Aufgabe 6

Hinweis: Aufgabentext zur besseren Verständlichkeit abgeändert.

Eine Luke ist mit einer Platte verschlossen, welche mit zwei Scharniere an den Punkten $S = (0|0|0)$ und $T = (0|4|0)$ montiert ist. Die Platte hat eine Aufhängung, welche sich im geschlossenen Zustand am Punkt $A = (-3|2|0)$ befindet und im geöffneten Zustand im Punkt $B = (\frac{-3}{\sqrt{2}}|2|\frac{3}{\sqrt{2}})$.

(a) Zeigen Sie, dass die Platte beim Öffnen um $45°$ gedreht wird.

(b) Wie ist der Abstand zwischen dem Aufhängungspunkt im geschlossenen Zustand A und einem weiteren Punkt $F = (3| - 1|6)$, welcher als Befestigung dienen soll?

(c) Welcher Punkt H auf der Strecke von F nach $G = (3|8|3)$, hat den geringsten Abstand zum Aufhängungspunkt?

Lösung 6

Lösung 6a

Winkel zwischen den Ebenen $E_{STA} \measuredangle E_{STB}$.

Lösung 6b

$$\left|\overrightarrow{AF}\right| = 9$$

Lösung 6c

Abstand vom Punkt A nach $f = \overrightarrow{FG}$

$$\left|\overrightarrow{Af}\right| = 5,8$$

Aufgabe 7

Bildet $\mathbb{N}_0$ mit der Verknüpfung

$$a \circ b = |a - b|$$

eine abelsche Gruppe?

Lösung 7

Es ist zu untersuchen, ob es sich bei $G = (\mathbb{N}_0, \circ)$ um eine abelsche Gruppe handelt. Für die Verknüpfung $\circ$ gilt nach Definition der Betragsfunktion:

$$a \circ b := |a-b| = \begin{cases} (a-b) & \text{für } a > b \\ 0 & \text{für } a = b \\ (a-b)\cdot(-1) & \text{für } b > a \end{cases}$$

[G0] Abgeschlossenheit:
Beweis der Abgeschlossenheit durch vollständige Fallunterscheidung:

$$\begin{aligned} &\text{Fall 1:} & (a-b) &\in \mathbb{N}_0 \text{ für } a > b \checkmark \\ &\text{Fall 2:} & 0 &\in \mathbb{N}_0 \text{ für } a = b \checkmark \\ &\text{Fall 3:} & (-1)\cdot(a-b) &\in \mathbb{N}_0 \text{ für } b > a \checkmark \end{aligned}$$

Daraus folgt $\forall a, b \in \mathbb{N}_0 : |a-b| \in \mathbb{N}_0$ und die Abgeschlossenheit ist gezeigt.

[G1] Assoziativität:
Es ist zu untersuchen, ob

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N}_0 : (a \circ b) \circ c \stackrel{?}{=} a \circ (b \circ c)$$

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N}_0 : ||a-b|-c| \stackrel{?}{=} |a-|b-c||$$

Beweis durch Gegenbeispiel:
Es sei $a = 3$, $b = 2$ und $c = 1$, dann muss nach obiger Annahme gelten

$$\begin{aligned} & ||3-2|-1| = |3-|2-1|| \\ \Leftrightarrow \quad & |1-1| = |3-1| \\ \Leftrightarrow \quad & 0 = 2 \qquad ↯ \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass es sich bei dem Tuppel $(\mathbb{N}_0, \circ)$ nicht um eine Gruppe und damit auch nicht um eine abelsche Gruppe handelt.

Aufgabe 8

Gegeben sind die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ \beta \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\alpha \\ -2 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} -1 \\ -\alpha \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Variablen α und β derart, dass der aus den 3 Vektoren gebildete Spat das Volumen 17 VE hat und das von den Vektoren α und β aufgespannte Parallelogramm den Flächeninhalt 19 FE hat.

Lösung 8

Aufgabe 9

Zeigen Sie mithilfe der Determinanten, dass die folgenden 3 Ebenen keinen eindeutigen Schnittpunkt haben.

$$E_1 : x + z = 4 \qquad E_2 : 3x - 2y + 2z = 1 \qquad E_3 : 2y + z = 11$$

Lösung 9