Aufgabe 6

Hinweis: Aufgabentext zur besseren Verständlichkeit abgeändert.

Eine Luke ist mit einer Platte verschlossen, welche mit zwei Scharniere an den Punkten $S = (0|0|0)$ und $T = (0|4|0)$ montiert ist. Die Platte hat eine Aufhängung, welche sich im geschlossenen Zustand am Punkt $A = (-3|2|0)$ befindet und im geöffneten Zustand im Punkt $B = (\frac{-3}{\sqrt{2}}|2|\frac{3}{\sqrt{2}})$.

(a) Zeigen Sie, dass die Platte beim Öffnen um $45°$ gedreht wird.

(b) Wie ist der Abstand zwischen dem Aufhängungspunkt im geschlossenen Zustand A und einem weiteren Punkt $F = (3|-1|6)$, welcher als Befestigung dienen soll?

(c) Welcher Punkt H auf der Strecke von F nach $G = (3|8|3)$, hat den geringsten Abstand zum Aufhängungspunkt?

Lösung 6

Zur Veranschaulichung auf GeoGebra:
https://www.geogebra.org/3d/wafqm5em

Lösung 6a

Für den Winkel φ zwischen den Ebenen $E_{STA} \measuredangle E_{STB}$ gilt

$$\cos\varphi = \frac{\langle n_1, n_2\rangle}{|n_1| \cdot |n_2|}$$

mit n_1, n_2 als den Normalen der Ebenen.

$$
\begin{aligned}
E_{STA} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
E_{STB} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3/\sqrt{2} \\ 2 \\ 3/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
n_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \\
n_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3/\sqrt{2} \\ 2 \\ 3/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 12/\sqrt{2} \\ 0 \\ 12/\sqrt{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos\varphi &= \frac{\langle n_1, n_2 \rangle}{|n_1| \cdot |n_2|} \\
&= \frac{12 \cdot \frac{12}{\sqrt{2}}}{\sqrt{12^2} \cdot \sqrt{\frac{12^2}{2} + \frac{12^2}{2}}} \\
&= \frac{12 \cdot \frac{12}{\sqrt{2}}}{12^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\Leftrightarrow \qquad \varphi &= \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

Der Winkel zwischen den Ebenen beträgt im Bogenmaß $\frac{1}{4}\pi$ oder im Gradmaß 45°.

Lösung 6b

Die Länge der Strecke zwsichen den Punkten A und F ist gleich dem Betrag des Abstandsvektors $\overrightarrow{AF}$ ihrer Ortsvektoren. Daher gilt:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF} &= \begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\-1\\6\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-6\\3\\-6\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AF}| &= \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + (-6)^2}\\ &= \sqrt{9 + 2 \cdot 36}\\ &= \sqrt{81}\\ &= 9\end{aligned}$$

Das an dem Punkt F befestigte Seil muss mindestens eine Länge von 9 LE haben.

Lösung 6c

Für den Abstand d zwischen dem Punkt A und der Geraden g_{FG} gilt allgemein:

$$d = \frac{\left|(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{f}) \times \overrightarrow{FG}\right|}{\left|\overrightarrow{FG}\right|}$$

Die orthogonale Projektion von $\overrightarrow{FA}$ auf den Richtungsvektor der Graden $g : X = \overrightarrow{OF} + \lambda \cdot \overrightarrow{FG}$ ist die Strecke zwischen dem Aufpunkt F der Geraden und dem gesuchten Punkt H.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FG} &= \begin{pmatrix}3-3\\8-(-1)\\3-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\9\\-3\end{pmatrix}\\ \overrightarrow{FA} &= \begin{pmatrix}3-(-3)\\(-1)-2\\6-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-3\\6\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Die Formel der orthogonalen Projektion lautet:

$$p_b(a) = \frac{\langle a, b\rangle}{\langle b, b\rangle} \cdot b$$

Das bedeutet in diesem Fall:

$$\begin{aligned} p_{\overrightarrow{FG}}(\overrightarrow{FA}) &= \frac{\langle \overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FG}\rangle}{\langle \overrightarrow{FG}, \overrightarrow{FG}\rangle} \cdot \overrightarrow{FG} \\ &= \frac{-27-18}{90} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der Punkt H befindet sich nun an der Stelle $H = \overrightarrow{FA} - p_{\overrightarrow{FG}}(\overrightarrow{FA}) + A$:

$$H = \overrightarrow{FA} - p_{\overrightarrow{FG}}(\overrightarrow{FA}) + A = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 9/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7/2 \\ 9/2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7

Bildet $\mathbb{N}_0$ mit der Verknüpfung

$$a \circ b = |a - b|$$

eine abelsche Gruppe?

