Aufgabe 1

Berechnen Sie die Länge der Strecke zwischen den Punkten $A(-3|2)$ und $B(2|4)$ mithilfe der Integration.

Lösung 1

Es soll die Länge einer Kurve $L_a^b(f)$ berechnet werden, welche als Geradengleichung der Form $f(x) = m \cdot x + b$ entsprechen soll und durch die Punkte A und B gehen soll. Dazu wird zunächst die Geradengleichung bestimmt:

$$f(x) = \tfrac{4-2}{2+3} \cdot x + b$$

$$= \tfrac{2}{5} \cdot x + b$$

Um den Punkt B zu schneiden muss gelten $f(2) = 4 \Leftrightarrow \frac{2 \cdot 2}{5} + b = 4 \Leftrightarrow b = \frac{16}{5}$. Somit lautet die Geradengleichung $f(x) = \frac{2}{5} \cdot x + \frac{16}{5}$.
Die Formel zur Berechnung der Länge einer Kurve lautet:

$$L_a^b(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Mit $f'(x) = \frac{2}{5}$ bedeutet dies im Intervall $x \in [-3; 2]$:

$$\begin{aligned} L_{-3}^2(f) &= \int\limits_{-3}^{2} \sqrt{1 + \left(\tfrac{2}{5}\right)^2} dx \\ &= \int\limits_{-3}^{2} \sqrt{\tfrac{29}{25}} dx \\ &= \left[\tfrac{\sqrt{29}}{5} \cdot x\right]_{-3}^{2} \\ &= \tfrac{\sqrt{29}}{5} \cdot 5 \\ &= \sqrt{29} \end{aligned}$$

Bemerkung / Lustige Kuriosität:
Die KI ChatGPT von OpenAI hat für die Aufgabe ebenfalls eine richtige Lösung ermitteln können, welche technisch gesehen ebenfalls Integration nutzt.
Hier ist die Ausgabe von ChatGPT:

> Die Länge einer Strecke zwischen zwei Punkten kann mit Hilfe der Integration berechnet werden, indem man die Differenzen der x- und y-Koordinaten der beiden Punkte integriert. In diesem Fall haben wir die Differenzen $\Delta x = 5$ und $\Delta y = 2$, also lautet die Länge der Strecke $\int_0^1 \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} dx = \int_0^1 \sqrt{5^2 + 2^2} dx = \int_0^1 \sqrt{29} dx = \boxed{\sqrt{29}}$.

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Mantelfläche des Rotationskörpers, der durch Drehung des Graphen der Wurzelfunktion um die x-Achse im Intervall $[0;5]$ entsteht.

Lösung 2

Die Manteloberfläche lässt sich nach der folgenden Formel berechnen:

$$M_a^b(f) \;=\; 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Für $f(x) = \sqrt{x}$ und entsprechend $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ bedeutet dies im Intervall $x \in [0;5]$:

$$\begin{aligned}
M_a^b(f) &= 2\pi \cdot \int_0^5 \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \left(\tfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\, dx \\
&= 2\pi \cdot \int_0^5 \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \tfrac{1}{4x}}\, dx \\
&= 2\pi \cdot \int_0^5 \sqrt{x} \cdot \sqrt{\tfrac{4x+1}{4x}}\, dx \\
&= 2\pi \cdot \int_0^5 \sqrt{x} \cdot \sqrt{\tfrac{x+\frac{1}{4}}{x}}\, dx \\
&= 2\pi \cdot \int_0^5 \sqrt{x} \cdot \tfrac{\sqrt{x+\frac{1}{4}}}{\sqrt{x}}\, dx \\
&= 2\pi \cdot \int_0^5 \sqrt{x + \tfrac{1}{4}}\, dx
\end{aligned}$$

Die Substitution mit $u = x + \frac{1}{4}$ und $du = dx$ gibt die neue untere Grenze $u(0) = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ und die obere Grenze $u(5) = 5 + \frac{1}{4} = \frac{21}{4}$.

$$\begin{aligned}
M_a^b(f) &= 2\pi \cdot \int_{1/4}^{21/4} \sqrt{u}\, du \\
&= 2\pi \cdot \left[\tfrac{2}{3}x^{3/2}\right]_{1/4}^{21/4} \\
&= 2\pi \cdot \left(\tfrac{2}{3}\left(\tfrac{21}{4}\right)^{3/2} - \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{4}\right)^{3/2} \right) \\
&= \tfrac{4\pi}{3} \cdot \left(\left(\tfrac{21}{4}\right)^{3/2} - \left(\tfrac{1}{4}\right)^{3/2} \right) \\
&= \tfrac{\pi}{6} \cdot \left(21\sqrt{21} - 1\right) \\
&\approx 49{,}864\ FE
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Berechnen Sie:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\int\limits_0^x \frac{1}{t+e^{-1}}\,dt\right)$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\int\limits_0^x \frac{t+1}{t^2+2}\,dt\right)$

