

Aufgabe 6

Hinweis: Aufgabentext zur besseren Verständlichkeit abgeändert.

Eine Luke ist mit einer Platte verschlossen, welche mit zwei Scharnieren an den Punkten $S = (0|0|0)$ und $T = (0|4|0)$ montiert ist. Die Platte hat eine Aufhängung, welche sich im geschlossenen Zustand am Punkt $A = (-3|2|0)$ befindet und im geöffneten Zustand im Punkt $B = (\frac{-3}{\sqrt{2}}|2|\frac{3}{\sqrt{2}})$.

- (a) Zeigen Sie, dass die Platte beim Öffnen um 45° gedreht wird.
- (b) Wie ist der Abstand zwischen dem Aufhängungspunkt im geschlossenen Zustand A und einem weiteren Punkt $F = (3|-1|6)$, welcher als Befestigung dienen soll?
- (c) Welcher Punkt H auf der Strecke von F nach $G = (3|8|3)$, hat den geringsten Abstand zum Aufhängungspunkt?

Lösung 6

Lösung 6a

Für den Winkel φ zwischen den Ebenen $E_{STA} \angle E_{STB}$ gilt

$$\cos \varphi = \frac{\langle n_1, n_2 \rangle}{|n_1| \cdot |n_2|}$$

mit n_1, n_2 als den Normalen der Ebenen.

$$\begin{aligned}
 E_{STA} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 E_{STB} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3/\sqrt{2} \\ 2 \\ 3/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
 n_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \\
 n_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3/\sqrt{2} \\ 2 \\ 3/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 12/\sqrt{2} \\ 0 \\ 12/\sqrt{2} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cos \varphi &= \frac{\langle n_1, n_2 \rangle}{|n_1| \cdot |n_2|} \\
 &= \frac{12 \cdot \frac{12}{\sqrt{2}}}{\sqrt{12^2} \cdot \sqrt{\frac{12^2}{2} + \frac{12^2}{2}}} \\
 &= \frac{12 \cdot \frac{12}{\sqrt{2}}}{12^2} \\
 2.2 \quad &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 \Leftrightarrow \quad \varphi &= \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
 &= \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

Der Winkel zwischen den Ebenen beträgt im Bogenmaß $\frac{1}{4}\pi$ oder im Gradmaß 45.

Lösung 6b

Die Länge der Strecke zwischen den Punkten A und F ist gleich dem Betrag des Abstandsvektors \overrightarrow{AF} ihrer Ortsvektoren. Daher gilt:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF} &= \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AF}| &= \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + (-6)^2} \\ &= \sqrt{9 + 2 \cdot 36} \\ &= \sqrt{81} \\ &= 9\end{aligned}$$

Das an dem Punkt F befestigte Seil muss mindestens eine Länge von 9 LE haben.

Lösung 6c

Abstand vom Punkt A nach $f = \overrightarrow{FG}$

$$|\overrightarrow{Af}| = 5,8$$

Aufgabe 7

Bildet \mathbb{N}_0 mit der Verknüpfung

$$a \circ b = |a - b|$$

eine abelsche Gruppe?

Lösung 7

Es ist zu untersuchen, ob es sich bei $G = (\mathbb{N}_0, \circ)$ um eine abelsche Gruppe handelt. Für die Verknüpfung \circ gilt nach Definition der Betragsfunktion:

$$a \circ b := |a - b| = \begin{cases} (a - b) & \text{für } a > b \\ 0 & \text{für } a = b \\ (a - b) \cdot (-1) & \text{für } b > a \end{cases}$$

[G0] Abgeschlossenheit:

Beweis der Abgeschlossenheit durch vollständige Fallunterscheidung:

$$\text{Fall 1: } (a - b) \in \mathbb{N}_0 \text{ für } a > b \checkmark$$

$$\text{Fall 2: } 0 \in \mathbb{N}_0 \text{ für } a = b \checkmark$$

$$\text{Fall 3: } (-1) \cdot (a - b) \in \mathbb{N}_0 \text{ für } b > a \checkmark$$

Daraus folgt $\forall a, b \in \mathbb{N}_0 : |a - b| \in \mathbb{N}_0$ und die Abgeschlossenheit ist gezeigt.

[G1] Assoziativität:

Es ist zu untersuchen, ob

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N}_0 : (a \circ b) \circ c \stackrel{?}{=} a \circ (b \circ c)$$

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N}_0 : ||a - b| - c| \stackrel{?}{=} |a - |b - c||$$

Beweis durch Gegenbeispiel:

Es sei $a = 3, b = 2$ und $c = 1$, dann muss nach obiger Annahme gelten

$$||3 - 2| - 1| = |3 - |2 - 1||$$

$$\Leftrightarrow |1 - 1| = |3 - 1|$$

$$\Leftrightarrow 0 = 2 \quad \not\checkmark$$

Daraus folgt, dass es sich bei dem Tupel (\mathbb{N}_0, \circ) nicht um eine Gruppe und damit auch nicht um eine abelsche Gruppe handelt.

Aufgabe 8

Gegeben sind die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\alpha \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} -1 \\ -\alpha \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Variablen α und β derart, dass der aus den 3 Vektoren gebildete Spat das Volumen 17 VE hat und das von den Vektoren a und b aufgespannte Parallelogramm den Flächeninhalt 19 FE hat.

