Aufgabe 1

Bestimmen Sie mit Hilfe des Differentialquotienten die Tangentensteigung an der Stelle $x_0 = 3$ von folgenden Funktionen:

a) $f(x) = 2x^3 + x - 1$ b) $f(x) = \frac{2}{3x^3}$ c) $f(x) = \sqrt{2x+3}$

Lösung 1

Aufgabe 2

Berechnen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten die Ableitung der folgenden Funktionen an einem Punkt x_0.

a) $j(x) = 3x$ b) $k(x) = x^2 + 5$ c) $l(x) = x^3 + 1$

Lösung 2

Aufgabe 3

a) Bestimmen Sie die Tangentengleichung der Kurve $f(x) = x^3$ an der Stelle $x = 2$.
b) Bestimmen Sie die Gerade, welche eine Tangente an der folgenden Funktion ist:

$$f(x) = x^2 \text{ und } g(x) = x^2 - 2x$$

Lösung 3

Aufgabe 4

Differenzieren Sie:

a) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

b) $f(x) = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}$

c) $f(x) = x^{\cos(x)}$

d) $f(x) = \sqrt{x \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt{x}}}$

e) $f(x) = x^{x^a}$ für $a > 0$

f) $f(x) = x^{a^x}$ für $a > 0$

g) $f(x) = \cos\left(\ln\left(\tan\left(\sqrt{1+x^2}\right)\right)\right)$

h) $f(x) = x^2 \cdot e^{\frac{x}{x+1}}$

Lösung 4

Aufgabe 5

Gegeben sei die Funktion

$$f : [0;1] \to \mathbb{R},\ f(x) = 2 \cdot \ln\left(x^3 + \sqrt{2 - x^2}\right)$$

Zeigen Sie durch Anwendung des Mittelwertsatzes: $\exists y \in]0;1[$ mit $f'(y) = \ln(2)$

Lösung 5

Mittelwertsatz: Es sei f stetig auf $[a, b]$ und f differenzierbar auf (a, b)

$$\Rightarrow \exists\ \epsilon \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\epsilon).$$

$$\begin{aligned}
\exists\ y \in (0;1)\ \ : \tfrac{f(1)-f(0)}{1-0} &= \tfrac{2\cdot\ln\left(1^3+\sqrt{2-1^2}\right)-2\cdot\ln\left(0^3+\sqrt{2-0^2}\right)}{1-0} \\
&= 2 \cdot \ln\left(1 + \sqrt{1}\right) - 2 \cdot \ln\left(\sqrt{2}\right) \\
&= 2 \cdot \ln\left(\tfrac{1+\sqrt{1}}{\sqrt{2}}\right) \\
&= 2 \cdot \ln\left(\sqrt{2}\right) \\
&= \ln(2)
\end{aligned}$$