Lösung 3a

Wir betrachten das Integral $\int_0^x \frac{1}{t+e^{-1}}dt$ und substituieren $u(t) = t + e^{-1}$. Das bedeutet für die untere Grenze $u(0) = e^{-1}$ und für die obere Grenze $u(x) = x + e^{-1}$.

$$\int\limits_0^x \frac{1}{t+e^{-1}}\,dt = \int\limits_{e^{-1}}^{x+e^{-1}} \frac{1}{u}\,du = [\ln(u)]_{e^{-1}}^{x+e^{-1}} = \ln\left(x+\frac{1}{e}\right) - \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \ln(e\cdot x+1)+1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\int\limits_0^x \frac{1}{t+e^{-1}}\,dt\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln(e\cdot x+1)+1}{x}\right)$$

Nach dem Satz von L'Hospital gilt hier, mit $f(x) = \ln(e\cdot x+1)+1$ und $f'(x) = \frac{e}{1+e\cdot x}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln(e\cdot x+1)+1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{e}{1+e\cdot x}}{1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{e}{1+e\cdot x}\right) = 0$$

Lösung 3b

Analog gilt mit L'Hospital auch hier

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\int\limits_0^x \frac{t+1}{t^2+2}\,dt\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x^2+2}-0\right)$$

Der größte Exponent im Nenner des Terms ist x^2, weshalb wir Zähler und Nenner dadurch teilen. Wir erhalten:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)+\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)}{1+\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x^2}\right)} = \frac{0+0}{1+0} = 0$$

Aufgabe 4

Berechnen Sie jeweils die Ableitung $F'(x)$ der Funktionen

a) $F(x) = \int\limits_{t=1}^{x} \sqrt{1+t^2}\,dt$

b) $F(x) = \int\limits_{t=x^2}^{1+x^4} \frac{\sin(t\cdot x)}{t}\,dt$

Lösung 4a

Wir betrachten das Integral $\int_1^x \sqrt{1+t^2}\,dt$ und substituieren $u(t) = 1+t^2$. Für die untere Grenze gilt nun $u(1) = 2$ und für die obere Grenze $u(x) = 1+x^2$. Somit lässt sich die Funktion wie folgt umschreiben.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{t=1}^{x} \sqrt{1+t^2}\,dt \\ &= \int_2^{1+x^2} \sqrt{u}\,du \\ &= \left[\tfrac{2}{3}u^{3/2}\right]_2^{1+x^2} \\ &= \tfrac{2}{3}\left(1+x^2\right)^{3/2} - \tfrac{2}{3}(2)^{3/2} \\ &= \tfrac{2}{3}\left(1+x^2\right)^{3/2} - \tfrac{4\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

Die Ableitung der Funktion lässt sich nun mit der Kettenregel bestimmen.

$$f(x) = g(v(x))$$

$$f'(x) = v'(x)\cdot g'(v(x))$$

Mit $v(x) = 1+x^2$ und $g(v) = \frac{2}{3}v^{3/2}$ und entsprechend $v'(x) = 2x$ und $g'(v) = \sqrt{v}$:

$$F'(x) = 2x\cdot\sqrt{1+x^2}$$

Aufgabe 5

Untersuchen Sie die Konvergenz der folgenden Integrale und berechnen Sie deren Wert, wenn sie konvergent sind:

a) $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$

b) $\int_0^\infty \cos(x)\,dx$

Lösung 5a

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-x}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx \\
&= \lim_{b\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^b \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-b}+e^0\right) \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-b}\right)+1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Das Integral konvergiert gegen 1.

Lösung 5b

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \cos(x)\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b \cos(x)\,dx \\
&= \lim_{b\to\infty}[\sin(x)]_0^b \\
&= \lim_{b\to\infty}(\sin(b)-\sin(0)) \\
&= \lim_{b\to\infty}(\sin(b)-0) \\
&= \underbrace{\lim_{b\to\infty}\sin(b)}_{\text{existiert nicht}}
\end{aligned}$$

Das Integral divergiert.