

## Aufgabe 6

*Hinweis: Aufgabentext zur besseren Verständlichkeit abgeändert.*

Eine Luke ist mit einer Platte verschlossen, welche mit zwei Scharnieren an den Punkten  $S = (0|0|0)$  und  $T = (0|4|0)$  montiert ist. Die Platte hat eine Aufhängung, welche sich im geschlossenen Zustand am Punkt  $A = (-3|2|0)$  befindet und im geöffneten Zustand im Punkt  $B = (\frac{-3}{\sqrt{2}}|2|\frac{3}{\sqrt{2}})$ .

- (a) Zeigen Sie, dass die Platte beim Öffnen um  $45^\circ$  gedreht wird.
- (b) Wie ist der Abstand zwischen dem Aufhängungspunkt im geschlossenen Zustand  $A$  und einem weiteren Punkt  $F = (3|-1|6)$ , welcher als Befestigung dienen soll?
- (c) Welcher Punkt  $H$  auf der Strecke von  $F$  nach  $G = (3|8|3)$ , hat den geringsten Abstand zum Aufhängungspunkt?

## Lösung 6

Zur Veranschaulichung auf GeoGebra:

<https://www.geogebra.org/3d/wafqm5em>

### Lösung 6a

Für den Winkel  $\varphi$  zwischen den Ebenen  $E_{STA} \angle E_{STB}$  gilt

$$\cos \varphi = \frac{\langle n_1, n_2 \rangle}{|n_1| \cdot |n_2|}$$

mit  $n_1, n_2$  als den Normalen der Ebenen.

$$\begin{aligned}E_{STA} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\E_{STB} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3/\sqrt{2} \\ 2 \\ 3/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\n_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \\n_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3/\sqrt{2} \\ 2 \\ 3/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} 12/\sqrt{2} \\ 0 \\ 12/\sqrt{2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{\langle n_1, n_2 \rangle}{|n_1| \cdot |n_2|} \\&= \frac{12 \cdot \frac{12}{\sqrt{2}}}{\sqrt{12^2} \cdot \sqrt{\frac{12^2}{2} + \frac{12^2}{2}}} \\&= \frac{12 \cdot \frac{12}{\sqrt{2}}}{12^2} \\&= \frac{1}{\sqrt{2}} \\\Leftrightarrow \quad \varphi &= \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\&= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Der Winkel zwischen den Ebenen beträgt im Bogenmaß  $\frac{1}{4}\pi$  oder im Gradmaß  $45^\circ$ .

### Lösung 6b

Die Länge der Strecke zwischen den Punkten  $A$  und  $F$  ist gleich dem Betrag des Abstandsvektors  $\vec{AF}$  ihrer Ortsvektoren. Daher gilt:

$$\begin{aligned}\vec{AF} &= \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\vec{AF}| &= \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + (-6)^2} \\ &= \sqrt{9 + 2 \cdot 36} \\ &= \sqrt{81} \\ &= 9\end{aligned}$$

Das an dem Punkt  $F$  befestigte Seil muss mindestens eine Länge von 9 LE haben.

### Lösung 6c

Für den Abstand  $d$  zwischen dem Punkt  $A$  und der Geraden  $g_{FG}$  gilt allgemein:

$$d = \frac{|(\vec{a} - \vec{f}) \times \vec{FG}|}{|\vec{FG}|}$$

In diesem Fall also:

$$\begin{aligned}
 d &= \frac{\left| \left( \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} \right|} \\
 &= \frac{\left| \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{81+9}} \\
 &= \frac{\left| \begin{pmatrix} 45 \\ -18 \\ -54 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{90}} \\
 &= \frac{\sqrt{45^2 + (-18)^2 + (-54)^2}}{\sqrt{90}} \\
 &= \sqrt{\frac{45^2 + 18^2 + 54^2}{90}} \\
 &= \sqrt{\frac{117}{2}} \\
 &\approx 7,6485 \dots
 \end{aligned}$$

Da aber nach der Position von dem Punkt  $H$  und nicht nach der Distanz gefragt war, muss so vorgegangen werden:

Die orthogonale Projektion von  $\vec{FG}$  auf  $\vec{FA}$

$$\begin{aligned}
 \vec{FG} &:= a = \begin{pmatrix} 3-3 \\ (-1)-8 \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} \\
 \vec{FA} &:= b = \begin{pmatrix} 3-(-3) \\ (-1)-2 \\ 6-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$a_b = \frac{\langle a, b \rangle}{||b||} \cdot b$$

$$\Rightarrow a_b = \frac{0 + 27 + 18}{\sqrt{6^2 + (-3)^2 + 6^2}} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{45}{\sqrt{81}} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ -15 \\ 30 \end{pmatrix}$$

## Aufgabe 7

Bildet  $\mathbb{N}_0$  mit der Verknüpfung

$$a \circ b = |a - b|$$

eine abelsche Gruppe?

