Aufgabe 6

Bestimmen Sie das orthogonale Komplement $L^\perp$ zu L, der linearen Hülle der gegebenen Vektoren.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Welche Dimension besitzt $L^\perp$?

Lösung 6

Sei $V = \mathbb{R}^4$ und nach Definition $L^\perp = \{x \in V | < x, l >= 0\}$ so erhalten wir ein LGS, dessen erweiterte Koeffizientenmatrix mit Gauß zu lösen ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +I \cdot (-1) \\ +I \cdot (-1) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow x_3 = -x_1 \\ \Rightarrow x_2 = 0 \\ \Rightarrow x_4 = 0 \end{matrix}$$

$\Rightarrow$

$$L^\perp = \left\{ x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

Die Dimension des orthogonale Komplements zu L ist $\dim\left(L^\perp\right) = 1$, da die Basis von $L^\perp$ nur aus dem Vektor $v_1 = (x_1,\ 0,\ -x_1,\ 0)^T$ besteht.

Aufgabe 7

Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Seien zwei endliche Mengen M und N Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Aus $N \subseteq M$ folgt $L(N) \subseteq L(M)$.

b) Für $M \subseteq \mathbb{R}^n$, M endlich, gilt $L(M) = L(L(M))$.

Lösung 7a

$$
\begin{aligned}
x \in L(N) \Rightarrow x = & \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \cdot n_k \\
= & \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \cdot n_k + 0 \\
= & \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \cdot n_k + \sum_{m \in M \setminus N} 0 \cdot m \\
\Rightarrow \quad & x \in L(M) \\
\Rightarrow \quad & L(N) \subseteq L(M) \ \checkmark
\end{aligned}
$$

Lösung 7b

Es ist zu zeigen, dass $L(L(M)) \subseteq L(M)$.

Sei $x \in L(L(N))$ so gilt $x = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot m_i$ mit $m_i \in L(N)$ für $n \in [1;k]$. Dann ist $m_i = \sum_{j=1}^{l} k_j \cdot n_j$.
Somit ist $a_i \cdot m_i = a_i \cdot \sum_{j=1}^{l} b_j \cdot n_j = \sum_{j=1}^{1} a_i \cdot b_j \cdot n_j$. Außerdem ist dann

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot m_i &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} a_i \cdot b_j \cdot n_j \\
&= \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot b_j \cdot n_j \\
&= \sum_{j=1}^{l} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{k} a_i \right) \cdot b_j}_{:= c_j} \cdot n_j
\end{aligned}
$$

So sieht man, dass $x \in L(N)$ ✓
Aus $M \subseteq N$ folgt $L(M) \subseteq L(N)$. Setze ein $N = L(M)$. Da $M \subseteq L(M)$ ist, folgt ebenso $L(M) \subseteq L(L(M))$. ✓

Aufgabe 8

Gegeben sei die Basis $B = \{1,\ x^2,\ x^4\}$ des Vektorraums V der achsensymmetrischen Polynome maximal 4. Grades.

a) Zeigen Sie, dass die Lineare Hülle von B einen Untervektorraum vom Vektorraum P_4 der Polynome vom Grad 4 bildet.

b) Untersuchen Sie die folgenden Polynome aus V auf lineare Unabhängigkeit:

$$3x^4 - 7x^2 + 2$$
$$-x^4 + 2x^2 - 1$$
$$4x^4 + 3x^2 + 2$$

Lösung 8a

$$L(B) = \lambda + \mu \cdot x^2 + \rho \cdot x^4 \text{ mit } \lambda, \mu, \rho \in K$$

$$L(P_4) = \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 x^3 + \lambda_5 x^4 \text{ mit } \lambda_i \in K,\ i \in [1;5]$$

$$L(B) \ = \{L(P_4) | \lambda_2 = 0 \wedge \lambda_4 = 0\} \ \Rightarrow \ L(B) \subseteq L(P_4) \ \checkmark$$

Lösung 8b

Die Polynome sind linear unabhängig, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix **ungleich** 0 ist.

$$\det \begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 12 + 28 - 6 - 14 + 9 - 16 = 49 - 36 = 13$$

Daraus folgt, dass die Polynome linear unabhängig sind.