Aufgabe 8

Gegeben sei die Basis $B = \{1,\ x^2,\ x^4\}$ des Vektorraums V der achsensymmetrischen Polynome maximal 4. Grades.

a) Zeigen Sie, dass die Lineare Hülle von B einen Untervektorraum vom Vektorraum P_4 der Polynome vom Grad 4 bildet.

b) Untersuchen Sie die folgenden Polynome aus V auf lineare Unabhängigkeit:

$$3x^4 - 7x^2 + 2$$
$$-x^4 + 2x^2 - 1$$
$$4x^4 + 3x^2 + 2$$

Lösung 8a

$$L(B) = \lambda + \mu \cdot x^2 + \rho \cdot x^4 \text{ mit } \lambda, \mu, \rho \in K$$

$$L(P_4) = \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 x^3 + \lambda_5 x^4 \text{ mit } \lambda_i \in K,\ i \in [1;5]$$

$$L(B) \ = \{L(P_4) | \lambda_2 = 0 \wedge \lambda_4 = 0\} \ \Rightarrow\ L(B) \subseteq L(P_4) \ \checkmark$$

Lösung 8b

Die Polynome sind linear unabhängig, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix **ungleich** 0 ist.

$$\det \begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 12 + 28 - 6 - 14 + 9 - 16 = 49 - 36 = 13$$

Daraus folgt, dass die Polynome linear unabhängig sind.