Aufgabe 5

Bestimmen Sie die allgemeine Gleichung der Geraden durch folgende Punkte:

a) $P_1 = (2|3)$ $P_2 = (1|1)$
b) $A = (0|0)$ $B = (2|3)$
c) $R = (1|2)$ $S = (3|2)$

Geben Sie sie in einer parameterlosen Darstellung und einer Parameterdarstellung an.
Lösung 5
Für die Parameterform der Geradengleichung wird der erste Punkt A als *Aufpunkt* oder auch *Stützvektor* gewählt. Der Richtungsvektor $\vec{r}$ ergibt sich aus der Differenz der Ortsvektoren beider Punkte. Allgemein gilt für $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$G : X = A + \lambda \cdot \vec{r}$$

Für die Umrechnung in die parameterfreie Hauptform der Geradengleichung werden zunächst die Gleichungen für die beiden Koordinaten abgelesen. Danach wird die Gleichung für die x-Koordinate nach λ umgestellt und in die Gleichung für die y-Koordinate eingesetzt, sodass sich eine explizite Form der Geradengleichung mit k als der Steigung und b als dem Ordinatenabschnitt ergibt:

$$G : y = k \cdot x + b$$

Lösung 5a

$$G_a : X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \;\Big|\; \lambda \in \mathbb{R}$$

$$G_a : \; y = 2x - 1$$

Lösung 5b

$$G_b : X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \;\Big|\; \lambda \in \mathbb{R}$$

$$G_b : y = \frac{3}{2}x$$

Lösung 5c

$$G_c : X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \;\Big|\; \lambda \in \mathbb{R}$$

$$G_c : y = 2$$

Aufgabe 6

Berechnen Sie zu den folgenden Ebenengleichungen im $\mathbb{R}^3$ die jeweils anderen Darstellungsformen (Punkt-Richtungsform, Normalform, Hessesche Normalform).

$$\begin{array}{lll}
\text{a)} & E_1: & x = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \\
\text{b)} & E_2: & 2x_1 + x_2 = 7 \\
\text{c)} & E_3: & \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{2} = 1 \\
\text{d)} & E_4: & P = (1|2|3),\ Q = (1|3|2),\ R = (0|2|1) \\
\text{e)} & E_5: & \langle n, x\rangle = 4 \text{ mit } n = \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}
\end{array}$$

Lösung 6

Darstellungsformen der Ebene E im $\mathbb{R}^3$

$$\begin{array}{llll}
E_{P.-R.} & : & \vec{X} & = P + \lambda\cdot\vec{a} + \mu\cdot\vec{b} \\
E_{Norm.} & : & 0 & = \vec{n}\cdot(\vec{X} - P) \\
E_{Hess.} & : & 0 & = \vec{e_n}\cdot(\vec{X} - P)
\end{array}$$

mit den Richtungsvektoren $\vec{a}, \vec{b}$, dem Aufpunkt P, dem Normalvektor $\vec{n}$, dem Einheitsvektor des Normalvektors $\vec{e_n}$ und den freien Parametern λ, μ, sodass $\vec{X}$ alle Punkte der Ebene beschreibt.

Lösung 6a

Die Ebene E_1 ist in der Punkt-Richtungsform gegeben.

$$E_1: \quad x = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

Aus der Punkt-Richtungsform lässt sich der Normalvektor bestimmen, in dem das Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren gebildet wird.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\2\end{pmatrix}$$

Die Normalvektorform lautet nun

$$E_1: \quad 0 = \begin{pmatrix}-2\\-2\\2\end{pmatrix}\cdot\left(\vec{X} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right).$$

oder als Skalarprodukt geschrieben, mit dem Abstand vom Ursprung $d = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

$$E_1 : \quad \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{X} \right\rangle = \sqrt{14}$$

Die Hessesche Normalform der Ebene ist die Normalvektorform, jedoch mit dem Einheitsvektor $\overrightarrow{e_n}$ des Normalenvektors statt demselbigen.
Der Einheitsvektor lässt sich bestimmen, indem man einen Vektor durch seine Länge teilt.

$$\begin{aligned}
\vec{e} &= \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \\
\vec{e} &= \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} : \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (2)^2} \\
&= \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} : \sqrt{12} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Die Hessesche Normalform der Ebene ist also

$$E_1 : \quad 0 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{X} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Lösung 6d

Die Ebene E_4 ist durch die Punkte P, Q und R bestimmt.

$$E_4 : \quad P = (1|2|3), \; Q = (1|3|2), \; R = (0|2|1)$$

Sei $\vec{p}$ der Stützvektor zu dem Aufpunkt P und die Richtungsvektoren $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{PR}$, so gilt für die Punkt-Richtungsform

$$E_4 : \quad \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Nach dem in **6a** beschriebenen Verfahren bestimmen wir

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\\ \vec{e} &= \tfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \tfrac{\vec{n}}{\sqrt{6}}\\ d &= \sqrt{14}\end{aligned}$$

sodass wir für

$$\begin{aligned}E4_{P.-R.} \quad &: \quad \vec{X} &&= P + \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}\\ & &&= \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}\\ E4_{Norm.} \quad &: \quad 0 &&= \vec{n} \cdot (\vec{X} - P)\\ & &&= \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \left(\vec{X} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)\\ E4_{Hess.} \quad &: \quad 0 &&= \overrightarrow{e_n} \cdot (\vec{X} - P)\\ & &&= \tfrac{\vec{n}}{\sqrt{6}} \cdot \left(\vec{X} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)\end{aligned}$$

