Aufgabe 1

Konvergieren oder divergieren die folgenden rekursiven Folgen ($n \in \mathbb{N}_o$)? Berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $a_{n+1} = \sqrt{4a_n - 3}$ mit $a_o = 3$ b) $a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} \cdot a_n$ mit $a_0 = 1$

Lösung 1a

Die Berechnung der ersten Folgenglieder lässt vermuten, dass die explizite Form der Folge als $a_n = 3$ geschrieben werden kann. Dies soll im Folgenden durch vollständige Induktion bewiesen werden:

Induktionsanfang:
Für $n_o = 0$ gilt $a_0 = 3$ ✓
Induktionsannahme:
Es gelte für ein festes, aber beliebiges $n \geq n_0,\ n \in \mathbb{N}_0$

$$a_n = 3.$$

Induktionsbehauptung:
Dann gilt für $n + 1$ auch

$$a_{n+1} = 3.$$

Beweis des Induktionsschritts:

$$a_{n+1} = \sqrt{4a_n - 3} \overset{IV}{=\!=} \sqrt{4 \cdot 3 - 3} = \sqrt{9} = 3 \checkmark$$

Damit ist gezeigt, dass die Aussage $a_n = 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist, sie also allgemeingültig ist.

Der Grenzwert der Folge ist

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} 3 = 3.$$

Die Folge a_n ist konstant und eine konstante Folge ist konvergent.

Lösung 1b

Für die ersten Folgenglieder ergibt sich

$$a_1 = \frac{2}{1} \cdot 1 = 2$$
$$a_2 = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3$$
$$a_3 = \frac{4}{3} \cdot 3 = 4$$

sodass sich vermuten lässt, dass die explizite Form der Folge als $a_n = n + 1$ behauptet werden kann. Dies soll im Folgenden durch vollständige Induktion bewiesen werden:

Induktionsanfang:
Für $n_o = 0$ gilt $a_0 = 0 + 1 = 1$ ✓
Induktionsannahme:
Es gelte für ein festes, aber beliebiges $n \geq n_0,\ n \in \mathbb{N}_0$

$$a_n = n + 1.$$

Induktionsbehauptung:
Dann gilt für $n + 1$ auch

$$a_{n+1} = (n + 1) + 1.$$

Beweis des Induktionsschritts:

$$a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} \cdot a_n \overset{IV}{\Longleftrightarrow} (n+1) + 1 = \frac{n+2}{n+1} \cdot (n+1) \Leftrightarrow\ (n+1) + 1 = n + 2\ ✓$$

Somit ist gezeigt, dass aus der Induktionsannahme stets die Induktionsbehauptung folgt und zwar für alle $n \in \mathbb{N}$.

Versucht man nun den Grenzwert der Folge zu mit der zuvor bewiesenen, expliziten Form zu bestimmen, so zeigt sich, dass die Folge keinen Grenzwert hat.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n + 1 = \infty$$

Die Folge a_n ist somit divergent.

Aufgabe 2

Untersuchen Sie mit Hilfe des Minoranten-/Majorantenkriteriums auf Konvergenz:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k+2}{k^2+5k-1}$ b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\cos(k)+\sin^2(k)}{3k^2}$

Lösung 2

<u>Majorantenkriterium:</u>

Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n : b_n \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ konvergent, dann gilt

$\forall n \geq n_0 : |a_n| \leq b_n \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent absolut

<u>Minorantenkriterium:</u>

Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n : b_n \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ divergent, dann gilt

$\forall n \geq n_0 : a_n \geq b_n \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.

2a)

Betrachen wir die gegebene Reihe mit dem Minorantenkriterium

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k+2}{k^2+5k-1} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k}{k^2+5k} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k}{k\cdot(k+5)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{(k+5)}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{(k+5)} = \sum_{k=6}^{\infty} \frac{3}{k} = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k}}_{\text{divergiert}\to\infty} - \underbrace{\sum_{k=1}^{5} \frac{3}{k}}_{\text{konvergiert}}$$

Somit ist gezeigt, dass die Folge $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ immer kleiner oder gleich der untersuchten Folge ist.

Da wir wissen, dass diese Folge gegen Unendlich divergiert und gezeigt haben, dass die untersuchte Folge immer größer ist, muss die untersuchte Folge auch gegen Unendlich divergieren.

2b)

Wir untersuchen die gegebene Reihe mit dem Majorantenkriterium auf Konvergenz:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\cos(k) + \sin^2(k)}{3k^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+1}{3k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{3k^2} = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}_{\text{konvergiert}}$$

Somit ist gezeigt, dass die Folge $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ immer größer oder gleich der untersuchten Folge ist.

Da bekannt ist, dass jene Folge gegen $\frac{\pi^2}{6}$ konvergiert und wir gezeigt haben, dass die untersuchte Folge immer kleiner ist, muss die untersuchte Folge auch konvergent sein.

Aufgabe 3

Untersuchen Sie die folgende Reihe mittels Verdichtungskriterium auf Konvergenz:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \cdot (\ln(k))^{1+\epsilon}} \text{ mit } \epsilon > 0$$

Lösung 3

Die Reihe divergiert mit dem Cauchy-Kondensationsprinzip, da

$$\sum_{k=2}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k \cdot \ln\left(2^k\right)^{1+\epsilon}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\epsilon} \cdot \ln(2)^{1+\epsilon}} = \frac{1}{\ln(2)^{1+\epsilon}} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\epsilon}} = \frac{1}{\ln(2)^{1+\epsilon}} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^{1+\epsilon}$$

Aufgabe 4 (optional)

Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}+\sqrt{k^2+k}-k\right)^k$$

Lösung 4

Untersuchung mittels Wurzelkriterium der Folge

$$a_k=\left(\frac{1}{4}+\sqrt{k^2+k}-k\right)^k$$

Wobei wir W als Kennzahl zur Beurteilung der Konvergenz der unendlichen Reihe bestimmen:

$$\begin{aligned}
W &= \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}\\
&= \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|\left(\tfrac{1}{4}+\sqrt{k^2+k}-k\right)^k\right|}\\
&= \lim_{k\to\infty}\left|\tfrac{1}{4}+\sqrt{k^2+k}-k\right|\\
&= \tfrac{1}{4}+\lim_{k\to\infty}\left|\sqrt{k^2+k}-k\right|\\
&= \tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}\\
&= \tfrac{3}{4}
\end{aligned}$$

$$W<1 \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{\infty}a_k \text{ konvergiert}$$

Aufgabe 5 (optional)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{3+(-1)^{k+1}}{2k}$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k^4+3k^2+1}}$