

## Aufgabe 5

Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x + 3y + 3z = -2 \\ x + 2y + 4z = 3 \\ x + y + z = 0 \end{pmatrix}$$

- a) nach dem Gauß-Verfahren
- b) nach der Cramerschen Regel und
- c) durch Invertierung von der Abbildungsmatrix.

### Lösung 5a

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) &\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \end{array} \right) \\ &\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \\ &\Rightarrow x = 1, \quad y = -3, \quad z = 2 \end{aligned}$$

### Lösung 5b

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

sowie  $Ax = b$ .

Um die Cramersche Regel anzuwenden berechnen wir zunächst  $|A|$  mit der Regel von Sarrus

$$|A| = 2 + 12 + 3 - 6 - 4 - 3 = 4.$$

Betrachten wir nun die Spaltenvektoren von  $A$  mit  $A = (a_1, a_2, a_3) \in K^{3 \times 3}$  und bestimmen  $A_i$  mit  $i \in \{1, 2, 3\}$  nach Satz 6.28.

$$A_1 = (b, a_2, a_3)$$

$$A_2 = (a_1, b, a_3)$$

$$A_3 = (a_1, a_2, b)$$

Durch Anwendung der Regel von Sarrus bestimmen wir die Determinanten wie folgt:

$$\begin{aligned}|A_1| &= \det(b, a_2, a_3) \\ &= \det \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -4 + 9 - 0 - (-8) - 9 \\ &= 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|A_2| &= \det(a_1, b, a_3) \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 3 + (-8) + 0 - 9 - 0 - (-2) \\ &= -12\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|A_3| &= \det(a_1, a_2, b) \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 0 + 9 + (-2) - (-4) - 3 - 0 \\ &= 8\end{aligned}$$

Mit  $x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$  ergibt sich:

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{4}{4} = 1 \\ x_2 &= \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-12}{4} = -3 \\ x_3 &= \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{8}{4} = 2\end{aligned}$$

## Lösung 5c

Das Gleichungssystem  $Ax = b$  löst sich durch Multiplikation von links mit dem Inversen von  $A$  zu  $x = A^{-1}b$  auf:

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ \Leftrightarrow A^{-1}Ax &= A^{-1}b \\ \Leftrightarrow Ex &= A^{-1}b \\ \Leftrightarrow x &= A^{-1}b \end{aligned}$$

Wir bestimmen  $A^{-1}$ .

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \\ &\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 & -1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/2 & -1/4 \end{array} \right) \\ &\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -5/4 & 3/2 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 & -1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/2 & -1/4 \end{array} \right) \\ &\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 & -1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/2 & -1/4 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Durch Anwendung der zuvor bestimmten Gleichung erhalten wir den Lösungsvektor.

$$\begin{aligned} x &= A^{-1}b \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## Aufgabe 6

Welchen Rang haben die Matrizen  $A \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$  und  $B \in \mathbb{R}^{n \times 2}$  mit  $n \geq 2$ ?

a)  $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ -2 & 1 & -8 \\ 1 & 5 & -7 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

b)  $b_{ij} = \begin{cases} -i & i \text{ gerade} \\ i & i \text{ ungerade} \\ n & i = n, j = 1 \\ n - 1 & i = n, j = 2 \end{cases}$

## Lösung 6

## Aufgabe 7

Gegeben seien die folgenden Vektoren

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

sowie die zugehörigen LGS

$$(1) (a_1, a_2, a_3)x = b \quad \text{und} \quad (2) (a_1, a_2, a_3)x = 0.$$

- Berechnen Sie  $\det(a_1, a_2, a_3, b)$  in Abhängigkeit von  $\lambda$  und bestimmen Sie den Wert  $\lambda^*$ , für den die Determinante Null wird.
- Bestimmen Sie die Lösbarkeit der LGS (1) und (2) für den Fall  $\lambda = \lambda^*$ .
- Bestimmen Sie die Lösbarkeit der LGS (1) und (2) für den Fall  $\lambda \neq \lambda^*$ .
- Geben Sie die Lösungsmengen für b) und c) an, sollten unendlich viele Lösungen existieren.

## Lösung 7