Aufgabe 6

Geben Sie ein lineares Gleichungssystem mit der folgenden Lösungsmenge an:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Lösung 6

Gesucht ist ein Gleichungssystem mit drei Variablen entsprechend des Ergebnisvektors $(x, y, z)^T$. Für das Gleichungssystem muss außerdem gelten, dass

$$\begin{aligned} x &= \lambda \\ y &= 2\lambda \\ z &= 3\lambda \end{aligned}$$

ist. Da durch den freien Parameter λ das LGS unterbestimmt ist, werden nur zwei Gleichungen benötigt.

$$\begin{aligned} y = 2x &\Leftrightarrow 0 = 2x - y \\ z = 3x &\Leftrightarrow 0 = 3x - z \end{aligned}$$

Ein mögliches Gleichungssystem für die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ ist also:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7

Bestimmen Sie ein Polynom der Form $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, das durch die Punkte $(-1; 2)$, $(0; 1)$, $(1; 2)$, $(12; 12)$ geht. Nutzen Sie zur Berechnung ein lineares Gleichungssystem.

Lösung 7

Gesucht ist ein Polynom $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ für das gilt:

$$p(-1) = 2 \qquad p(0) = 1$$
$$p(1) = 2 \qquad p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Daraus ergibt sich ein System von vier linearen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
p(1) &= 2 &\Leftrightarrow\quad 2 &= a + b + c + d \\
p(-1) &= 2 &\Leftrightarrow\quad 2 &= -a + b - c + d \\
p\left(\tfrac{1}{2}\right) &= \tfrac{1}{2} &\Leftrightarrow\quad \tfrac{1}{2} &= a \cdot \tfrac{1}{8} + b \cdot \tfrac{1}{4} + c \cdot \tfrac{1}{2} + d \\
p(0) &= 1 &\Leftrightarrow\quad 1 &= d
\end{aligned}$$

Dieses LGS der Form $P \cdot \vec{x} = \vec{y}$, mit der Koeffizientenmatrix $P \in \mathbb{K}^{n \times n}$, den gesuchten Koeffizienten $\vec{x} = (a, b, c, d)$ und dem Ergebnisvektor $\vec{y}$ lässt sich als *erweiterte Matrix* $[P|\vec{y}]$ darstellen

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \vec{x} \ = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}, \ \vec{y} := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[P|\vec{y}] \ :\Leftrightarrow \ P \cdot \vec{x} = \vec{y}$$

$$[P|\vec{y}] \ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Die erweiterte Matrix $[P|\vec{y}]$ lässt nun mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren durch elementare Zeilenoperationen in die Zeilenstufenform und danach in die normalisierte

Zeilenstufenform bringen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{ll} & \\ +I & \\ \cdot 8 & -I \\ & \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{ll} -IV & \\ :2 & -IV \\ \cdot 2 & -II \\ & \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{ll} & \\ & \\ :6 & -2 \cdot IV \\ & \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{ll} -III & -II \\ & \\ & \\ & \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Daraus lassen sich nun die Koeffizienten $\vec{x}$ des gesuchten Polynoms $p(x)$ ablesen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

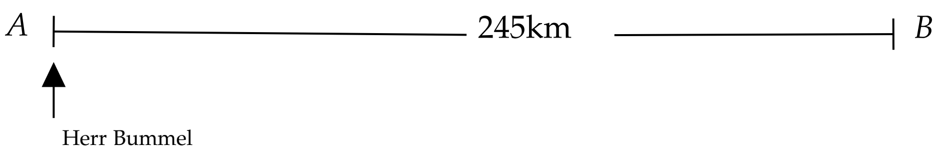
$\Rightarrow p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x + 1$

Aufgabe 8

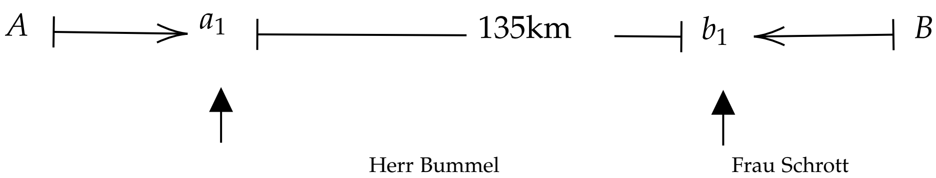
Zwei Orte A und B sind 245 km voneinander entfernt. Um 8 Uhr fährt Herr Bummel in A ab, um nach B zu fahren. 20 Minuten später startet Frau Schrott von B aus nach A. Um 9 Uhr sind sie noch 135 km voneinander entfernt. Um 10 Uhr treffen sie sich. Wie groß waren die Durchschnittsgeschwindigkeiten der beiden und in welcher Entfernung von A liegt der Treffpunkt?

Lösung 8

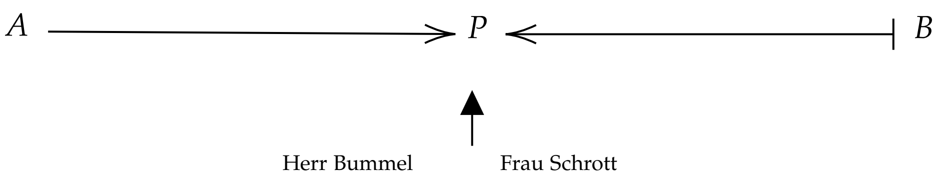
$T_0 = 0h$



$T_1 = T_0 + \Delta t \;= 1h$



$T_2 = T_0 + \Delta t \;= \;2h$



Die Strecke zwischen den Punkten A, B beträgt $\overline{AB} = 245km$.
Zum Zeitpunkt T_1 beträgt die Entfernung zwischen Herrn Bummel und Frau Schrott $\overline{a_1 b_1} = 135km$. Die zu dem Zeitpunkt von beiden zurückgelegte Strecke ist also $\overline{Aa_1} + \overline{Bb_1} = \overline{AB} - 135km$.
Zum Zeitpunkt T_2 beträgt die zurückgelegte Strecke $\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{AB} = 245km$.
Herr Bummel startet zum Zeitpunkt $T_0 = 0h$ und Frau Schrott startet 20 Min. später $T_0 + \frac{1}{3}h$.
Da die zurückgelegte Strecke s das Produkt aus Geschwindigkeit v mal Zeit t ist

