Aufgabe 6

Untersuchen Sie, ob die folgenden Systeme von Vektoren des $\mathbb{R}^n$ linear abhängig oder unabhängig sind.

a) $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Lösung 6a

Wären die beiden Vektoren linear abhängig, dann würde gelten: $\exists\ \lambda$, sodass gilt:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \lambda = -10 \ ↯ \\ \lambda = 1 \quad ↯ \end{array}$$

Da $\lambda \cdot 4 = -4 \ \wedge \lambda \cdot (-1) = 10 \wedge \lambda \cdot 2 = 2$ ↯, also kein λ existiert, welches die Gleichung erfüllen könnte, müssen die Vektoren linear unabhängig sein.

Lösung 6b

Die vier gegebenen Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$ müssen zwangsläufig linear abhängig voneinander sein, da maximal $\dim\left(\mathbb{R}^3\right) = 3$ Vektoren linear unabhängig aus dem Vektorraum sein können.

Lösung 6c

Wären die drei Vektoren linear abhängig, dann würde gelten: $\exists\ \lambda, \mu$, sodas gilt:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \mu = 1/3 \\ \mu = 1/3 \\ \lambda = 0 \\ \lambda = -1/2 \ ↯ \end{array}$$

Da $\lambda \cdot 2 = 0 \wedge \lambda \cdot 2 = -1$ ↯ sind die Vektoren linear unabhängig.