Lösung 7

Es ist zu untersuchen, ob es sich bei $G = (\mathbb{N}_0, \circ)$ um eine abelsche Gruppe handelt. Für die Verknüpfung $\circ$ gilt nach Definition der Betragsfunktion:

$$a \circ b := |a - b| = \begin{cases} (a-b) & \text{für } a > b \\ 0 & \text{für } a = b \\ (a-b)\cdot(-1) & \text{für } b > a \end{cases}$$

[G0] Abgeschlossenheit:
Beweis der Abgeschlossenheit durch vollständige Fallunterscheidung:

$$\begin{aligned} &\text{Fall 1:} && (a-b) \in \mathbb{N}_0 \text{ für } a > b \checkmark \\ &\text{Fall 2:} && 0 \in \mathbb{N}_0 \text{ für } a = b \checkmark \\ &\text{Fall 3:} && (-1)\cdot(a-b) \in \mathbb{N}_0 \text{ für } b > a \checkmark \end{aligned}$$

Daraus folgt $\forall a, b \in \mathbb{N}_0 : |a-b| \in \mathbb{N}_0$ und die Abgeschlossenheit ist gezeigt.

[G1] Assoziativität:
Es ist zu untersuchen, ob

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N}_0 : (a \circ b) \circ c \stackrel{?}{=} a \circ (b \circ c)$$

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N}_0 : ||a-b|-c| \stackrel{?}{=} |a-|b-c||$$

Beweis durch Gegenbeispiel:
Es sei $a = 3$, $b = 2$ und $c = 1$, dann muss nach obiger Annahme gelten

$$\begin{aligned} & ||3-2|-1| = |3-|2-1|| \\ \Leftrightarrow \quad & |1-1| = |3-1| \\ \Leftrightarrow \quad & 0 = 2 \qquad \lightning \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass es sich bei dem Tuppel $(\mathbb{N}_0, \circ)$ nicht um eine Gruppe und damit auch nicht um eine abelsche Gruppe handelt.

Aufgabe 8

Gegeben sind die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ \beta \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\alpha \\ -2 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} -1 \\ -\alpha \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Variablen α und β derart, dass der aus den 3 Vektoren gebildete Spat das Volumen 17 VE hat und das von den Vektoren a und b aufgespannte Parallelogramm den Flächeninhalt 19 FE hat.

Lösung 8

Das Spatprodukt dreier Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ ist nach Definition 2.90 und 2.91

$$\det(a, b, c) = \langle a, b \times c \rangle \in \mathbb{R}$$

Das Volumen V des durch die Spaltenvektoren aufgespannten Spats ist der Betrag der Determinante $V = |\det(a, b, c)|$.

Für ein gegebenes Volumen $V = 17VE$ soll also gelten:

$$\begin{aligned} 17VE &= \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 2\alpha & -\alpha \\ \beta & -2 & 1 \end{pmatrix} \right| \\ \Leftrightarrow \quad 17VE &= |2\alpha\beta - 1| \\ \overset{(2\alpha\beta-1)>0}{\Leftrightarrow} \quad 9VE &= \alpha\beta \\ \Leftrightarrow \quad \beta &= \frac{9VE}{\alpha} \end{aligned}$$

Für den Flächeninhalt des Parallelogramms A muss die Länge des Vektorprodukts bestimmt werden. Nach Folgerung 2.43 lässt sich der Flächeninhalt so berechnen:

$$A = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin\theta = \|a \times b\|$$

