Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass für beliebige Vektoren a und b gilt:

(a) $\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\langle a, b\rangle$
(b) $\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$
(c) $\|a+b\|^2 - \|a-b\|^2 = 4\langle a, b\rangle$

Lösung 5a

Einem Vektor wird die *euklidische Norm* oder *Standardnorm* $\|a\|$ zugeordnet:

$$\|a\| \overset{\text{def}}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Während ein *euklidisches Skalar-* oder auch *Punktprodukt* $\langle a, b\rangle$ so definiert ist:

$$\langle a, b\rangle \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} (a_i \cdot b_i)$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} & \|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\langle a, b\rangle \\ \Leftrightarrow\quad & \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (a_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} (b_i)^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (a_i \cdot b_i) \end{aligned}$$

Nun ergibt sich durch Anwendung der ersten binomischen Formeln auf der linken Seite, sowie der Rechenregeln für Summen

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow\quad & \sum_{i=1}^{n} \left(a_i^2 + 2 \cdot a_i b_i + b_i^2\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (a_i \cdot b_i) \\ \Leftrightarrow\quad & \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (a_i \cdot b_i) \\ \Leftrightarrow\quad & \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (a_i \cdot b_i) \checkmark \end{aligned}$$

eine wahre Aussage.

Lösung 5b

Mit den gleichen Definitionen und der Anwendung der ersten und zweiten binomischen Formel lässt sich auch hier durch Umformen eine wahre Aussage zeigen:

$$
\begin{aligned}
& \|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2 \\
\Leftrightarrow\ & \sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2 = 2\cdot\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 + 2\cdot\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2 \\
\Leftrightarrow\ & \sum_{i=1}^{n}\left(a_i^2 + 2\cdot a_ib_i + b_i^2\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(a_i^2 - 2\cdot a_ib_i + b_i^2\right) = 2\cdot\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 + 2\cdot\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2 \\
\Leftrightarrow\ & 2\cdot\sum_{i=1}^{n}a_i^2 + 2\cdot\sum_{i=1}^{n}a_ib_i + 2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2 - 2\cdot\sum_{i=1}^{n}a_ib_i = 2\cdot\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 + 2\cdot\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2 \\
\Leftrightarrow\ & 2\cdot\sum_{i=1}^{n}a_i^2 + 2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2 = 2\cdot\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 + 2\cdot\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2\ \checkmark
\end{aligned}
$$

Lösung 5c

Ebenso in dem dritten Beispiel:

$$
\begin{aligned}
& \|a+b\|^2 - \|a-b\|^2 = 4\langle a,b\rangle \\
\Leftrightarrow\ & \sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2 - \sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2 = 4\cdot\sum_{i=1}^{n}(a_i\cdot b_i) \\
\Leftrightarrow\ & \sum_{i=1}^{n}\left(a_i^2 + 2\cdot a_ib_i + b_i^2\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(a_i^2 - 2\cdot a_ib_i + b_i^2\right) = 4\cdot\sum_{i=1}^{n}(a_i\cdot b_i) \\
\Leftrightarrow\ & \sum_{i=1}^{n}\left(\left(a_i^2 + 2\cdot a_ib_i + b_i^2\right) - \left(a_i^2 - 2\cdot a_ib_i + b_i^2\right)\right) = 4\cdot\sum_{i=1}^{n}(a_i\cdot b_i) \\
\Leftrightarrow\ & \sum_{i=1}^{n}((2\cdot a_ib_i) - (-2\cdot a_ib_i)) = 4\cdot\sum_{i=1}^{n}(a_i\cdot b_i) \\
\Leftrightarrow\ & \sum_{i=1}^{n}(2\cdot a_ib_i + 2\cdot a_ib_i) = 4\cdot\sum_{i=1}^{n}(a_i\cdot b_i) \\
\Leftrightarrow\ & \sum_{i=1}^{n}(4\cdot a_ib_i) = 4\cdot\sum_{i=1}^{n}(a_i\cdot b_i)\ \checkmark
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6

Welcher Punkt hat von den Punkten $A = (0,1)$, $B = (0,7)$ und $C = (4,9)$ den gleichen Abstand?

