

Aufgabe 5

Gegeben sind die folgenden Geraden in der Parameterdarstellung:

$$\begin{aligned} g_1 : x &= 1 + t, & y &= 3 - 2 \cdot t \\ g_2 : x &= 1/2 - 3/2 \cdot t, & y &= 1 - 4 \cdot t \end{aligned}$$

Geben Sie die jeweiligen Normalform und Hesse-Normalform an. Gibt es einen Schnittpunkt?

Lösung 5

Punkt-Richtungsform:

$$\begin{aligned} g_1 : \vec{X} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ g_2 : \vec{X} &= \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3/2 \\ -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Normalform mit dem Normalenvektor $\vec{n}_{g1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ da $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$:

$$g_1 : 0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{X} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

Hesse-Normalform mit $|\vec{n}| = \sqrt{5}$:

$$g_1 : 0 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{X} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

Normalform mit dem Normalenvektor $\vec{n}_{g2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3/2 \end{pmatrix}$ da $\left\langle \begin{pmatrix} 3/2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3/2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$:

$$g_2 : 0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3/2 \end{pmatrix} \cdot \left(\vec{X} - \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Hesse-Normalform mit $|\vec{n}| = \sqrt{73/4}$:

$$g_2 : 0 = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 3/2 \end{pmatrix}}{\sqrt{73/4}} \cdot \left(\vec{X} - \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Die beiden Geraden schneiden sich in \mathbb{R}^2 , wenn sie nicht parallel zueinander sind. Beweis durch Widerspruch: Wir nehmen an $g_1 \parallel g_2$, dann $\exists t \in \mathbb{R}$ für das gilt

$$\begin{aligned} t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3/2 \\ -4 \end{pmatrix} \\ \text{mit } t = 2 : 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3/2 \\ -4 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3/2 \\ -4 \end{pmatrix} \\ 1 &= 3/2 \quad \text{!} \end{aligned}$$

Da die Geraden nicht parallel sind, muss es einen Schnittpunkt geben.

Aufgabe 6

Untersuchen Sie, ob die folgenden Ebenen einen eindeutigen Schnittpunkt im \mathbb{R}^3 besitzen:

a)

$$\begin{aligned} E_1 : x &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ E_2 : x &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \\ E_3 : x &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} E_1 : x &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ E_2 : x &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \\ E_3 : x &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lösung 6

Zunächst werden die Normalenvektoren der gegebenen Ebenen berechnet.

Ist das LGS der drei Ebenen eindeutig lösbar, so existiert ein eindeutiger Schnittpunkt der Ebenen.

Dies ist der Fall, wenn die Ebenen E_1 und E_2 nicht parallel liegen ($\vec{n}_{E_1} \times \vec{n}_{E_2} \neq 0$) und deren Schnittgerade nicht parallel zu E_3 ist.

$$\langle (\vec{n}_{E_1} \times \vec{n}_{E_2}), \vec{n}_{E_3} \rangle \neq 0$$

Da dies auch die Definition der Determinante ist, gilt ebenso:

$$\det(\vec{n}_{E_1}, \vec{n}_{E_2}, \vec{n}_{E_3}) \neq 0$$

Lösung 6a

$$\vec{n}_{E_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_{E_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -15 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_{E_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\vec{n}_{E_1}, \vec{n}_{E_2}, \vec{n}_{E_3}) &= \det \begin{pmatrix} -4 & -3 & -1 \\ -4 & -15 & -3 \\ -4 & 9 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (-4)(-15) + (-3)(-3)(-4) + (-1)(-4) \cdot 9 \\ &\quad - (-4)(-3) \cdot 9 - (-3)(-4) - (-1)(-15)(-4) \\ &= 60 - 36 + 36 - 108 - 12 + 60 \\ &= 0 \end{aligned}$$

\implies Es existiert **kein** Schnittpunkt in \mathbb{R}^3 .

Lösung 6b

$$\vec{n}_{E_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_{E_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_{E_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(\vec{n}_{E_1}, \vec{n}_{E_2}, \vec{n}_{E_3}) &= \det \begin{pmatrix} -1 & 3 & 16 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 8 \end{pmatrix} \\ &= 3 \cdot 4 \cdot (-3) + (16 \cdot (-2) - (-1) \cdot 4 - 3 \cdot (-2) \cdot 8) \\ &= -36 - 32 + 4 + 48 \\ &= -16 \end{aligned}$$

\implies Es existiert **ein** eindeutiger Schnittpunkt in \mathbb{R}^3 .

Aufgabe 7

Für welche Werte $t \in \mathbb{R}$ ist die Gerade

$$g: x = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

parallel zur Ebene

$$E: 2x - y + t \cdot z = 9, x, y, z \in \mathbb{R}$$

Lösung 7

Aufgabe 8

Gegeben sind die zwei Punkte $P = (1|2|3)$ und $Q = (-1|1|2)$ und die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie die Gleichungen der beiden Geraden g_1 bzw. g_2 durch den Punkt P in Richtung von a bzw. durch Q in Richtung von b .
- (b) Sind die Geraden windschief (d.h. sind sie weder parallel noch haben sie einen Schnittpunkt)?
- (c) Falls das der Fall ist, bestimmen Sie einen Vektor, der senkrecht auf beiden Geraden steht.

Lösung 8