Aufgabe 6

a) Sei $0 \neq a \in \mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f(x) = a \cdot x$. Zeigen Sie: f ist zwar surjektiv, aber nicht injektiv.

b) Wir betrachten $\mathcal{C}[0,1]$, die Menge der stetigen Funktionen auf $[0,1]$. Man zeige: Die Auswertung einer stetigen Funktion in einem festen Punkt $a \in [0,1]$, d.h. die Abbildung
$$\varphi_a : \mathcal{C}[0,1] \to \mathbb{R},\ \varphi_a(f) = f(a)$$
ist linear. Ist φ_a bijektiv?

c) Der Vektorraum $\mathcal{C}^1[a,b]$ der stetig differenzierbaren Funktionen ist in den Vektorraum der stetigen Funktionen $\mathcal{C}[a,b],\ a < b \in \mathbb{R}$, eingebettet durch die Einbettung $\varphi : \mathcal{C}^1[a,b] \to \mathcal{C}[a,b],\ \varphi(f) = f$. Man schreibt $\mathcal{C}^1[a,b] \hookrightarrow \mathcal{C}[a,b]$. Man zeige: Die Einbettung φ ist linear, injektiv, aber nicht surjektiv.

Lösung 6a

Gemeint scheint hier die Skalarmultiplikation zu sein, also $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f(x) = \langle a, x \rangle$.

Die Abbildung ist surjektiv, da $Bild(f) = \mathbb{R}$ gilt und daher auch $rg(f) = \dim(Bild(f)) = \dim(\mathbb{R}) = 1$.

Sie ist jedoch nicht injektiv, da $\ker(f) \neq \{0\}$.

Notiz: Bild $f\left(\tilde{X}\right) = \left\{f(x) \middle| x \in \tilde{X}\right\} \subseteq \mathbb{R},\ \tilde{X} \subseteq \mathbb{R}^n)$

Lösung 6b

Die Abbildung φ_a ist genau dann linear, wenn sie additiv und homogen ist.
Additivität:
$$\varphi_a(f + y) = f(a) + y$$
$$\varphi_a(f) + y = f(a) + y$$
Homogenität:
$$\varphi_a(\lambda f) = \lambda f(a)$$
$$\lambda \varphi_a(f) = \lambda f(a)$$
Die Abbildung ist linear.

φ_a ist nicht injektiv, da es mehrere stetige Funktionen gibt, welche an einem Punkt a den gleichen Wert haben können. Beispiel: Mit $a = 1$ und $f(x) = x,\ g(x) = -x + 2$ also

$f, g \in \mathcal{C}[0,1]$ gilt $\varphi_1(f) = \varphi_1(g) = 1$.

Daher kann φ_a auch nicht bijektiv sein.

Lösung 6c

Fehlt.