# Aufgabe 3

a) Welche Vorschrift hat die Funktion 4.Ordnung, welche die $x$-Achse im Punkt $(2|0)$ berührt, in $(0|0)$ einen Wendepunkt hat und dessen Tangente mit der $x$-Achse einen Winkel von $45°$ bildet?

b) Berechnen Sie die Fläche zwischen der Kurve der Funktion und der positiven $x$-Achse.

## Lösung 3a

Die gesuchte Funktion hat die Form $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ und es soll gelten $f(2) = 0$, $f'(2) = 0$ sowie für den Wendepunkt $f(0) = 0$, das notwendige Kriterium $f''(0) = 0$, sowie das hinreichende Kriterium $f'''(0) \neq 0$. Ferner soll die Tangente an dem Punkt $(0|0)$ eine Steigung von 1 haben, also $f'(0) = 1$.
Die ersten drei Ableitungen der Funktion lauten.

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

$$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

$$f'''(x) = 24ax + 6b$$

Entsprechend der Voraussetzungen ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
I:&\quad f(2)=0\\
\Leftrightarrow&\quad 0=a2^4+b2^3+c2^2+d2+e\\
\Leftrightarrow&\quad 0=16a+8b+4c+2d+e\\
\overset{II}{\Leftrightarrow}&\quad 0=16a+8b+4c+2d\\
\overset{III}{\Leftrightarrow}&\quad 0=16a+8b+2d\\
\Leftrightarrow&\quad 0=8a+4b+d\\
\overset{IV}{\Leftrightarrow}&\quad 0=8a+4b+1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
II:&\quad f(0)=0\\
\Leftrightarrow&\quad 0=e
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
III:&\, f''(0)=0\\
\Leftrightarrow&\quad 0=2c\\
\Leftrightarrow&\quad 0=c
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
IV:&\quad f'(0)=1\\
\Leftrightarrow&\quad 1=d
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V:&\quad f'(2)=0\\
\Leftrightarrow&\quad 0=4a2^3+3b2^2+2c2+d\\
\Leftrightarrow&\quad 0=32a+12b+4c+d\\
\overset{III}{\Leftrightarrow}&\quad 0=32a+12b+d\\
\overset{IV}{\Leftrightarrow}&\quad 0=32a+12b+1
\end{aligned}
$$

Es ergibt sich aus den Gleichungen $V:\ 32a+12b=-1$ und $I: 8a+4b=-1$ das LGS:

$$
\begin{pmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 32 & 12 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -4\cdot I \end{matrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} +II \\ \\ \end{matrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 8 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}
$$

$$
8a=2 \Leftrightarrow a=\frac{1}{4}
$$

$$
-4b=3 \ \Leftrightarrow b=-\frac{3}{4}
$$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{4}x^3 + x$

Schließlich muss noch die hinreichende Begingung für den Wendepunkt überprüft werden:

$$\begin{aligned} VI: f'''(0) &\neq 0 \\ f'''(0) &= 24a \cdot 0 + 6b \\ \Leftrightarrow \quad f'''(0) &= 6b \\ f'''(0) &= -\frac{9}{2} \\ &\neq 0 \checkmark \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Die gefundene Funktionsvorschrift erfüllt die alle genannten Bedingungen.

## Lösung 3b

Nullstellen berechnen:
$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{4}x^3 + x$

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad 0 &= \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{4}x^3 + x \\ \Leftrightarrow \quad 0 &= x^4 - 3x^3 + 4x \end{aligned}$$

Polynomdivision durch die bekannten Nullstellen $x_0 = 0,\ x_1 = 2$:

$$\left(x^4 - 3x^3 + 4x\right) : x = x^3 - 3x^2 + 4$$

$$\left(x^3 - 3x^2 + 4\right) : (x - 2) = x^2 - x - 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) = 0$$

$\Rightarrow x_2 = -1,\ x_3 = 2$
Da nur die Fläche $A$ zwischen der Kurve und der positiven $x$-Achse gesucht ist, betrachten wir die Nullstellen $x_0 = 0,\ x_1 = 2$ und entsprechend das bestimmte Integral in dem gegebenen Intervall.

$$A = \int_0^2 f(x)dx = F(2) - F(0)$$

Sei $F(x)$ die Stammfunktion von $f(x)$:

$$F(x) = \frac{1}{20}x^5 - \frac{3}{16}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + c$$

Daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
A &= \left(\tfrac{1}{20}2^5 - \tfrac{3}{16}2^4 + \tfrac{1}{2}2^2\right) - \left(\tfrac{1}{20}0^5 - \tfrac{3}{16}0^4 + \tfrac{1}{2}0^2\right) \\
&= \tfrac{1}{20}2^5 - \tfrac{3}{16} \cdot 16 + 2 \\
&= \tfrac{32}{20} - \tfrac{3 \cdot 16}{16} + 2 \\
&= \tfrac{8}{5} - 3 + 2 \\
&= \tfrac{3}{5}
\end{aligned}
$$

Die eingeschlossene Fläche is $3/5\ FE$ groß.