Aufgabe 1

Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Monotonie und begründen Sie anhand der Definition.

a) $a_n = \frac{3n-5}{3n-10}$ b) $a_n = 2n^2 - 6n + 10$

Lösung 1

Wir betrachten für ein festes, aber beliebiges Folgeglied a_n und dessen Nachfolger a_{n+1} den Abstand $a_n - a_{n+1}$.

1a)

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{3n-5}{3n-10} \\
a_{n+1} &= \frac{3(n+1)-5}{3(n+1)-10} \\
a_n - a_{n+1} &= \frac{3n-5}{3n-10} - \frac{3(n+1)-5}{3(n+1)-10} \\
&= \frac{3n-5}{3n-10} - \frac{3n-2}{3n-7} \\
&= \frac{(3n-5)(3n-7)-(3n-2)(3n-10)}{(3n-10)(3n-7)} \\
&= \frac{9n^2-21n-15n-35-\left(9n^2-30n-6n-20\right)}{(3n-10)(3n-7)} \\
&= \frac{-35-(-20)}{(3n-10)(3n-7)} \\
&= \frac{-15}{(3n-10)(3n-7)}
\end{aligned}$$

Der Ausdruck ist negativ, wenn $(3n-10)(3n-7) \; > 0$ und positiv, wenn $(3n-10)(3n-7) < 0$. Dazu sucht man nach möglichen Nullstellen

$$\begin{aligned}
& (3n-10)\cdot(3n-7) &&= 0 \\
\Leftrightarrow\quad & 9n^2-51n+70 &&= 0 \\
\Leftrightarrow\quad & n^2 - \tfrac{51}{9}n + \tfrac{70}{9} &&= 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \tfrac{51}{18} \pm \sqrt{\left(\tfrac{51}{18}\right)^2 - \tfrac{70}{9}} &&= n \\
\Leftrightarrow\quad & \tfrac{17}{6} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}} &&= n \\
\Rightarrow\quad & n_1 = \frac{7}{3} \;\wedge\; n_2 = \frac{10}{3}
\end{aligned}$$

$n_1, n_2 \notin \mathbb{N}$ aber in dem Intervall $(n_1; n_2)$ liegt der Punkt $n_3 = 3$. Für n_3 ist der Ausdruck $a_n - a_{n+1} > 0$. Für alle anderen Punkte jedoch $a_n - a_{n+1} < 0$. Die Folge ist also ab $n > 3$ streng monoton steigend.

1b)

Wir betrachten für ein festes, aber beliebiges Folgeglied a_n und dessen Nachfolger a_{n+1} den Abstand $a_n - a_{n+1}$.

$$\begin{aligned} a_n &= 2n^2 - 6n + 10 \\ a_{n+1} &= 2(n+1)^2 - 6(n+1) + 10 \\ &= 2n^2 + 4n + 2 - 6n - 6 + 10 \\ &= 2n^2 - 2n + 6 \\ a_n - a_{n+1} &= \left(2n^2 - 6n + 10\right) - \left(2n^2 - 2n + 6\right) \\ &= -4n + 4 \end{aligned}$$

Da für jedes beliebige $n \in \mathbb{N}$ gilt $-4n + 4 \ \geq 0$ ist die Folge monoton wachsend.

Aufgabe 2

Gegeben sei die Folge

$$a_n = \frac{5n^2 + n - 5}{7n^2 - 5n + 4}$$

Zeigen Sie die Konvergenz der Folge und geben Sie ein n_0 in Abhängigkeit von ϵ an.

Lösung 2

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2 + n - 5}{7n^2 - 5n + 4}$$

Erweitern man den Bruch mit $\frac{1}{n^2}$ und wendet die Rechenregeln für Limes an, so erhält man

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5 + \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2}}{7 - \frac{5}{n} + \frac{4}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5 + \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(7 - \frac{5}{n} + \frac{4}{n^2}\right)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(5) + \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) - \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}(7) - \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5}{n}\right) + \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n^2}\right)}$$

$$= \frac{5 + 0 - 0}{7 - 0 + 0} = \frac{5}{7}$$

als den Grenzwert a der Folge a_n.

