

Aufgabe 7

Beweisen oder widerlegen Sie:

- a) Seien zwei endliche Mengen M und N Teilmengen des \mathbb{R}^n . Aus $N \subseteq M$ folgt $L(N) \subseteq L(M)$.
- b) Für $M \subseteq \mathbb{R}^n$, M endlich, gilt $L(M) = L(L(M))$.

Lösung 7a

$$\begin{aligned}x \in L(N) &\Rightarrow x = \sum_{k=1}^r \lambda_k \cdot n_k \\&= \sum_{k=1}^r \lambda_k \cdot n_k + 0 \\&= \sum_{k=1}^r \lambda_k \cdot n_k + \sum_{m \in M \setminus N} 0 \cdot m \\&\Rightarrow x \in L(M) \\&\Rightarrow L(N) \subseteq L(M) \quad \checkmark\end{aligned}$$

Lösung 7b

Es ist zu zeigen, dass $L(L(M)) \subseteq L(M)$.

Sei $x \in L(L(N))$ so gilt $x = \sum_{i=1}^k a_i \cdot m_i$ mit $m_i \in L(N)$ für $n \in [1; k]$. Dann ist $m_i = \sum_{j=1}^l k_j \cdot n_j$.

Somit ist $a_i \cdot m_i = a_i \cdot \sum_{j=1}^l b_j \cdot n_j = \sum_{j=1}^l a_i \cdot b_j \cdot n_j$. Außerdem ist dann

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^k a_i \cdot m_i &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l a_i \cdot b_j \cdot n_j \\&= \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^k a_i \cdot b_j \cdot n_j \\&= \sum_{j=1}^l \underbrace{\left(\sum_{i=1}^k a_i \right)}_{:= c_j} \cdot b_j \cdot n_j\end{aligned}$$

So sieht man, dass $x \in L(N) \quad \checkmark$

Aus $M \subseteq N$ folgt $L(M) \subseteq L(N)$. Setze ein $N = L(M)$. Da $M \subseteq L(M)$ ist, folgt ebenso $L(M) \subseteq L(L(M))$. ✓