

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Länge der Strecke zwischen den Punkten $A(-3|2)$ und $B(2|4)$ mithilfe der Integration.

Lösung 1

Es soll die Länge einer Kurve $L_a^b(f)$ berechnet werden, welche als Geradengleichung der Form $f(x) = m \cdot x + b$ entsprechen soll und durch die Punkte A und B gehen soll. Dazu wird zunächst die Geradengleichung bestimmt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4-2}{2+3} \cdot x + b \\ &= \frac{2}{5} \cdot x + b \end{aligned}$$

Um den Punkt B zu schneiden muss gelten $f(2) = 4 \Leftrightarrow \frac{2 \cdot 2}{5} + b = 4 \Leftrightarrow b = \frac{16}{5}$. Somit lautet die Geradengleichung $f(x) = \frac{2}{5} \cdot x + \frac{16}{5}$.

Die Formel zur Berechnung der Länge einer Kurve lautet:

$$L_a^b(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Mit $f'(x) = \frac{2}{5}$ bedeutet dies im Intervall $x \in [-3; 2]$:

$$\begin{aligned} L_{-3}^2(f) &= \int_{-3}^2 \sqrt{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} dx \\ &= \int_{-3}^2 \sqrt{\frac{29}{25}} dx \\ &= \left[\frac{\sqrt{29}}{5} \cdot x \right]_{-3}^2 \\ &= \frac{\sqrt{29}}{5} \cdot 5 \\ &= \sqrt{29} \end{aligned}$$

Bemerkung / Lustige Kuriosität:

Die KI ChatGPT von OpenAI hat für die Aufgabe ebenfalls eine richtige Lösung ermitteln können, welche technisch gesehen ebenfalls Integration nutzt.

Hier ist die Ausgabe von ChatGPT:

Die Länge einer Strecke zwischen zwei Punkten kann mit Hilfe der Integration berechnet werden, indem man die Differenzen der x- und y-Koordinaten der beiden Punkte integriert. In diesem Fall haben wir die Differenzen $\Delta x = 5$ und $\Delta y = 2$, also lautet die Länge der Strecke $\int_0^1 \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} dx = \int_0^1 \sqrt{5^2 + 2^2} dx = \int_0^1 \sqrt{29} dx = \boxed{\sqrt{29}}$.