Aufgabe 1

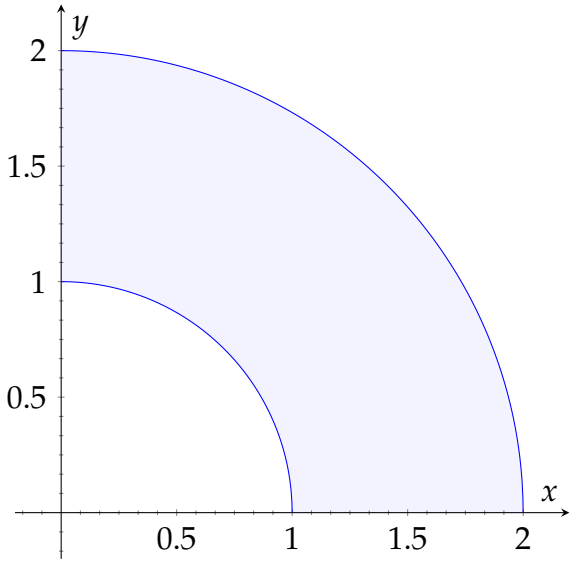
Wir betrachten den Bereich

$$B = \{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

a) Skizzieren Sie B.

b) Über diesen Bereich wird die Funktion $f(x,y) = (x^2 + y^2)^2$ integriert. Wie groß ist das Integral?

Lösung 1



$$\begin{aligned}
\int_0^2 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_0^2 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (x^2+y^2)^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} x^4 + 2x^2y^2 + y^4\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 \left[x^4 y + \frac{2}{3}x^2y^3 + \frac{y^5}{5}\right]_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 x^4\sqrt{4-x^2} + \frac{2}{3}x^2(\sqrt{4-x^2})^3 + \frac{(\sqrt{4-x^2})^5}{5} - x^4\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{3}x^2(\sqrt{1-x
\end{aligned}$$