Aufgabe 6

Bestimmen Sie das orthogonale Komplement $L^\perp$ zu L, der linearen Hülle der gegebenen Vektoren.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Welche Dimension besitzt $L^\perp$?

Lösung 6

Sei $V = \mathbb{R}^4$ und nach Definition $L^\perp = \{x \in V | < x, l >= 0\}$ so erhalten wir ein LGS, dessen erweiterte Koeffizientenmatrix mit Gauß zu lösen ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ +I \cdot (-1) \\ +I \cdot (-1) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \Rightarrow x_3 = -x_1 \\ \Rightarrow x_2 = 0 \\ \Rightarrow x_4 = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$

$$L^\perp = \left\{ x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

Die Dimension des orthogonale Komplements zu L ist $\dim\left(L^\perp\right) = 1$, da die Basis von $L^\perp$ nur aus dem Vektor $v_1 = (x_1,\ 0,\ -x_1,\ 0)^T$ besteht.

Aufgabe 7

Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Seien zwei endliche Mengen M und N Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Aus $N \subseteq M$ folgt $L(N) \subseteq L(M)$.

b) Für $M \subseteq \mathbb{R}^n$, M endlich, gilt $L(M) = L(L(M))$.

Lösung 7a

Lösung 7b

Aufgabe 8

Gegeben sei die Basis $B = \{1,\ x^2,\ x^4\}$ des Vektorraums V der achsensymmetrischen Polynome maximal 4. Grades.

a) Zeigen Sie, dass die Lineare Hülle von B einen Untervektorraum vom Vektorraum P_4 der Polynome vom Grad 4 bildet.

b) Untersuchen Sie die folgenden Polynome aus V auf lineare Unabhängigkeit:

$$3x^4 - 7x^2 + 2$$
$$-x^4 + 2x^2 - 1$$
$$4x^4 + 3x^2 + 2$$

Lösung 8