

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Potenzreihe und den Konvergenzradius der Funktion $g(x) = \frac{4}{2x-5}$ mit $x \neq \frac{5}{2}$ um die Entwicklungspunkte

a) $x_0 = 0$

b) $x_0 = 1$

c) $x_0 = -1$

Lösung 1a

$$g(x) = \frac{4}{2x-5}$$

Es soll die Funktion $g(x)$ in eine Potenzreihe der Form

$$\frac{1}{1-a(x-x_0)} = \sum_{n=0}^{\infty} (a(x-x_0))^n$$

entwickelt werden.

Dazu wird $g(x)$ wie folgt umgeformt

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{4}{2x-5} \\ &= \frac{-4}{5-2x} \\ &= (-4) \cdot \frac{1}{5-2x} \\ &= (-4) \cdot \frac{1}{5 \cdot (1-\frac{2}{5}x)} \\ &= \frac{-4}{5} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{5}x} \\ &= \frac{-4}{5} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{5}(x-0)} \end{aligned}$$

Die Funktion wird nun als Potenzreihe in der zuvor genannten Form mit $a = \frac{2}{5}$ für den Bereich $\left| \frac{2}{5} \cdot x \right| < 1$ geschrieben.

$$\left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}x\right)^n = \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{2}{5}\right)^n x^n\right)$$

Für den Konvergenzradius gilt

$$\begin{aligned} 1 &> |a(x-x_0)| \\ \Leftrightarrow 1 &> \left|\frac{2}{5} \cdot x\right| \\ \Leftrightarrow 1 &> \frac{2}{5} \cdot |x| \\ \Leftrightarrow \frac{5}{2} &> |x| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{5}{2}\right) < x < \frac{5}{2}$$

Die Funktion $g(x)$ lässt sich für den Konvergenzradius a um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ als Potenzreihe darstellen.

Von der Potenzreihe ist bekannt, dass sie konvergent in dem Bereich ist. Nun bleibt zu untersuchen, ob die Ränder selbst konvergent oder divergent sind.

Die Reihe

$$\left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}x\right)^n$$

ist für $x = -\frac{5}{2}$:

$$\left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

divergent, da die Folge $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergent ist.

Für $x = \frac{5}{2}$ muss die Divergenz nicht untersucht werden, da bereits gegeben war, dass $\frac{5}{2} \notin X$.

Daher ist die Potenzreihe konvergent in dem Intervall $x \in]-\frac{5}{2}; \frac{5}{2}[$.

Lösung 1b

Für die Betrachtung um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{4}{2x-5} \\ &= 4 \cdot \frac{1}{2 \cdot (x-1) - 5 + 2} \\ &= 4 \cdot \frac{1}{2 \cdot (x-1) - 3} \\ &= 4 \cdot \frac{1}{-3 + 2 \cdot (x-1)} \\ &= 4 \cdot \frac{1}{-3(1 + \frac{2}{-3} \cdot (x-1))} \\ &= \frac{4}{-3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3} \cdot (x-1)} \end{aligned}$$

Die Funktion wird nun als Potenzreihe in der zuvor genannten Form mit $a = \frac{2}{3}$ für den Bereich $\left|\frac{2}{3} \cdot (x - x_0)\right| < 1$ geschrieben.

$$\left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}(x-1)\right)^n$$

Für den Konvergenzradius gilt

$$\begin{aligned} 1 &> |a(x - x_0)| \\ \Leftrightarrow 1 &> \left|\frac{2}{3} \cdot (x - 1)\right| \\ \Leftrightarrow 1 &> \left|\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\right| \\ \Leftrightarrow 1 &> \left|\frac{2x-2}{3}\right| \end{aligned}$$

⇒ Für $x > 1$:

$$\begin{aligned} 1 &> \frac{2x-2}{3} \\ 3 &> 2x-2 \\ 5 &> 2x \\ \frac{5}{2} &> x \end{aligned}$$

⇒ Für $x < 1$:

$$\begin{aligned} 1 &> -\frac{2x-2}{3} \\ 3 &> -2x+2 \\ 1 &> -2x \\ -\frac{1}{2} &< x \end{aligned}$$

Die Funktion $g(x)$ lässt sich für den Konvergenzradius von

$$-\frac{1}{2} < x < \frac{5}{2}$$

um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ als Potenzreihe darstellen.

Da der obere Rand nicht Teil der Definitionsmenge ist, bleibt die Konvergenz am unteren Rand zu untersuchen.

Die Reihe

$$\left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}(x-1)\right)^n$$

ist für $x = -\frac{1}{2}$:

$$\left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2} - 1\right)\right)^n = \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)\right)^n = \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

divergent, da die Folge $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergent ist.

