

## Aufgabe 1

Lösen Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}y' &= 5y - z \\ z' &= 2y + 8z\end{aligned}$$

### Lösung 1

Wir stellen die erste Gleichung nach  $z$  um und leiten ab.

$$\begin{aligned}z &= 5y - y' \\ z' &= 5y' - y''\end{aligned}$$

Nun setzen wir in die zweite Gleichung ein.

$$\begin{aligned}z' &= 2y + 8z \\ \Leftrightarrow 5y' - y'' &= 2y + 40y - 8y' \\ \Leftrightarrow 0 &= 42y - 13y' + y''\end{aligned}$$

Wir lösen die homogene DGL mit Hilfe der charakteristischen Gleichung.

$$\begin{aligned}0 &= \lambda^2 - 13\lambda + 42 \\ \Leftrightarrow \lambda &= \frac{13}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2 - 42} \\ \Rightarrow \lambda_1 &= 7 \wedge \lambda_2 = 6\end{aligned}$$

Und erhalten die allgemeine Lösung der ersten DGL, welche wir dann ableiten können.

$$\begin{aligned}y(x) &= c_0 e^{7x} + c_1 e^{6x} \\ y'(x) &= 7c_0 e^{7x} + 6c_1 e^{6x}\end{aligned}$$

Mit ersten nach  $z$  umgestellten DGL können wir durch Einsetzen sodann auch  $z(x)$  bestimmen:

$$\begin{aligned}z(x) &= 5y - y' \\ &= 5c_0 e^{7x} + 5c_1 e^{6x} - 7c_0 e^{7x} - 6c_1 e^{6x} \\ &= -2c_0 e^{7x} - c_1 e^{6x}\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems lautet somit:

$$\begin{aligned}y &= c_0 e^{7x} + c_1 e^{6x} \\ z &= -2c_0 e^{7x} - c_1 e^{6x}\end{aligned}$$

## Aufgabe 2

Lösen Sie das folgende Differentialgleichungssystem

$$y' = z \quad (1)$$

$$z' = -y - 5z + \sin(x) \quad (2)$$

## Lösung 2

Wir formen die Gleichung (1) nach  $z$  um und leiten nach  $x$  ab.

$$z = y' \quad (3)$$

$$z' = y'' \quad (4)$$

Dann setzen wir die Gleichungen (3) und (4) in die Gleichung (2) ein und erhalten

$$y'' = -y - 5y' + \sin(x).$$

Wir bestimmen die homogene Lösung der DGL mit Hilfe der charakteristischen Gleichung  $\lambda^2 + 5\lambda + 1 = 0$ , welche die Lösungen

$$\lambda = -\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{21}}{2}$$

hat. Wir erhalten somit

$$y_h = c_0 e^{-\frac{5+\sqrt{21}}{2}x} + c_1 e^{-\frac{5-\sqrt{21}}{2}x}.$$

Aus  $z = y'$  folgt unser  $z_h$ .

$$\begin{aligned} y'_h &= -\frac{5+\sqrt{21}}{2}c_0 e^{-\frac{5+\sqrt{21}}{2}x} - \frac{5-\sqrt{21}}{2}c_1 e^{-\frac{5-\sqrt{21}}{2}x} \\ &= z_h \end{aligned}$$

Für die partikuläre Lösung  $y_p$  verwenden wir auf Grund der trigonometrischen Störfunktion  $g(x) = \sin(x)$  den Ansatz

$$y_p = c_0 \sin(x) + c_1 \cos(x)$$

$$y'_p = c_0 \cos(x) - c_1 \sin(x)$$

$$y''_p = -c_0 \sin(x) - c_1 \cos(x)$$

und bestimmen die Parameter  $c_{1,2}$  durch Einsetzen der Gleichungen in  $y'' + 5y' + y = \sin(x)$ .

