Aufgabe 5

Gegeben sind die folgenden Geraden in der Parmaeterdarstellung:

$$\begin{aligned} g_1: \quad & x = 1 + t & , \quad & y = 3 - 2 \cdot t \\ g_2: \quad & x = 1/2 - 3/2 \cdot t & , \quad & y = 1 - 4 \cdot t \end{aligned}$$

Geben Sie die jeweiligen Normalform und Hesse-Normalform an. Gibt es einen Schnittpunkt?

Lösung 5

Punkt-Richtungsform:

$$\begin{aligned} g_1: \quad \vec{X} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ g_2: \quad \vec{X} &= \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3/2 \\ -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Normalform mit dem Normalenvektor $\overrightarrow{n_{g1}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ da $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$:

$$g_1 : 0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{X} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

Hesse-Normalform mit $|\vec{n}| = \sqrt{5}$:

$$g_1 : 0 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{X} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

Normalform mit dem Normalenvektor $\overrightarrow{n_{g2}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3/2 \end{pmatrix}$ da $\left\langle \begin{pmatrix} 3/2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3/2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$:

$$g_2 : 0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3/2 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{X} - \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Hesse-Normalform mit $|\vec{n}| = \sqrt{73/4}$:

$$g_2 : 0 = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 3/2 \end{pmatrix}}{\sqrt{73/4}} \cdot \left(\vec{X} - \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Die beiden Geraden schneiden sich in $\mathbb{R}^2$, wenn sie nicht parallel zueinander sind.
Beweis duch Widerspruch: Wir nehmen an $g_1 \parallel g_2$, dann $\exists\ t \in \mathbb{R}$ für das gilt

$$\begin{aligned} t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3/2 \\ -4 \end{pmatrix} \\ \text{mit } t = 2: \quad 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3/2 \\ -4 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3/2 \\ -4 \end{pmatrix} \\ 1 &= 3/2 \ \lightning \end{aligned}$$

Da die Geraden nicht parallel sind, muss es einen Schnittpunkt geben.