Aufgabe 1

Bestimmen Sie mit Hilfe des Differentialquotienten die Tangentensteigung an der Stelle $x_0 = 3$ von folgenden Funktionen:

a) $f(x) = 2x^3 + x - 1$ b) $f(x) = \dfrac{2}{3x^3}$ c) $f(x) = \sqrt{2x+3}$

Lösung 1

Der Differentialquotient oder auch die Ableitung von f an der Stelle x_0 ist:

$$\lim_{x \to x_0} \Delta(x) = f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Entsprechend gilt im Folgenden:

Lösung 1a

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \Delta(x) &\overset{\text{def}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{\left(2(x_0+h)^3+x_0+h-1\right)-\left(2x_0^3+x_0-1\right)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2(x_0+h)^3+h-2x_0^3}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2x_0^3+6x_0^2h+6x_0h^2+2h^3+h-2x_0^3}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h\cdot\left(6x_0^2+6x_0h+2h^2+1\right)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} 6x_0^2 + 6x_0h + 2h^2 + 1 \\
&= 6x_0^2 + 1 \\
&\overset{x_0 = 3}{=} 6 \cdot 9 + 1 \\
&= 55
\end{aligned}$$

Lösung 1b

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \Delta(x) &\overset{\text{def}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2}{3(x_0+h)^3} - \frac{2}{3(x_0)^3}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{6\cdot {x_0}^3 - \; 6\cdot(x_0+h)^3}{9\cdot(x_0+h)^3\cdot(x_0)^3}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{6\cdot {x_0}^3 - \; 6\cdot\left(x_0^3+3x_0^2h+3x_0h^2+h^3\right)}{9\cdot\left(x_0^3+3x_0^2h+3x_0h^2+h^3\right)\cdot {x_0}^3} \cdot \frac{1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h\cdot\left(-18x_0^2-18x_0h^1-6\cdot h^2\right)}{\left(9x_0^3+27x_0^2h+27x_0h^2+9h^3\right)\cdot {x_0}^3\cdot h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-18x_0^2-18x_0h-6\cdot h^2}{\left(9x_0^3+27x_0^2h+27x_0h^2+9h^3\right)\cdot {x_0}^3} \\
&= \frac{-18x_0^2-\lim\limits_{h\to 0}\left(18x_0h-6\cdot h^2\right)}{9x_0^6+\lim\limits_{h\to 0}\left(27x_0^5h+27x_0^4h^2+9h^3{x_0}^3\right)} \\
&= \frac{-18x_0^2}{9x_0^6} \\
&= -\frac{2}{x_0^4} \\
&\overset{x_0=3}{=} -\frac{2}{3^4} \\
&= -\frac{2}{81}
\end{aligned}
$$

Lösung 1c

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \Delta(x) &\overset{\text{def}}{=} \lim_{h\to 0} \tfrac{\sqrt{2(x_0+h)+3}-\sqrt{2x_0+3}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \tfrac{\sqrt{2x_0+2h+3}-\sqrt{2x_0+3}}{h} \\
&\overset{x_0=3}{=} \lim_{h\to 0} \tfrac{\sqrt{6+2h+3}-\sqrt{6+3}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \tfrac{\sqrt{9+2h}-\sqrt{9}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \tfrac{(\sqrt{9+2h}-3)\cdot(\sqrt{9+2h}+3)}{h\cdot(\sqrt{9+2h}+3)} \\
&= \lim_{h\to 0} \tfrac{9+2h-9}{h\cdot(\sqrt{9+2h}+3)} \\
&= \lim_{h\to 0} \tfrac{2}{\sqrt{9+2h}+3} \\
&= \tfrac{2}{\sqrt{9}+3} \\
&= \tfrac{1}{3}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten die Ableitung der folgenden Funktionen an einem Punkt x_0.

a) $j(x) = 3x$ b) $k(x) = x^2 + 5$ c) $l(x) = x^3 + 1$

Lösung 2

Der Differenzenquotient von f in x_0 ist definiert als

$$\Delta(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Lösung 2a

$$\begin{aligned}
\Delta(x) &\overset{\text{def}}{=} \tfrac{3x-3x_0}{x-x_0} \\
&= \tfrac{3\cdot(x-x_0)}{x-x_0} \\
&= 3
\end{aligned}$$

Lösung 2b

$$\begin{aligned}\Delta(x) &\overset{\text{def}}{=} \tfrac{x^2+5-\left(x_0^2+5\right)}{x-x_0}\\ &= \tfrac{x^2-x_0^2}{x-x_0}\\ &= \tfrac{(x+x_0)\cdot(x-x_0)}{x-x_0}\\ &= x+x_0\end{aligned}$$

