Aufgabe 4

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$$

(a) Beweisen Sie, dass $f(x)$ mindestens eine Nullstelle im Intervall $\left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$ besitzt.

(b) Welche Auswirkung hat die Vergrößerung des zu untersuchenden Intervall auf $\left[-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right]$? Was bedeutet dies für die Nullstellensuche?

(c) Wie viele Nullstellen kann ein Polynom n-ten Gerades maximal haben?

Lösung 4

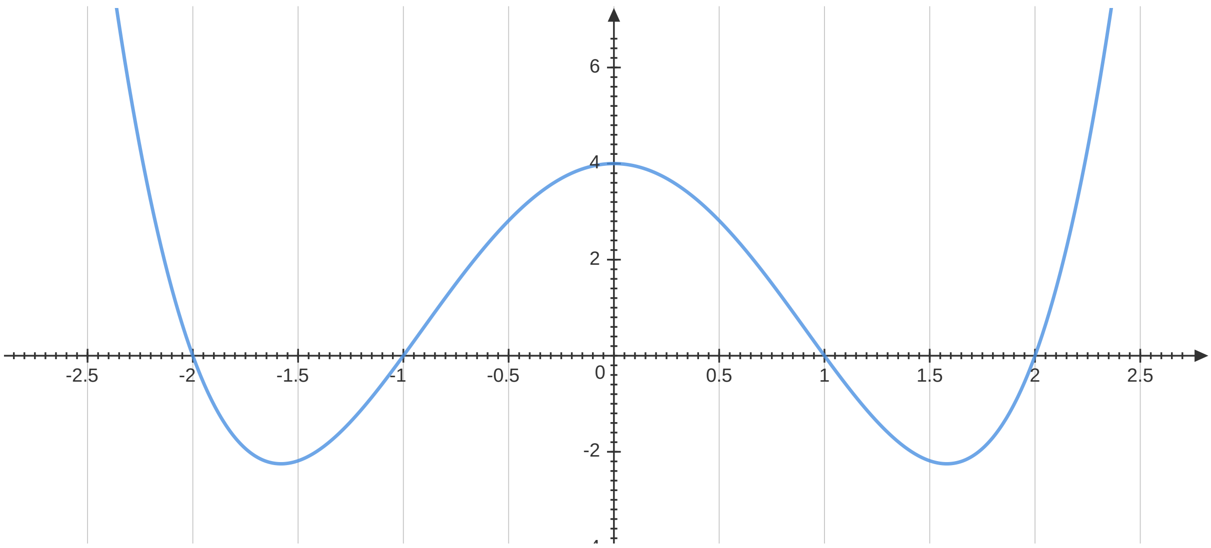

Abbildung 1: Graph von $f(x)$

Lösung 4a

Untersuchung mit Nullstellensatz (die Stetigkeit des Polynoms kann vorausgesetzt werden):

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{35}{16} \text{ und } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{45}{16}$$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \Longrightarrow \exists\, x^* \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right] \text{ mit } f\left(x^*\right) = 0$$

Lösung 4b

Die Untersuchung mit dem Nullstellensatz funktioniert nun nicht mehr, da mit

$$f\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{189}{16}$$

$$f\left(-\frac{5}{2}\right) \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) > 0 \not\Rightarrow \exists\, x^* \in \left[-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right] \text{ mit } f\left(x^*\right) = 0$$

keine oder eine gerade Anzahl an Nullstellen vorliegen können.

Lösung 4c

Ein Polynom p vom Grad n kann keine oder endlich viele, aber maximal n verschiedene Nullstellen haben $x_1, x_2, \ldots, x_r$ $(r \leq n)$.