Aufgabe 6

Beweisen oder widerlegen Sie, dass es sich bei den gegebenen Abbildungen um eine Norm für Vektoren des Vektorraums $\mathbb{R}^n$ handelt.

a)
$$\|x\| = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

b)
$$\|x\| = \left|\prod_{i=1}^{n} x_i\right|$$

c)
$$\|x\| = \min_{i=1,\ldots,n} |x_i|$$

Lösung 6

Nach Definition 3.114, Seite 106 heißt eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ Norm, genau dann, wenn

- **N0** : $\|a\| \in \mathbb{R}$
- **N1** : $\|a\| \geq 0$
- **N2** : $\|a\| = 0 \;\Leftrightarrow a = 0$
- **N3** : $\forall \lambda \in \mathbb{K} : \|\lambda \cdot a\| = |\lambda| \cdot \|a\|$
- **N4** : $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$.

Lösung 6a

Bei der Abbildung $\|x\| = \sum_{i=1}^{n} x_i$ handelt es sich nicht um eine Norm, da für den Vektor $x = (-1)$ die Bedingung N1, $\|a\| \geq 0$ verletzt ist.
Darüber hinaus wäre für den Vektor $x = (1;\ -1)^T$ die Bedingung N2 verletzt und für $\lambda < 0$ auch die Bedingung N3.

Lösung 6b

Bei der Abbildung $\|x\| = |\prod_{i=1}^{n} x_i|$ ist die Bedingung N2 verletzt, da für jeden Vektor a mit einer beliebigen Komponente $a_i = 0$ die Norm $\|a\| = 0$ wäre.

Lösung 6c

Auch bei der Abbildung $\|x\| = \min_{i=1,\ldots,n} |x_i|$ handelt es sich nicht um eine Norm, weil die Bedingung N4 verletzt ist:
Sei $a = (1;2)^T,\ b = (2;1)^T$ dann ist

$$\|(3;3)^T\| = 3 \leq \|(1;2)^T\| + \|(2;1)^T\| = 1 + 1 \ ↯.$$