Lösung 6e

$$E_5 : \quad \langle n, x \rangle = 4 \text{ mit } n = \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$$

[Fehlt]

Aufgabe 7

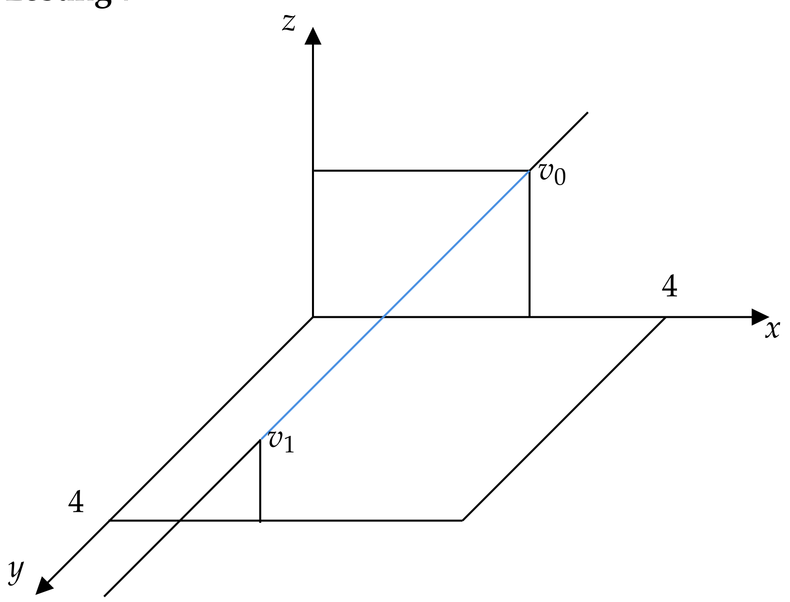
Der 10km hohe Luftraum über „Quadrat-Stadt“, einer ebenen Stadt mit quadratischer Grundfläche von 4km Seitenlänge, soll nicht überflogen werden. Es nähert sich ein Flugobjekt entlang einer Geraden.
Berechnen Sie die Länge der Strecke, die es in der Zone zurücklegt. Bezogen auf das kartesische Koordinatensystem (in Einheiten von km), dessen Ursprung in einer Ecke der Stadt liegt und deren Grenzen entlang der positiven x- bzw. y-Koordinatenachse verlaufen, nährt sich das Objekt entlang der Geraden

$$g : x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 17,5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -0,75 \end{pmatrix}.$$

Machen Sie zuerst eine Skizze. Berechnen Sie sodann den Eintrittspunkt, der in der (xz)-Ebene liegt. Wo liegt der Austrittspunkt? Wie groß ist schließlich die Länge der Strecke?

Lösung 7

Lösung 7



Sei der Eintrittspunkt in der x-z-Ebene v_0 mit

$$\overrightarrow{v_0} : \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 17,5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -0,75 \end{pmatrix}$$

und $\lambda = 10$, so ist

$$\overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Sei der Austrittspunkt v_1 mit

$$\overrightarrow{v_0}: \begin{pmatrix} x \\ 4 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 17,5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -0,75 \end{pmatrix}$$

und $\lambda = 14$, so ist

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Die Länge der Strecke zwischen den beiden Vektoren ist $\left|\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_0}\right| = 5.$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0^2 + 4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Sei der Eintrittspunkt in der x-z-Ebene v_0 mit

$$\overrightarrow{v_0}: \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 17,5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -0,75 \end{pmatrix}$$

und $\lambda = 10$, so ist

$$\overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Sei der Austrittspunkt v_1 mit

$$\overrightarrow{v_0}: \begin{pmatrix} x \\ 4 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 17,5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -0,75 \end{pmatrix}$$

und $\lambda = 14$, so ist

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Die Länge der Strecke zwischen den beiden Vektoren ist $\left|\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_0}\right| = 5$.

$$\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2 + 4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Aufgabe 8

Ein Gebäude in Form einer Pyramide hat die Eckpunkte $O = (0|0|0)$, $A = (6|8|0)$, $B = (0|8|0)$ und die Spitze $S = (2|4|8)$. Von der Ecke B verläuft zum Punkt $P = (4|6|4)$ ein Stahlträger.
a) Zeigen Sie, dass P in der Ebene E_{OAS} liegt, die die Pyramidenseite OAS enthält.
b) Überprüfen Sie, ob der Stahlträger senkrecht auf die Ebene E_{OAS} trifft.

Lösung 8a

Die Ebene E_{OAS} kann mit den Richtungsvektoren $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OS}$ mit der Gleichung

$$E_{OAS}: \quad \vec{X} = \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

beschrieben werden.
Sei $\vec{p}$ der Ortsvektor zum Punkt P, so gilt für $\lambda = \dfrac{1}{2}$ und $\mu = \dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Lösung 8b

Der Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E_{OAS} ist

$$\begin{aligned} \overrightarrow{n_E} &= \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 64 \\ -48 \\ 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der Stahlträger trifft senkrecht auf die Ebene, wenn $\langle \overrightarrow{n_E}, \vec{p} \rangle = 0$.

$$\left\langle \begin{pmatrix} 64 \\ -48 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \;\; \checkmark$$