Aufgabe 6

Welche der folgenden Abbildungen von $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sind linear? Geben Sie ggf. die zugehörige Matrix an. Bestimmen Sie jeweils den Kern (auch für die nicht-linearen Abbildungen).

a) $f_1(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ -x_1 \\ 5x_1 - 7x_2 \end{pmatrix}$

b) $f_2(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 - 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Lösung 6

Aufgabe 7

Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Der Ausdruck λx kann als lineare Abbildung interpretiert werden:

a) $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : x \mapsto \lambda x$

b) $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^n : \lambda \mapsto \lambda x$

Wie lauten in jedem Fall die Matrizen der zugehörigen Abbildungen? Im Fall a kann damit die Multiplikation eines Vektors mit einem Faktor als Matrixmultiplikation interpretiert werden.

Lösung 7

Aufgabe 8

Gegeben sei die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_3, 4x_2)$.

a) Zeigen Sie, dass f linear ist.

b) Bestimmen Sie den $\ker(f)$ und geben Sie die $\dim(\ker(f))$ an.

c) Berechnen Sie die $\dim(\text{Bild}(f))$ bzw. $\text{rang}(f)$ und bestimmen Sie das $\text{Bild}(f)$.

d) Ist die Abbildung f injektiv oder surjektiv?

Lösung 8a

Additivität:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_3, 4x_2)$$

$$f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) = (x_1 + y_1 - 2(x_3 + y_3), 4(x_2 + y_2))$$

$$f(x_1, x_2, x_3) + f(y_1, y_2, y_3) = (x_1 - 2x_3, 4x_2) + (y_1 - 2y_3, 4y_2)$$

$$= (x_1 - 2x_3 + y_1 - 2y_3, 4x_2 + 4y_2)$$

$$= (x_1 + y_1 - 2(x_3 + y_3), 4(x_2 + y_2))$$

$$\Rightarrow \quad f(x_1, x_2, x_3) + f(y_1, y_2, y_3) = f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \checkmark$$

Homogenität:

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = (\lambda \cdot x_1 - 2 \cdot \lambda \cdot x_3, 4 \cdot \lambda \cdot x_2)$$

$$= (\lambda \cdot (x_1 - 2 \cdot x_3), 4 \cdot \lambda \cdot x_2)$$

$$\lambda f(x_1, x_2, x_3) = \lambda \cdot (x_1 - 2x_3, 4x_2)$$

$$= (\lambda \cdot (x_1 - 2x_3), 4 \cdot \lambda \cdot x_2)$$

$$\Rightarrow \qquad f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda f(x_1, x_2) \checkmark$$

Die Abbildung ist linear.