

## Aufgabe 6

Beweisen oder widerlegen Sie, dass es sich bei den gegebenen Abbildungen um eine Norm für Vektoren des Vektorraums  $\mathbb{R}^n$  handelt.

a)

$$\|x\| = \sum_{i=1}^n x_i$$

b)

$$\|x\| = \left| \prod_{i=1}^n x_i \right|$$

c)

$$\|x\| = \min_{i=1, \dots, n} |x_i|$$

## Lösung 6

Nach Definition 3.114, Seite 106 heißt eine Abbildung  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  Norm, genau dann, wenn

- **N0** :  $\|a\| \in \mathbb{R}$
- **N1** :  $\|a\| \geq 0$
- **N2** :  $\|a\| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
- **N3** :  $\forall \lambda \in \mathbb{K} : \|\lambda \cdot a\| = |\lambda| \cdot \|a\|$
- **N4** :  $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$ .

### Lösung 6a

Bei der Abbildung  $\|x\| = \sum_{i=1}^n x_i$  handelt es sich nicht um eine Norm, da für den Vektor  $x = (-1)$  die Bedingung N1,  $\|a\| \geq 0$  verletzt ist.

Darüber hinaus wäre für den Vektor  $x = (1; -1)^T$  die Bedingung N2 verletzt und für  $\lambda < 0$  auch die Bedingung N3.

### Lösung 6b

Bei der Abbildung  $\|x\| = |\prod_{i=1}^n x_i|$  ist die Bedingung N2 verletzt, da für jeden Vektor  $a$  mit einer beliebigen Komponente  $a_i = 0$  die Norm  $\|a\| = 0$  wäre.

## Lösung 6c

Auch bei der Abbildung  $\|x\| = \min_{i=1,\dots,n} |x_i|$  handelt es sich nicht um eine Norm, weil die Bedingung N4 verletzt ist:  
Sei  $a = (1; 2)^T$ ,  $b = (2; 1)^T$  dann ist

$$\|(3; 3)^T\| = 3 \leq \|(1; 2)^T\| + \|(2; 1)^T\| = 1 + 1 \nless.$$

## Aufgabe 7

Bestimmen Sie mit der Projektionsformel  $p = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \cdot y$  im unitären Raum  $\mathbb{C}^2$  die Projektion von  $x = (1 + i; 2 + i)^T$  auf  $y = (1 - i; -1)^T$ .

## Lösung 7

Nach Definition 3.108 ist das Standardskalarprodukt in  $\mathbb{C}^2$  definiert als  $\langle a, b \rangle = a_1 \overline{b_1} + a_2 \overline{b_2}$ .

Es folgt mit der gegebenen Projektionsformel

$$\begin{aligned} p &= \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \cdot y \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{(1+i)(1-i) + (2+i)(-1)}{(1-i)(1-i) + (-1)(-1)} \cdot \begin{pmatrix} 1-i \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-2+i}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1-i \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} + i \\ \frac{2-i}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## Aufgabe 8

Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$x = \begin{pmatrix} -3/5 \\ 4/5 \\ 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \\ 0 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis des euklidischen Raums  $\mathbb{R}^3$  (mit dem Standardskalarprodukt) bilden.

## Lösung 8

Nach Definition 3.128, Seite 111 muss für eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}_{ON} = (x, y, z)$  folgende Bedingungen erfüllt sein:

1. Orthogonalsystem:  $x \perp y \wedge y \perp z \wedge x \perp z$

2. Orthonormalsystem:  $\|x\| = \|y\| = \|z\| = 1$

3. Orthogonalbasis:  $x, y, z$  ist ein minimales Erzeugendensystem vom Vektorraum  $V$

1.  $\mathcal{B}_{ON}$  ist ein Orthogonalsystem, wenn alle Vektoren paarweise orthogonal sind:

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle &= \frac{-3 \cdot 4}{5} + \frac{4 \cdot 3}{5} + 0 \\ &= 0 \\ &\Rightarrow x \perp y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle y, z \rangle &= \frac{4 \cdot 0}{5} + \frac{3 \cdot 0}{5} + 0 \\ &= 0 \\ &\Rightarrow y \perp z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle x, z \rangle &= \frac{-3 \cdot 0}{5} + \frac{4 \cdot 0}{5} + 0 \\ &= 0 \\ &\Rightarrow x \perp z\end{aligned}$$

$$\Rightarrow x \perp y \wedge y \perp z \wedge x \perp z \quad \checkmark$$

2. Ein Orthogonalsystem  $\mathcal{B}_{ON}$  ist ein Orthonormalsystem, wenn die Norm aller Vektoren 1 beträgt:

$$\begin{aligned}\|x\| &= \sqrt{\left(\frac{-3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} \\ &= \sqrt{\frac{25}{25}} \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|y\| &= \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{9}{25}} \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|z\| &= \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|x\| = \|y\| = \|z\| = 1$$

3. Ein Orthogonalsystem  $\mathcal{B}_{ON}$  ist eine Orthogonalbasis von  $V$ , wenn es eine Basis von  $V$  ist. Man sieht, dass die Vektoren  $x, y, z$  eine Lineare Hülle aufspannen, sodass  $L(x, y, z) = \mathbb{R}^3$ . Es bleibt die lineare Unabhängigkeit der Vektoren zu zeigen:

$$\begin{aligned}\det(x, y, z) &= \frac{-9}{5} + 0 + 0 - 0 - 0 - \left(\frac{-9}{5}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow x, y, z$  ist ein minimales Erzeugendes System vom Vektorraum  $V$ . ✓

Aus 1, 2 und 3 folgt, dass es sich bei der  $\mathcal{B}_{ON}$  um eine Orthonormalbasis des Vektorraums  $\mathbb{R}^3$  handelt.