Aufgabe 2

Konvergieren die folgenden Reihen? Begründen Sie ihre Antwort.

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} \cdot \frac{2k+1}{k^2+k}$

b) $\sum\limits_{k=2}^{\infty}(-1)^{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{k-\sqrt{k}}}$

Lösung 2

Konvergenzkriterium von Leibniz für alternierende Reihen:
Sei $a_n > 0$ und a_n monoton fallend und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, dann ist $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \cdot a_n$ konvergent.

Lösung 2a

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} \cdot \frac{2k+1}{k^2+k} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} \cdot a_k$$

Es liegt eine alternierende Reihe vor.
Monotonie
Wir zeigen, dass a_k monoton fallend ist.

$$\begin{aligned}
a_{k+1} - a_k &= \tfrac{2(k+1)+1}{(k+1)^2+k+1} - \tfrac{2k+1}{k^2+k} \\
&= \tfrac{2k+3}{k^2+3k+2} - \tfrac{2k+1}{k^2+k} \\
&= \tfrac{(2k+3)\left(k^2+k\right)-(2k+1)\left(k^2+3k+2\right)}{\left(k^2+3k+2\right)\left(k^2+k\right)} \\
&= \tfrac{\left(2k^3+2k^2+3k^2+3k\right)-\left(2k^3+6k^2+4k+k^2+3k+2\right)}{k^4+3k^3+2k^2+k^3+3k^2+2k} \\
&= \tfrac{\left(2k^3+5k^2+3k\right)-\left(2k^3+7k^2+7k+2\right)}{k^4+4k^3+5k^2+2k} \\
&= -\tfrac{2k^2+4k+2}{k^4+4k^3+5k^2+2k} \\
&< 0 \;\Rightarrow\; a_k \text{ ist monoton fallend für } k \geq 1
\end{aligned}$$

Grenzwert

Die Folge a_k ist eine Nullfolge:

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} a_k &= \lim_{k\to\infty} \tfrac{2k+1}{k^2+k} \\ &= \lim_{k\to\infty} \tfrac{k\cdot\left(2+\frac{1}{k}\right)}{k\cdot(k+1)} \\ &= \lim_{k\to\infty} \tfrac{2+\frac{1}{k}}{k+1} \\ &= \lim_{k\to\infty} \tfrac{2}{k+1} \\ &= 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Die alternierende Reihe ist konvergent nach dem Leibniz Kriterium.

Lösung 2b

$$\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k \cdot \frac{1}{\sqrt{k-\sqrt{k}}} = \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k \cdot a_k$$

Es liegt eine alternierende Reihe vor.
Grenzwert
Die Folge a_k ist eine Nullfolge:

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} a_k &= \lim_{k\to\infty} \tfrac{1}{\sqrt{k-\sqrt{k}}} \\ &= 0\end{aligned}$$

Monotonie
Wir zeigen, dass a_k monoton fallend ist.

$$\begin{aligned} & & a_k &\geq a_{k+1} \\ &\Leftrightarrow & \tfrac{1}{\sqrt{k-\sqrt{k}}} &\geq \tfrac{1}{\sqrt{k+1-\sqrt{k+1}}} \\ &\Leftrightarrow & \sqrt{k+1-\sqrt{k+1}} &\geq \sqrt{k-\sqrt{k}} \\ &\overset{k\geq 0}{\Leftrightarrow} & k+1-\sqrt{k+1} &\geq k-\sqrt{k} \\ &\Leftrightarrow & 1-\sqrt{k+1} &\geq -\sqrt{k} \\ &\Leftrightarrow & 1+\sqrt{k} &\geq \sqrt{k+1} \qquad \checkmark\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Die alternierende Reihe ist konvergent nach dem Leibniz Kriterium.