Aufgabe 6

Hinweis: Aufgabentext zur besseren Verständlichkeit abgeändert.

Eine Luke ist mit einer Platte verschlossen, welche mit zwei Scharniere an den Punkten $S = (0|0|0)$ und $T = (0|4|0)$ montiert ist. Die Platte hat eine Aufhängung, welche sich im geschlossenen Zustand am Punkt $A = (-3|2|0)$ befindet und im geöffneten Zustand im Punkt $B = (\frac{-3}{\sqrt{2}}|2|\frac{3}{\sqrt{2}})$.

(a) Zeigen Sie, dass die Platte beim Öffnen um $45°$ gedreht wird.

(b) Wie ist der Abstand zwischen dem Aufhängungspunkt im geschlossenen Zustand A und einem weiteren Punkt $F = (3|-1|6)$, welcher als Befestigung dienen soll?

(c) Welcher Punkt H auf der Strecke von F nach $G = (3|8|3)$, hat den geringsten Abstand zum Aufhängungspunkt?

Lösung 6

Lösung 6a

Für den Winkel φ zwischen den Ebenen $E_{STA} \measuredangle E_{STB}$ gilt

$$\cos \varphi = \frac{\langle n_1, n_2 \rangle}{|n_1| \cdot |n_2|}$$

mit n_1, n_2 als den Normalen der Ebenen.

$$
\begin{aligned}
E_{STA} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
E_{STB} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3/\sqrt{2} \\ 2 \\ 3/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
n_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \\
n_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3/\sqrt{2} \\ 2 \\ 3/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 12/\sqrt{2} \\ 0 \\ 12/\sqrt{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos\varphi &= \tfrac{\langle n_1, n_2 \rangle}{|n_1| \cdot |n_2|} \\
&= \frac{12 \cdot \frac{12}{\sqrt{2}}}{\sqrt{12^2} \cdot \sqrt{\frac{12^2}{2} + \frac{12^2}{2}}} \\
&= \frac{12 \cdot \frac{12}{\sqrt{2}}}{12^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\Leftrightarrow \qquad \varphi &= \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

Der Winkel zwischen den Ebenen beträgt im Bogenmaß $\frac{1}{4}\pi$ oder im Gradmaß 45°.

Lösung 6b

Die Länge der Strecke zwsichen den Punkten A und F ist gleich dem Betrag des Abstandsvektors $\overrightarrow{AF}$ ihrer Ortsvektoren. Daher gilt:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF} &= \begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\-1\\6\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-6\\3\\-6\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AF}| &= \sqrt{(-6)^2+3^2+(-6)^2}\\ &= \sqrt{9+2\cdot 36}\\ &= \sqrt{81}\\ &= 9\end{aligned}$$

Das an dem Punkt F befestigte Seil muss mindestens eine Länge von 9 LE haben.

Lösung 6c

Für den Abstand d zwischen dem Punkt A und der Geraden g_{FG} gilt allgemein:

$$d = \frac{|(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{f}) \times \overrightarrow{FG}|}{|\overrightarrow{FG}|}$$

In diesem Fall also:

$$\begin{aligned}
d &= \frac{\left|\left(\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\-1\\6\end{pmatrix}\right)\times\begin{pmatrix}0\\9\\-3\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}0\\9\\-3\end{pmatrix}\right|} \\
&= \frac{\left|\begin{pmatrix}-6\\3\\-6\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\9\\-3\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{81+9}} \\
&= \frac{\left|\begin{pmatrix}45\\-18\\-54\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{90}} \\
&= \frac{\sqrt{45^2+(-18)^2+(-54)^2}}{\sqrt{90}} \\
&= \sqrt{\frac{45^2+18^2+54^2}{90}} \\
&= \sqrt{\frac{117}{2}} \\
&\approx 7{,}6485\ldots
\end{aligned}$$

Da aber nach der Position von dem Punkt H und nicht nach der Distanz gefragt war, muss so vorgegangen werden:
Die orthogonale Projektion von $\overrightarrow{FG}$ auf $\overrightarrow{FA}$

$$\overrightarrow{FG} := a = \begin{pmatrix}3-3\\(-1)-8\\6-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-9\\3\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{FA} := b = \begin{pmatrix}3-(-3)\\(-1)-2\\6-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-3\\6\end{pmatrix}$$

$$a_b = \frac{\langle a,b\rangle}{||b||}\cdot b$$

$$\Rightarrow a_b = \frac{0+27+18}{\sqrt{6^2+(-3)^2+6^2}}\cdot\begin{pmatrix}6\\-3\\6\end{pmatrix} = \frac{45}{\sqrt{81}}\cdot\begin{pmatrix}6\\-3\\6\end{pmatrix} = 5\cdot\begin{pmatrix}6\\-3\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}30\\-15\\30\end{pmatrix}$$