Aufgabe 5

Hinweis: Umbenennung des Parameters von x nach a.
Berechnen Sie in Abhängigkeit von a

a) den Kern

b) die Dimension des Kerns

c) den Rang

d) das Bild

der zu der folgenden Matrix gehörenden linearen Abbildung:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & a \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Lösung 5

Dimensionsformel für lineare Abbildungen:
Für eine lineare Abbildung $f : V \to W$ gilt

$$\dim(\ker(f)) + \operatorname{rg}(f) = \dim(V).$$

Lösung 5a

Der Kern einer linearen Abbildung A ist die Menge aller Vektoren $x \in \mathbb{R}^4$, die von A auf den Nullvektor abgebildet werden, d.h.

$$\ker(A) = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \middle| Ax = 0 \right\}.$$

Durch elementare Zeilenumformungen erhalten wir die Zeilenstufenform der Koeffizientenmatrix

$$
\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & a \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}
\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3/2 & 4 & a - 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}
\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{6} & \frac{2a}{3} - 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}
\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4a - 6 \\ 0 & 0 & 0 & 20 - 4a \end{pmatrix}
$$

Es gilt $Ax = f(x) = 0$ und wir erhalten
$x_4 \cdot (20 - 4a) = 0 \Leftrightarrow x_4 = 0 \vee a = 5$
$x_3 + x_4 \cdot (4a - 6) = 0 \; x_3 = -14x_4$

Lösung 5

Aufgabe 6

Stellen Sie zu folgenden Abbildungen die zugehörigen Abbildungsmatritzen auf.

a) $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^3,\ f(p(x)) = \int_{C=0} p(x)\, \mathrm{d}x$

b) $g : \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^2,\ g(p(x)) = p'(x)$.

c) Können Sie den Wertebereich von f so einschränken, dass f bijektiv ist? Falls ja, wie lautet die Umkehrabbildung von f?

Lösung 6a

Die Abbildung der Polynome maximal zweiten Gerades auf ihre Stammfunktion aus den Polynomen maximal dritten Gerades

$$f : \begin{cases} \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^3 \\ p(x) \mapsto \int_{C=0} p(x)\, \mathrm{d}x \end{cases}$$

lässt sich ebenfalls als $f(p(x)) = A \cdot p(x)$ schreiben, mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Lösung 6b

Umgekehrt lässt sich

$$g : \begin{cases} \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^2 \\ p(x) \mapsto p'(x) \end{cases}$$

als $f(p(x)) = B \cdot p(x)$ mit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

schreiben.

Lösung 6c

Begrenzt man den Wertebereich der injektiven Abbildung f auf die Menge aller Polynome maximal vierten Gerades ohne die Polynome vom Grad Null $\tilde{f} : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^3 \setminus \mathbb{P}^0$, so wird die Abbildung surjektiv und damit bijektiv.

Die Umkehrabbildung f^{-1} kann nun so angegeben werden:

$$f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{P}^3 \setminus \mathbb{P}^0 \to \mathbb{P}^2 \\ p(x) \mapsto p'(x) \end{cases}$$

Die Abbildungsmatrix braucht dabei ebenfalls nur invertiert zu werden.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7

Über eine lineare Abbildung f sei folgendes bekannt.

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Für welche Werte von α ist die Abbildungsmatrix A_f von f eindeutig bestimmt?

b) Bestimmen Sie die Matrix A_f in Abhängigkeit von α.

c) Bestimmen Sie den Kern und das Bild der Abbildung in Abhängigkeit von α.

Lösung 7

Wir betrachten die lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $V \subseteq \mathbb{R}^3$ und $W \subseteq \mathbb{R}^2$.
Sei $\mathcal{B}_V = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \right)$ eine Basis von V und $\mathcal{B}_W = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis von W.

$$\begin{pmatrix} 1&0&1 \\ 1&1&0 \\ 0&1&\alpha \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&0&1 \\ 1&1&-1 \end{pmatrix}$$

Wenn $\alpha = 1$

$$\begin{pmatrix} 1&0&1 \\ 1&1&0 \\ 0&1&1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&0&1 \\ 0&1&-1 \\ 0&1&1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&0&1 \\ 0&1&-1 \\ 0&0&2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}$$

was passiert, wenn $\alpha \neq 1$ z.B. $\alpha = 0$

$$\begin{pmatrix} 1&0&1 \\ 1&1&0 \\ 0&1&0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 1&0&0 \\ 0&1&0 \end{pmatrix}$$

da $\det(A_f) = \alpha + 1$ und für $\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -1$ gilt:

$$\begin{pmatrix} 1&0&1 \\ 1&1&0 \\ 0&1&-1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&0&1 \\ 1&1&0 \\ 1&1&0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&0&1 \\ 1&1&0 \end{pmatrix}$$