Aufgabe 7

Bildet $\mathbb{N}_0$ mit der Verknüpfung

$$a \circ b = |a - b|$$

eine abelsche Gruppe?

Lösung 7

Es ist zu untersuchen, ob es sich bei $G = (\mathbb{N}_0, \circ)$ um eine abelsche Gruppe handelt.
Für die Verknüpfung $\circ$ gilt nach Definition der Betragsfunktion:

$$a \circ b := |a - b| = \begin{cases} (a-b) & \text{für } a > b \\ 0 & \text{für } a = b \\ (a-b)\cdot(-1) & \text{für } b > a \end{cases}$$

[G0] Abgeschlossenheit:
Beweis der Abgeschlossenheit durch vollständige Fallunterscheidung:

$$\begin{aligned} &\text{Fall 1:} && (a-b) \in \mathbb{N}_0 \text{ für } a > b \checkmark \\ &\text{Fall 2:} && 0 \in \mathbb{N}_0 \text{ für } a = b \checkmark \\ &\text{Fall 3:} && (-1)\cdot(a-b) \in \mathbb{N}_0 \text{ für } b > a \checkmark \end{aligned}$$

Daraus folgt $\forall a, b \in \mathbb{N}_0 : |a - b| \in \mathbb{N}_0$ und die Abgeschlossenheit ist gezeigt.

[G1] Assoziativität:
Es ist zu untersuchen, ob

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N}_0 : (a \circ b) \circ c \stackrel{?}{=} a \circ (b \circ c)$$

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N}_0 : ||a - b| - c| \stackrel{?}{=} |a - |b - c||$$

Beweis durch Gegenbeispiel:
Es sei $a = 3$, $b = 2$ und $c = 1$, dann muss nach obiger Annahme gelten

$$\begin{aligned} & ||3-2|-1| = |3-|2-1|| \\ \Leftrightarrow\quad & |1-1| = |3-1| \\ \Leftrightarrow\quad & 0 = 2 \qquad ↯ \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass es sich bei dem Tuppel $(\mathbb{N}_0, \circ)$ nicht um eine Gruppe und damit auch nicht um eine abelsche Gruppe handelt.