Aufgabe 4

Berechnen Sie jeweils die Ableitung $F'(x)$ der Funktionen

a) $F(x) = \int\limits_{t=1}^{x} \sqrt{1+t^2}\, dt$

b) $F(x) = \int\limits_{t=x^2}^{1+x^4} \frac{\sin(t \cdot x)}{t}\, dt$

Lösung 4a

Wir betrachten das Integral $\int_1^x \sqrt{1+t^2}\, dt$ und substituieren $u(t) = 1 + t^2$. Für die untere Grenze gilt nun $u(1) = 2$ und für die obere Grenze $u(x) = 1 + x^2$. Somit lässt sich die Funktion wie folgt umschreiben.

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int_{t=1}^{x} \sqrt{1+t^2}\, dt \\
&= \int_2^{1+x^2} \sqrt{u}\; du \\
&= \left[\tfrac{2}{3} u^{3/2}\right]_2^{1+x^2} \\
&= \tfrac{2}{3}\left(1+x^2\right)^{3/2} - \tfrac{2}{3}(2)^{3/2} \\
&= \tfrac{2}{3}\left(1+x^2\right)^{3/2} - \tfrac{4\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}
$$

Die Ableitung der Funktion lässt sich nun mit der Kettenregel bestimmen.

$$f(x) = g(v(x))$$

$$f'(x) = v'(x) \cdot g'(v(x))$$

Mit $v(x) = 1 + x^2$ und $g(v) = \frac{2}{3} v^{3/2}$ und entsprechend $v'(x) = 2x$ und $g'(v) = \sqrt{v}$:

$$F'(x) = 2x \cdot \sqrt{1+x^2}$$