Aufgabe 5

Hinweis: Aufgabentext zur besseren Verständlichkeit abgeändert.
Ein Artist springt von einem 21 m hohen Gebäude in nordöstliche Richtung. Seine Flugbahn wird durch eine Gerade beschrieben und seine Geschwindigkeit ist konstant. Die Geschwindigkeit in nordöstliche Richtung beträgt $\sqrt{2}[\mathrm{m\,s^{-1}}]$ und die Fallgeschwindigkeit $2[\mathrm{m\,s^{-1}}]$.
Das Landepodest hat einen Radius von 3 m und ist 1 m hoch. Sein Mittelpunkt befindet sich von der Gebäudeecke 11 m in östlicher und 10 m in nördlicher Richtung.

a) Führen Sie ein geeignetes Koordinatensystem ein und bestimmen Sie darin die Koordinaten der wesentlichen Punkte:

Absprungstelle

Mittelpunkt des Podest

Landepunkt

b) Welche Strecke legt der Artist im Flug zurück?

c) Wie lange dauert der Flug?

d) Wie groß ist die Geschwindigkeit des Fallschirmspringers?

Lösung 5

Da sowohl Start- als auch Landepunkt auf einer Ebene liegen, da bspw. Seitenwinde oder Lenkbewegungen vernachlässigt werden, genügt ein 2-dimensionales Koordinatensystem mit der x-Achse für die horizontale Strecke von Südwest nach Nordost und der y-Achse für die vertikale Höhenstrecke. Da die Absprungstelle an der Hausecke bekommt die x-Koordinate $x = 0$. Da der Artist auf und nicht neben dem Podest landen soll, kann für die Höhe des Podests die y-Koordinate $y = 0$ gewählt werden.

5a)

Die Absprungstelle liegt somit an dem Punkt $A(0|20)$, und der Mittelpunkt des Podestes entsprechend dem Satz des Pythagoras an dem Punkt $P(d|0)$ mit $d = \sqrt{11^2 + 10^2} = \sqrt{221}$.

Die Bewegungsgerade soll der Form $y = k \cdot x + A_y$ entsprechen, wobei sich die Steigung durch die zwei Geschwindigkeitskomponenten, nämlich der vertikalen Fallgeschwindigkeit $v_y = -2[\mathrm{m\,s^{-1}}]$ und der horizontalen Geschwindigkeit $v_x = \sqrt{2}[\mathrm{m\,s^{-1}}]$ zu $k = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-2}{\sqrt{2}}[\mathrm{m\,s^{-1}}]$ ergibt.

Der Landepunkt ist nun die Nullstelle der Geraden, sofern die Nullstelle im Intervall $x_0 \in [d-3; d+3]$ liegt.

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{v_y}{v_x} \cdot x + A_y \\
\Rightarrow \quad 0 &= \frac{-2}{\sqrt{2}} \cdot x_0 + 20 \\
\Leftrightarrow \quad x_0 &= -20 \cdot \frac{\sqrt{2}}{-2} \\
\Leftrightarrow \quad x_0 &= 10\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

$$d - 3 < x_0 < d + 3 \ \checkmark$$

Der Landepunkt liegt an $L(10\sqrt{2}|0)$ und somit auf dem Podest.

5b)

Der Artist legt eine Strecke von $\sqrt{20^2 + (10\sqrt{2})^2} = \sqrt{400 + 200} = 10\sqrt{6}$ also rund 24,495 m im Flug zurück.

5c)

Bei einer als konstant angenommenen Geschwindigkeit von $v = \sqrt{-2^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{6}[\mathrm{m\,s^{-1}}]$ ist eine Strecke von $s = 10\sqrt{6}[\mathrm{m}]$ mit $s = v \cdot t \Leftrightarrow t = \frac{s}{v}$ nach $t = 10[\mathrm{s}]$ zurückgelegt.

5d)

Die Gesamtgeschwindigkeit des Artisten beträgt zwischen Start- und Landepunkt $v = \sqrt{6}[\mathrm{m\,s^{-1}}]$.

Aufgabe 6

Bestimmen Sie den Cosinus des Winkels zwischen den Vektoren

a) $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $a = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge b = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

Lösung 6

6a)

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{\langle a,b \rangle}{|a| \cdot |b|} \\ &= \frac{2 \cdot 4 + 1 \cdot 3}{\sqrt{2^2+1^2} \cdot \sqrt{4^2+3^2}} \\ &= \frac{11}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{25}} \\ &= \frac{11}{5 \cdot \sqrt{5}} \end{aligned}$$

6b)

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{\langle a,b \rangle}{|a| \cdot |b|} \\ &= \frac{1 \cdot (-4) + (-3) \cdot 2 + 2 \cdot 6}{\sqrt{1^2+(-3)^2+2^2} \cdot \sqrt{(-4)^2+2^2+6^2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{56}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{56}} \\ &= \frac{1}{14} \end{aligned}$$

Aufgabe 7

Prüfen Sie nach, ob die folgenden Punkte Eckpunkte eines gleichschenkligen und rechtwinkligen Dreieck sein können, d.h. ob 2 der Verbindungslinien gleich lang sind und einen rechten Winkel bilden.

$$P_1 = \left(1 \middle| 1+\sqrt{3}\right),\ P_2 = \left(2+\sqrt{3} \middle| 2\right),\ P_3 = \left(3 \middle| 1-\sqrt{3}\right)$$

