Aufgabe 1

Bestimmen Sie mit Hilfe des Differentialquotienten die Tangentensteigung an der Stelle $x_0 = 3$ von folgenden Funktionen:

a) $f(x) = 2x^3 + x - 1$ b) $f(x) = \frac{2}{3x^3}$ c) $f(x) = \sqrt{2x+3}$

Lösung 1

Der Differentialquotient oder auch die Ableitung von f an der Stelle x_0 ist:

$$\lim_{x \to x_0} \Delta(x) = f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Entsprechend gilt im Folgenden:

Lösung 1a

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \Delta(x) \quad & \lim_{h \to 0} \frac{\left(2(x_0+h)^3+x_0+h-1\right)-\left(2x_0^3+x_0-1\right)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2(x_0+h)^3+h-2x_0^3}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2x_0^3+6x_0^2h+6x_0h^2+2h^3+h-2x_0^3}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h\cdot\left(6x_0^2+6x_0h+2h^2+1\right)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} 6x_0^2 + 6x_0h + 2h^2 + 1 \\
&= 6x_0^2 + 1 \\
&\overset{x_0=3}{=} 6 \cdot 9 + 1 \\
&= 55
\end{aligned}$$

Lösung 1b

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \Delta(x) \quad & \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2}{3(x_0+h)^3} - \frac{2}{3(x_0)^3}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{6\cdot {x_0}^3 - \ 6\cdot(x_0+h)^3}{9\cdot(x_0+h)^3\cdot(x_0)^3}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{6\cdot {x_0}^3 - \ 6\cdot\left(x_0^3+3x_0^2h+3x_0h^2+h^3\right)}{9\cdot\left(x_0^3+3x_0^2h+3x_0h^2+h^3\right)\cdot {x_0}^3} \cdot \frac{1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h\cdot\left(-18x_0^2-18x_0h^1-6\cdot h^2\right)}{\left(9x_0^3+27x_0^2h+27x_0h^2+9h^3\right)\cdot {x_0}^3\cdot h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-18x_0^2-18x_0h-6\cdot h^2}{\left(9x_0^3+27x_0^2h+27x_0h^2+9h^3\right)\cdot {x_0}^3} \\
&= \frac{-18x_0^2-\lim\limits_{h\to 0}\left(18x_0h-6\cdot h^2\right)}{9x_0^6+\lim\limits_{h\to 0}\left(27x_0^5h+27x_0^4h^2+9h^3{x_0}^3\right)} \\
&= \frac{-18x_0^2}{9x_0^6} \\
&= -\frac{2}{x_0^4} \\
&\overset{x_0=\ 3}{=} -\frac{2}{3^4} \\
&= -\frac{2}{81}
\end{aligned}
$$

Lösung 1c

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \Delta(x) \quad & \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2(x_0+h)+3}-\sqrt{2x_0+3}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2x_0+2h+3}-\sqrt{2x_0+3}}{h} \\
&\overset{x_0=3}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{6+2h+3}-\sqrt{6+3}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{9+2h}-\sqrt{9}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{9+2h}-3\right)\cdot\left(\sqrt{9+2h}+3\right)}{h\cdot\left(\sqrt{9+2h}+3\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{9+2h-9}{h\cdot\left(\sqrt{9+2h}+3\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2}{\sqrt{9+2h}+3} \\
&= \frac{2}{\sqrt{9}+3} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$