Lösung 2c

$$\begin{aligned}\Delta(x) &\overset{\text{def}}{=} \tfrac{x^3+1-\left(x_0^3+1\right)}{x-x_0}\\ &= \tfrac{x^3-x_0^3}{x-x_0}\\ &= \tfrac{\left(x^2+x\cdot x_0+x_0^2\right)\cdot(x-x_0)}{x-x_0}\\ &= x^2+x\cdot x_0+x_0^2\end{aligned}$$

Aufgabe 3

a) Bestimmen Sie die Tangentengleichung der Kurve $f(x) = x^3$ an der Stelle $x = 2$.

b) Bestimmen Sie die Gerade, welche eine Tangente an der folgenden Funktion ist:

$$f(x) = x^2 \;\text{ und }\; g(x) = x^2 - 2x$$

Lösung 3

Der Ansatz für die Tangente einer Funktion $f(x)$ in einem Punkt x_0 lautet

$$T(x) = f_1(x) = m \cdot (x - x_0) + b$$

Dabei gilt für die Steigung $m = f'(x_0)$ und für $b = f(x_0)$.
Die Tangentengleichung lautet somit:

$$T(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Lösung 3a

Für die Tangente $T(x)$ von der Funktion $f(x) = x^3$ an der Stelle $x_0 = 2$ gilt somit:

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f'(2) = 12$$

$$f(2) = 8$$

$$\begin{aligned} T(x) &= 12 \cdot (x-2) + 8 \\ &= 12x - 24 + 8 \\ &= 12x - 16 \end{aligned}$$

Lösung 3b

Ansatz 1:

Die allgemeinen Tangentengleichungen der Funktionen ergeben sich aus der genannten Formel und den Ableitungen der Funktionen.

$$f'(x) = 2x$$

$$g'(x) = 2x - 2$$

Eine gemeinsame Tangente muss zwei Bedingungen erfüllen.

a) $\exists\, x_0 : f'(x_0) = g'(x_0)$ und

b) $f(x_0) = g(x_0)$

Bedingung 1:

$$2x = 2y - 2$$

$$x = y - 1$$

Bedingung 2:

$$x^2 = y^2 - 2y$$
$$x^2 = y \cdot (y-2)$$

Aus 1 und 2 erhält man:

$$(y-1)(y-1) = y \cdot (y-2)$$

$$\begin{aligned} y^2 - y - y + 1 &= y^2 - 2y \\ y^2 - 2y + 1 &= y^2 - 2y \\ 1 &= 0 \ ↯ \end{aligned}$$

Beide Bedingungen können nicht zusammen erfüllt sein.
Ansatz 2:

$$\begin{aligned} T_f(x) &= 2x_0 \cdot (x - x_0) + x^2 \\ T_g(x) &= (2x_0 - 2) \cdot (x - x_0) + \left(x^2 - 2x\right) \end{aligned}$$

Gesucht ist eine gemeinsame Tangente, also soll gelten $T_f(x) = T_g(x)$:

$$\begin{aligned} & 2x_0 \cdot (x - x_0) + x^2 = (2x_0 - 2) \cdot (x - x_0) + \left(x^2 - 2x\right) \\ \Leftrightarrow \quad & 2x_0x - 2x_0^2 + x^2 = 2x_0x - 2x_0^2 - 2x + 2x_0 + x^2 - 2x \quad \Big| -x^2 \\ \Leftrightarrow \quad & 2x_0x - 2x_0^2 = 2x_0x - 2x_0^2 - 2x + 2x_0 - 2x \quad \Big| -2x_0x \\ \Leftrightarrow \quad & -2x_0^2 = -2x_0^2 - 2x + 2x_0 - 2x \quad \Big| +2x_0^2 \\ \Leftrightarrow \quad & 0 = 2x_0 - 4x \quad \Big| +4x \\ \Leftrightarrow \quad & 2x = x_0 \end{aligned}$$

Setzt man nun die gefundene Information für x_0 in die Tangentengleichungen ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} T_f(x) &= 4x \cdot (x - 2x) + x^2 \\ &= -4x^2 + x^2 \\ &= -3x^2 \end{aligned}$$

Zur Probe auch noch in die zweite Tangentengleichung:

$$T_g(x) = (2x_0 - 2) \cdot (x - x_0) + \left(x^2 - 2x\right)$$

$$= (4x - 2) \cdot (x - 2x) + \left(x^2 - 2x\right)$$

$$= -4x^2 + 2x + x^2 - 2x$$

$$= -4x^2 + x^2$$

$$= -3x^2$$

Somit ist gezeigt, dass $T_f(x) = T_g(x) \ = -3x^2$.
Problematisch ist nur, dass es sich dabei um eine Parabel und keine Tangente handelt, außer vielleicht eine tangierende Parabel, aber es war ja nach einer Geraden gesucht.

