Aufgabe 1

Bestimmen Sie mit Hilfe des Differentialquotienten die Tangentensteigung an der Stelle $x_0 = 3$ von folgenden Funktionen:

a) $f(x) = 2x^3 + x - 1$ b) $f(x) = \frac{2}{3x^3}$ c) $f(x) = \sqrt{2x+3}$

Lösung 1

Der Differentialquotient oder auch die Ableitung von f an der Stelle x_0 ist:

$$\lim_{x \to x_0} \Delta(x) = f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Entsprechend gilt im Folgenden:

Lösung 1a

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \Delta(x) &\overset{\text{def}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{\left(2(x_0+h)^3+x_0+h-1\right)-\left(2x_0^3+x_0-1\right)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2(x_0+h)^3+h-2x_0^3}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2x_0^3+6x_0^2h+6x_0h^2+2h^3+h-2x_0^3}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h\cdot\left(6x_0^2+6x_0h+2h^2+1\right)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} 6x_0^2 + 6x_0h + 2h^2 + 1 \\
&= 6x_0^2 + 1 \\
&\overset{x_0 = 3}{=} 6 \cdot 9 + 1 \\
&= 55
\end{aligned}$$

Lösung 1b

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \Delta(x) &\overset{\text{def}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2}{3(x_0+h)^3} - \frac{2}{3(x_0)^3}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{6\cdot {x_0}^3 - \ 6\cdot(x_0+h)^3}{9\cdot(x_0+h)^3\cdot(x_0)^3}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{6\cdot {x_0}^3 - \ 6\cdot\left(x_0^3+3x_0^2h+3x_0h^2+h^3\right)}{9\cdot\left(x_0^3+3x_0^2h+3x_0h^2+h^3\right)\cdot {x_0}^3} \cdot \frac{1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h\cdot\left(-18x_0^2-18x_0h^1-6\cdot h^2\right)}{\left(9x_0^3+27x_0^2h+27x_0h^2+9h^3\right)\cdot {x_0}^3\cdot h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-18x_0^2-18x_0h-6\cdot h^2}{\left(9x_0^3+27x_0^2h+27x_0h^2+9h^3\right)\cdot {x_0}^3} \\
&= \frac{-18x_0^2-\lim\limits_{h\to 0}\left(18x_0h-6\cdot h^2\right)}{9x_0^6+\lim\limits_{h\to 0}\left(27x_0^5h+27x_0^4h^2+9h^3{x_0}^3\right)} \\
&= \frac{-18x_0^2}{9x_0^6} \\
&= -\frac{2}{x_0^4} \\
&\overset{x_0=\ 3}{=} -\frac{2}{3^4} \\
&= -\frac{2}{81}
\end{aligned}
$$

Lösung 1c

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0}\Delta(x) &\overset{\text{def}}{=} \lim_{h\to 0}\tfrac{\sqrt{2(x_0+h)+3}-\sqrt{2x_0+3}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\tfrac{\sqrt{2x_0+2h+3}-\sqrt{2x_0+3}}{h} \\
&\overset{x_0=3}{=} \lim_{h\to 0}\tfrac{\sqrt{6+2h+3}-\sqrt{6+3}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\tfrac{\sqrt{9+2h}-\sqrt{9}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\tfrac{\left(\sqrt{9+2h}-3\right)\cdot\left(\sqrt{9+2h}+3\right)}{h\cdot\left(\sqrt{9+2h}+3\right)} \\
&= \lim_{h\to 0}\tfrac{9+2h-9}{h\cdot\left(\sqrt{9+2h}+3\right)} \\
&= \lim_{h\to 0}\tfrac{2}{\sqrt{9+2h}+3} \\
&= \tfrac{2}{\sqrt{9}+3} \\
&= \tfrac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten die Ableitung der folgenden Funktionen an einem Punkt x_0.

a) $j(x) = 3x$ b) $k(x) = x^2 + 5$ c) $l(x) = x^3 + 1$

Lösung 2

Der Differenzenquotient von f in x_0 ist definiert als

$$\Delta(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Lösung 2a

$$
\begin{aligned}
\Delta(x) &\overset{\text{def}}{=} \tfrac{3x-3x_0}{x-x_0} \\
&= \tfrac{3\cdot(x-x_0)}{x-x_0} \\
&= 3
\end{aligned}
$$

Lösung 2b

$$\begin{aligned}\Delta(x) &\overset{\text{def}}{=} \tfrac{x^2+5-\left(x_0^2+5\right)}{x-x_0} \\ &= \tfrac{x^2-x_0^2}{x-x_0} \\ &= \tfrac{(x+x_0)\cdot(x-x_0)}{x-x_0} \\ &= x+x_0\end{aligned}$$

Lösung 2c

$$\begin{aligned}\Delta(x) &\overset{\text{def}}{=} \tfrac{x^3+1-\left(x_0^3+1\right)}{x-x_0} \\ &= \tfrac{x^3-x_0^3}{x-x_0} \\ &= \tfrac{\left(x^2+x\cdot x_0+x_0^2\right)\cdot(x-x_0)}{x-x_0} \\ &= x^2+x\cdot x_0+x_0^2\end{aligned}$$

Aufgabe 3

a) Bestimmen Sie die Tangentengleichung der Kurve $f(x) = x^3$ an der Stelle $x = 2$.
b) Bestimmen Sie die Gerade, welche eine Tangente an der folgenden Funktion ist:

$$f(x) = x^2 \;\text{ und }\; g(x) = x^2 - 2x$$

Lösung 3

Aufgabe 4

Differenzieren Sie:

a) $f(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

b) $f(x) = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}$

c) $f(x) = x^{\cos(x)}$

d) $f(x) = \sqrt{x \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt{x}}}$

e) $f(x) = x^{xa}$ für $a > 0$

f) $f(x) = x^{ax}$ für $a > 0$

g) $f(x) = \cos\left(\ln\left(\tan\left(\sqrt{1+x^2}\right)\right)\right)$

h) $f(x) = x^2 \cdot e^{\frac{x}{x+1}}$

Lösung 4

Aufgabe 5

Gegeben sei die Funktion

$$f : [0;1] \to \mathbb{R},\ f(x) = 2 \cdot \ln\left(x^3 + \sqrt{2 - x^2}\right)$$

Zeigen Sie durch Anwendung des Mittelwertsatzes: $\exists y \in]0;1[$ mit $f'(y) = \ln(2)$

Lösung 5

Mittelwertsatz:
Es sei f stetig auf $[a, b]$ und f differenzierbar auf (a, b)

$$\Rightarrow \exists\ \epsilon \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\epsilon).$$

$$\begin{aligned}
\exists\ y \in (0;1)\ :\ \tfrac{f(1)-f(0)}{1-0} &= \tfrac{2\cdot\ln\left(1^3+\sqrt{2-1^2}\right)-2\cdot\ln\left(0^3+\sqrt{2-0^2}\right)}{1-0} \\
&= 2 \cdot \ln\left(1+\sqrt{1}\right) - 2 \cdot \ln\left(\sqrt{2}\right) \\
&= 2 \cdot \ln\left(\tfrac{1+\sqrt{1}}{\sqrt{2}}\right) \\
&= 2 \cdot \ln\left(\sqrt{2}\right) \\
&= \ln(2)
\end{aligned}$$