Aufgabe 1

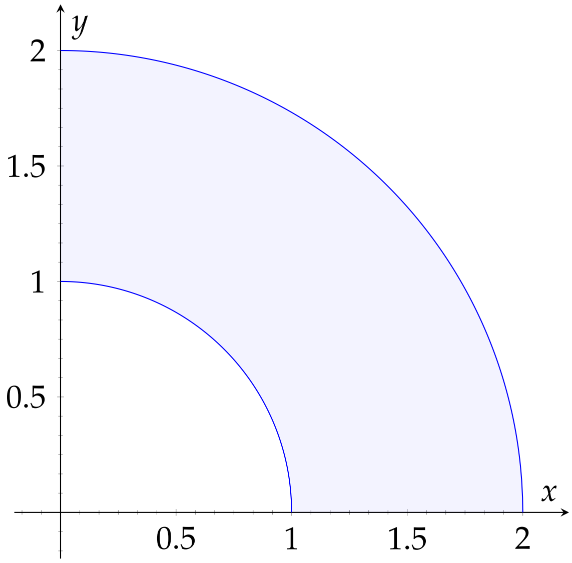
Wir betrachten den Bereich

$$B = \{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

a) Skizzieren Sie B.

b) Über diesen Bereich wird die Funktion $f(x,y) = (x^2 + y^2)^2$ integriert. Wie groß ist das Integral?

Lösung 1



$$\begin{aligned}
\int_0^2 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_0^2 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (x^2+y^2)^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} x^4 + 2x^2y^2 + y^4\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 \left[x^4 y + \frac{2}{3}x^2y^3 + \frac{y^5}{5}\right]_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 x^4\sqrt{4-x^2} + \frac{2}{3}x^2(\sqrt{4-x^2})^3 + \frac{(\sqrt{4-x^2})^5}{5} - x^4\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{3}x^2(\sqrt{1-
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Gegeben sei eine Halbkugel mit dem Radius R, deren Schnittfläche in einem kartesischen Koordinatensystem auf der xy-Ebene liegt. Berechnen Sie den Schwerpunkt dieser Halbkugel.

Lösung 2

Aufgabe 3

Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche B, die im 1. Quadranten liegt und durch die Funktionen

$$y^2 = x^3 \qquad \text{und} \qquad y = x$$

begrenzt wird.

Lösung 3

Aufgabe 4

Der Graph von $y = \sin(x)$ beschreibt eine Kurve K in der $xy-$Ebene:

$$\overrightarrow{X}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sin(t) \end{pmatrix} \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Man berechne das Kurvenintegral $\int_K \overrightarrow{v}\ d\overrightarrow{X}$ für $\overrightarrow{v}(x,y) = \begin{pmatrix} y \cdot \cos(x) + y \\ \sin(x) + x + 2 \end{pmatrix}$ mit Hilfe einer Potentialfunktion (im Falle der Existenz).

Lösung 4

Aufgabe 5

Gegeben sei das Vektorfeld/ Kraftfeld

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + 2x \cdot y - y^2 \\ x^2 - 2x \cdot y - y^2 \end{pmatrix}$$

a) Überprüfen Sie, ob Kurvenintegrale in $\overrightarrow{F}$ wegunabhängig sind.

b) Ermitteln Sie gegebenenfalls eine Potentialfunktion.

c) Berechnen Sie die Arbeit zwischen den Punkten $A = (0, 1)$ zu $E = (1, 0)$ über die Potentialfunktion oder als Wert des Kurvenintegrals über ein Geradenstück von A nach E.

Lösung 5