Aufgabe 6

Bestimmen Sie das orthogonale Komplement $L^{\perp}$ zu L, der linearen Hülle der gegebenen Vektoren.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Welche Dimension besitzt $L^{\perp}$?

Lösung 6

Sei $V = \mathbb{R}^4$ und nach Definition $L^{\perp} = \{x \in V | < x, l >= 0\}$ so erhalten wir ein LGS, dessen erweiterte Koeffizientenmatrix mit Gauß zu lösen ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +I \cdot (-1) \\ +I \cdot (-1) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow x_3 = -x_1 \\ \Rightarrow x_2 = 0 \\ \Rightarrow x_4 = 0 \end{matrix}$$

$\Rightarrow$

$$L^{\perp} = \left\{ x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

Die Dimension des orthogonale Komplements zu L ist $\dim\left(L^{\perp}\right) = 1$, da die Basis von $L^{\perp}$ nur aus dem Vektor $v_1 = (x_1,\ 0,\ -x_1,\ 0)^T$ besteht.