Aufgabe 6

Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen keine Vektorräume über $\mathbb{R}$ bilden.

a)

$$V = \mathbb{R}^3 \text{ mit}$$

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\lambda x = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

b)

$$V = \mathbb{R}^3 \text{ mit}$$

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\lambda x = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) $V = \{x \in \mathbb{R}^n | x_1 \geq 0\}$ mit der Addition und skalaren Multiplikation des $\mathbb{R}^n$.

Lösung 6a

Axiom 5

$$\forall \lambda, \mu \in K, x \in V : (\lambda + \mu) \odot x = (\lambda \odot x) \oplus (\mu \odot x)$$

verletzt, da

$$\begin{pmatrix} (\lambda + \mu)x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda + \mu)x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix} ↯$$

Da $x_2 \neq 2x_2$ und $x_3 \neq 2x_3$.

Lösung 6b

Axiom 3

$$\forall x \in V : \mathbb{1} \odot x = x$$

(mit $\mathbb{1}$ als dem neutralen Element der Multiplikation) verletzt, da für jedes $x \neq (0,0,0)^T$

$$\mathbb{1} \odot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq x$$

Lösung 6c

Abgeschlossenheit verletzt.
Sei $n = 2,\ \lambda = -1,\ x_1 \neq 0$

$$-1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}}_{\notin V}$$

Aufgabe 7

Überprüfen Sie, welche der folgenden Menge Untervektorräume sind:

a) $W_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 = y\right\}$

b) $W_2 = \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \middle| x_1 + x_4 = x_2\right\}$

c) $W_3 = \left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \middle| x_2 = 0\right\}$

Lösung 7a

W_1ist kein Untervektorraum, da

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\notin W_1}$$

Lösung 7b

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 + y_4 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_1 + x_4 + y_1 + y_4 \\ x_3 + y_3 \\ x_4 + y_4 \end{pmatrix} \in W_2 \checkmark$$

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda(x_1 + x_4) \\ \lambda(x_3) \\ \lambda(x_4) \end{pmatrix} \in W_2 \checkmark$$

Es sind beide Bedingungen erfüllt, also ist W_2 ein Untervektorraum. $W_3 \subset \mathbb{R}^3$

Lösung 7c

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ 0 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} \in W_3 \checkmark$$
$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ 0 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix} \in W_3 \checkmark$$

Es sind beide Bedingungen erfüllt, also ist W_3 ein Untervektorraum. $W_3 \subset \mathbb{R}^3$

Aufgabe 8

Durch 3 Punkte (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) soll eine Kurve der Form

$$y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^3$$

gelegt werden. Stellen Sie das lineare Gleichungssystem auf und untersuchen Sie, in welchem der beiden folgenden Fälle die Lösung eindeutig ist.

a) $(x_0, y_0) = (-1, 0)$, $(x_1, y_1) = (0, 0)$, $(x_2, y_2) = (2, 6)$

b) $(x_0, y_0) = (-1, -1)$, $(x_1, y_1) = (0, 0)$, $(x_2, y_2) = (1, 1)$

Lösung 8

Das lineare Gleichungssystem sei allgemein:

$$y_0 = a_0 + a_1 x_0 + a_2 + x_0^3$$

$$y_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 + x_1^3$$

$$y_2 = a_0 + a_1 x_2 + a_2 + x_2^3$$

Lösung 8a

Die erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

Wobei die Ergebnisspalte nicht relevant für die Untersuchung der Lösbarkeit ist.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} = 6$$

$\Rightarrow$ Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, da die Determinante ungleich Null ist.

Lösung 8b

Nach dem gleichen Vorgehen gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ Das Gleichungssystem ist **nicht** oder **nicht eindeutig** lösbar, da die Determinante ungleich Null ist.