## Lösung 7

Es ist zu untersuchen, ob es sich bei  $G = (\mathbb{N}_0, \circ)$  um eine abelsche Gruppe handelt. Für die Verknüpfung  $\circ$  gilt nach Definition der Betragsfunktion:

$$a \circ b := |a - b| = \begin{cases} (a - b) & \text{für } a > b \\ 0 & \text{für } a = b \\ (a - b) \cdot (-1) & \text{für } b > a \end{cases}$$

**[G0] Abgeschlossenheit:**

Beweis der Abgeschlossenheit durch vollständige Fallunterscheidung:

$$\text{Fall 1: } (a - b) \in \mathbb{N}_0 \text{ für } a > b \checkmark$$

$$\text{Fall 2: } 0 \in \mathbb{N}_0 \text{ für } a = b \checkmark$$

$$\text{Fall 3: } (-1) \cdot (a - b) \in \mathbb{N}_0 \text{ für } b > a \checkmark$$

Daraus folgt  $\forall a, b \in \mathbb{N}_0 : |a - b| \in \mathbb{N}_0$  und die Abgeschlossenheit ist gezeigt.

**[G1] Assoziativität:**

Es ist zu untersuchen, ob

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N}_0 : (a \circ b) \circ c \stackrel{?}{=} a \circ (b \circ c)$$

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N}_0 : ||a - b| - c| \stackrel{?}{=} |a - |b - c||$$

Beweis durch Gegenbeispiel:

Es sei  $a = 3$ ,  $b = 2$  und  $c = 1$ , dann muss nach obiger Annahme gelten

$$||3 - 2| - 1| = |3 - |2 - 1||$$

$$\Leftrightarrow |1 - 1| = |3 - 1|$$

$$\Leftrightarrow 0 = 2 \quad \not\checkmark$$

Daraus folgt, dass es sich bei dem Tupplel  $(\mathbb{N}_0, \circ)$  nicht um eine Gruppe und damit auch nicht um eine abelsche Gruppe handelt.

## Aufgabe 8

Gegeben sind die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ \beta \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\alpha \\ -2 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} -1 \\ -\alpha \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Variablen  $\alpha$  und  $\beta$  derart, dass der aus den 3 Vektoren gebildete Spat das Volumen 17 VE hat und das von den Vektoren  $a$  und  $b$  aufgespannte Parallelogramm den Flächeninhalt 19 FE hat.

## Lösung 8

Das Spatprodukt dreier Vektoren  $a, b, c \in \mathbb{R}^3$  ist nach Definition 2.90 und 2.91

$$\det(a, b, c) = \langle a, b \times c \rangle \in \mathbb{R}$$

Das Volumen  $V$  des durch die Spaltenvektoren aufgespannten Spats ist der Betrag der Determinante  $V = |\det(a, b, c)|$ .

Für ein gegebenes Volumen  $V = 17VE$  soll also gelten:

$$\begin{aligned} 17VE &= \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 2\alpha & -\alpha \\ \beta & -2 & 1 \end{pmatrix} \right| \\ \Leftrightarrow 17VE &= |2\alpha\beta - 1| \\ \stackrel{(2\alpha\beta-1)>0}{\Leftrightarrow} 9VE &= \alpha\beta \\ \Leftrightarrow \beta &= \frac{9VE}{\alpha} \end{aligned}$$

Für den Flächeninhalt des Parallelogramms  $A$  muss die Länge des Vektorprodukts bestimmt werden. Nach Folgerung 2.43 lässt sich der Flächeninhalt so berechnen:

$$A = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \sin \theta = \|a \times b\|$$

