Aufgabe 5

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x} + 2$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion auf dem Intervall $[2; 5]$ die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes erfüllt.

(b) Mit dem Startpunkt $x_0 = 3$ berechnen Sie mit der a-priori-Abschätzung die notwendige Anzahl Iterationen, um den Fixpunkt mit der Genauigkeit $\epsilon = \frac{1}{1.000}$ zu berechnen.

(c) Mit demselben Startpunkt und derselben verlangten Genauigkeit, berechnen Sie die Iterationen, bis mit der a-posteriori Abschätzung die Genauigkeit erreicht ist.

Sie dürfen die Monotonie der Funktion ausnutzen.

Lösung 5

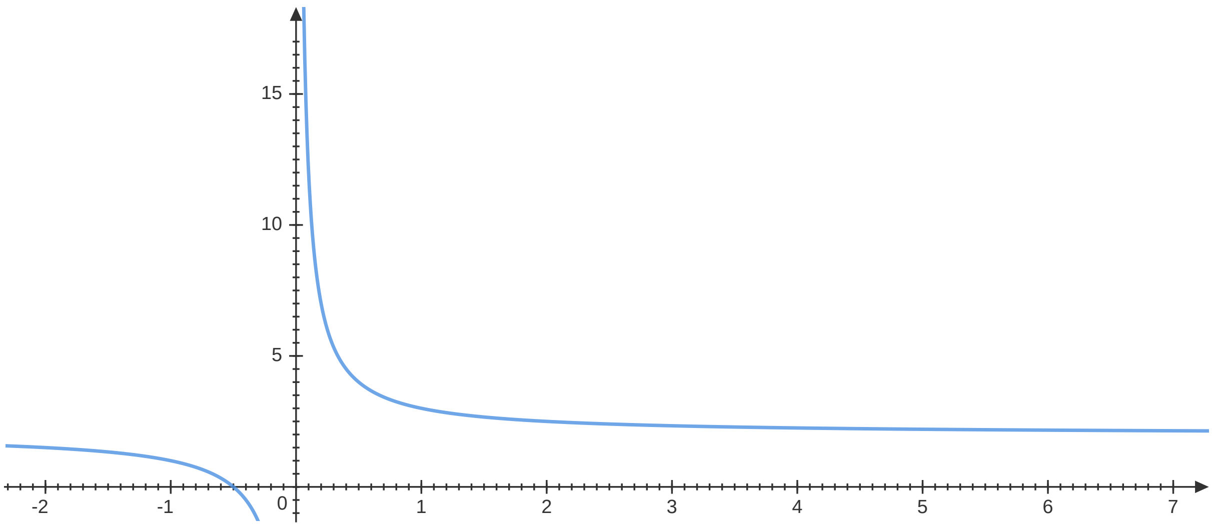

Abbildung 1: Graph von $f(x)$

Lösung 5a

Fixpunktsatz: Sei $f : [a, b] \to [c, d]$ stetig mit $[c, d] \subset [a, b]$ (selbstkontrahierend), dann existiert ein Fixpunkt $u = f(u)$. *(Schelthoff, S. 157 Satz 143)*[1]

[1] Schelthoff, Christof (2018): MATSE-MATIK. Analysis 1, 6. Auflage, Aachen, Shaker Verlag.

$f(x) = \frac{1}{x}$ ist bekanntermaßen stetig für $x \neq 0$ und da die Definitionslücke nicht in dem untersuchten Intervall enthalten ist $0 \notin [2;5]$ ist die Funktion in dem Intervall stetig. Die Funktion bildet das Intervall $[2;5]$ auf das Intervall $\left[\frac{5}{2}; \frac{11}{5}\right]$ ab

$$f : [2;5] \ \rightarrow \left[\frac{5}{2}; \frac{11}{5}\right]$$

und der Wertebereich ist Teilmenge des Definitionsbereichs

$$\left[\frac{5}{2}; \frac{11}{5}\right] \subset [2;5] \checkmark$$

also exisiter ein Fixpunkt.

Lösung 5b

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig in einem Punkt $x_0 \in D$, wenn gilt

$$\exists L \geq 0 \forall x, x_0 \in D : |f(x) - f(x_0)| \leq L \cdot |x - x_0|.$$

Daraus folgt für die Lipschitz-Konstante L

$$L \geq \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|}$$

Für die gegebene Funktion bedeutet das:

$$\begin{aligned} L &\geq \frac{\left|\left(\frac{1}{x}+2\right)-\left(\frac{1}{x_0}+2\right)\right|}{|x-x_0|} \\ &= \frac{\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|}{|x-x_0|} \\ &= \frac{\frac{|x_0-x|}{x \cdot x_0}}{|x-x_0|} \\ &= \frac{|x_0-x|}{x \cdot x_0 \cdot |x-x_0|} \\ &= \frac{1}{x \cdot x_0} \end{aligned}$$

Die Fixpunkt-Iteration zur numerische Annäherung an Fixpunkt x_{n+1} lautet

$$x_{n+1} = f(x_n) = \frac{1}{x_n} + 2$$

Diese ist gleichmäßig stetig auf dem Intervall $[2;5]$ mit

$$\left|\left(\frac{1}{x}+2\right) - \left(\frac{1}{x_0}+2\right)\right| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| \leq \left|\frac{x_0 - x}{x \cdot x_0}\right| \leq \frac{1}{2 \cdot 2}|x - x_0|$$

und die Abbildung ist kontrahierend. Weiterhin ist mit $x_0 = 3$ dann $x_1 = f(3) = \frac{7}{3}$, also ist

$$|x_1 - x_0| = \left|\frac{7}{3} - \frac{9}{3}\right| = \frac{2}{3}.$$

Der Fixpunkt soll mit einer Genauigkeit von $\epsilon = \frac{1}{1.000}$ berechnet werden.
Eine a-priori Abschätzung erfolgt für den Fehler $|x_n - x^*|$, wobei x_n ist der Fixpunkt mit der Genauigkeit ϵ und x^* der eigentlich Fixpunkt ist, nach folgender Definition (Schelthoff, S. 157 Satz 144):

$$|x_n - x^*| \leq \frac{L^n}{1-L} \cdot |x_1 - x_0| < \epsilon \text{ mit } x_0 \in [a;b],\ x_1 = f(x_0).$$

Mit $L = \frac{1}{4}$ ergibt sich nach der folgenden Umformung für die Anzahl der Iterationen:

$$\begin{aligned}
L^n &< \tfrac{\epsilon\cdot(1-L)}{|x_1-x_0|} \\
\Leftrightarrow\ n &> \frac{\ln\left(\frac{|x_1-x_0|}{\epsilon\cdot(1-L)}\right)}{\ln\left(\frac{1}{L}\right)} \\
\equiv\ n &> \frac{\ln\left(\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{1.000}\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)}\right)}{\ln(4)} \\
&= \frac{\ln\left(\frac{2\cdot 1.000}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)}{\ln(4)} \\
&= \frac{\ln\left(\frac{2\cdot 1.000\cdot 4}{3\cdot 3}\right)}{\ln(4)} \\
&= \frac{\ln\left(\frac{8.000}{9}\right)}{\ln(4)} \\
&\approx 4,897\ldots
\end{aligned}$$

Damit ist $n_0 = 5$ und die Berechnung des Fixpunktes in der gewünschten Genauigkeit nach 5 Iterationen erreicht.

Lösung 5c

Für die a-posteriori Abschätzung gilt analog $|x_n - x^*| \leq \frac{1}{1-L} \cdot |x_n - x_{n-1}| < \epsilon$ und bleibt dem Leser als Aufgabe selbst überlassen.