Lösung 6

Gesucht ist der Vektor $\vec{p} = (x,y)^T$, dessen Differenz zu den Vektoren $\vec{a} = (0,1)^T$, $\vec{b} = (0,7)^T$ und $\vec{c} = (4,9)^T$ dem Betrag nach gleich ist.

$$\|p-a\| = \|p-b\|$$
$$\|p-b\| = \|p-c\|$$

$$\begin{aligned}
\|p-a\| &= \sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2} = \sqrt{x^2+(y-1)^2} \\
\|p-b\| &= \sqrt{(x-0)^2+(y-7)^2} = \sqrt{x^2+(y-7)^2} \\
\|p-c\| &= \sqrt{(x-4)^2+(y-9)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{crcll}
 & \|p-a\| & = & \|p-b\| & \\
 & \sqrt{x^2+(y-1)^2} & = & \sqrt{x^2+(y-7)^2} & |\ ^2 \\
\Leftrightarrow & x^2+(y-1)^2 & = & x^2+(y-7)^2 & |-x^2 \\
\Leftrightarrow & y^2-2y+1 & = & y^2-14y+49 & |-y^2+14y-1 \\
\Leftrightarrow & 12y & = & 48 & |:12 \\
\Leftrightarrow & y & = & 4 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{crcll}
 & \|p-a\| & = & \|p-c\| & \\
 & \sqrt{x^2+(y-1)^2} & = & \sqrt{(x-4)^2+(y-9)^2} & |\ ^2 \\
\Leftrightarrow & x^2+(y-1)^2 & = & (x-4)^2+(y-9)^2 & |\ y=4 \\
\Leftrightarrow & x^2+(4-1)^2 & = & (x-4)^2+(4-9)^2 & |-9 \\
\Leftrightarrow & x^2 & = & x^2-8x+16+25 & |-x^2+8x \\
\Leftrightarrow & 8x & = & 32 & |:8 \\
\Leftrightarrow & x & = & 4 &
\end{array}$$

$\Rightarrow \vec{p} = (4,4)^T$

Aufgabe 7

Zeigen Sie, dass durch $\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_3 - u_3 v_2 + u_4 v_4$ für

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$$

kein Skalarprodukt definiert wird.

Lösung 7

Bedingung SP1 (Symmetrie): Wenn die beschriebene Abbildung $\langle u, v \rangle$ ein Skalarprodukt definieren würde, dann müsste gelten $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ für alle $u, v \in \mathbb{R}^n$ und somit

$$\begin{array}{lrcll} & u_1 v_1 + u_2 v_3 - u_3 v_2 + u_4 v_4 & = & v_1 u_1 + v_2 u_3 - v_3 u_2 + v_4 u_4 & \mid -(u_1 v_1) \mid -(u_4 v_4) \\ \Leftrightarrow & u_2 v_3 - u_3 v_2 & = & v_2 u_3 - v_3 u_2 & \\ \Leftrightarrow & u_2 v_3 - u_3 v_2 & = & u_3 v_2 - u_2 v_3 & \end{array}$$

Dies gilt aber nicht.

Aufgabe 8

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS.

$$\begin{aligned} 1x_1 - 4x_2 + 9x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 12x_3 &= 2 \\ -3x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Lösung 8

Das LGS lässt sich als erweiterte Matrix $[X|\vec{y}]$ schreiben und mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren in die Zeilenstufenform bringen:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 9 & 1 \\ 2 & 4 & -12 & 2 \\ -3 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot(-\frac{1}{2}) + I \\ +(3 \cdot I) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 9 & 1 \\ 0 & -6 & 15 & 0 \\ 0 & -9 & 24 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ : (-6) \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & -5/2 & 0 \\ 0 & -9 & 24 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ +(II \cdot 9) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & -5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \cdot\frac{2}{3} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & -5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt für die nun übrigen Gleichungen:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x_3} &= \mathbf{4} \\ \\ x_2 - \frac{5}{x_3} &= 0 \\ \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{x_2} &= \mathbf{10} \\ \\ x_1 - 4x_2 + 9x_3 &= 1 \\ \Leftrightarrow \qquad x_1 - 40 + 36 &= 1 \\ \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{x_1} &= \mathbf{5} \end{aligned}$$

Es existiert eine eindeutige Lösung.

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$