Aufgabe 8

Folgende Vektoren spannen einen Unterraum U des $\mathbb{R}^4$ auf:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

a) Bestimmen Sie aus V eine Orthonormalbasis von U, falls dies möglich ist.

b) Welche Dimension hat das orthogonale Komplement $U^\perp$?

Lösung 8a

Orthogonalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt.

$$\begin{aligned} w_1 &:= \frac{v_1}{\|v_1\|} \\ r_{k+1} &:= v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} < v_{k+1}, w_i > w_i \\ w_{k+1} &= \frac{r_{k+1}}{\|r_{k+1}\|} \end{aligned}$$

Sei V ein unitärer Vektorraum und die Vektoren $v_1, \dots, v_m$ linear unabhängig, dann bilden $w_1, \dots, w_m$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{L}(v_1, \dots, v_m)$.

$$
\begin{aligned}
w_1 &:= \tfrac{v_1}{\|v_1\|} \\
&= \tfrac{v_1}{3} \\
&= \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} \\
r_2 &:= v_2 - < v_2, w_1 > w_1 \\
&= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} - 6 \cdot \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
w_2 &= \tfrac{r_2}{\|r_2\|} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
r_3 &:= v_3 - (< v_3, w_1 > w_1 + < v_3, w_2 > w_2) \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \\ -4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \\
w_3 &= \tfrac{r_3}{\|r_3\|} \\
&= \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \right\}$$

Probe:
Lineare Unabhängigkeit:
Die Vektoren w_1, w_2 und w_3 sind linear unabhängig.
Normiertheit:
$\|w_1\| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = 1 \wedge \|w_2\| = 1 \wedge \|w_3\| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = 1$ ✓
Orthogonalität:
$< w_1, w_2 >= 0 \wedge < w_2, w_3 >= 0 \wedge < w_1, w_3 >= 0$ ✓
$\Rightarrow W$ ist eine Orthonormalbasis von U.

Lösung 8b

Nach Folgerung 3.145 gilt für einen endlich erzeugten unitären Vektorraum V und einem beliebigen Untervektorraum U

$$\dim(V) = \dim(U) + \dim\left(U^{\perp}\right).$$

Damit gilt auch $\dim\left(U^{\perp}\right) = \dim(V) - \dim(U)$, was bedeutet, dass $\dim\left(U^{\perp}\right) = 1$