Wir haben eine DGL + Anfangswert gegeben.

Ist die DGL nicht in expliziter From gegeben, also ist y' nicht freigestellt, so können wir sie nicht ohne Weiteres lösen.
Ist sie in expliziter Form gegeben, also in der Form $y'(x) = f(x,y(x))$ bestimmen wir als nächstes die Ordnung der DGL.
1. Ordnung siehe [1.A] 2. Ordnung siehe [2.A] Höherer Ordnung: Können wir nicht lösen.

DGLs 1. Ordnung

[1.A]

Ist die DGL separabel? Ja -> [1.B], Nein -> [1.C]

[1.B]

Die DGL ist separabel, also können wir durch Trennung der Variablen lösen.

Beispiel:

$$y' = x \cdot y^2$$

1. Fall: $y(x) = 0$ ist eine triviale Lösung.
2. Fall: $y(x) \neq 0$ Trennung der Variablen.

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y &=& \int x\,\mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow \quad & -\frac{1}{y} &=& \frac{x^2}{2} + c \\ \Leftrightarrow \quad & y &=& -\frac{2}{x^2} + \tilde{c} \end{aligned}$$

[1.C]

Die DGL ist nicht separabel.

Ist die DGL in der Form

$$y' = h(ax + by + c)\ ?$$

Dann können wir durch Substitution lösen.
Ist die DGL in der Form

$$y' = h\left(\frac{y}{x}\right)$$

Mitschrift Fortsetzung vom 06.06.2023

[D]

Wenn nicht der Form $y'(x) = p(x) \cdot y + g(x)$, dann untersuchen wir, ob die DGL in einer speziellen Form vorliegt.
Liegt eine Bernoulli DGL vor?

$$\begin{aligned} y'(x) + f(x) \cdot y(x) &= g(x) \cdot y^\alpha \\ y'(x) + p(x) \cdot y(x) &= q(x) \cdot {\color{red} y(x)^\alpha} \end{aligned}$$

Wenn ja:

$$\begin{aligned} z(x) &= y(x)^{1-\alpha} \\ z'(x) &= \underbrace{(1-\alpha) \cdot p(x)}_{=\tilde{p}} \cdot z(x) + \underbrace{(1-\alpha) \cdot q(x)}_{=\tilde{q}} \end{aligned}$$

Wir erhalten die Form wie [C.1] und lösen entsprechend.

Beispiel:

$$(1+x) \cdot y' + y = -(1+x)^2 \cdot y^4, \quad y(0) = 1$$

Um zu erkennen, dass es sich um eine Bernoulli DGL handelt, formen wir wir folgt um:

$$\begin{aligned} (1+x) \cdot y' + y &= -(1+x)^2 \cdot y^4 \\ \Leftrightarrow y' &= \frac{-y}{1+x} - \frac{(1+x)^2}{1+x} \cdot y^4, \quad x \neq -1 \\ \Leftrightarrow y' &= \underbrace{\frac{-1}{1+x}}_{p(x)} \cdot y - \underbrace{\frac{(1+x)^2}{1+x}}_{q(x)} \cdot y^4, \quad \alpha = 4 \end{aligned}$$

Substituiere: $z(x) = y(x)^{1-\alpha} = y(x)^{-3}$

$$\begin{aligned} z'(x) &= (1-\alpha) \cdot p(x) \cdot z(x) + (1-\alpha) \cdot q(x) \\ &= -3(\frac{-1}{1+x} z(x) + 3(1+x)), \quad z(0) = y(0)^{-3} = 1 \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} P(x) &= \int_0^x p(\tau) \, \mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^x \frac{3}{1+\tau} \, \mathrm{d}\tau \\ &= 3 \ln(1+x) - 0 \\ &= 3 \ln(1+x) \end{aligned}$$

bestimmen wir:

$$\begin{aligned}z_h(x) &= 1 \cdot e^{P(x)}\\ &= 1 \cdot \mathrm{e}^{\ln(1+x)^3}\\ &= (1+x)^3\end{aligned}$$

Die Bestimmung der homogenen Lösung z_h, weicht am Standort Aachen dadurch ab, dass wir $f(x) = -p(x)$ setzen. Ansonsten sind die Verfahren gleich.