Lösung 7

Man betrachtet die Differenz der Ortsvektoren zu den gegebenen Punkten $\overrightarrow{OP_i}$ um den Abstand der Punkte zueinander $\left|\overrightarrow{P_iP_j}\right|$ und somit die Länge der Seiten des Dreiecks zu ermitteln.

$$\overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{3} \end{pmatrix},\ \overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{OP_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1-\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{P_1P_2} &= \overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_2} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1-2-\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3}-2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1-\sqrt{3} \\ -1+\sqrt{3} \end{pmatrix} \\
\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| &= \sqrt{\left(-1-\sqrt{3}\right)^2 + \left(-1+\sqrt{3}\right)^2} \\
&= \sqrt{8} \\
&= 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{P_2P_3} &= \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_3} \\
&= \begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1-\sqrt{3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2+\sqrt{3}-3 \\ 2-1+\sqrt{3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sqrt{3}-1 \\ \sqrt{3}+1 \end{pmatrix} \\
\left|\overrightarrow{P_2P_3}\right| &= \sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2 + \left(\sqrt{3}+1\right)^2} \\
&= \sqrt{8} \\
&= 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Somit ist gezeigt, dass der Abstand $\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \left|\overrightarrow{P_2P_3}\right|$ ist und es sich um die Eckpunkte eines gleichschenkligen Dreiecks handelt. Dabei sind die Vektoren $\overrightarrow{P_1P_2}$ und $\overrightarrow{P_2P_3}$ die Schenkel und die Verbindungslinie $\overrightarrow{P_1P_3}$ die Basis des Dreiecks.
Da die Winkel an den Punkten P_1 und P_3, welche gegenüber der Schenkel liegen, gleich groß sein müssen, ist der Winkel β am Punkt P_2 gegenüber der Basis des Dreiecks zu untersuchen.

$$\begin{aligned}
\cos(\beta) &= \frac{\langle\overrightarrow{P_1P_2},\overrightarrow{P_2P_3}\rangle}{|\overrightarrow{P_1P_2}|\cdot|\overrightarrow{P_2P_3}|} \\
&= \frac{(-1-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{3}-1)+(-1+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{8}} \\
&= \frac{(-\sqrt{3}+1-3+\sqrt{3})+(-\sqrt{3}-1+3+\sqrt{3})}{8} \\
&= \frac{(-2)+2}{8} \\
&= 0 \\
\Leftrightarrow \qquad \beta &= \arccos(0) \\
\Leftrightarrow \qquad \beta &= \frac{\pi}{2} \\
&\Rightarrow \overrightarrow{P_1P_2} \perp \overrightarrow{P_2P_3}
\end{aligned}$$

Dies hätte sich auch einfacher mit der Definition 2.22 zeigen lassen. Es gilt nämlich $a \perp b$ genau dann wenn $\langle a, b\rangle = 0$ ist.

$$\langle\overrightarrow{P_1P_2},\overrightarrow{P_2P_3}\rangle = \left(-1-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)+\left(-1+\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+1\right) = 0 \checkmark$$

Verbindet man die gegebenen Punkte so erhält man ein rechtwinkliges, gleichschenkliges Dreieck.

Aufgabe 8

Gegeben sind 2 Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie den Vektor p als Projektion von b auf a und dann den Vektor q, die Projektion von p auf b. Berechnen Sie daraus

$$\frac{||q||}{||p||}$$

und vereinfachen Sie das Ergebnis so, dass darin nur noch die Vektoren a und b vorkommen.

Lösung 8

Die orthogonale Projektion von b in Richtung a ergibt sich aus

$$p = \frac{\langle b, a\rangle}{\langle a, a\rangle} \cdot a$$

und die orthogonale Projektion von p in Richtung b aus

$$q = \frac{\langle p, b\rangle}{\langle b, b\rangle} \cdot b$$

Die Länge der orthogonalen Projektionen p und q ist deren euklidische Norm nach der Definition 2.27, mit

$$\|p\| = \frac{|\langle b, a\rangle|}{\|a\|}$$

und

$$\|q\| = \frac{|\langle p, b\rangle|}{\|b\|}.$$

woraus für $\frac{\|q\|}{\|p\|}$ folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{\|q\|}{\|p\|} &= \frac{|\langle p,b\rangle|}{\|b\|} \cdot \frac{\|a\|}{|\langle b,a\rangle|} \\
&= \frac{|\langle p,b\rangle|}{|\langle b,a\rangle|} \cdot \frac{\|a\|}{\|b\|} && \Big| \text{ mit } p = \frac{\langle b,a\rangle}{\langle a,a\rangle} \cdot a \\
&= \frac{\left|\langle \frac{\langle b,a\rangle}{\langle a,a\rangle} \cdot a, b\rangle\right|}{|\langle b,a\rangle|} \cdot \frac{\|a\|}{\|b\|} \\
&= \frac{\left|\frac{\langle b,a\rangle}{\langle a,a\rangle} \cdot \langle a,b\rangle\right|}{|\langle b,a\rangle|} \cdot \frac{\|a\|}{\|b\|} && \Big| \text{ Kürzen} \\
&= \left|\frac{\langle b,a\rangle}{\langle a,a\rangle}\right| \cdot \frac{\|a\|}{\|b\|}
\end{aligned}$$