Aufgabe 1

Welche speziellen Eigenschaften besitzt die folgende Matrix?

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie anschließend die inverse Matrix A^{-1}. Dies ist mit den speziellen Eigenschaften von A einfach. Was kann man außerdem über den Wert von $\det(A)$ sagen?

Lösung 1

$A \in O(n)$ und $A^T \in O(n)$ und daher gilt $A^{-1} = A^T$.

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir wissen, dass $\det(A) \neq 0$ ist und auch, dass $\det A = 1$ ist.

Aufgabe 2a

Zeigen Sie, dass $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ orthogonal ist. Berechnen Sie zu $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ den Bildvektor $y = Ax$ und vergleichen Sie den Winkel zwischen x und y mit dem zwischen Ax und Ay.

Lösung 2a

Zeige, dass die Spaltenvektoren orthogonal sind:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = -18 + 6 + 12 = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle = 6 + 12 - 18 = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = -12 + 18 - 6 = 0$$

Bildvektor

$$\begin{aligned} y &= Ax \\ &= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der Winkel zwischen $\angle(x, y)$ ergibt sich durch

$$\begin{aligned} \angle(x, y) &= \arccos \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} \\ &= \arccos \frac{{}^2/_7}{\sqrt{2}\sqrt{2}} \\ &= \arccos \frac{1}{7} \\ &\approx 81{,}79^\circ \end{aligned}$$

Wir berechnen Ay.

$$\begin{aligned} Ay &= AAx \\ &= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{49}\begin{pmatrix} -9-30+16 \\ -6+15+48 \\ -18+10-24 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{49}\begin{pmatrix} -23 \\ 57 \\ -32 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Und den Winkel $\angle(Ax, Ay)$ entsprechend.

$$\begin{aligned} \angle(Ax, Ay) &= \arccos \frac{\langle Ax, Ay\rangle}{\|Ax\|\|Ay\|} \\ &= \arccos \left(\frac{1}{7}\frac{1}{49}\frac{98}{\sqrt{2}\sqrt{2}}\right) \\ &= \arccos \frac{1}{7} \\ &\approx 81{,}79^\circ \end{aligned}$$

Aufgabe 2b

Zeigen Sie, dass eine lineare Abbildung, deren Abbildungsmatrix orthogonal ist, den Winkel zwischen Vektoren unverändert lässt.

Aufgabe 3

Lösung 3

Aufgabe 4

Lösung 4

Aufgabe 5

Lösung 5

Aufgabe 6

Lösung 6