$$\begin{aligned}z_h'(x) + f(x) \cdot z(x) &= 0\\ z_h'(x) - \frac{3}{1+x} \cdot z(x) &= 0\\ z_h'(x) &= \frac{3}{1+x} z(x)\\ \int \frac{1}{z} \,\mathrm{d}z &= \int \frac{3}{1+x} \,\mathrm{d}x\\ \ln(z_h) &= \int \frac{3}{1+x} \,\mathrm{d}x\\ z_h(x) &= \mathrm{e}^{\int \frac{3}{1+x} \,\mathrm{d}x}\\ &= \mathrm{e}^{3\ln(1+x)+\tilde{c}}\\ &= c \cdot \mathrm{e}^{\ln((1+x)^3)}\\ &= c \cdot (1+x)^3\\ z_h(0) &= c \cdot 1 \Leftrightarrow c = 1\\ z_h(x) &= (1+x)^3\end{aligned}$$

Zur Bestimung der partikulären Lösung. Dies lässt sich auch mit Ansatz vom Typ der rechten Seite machen. Wir wählen jedoch Variation der Konstanten:

$$\begin{aligned}z_p(x) &= \mathrm{e}^{P(x)} \cdot c(x)\\ &= \mathrm{e}^{P(x)} \cdot \int_0^x q(\tau)\mathrm{e}^{-P(\tau)} \,\mathrm{d}\tau\\ &= (1+x)^3 \int_0^x 3(1+\tau)\mathrm{e}^{-\ln((1+\tau)^3)} \,\mathrm{d}\tau\\ &= (1+x)^3 \int_0^x 3(1+\tau)\mathrm{e}^{\ln \frac{1}{(1+\tau)^3}} \,\mathrm{d}\tau\\ &= (1+x)^3 \int_0^x 3(1+\tau)\frac{1}{(1+\tau)^3} \,\mathrm{d}\tau\\ &= (1+x)^3 \int_0^x \frac{3}{(1+\tau)^2} \,\mathrm{d}\tau\\ &= (1+x)^3 \left[-\frac{1}{1+\tau}\right]_0^x\\ &= -3(1+x)^2 + 3(1+x)^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z(x) &= z_h(x) + z_p(x) \\ &= (1+x)^3 - 3(1+x)^2 + 3(1+x)^3 \\ &= 4(1+x)^3 - 3(1+x)^2 \end{aligned}$$

Rücksubstitution:

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{\sqrt[3]{z(x)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{4(1+x)^3 - 3(1+x)^2}} \end{aligned}$$

[E]

Ist die DGL in der Form?

$$P(x,y) + Q(x,y) \cdot y' = 0$$

Wenn ja, ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt?

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \stackrel{?}{=} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

Beispiel:

$$x^2 - y = (x + \sin^2(y)) \cdot y'$$

Wir stellen um, damit sich diese Form ergibt:

$$\begin{aligned} x^2 - y &= (x + \sin^2(y)) \cdot y' \\ \Leftrightarrow \quad \underbrace{(x^2 - y)}_{P(x,y)} + \underbrace{(-(x + \sin^2(y)))}_{Q(x,y)} \cdot y' &= 0 \end{aligned}$$

Integrabilitätsbedingung erfüllt?

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) &= -1 \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) &= -1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Ja, Integrabilitätsbedingung erfüllt.

$$
\begin{aligned}
F(x,y) &= \int P(x,y)\,\mathrm{d}x = \int x^2 - y\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^3}{3} - yx + c_1(y) \\
F(x,y) &= \int Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int -x - \sin^2(y)\,\mathrm{d}y \\
&= -yx - \frac{1}{2}y + \frac{1}{y}\sin(2y) + c_2(x)
\end{aligned}
$$

Koeffizientenvergleich gibt uns die Potentialfunktion $F(x,y)$

$$F(x,y) = \frac{x^3}{3} - xy - \frac{1}{2}y + \frac{1}{y}\sin(2y) = c$$

In Aachen setzen wir üblicherweise $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \stackrel{!}{=} Q(x,y)$ gleich und lösen dann die Gleichung nach $c_1 * y'$ auf.

[F]

Oder in der From?

$$P(x,y) + Q(x,y) \cdot y' = f(x)$$

Beispiel:

$$\underbrace{y}_{P(x,y)} \underbrace{-(2x+y)}_{Q(x,y)} \cdot y' = 0$$

Integrabilitätsbedingung:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) &= 1 \\
\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) &= -2
\end{aligned}
$$

Nein, ist nicht erfüllt. -> Finde den integrierenden Faktor:

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial y} = 3$$

Versuche:

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial y}}{P} = \frac{3}{y} =: g(y)$$

Suche nach einer Funktion in Abhängigkeit von y.

$$\mu(y) = \mathrm{e}^{-\int g(y)\, \mathrm{d}y} = \mathrm{e}^{-3\ln y} = \frac{1}{y^3}$$

$$y - (2x + y) \cdot y' = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{y^2}}_{P(x,y)} \underbrace{-\left(\frac{2x}{y^3} + \frac{1}{y^2}\right)}_{Q(x,y)} = 0$$

