Aufgabe 5

Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{ccccccc} x & + & 3y & + & 3z & = & -2 \\ x & + & 2y & + & 4z & = & 3 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}\right)$$

a) nach dem Gauß-Verfahren

b) nach der Cramerschen Regel und

c) durch Invertierung von der Abbildungsmatrix.

Lösung 5a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow x = 1, \quad y = -3, \quad z = 2$$

Lösung 5b

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

sowie $Ax = b$.
Um die Cramersche Regel anzuwenden berechnen wir zunächst $|A|$ mit der Regel von Sarrus

$$|A| = 2 + 12 + 3 - 6 - 4 - 3 = 4.$$

Betrachten wir nun die Spaltenvektoren von A mit $A = (a_1, a_2, a_3) \in K^{3\times 3}$ und bestimmen A_i mit $i \in \{1, 2, 3\}$ nach Satz 6.28.

$$A_1 = (b,\ a_2,\ a_3)$$
$$A_2 = (a_1,\ b,\ a_3)$$
$$A_3 = (a_1,\ a_2,\ b)$$

Durch Anwendung der Regel von Sarrus bestimmen wir die Determinanten wie folgt:

$$\begin{aligned}
|A_1| &= \det(b,\ a_2,\ a_3) \\
&= \det\begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= -4 + 9 - 0 - (-8) - 9 \\
&= 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|A_2| &= \det(a_1,\ b,\ a_3) \\
&= \det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= 3 + (-8) + 0 - 9 - 0 - (-2) \\
&= -12
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|A_3| &= \det(a_1,\ a_2,\ b) \\
&= \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 0 + 9 + (-2) - (-4) - 3 - 0 \\
&= 8
\end{aligned}$$

Mit $x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{4}{4} = 1 \\
x_2 &= \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-12}{4} = -3 \\
x_3 &= \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{8}{4} = 2
\end{aligned}$$

Lösung 5c

Das Gleichungssystem $Ax = b$ löst sich durch Multiplikation von links mit dem Inversen von A zu $x = A^{-1}b$ auf:

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ \Leftrightarrow \quad A^{-1}Ax &= A^{-1}b \\ \Leftrightarrow \quad Ex &= A^{-1}b \\ \Leftrightarrow \quad x &= A^{-1}b \end{aligned}$$

Wir bestimmen A^{-1}.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 & -1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/2 & -1/4 \end{array}\right) \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -5/4 & 3/2 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 & -1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/2 & -1/4 \end{array}\right) \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 & -1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/2 & -1/4 \end{array}\right) \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Durch Anwendung der zuvor bestimmten Gleichung erhalten wir den Lösungsvektor.

$$\begin{aligned} x &= A^{-1}b \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 6

Welchen Rang haben die Matrizen $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times 2}$ mit $n \geq 2$?

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ -2 & 1 & -8 \\ 1 & 5 & -7 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $b_{ij} = \begin{cases} -i & i \text{ gerade} \\ i & i \text{ ungerade} \\ n & i = n, j = 1 \\ n-1 & i = n, j = 2 \end{cases}$

Lösung 6a

Durch Anwendung des Gauß-Jordan-Verfahrens lässt sich eine Nullzeile wegstreichen und es bleiben drei lineare unabhängige Zeilen übrigen, sodass $\mathrm{rg}(A) = 3$ ist.

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ -2 & 1 & -8 \\ 1 & 5 & -7 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 0 & 11 & -22 \\ 1 & 5 & -7 \\ 0 & -1 & -7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -17 & -22 \\ 0 & 0 & -99 \\ 1 & 5 & -7 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung 6b

Wir betrachten die Matrizen B_n mit $n \in \{2, 3, 4\}$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$
$$B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

sowie eine allgemeine Form für $n > 4$

$$B_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \\ 3 & 3 \\ -4 & -4 \\ \vdots & \vdots \\ n & n-1 \end{pmatrix}$$

Es ist leicht erkennbar das die Zeilen $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ linear abhängig voneinander sind und auf die erste Zeile reduziert werden können. Somit ist

$$\operatorname{rg}(B) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ n & n-1 \end{pmatrix} = 2.$$

Aufgabe 7

Gegeben seien die folgenden Vektoren

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

sowie die zugehörigen LGS

$$(1)\ (a_1, a_2, a_3)x = b \quad \text{und} \quad (2)\ (a_1, a_2, a_3, b)x = 0.$$

a) Berechnen Sie $\det(a_1, a_2, a_3, b)$ in Abhängigkeit von λ und bestimmen Sie den Wert λ^*, für den die Determinante Null wird.

b) Bestimmen Sie die Lösbarkeit der LGS (1) und (2) für den Fall $\lambda = \lambda^*$.

c) Bestimmen Sie die Lösbarkeit der LGS (1) und (2) für den Fall $\lambda \neq \lambda^*$.

d) Geben Sie die Lösungsmengen für b) und c) an, sollten unendlich viele Lösungen existieren.

Lösung 7