Aufgabe 3

a) Bestimmen Sie die Tangentengleichung der Kurve $f(x) = x^3$ an der Stelle $x = 2$.

b) Bestimmen Sie die Gerade, welche eine Tangente an der folgenden Funktion ist:

$$f(x) = x^2 \text{ und } g(x) = x^2 - 2x$$

Lösung 3

Der Ansatz für die Tangente einer Funktion $f(x)$ in einem Punkt x_0 lautet

$$T(x) = f_1(x) = m \cdot (x - x_0) + b$$

Dabei gilt für die Steigung $m = f'(x_0)$ und für $b = f(x_0)$.
Die Tangentengleichung lautet somit:

$$T(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Lösung 3a

Für die Tangente $T(x)$ von der Funktion $f(x) = x^3$ an der Stelle $x_0 = 2$ gilt somit:

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f'(2) = 12$$

$$f(2) = 8$$

$$T(x) = 12 \cdot (x - 2) + 8$$

$$= 12x - 24 + 8$$

$$= 12x - 16$$

Lösung 3b

Ansatz 1:

Die allgemeinen Tangentengleichungen der Funktionen ergeben sich aus der genannten Formel und den Ableitungen der Funktionen.

$$f'(x) = 2x$$

$$g'(x) = 2x - 2$$

Eine gemeinsame Tangente muss zwei Bedingungen erfüllen.

a) $\exists\ x_0 : f'(x_0) = g'(x_0)$ und

b) $f(x_0) = g(x_0)$

Bedingung 1:

$$2x = 2y - 2$$

$$x = y - 1$$

Bedingung 2:

$$x^2 = y^2 - 2y$$
$$x^2 = y \cdot (y - 2)$$

Aus 1 und 2 erhält man:

$$(y-1)(y-1) = y \cdot (y-2)$$

$$y^2 - y - y + 1 = y^2 - 2y$$
$$y^2 - 2y + 1 = y^2 - 2y$$
$$1 = 0 \ \lightning$$

Beide Bedingungen können nicht zusammen erfüllt sein.
Ansatz 2:

$$T_f(x) = 2x_0 \cdot (x - x_0) + x^2$$
$$T_g(x) = (2x_0 - 2) \cdot (x - x_0) + \left(x^2 - 2x\right)$$

Gesucht ist eine gemeinsame Tangente, also soll gelten $T_f(x) = T_g(x)$:

$$
\begin{aligned}
& 2x_0 \cdot (x - x_0) + x^2 = (2x_0 - 2) \cdot (x - x_0) + \left(x^2 - 2x\right) \\
\Leftrightarrow\quad & 2x_0x - 2x_0^2 + x^2 = 2x_0x - 2x_0^2 - 2x + 2x_0 + x^2 - 2x \quad \Big| -x^2 \\
\Leftrightarrow\quad & 2x_0x - 2x_0^2 = 2x_0x - 2x_0^2 - 2x + 2x_0 - 2x \quad \Big| -2x_0x \\
\Leftrightarrow\quad & -2x_0^2 = -2x_0^2 - 2x + 2x_0 - 2x \quad \Big| +2x_0^2 \\
\Leftrightarrow\quad & 0 = 2x_0 - 4x \quad \Big| +4x \\
\Leftrightarrow\quad & 2x = x_0
\end{aligned}
$$

Setzt man nun die gefundene Information für x_0 in die Tangentengleichungen ein, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
T_f(x) &= 4x \cdot (x - 2x) + x^2 \\
&= -4x^2 + x^2 \\
&= -3x^2
\end{aligned}
$$

Zur Probe auch noch in die zweite Tangentengleichung:

$$
\begin{aligned}
T_g(x) &= (2x_0 - 2) \cdot (x - x_0) + \left(x^2 - 2x\right) \\
&= (4x - 2) \cdot (x - 2x) + \left(x^2 - 2x\right) \\
&= -4x^2 + 2x + x^2 - 2x \\
&= -4x^2 + x^2 \\
&= -3x^2
\end{aligned}
$$

Somit ist gezeigt, dass $T_f(x) = T_g(x) \; = -3x^2$.
Problematisch ist nur, dass es sich dabei um eine Parabel und keine Tangente handelt, außer vielleicht eine tangierende Parabel, aber es war ja nach einer Geraden gesucht.