Neue Integrabilitätsbedingung:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{2}{y^3}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = -\frac{2}{y^3}$$

IB ist nun erfüllt.

$$F(x,y) = \int \frac{1}{y^2}\, \mathrm{d}x = \frac{x}{y^2} + c_1(y) + 0$$

$$F(x,y) = \int -\frac{2}{y^3} - \frac{1}{y^2}\, \mathrm{d}y = \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y} + c_2(x)$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$F(x,y) = \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y} = c$$

Können wir nach y freistellen? Nein, also fertig.

DGLs 2. Ordnung

[2.A]

Homogene DGL 2. Ordnung. (für inhomogene DGLs 2. Ordnung ist auch eine Lösung mit Variation der Kontanten möglich).

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad y(\zeta) = \eta_1,\, y'(\zeta) = \eta_2$$

Ansatz: $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$.

$$\begin{aligned}\lambda^2\mathrm{e}^{\lambda x} + a\lambda\mathrm{e}^{\lambda x} + b\mathrm{e}^{\lambda x} &= 0\\ \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\lambda x} \cdot \underbrace{\left(\lambda^2 + a\lambda + b\right)}_{=0} &= 0\end{aligned}$$

charakteristische Gleichung
Entscheidung anhand der Diskriminanten der Charakteristischen Gleichgung.

$$D = \frac{a^2}{4} - b \tag{1}$$

$$\tag{2}$$

Wenn $D > 0$ haben wir zwei reelle Nullstellen, λ_1, λ_2.

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + c_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$$

Wenn $D = 0$ haben wir eine reelle (doppelte) Nullstelle λ.

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^{\lambda x} + c_2 \cdot x \cdot \mathrm{e}^{\lambda x}$$

Wenn $D < 0$ liegen zwei komplexe Nullstellen vor. $\lambda_1 = w + \mathrm{i}v$, $\lambda_2 = w - \mathrm{i}v$

$$y(x) = \mathrm{e}^{wx} \cdot (c_1\cos(vx) + c_2\sin(vx))$$

Mitschrift 13.06.2023

$$A = \int_G f(x,y)\,\mathrm{d}A = \int_0^? \int \ldots$$

Jakobi Matrix

$$\begin{aligned} g(r,\phi) &= \left(r\cdot\cos\phi, r\sin\phi\right)\\ J_{g(r,\phi)} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial r}(r,\phi) & \frac{\partial g_2}{\partial r}(r,\phi)\\ \frac{\partial g_1}{\partial \phi}(r,\phi) & \frac{\partial g_2}{\partial \phi}(r,\phi)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi\\ -r\cdot\sin\phi & r\cdot\cos\phi\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\det J_{g(r,\phi)} = r\cdot\cos^2\phi + r\sin^2\phi - \sin\phi + r\cdot\sin\phi$$

Abbildung A
Abbildung B

$$\int_\alpha^\beta \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(v)} f\left(r\cdot\cos\phi, r\sin\phi\right) v\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi$$

