Aufgabe 8

Schreiben Sie das Polynom $v(t) = t^2 + 4t - 3$ auf $\mathbb{R}$ als eine Linearkombination der Polynome $e_1(t) = t^2 - 2t + 5,\ e_2(t) = 2t^2 - 3t$ und $e_3(t) = t + 3$.

Lösung 8

Gesucht sind α, β, γ sodass gilt:

$$v(t) = \alpha \cdot e_1(t) + \beta \cdot e_2(t) + \gamma \cdot e_3(t)$$

Aus den gegebenen Polynomen lässt sich die folgende Koeffizientenmatrix des LGS aufstellen (die Spalten entsprechen den Polynomen e_1, e_2, e_3 und die Ergebnisspalte dem Polynom v):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +2 \cdot I \\ +2 \cdot II - I \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -8 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +8 \cdot II \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 13 & 52 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ : 13 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ - III \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 \cdot II \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow\ \alpha = -3,\ \beta = 2,\ \gamma = 4$

$$
\begin{aligned}
v(t) &= \alpha \cdot e_1(t) + \beta \cdot e_2(t) + \gamma \cdot e_3(t) \\
\Rightarrow v(t) &= -3 \cdot e_1(t) + 2 \cdot e_2(t) + 4 \cdot e_3(t) \\
\Rightarrow v(t) &= -3 \cdot \left(t^2 - 2t + 5\right) + 2 \cdot \left(2t^2 - 3t\right) + 4 \cdot (t+3) \\
&= -3t^2 + 6t - 15 + 4t^2 - 6t + 4t + 12 \\
&= t^2 + 4t - 3 \checkmark
\end{aligned}
$$