

Aufgabe 6

Hinweis: Aufgabentext zur besseren Verständlichkeit abgeändert.

Eine Luke ist mit einer Platte verschlossen, welche mit zwei Scharnieren an den Punkten $S = (0|0|0)$ und $T = (0|4|0)$ montiert ist. Die Platte hat eine Aufhängung, welche sich im geschlossenen Zustand am Punkt $A = (-3|2|0)$ befindet und im geöffneten Zustand im Punkt $B = (\frac{-3}{\sqrt{2}}|\frac{2}{\sqrt{2}}|\frac{3}{\sqrt{2}})$.

- (a) Zeigen Sie, dass die Platte beim Öffnen um 45° gedreht wird.
- (b) Wie ist der Abstand zwischen dem Aufhängungspunkt im geschlossenen Zustand A und einem weiteren Punkt $F = (3|-1|6)$, welcher als Befestigung dienen soll?
- (c) Welcher Punkt H auf der Strecke von F nach $G = (3|8|3)$, hat den geringsten Abstand zum Aufhängungspunkt?

Lösung 6

Zur Veranschaulichung auf GeoGebra:

<https://www.geogebra.org/3d/wafqm5em>

Lösung 6a

Für den Winkel φ zwischen den Ebenen $E_{STA} \angle E_{STB}$ gilt

$$\cos \varphi = \frac{\langle n_1, n_2 \rangle}{|n_1| \cdot |n_2|}$$

mit n_1, n_2 als den Normalen der Ebenen.

$$\begin{aligned}E_{STA} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\E_{STB} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3/\sqrt{2} \\ 2 \\ 3/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\n_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \\n_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3/\sqrt{2} \\ 2 \\ 3/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} 12/\sqrt{2} \\ 0 \\ 12/\sqrt{2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{\langle n_1, n_2 \rangle}{|n_1| \cdot |n_2|} \\&= \frac{12 \cdot \frac{12}{\sqrt{2}}}{\sqrt{12^2} \cdot \sqrt{\frac{12^2}{2} + \frac{12^2}{2}}} \\&= \frac{12 \cdot \frac{12}{\sqrt{2}}}{12^2} \\&= \frac{1}{\sqrt{2}} \\\Leftrightarrow \quad \varphi &= \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\&= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Der Winkel zwischen den Ebenen beträgt im Bogenmaß $\frac{1}{4}\pi$ oder im Gradmaß 45° .

Lösung 6b

Die Länge der Strecke zwischen den Punkten A und F ist gleich dem Betrag des Abstandsvektors \vec{AF} ihrer Ortsvektoren. Daher gilt:

$$\begin{aligned}\vec{AF} &= \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\vec{AF}| &= \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + (-6)^2} \\ &= \sqrt{9 + 2 \cdot 36} \\ &= \sqrt{81} \\ &= 9\end{aligned}$$

Das an dem Punkt F befestigte Seil muss mindestens eine Länge von 9 LE haben.

Lösung 6c

Für den Abstand d zwischen dem Punkt A und der Geraden g_{FG} gilt allgemein:

$$d = \frac{|(\vec{a} - \vec{f}) \times \vec{FG}|}{|\vec{FG}|}$$

In diesem Fall also:

$$\begin{aligned}
 d &= \frac{\left| \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} \right|} \\
 &= \frac{\left| \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{81+9}} \\
 &= \frac{\left| \begin{pmatrix} 45 \\ -18 \\ -54 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{90}} \\
 &= \frac{\sqrt{45^2 + (-18)^2 + (-54)^2}}{\sqrt{90}} \\
 &= \sqrt{\frac{45^2 + 18^2 + 54^2}{90}} \\
 &= \sqrt{\frac{117}{2}} \\
 &\approx 7,6485 \dots
 \end{aligned}$$

Da aber nach der Position von dem Punkt H und nicht nach der Distanz gefragt war, muss so vorgegangen werden:

Die orthogonale Projektion von \vec{FG} auf \vec{FA}

$$\begin{aligned}
 \vec{FG} &:= a = \begin{pmatrix} 3-3 \\ (-1)-8 \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} \\
 \vec{FA} &:= b = \begin{pmatrix} 3-(-3) \\ (-1)-2 \\ 6-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$a_b = \frac{\langle a, b \rangle}{||b||} \cdot b$$

$$\Rightarrow a_b = \frac{0 + 27 + 18}{\sqrt{6^2 + (-3)^2 + 6^2}} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{45}{\sqrt{81}} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ -15 \\ 30 \end{pmatrix}$$