Für eine gegebene Fläche  $A = 19FE$  soll also gelten:

$$\begin{aligned} A &= \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ \beta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2\alpha \\ -2 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \left\| \begin{pmatrix} 1 - 2\alpha\beta \\ 2 \\ 2\alpha \end{pmatrix} \right\| \\ &= \sqrt{(1 - 2\alpha\beta)^2 + 4 + 4\alpha^2} \\ &= \sqrt{5 + 4\alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta + 4\alpha^2} \end{aligned}$$

$$\stackrel{A=19FE}{\Leftrightarrow} 19FE = \sqrt{5 + 4\alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta + 4\alpha^2}$$

$$\stackrel{\beta=9VE/\alpha}{\Leftrightarrow} 19FE = \sqrt{5 + 4\alpha^2\left(\frac{9VE}{\alpha}\right)^2 - 4\alpha\left(\frac{9VE}{\alpha}\right) + 4\alpha^2}$$

$$\Leftrightarrow 19FE = \sqrt{5 + 4 \cdot (9VE)^2 - 4 \cdot (9VE) + 4\alpha^2}$$

$$\Leftrightarrow 19^2VE = 5 + 4 \cdot (9VE)^2 - 4 \cdot (9VE) + 4\alpha^2$$

$$\Leftrightarrow 4\alpha^2 = 19^2VE - 5 - 4 \cdot (9VE)^2 + 4 \cdot (9VE)$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{19^2VE}{4} - (9VE)^2 + (9VE) - \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{19^2VE}{4} + (9VE) - (9VE)^2 - \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 = \left(\frac{397}{4}VE\right) - (81VE^2) - \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \sqrt{\left(\frac{397}{4}VE\right) - (81VE^2) - \frac{5}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \sqrt{17}$$

Somit sind die Parameter  $\alpha = \sqrt{17}$  und  $\beta = \frac{9}{\sqrt{17}}$  eindeutig bestimmt.  
Die Probe ergibt für das Volumen

$$\begin{aligned} 17VE &= \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 2\sqrt{17} & -\sqrt{17} \\ \frac{9}{\sqrt{17}} & -2 & 1 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| 2 \cdot \sqrt{17} \cdot \frac{9}{\sqrt{17}} - 1 \right| \\ &= |18 - 1| \\ &= 17 \quad \checkmark \end{aligned}$$

sowie für den Flächeninhalt

$$\begin{aligned} 19FE &= \left\| \begin{pmatrix} 1 - 2 \cdot \sqrt{17} \cdot \frac{9}{\sqrt{17}} \\ 2 \\ 2 \cdot \sqrt{17} \end{pmatrix} \right\| \\ &= \left\| \begin{pmatrix} -17 \\ 2 \\ 2 \cdot \sqrt{17} \end{pmatrix} \right\| \\ &= \sqrt{(-17)^2 + 2^2 + 2^2 \cdot 17} \\ &= \sqrt{(-17)^2 + 4 + 4 \cdot 17} \\ &= \sqrt{361} \\ &= 19 \quad \checkmark \end{aligned}$$

*Hinweis: Es reicht die Betrachtung des Falls  $(2\alpha\beta - 1) > 0$ , da die Aufgabenstellung nach einer Lösung und nicht nach allen Lösungen fragt.*

## Aufgabe 9

Zeigen Sie mithilfe der Determinanten, dass die folgenden 3 Ebenen keinen eindeutigen Schnittpunkt haben.

$$E_1 : x + z = 4$$

$$E_2 : 3x - 2y + 2z = 1$$

$$E_3 : 2y + z = 11$$

## Lösung 9

Die Ebenen  $E_1, E_2$  und  $E_3$  haben genau dann keinen (eindeutigen) Schnittpunkt, wenn gilt

$$\det(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3) = 0.$$



Die gegebenen Ebenengleichungen lassen sich als folgendes LGS schreiben:

$$(LGS) \begin{cases} (E_1) 1 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z = 4 \\ (E_2) 3 \cdot x - 2 \cdot y + 2 \cdot z = 1 \\ (E_3) 0 \cdot x + 2 \cdot y + 1 \cdot z = 11 \end{cases}$$

Für die Determinante gilt nun:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -2 + 6 - 4 = 0$$

Daraus folgt, dass die Ebenen keinen eindeutigen Schnittpunkt haben.