Aufgabe 6

Beweisen oder widerlegen Sie, dass es sich bei den gegebenen Abbildungen um eine Norm für Vektoren des Vektorraums $\mathbb{R}^n$ handelt.

a)
$$\|x\| = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

b)
$$\|x\| = \left|\prod_{i=1}^{n} x_i\right|$$

c)
$$\|x\| = \min_{i=1,\dots,n} |x_i|$$

Lösung 6

Nach Definition 3.114, Seite 106 heißt eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ Norm, genau dann, wenn

- **N0** : $\|a\| \in \mathbb{R}$
- **N1** : $\|a\| \geq 0$
- **N2** : $\|a\| = 0 \;\Leftrightarrow a = 0$
- **N3** : $\forall \lambda \in \mathbb{K} : \|\lambda \cdot a\| = |\lambda| \cdot \|a\|$
- **N4** : $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$.

Lösung 6a

Bei der Abbildung $\|x\| = \sum_{i=1}^{n} x_i$ handelt es sich nicht um eine Norm, da für den Vektor $x = (-1)$ die Bedingung N1, $\|a\| \geq 0$ verletzt ist.
Darüber hinaus wäre für den Vektor $x = (1;\ -1)^T$ die Bedingung N2 verletzt und für $\lambda < 0$ auch die Bedingung N3.

Lösung 6b

Bei der Abbildung $\|x\| = |\prod_{i=1}^{n} x_i|$ ist die Bedingung N2 verletzt, da für jeden Vektor a mit einer beliebigen Komponente $a_i = 0$ die Norm $\|a\| = 0$ wäre.

Lösung 6c

Auch bei der Abbildung $\|x\| = \min\limits_{i=1,\ldots,n} |x_i|$ handelt es sich nicht um eine Norm, weil die Bedingung N4 verletzt ist:
Sei $a = (1;2)^T,\ b = (2;1)^T$ dann ist

$$\|(3;3)^T\| = 3 \leq \|(1;2)^T\| + \|(2;1)^T\| = 1 + 1 \ \lightning.$$

Aufgabe 7

Bestimmen Sie mit der Projektionsformel $p = \frac{\langle x,y \rangle}{\langle y,y \rangle} \cdot y$ im unitären Raum $\mathbb{C}^2$ die Projektion von $x = (1+i;\ 2+i)^T$ auf $y = (1-i;\ -1)^T$.

Lösung 7

Nach Definition 3.108 ist das Standardskalarprodukt in $\mathbb{C}^2$ definiert als $\langle a, b \rangle = a_1\overline{b_1} + a_2\overline{b_2}$.
Es folgt mit der gegebenen Projektionsformel

$$\begin{aligned} p &= \tfrac{\langle x,y \rangle}{\langle y,y \rangle} \cdot y \\ &\overset{\text{def}}{=} \tfrac{(1+i)(1+i)+(2+i)(-1)}{(1-i)(1+i)+(-1)(-1)} \cdot \begin{pmatrix} 1-i \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \tfrac{-2+i}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1-i \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} + i \\ \frac{2-i}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 8

Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$x = \begin{pmatrix} -3/5 \\ 4/5 \\ 0 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \\ 0 \end{pmatrix},\ z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis des euklidischen Raums R^3 (mit dem Standardskalarprodukt) bilden.

Lösung 8

Nach Definition 3.128, Seite 111 muss für eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}_{ON} = (x, y, z)$ folgende Bedingungen erfüllt sein:
1. Orthogonalsystem: $x \perp y \wedge y \perp z \wedge x \perp z$

2. Orthonormalsystem: $\|x\| = \|y\| = \|z\| = 1$
3. Orthogonalbasis: x, y, z ist ein minimales Erzeugendensystem vom Vektorraum V

1. $\mathcal{B}_{ON}$ ist ein Orthogonalsystem, wenn alle Vektoren paarweise orthogonal sind:

$$\begin{aligned}< x, y > &= \tfrac{-3\cdot 4}{5} + \tfrac{4\cdot 3}{5} + 0 \\ &= 0 \\ &\Rightarrow x \perp y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}< y, z > &= \tfrac{4\cdot 0}{5} + \tfrac{3\cdot 0}{5} + 0 \\ &= 0 \\ &\Rightarrow y \perp z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}< x, z > &= \tfrac{-3\cdot 0}{5} + \tfrac{4\cdot 0}{5} + 0 \\ &= 0 \\ &\Rightarrow x \perp z\end{aligned}$$

$\Rightarrow x \perp y \wedge y \perp z \wedge x \perp z$ ✓

2. Ein Orthogonalsystem $\mathcal{B}_{ON}$ ist ein Orthonormalsystem, wenn die Norm aller Vektoren 1 beträgt:

$$\begin{aligned}\|x\| &= \sqrt{\left(\tfrac{-3}{5}\right)^2 + \left(\tfrac{4}{5}\right)^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{\tfrac{9}{25} + \tfrac{16}{25}} \\ &= \sqrt{\tfrac{25}{25}} \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|y\| &= \sqrt{\left(\tfrac{4}{5}\right)^2 + \left(\tfrac{3}{5}\right)^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{\tfrac{16}{25} + \tfrac{9}{25}} \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|z\| &= \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} \\ &= 1\end{aligned}$$

$\Rightarrow \|x\| = \|y\| = \|z\| = 1$

3. Ein Orthogonalsystem $\mathcal{B}_{ON}$ ist eine Orthogonalbasis von V, wenn es eine Basis von V ist. Man sieht, dass die Vektoren x, y, z eine Lineare Hülle aufspannen, sodass $L(x, y, z) = \mathbb{R}^3$. Es bleibt die lineare Unabhängigkeit der Vektoren zu zeigen:

$$\begin{aligned}\det(x, y, z) &= \tfrac{-9}{10} - \tfrac{16}{25} \\ &= -\tfrac{77}{50} \\ &\neq 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow x, y, z$ ist ein minimales Erzeugendes System vom Vektorraum V. ✓

Aus 1, 2 und 3 folgt, dass es sich bei der $\mathcal{B}_{ON}$ um eine Orthonormalbasis des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ handelt.