$$\begin{aligned} \sin(x) &= y''_p + 5y'_p + y_p \\ \Leftrightarrow \sin(x) &= \cancel{-c_0 \sin(x)} - \cancel{c_1 \cos(x)} + 5(c_0 \cos(x) - c_1 \sin(x)) \\ &\quad + \cancel{c_0 \sin(x)} + \cancel{c_1 \cos(x)} \\ \Leftrightarrow \sin(x) &= 5c_0 \cos(x) - 5c_1 \sin(x) \\ \Rightarrow c_0 &= 0 \wedge c_1 = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

Die partikuläre Lösung lautet somit  $y_p = -\frac{1}{5} \cos(x)$  bzw.  $z_p = y'_p = \frac{1}{5} \sin(x)$  und wir erhalten die allgemeine Lösungen des inhomogenen DGL Systems.

$$y(x) = c_0 e^{-\frac{5+\sqrt{21}}{2}x} + c_1 e^{-\frac{5-\sqrt{21}}{2}x} - \frac{1}{5} \cos(x)$$
$$z(x) = -\frac{5+\sqrt{21}}{2} c_0 e^{-\frac{5+\sqrt{21}}{2}x} - \frac{5-\sqrt{21}}{2} c_1 e^{-\frac{5-\sqrt{21}}{2}x} + \frac{1}{5} \sin(x)$$

### Aufgabe 3

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$y' = y + 2z$$
$$z' = 2y + z - 2e^x$$

mit den Anfangswerten  $y(0) = -3$  und  $z(0) = 4$ .

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems.

### Lösung 3

Lösungsweg wie zuvor.

$$y(x) = e^x - 4e^{-x}$$
$$z(x) = 4e^{-x}$$

### Aufgabe 4

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung 2. Ordnung und lösen Sie das gegebene Anfangswertproblem

$$y'' - 2y' + y = 0 \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

### Lösung 4

Die charakteristische Gleichung der homogenen DGL 2. Ordnung ist

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

Mit  $\lambda = 1$  liegt eine doppelte Nullstelle vor, weshalb der Ansatz

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

zur Lösung gewählt werden muss. Wir bestimmen die Ableitung und setzen die beiden Anfangswerte ein um die Parameter zu bestimmen.

$$\begin{aligned}y(x) &= c_1 e^x + c_2 x e^x \\y'(x) &= c_1 e^x + c_2 \cdot (e^x + e^x x) \\&= c_1 e^x + c_2 e^x + c_2 e^x x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y(0) &= 1 \\ \Leftrightarrow c_1 &= 1 \\ y'(0) &= 0 \\ \Leftrightarrow 0 &= c_1 + c_2 \\ \Leftrightarrow c_2 &= -1\end{aligned}$$

Die spezielle Lösung des Anfangswertproblems lautet somit

$$y(x) = e^x - x e^x.$$

## Aufgabe 5

Gegeben seien die folgenden Differentialgleichungen 2. Ordnung

- a)  $y'' - 6y' + 9y = -17 + 21x + 18x^2$
- b)  $y'' - 8y' + 16y = -72e^{-2x}$
- c)  $y'' - 7y' + 6y = 82 \sin(2x) + 26 \cos(2x)$

Bestimmen Sie jeweils die Lösung  $y(x)$ .

### Lösung 5a

$$y_h'' - 6y_h' + 9y_h = 0$$

$$\begin{aligned}\lambda^2 - 6\lambda + 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda_{1,2} &= 3\end{aligned}$$

Doppelte Nullstelle, daher ist die Lösung der homogenen DGL

$$y_h(x) = c_0 e^{3x} + c_1 x e^{3x}.$$

Auf Grund der Störfunktion wählen wir für die partikuläre Gleichung den folgenden Ansatz:

$$\begin{aligned}y_p(x) &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \\ y_p'(x) &= c_1 + 2c_2 x \\ y_p''(x) &= 2c_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_p'' - 6y_p' + 9y_p &= -17 + 21x + 18x^2 \\ \Leftrightarrow 2c_2 - 6c_1 - 12c_2x + 9c_0 + 9c_1x + 9c_2x^2 &= -17 + 21x + 18x^2 \\ \Leftrightarrow (2c_2 - 6c_1 + 9c_0) + (9c_1 - 12c_2)x + 9c_2x^2 &= -17 + 21x + 18x^2 \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich liefert  $c_2 = 2$ ,  $c_1 = 5$  und  $c_0 = 1$ , also erhalten wir folgende partikuläre Gleichung.

