Aufgabe 8

Gegeben sind die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ \beta \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\alpha \\ -2 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} -1 \\ -\alpha \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Variablen α und β derart, dass der aus den 3 Vektoren gebildete Spat das Volumen 17 VE hat und das von den Vektoren a und b aufgespannte Parallelogramm den Flächeninhalt 19 FE hat.

Lösung 8

Das Spatprodukt dreier Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ ist nach Definition 2.90 und 2.91

$$\det(a, b, c) = \langle a, b \times c \rangle \in \mathbb{R}$$

Das Volumen V des durch die Spaltenvektoren aufgespannten Spats ist der Betrag der Determinante $V = |\det(a, b, c)|$.
Für ein gegebenes Volumen $V = 17VE$ soll also gelten:

$$17VE = \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 2\alpha & -\alpha \\ \beta & -2 & 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$\Leftrightarrow \quad 17VE = |2\alpha\beta - 1|$$

$$\overset{(2\alpha\beta-1)>0}{\Leftrightarrow} \quad 9VE = \alpha\beta$$

$$\Leftrightarrow \quad \beta = \frac{9VE}{\alpha}$$

Für den Flächeninhalt des Parallelogramms A muss die Länge des Vektorprodukts bestimmt werden. Nach Folgerung 2.43 lässt sich der Flächeninhalt so berechnen:

$$A = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin\theta = \|a \times b\|$$

Für eine gegebene Fläche $A = 19FE$ soll also gelten:

$$
\begin{aligned}
A &= \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ \beta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2\alpha \\ -2 \end{pmatrix} \right\| \\
&= \left\| \begin{pmatrix} 1 - 2\alpha\beta \\ 2 \\ 2\alpha \end{pmatrix} \right\| \\
&= \sqrt{(1 - 2\alpha\beta)^2 + 4 + 4\alpha^2} \\
&= \sqrt{5 + 4\alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta + 4\alpha^2} \\
\overset{A=19FE}{\Leftrightarrow} \quad 19FE &= \sqrt{5 + 4\alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta + 4\alpha^2} \\
\overset{\beta=9VE/\alpha}{\Leftrightarrow} \quad 19FE &= \sqrt{5 + 4\alpha^2\left(\tfrac{9VE}{\alpha}\right)^2 - 4\alpha\left(\tfrac{9VE}{\alpha}\right) + 4\alpha^2} \\
\Leftrightarrow \quad 19FE &= \sqrt{5 + 4 \cdot (9VE)^2 - 4 \cdot (9VE) + 4\alpha^2} \\
\Leftrightarrow \quad 19^2VE &= 5 + 4 \cdot (9VE)^2 - 4 \cdot (9VE) + 4\alpha^2 \\
\Leftrightarrow \quad 4\alpha^2 &= 19^2VE - 5 - 4 \cdot (9VE)^2 + 4 \cdot (9VE) \\
\Leftrightarrow \quad \alpha^2 &= \tfrac{19^2VE}{4} - (9VE)^2 + (9VE) - \tfrac{5}{4} \\
\Leftrightarrow \quad \alpha^2 &= \tfrac{19^2VE}{4} + (9VE) - (9VE)^2 - \tfrac{5}{4} \\
\Leftrightarrow \quad \alpha^2 &= \left(\tfrac{397}{4}VE\right) - \left(81VE^2\right) - \tfrac{5}{4} \\
\Leftrightarrow \quad \alpha &= \sqrt{\left(\tfrac{397}{4}VE\right) - \left(81VE^2\right) - \tfrac{5}{4}} \\
\Leftrightarrow \quad \alpha &= \sqrt{17}
\end{aligned}
$$

Somit sind die Parameter $\alpha = \sqrt{17}$ und $\beta = \frac{9}{\sqrt{17}}$ eindeutig bestimmt.
Die Probe ergibt für das Volumen

$$
\begin{aligned}
17VE &= \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 2\sqrt{17} & -\sqrt{17} \\ \frac{9}{\sqrt{17}} & -2 & 1 \end{pmatrix} \right| \\
&= \left| 2 \cdot \sqrt{17} \cdot \frac{9}{\sqrt{17}} - 1 \right| \\
&= |18 - 1| \\
&= 17 \ \checkmark
\end{aligned}
$$

sowie für den Flächeninhalt

$$
\begin{aligned}
19FE &= \left\| \begin{pmatrix} 1 - 2 \cdot \sqrt{17} \cdot \frac{9}{\sqrt{17}} \\ 2 \\ 2 \cdot \sqrt{17} \end{pmatrix} \right\| \\
&= \left\| \begin{pmatrix} -17 \\ 2 \\ 2 \cdot \sqrt{17} \end{pmatrix} \right\| \\
&= \sqrt{(-17)^2 + 2^2 + 2^2 \cdot 17} \\
&= \sqrt{(-17)^2 + 4 + 4 \cdot 17} \\
&= \sqrt{361} \\
&= 19 \ \checkmark
\end{aligned}
$$

Hinweis: Es reicht die Betrachtung des Falls $(2\alpha\beta - 1) > 0$*, da die Aufgabenstellung nach einer Lösung und nicht nach allen Lösungen fragt.*