

## Aufgabe 1

Lösen Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}y' &= 5y - z \\ z' &= 2y + 8z\end{aligned}$$

### Lösung 1

Wir stellen die erste Gleichung nach  $z$  um und leiten ab.

$$\begin{aligned}z &= 5y - y' \\ z' &= 5y' - y''\end{aligned}$$

Nun setzen wir in die zweite Gleichung ein.

$$\begin{aligned}z' &= 2y + 8z \\ \Leftrightarrow 5y' - y'' &= 2y + 40y - 8y' \\ \Leftrightarrow 0 &= 42y - 13y' + y''\end{aligned}$$

Wir lösen die homogene DGL mit Hilfe der charakteristischen Gleichung.

$$\begin{aligned}0 &= \lambda^2 - 13\lambda + 42 \\ \Leftrightarrow \lambda &= \frac{13}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2 - 42} \\ \Rightarrow \lambda_1 &= 7 \wedge \lambda_2 = 6\end{aligned}$$

Und erhalten die allgemeine Lösung der ersten DGL, welche wir dann ableiten können.

$$\begin{aligned}y(x) &= c_0 e^{7x} + c_1 e^{6x} \\ y'(x) &= 7c_0 e^{7x} + 6c_1 e^{6x}\end{aligned}$$

Mit ersten nach  $z$  umgestellten DGL können wir durch Einsetzen sodann auch  $z(x)$  bestimmen:

$$\begin{aligned}z(x) &= 5y - y' \\ &= 5c_0 e^{7x} + 5c_1 e^{6x} - 7c_0 e^{7x} - 6c_1 e^{6x} \\ &= -2c_0 e^{7x} - c_1 e^{6x}\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems lautet somit:

$$\begin{aligned}y &= c_0 e^{7x} + c_1 e^{6x} \\ z &= -2c_0 e^{7x} - c_1 e^{6x}\end{aligned}$$

## Aufgabe 2

Lösen Sie das folgende Differentialgleichungssystem

$$y' = z \quad (1)$$

$$z' = -y - 5z + \sin(x) \quad (2)$$

## Lösung 2

Wir formen die Gleichung (1) nach  $z$  um und leiten nach  $x$  ab.

$$z = y' \quad (3)$$

$$z' = y'' \quad (4)$$

Dann setzen wir die Gleichungen (3) und (4) in die Gleichung (2) ein und erhalten

$$y'' = -y - 5y' + \sin(x).$$

Wir bestimmen die homogene Lösung der DGL mit Hilfe der charakteristischen Gleichung  $\lambda^2 + 5\lambda + 1 = 0$ , welche die Lösungen

$$\lambda = -\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{21}}{2}$$

hat. Wir erhalten somit

$$y_h = c_0 e^{-\frac{5+\sqrt{21}}{2}x} + c_1 e^{-\frac{5-\sqrt{21}}{2}x}.$$

Aus  $z = y'$  folgt unser  $z_h$ .

$$\begin{aligned} y'_h &= -\frac{5+\sqrt{21}}{2}c_0 e^{-\frac{5+\sqrt{21}}{2}x} - \frac{5-\sqrt{21}}{2}c_1 e^{-\frac{5-\sqrt{21}}{2}x} \\ &= z_h \end{aligned}$$

Für die partikuläre Lösung  $y_p$  verwenden wir auf Grund der trigonometrischen Störfunktion  $g(x) = \sin(x)$  den Ansatz

$$y_p = c_0 \sin(x) + c_1 \cos(x)$$

$$y'_p = c_0 \cos(x) - c_1 \sin(x)$$

$$y''_p = -c_0 \sin(x) - c_1 \cos(x)$$

und bestimmen die Parameter  $c_{1,2}$  durch Einsetzen der Gleichungen in  $y'' + 5y' + y = \sin(x)$ .

$$\begin{aligned} \sin(x) &= y''_p + 5y'_p + y_p \\ \Leftrightarrow \sin(x) &= \cancel{-c_0 \sin(x)} - \cancel{c_1 \cos(x)} + 5(c_0 \cos(x) - c_1 \sin(x)) \\ &\quad + \cancel{c_0 \sin(x)} + \cancel{c_1 \cos(x)} \\ \Leftrightarrow \sin(x) &= 5c_0 \cos(x) - 5c_1 \sin(x) \\ \Rightarrow c_0 &= 0 \wedge c_1 = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

Die partikuläre Lösung lautet somit  $y_p = -\frac{1}{5} \cos(x)$  bzw.  $z_p = y'_p = \frac{1}{5} \sin(x)$  und wir erhalten die allgemeine Lösungen des inhomogenen DGL Systems.

$$y(x) = c_0 e^{-\frac{5+\sqrt{21}}{2}x} + c_1 e^{-\frac{5-\sqrt{21}}{2}x} - \frac{1}{5} \cos(x)$$
$$z(x) = -\frac{5+\sqrt{21}}{2} c_0 e^{-\frac{5+\sqrt{21}}{2}x} - \frac{5-\sqrt{21}}{2} c_1 e^{-\frac{5-\sqrt{21}}{2}x} + \frac{1}{5} \sin(x)$$

### Aufgabe 3

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$y' = y + 2z$$
$$z' = 2y + z - 2e^x$$

mit den Anfangswerten  $y(0) = -3$  und  $z(0) = 4$ .

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems.

### Lösung 3

### Aufgabe 4

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung 2.Ordnung und lösen Sie das gegebene Anfangswertproblem

$$y'' - 2y' + y = 0 \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

### Lösung 4

### Aufgabe 5

Gegeben seien die folgenden Differentialgleichungen 2.Ordnung

- a)  $y'' - 6y' + 9y = -17 + 21x + 18x^2$
- b)  $y'' - 8y' + 16y = -72e^{-2x}$
- c)  $y'' - 7y' + 6y = 82 \sin(2x) + 26 \cos(2x)$

Bestimmen Sie jeweils die Lösung  $y(x)$ .

### Lösung 5