Die Indexfunktion $n_0(\epsilon)$ wird durch die Eigenschaft $|a_n - a| < \epsilon$ beschrieben.

$$\begin{aligned}
& \epsilon > && |a_n - a| \\
\Rightarrow\ & \epsilon > && \left|\tfrac{5n^2+n-5}{7n^2-5n+4} - \tfrac{5}{7}\right| \\
\Leftrightarrow\ & \epsilon > && \left|\tfrac{(5n^2+n-5)\cdot 7 - 5\cdot(7n^2-5n+4)}{(7n^2-5n+4)\cdot 7}\right| \\
\Leftrightarrow\ & \epsilon > && \left|\tfrac{(35n^2+7n-35)-(35n^2-25n+20)}{49n^2-35n+28}\right| \\
\Leftrightarrow\ & \epsilon > && \left|\tfrac{32n-55}{49n^2-35n+28}\right| \\
\Rightarrow\ & \epsilon > && \left|\tfrac{32}{14n}\right| > \left|\tfrac{32n}{49n^2-35n}\right| > \left|\tfrac{32n-55}{49n^2-35n+28}\right| \\
\Rightarrow\ & n > && \tfrac{16}{7\epsilon}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Ermitteln Sie den Grenzwert der gegebenen Folge mithilfe des Sandwich-Lemmas

$$a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$$

Lösung 3

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(-\sqrt{-1+n} + \sqrt{n}\right) = 0$$

Aufgabe 4

Untersuchen Sie die Folge

$$a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}$$

auf Monotonie und Beschränktheit.

Lösung 4

Um die Folge a_n auf Monotonie und Beschränktheit zu untersuchen, lässt sich zunächst die Folge allgemein für n sowie für den Nachfolger $n+1$ notieren:

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^{n} \left(\tfrac{1}{k^2}\right) + \tfrac{1}{n} \\ a_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\tfrac{1}{k^2}\right) + \tfrac{1}{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\tfrac{1}{k^2}\right) + \tfrac{1}{(n+1)^2} + \tfrac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Um zu zeigen, in welchem Verhältnis a_n und a_{n+1} zueinander stehen, lässt sich wieder die Differenz untersuchen:

$$\begin{aligned} & a_{n+1} - a_n = \sum_{k=1}^{n+1} \left(\tfrac{1}{k^2}\right) + \tfrac{1}{n+1} - \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\tfrac{1}{k^2}\right) + \tfrac{1}{n}\right) \\ \Leftrightarrow\ & a_{n+1} - a_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\tfrac{1}{k^2}\right) + \tfrac{1}{(n+1)^2} + \tfrac{1}{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \left(\tfrac{1}{k^2}\right) - \tfrac{1}{n} \\ \Leftrightarrow\ & a_{n+1} - a_n = \tfrac{1}{(n+1)^2} + \tfrac{1}{n+1} - \tfrac{1}{n} \\ \Leftrightarrow\ & a_{n+1} - a_n = \tfrac{n}{(n+1)^2 \cdot n} + \tfrac{(n+1)\cdot n}{(n+1)^2 \cdot n} - \tfrac{(n+1)^2}{(n+1)^2 \cdot n} \\ \Leftrightarrow\ & a_{n+1} - a_n = \tfrac{n + n\cdot(n+1) - (n+1)^2}{(n+1)^2 \cdot n} \\ \Leftrightarrow\ & a_{n+1} - a_n = \tfrac{n + n^2 + n - n^2 - 2n - 1}{n^3 + 2n^2 + n} \\ \Leftrightarrow\ & a_{n+1} - a_n = \tfrac{-1}{n^3 + 2n^2 + n} \end{aligned}$$

Daraus lässt sich sehen, dass die Differenz eines beliebigen, aber festen Folgegliedes subtrahiert von seinem Nachfolger

$$\frac{\overbrace{-1}^{<0}}{\underbrace{n^3 + 2n^2 + n}_{>0\ \forall n \in \mathbb{N}}}$$

insgesamt immer $< 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ ist. Daraus folgt, dass die Folge a_n streng monoton fallend ist.
Zur Untersuchung der oberen Schranke reicht auf Grund der Monotonie also die Bestimmung von $a_1 = 2$.

Für die Untere Schranke soll gelten:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^2}\right)+\frac{1}{n}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)+0\\
&= \frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}$$

Aufgabe 5

Berechnen Sie die Grenzwerte:

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{2}{n}\right)^{3n}\right)$ b) $\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{7+3n}{3n}\right)^{-n}\right)$

Lösung 5

Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}=e^{-1}$$

5a)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{2}{n}\right)^{3n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n}\right)^{3}=\left(\frac{1}{e^2}\right)^{3}=\frac{1}{e^6}$$

5b)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{7+3n}{3n}\right)^{-n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{7+3n}{3n}\right)^{-n}\right)=\frac{1}{e^{\frac{7}{3}}}$$