

Aufgabe 1

Berechnen Sie mittels Polarkoordinaten das uneigentliche mehrdimensionale Integral

$$\int \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_{y=-\infty}^{\infty} \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

Lösung 1

Uneigentliche Integrale können mithilfe von Polarkoordinaten wie folgt gelöst werden:

$$\iint f(x,y) dy, x = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\infty} f(r \cdot \cos \phi, r \cdot \sin \phi) \cdot r d(r, \phi)$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} \iint e^{-(x^2+y^2)} d(x,y) &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\infty} e^{-((r \cdot \cos \phi)^2 + (r \cdot \sin \phi)^2)} \cdot r d(r, \phi) \\ &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\infty} e^{-r^2} \cdot r d(r, \phi) \\ &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\infty} r \cdot e^u \frac{1}{-2r} d(u, \phi) \\ &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{-1}{2} \cdot \int_{r=0}^{\infty} e^u d(u, \phi) \\ &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{-1}{2} \cdot [e^{-r^2}]_{r=0}^{\infty} d\phi \\ &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{1}{2} d\phi \\ &= \left[\frac{1}{2} \phi \right]_{\phi=0}^{2\pi} \\ &= \pi \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie die folgenden Dreifachintegrale:

$$\text{a) } \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{1-x} \int_{z=0}^{2-x} x \cdot y \cdot z dz dy dx$$

b)
$$\int_{\alpha=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^1 \int_{z=0}^2 z \cdot r^2 \cdot \sin(\alpha) \, dz \, dr \, d\alpha$$

Lösung 2a

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{1-x} \int_{z=0}^{2-x} x \cdot y \cdot z \, d(z,y,x) &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{1-x} \left[\frac{x \cdot y}{2} \cdot z^2 \right]_{z=0}^{2-x} d(y,x) \\ &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{1-x} \frac{1}{2} \cdot x \cdot y \cdot (2-x)^2 d(y,x) \\ &= \int_{x=0}^1 \left[\frac{1}{4} \cdot x \cdot (2-x)^2 \cdot y^2 \right]_{y=0}^{1-x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{4} \cdot x \cdot (2-x)^2 \cdot (1-x)^2 dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{4} x^5 - \frac{3}{2} x^4 + \frac{13}{4} x^3 - 3x^2 + x \, dx \\ &= \left[\frac{1}{24} x^6 - \frac{3}{10} x^5 + \frac{13}{16} x^4 - x^3 + \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{24} - \frac{3}{10} + \frac{13}{16} - 1 + \frac{1}{2} \\ &= \frac{13}{240} \end{aligned}$$

Lösung 2b

Aufgabe 3

Gegeben sei die Halbkugel

$$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, z \geq 0\}$$

mit der Dichte $\rho(x,y,z) = 1$.

- Berechnen Sie die Masse der Halbkugel.
- Berechnen Sie anschließend den Schwerpunkt der Halbkugel.

Lösung 3

Aufgabe 4

Berechnen Sie den Schwerpunkt einer Fläche, die von den gegebenen Funktionen begrenzt wird

a) $x = y^2$ und $x = 1$

b) $x = y^4$ und $x = 1$

Lösung 4

Aufgabe 5

Berechnen Sie das folgende Doppelintegral im Integrationsbereich A mithilfe der Polarkoordinaten

$$\int \int_A \sqrt{4 - x^2 - y^2} \, dx \, dy$$

mit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4, y \geq |x|\}$

Lösung 5