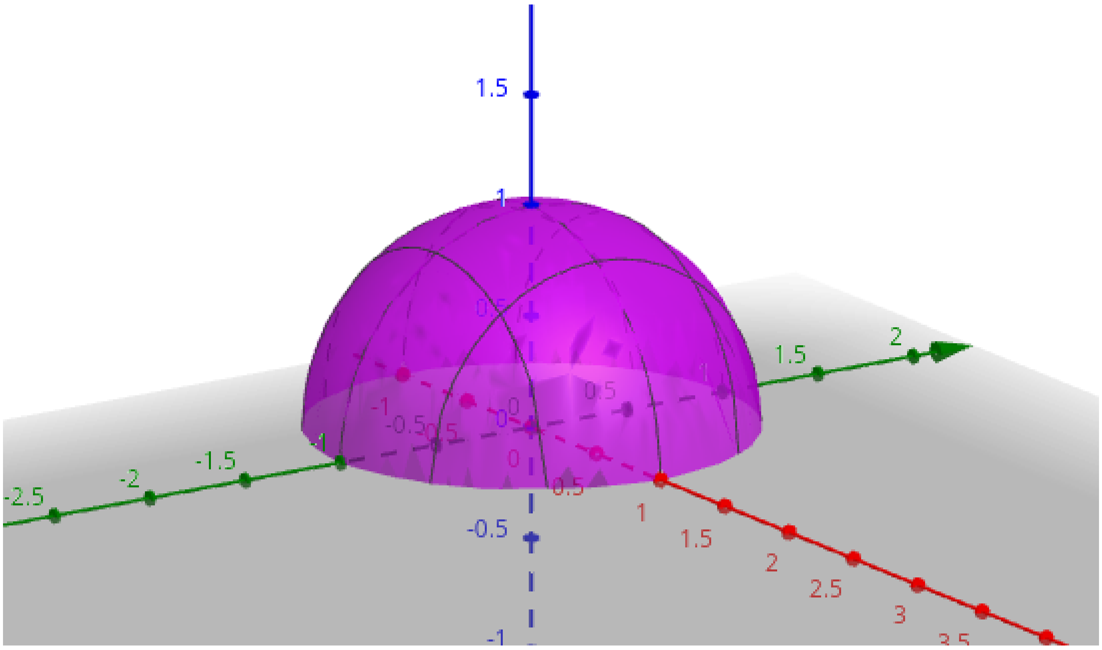

Abbildung 1: $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Beispiel: Abbildung C
Aufgabe: Volumen berechnen. Siehe 1.

$$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

Die Funktion $f(x,y)$ beschreibe eine flach liegende Halbkugel.
Volumen über Grunfläche G

$$\begin{aligned} V &= \int_G f(x,y)\ \mathrm{d}(x,y) \\ &= \int_0^{2\phi} \int_0^1 \sqrt{1 - r^2 \cos^2 \phi - r \sin^2 \phi} \cdot r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\phi \\ &= \int_0^{2\phi} \underbrace{\int_0^1 \sqrt{1 - r^2} \cdot r\ \mathrm{d}r}_{t=1-r^2}\ \mathrm{d}\phi \end{aligned}$$

Substitution mit

$$\begin{aligned} t &= 1 - r^2 \\ \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r} &= -2r \\ &= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{r} \int_1^0 \sqrt{t}\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}\phi \end{aligned}$$

Schwerpunkt Berechnung

Um den Schwerpunkt $(x_s|y_s)$ eines Gebietes G zu berrechnen, können wir diese Formel verwenden:

$$x_s = \frac{\int_G x \, \mathrm{d}(x,y)}{\int_G 1 \, \mathrm{d}(x,y)} \qquad y_s = \frac{\int_G y \, \mathrm{d}(x,y)}{\int_G 1 \, \mathrm{d}(x,y)}$$

Hinweis:

$$\begin{aligned}&\int_a^b \int_c^d f(x) \cdot g(y) \, \mathrm{d}(x,y) \\ &\qquad = \int_a^b g(y) \cdot \underbrace{\int_c^d f(x) \, \mathrm{d}x}_{z} \, \mathrm{d}y\end{aligned}$$

Arbeitsintegral

Arbeit durch ein Vektorfeld

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b \overrightarrow{F}(g(t)) \cdot g'(t) \, \mathrm{d}t \\ &= \int_\gamma \end{aligned}$$

Prüfen der Integrabilitätsbedingung. Wenn erfüllt existiert eine Potentialfunktion; dann ist das Vektorfeld konservativ und es ist egal, welchen Weg wir gehen.
Beispiel:

$$\begin{aligned} g_1(t) &= (t,t^2) \quad t \in [0;1] \\ g_2(t) &= (t^2,t) \quad t \in [0;1] \end{aligned}$$

Vektorfeld:

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + 2y \\ 2x + y^2 \end{pmatrix}$$

Einsetzen durch $x = g_1(t)$ und $y = g_2(t)$

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_0^1 \overrightarrow{F}(g_1(t)) \cdot g_1'(t) \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 + \alpha t^2 \\ 2t + t^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 3t^2 + 4t^2 + 2t^5 \, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$\int_0^1 7t^2 + 2t^5 \, \mathrm{d}t$$

Der zweite Weg liefert das gleiche Ergebnis $W_1 = W_2$, weil das Vektorfeld konservativ ist, also die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist.
Integrabilitätsbedingung:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \stackrel{?}{=} \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)$$

Im Beispiel: 2=2 Potentialfunktion:

$$\begin{aligned} v(x,y) &= \int f_1(x,y)\,\mathrm{d}x = \int x^2 + 2y\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^3}{3} + 2xy + c(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(x,y) &= \int f_2(x,y)\,\mathrm{d}x = \int 2 + y^2\,\mathrm{d}y \\ &= 2xy + \frac{y^3}{3} + \tilde{c}(x) \end{aligned}$$

$$v(x,y) = \frac{x^3}{3} + 2xy + \frac{y^3}{3}$$