Aufgabe 5

Welche der folgenden Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sind linear?

a) $f(x_1, x_2) = (x_1, 0)$

b) $f(x_1, x_2) = (x_1 x_2, 0)$

c) $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_2)$

Lösung 5a

$$f(x_1, x_2) = (x_1, 0)$$

Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist genau dann linear, wenn f additiv und homogen ist.
Additivität:

$$f(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (x_1 + y_1, 0)$$

$$f(x_1, x_2) + f(y_1, y_2) = (x_1, 0) + (y_1, 0)$$

$$= (x_1 + y_1, 0)$$

$$\Rightarrow \quad f(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = f(x_1, x_2) + f(y_1, y_2) \checkmark$$

Homogenität:

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2) = (\lambda x_1, 0)$$

$$\lambda f(x_1, x_2) = (\lambda x_1, 0)$$

$$\Rightarrow f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda f(x_1, x_2) \checkmark$$

Die Abbildung ist linear.

Lösung 5b

$$f(x_1, x_2) = (x_1 x_2, 0)$$

Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist genau dann linear, wenn f additiv und homogen ist.

Additivität:

$$f(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = ((x_1 + y_1) \cdot (x_2 + y_2), 0)$$

$$= ((x_1x_2 + x_1y_2 + y_1x_2 + y_1y_2), 0)$$

$$f(x_1, x_2) + f(y_1, y_2) = (x_1x_2, 0) + (y_1y_2, 0)$$

$$= (x_1x_2 + y_1y_2, 0)$$

$$\Rightarrow \quad f(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \neq f(x_1, x_2) + f(y_1, y_2)$$

Die Abbildung ist nicht additiv, also auch nicht linear.

Lösung 5c

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_2)$$

Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist genau dann linear, wenn f additiv und homogen ist.
Additivität:

$$f(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (x_1 + y_1 + x_2 + y_2, x_2 + y_2)$$

$$f(x_1, x_2) + f(y_1, y_2) = (x_1 + x_2, x_2) + (y_1 + y_2, y_2)$$

$$= (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, x_2 + y_2)$$

$$\Rightarrow \quad f(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = f(x_1, x_2) + f(y_1, y_2) \checkmark$$

Homogenität:

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2) = (\lambda x_1 + \lambda x_2, \lambda x_2)$$

$$\lambda f(x_1, x_2) = \lambda(x_1 + x_2, x_2)$$

$$= (\lambda(x_1 + x_2), \lambda x_2)$$

$$= (\lambda x_1 + \lambda x_2, \lambda x_2)$$

$$\Rightarrow f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda f(x_1, x_2) \checkmark$$

Die Abbildung ist linear.