Aufgabe 4

Differenzieren Sie:

a) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

b) $f(x) = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}$

c) $f(x) = x^{\cos(x)}$

d) $f(x) = \sqrt{x \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt{x}}}$

e) $f(x) = x^{xa}$ für $a > 0$

f) $f(x) = x^{a^x}$ für $a > 0$

g) $f(x) = \cos\left(\ln\left(\tan\left(\sqrt{1+x^2}\right)\right)\right)$

h) $f(x) = x^2 \cdot e^{\frac{x}{x+1}}$

Lösung 4

Produktregel (Schelthoff[1], Satz 159)

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$f'(x) = u(x) \cdot v'(x) + u'(x) \cdot v(x)$$

Quotientenregel (Schelthoff[1], Satz 160)

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v(x)^2}$$

Kettenregel (Schelthoff[1], Satz 161)

$$f(x) = g(v(x))$$

$$f'(x) = v'(x) \cdot g'(v(x))$$

Lösung 4a

Nach Quotientenregel:

$$\begin{aligned}
u(x) &= e^x - e^{-x} \\
v(x) &= e^x + e^{-x} \\
u'(x) &= e^{-x} + e^x \\
v'(x) &= e^x - e^{-x} \\
f'(x) &= \frac{(e^{-x}+e^x)(e^x+e^{-x}) - (e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x})} \\
&= \frac{(e^x+e^{-x})((e^{-x}+e^x) - (e^x-e^{-x}))}{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x})} \\
&= \frac{(e^{-x}+e^x) - (e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})} \\
&= \frac{2 \cdot e^{-x}}{e^x+e^{-x}}
\end{aligned}$$

[1]Schelthoff, Christof (2018): MATSE-MATIK. Analysis 1, 6. Auflage, Aachen, Shaker Verlag.

Lösung 4b

Kettenregel

$$f(x) = \arcsin \tfrac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$f(x) = g(v(x))$$

$$g(x) = \arcsin(x)$$

$$g'(x) = \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$v(x) = \tfrac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$v'(x) = \tfrac{-4x}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= v'(x) \cdot g'(v(x)) \\ &= \tfrac{-4x}{\left(1+x^2\right)^2} \cdot \tfrac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \\ &= \tfrac{-4x}{\left(1+x^2\right)^2 \cdot \sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \end{aligned}$$

Lösung 4c

Kettenregel

$$f(x) = x^{\cos(x)}$$

$$f(x) = g(v(x))$$

$$u = v(x)$$

$$v(x) = \cos(x)$$

$$v'(x) = -\sin(x)$$

$$g(u) = x^u$$

$$g'(u) = u \cdot x^{(u-1)}$$

$$g'(v(x)) = \cos(x) \cdot x^{(\cos(x)-1)}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= v'(x) \cdot g'(v(x)) \\ &= -\sin(x) \cdot \cos(x) \cdot x^{(\cos(x)-1)} \end{aligned}$$

Lösung 4d

Potenzregel

$$f(x) = \sqrt{x \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt{x}}}$$

$$f'(x) = \frac{7}{8x^{1/8}}$$

Lösung 4e-h

Aus Zeitmangel ausgelassen. Es wäre schon ziemlich dämlich für die 8 Unterpunkte von Aufgabe 4 jeweils 3 Punkte zu vergeben, oder? xD

Aufgabe 5

Gegeben sei die Funktion

$$f : [0;1] \to \mathbb{R},\ f(x) = 2 \cdot \ln\left(x^3 + \sqrt{2 - x^2}\right)$$

Zeigen Sie durch Anwendung des Mittelwertsatzes: $\exists y \in]0;1[$ mit $f'(y) = \ln(2)$

Lösung 5

Mittelwertsatz:
Es sei f stetig auf $[a, b]$ und f differenzierbar auf (a, b)

$$\Rightarrow \exists\ \epsilon \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\epsilon).$$

$$\begin{aligned} \exists\ y \in (0;1)\ : \tfrac{f(1)-f(0)}{1-0} &= \tfrac{2\cdot\ln\left(1^3+\sqrt{2-1^2}\right)-2\cdot\ln\left(0^3+\sqrt{2-0^2}\right)}{1-0} \\ &= 2 \cdot \ln\left(1 + \sqrt{1}\right) - 2 \cdot \ln\left(\sqrt{2}\right) \\ &= 2 \cdot \ln\left(\tfrac{1+\sqrt{1}}{\sqrt{2}}\right) \\ &= 2 \cdot \ln\left(\sqrt{2}\right) \\ &= \ln(2) \end{aligned}$$