Aufgabe 1

Analysis 2-Klausur vom 16.07.2021, A05
Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y' - y = y^2 \cdot \sin(x)$$

Hinweis: Bernoulli-DGL

Lösung 1

Es liegt eine Differentialgleichung der Form

$$y'(x) + f(x) \cdot y = g(x) \cdot y^\alpha$$

mit $\alpha = 2, g(x) = \sin(x), f(x) = -1$ vor.
Wir substituieren mit

$$z := y^{1-\alpha} = \frac{y}{y^\alpha} \Leftrightarrow y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

also

$$\begin{aligned} y &= z^{-1} \\ y' &= -z^{-2} \cdot z' \end{aligned}$$

und setzen in die DGL:

$$\begin{aligned} && y' - y &= y^2 \cdot \sin(x) \\ &\overset{z(x)\neq 0}{\Leftrightarrow} & -z^{-2} \cdot z' - z^{-1} &= z^{-2} \cdot \sin(x) \\ &\Leftrightarrow & -z' - z &= \sin(x) \end{aligned}$$

Wir bestimmen die Lösung der linearen inhomogen DGL $-z' - z = \sin(x)$, indem wir zunächst die Lösung der homogenen DGL $-z_h' - z_h = 0$ bestimmen. Diese lautet

$$z_h = c_0 \cdot \mathrm{e}^{-x}.$$

Die Rücksubstitution ergibt

$$\begin{aligned} y_h &= \frac{1}{z_h} \\ &= c \cdot \mathrm{e}^x \end{aligned}$$

Für die partikuläre Lösung nutzen wir den trigonometrischen Ansatz

$$\begin{aligned} z_p(x) &= c_0 \sin(\alpha x) + c_1 \cos(\alpha x) \\ z_p'(x) &= \alpha c_0 \cos(\alpha x) - \alpha c_1 \sin(\alpha x) \end{aligned}$$

und setzen ein:

$$\begin{aligned} && \sin(x) &= -z_p' - z_p \\ \Leftrightarrow && \sin(x) &= -\alpha c_0 \cos(\alpha x) + \alpha c_1 \sin(\alpha x) - c_0 \sin(\alpha x) - c_1 \cos(\alpha x) \\ \overset{\alpha=1}{\Leftrightarrow} && \sin(x) &= \underbrace{(c_1 - c_0)}_{=1} \cdot \sin(x) - \underbrace{(c_0 + c_1)}_{=0} \cdot \cos(x) \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich liefert uns mit $c_0 = -1/2$ und $c_1 = 1/2$ die Funktion

$$z_p(x) = -\frac{1}{2}\sin(x) + \frac{1}{2}\cos(x).$$

Die Rücksubstitution ergibt:

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{z_p} \\ &= \frac{2}{\cos(x) - \sin(x)} \end{aligned}$$

Somit können wir die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL wie folgt angeben:

$$y(x) = c \cdot e^x + \frac{2}{\cos(x) - \sin(x)}$$

Aufgabe 2

Analysis 2-Klausur vom 16.07.2021, A06
Lösen Sie die Differentialgleichung

$$2y \cdot e^x + y + (2e^x + x) \cdot y' = 0$$

Lösung 2

Gegeben ist eine lineare DGL 1. Ordnung. Wir lösen durch Trennung der Variablen.

$$\begin{aligned} && 2y \cdot e^x + y + \left(2e^x + x\right) \cdot y' &= 0 \\ \Leftrightarrow && y \cdot \left(2e^x + 1\right) &= -y' \cdot \left(2e^x + x\right) \\ \Leftrightarrow && \int \frac{2e^x + 1}{2e^x + x}\, dx &= -\int \frac{1}{y}\, dy \qquad u = 2e^x + x \\ \Leftrightarrow && \int \frac{\cancel{2e^x + 1}}{u} \frac{1}{\cancel{2e^x + 1}}\, du &= -\int \frac{1}{y}\, dy \\ \Leftrightarrow && \ln|u| + c_1 &= -\ln|y| + c_2 \\ \Leftrightarrow && u \cdot c &= \frac{1}{y} \\ \Leftrightarrow && \frac{1}{2e^x + x} \cdot c &= y \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Analysis 2-Klausur vom 24.09.2020, A04
Lösen Sie die Differenzialgleichung

$$y'' = 4y' - 4y + 8x + 4$$

Lösung 3

Gegeben ist eine lineare DGL 2. Ordnung mit polynomialer Störfunktion.

$$\begin{aligned} & y'' && = 4y' - 4y + 8x + 4 \\ \Leftrightarrow\ & y'' - 4y' + 4y && = 8x + 4 \end{aligned}$$

Die charakteristische Gleichung der homogenen DGL lautet $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = 2$, also liegt eine doppelte Nullstelle vor und die Lösung lautet:

$$y_h = c_0 \,\mathrm{e}^{2x} + c_1 x \,\mathrm{e}^{2x}$$

Zur Bestimmung der partikulären Lösung wählen wir den Ansatz

$$\begin{aligned} y_p &= ax^2 + bx + c \\ y_p' &= 2ax + b \\ y_p'' &= 2a \end{aligned}$$

und setzen ein:

$$\begin{aligned} & y_p'' - 4y_p' + 4y_p && = 8x + 4 \\ \Leftrightarrow\ & 2a - 8ax - 4b + 4ax^2 + 4bx + 4c && = 8x + 4 \\ \Leftrightarrow\ & \underbrace{4a}_{\overset{!}{=}0} \cdot x^2 + \underbrace{(4b - 8a)}_{\overset{!}{=}8} \cdot x + \underbrace{2a - 4b + 4c}_{\overset{!}{=}4} && = 8x + 4 \end{aligned}$$

