Aufgabe 2

Berechnen Sie folgende Integrale:

a) $\int_1^2 \left(3x^2 + 2x\right) \cdot e^{x^3+x^2}\ \mathrm{d}x$

b) $\int \frac{1-x}{(x+5)^2}\ \mathrm{d}x$

c) $\int_0^\pi \sin(x) \cdot x^2\ \mathrm{d}x$

Lösung 2a

Substituiere $z = x^3 + x^2$, sodass $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 3x^2 + 2x \Leftrightarrow \frac{1}{3x^2+2x}\ \mathrm{d}z =\ \mathrm{d}x$ und damit

$$\int \left(3x^2 + 2x\right) \cdot e^{x^3+x^2}\ \mathrm{d}x = \int \left(3x^2 + 2x\right) \cdot e^z \frac{1}{3x^2 + 2x}\ \mathrm{d}z = \int e\ \ \mathrm{d}z.$$

Durch Rücksubstitution und Einsetzen der Grenzen ergibt sich:

$$\int_1^2 \left(3x^2 + 2x\right) \cdot e^{x^3+x^2}\ \mathrm{d}x = \left[e^{x^3+x^2}\right]_1^2 = e^{12} - e^2 = e^{10}$$

Lösung 2b

Partialbruchzerlegung:

$$\tfrac{1-x}{(x+5)^2} = \tfrac{A}{(x+5)} + \tfrac{B}{(x+5)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - x = A \cdot (x+5) + B$$

$$x = -5: \quad 1 - (-5) = A \cdot (-5+5) + B$$

$$\Leftrightarrow \quad 6 = B$$

$$x = 0: \quad 1 = A \cdot (0+5) + 6$$

$$\Leftrightarrow \quad -5 = A \cdot 5$$

$$\Leftrightarrow \quad -1 = A$$

$$\Rightarrow \frac{1-x}{(x+5)^2} = \frac{-1}{(x+5)} + \frac{6}{(x+5)^2}$$

Integration:

$$\int \frac{1-x}{(x+5)^2} dx = \int \frac{-1}{(x+5)} + \frac{6}{(x+5)^2} dx = -\ln(|x+5|) - \frac{6}{x+5} + C$$

Lösung 2c

Partielle Integration mit $u' = \sin(x)$ und $v = x^2$.
Setzte $u = -\cos(x)$ und $v' = 2x$ ein:

$$\textstyle\int_0^\pi \sin(x) \cdot x^2 dx = \left[-x^2 \cos(x)\right]_0^\pi - \int_0^\pi -2x \cdot \cos(x) dx$$

Partielle Integration mit $u' = -\cos(x)$ und $v = 2x$.

Setze $u = -\sin(x)$ und $v' = 2$ ein:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin(x) \cdot x^2 dx &= \left[-x^2 \cos(x)\right]_0^\pi - \left([-2x\sin(x)]_0^\pi - \int_0^\pi -2\sin(x)dx\right) \\
&= \left[-x^2 \cos(x)\right]_0^\pi - [-2x\sin(x)]_0^\pi + 2[\cos(x)]_0^\pi \\
&= -\pi^2\cos(\pi) + 2\pi\sin(\pi) + 2\cos(\pi) - 2\cos(0) \\
&= \pi^2 - 4
\end{aligned}$$