Aufgabe 5

Gegeben sei die Funktion

$$f : [0;1] \to \mathbb{R},\ f(x) = 2 \cdot \ln\left(x^3 + \sqrt{2 - x^2}\right)$$

Zeigen Sie durch Anwendung des Mittelwertsatzes: $\exists y \in]0;1[$ mit $f'(y) = \ln(2)$

Lösung 5

Mittelwertsatz: Es sei f stetig auf $[a,b]$ und f differenzierbar auf (a,b)

$$\Rightarrow \exists\ \epsilon \in (a,b) : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\epsilon).$$

$$\begin{aligned}
\exists\ y \in (0;1)\ :\ \tfrac{f(1)-f(0)}{1-0} &= \tfrac{2\cdot\ln\left(1^3+\sqrt{2-1^2}\right)-2\cdot\ln\left(0^3+\sqrt{2-0^2}\right)}{1-0} \\
&= 2 \cdot \ln\left(1 + \sqrt{1}\right) - 2 \cdot \ln\left(\sqrt{2}\right) \\
&= 2 \cdot \ln\left(\tfrac{1+\sqrt{1}}{\sqrt{2}}\right) \\
&= 2 \cdot \ln\left(\sqrt{2}\right) \\
&= \ln(2)
\end{aligned}$$