Lösung 8

Das Spatprodukt dreier Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ ist nach Definition 2.90 und 2.91

$$\det(a, b, c) = \langle a, b \times c \rangle \in \mathbb{R}$$

Das Volumen V des durch die Spaltenvektoren aufgespannten Spats ist der Betrag der Determinante $V = |\det(a, b, c)|$.

Für ein gegebenes Volumen $V = 17VE$ soll also gelten:

$$17VE = \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 2\alpha & -\alpha \\ \beta & -2 & 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$\Leftrightarrow 17VE = |2\alpha\beta - 1|$$

$$\stackrel{(2\alpha\beta-1)>0}{\Leftrightarrow} 9VE = \alpha\beta$$

$$\Leftrightarrow \beta = \frac{9VE}{\alpha}$$

Für den Flächeninhalt des Parallelogramms A muss die Länge des Vektorprodukts bestimmt werden. Nach Folgerung 2.43 lässt sich der Flächeninhalt so berechnen:

$$A = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin \theta = \|a \times b\|$$

Für eine gegebene Fläche $A = 19FE$ soll also gelten:

$$\begin{aligned} A &= \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ \beta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2\alpha \\ -2 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \left\| \begin{pmatrix} 1 - 2\alpha\beta \\ 2 \\ 2\alpha \end{pmatrix} \right\| \\ &= \sqrt{(1 - 2\alpha\beta)^2 + 4 + 4\alpha^2} \\ &= \sqrt{5 + 4\alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta + 4\alpha^2} \end{aligned}$$

$$\stackrel{A=19FE}{\Leftrightarrow} 19FE = \sqrt{5 + 4\alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta + 4\alpha^2}$$

$$\stackrel{\beta=9VE/\alpha}{\Leftrightarrow} 19FE = \sqrt{5 + 4\alpha^2\left(\frac{9VE}{\alpha}\right)^2 - 4\alpha\left(\frac{9VE}{\alpha}\right) + 4\alpha^2}$$

$$\Leftrightarrow 19FE = \sqrt{5 + 4 \cdot (9VE)^2 - 4 \cdot (9VE) + 4\alpha^2}$$

$$\Leftrightarrow 19^2VE = 5 + 4 \cdot (9VE)^2 - 4 \cdot (9VE) + 4\alpha^2$$

$$\Leftrightarrow 4\alpha^2 = 19^2VE - 5 - 4 \cdot (9VE)^2 + 4 \cdot (9VE)$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{19^2VE}{4} - (9VE)^2 + (9VE) - \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{19^2VE}{4} + (9VE) - (9VE)^2 - \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 = \left(\frac{397}{4}VE\right) - (81VE^2) - \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \sqrt{\left(\frac{397}{4}VE\right) - (81VE^2) - \frac{5}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \sqrt{17}$$

Somit sind die Parameter $\alpha = \sqrt{17}$ und $\beta = \frac{9}{\sqrt{17}}$ eindeutig bestimmt.
Die Probe ergibt für das Volumen

$$\begin{aligned} 17VE &= \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 2\sqrt{17} & -\sqrt{17} \\ \frac{9}{\sqrt{17}} & -2 & 1 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| 2 \cdot \sqrt{17} \cdot \frac{9}{\sqrt{17}} - 1 \right| \\ &= |18 - 1| \\ &= 17 \quad \checkmark \end{aligned}$$

sowie für den Flächeninhalt

$$\begin{aligned} 19FE &= \left\| \begin{pmatrix} 1 - 2 \cdot \sqrt{17} \cdot \frac{9}{\sqrt{17}} \\ 2 \\ 2 \cdot \sqrt{17} \end{pmatrix} \right\| \\ &= \left\| \begin{pmatrix} -17 \\ 2 \\ 2 \cdot \sqrt{17} \end{pmatrix} \right\| \\ &= \sqrt{(-17)^2 + 2^2 + 2^2 \cdot 17} \\ &= \sqrt{(-17)^2 + 4 + 4 \cdot 17} \\ &= \sqrt{361} \\ &= 19 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Hinweis: Es reicht die Betrachtung des Falls $(2\alpha\beta - 1) > 0$, da die Aufgabenstellung nach einer Lösung und nicht nach allen Lösungen fragt.

Aufgabe 9

Zeigen Sie mithilfe der Determinanten, dass die folgenden 3 Ebenen keinen eindeutigen Schnittpunkt haben.

$$E_1 : x + z = 4$$

$$E_2 : 3x - 2y + 2z = 1$$

$$E_3 : 2y + z = 11$$

Lösung 9

Die Ebenen E_1, E_2 und E_3 haben genau dann keinen (eindeutigen) Schnittpunkt, wenn gilt

$$\det(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3) = 0.$$

Die gegebenen Ebenengleichungen lassen sich als folgendes LGS schreiben:

$$(LGS) \left\{ \begin{array}{l} (E_1) 1 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z = 4 \\ (E_2) 3 \cdot x - 2 \cdot y + 2 \cdot z = 1 \\ (E_3) 0 \cdot x + 2 \cdot y + 1 \cdot z = 11 \end{array} \right\}$$

Für die Determinante gilt nun:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -2 + 6 - 4 = 0$$

Daraus folgt, dass die Ebenen keinen eindeutigen Schnittpunkt haben.