Aufgabe 7

Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Seien zwei endliche Mengen M und N Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Aus $N \subseteq M$ folgt $L(N) \subseteq L(M)$.

b) Für $M \subseteq \mathbb{R}^n$, M endlich, gilt $L(M) = L(L(M))$.

Lösung 7a

$$\begin{aligned} x \in L(N) \Rightarrow x &= \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \cdot n_k \\ &= \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \cdot n_k + 0 \\ &= \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \cdot n_k + \sum_{m \in M \setminus N} 0 \cdot m \\ \Rightarrow \quad & x \in L(M) \\ \Rightarrow \quad & L(N) \subseteq L(M) \checkmark \end{aligned}$$

Lösung 7b

Es ist zu zeigen, dass $L(L(M)) \subseteq L(M)$.

Sei $x \in L(L(N))$ so gilt $x = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot m_i$ mit $m_i \in L(N)$ für $n \in [1;k]$. Dann ist $m_i = \sum_{j=1}^{l} k_j \cdot n_j$.

Somit ist $a_i \cdot m_i = a_i \cdot \sum_{j=1}^{l} b_j \cdot n_j = \sum_{j=1}^{1} a_i \cdot b_j \cdot n_j$. Außerdem ist dann

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot m_i &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} a_i \cdot b_j \cdot n_j \\ &= \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot b_j \cdot n_j \\ &= \sum_{j=1}^{l} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{k} a_i \right) \cdot b_j}_{:= c_j} \cdot n_j \end{aligned}$$

So sieht man, dass $x \in L(N)$ ✓

Aus $M \subseteq N$ folgt $L(M) \subseteq L(N)$. Setze ein $N = L(M)$. Da $M \subseteq L(M)$ ist, folgt ebenso $L(M) \subseteq L(L(M))$. ✓