Für eine gegebene Fläche $A = 19FE$ soll also gelten:

$$
\begin{aligned}
A &= \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ \beta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2\alpha \\ -2 \end{pmatrix} \right\| \\
&= \left\| \begin{pmatrix} 1 - 2\alpha\beta \\ 2 \\ 2\alpha \end{pmatrix} \right\| \\
&= \sqrt{(1-2\alpha\beta)^2 + 4 + 4\alpha^2} \\
&= \sqrt{5 + 4\alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta + 4\alpha^2} \\
\overset{A=19FE}{\Leftrightarrow} \quad 19FE &= \sqrt{5 + 4\alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta + 4\alpha^2} \\
\overset{\beta=9VE/\alpha}{\Leftrightarrow} \quad 19FE &= \sqrt{5 + 4\alpha^2\left(\tfrac{9VE}{\alpha}\right)^2 - 4\alpha\left(\tfrac{9VE}{\alpha}\right) + 4\alpha^2} \\
\Leftrightarrow \quad 19FE &= \sqrt{5 + 4\cdot(9VE)^2 - 4\cdot(9VE) + 4\alpha^2} \\
\Leftrightarrow \quad 19^2VE &= 5 + 4\cdot(9VE)^2 - 4\cdot(9VE) + 4\alpha^2 \\
\Leftrightarrow \quad 4\alpha^2 &= 19^2VE - 5 - 4\cdot(9VE)^2 + 4\cdot(9VE) \\
\Leftrightarrow \quad \alpha^2 &= \tfrac{19^2VE}{4} - (9VE)^2 + (9VE) - \tfrac{5}{4} \\
\Leftrightarrow \quad \alpha^2 &= \tfrac{19^2VE}{4} + (9VE) - (9VE)^2 - \tfrac{5}{4} \\
\Leftrightarrow \quad \alpha^2 &= \left(\tfrac{397}{4}VE\right) - \left(81VE^2\right) - \tfrac{5}{4} \\
\Leftrightarrow \quad \alpha &= \sqrt{\left(\tfrac{397}{4}VE\right) - \left(81VE^2\right) - \tfrac{5}{4}} \\
\Leftrightarrow \quad \alpha &= \sqrt{17}
\end{aligned}
$$

Somit sind die Parameter $\alpha = \sqrt{17}$ und $\beta = \frac{9}{\sqrt{17}}$ eindeutig bestimmt.
Die Probe ergibt für das Volumen

$$
\begin{aligned}
17VE &= \left|\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 2\sqrt{17} & -\sqrt{17} \\ \frac{9}{\sqrt{17}} & -2 & 1 \end{pmatrix}\right| \\
&= \left|2\cdot\sqrt{17}\cdot\tfrac{9}{\sqrt{17}} - 1\right| \\
&= |18-1| \\
&= 17 \ \checkmark
\end{aligned}
$$

sowie für den Flächeninhalt

$$
\begin{aligned}
19FE &= \left\|\begin{pmatrix} 1-2\cdot\sqrt{17}\cdot\frac{9}{\sqrt{17}} \\ 2 \\ 2\cdot\sqrt{17} \end{pmatrix}\right\| \\
&= \left\|\begin{pmatrix} -17 \\ 2 \\ 2\cdot\sqrt{17} \end{pmatrix}\right\| \\
&= \sqrt{(-17)^2+2^2+2^2\cdot 17} \\
&= \sqrt{(-17)^2+4+4\cdot 17} \\
&= \sqrt{361} \\
&= 19 \ \checkmark
\end{aligned}
$$

Hinweis: Es reicht die Betrachtung des Falls $(2\alpha\beta - 1) > 0$*, da die Aufgabenstellung nach einer Lösung und nicht nach allen Lösungen fragt.*

Aufgabe 9

Zeigen Sie mithilfe der Determinanten, dass die folgenden 3 Ebenen keinen eindeutigen Schnittpunkt haben.

$$E_1 : x+z = 4 \qquad E_2 : 3x-2y+2z = 1 \qquad E_3 : 2y+z = 11$$

Lösung 9

Die Ebenen E_1,E_2 und E_3 haben genau dann keinen (eindeutigen) Schnittpunkt, wenn gilt

$$\det\left(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}, \overrightarrow{n_3}\right) = 0.$$

Die gegebenen Ebenengleichungen lassen sich als folgendes LGS schreiben:

$$(LGS) \left\{ \begin{array}{l} (E_1)\, 1 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z \ = 4 \\ \\ (E_2)\, 3 \cdot x - 2 \cdot y + 2 \cdot z \ = 1 \\ \\ (E_3)\, 0 \cdot x + 2 \cdot y + 1 \cdot z = 11 \end{array} \right\}$$

Für die Determinante gilt nun:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -2 + 6 - 4 = 0$$

Daraus folgt, dass die Ebenen keinen eindeutigen Schnittpunkt haben.