Mit $b = 2$ und $c = 3$ erhalten wir als partikuläre Lösung

$$y_p = 2x + 3$$

und somit als allgemeine Lösung der DGL

$$y(x) = c_0 \,\mathrm{e}^{2x} + c_1 x \,\mathrm{e}^{2x} + 2x + 3.$$

Aufgabe 4

Analysis 2-Klausur vom 24.09.2020, A07
Bestimmen Sie die Lösungen folgender Differentialgleichungen

a) $y' = 2\sqrt{\dfrac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$ durch Substitution mit $z = \dfrac{y}{x}$

b) $y' + x \cdot y = x \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$

Lösung 4a

Wir substituieren mit $z = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = z \cdot x$ und entsprechend $y' = z' \cdot x + z$:

$$
\begin{array}{rrcl}
 & y' & = & 2\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} \\
\Leftrightarrow & z' \cdot x + z & = & 2\sqrt{z} + z \\
\Leftrightarrow & z' \cdot x & = & 2\sqrt{z} \\
\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} & z' & = & \frac{1}{x} \cdot 2\sqrt{z} \\
\Leftrightarrow & \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} & = & \frac{1}{x} \cdot 2\sqrt{z} \\
\Rightarrow & \int \frac{1}{2\sqrt{z}}\,\mathrm{d}z & = & \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
\Leftrightarrow & \frac{1}{2}\int z^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}z & = & \ln|x| + c \\
\Leftrightarrow & z & = & \left(\ln|x| + c\right)^2 \\
\Leftrightarrow & y & = & x \cdot \left(\ln|x| + c\right)^2
\end{array}
$$

Lösung 4b

Gegeben ist eine inhomogene DGL 1. Ordnung. Wir lösen zunächst die homogene DGL durch *Trennung der Variablen* zur Bestimmung der homogenen Lösung:

$$
\begin{array}{rrcl}
 & y_h' + x \cdot y_h & = & 0 \\
\Rightarrow & \ln|y| + c & = & -\int x\,\mathrm{d}x \\
\Leftrightarrow & \ln|y| + c & = & -\frac{1}{2}x^2 \\
\Leftrightarrow & y \cdot \tilde{c} & = & \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \\
\Leftrightarrow & y & = & c \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}
\end{array}
$$

Durch *Variation der Konstanten* bestimmen wir mit

$$
\begin{array}{rcl}
y(x) & = & c(x) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \\
y'(x) & = & c'(x) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} - c(x) \cdot x \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \\
 & = & \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot \left(c'(x) - c(x) \cdot x\right)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrcl}
 & y'(x) & = & c'(x) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} - c(x) \cdot x \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \\
\Leftrightarrow & y'(x) + x \cdot \underbrace{c(x) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}}_{:=y(x)} & = & c'(x) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \\
\Leftrightarrow & y'(x) + x \cdot y(x) & = & c'(x) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \overset{!}{=} g(x)
\end{array}
$$

Dabei ist $g(x)$ die ursprüngliche Störfunktion! Wir stellen zur c'-Funktion um, damit wir die neue DGL lösen und $c(x)$ bestimmen können.

$$\begin{aligned} & c'(x)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} &=& \; g(x) \\ \Leftrightarrow \quad & c'(x) &=& \; g(x)\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} \\ \Rightarrow \quad & c(x) = \int c'(x)\,\mathrm{d}x &=& \int g(x)\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

mit der ursprünglichen Störfunktion $g(x) = x \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & c(x) &=& \int x \cdot \frac{1}{\cancel{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}}} \cdot \cancel{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}}\,\mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow \quad & c(x) &=& \; \frac{1}{2}x^2 + \tilde{c} \end{aligned}$$

Durch einsetzen in die zuvor bestimmte Funktion erhalten wir nun die allgemeine Lösung der DGL.

$$\begin{aligned} y(x) &= c(x)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \\ &= \left(\frac{x^2}{2} + \tilde{c}\right)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \end{aligned}$$

Aufgabe 5

Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y^2\,\mathrm{d}x + \left(x\cdot y - 2\right)\,\mathrm{d}y = 0$$

Lösung 5

$$\begin{aligned} & y^2\,\mathrm{d}x + \left(x\cdot y-2\right)\,\mathrm{d}y &=& \; 0 \\ \Leftrightarrow \quad & y^2\,\mathrm{d}x &=& -\left(x\cdot y-2\right)\,\mathrm{d}y \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{\left(x\cdot y-2\right)}\,\mathrm{d}x &=& -\frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y \\ \Rightarrow \quad & \int \frac{1}{\left(x\cdot y-2\right)}\,\mathrm{d}x &=& -\int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y \\ \Rightarrow \quad & \ln\left(x\cdot y-2\right)\cdot\frac{1}{y} + c &=& -\frac{1}{y} + c \end{aligned}$$