Zeigen Sie, dass für beliebige Vektoren a und b gilt:

(a) $\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\langle a, b\rangle$

(b) $\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$

(c) $\|a+b\|^2 - \|a-b\|^2 = 4\langle a, b\rangle$

1.1 Lösung 5a

Einem Vektor wird die *euklidische Norm* oder *Standardnorm* $\|a\|$ zugeordnet: $\|a\| \ \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ Während ein *euklidisches Skalar*- oder auch *Punktprodukt* $\langle a, b\rangle$ so definiert ist: $\langle a, b\rangle \ \sum_{i=1}^{n}(a_i \cdot b_i)$ Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\langle a, b\rangle \\
\Leftrightarrow\ & \sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(b_i)^2 + 2\cdot\sum_{i=1}^{n}(a_i\cdot b_i)
\end{aligned}$$

Nun ergibt sich durch Anwendung der ersten binomischen Formeln auf der linken Seite, sowie der Rechenregeln für Summen

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow\ & \sum_{i=1}^{n}\left(a_i^2 + 2\cdot a_i b_i + b_i^2\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\cdot\sum_{i=1}^{n}(a_i\cdot b_i) \\
\Leftrightarrow\ & \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} 2\cdot a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\cdot\sum_{i=1}^{n}(a_i\cdot b_i) \\
\Leftrightarrow\ & \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\cdot\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\cdot\sum_{i=1}^{n}(a_i\cdot b_i)
\end{aligned}$$

eine wahre Aussage.

1.2 Lösung 5b

Mit den gleichen Definitionen und der Anwendung der ersten und zweiten binomischen Formel lässt sich auch hier durch Umformen eine wahre Aussage zeigen:

$$\begin{aligned}
& \|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2 \\
\Leftrightarrow\ & \sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2 = 2\cdot\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 + 2\cdot\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2 \\
\Leftrightarrow\ & \sum_{i=1}^{n}\left(a_i^2 + 2\cdot a_i b_i + b_i^2\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(a_i^2 - 2\cdot a_i b_i + b_i^2\right) = 2\cdot\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 + 2\cdot\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2 \\
\Leftrightarrow\ & 2\cdot\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\cdot\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + 2\cdot\sum_{i=1}^{n} b_i^2 - 2\cdot\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 2\cdot\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 + 2\cdot\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2 \\
\Leftrightarrow\ & 2\cdot\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\cdot\sum_{i=1}^{n} b_i^2 = 2\cdot\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 + 2\cdot\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2
\end{aligned}$$

1.3 Lösung 5c

Ebenso in dem dritten Beispiel:

$$\begin{aligned}
& \|a+b\|^2 - \|a-b\|^2 = 4\langle a, b\rangle \\
\Leftrightarrow\ & \sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2 - \sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2 = 4\cdot\sum_{i=1}^{n}(a_i\cdot b_i) \\
\Leftrightarrow\ & \sum_{i=1}^{n}\left(a_i^2 + 2\cdot a_i b_i + b_i^2\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(a_i^2 - 2\cdot a_i b_i + b_i^2\right) = 4\cdot\sum_{i=1}^{n}(a_i\cdot b_i) \\
\Leftrightarrow\ & \sum_{i=1}^{n}\left(\left(a_i^2 + 2\cdot a_i b_i + b_i^2\right) - \left(a_i^2 - 2\cdot a_i b_i + b_i^2\right)\right) = 4\cdot\sum_{i=1}^{n}(a_i\cdot b_i) \\
\Leftrightarrow\ & \sum_{i=1}^{n}\left((2\cdot a_i b_i) - (-2\cdot a_i b_i)\right) = 4\cdot\sum_{i=1}^{n}(a_i\cdot b_i) \\
\Leftrightarrow\ & \sum_{i=1}^{n}(2\cdot a_i b_i + 2\cdot a_i b_i) = 4\cdot\sum_{i=1}^{n}(a_i\cdot b_i) \\
\Leftrightarrow\ & \sum_{i=1}^{n}(4\cdot a_i b_i) = 4\cdot\sum_{i=1}^{n}(a_i\cdot b_i)
\end{aligned}$$

1 Aufgabe 5