Aufgabe 1

Untersuchen Sie, ob folgende Funktionen an der Stelle x_0 stetig ergänzbar sind:
a)

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{für } x < -1 \\ 4x-1 & \text{für } x > -1 \end{cases} \text{ und } \ x_0 = -1$$

b)

$$f(x) = x \cdot \cos\frac{1}{x} \ \text{ und } \ x_0 = 0$$

c)

$$f(x) = \frac{1}{e^{\frac{1}{x-1}}} \ \text{ und } \ x_0 = 1$$

Lösung 1a

Unstetigkeit mit Folgenkriterium gezeigt:
Dazu die Folge $r_n = -1 + \frac{1}{n}$ für die Annährung von rechts und $l_n = -1 - \frac{1}{n}$ für die Annhärung von links, da

$$\lim_{n\to\infty} l_n = \lim_{n\to\infty} r_n = -1.$$

Setzt man r_n und l_n in $f(x)$ für die entsprechenden Bereiche, so erhält man für $x < -1$

$$\begin{aligned} f(l_n) &= 2 \cdot l_n + 1 \\ &= 2 \cdot \left(-1 - \tfrac{1}{n}\right) + 1 \\ &= -2 - \tfrac{2}{n} + 1 \\ &= -\tfrac{2}{n} - 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} f(l_n) = \lim_{n\to\infty} -\frac{2}{n} - 1 = -1$$

und für $x > -1$

$$\begin{aligned} f(r_n) &= 4 \cdot r_n - 1 \\ &= 4 \cdot \left(-1 + \tfrac{1}{n}\right) - 1 \\ &= -4 + \tfrac{4}{n} - 1 \\ &= -5 + \tfrac{4}{n} \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} -5 + \frac{4}{n} = -5$$

$\Rightarrow$ Die Funktion $f(x)$ ist an der Stelle x_0 nicht stetig.

Abbildung 1: Graph 1

Aufgabe 2

Entscheiden Sie, ob die folgende Funktion auf dem Intervall $[-1;1]$ gleichmäßig stetig ist

$$f(x) = \frac{x}{4 - x^2}$$

Lösung 2

Die Funktion $f(x)$ist an der Stelle $x_0$stetig, falls

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta(x_0, \epsilon) > 0 \ : \ \forall (x - x_0) < \delta \ : \ |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Die Funktion $f(x)$ ist gleichmäßig stetig in einem Intervall D, wenn in jedem Punkt $x_0 \in D$ gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0 \forall x, x_0 \in D : (|x - x_0| < \delta(\epsilon) \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon).$$

Hinweis: Dabei muss δ unabhängig von x_0 sein.
Stetigkeit mit ϵ-δ-Beweis zu zeigen. Sei $\epsilon > 0$ und $x_0 \in [-1;1]$

Aufgabe 3

Sind die folgende Funktionen lokal Lipschitz-stetig im Punkt x_0? Berechnen Sie ggf. die Lipschitz-Konstante L in Abhängigkeit von δ.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & f(x) = \sqrt{2+3x} & , & x_0 = 1 \\ \text{b)} & f(x) = \sqrt{x^2+1} & , & x_0 = -1 \end{array}$$

Lösung 3

Aufgabe 4

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$$

a) Beweisen Sie, dass $f(x)$ mindestens eine Nullstelle im Intervall $\left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$ besitzt.

b) Welche Auswirkung hat die Vergrößerung des zu untersuchenden Intervall auf $\left[-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right]$? Was bedeutet dies für die Nullstellensuche?

c) Wie viele Nullstellen kann ein Polynom n-ten Gerades maximal haben?

Lösung 4

Lösung 4a)

Lösung 4b)

Lösung 4c)

Ein Polynom p vom Grad n kann keine oder endlich viele, aber maximal n verschiedene Nullstellen haben $x_1, x_2, \dots, x_r$ $(r \leq n)$.

Aufgabe 5

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x} + 2$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion auf dem Intervall $[2; 5]$ die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes erfüllt.

b) Mit dem Startpunkt $x_0 = 3$ berechnen Sie mit der a-priori-Abschätzung die notwendige Anzahl Iterationen, um den Fixpunkt mit der Genauigkeit $\epsilon = \frac{1}{1.000}$ zu berechnen.

c) Mit demselben Startpunkt und derselben verlangten Genauigkeit, berechnen Sie die Iterationen, bis mit der a-posteriori Abschätzung die Genauigkeit erreicht ist.

Sie dürfen die Monotonie der Funktion ausnutzen.

Lösung 5