φ_a ist genau dann linear, wenn sie additiv und homogen ist.
Additivität:

$$\varphi_a(f + y) = f(a) + y$$

$$\varphi_a(f) + y = f(a) + y$$

Homogenität:

$$\varphi_a(\lambda f) = \lambda f(a)$$

$$\lambda \varphi_a(f) = \lambda f(a)$$

Die Abbildung ist linear.

φ_a ist nicht injektiv, da es mehrere stetige Funktionen gibt, welche an einem Punkt a den gleichen Wert haben können. Beispiel: Mit $a = 1$ und $f(x) = x$, $g(x) = -x + 2$ also $f, g \in \mathcal{C}[0,1]$ gilt $\varphi_1(f) = \varphi_1(g) = 1$.

Daher kann φ_a auch nicht bijektiv sein.

Lösung 6c

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{C}^1[a,b] \to \mathcal{C}[a,b] & a < b \in \mathbb{R} \\ f \mapsto f \end{cases}$$

Es handelt sich um eine lineare Abbildung, da sie homogen

$$\varphi(\lambda \cdot f) = \lambda\varphi(f), \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \checkmark$$

und additiv ist.

$$\varphi(f_1 + f_2) = \varphi(f_1) + \varphi(f_2), \quad f_{1,2} \in \mathcal{C}^1[a,b] \quad \checkmark$$

Da aus $\varphi(f_1) = \varphi(f_2) \Rightarrow f_1 = f_2$ folgt, ist die Einbettung injektiv. Da es jedoch stetige Funktionen gibt, welche nicht stetig differenzierbar sind, ist die Einbettung nicht surjektiv. $\mathcal{C}^1[a,b] \subsetneq \mathcal{C}[a,b]$ Beispiel: $f(x) = |x| \in \mathcal{C}[-1,1]$, aber $f(x) \notin \mathcal{C}^1[-1,1]$.

Aufgabe 7

Die Abbildung $f : A \to B$, wobei $A = \mathbb{Z}$ und $B = \mathbb{Z}$ sind, sei folgendermaßen definiert:

$$f(a) = a \bmod 17.$$

a) Handelt es sich um eine lineare Abbildung?

b) Wie lautet der Kern von f?

c) Zeigen Sie, dass die Abbildung weder surjektiv noch injektiv ist.

d) Welche Möglichkeiten gibt es, A und B zu wählen, damit die Abbildung bijektiv ist?

Lösung 7a

Die Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ist genau dann linear, wenn sie additiv und homogen ist.

Additivität:

$$\begin{aligned} f(a+b) &= (a+b) \bmod 17 \\ &\neq a \bmod 17 + b \bmod 17 \\ &= f(a) + f(b) \end{aligned}$$

Die Abbildung ist nicht linear, da sie nicht additiv ist.

Lösung 7b

Der Kern von f ist die Menge aller Vielfachen von 17:

$$\ker(f) = f^{-1}(0) = \{n \cdot 17 | n \in \mathbb{Z}\}$$

Lösung 7c

Die Abbildung ist nicht injektiv, da nicht jedes Element der Zielmenge maximal einmal als Funktionswert angenommen wird. Beispiel: $f(1) = f(18) = 1$.

Die Abbildung ist nicht surjektiv, weil nicht jedes Element der Zielmenge mindestens einmal als Funktionswert angenommen wird. Beispiel: $\mathbb{Z} = B \ni 17 \notin \text{Bild}(f)$.

Lösung 7d

Man könnte den Definitionsbereich auf das Intervall $A = [n; n+16],\ n \in \mathbb{Z}$ für ein beliebiges $n \geq 0$ einschränken um die Abbildung injektiv zu machen und den Wertebereich auf das Intervall $B = [0; 16]$ zuschneiden, damit die Abbildung surjektiv wird.

Die Abbildung $f : [n; n+16] \to [0; 16], n \in \mathbb{Z}$ wäre bijektiv.