$$y_p(x) = 1 + 5x + 2x^2$$

Die allgemeine Lösung lautet somit:

$$y(x) = c_0 e^{3x} + c_1 x e^{3x} + 2x^2 + 5x + 1$$

## Lösung 5b

Die homogene DGL, ihre charakteristische Gleichung und das Vorliegen einer doppelten Nullstelle in der charakteristischen Gleichung

$$\begin{aligned} y_h'' - 8y_h' + 16y_h &= 0 \\ \lambda^2 - 8\lambda + 16 &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda &= 4 \end{aligned}$$

liefert uns diese Lösung.

$$y_h(x) = c_0 e^{4x} + c_1 x e^{4x}$$

Setzt man den Ansatz für die rechte Seite

$$\begin{aligned} y_p(x) &= c_0 e^{\alpha x} \\ y_p'(x) &= c_0 \alpha e^{\alpha x} \\ y_p''(x) &= c_0 \alpha^2 e^{\alpha x} \end{aligned}$$

ein, so lassen sich die Parameter bestimmen.

$$\begin{aligned} y_p'' - 8y_p' + 16y_p &= -72e^{-2x} \\ \Leftrightarrow c_0 \alpha^2 e^{\alpha x} - 8c_0 \alpha e^{\alpha x} + 16c_0 e^{\alpha x} &= -72e^{-2x} \\ \stackrel{\alpha=-2}{\Leftrightarrow} 4c_0 e^{-2x} + 16c_0 e^{-2x} - 16c_0 e^{-2x} &= -72e^{-2x} \\ \Rightarrow c_0 &= -18 \end{aligned}$$

Wir erhalten  $y_p(x) = 18e^{-2x}$  und damit lautet die allgemeine Lösung der DGL

$$y(x) = c_0 e^{4x} + c_1 x e^{4x} - 18e^{-2x}.$$

## Lösung 5c

Wir lösen die homogene DGL nach dem beschriebenen Verfahren.

$$\begin{aligned} y_h'' - 7y_h' + 6y_h &= 0 \\ \lambda^2 - 7\lambda + 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda_{1,2} &= \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49-24}{4}} \\ \Rightarrow \lambda_1 &= 6 \wedge \lambda_2 = 1 \end{aligned}$$

$$y_h(x) = c_0 e^{6x} + c_1 e^x$$

Zur Bestimmung der partikulären Lösung wählen wir den Ansatz

$$\begin{aligned} y_p(x) &= c_0 \sin(ax) + c_1 \cos(ax) \\ y_p'(x) &= ac_0 \cos(ax) - ac_1 \sin(ax) \\ y_p''(x) &= -a^2 c_0 \sin(ax) - a^2 c_1 \cos(ax) \end{aligned}$$

und setzen ein:

$$\begin{aligned} 82 \sin(2x) + 26 \cos(2x) &= y_p'' - 7y_p' + 6y_p \\ \Leftrightarrow 82 \sin(2x) + 26 \cos(2x) &= -a^2 c_0 \sin(ax) - a^2 c_1 \cos(ax) - 7ac_0 \cos(ax) + 7ac_1 \sin(ax) \\ &\quad + 6c_0 \sin(ax) + 6c_1 \cos(ax) \\ \stackrel{a=2}{\Leftrightarrow} 82 \sin(2x) + 26 \cos(2x) &= \underbrace{(2c_0 + 14c_1)}_{\stackrel{!}{=}82} \sin(2x) + \underbrace{(2c_1 - 14c_0)}_{\stackrel{!}{=}26} \cos(2x) \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt  $c_0 = -1$  und  $c_1 = 6$  und wir erhalten die partikuläre Lösung

$$y_p(x) = -\sin(2x) + 6 \cos(2x),$$

sowie die allgemein Lösung der DGL:

$$y(x) = c_0 e^{6x} + c_1 e^x - \sin(2x) + 6 \cos(2x)$$