Aufgabe 3

Sind die folgende Funktionen lokal Lipschitz-stetig im Punkt x_0? Berechnen Sie ggf. die Lipschitz-Konstante L in Abhängigkeit von δ.

(a) $f(x) = \sqrt{2+3x}$, $x_0 = 1$

(b) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, $x_0 = -1$

Lösung 3

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig in einem Punkt $x_0 \in D$, wenn gilt

$$\exists L \geq 0 \forall x, x_0 \in D : |f(x) - f(x_0)| \leq L \cdot |x - x_0|.$$

Daraus folgt für die Lipschitz-Konstante L

$$L \geq \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|}$$

Außerdem gilt $|x - x_0| < \delta \Leftrightarrow x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$.

Lösung 3a

$$\begin{aligned}
& L \geq \tfrac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|} \\
\equiv \quad & L \geq \tfrac{\left|\sqrt{2+3x}-\sqrt{2+3x_0}\right|}{|x-x_0|} \\
& = \tfrac{\left|\sqrt{2+3x}-\sqrt{2+3x_0}\right| \cdot \left|\sqrt{2+3x}+\sqrt{2+3x_0}\right|}{|x-x_0| \cdot \left|\sqrt{2+3x}+\sqrt{2+3x_0}\right|} \\
& = \tfrac{|2+3x|-|2+3\cdot x_0|}{|x-x_0| \cdot \left|\sqrt{2+3x}+\sqrt{2+3x_0}\right|} \\
& = \tfrac{3\cdot|(x-x_0)|}{|x-x_0| \cdot \left|\sqrt{2+3x}+\sqrt{2+3x_0}\right|} \\
& = \tfrac{3}{\left|\sqrt{2+3x}+\sqrt{2+3x_0}\right|} \\
& > \tfrac{3}{\left|\sqrt{2+3(x_0+\delta)}+\sqrt{2+3x_0}\right|} \\
\Rightarrow L(\delta) & > \tfrac{3}{\left|\sqrt{5+3\delta}+\sqrt{5}\right|}
\end{aligned}$$

Lösung 3b

$$
\begin{aligned}
& L \geq \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|} \\
\equiv \qquad & L \geq \frac{\left|\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x_0^2+1}\right|}{|x-x_0|} \\
& = \frac{\left|\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x_0^2+1}\right| \cdot \left|\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x_0^2+1}\right|}{|x-x_0| \cdot \left|\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x_0^2+1}\right|} \\
& = \frac{\left|x^2+1\right|-\left|x_0^2+1\right|}{|x-x_0| \cdot \left|\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x_0^2+1}\right|} \\
& = \frac{|x-x_0| \cdot |x+x_0|}{|x-x_0| \cdot \left|\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x_0^2+1}\right|} \\
& = \frac{|x+x_0|}{\left|\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x_0^2+1}\right|} \\
& > \frac{|(x_0-\delta)+x_0|}{\left|\sqrt{(x_0+\delta)^2+1}+\sqrt{x_0^2+1}\right|} \\
& = \frac{|2x_0-\delta|}{\left|\sqrt{(x_0+\delta)^2+1}+\sqrt{x_0^2+1}\right|} \\
\Rightarrow L(\delta) & > \frac{|2x_0-\delta|}{\left|\sqrt{(x_0+\delta)^2+1}+\sqrt{x_0^2+1}\right|}
\end{aligned}
$$