

## Aufgabe 6

Untersuchen Sie, ob die folgenden Systeme von Vektoren des  $\mathbb{R}^n$  linear abhängig oder unabhängig sind.

a)  $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$

b)  $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

c)  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

### Lösung 6a

Wären die beiden Vektoren linear abhängig, dann würde gelten:  $\exists \lambda$ , sodass gilt:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \lambda = -10 \quad \not\checkmark \\ \lambda = 1 \quad \not\checkmark \end{array}$$

Da  $\lambda \cdot 4 = -4 \wedge \lambda \cdot (-1) = 10 \wedge \lambda \cdot 2 = 2 \not\checkmark$ , also kein  $\lambda$  existiert, welches die Gleichung erfüllen könnte, müssen die Vektoren linear unabhängig sein.

### Lösung 6b

Die vier gegebenen Vektoren aus dem  $\mathbb{R}^3$  müssen zwangsläufig linear abhängig voneinander sein, da maximal  $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$  Vektoren linear unabhängig aus dem Vektorraum sein können.

### Lösung 6c

Wären die drei Vektoren linear abhängig, dann würde gelten:  $\exists \lambda, \mu$ , sodass gilt:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \mu = 1/3 \\ \mu = 1/3 \\ \lambda = 0 \\ \lambda = -1/2 \quad \not\checkmark \end{array}$$

Da  $\lambda \cdot 2 = 0 \wedge \lambda \cdot 2 = -1 \not\checkmark$  sind die Vektoren linear unabhängig.

## Aufgabe 7

$x_1, \dots, x_n$  seien linear unabhängige Vektoren aus einem  $K$ -Vektorraum  $V$ . Weiter sei  $x = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i$  und  $\mu_i \in K$  für alle  $i = 1, \dots, n$ . Es ist zu zeigen, dass unter der Voraussetzung  $\sum_{i=1}^n \mu_i \neq 1$  die Vektoren  $x - x_1, \dots, x - x_n$  linear unabhängig sind.

### Lösung 7a

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i (x - x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (\lambda_i x) - \sum_{i=1}^n (\lambda_i x_i) \\ &= x \cdot \sum_{i=1}^n (\lambda_i) - \sum_{i=1}^n (\lambda_i x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (\mu_i x_i) \cdot \sum_{i=1}^n (\lambda_i) - \sum_{i=1}^n (\lambda_i x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n (\lambda_j) \cdot \mu_i x_i \right) - \sum_{i=1}^n (\lambda_i x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \left( \sum_{j=1}^n (\lambda_j) \cdot \mu_i \right) - \sum_{i=1}^n (\lambda_i) \right) x_i \end{aligned}$$

Aus der linearen Unabhängigkeit folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n (\lambda_j) \cdot \mu_i \right) - \sum_{i=1}^n (\lambda_i) \\ \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n (\lambda_j) \cdot \mu_i \right) \\ \Rightarrow \forall i \in [1; n] : \lambda_i &= \sum_{j=1}^n (\lambda_j) \cdot \mu_i \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i &= \sum_{i=1}^n \left( \mu_i \cdot \sum_{j=1}^n \lambda_j \right) \\ \Leftrightarrow 0 &= \sum_{i=1}^n \left( \mu_i \cdot \sum_{j=1}^n \lambda_j \right) - \sum_{i=1}^n \lambda_i \\ \Leftrightarrow 0 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \left( \sum_{i=1}^n (\mu_i) - 1 \right) \end{aligned}$$

Da  $\sum_{i=1}^n \mu_i \neq 1$  ist, muss  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$  gelten.

## Lösung 7b

Aus  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$  und  $\sum_{i=1}^n \lambda_i(x - x_i) = 0$  folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i(x - x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i x - \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \\ &= x \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i}_{=0} - \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \\ &= - \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \quad \checkmark \end{aligned}$$

## Aufgabe 8

Schreiben Sie das Polynom  $v(t) = t^2 + 4t - 3$  auf  $\mathbb{R}$  als eine Linearkombination der Polynome  $e_1(t) = t^2 - 2t + 5$ ,  $e_2(t) = 2t^2 - 3t$  und  $e_3(t) = t + 3$ .

## Lösung 8

Gesucht sind  $\alpha, \beta, \gamma$  sodass gilt:

$$v(t) = \alpha \cdot e_1(t) + \beta \cdot e_2(t) + \gamma \cdot e_3(t)$$

Aus den gegebenen Polynomen lässt sich die folgende Koeffizientenmatrix des LGS aufstellen (die Spalten entsprechen den Polynomen  $e_1, e_2, e_3$  und die Ergebnisspalte dem Polynom  $v$ ):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} +2 \cdot I \\ +2 \cdot II - I \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -8 & 5 & 4 \end{pmatrix} +8 \cdot II$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 13 & 52 \end{pmatrix} : 13$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} - III$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} -2 \cdot II$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha = -3, \beta = 2, \gamma = 4$$

$$v(t) = \alpha \cdot e_1(t) + \beta \cdot e_2(t) + \gamma \cdot e_3(t)$$

$$\Rightarrow v(t) = -3 \cdot e_1(t) + 2 \cdot e_2(t) + 4 \cdot e_3(t)$$

$$\Rightarrow v(t) = -3 \cdot (t^2 - 2t + 5) + 2 \cdot (2t^2 - 3t) + 4 \cdot (t + 3)$$

$$= -3t^2 + 6t - 15 + 4t^2 - 6t + 4t + 12$$

$$= t^2 + 4t - 3 \checkmark$$