

Aufgabe 4

Differenzieren Sie:

a) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

b) $f(x) = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}$

c) $f(x) = x^{\cos(x)}$

d) $f(x) = \sqrt{x \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt{x}}}$

e) $f(x) = x^{x^a}$ für $a > 0$

f) $f(x) = x^{ax}$ für $a > 0$

g) $f(x) = \cos \left(\ln \left(\tan \left(\sqrt{1+x^2} \right) \right) \right)$

h) $f(x) = x^2 \cdot e^{\frac{x}{x+1}}$

Lösung 4

Produktregel (Schelthoff¹, Satz 159)

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$f'(x) = u(x) \cdot v'(x) + u'(x) \cdot v(x)$$

Quotientenregel (Schelthoff¹, Satz 160)

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v(x)^2}$$

Kettenregel (Schelthoff¹, Satz 161)

$$f(x) = g(v(x))$$

$$f'(x) = v'(x) \cdot g'(v(x))$$

¹Schelthoff, Christof (2018): MATSE-MATIK. Analysis 1, 6. Auflage, Aachen, Shaker Verlag.

Lösung 4a

Nach Quotientenregel:

$$u(x) = e^x - e^{-x}$$

$$v(x) = e^x + e^{-x}$$

$$u'(x) = e^{-x} + e^x$$

$$v'(x) = e^x - e^{-x}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(e^{-x}+e^x)(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x})} \\ &= \frac{(e^x+e^{-x})((e^{-x}+e^x)-(e^x-e^{-x}))}{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x})} \\ &= \frac{(e^{-x}+e^x)-(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})} \\ &= \frac{2 \cdot e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \end{aligned}$$

Lösung 4b

Kettenregel

$$f(x) = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$f(x) = g(v(x))$$

$$g(x) = \arcsin(x)$$

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$v(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$v'(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = v'(x) \cdot g'(v(x))$$

$$= \frac{-4x}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}$$

$$= \frac{-4x}{(1+x^2)^2 \cdot \sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}$$

Lösung 4c

Kettenregel

$$f(x) = x^{\cos(x)}$$

$$f(x) = g(v(x))$$

$$u = v(x)$$

$$v(x) = \cos(x)$$

$$v'(x) = -\sin(x)$$

$$g(u) = x^u$$

$$g'(u) = u \cdot x^{(u-1)}$$

$$g'(v(x)) = \cos(x) \cdot x^{(\cos(x)-1)}$$

$$f'(x) = v'(x) \cdot g'(v(x))$$

$$= -\sin(x) \cdot \cos(x) \cdot x^{(\cos(x)-1)}$$

Lösung 4d

Potenzregel

$$f(x) = \sqrt{x \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt{x}}}$$

$$f'(x) = \frac{7}{8x^{1/8}}$$

Lösung 4e-h

Aus Zeitmangel ausgelassen. Es wäre schon ziemlich dämlich für die 8 Unterpunkte von Aufgabe 4 jeweils 3 Punkte zu vergeben, oder? xD