

Aufgabe 1

Bestimmen Sie mit Hilfe des Differentialquotienten die Tangentensteigung an der Stelle $x_0 = 3$ von folgenden Funktionen:

$$\text{a) } f(x) = 2x^3 + x - 1 \quad \text{b) } f(x) = \frac{2}{3x^3} \quad \text{c) } f(x) = \sqrt{2x + 3}$$

Lösung 1

Der Differentialquotient oder auch die Ableitung von f an der Stelle x_0 ist:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \Delta(x) = f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Entsprechend gilt im Folgenden:

Lösung 1a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \Delta(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2(x_0+h)^3 + x_0+h-1) - (2x_0^3 + x_0-1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x_0+h)^3 + h - 2x_0^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x_0^3 + 6x_0^2h + 6x_0h^2 + 2h^3 + h - 2x_0^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot (6x_0^2 + 6x_0h + 2h^2 + 1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 6x_0^2 + 6x_0h + 2h^2 + 1 \\ &= 6x_0^2 + 1 \\ &\stackrel{x_0=3}{=} 6 \cdot 9 + 1 \\ &= 55 \end{aligned}$$

Lösung 1b

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow x_0} \Delta(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3(x_0+h)^3} - \frac{2}{3(x_0)^3}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{6 \cdot x_0^3 - 6 \cdot (x_0+h)^3}{9 \cdot (x_0+h)^3 \cdot (x_0)^3}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6 \cdot x_0^3 - 6 \cdot (x_0^3 + 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3)}{9 \cdot (x_0^3 + 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3) \cdot x_0^3} \cdot \frac{1}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot (-18x_0^2 - 18x_0h - 6h^2)}{(9x_0^3 + 27x_0^2h + 27x_0h^2 + 9h^3) \cdot x_0^3 \cdot h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-18x_0^2 - 18x_0h - 6h^2}{(9x_0^3 + 27x_0^2h + 27x_0h^2 + 9h^3) \cdot x_0^3} \\
 &= \frac{-18x_0^2 - \lim_{h \rightarrow 0} (18x_0h - 6h^2)}{9x_0^6 + \lim_{h \rightarrow 0} (27x_0^5h + 27x_0^4h^2 + 9h^3x_0^3)} \\
 &= \frac{-18x_0^2}{9x_0^6} \\
 &= -\frac{2}{x_0^4} \\
 &\stackrel{x_0=3}{=} -\frac{2}{3^4} \\
 &= -\frac{2}{81}
 \end{aligned}$$

Lösung 1c

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \Delta(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2(x_0+h)+3} - \sqrt{2x_0+3}}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x_0+2h+3} - \sqrt{2x_0+3}}{h} \\&\stackrel{x_0=3}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{6+2h+3} - \sqrt{6+3}}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+2h} - \sqrt{9}}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{9+2h}-3) \cdot (\sqrt{9+2h}+3)}{h \cdot (\sqrt{9+2h}+3)} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9+2h-9}{h \cdot (\sqrt{9+2h}+3)} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{9+2h}+3} \\&= \frac{2}{\sqrt{9+3}} \\&= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten die Ableitung der folgenden Funktionen an einem Punkt x_0 .

a) $j(x) = 3x$

b) $k(x) = x^2 + 5$

c) $l(x) = x^3 + 1$

Lösung 2

Der Differenzenquotient von f in x_0 ist definiert als

$$\Delta(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Lösung 2a

$$\begin{aligned}\Delta(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{3x-3x_0}{x-x_0} \\&= \frac{3 \cdot (x-x_0)}{x-x_0} \\&= 3\end{aligned}$$

Lösung 2b

$$\begin{aligned}\Delta(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{x^2+5-(x_0^2+5)}{x-x_0} \\ &= \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} \\ &= \frac{(x+x_0) \cdot (x-x_0)}{x-x_0} \\ &= x+x_0\end{aligned}$$

Lösung 2c

$$\begin{aligned}\Delta(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{x^3+1-(x_0^3+1)}{x-x_0} \\ &= \frac{x^3-x_0^3}{x-x_0} \\ &= \frac{(x^2+x \cdot x_0+x_0^2) \cdot (x-x_0)}{x-x_0} \\ &= x^2+x \cdot x_0+x_0^2\end{aligned}$$