Lösung 1c

[Fehlt]

Aufgabe 2

Berechnen Sie den Wert der Reihe:

$$\text{a) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+3}{k!} \qquad \text{b) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2+4k-1}{k!}$$

Lösung 2a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+3}{k!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{(k-1)!} + \frac{3}{k!} \right) \\ &= 2 \cdot \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{1}{k!} + 3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \\ &= 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} + \frac{2}{(-1)!} + 3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \\ &= 2 \cdot e + 0 + 3 \cdot e \\ &= 5e \end{aligned}$$

Lösung 2b

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2+4k-1}{k!} =$$

Aufgabe 3

Vereinfachen Sie die folgenden Terme mithilfe der Additionstheoreme.

a) $\frac{\sin(2x)}{\sin(x)}$

b) $\sin^4(x) - \cos^4(x)$

Lösung 3a

Mit dem Additionstheorem (*Lemma 108, Seite 131*)

$$\sin(u + v) = \sin(u) \cdot \cos(v) + \sin(v) \cdot \cos(u)$$

gilt mit $\sin(2x) = \sin(x + x)$ für

$$\begin{aligned}\sin(x + x) &= \sin(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot \cos(x) \\ &= \sin(x) \cdot (\cos(x) + \cos(x))\end{aligned}$$

sodass

$$\begin{aligned}\frac{\sin(2x)}{\sin(x)} &= \frac{\sin(x) \cdot (\cos(x) + \cos(x))}{\sin(x)} \\ &= \cos(x) + \cos(x) \\ &= 2 \cdot \cos(x)\end{aligned}$$

vereinfacht werden kann.

Lösung 3b

Aus dem Additionstheorem (*Lemma 108, Seite 131*)

$$1 = \cos^2(x) + \sin^2(x)$$

folgt mit der 3. Binomischen Formel:

$$\begin{aligned}\sin^4(x) - \cos^4(x) &= (\sin^2(x) + \cos^2(x)) \cdot (\sin^2(x) - \cos^2(x)) \\ &= \sin^2(x) - \cos^2(x) \\ &= 1 - \cos^2(x) - \cos^2(x) \\ &= 1 - 2\cos^2(x) \\ &= -\cos(2x)\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass die folgende Funktion $f(x)$ stetig ist.

$$f(x) = \begin{cases} 8a + 16x & \text{für } x < 2 \\ a^2 \cdot (x + 2) & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

Lösung 4

Sei $f_1(x) = 8a + 16x$ und $f_2(x) = a^2 \cdot (x + 2)$ so ist für $a = 4$

$$\begin{aligned} 8 \cdot 4 + 16x &= 4^2 \cdot x + 4^2 \cdot 2 \\ \Leftrightarrow 32 + 16x &= 16x + 32 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Die Gerade $f(x) = 16x + 32$ ist stetig.

Aufgabe 5

Untersuchen Sie die folgenden Reihen mittels eines geeigneten Kriteriums auf Konvergenz.

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{13^{n+2} \cdot n^{n^2}}{5^{n-2} \cdot (n+1)^{n^2}} \quad \text{b) } \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l!}{l^l} \quad \text{c) } \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1)^8 \cdot 3^m}{m!}$$

Lösung 5a

Die Folge $a_n = \frac{13^{n+2} \cdot n^{n^2}}{5^{n-2} \cdot (n+1)^{n^2}}$ für $n \in \mathbb{N}$ lässt sich mit den Potenzgesetzen zunächst so umformen:

$$a_n = \frac{13^{n+2} \cdot n^{n^2}}{5^{n-2} \cdot (n+1)^{n^2}} = \frac{13^n \cdot 13^2 \cdot n^{n \cdot n}}{5^n \cdot (n+1)^{n \cdot n}} = \frac{13^2 \cdot 5^2 \cdot 13^n \cdot n^{n \cdot n}}{5^n \cdot (n+1)^{n \cdot n}} = 13^2 \cdot 5^2 \cdot \left(\frac{13 \cdot n^n}{5 \cdot (n+1)^n} \right)^n$$

Für die Reihe gilt nun:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{13^{n+2} \cdot n^{n^2}}{5^{n-2} \cdot (n+1)^{n^2}} = 13^2 \cdot 5^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{13 \cdot n^n}{5 \cdot (n+1)^n} \right)^n$$

Diese wird nun mit dem Wurzelkriterium untersucht.

$$\begin{aligned} r &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{13 \cdot n^n}{5 \cdot (n+1)^n} \right)^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{13 \cdot n^n}{5 \cdot (n+1)^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{13}{5} \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{13}{5} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right)^n \right| \\ &= \frac{13}{5} \cdot \left| \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} \right| \\ &= \frac{13}{5e} \\ &< 1 \end{aligned}$$

Aus $r < 1 \Rightarrow$ die gegebene Reihe ist konvergent.

Lösung 5b

Die gegebene Reihe soll mit dem Quotientenkriterium untersucht werden. Dazu betrachten wir die Folge $a_l = \frac{l!}{l^l}$:

$$\begin{aligned} r &= \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{a_{l+1}}{a_l} \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{(l+1)!}{(l+1)^{l+1}} \cdot \frac{l^l}{l!} \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{(l+1) \cdot l^l}{(l+1)^{l+1}} \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} (l+1)^{1-(l+1)} \cdot l^l \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} (l+1)^{-l} \cdot l^l \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \left(\frac{l}{l+1} \right)^l \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \left(\frac{l+1}{l} \right)^{-l} \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \left(l + \frac{1}{l} \right)^{-l} \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{l} \right)^{-l} \\ &= \frac{1}{e} < 1 \end{aligned}$$

Aus $r < 1 \Rightarrow$ die gegebene Reihe ist konvergent.