Aufgabe 1

Berechnen Sie mittels Polarkoordinaten das uneigentliche mehrdimensionale Integral

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\ dx\ dy = \int_{y=-\infty}^{\infty} \int_{x=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\ dx\ dy$$

Lösung 1

Uneigentliche Integrale können mithilfe von Polarkoordinaten wie folgt gelöst werden:

$$\iint f(x,y)\ \mathrm{d}y,x = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\text{inf}} f(r \cdot \cos\phi, r \cdot \sin\phi) \cdot r\ \mathrm{d}(r,\phi)$$

Es gilt also

$$\begin{aligned}
\iint \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\ \mathrm{d}(x,y) &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\left((r\cdot\cos\phi)^2+(r\cdot\sin\phi)^2\right)} \cdot r\ \mathrm{d}(r,\phi) \\
&= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-r^2} \cdot r\ \mathrm{d}(r,\phi) \\
&= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\infty} r \cdot \mathrm{e}^{u} \frac{1}{-2r}\ \mathrm{d}(u,\phi) \\
&= \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{-1}{2} \cdot \int_{r=0}^{\infty} \mathrm{e}^{u}\ \mathrm{d}(u,\phi) \\
&= \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{-1}{2} \cdot \left[\mathrm{e}^{-r^2}\right]_{r=0}^{\infty}\ \mathrm{d}\phi \\
&= \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{1}{2}\ \mathrm{d}\phi \\
&= \left[\frac{1}{2}\phi\right]_{\phi=0}^{2\pi} \\
&= \pi
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie die folgenden Dreifachintegrale:

a) $\displaystyle\int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1-x} \int_{z=0}^{2-x} x \cdot y \cdot z\ dz\ dy\ dx$

b) $\int\limits_{\alpha=0}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{r=0}^{1} \int\limits_{z=0}^{2} z \cdot r^2 \cdot \sin(\alpha)\, dz\, dr\, d\alpha$

Lösung 2a

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=0}^{1-x} \int\limits_{z=0}^{2-x} x \cdot y \cdot z \,\mathrm{d}(z,y,x) &= \int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=0}^{1-x} \left[\frac{x \cdot y}{2} \cdot z^2\right]_{z=0}^{2-x} \mathrm{d}(y,x) \\
&= \int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=0}^{1-x} \frac{1}{2} \cdot x \cdot y \cdot (2-x)^2 \,\mathrm{d}(y,x) \\
&= \int\limits_{x=0}^{1} \left[\frac{1}{4} \cdot x \cdot (2-x)^2 \cdot y^2\right]_{y=0}^{1-x} \mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{4} \cdot x \cdot (2-x)^2 \cdot (1-x)^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{4}x^5 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{13}{4}x^3 - 3x^2 + x \,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{24}x^6 - \frac{3}{10}x^5 + \frac{13}{16}x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{24} - \frac{3}{10} + \frac{13}{16} - 1 + \frac{1}{2} \\
&= \frac{13}{240}
\end{aligned}
$$

Lösung 2b

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{1} \int_{z=0}^{2} z \cdot r^2 \cdot \sin(\alpha) \,\mathrm{d}(z,r,\alpha) &= \int_{\alpha=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{1} \left[\frac{1}{2} r^2 \cdot \sin(\alpha) \cdot z^2\right]_{z=0}^{2} \,\mathrm{d}(r,\alpha) \\
&= \int_{\alpha=0}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{6} r^3 \cdot \sin(\alpha) \cdot 4\right]_{r=0}^{1} \,\mathrm{d}\alpha \\
&= \int_{\alpha=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{4}{6} \sin(\alpha) \,\mathrm{d}\alpha \\
&= \left[-\frac{2}{3}\cos(\alpha)\right]_{\alpha=0}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\frac{2}{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{3}\cos(0) \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Gegeben sei die Halbkugel

$$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 9,\ z \geq 0\}$$

mit der Dichte $\rho(x,y,z) = 1$.

a) Berechnen Sie die Masse der Halbkugel.

b) Berechnen Sie anschließend den Schwerpunkt der Halbkugel.

Lösung 3

Für das Rechnen mit Kugelkoordinaten gilt

$$\iiint f(x,y,z) \,\mathrm{d}(z,y,x) = \iiint f(r\cos\phi\sin\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\theta)|r^2\sin\theta| \,\mathrm{d}(\theta,\phi,r)$$

Aufgabe 4

Berechnen Sie den Schwerpunkt einer Fläche, die von den gegebenen Funktionen begrenzt wird

a) $x = y^2$ und $x = 1$

b) $x = y^4$ und $x = 1$

Lösung 4

Aufgabe 5

Berechnen Sie das folgende Doppelintegral im Integrationsbereich A mithilfe der Polarkoordinaten

$$\int\int_{A} \sqrt{4 - x^2 - y^2}\, dx\, dy$$

$$\text{mit} \qquad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq |x|\}$$

Lösung 5