Aufgabe 3

- a) Bestimmen Sie die Tangentengleichung der Kurve $f(x) = x^3$ an der Stelle $x = 2$.
- b) Bestimmen Sie die Gerade, welche eine Tangente an der folgenden Funktion ist:

$$f(x) = x^2 \quad \text{und} \quad g(x) = x^2 - 2x$$

Lösung 3

Der Ansatz für die Tangente einer Funktion $f(x)$ in einem Punkt x_0 lautet

$$T(x) = f_1(x) = m \cdot (x - x_0) + b$$

Dabei gilt für die Steigung $m = f'(x_0)$ und für $b = f(x_0)$.
Die Tangentengleichung lautet somit:

$$T(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Lösung 3a

Für die Tangente $T(x)$ von der Funktion $f(x) = x^3$ an der Stelle $x_0 = 2$ gilt somit:

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f'(2) = 12$$

$$f(2) = 8$$

$$T(x) = 12 \cdot (x - 2) + 8$$

$$= 12x - 24 + 8$$

$$= 12x - 16$$

Lösung 3b

Ansatz 1:

Die allgemeinen Tangentengleichungen der Funktionen ergeben sich aus der genannten Formel und den Ableitungen der Funktionen.

$$f'(x) = 2x$$

$$g'(x) = 2x - 2$$

Eine gemeinsame Tangente muss zwei Bedingungen erfüllen.

a) $\exists x_0 : f'(x_0) = g'(x_0)$ und

b) $f(x_0) = g(x_0)$

Bedingung 1:

$$2x = 2y - 2$$

$$x = y - 1$$

Bedingung 2:

$$x^2 = y^2 - 2y$$

$$x^2 = y \cdot (y - 2)$$

Aus 1 und 2 erhält man:

$$(y-1)(y-1) = y \cdot (y-2)$$

$$y^2 - y - y + 1 = y^2 - 2y$$

$$y^2 - 2y + 1 = y^2 - 2y$$

$$1 = 0 \quad \nexists$$

Beide Bedingungen können nicht zusammen erfüllt sein.

Ansatz 2:

$$T_f(x) = 2x_0 \cdot (x - x_0) + x^2$$

$$T_g(x) = (2x_0 - 2) \cdot (x - x_0) + (x^2 - 2x)$$

Gesucht ist eine gemeinsame Tangente, also soll gelten $T_f(x) = T_g(x)$:

$$2x_0 \cdot (x - x_0) + x^2 = (2x_0 - 2) \cdot (x - x_0) + (x^2 - 2x)$$

$$\Leftrightarrow 2x_0x - 2x_0^2 + x^2 = 2x_0x - 2x_0^2 - 2x + 2x_0 + x^2 - 2x \quad \bigg| -x^2$$

$$\Leftrightarrow 2x_0x - 2x_0^2 = 2x_0x - 2x_0^2 - 2x + 2x_0 - 2x \quad \bigg| -2x_0x$$

$$\Leftrightarrow -2x_0^2 = -2x_0^2 - 2x + 2x_0 - 2x \quad \bigg| +2x_0^2$$

$$\Leftrightarrow 0 = 2x_0 - 4x \quad \bigg| +4x$$

$$\Leftrightarrow 2x = x_0$$

Setzt man nun die gefundene Information für x_0 in die Tangentengleichungen ein, so erhält man:

$$T_f(x) = 4x \cdot (x - 2x) + x^2$$

$$= -4x^2 + x^2$$

$$= -3x^2$$

Zur Probe auch noch in die zweite Tangentengleichung:

$$\begin{aligned}T_g(x) &= (2x_0 - 2) \cdot (x - x_0) + (x^2 - 2x) \\&= (4x - 2) \cdot (x - 2x) + (x^2 - 2x) \\&= -4x^2 + 2x + x^2 - 2x \\&= -4x^2 + x^2 \\&= -3x^2\end{aligned}$$

Somit ist gezeigt, dass $T_f(x) = T_g(x) = -3x^2$.

Problematisch ist nur, dass es sich dabei um eine Parabel und keine Tangente handelt, außer vielleicht eine tangierende Parabel, aber es war ja nach einer Geraden gesucht.

