

Aufgabe 6

Bestimmen Sie das orthogonale Komplement L^\perp zu L , der linearen Hülle der gegebenen Vektoren.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Welche Dimension besitzt L^\perp ?

Lösung 6

Sei $V = \mathbb{R}^4$ und nach Definition $L^\perp = \{x \in V \mid \langle x, l \rangle = 0\}$ so erhalten wir ein LGS, dessen erweiterte Koeffizientenmatrix mit Gauß zu lösen ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} +I \cdot (-1) \\ +I \cdot (-1) \\ +I \cdot (-1) \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \Rightarrow x_3 = -x_1 \\ \Rightarrow x_2 = 0 \\ \Rightarrow x_4 = 0 \end{array}$$

\Rightarrow

$$L^\perp = \left\{ x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

Aus den zwei, von 0 verschiedenen Komponenten, lässt sich ablesen, dass für die Dimension des orthogonale Komplements zu L gilt: $\dim(L^\perp) = 2$.