# Aufgabe 1

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^3+\sin(n)+1}$

b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-3}{n^3+\sin(n)+1}$

## Lösung 1a

Untersuchung mit Majorantenkriterium:
Sei fast immer $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq c_n$ und konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, so konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Dabei ist $c_n$ eine *konvergente Majorante.*
Die Reihe mit $a_n = \frac{n+2}{n^3+\sin(n)+1}$ konvergiert nach dem Majorantenkriterium, da wir wie folgt nach oben abschätzen können:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n+2}{n^3+\sin(n)+1} \\ &\leq \frac{n+2}{n^3-1+1} \\ &= \frac{n+2}{n^3} \\ &= \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} \\ &=: c_n \end{aligned}$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ für $a > 1$ bekanntermaßen konvergent ist, ist $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ ebenfalls konvergent und entsprechend muss auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent sein.

## Lösung 1b

Untersuchung mit Minorantenkriterium:
Sei fast immer $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq c_n \leq a_n$ und divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, so divergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Dabei ist $c_n$ eine *divergente Minorante*.
Als bekanntermaßen divergente Minorante verwenden wir die harmonische Reihe und

zeigen, dass $\frac{n^2-3}{n^3+\sin(n)+1} \geq \frac{1}{n}$ gilt:

$$\begin{aligned}
& \tfrac{n^2-3}{n^3+\sin(n)+1} \geq \tfrac{1}{n} \\
\Leftrightarrow\ & \tfrac{n^2}{n^3+\sin(n)+1} \geq \tfrac{1}{n} \\
\Leftrightarrow\ & \qquad\qquad \tfrac{n^2}{n^3} \geq \tfrac{1}{n} \\
\Leftrightarrow\ & \qquad\qquad \tfrac{1}{n} \geq \tfrac{1}{n} \checkmark
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} \tfrac{n^2-3}{n^3+\sin(n)+1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{n^2-3}{n^3+\sin(n)+1} - \tfrac{1-3}{1+\sin(1)+1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{n^2-3}{n^3+\sin(n)+1} + \tfrac{2}{2+\sin(1)} \\
&\geq \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n} \\
&= \infty
\end{aligned}$$

und somit die Reihe divergiert.