Aufgabe 4

Differenzieren Sie:

- a) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
- b) $f(x) = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}$
- c) $f(x) = x^{\cos(x)}$
- d) $f(x) = \sqrt{x \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}}$
- e) $f(x) = x^{x^a}$ für $a > 0$
- f) $f(x) = x^{ax}$ für $a > 0$
- g) $f(x) = \cos \left(\ln \left(\tan \left(\sqrt{1+x^2} \right) \right) \right)$
- h) $f(x) = x^2 \cdot e^{\frac{x}{x+1}}$

Lösung 4

Produktregel (Schelthoff¹, Satz 159)

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$f'(x) = u(x) \cdot v'(x) + u'(x) \cdot v(x)$$

Quotientenregel (Schelthoff¹, Satz 160)

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v(x)^2}$$

Kettenregel (Schelthoff¹, Satz 161)

$$f(x) = g(v(x))$$

$$f'(x) = v'(x) \cdot g'(v(x))$$

Lösung 4a

Nach Quotientenregel:

$$u(x) = e^x - e^{-x}$$

$$v(x) = e^x + e^{-x}$$

$$u'(x) = e^{-x} + e^x$$

$$v'(x) = e^x - e^{-x}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(e^{-x} + e^x)(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x})} \\ &= \frac{(e^x + e^{-x})((e^{-x} + e^x) - (e^x - e^{-x}))}{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x})} \\ &= \frac{(e^{-x} + e^x) - (e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})} \\ &= \frac{2 \cdot e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{aligned}$$

¹Schelthoff, Christof (2018): MATSE-MATIK. Analysis 1, 6. Auflage, Aachen, Shaker Verlag.

Lösung 4b

Kettenregel

$$f(x) = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$f(x) = g(v(x))$$

$$g(x) = \arcsin(x)$$

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$v(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$v'(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = v'(x) \cdot g'(v(x))$$

$$= \frac{-4x}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}$$

$$= \frac{-4x}{(1+x^2)^2 \cdot \sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}$$

Lösung 4c

Kettenregel

$$f(x) = x^{\cos(x)}$$

$$f(x) = g(v(x))$$

$$u = v(x)$$

$$v(x) = \cos(x)$$

$$v'(x) = -\sin(x)$$

$$g(u) = x^u$$

$$g'(u) = u \cdot x^{(u-1)}$$

$$g'(v(x)) = \cos(x) \cdot x^{(\cos(x)-1)}$$

$$f'(x) = v'(x) \cdot g'(v(x))$$

$$= -\sin(x) \cdot \cos(x) \cdot x^{(\cos(x)-1)}$$

Lösung 4d

Potenzregel

$$f(x) = \sqrt{x \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt{x}}}$$

$$f'(x) = \frac{7}{8x^{1/8}}$$

Lösung 4e-h

Aus Zeitmangel ausgelassen. Es wäre schon ziemlich dämlich für die 8 Unterpunkte von Aufgabe 4 jeweils 3 Punkte zu vergeben, oder? xD

Aufgabe 5

Gegeben sei die Funktion

$$f : [0;1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2 \cdot \ln(x^3 + \sqrt{2-x^2})$$

Zeigen Sie durch Anwendung des Mittelwertsatzes: $\exists y \in]0;1[$ mit $f'(y) = \ln(2)$

Lösung 5

Mittelwertsatz:

Es sei f stetig auf $[a, b]$ und f differenzierbar auf (a, b)

$$\Rightarrow \exists \epsilon \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\epsilon).$$

$$\begin{aligned} \exists y \in (0;1) : \frac{f(1)-f(0)}{1-0} &= \frac{2 \cdot \ln(1^3 + \sqrt{2-1^2}) - 2 \cdot \ln(0^3 + \sqrt{2-0^2})}{1-0} \\ &= 2 \cdot \ln(1 + \sqrt{1}) - 2 \cdot \ln(\sqrt{2}) \\ &= 2 \cdot \ln\left(\frac{1+\sqrt{1}}{\sqrt{2}}\right) \\ &= 2 \cdot \ln(\sqrt{2}) \\ &= \ln(2) \end{aligned}$$