Aufgabe 5

Gegeben sind die folgenden Geraden in der Parmaeterdarstellung:

$$g_1 : x = 1 + t \qquad , y = 3 - 2 \cdot t$$
$$g_2 : x = 1/2 - 3/2 \cdot t \, , y = 1 - 4 \cdot t$$

Geben Sie die jeweiligen Normalform und Hesse-Normalform an. Gibt es einen Schnittpunkt?

Lösung 5

Punkt-Richtungsform:

$$g_1 : \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$
$$g_2 : \vec{X} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3/2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Normalform mit dem Normalenvektor $\overrightarrow{n_{g1}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ da $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$:

$$g_1 : 0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{X} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

Hesse-Normalform mit $|\vec{n}| = \sqrt{5}$:

$$g_1 : 0 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{X} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

Normalform mit dem Normalenvektor $\overrightarrow{n_{g2}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3/2 \end{pmatrix}$ da $\left\langle \begin{pmatrix} 3/2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3/2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$:

$$g_2 : 0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3/2 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{X} - \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Hesse-Normalform mit $|\vec{n}| = \sqrt{73/4}$:

$$g_2 : 0 = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 3/2 \end{pmatrix}}{\sqrt{73/4}} \cdot \left(\vec{X} - \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Die beiden Geraden schneiden sich in $\mathbb{R}^2$, wenn sie nicht parallel zueinander sind.
Beweis duch Widerspruch: Wir nehmen an $g_1 \parallel g_2$, dann $\exists\ t \in \mathbb{R}$ für das gilt

$$
\begin{aligned}
t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3/2 \\ -4 \end{pmatrix} \\
\text{mit } t = 2 : 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3/2 \\ -4 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3/2 \\ -4 \end{pmatrix} \\
1 &= 3/2 \ \lightning
\end{aligned}
$$

Da die Geraden nicht parallel sind, muss es einen Schnittpunkt geben.

Aufgabe 6

Untersuchen Sie, ob die folgenden Ebenen einen eindeutigen Schnittpunkt im $\mathbb{R}^3$ besitzen:
a)

$$
\begin{aligned}
E_1 : x &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \\
E_2 : x &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \\
E_3 : x &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
E_1 : x &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
E_2 : x &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \\
E_3 : x &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Lösung 6

Zunächst werden die Normalenvektoren der gegebenen Ebenen berechnet.
Ist das LGS der drei Ebenen eindeutig lösbar, so existiert ein eindeutiger Schnittpunkt der Ebenen.
Dies ist der Fall, wenn die Ebenen E_1 und E_2 nicht parallel liegen ($\overrightarrow{n_{E_1}} \times \overrightarrow{n_{E2}} \neq 0$) und deren Schnittgerade nicht parallel zu E_3 ist.

$$\left\langle \left(\overrightarrow{n_{E_1}} \times \overrightarrow{n_{E_2}}\right), \overrightarrow{n_{E_3}} \right\rangle \neq 0$$

Da dies auch die Definition der Determinante ist, gilt ebenso:

$$\det\left(\overrightarrow{n_{E_1}}, \overrightarrow{n_{E_2}}, \overrightarrow{n_{E_3}}\right) \neq 0$$

Lösung 6a

$$\overrightarrow{n_{E_1}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{n_{E_2}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -15 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{n_{E_3}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\det\left(\overrightarrow{n_{E_1}}, \overrightarrow{n_{E_2}}, \overrightarrow{n_{E_3}}\right) &= \det\begin{pmatrix} -4 & -3 & -1 \\ -4 & -15 & -3 \\ -4 & 9 & 1 \end{pmatrix} \\
&= (-4)(-15) + (-3)(-3)(-4) + (-1)(-4)\cdot 9 \\
&\quad -(-4)(-3)\cdot 9 - (-3)(-4) - (-1)(-15)(-4) \\
&= 60 - 36 + 36 - 108 - 12 + 60 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Es existiert **kein** Schnittpunkt in $\mathbb{R}^3$.

Lösung 6b

$$\overrightarrow{n_{E_1}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{n_{E_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{n_{E_3}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det\left(\overrightarrow{n_{E_1}}, \overrightarrow{n_{E_2}}, \overrightarrow{n_{E_3}}\right) &= \det \begin{pmatrix} -1 & 3 & 16 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 8 \end{pmatrix} \\ &= 3 \cdot 4 \cdot (-3) + (16 \cdot (-2) - (-1) \cdot 4 - 3 \cdot (-2) \cdot 8 \\ &= -36 - 32 + 4 + 48 \\ &= -16 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Es existiert **ein** eindeutiger Schnittpunkt in $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 7

Für welche Werte $t \in \mathbb{R}$ ist die Gerade

$$g : x = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ t \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R}$$

parallel zur Ebene

$$E: \ 2x - y + t \cdot z = 9, x, y, z \ \in \mathbb{R}$$

Lösung 7

Aufgabe 8

Gegeben sind die zwei Punkte $P = (1|2|3)$ und $Q = (-1|1|2)$ und die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Gleichungen der beiden Geraden g_1 bzw. g_2 durch den Punkt P in Richtung von a bzw. durch Q in Richtung von b.

(b) Sind die Geraden windschief (d.h. sind sie weder parallel noch haben sie einen Schnittpunkt)?

(c) Falls das der Fall ist, bestimmen Sie einen Vektor, der senkrecht auf beiden Geraden steht.

Lösung 8