

Aufgabe 1

Sind die folgenden Funktionen im Punkt $(0,0)$ stetig?

$$\text{a) } f(x, y) \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x, y) \begin{cases} \frac{x+y}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Lösung 1a

Sei

$$\vec{X}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_n \cdot \cos(\phi_n) \\ r_n \cdot \sin(\phi_n) \end{pmatrix} \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$$

dann folgt die Stetigkeit im Punkt $(0,0)$ durch

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(\vec{X}_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(r_n \cdot \cos(\phi_n))^3 + (r_n \cdot \sin(\phi_n))^3}{(r_n \cdot \cos(\phi_n))^2 + (r_n \cdot \sin(\phi_n))^2} \\ &= \lim_{r_n \rightarrow 0} \frac{r_n^3 \cdot (\cos^3(\phi_n) + \sin^3(\phi_n))}{r_n^2 \cdot (\cos^2(\phi_n) + \sin^2(\phi_n))} \\ &= \lim_{r_n \rightarrow 0} r_n \cdot \frac{\cos^3(\phi_n) + \sin^3(\phi_n)}{\cos^2(\phi_n) + \sin^2(\phi_n)} \\ &= \lim_{r_n \rightarrow 0} r_n \cdot (\cos^3(\phi_n) + \sin^3(\phi_n)) \\ &= 0 \\ &= f(0,0). \checkmark \end{aligned}$$

Lösung 1b

Sei

$$\vec{X}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_n \cdot \cos(\phi_n) \\ r_n \cdot \sin(\phi_n) \end{pmatrix} \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$$

dann folgt die Umstetigkeit im Punkt $(0,0)$ durch

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} f(\vec{X}_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n \cdot \cos(\phi_n) + r_n \cdot \sin(\phi_n)}{(r_n \cdot \cos(\phi_n))^2 + (r_n \cdot \sin(\phi_n))^2} \\ &= \lim_{r_n \rightarrow 0} \frac{r_n \cdot (\cos(\phi_n) + \sin(\phi_n))}{r_n^2 \cdot (\cos^2(\phi_n) + \sin^2(\phi_n))} \\ &= \lim_{r_n \rightarrow 0} \frac{1}{r_n} (\cos(\phi_n) + \sin(\phi_n)) \\ &= \pm \infty \\ &\neq f(0,0). \quad \nexists\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die relativen Extrema und Sattelpunkte der Funktionen

- a) $f(x, y) = 4x \cdot y + 2x^3 - 2y^3 + 5$
- b) $f(x, y) = 10x^2 + (y - 10)^2 - 10x \cdot y$

Lösung 2a

1. Ableitung:

$$f_x(x, y) = 4y + 6x^2 \tag{1}$$

$$f_y(x, y) = 4x - 6y^2 \tag{2}$$

Berechnung der Nullstellen

Für (1):

$$\begin{aligned}0 &= 4y + 6x^2 \\ \Leftrightarrow -4y &= 6x^2 \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{3x^2}{2}\end{aligned}$$

Einsetzen in (2):

$$\begin{aligned}0 &= 4x - 6 \left(\frac{3x^2}{2} \right)^2 \\ \Leftrightarrow 0 &= 4x - \frac{27x^4}{2} \\ \Leftrightarrow 0 &= x \cdot (27x^3 - 8) \\ \Leftrightarrow 0 &= x \vee 27x^3 - 8 = 0 \\ \Leftrightarrow 0 &= x \vee x = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Daraus folgen die kritischen Punkte $\left(0 \mid -\frac{3x^2}{2}\right)$ und $\left(\frac{2}{3} \mid -\frac{3x^2}{2}\right)$.

Aufgabe 3

Lösung 3

Aufgabe 4

Lösung 4

Aufgabe 5

Lösung 5