($s = v \cdot t$) ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\overline{Aa_1} &= v_B \cdot T_1 \\
\overline{Bb_1} &= v_S \cdot \left(T_1 - \frac{1}{3}h\right) \\
\Rightarrow \ \overline{AB} - 135km &= v_B \cdot T_1 + v_S \cdot \left(T_1 - \frac{1}{3}h\right) \\
\overline{AP} &= v_B \cdot T_2 \\
\overline{BP} &= v_S \cdot \left(T_2 - \frac{1}{3}h\right) \\
\Rightarrow \ \overline{AB} &= v_B \cdot T_2 + v_S \cdot \left(T_2 - \frac{1}{3}h\right)
\end{aligned}$$

Setzt man die bekannten Werte ein, lässt sich das LGS als *erweiterte Matrix* und lösen schreiben:

$$\begin{pmatrix} 1h & \frac{2}{h} & 110km \\ 2h & \frac{5}{h} & 245km \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +I \cdot (-2) \end{matrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1h & \frac{2}{h} & 110km \\ 0h & \frac{1}{h} & 25km \end{pmatrix} \begin{matrix} +II \cdot (-2) \\ \cdot 3 \end{matrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1h & 0h & 60km \\ 0h & 1h & 75km \end{pmatrix}$$

Daraus folgt:

$$v_B = 60\frac{km}{h} \qquad\qquad v_S = 75\frac{km}{h}$$

Der Treffpunkt P liegt $\overline{AP} = v_B \cdot T_2 = 60\frac{km}{h} \cdot 2h = 120km$ von dem Ort A entfernt.

Aufgabe 9

Die erweiterte Matrix des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sei:
$(A|b) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta & 2 \\ \alpha & \alpha & 4 & 4 \\ 0 & \alpha & 2 & \beta \end{pmatrix}$
Für welche α und β hat das System

- eine eindeutige Lösung?
- eine einparametrige Lösung?
- eine zweiparametrige Lösung?
- keine Lösung?

Lösung 9

Zunächst wird die erweiterte Matrix $(A|b)$ in die Zeilenstufenfrom gebracht:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta & 2 \\ \alpha & \alpha & 4 & 4 \\ 0 & \alpha & 2 & \beta \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -I \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta & 2 \\ 0 & \alpha & 4-\beta & 2 \\ 0 & \alpha & 2 & \beta \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -III \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta & 2 \\ 0 & 0 & 2-\beta & 2-\beta \\ 0 & \alpha & 2 & \beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta & 2 \\ 0 & \alpha & 2 & \beta \\ 0 & 0 & 2-\beta & 2-\beta \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ :(2-\beta) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta & 2 \\ 0 & \alpha & 2 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2 \cdot III \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta & 2 \\ 0 & \alpha & 0 & \beta-2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2 \cdot III \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 2-\beta \\ 0 & \alpha & 0 & \beta-2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Daraus ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$x_1 = \frac{2-\beta}{\alpha}$$

$$x_2 = \frac{\beta-2}{\alpha}$$

$$x_3 = 1$$

Es lassen sich drei relevant zu unterscheidende Fälle erkennen.
Fall 1 für $\alpha = 0 \wedge \beta \neq 2$ lässt sich zu einem Widerspruch führen

$$x_1 \cdot 0 = 2 - \beta \ \lightning$$

und damit zeigen, dass das Gleichungssystem *überbestimmt* ist, also keine Lösung existiert.
$\Rightarrow \mathbb{L}_1 = \emptyset$
Fall 2 für $\alpha = 0 \wedge \beta = 2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist das Gleichungssystem *unterbestimmt*, also existieren unendlich viele Lösungen, da x_1 und x_2 einen beliebigen Wert annehmen können. Man könnte auch von einer zweiparametrigen Lösung sprechen:
$\Rightarrow \mathbb{L}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$
Fall 3 für $\alpha \neq 0 \wedge \beta \neq 2$

$$\begin{array}{cccc} & x_2 & = & \frac{\beta-2}{\alpha} \\ \Leftrightarrow & \alpha & = & \frac{\beta-2}{x_2} \\ & x_1 & = & \frac{2-\beta}{\alpha} \\ \Leftrightarrow & x_1 & = & \frac{(2-\beta)\cdot x_2}{\beta-2} \\ \Leftrightarrow & x_1 & = & x_2 \cdot \frac{2-\beta}{\beta-2} \\ \Leftrightarrow & x_1 \cdot \frac{\beta-2}{2-\beta} & = & x_2 \end{array} \quad \Bigg| \text{ Einsetzen}$$

existieren zwei äquivalente einparametrige Lösungen. Sowohl in der Schreibweise mit dem Parameter x_2, als auch mit dem Parameter x_1:
$\Rightarrow \mathbb{L}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{2-\beta}{\beta-2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_1 \cdot \begin{pmatrix} \frac{\beta-2}{2-\beta} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{R} \right\}$

Fall 4 für $\alpha \neq 0 \wedge \beta = 2$ existiert eine eindeutige Lösung
$\Rightarrow \mathbb{L}_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$