Aufgabe 1

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^3+\sin(n)+1}$

b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-3}{n^3+\sin(n)+1}$

Lösung 1a

Untersuchung mit Majorantenkriterium:
Sei fast immer $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq c_n$ und konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, so konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Dabei ist c_n eine *konvergente Majorante.*
Die Reihe mit $a_n = \frac{n+2}{n^3+\sin(n)+1}$ konvergiert nach dem Majorantenkriterium, da wir wie folgt nach oben abschätzen können:

$$\begin{aligned} a_n &= \tfrac{n+2}{n^3+\sin(n)+1} \\ &\leq \tfrac{n+2}{n^3-1+1} \\ &= \tfrac{n+2}{n^3} \\ &= \tfrac{1}{n^2} + \tfrac{2}{n^3} \\ &=: c_n \end{aligned}$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ für $a > 1$ bekanntermaßen konvergent ist, ist $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ ebenfalls konvergent und entsprechend muss auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent sein.

Lösung 1b

Untersuchung mit Minorantenkriterium:
Sei fast immer $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq c_n \leq a_n$ und divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, so divergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Dabei ist c_n eine *divergente Minorante*.
Als bekanntermaßen divergente Minorante verwenden wir die harmonische Reihe und

zeigen, dass $\frac{n^2-3}{n^3+\sin(n)+1} \geq \frac{1}{n}$ gilt:

$$\begin{aligned}
& \frac{n^2-3}{n^3+\sin(n)+1} \geq \frac{1}{n} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{n^2}{n^3+\sin(n)+1} \geq \frac{1}{n} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{n^2}{n^3} \geq \frac{1}{n} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n} \checkmark
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-3}{n^3+\sin(n)+1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-3}{n^3+\sin(n)+1} - \frac{1-3}{1+\sin(1)+1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-3}{n^3+\sin(n)+1} + \frac{2}{2+\sin(1)} \\
&\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \\
&= \infty
\end{aligned}$$

und somit die Reihe divergiert.

Aufgabe 2

Konvergieren die folgenden Reihen? Begründen Sie ihre Antwort.

a) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{2k+1}{k^2+k}$

b) $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{k-\sqrt{k}}}$

Lösung 2

Konvergenzkriterium von Leibniz für alternierende Reihen:
Sei $a_n > 0$ und a_n monoton fallend und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, dann ist $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \cdot a_n$ konvergent.

Lösung 2a

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\cdot\frac{2k+1}{k^2+k}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\cdot a_k$$

Es liegt eine alternierende Reihe vor.
<u>Monotonie</u>
Wir zeigen, dass a_k monoton fallend ist.

$$\begin{aligned}
a_{k+1}-a_k &= \tfrac{2(k+1)+1}{(k+1)^2+k+1}-\tfrac{2k+1}{k^2+k}\\
&= \tfrac{2k+3}{k^2+3k+2}-\tfrac{2k+1}{k^2+k}\\
&= \tfrac{(2k+3)\left(k^2+k\right)-(2k+1)\left(k^2+3k+2\right)}{\left(k^2+3k+2\right)\left(k^2+k\right)}\\
&= \tfrac{\left(2k^3+2k^2+3k^2+3k\right)-\left(2k^3+6k^2+4k+k^2+3k+2\right)}{k^4+3k^3+2k^2+k^3+3k^2+2k}\\
&= \tfrac{\left(2k^3+5k^2+3k\right)-\left(2k^3+7k^2+7k+2\right)}{k^4+4k^3+5k^2+2k}\\
&= -\tfrac{2k^2+4k+2}{k^4+4k^3+5k^2+2k}\\
&< 0 \;\Rightarrow\; a_k \text{ ist monoton fallend für } k\geq 1
\end{aligned}$$

<u>Grenzwert</u>
Die Folge a_k ist eine Nullfolge:

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} a_k &= \lim_{k\to\infty}\tfrac{2k+1}{k^2+k}\\
&= \lim_{k\to\infty}\tfrac{k\cdot\left(2+\frac{1}{k}\right)}{k\cdot(k+1)}\\
&= \lim_{k\to\infty}\tfrac{2+\frac{1}{k}}{k+1}\\
&= \lim_{k\to\infty}\tfrac{2}{k+1}\\
&= 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Die alternierende Reihe ist konvergent nach dem Leibniz Kriterium.

Lösung 2b

$$\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k}\cdot\frac{1}{\sqrt{k-\sqrt{k}}}=\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{k}\cdot a_k$$

Es liegt eine alternierende Reihe vor.
Grenzwert
Die Folge a_k ist eine Nullfolge:

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} a_k &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{k-\sqrt{k}}} \\ &= 0\end{aligned}$$

Monotonie
Wir zeigen, dass a_k monoton fallend ist.

$$\begin{aligned} && a_k &\geq a_{k+1} \\ \Leftrightarrow && \frac{1}{\sqrt{k-\sqrt{k}}} &\geq \frac{1}{\sqrt{k+1-\sqrt{k+1}}} \\ \Leftrightarrow && \sqrt{k+1-\sqrt{k+1}} &\geq \sqrt{k-\sqrt{k}} \\ \overset{k\geq 0}{\Leftrightarrow} && k+1-\sqrt{k+1} &\geq k-\sqrt{k} \\ \Leftrightarrow && 1-\sqrt{k+1} &\geq -\sqrt{k} \\ \Leftrightarrow && 1+\sqrt{k} &\geq \sqrt{k+1} \qquad \checkmark \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Die alternierende Reihe ist konvergent nach dem Leibniz Kriterium.

Aufgabe 3

Ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{für } x \leq \pi \\ \frac{\sin(x)}{x-\pi} & \text{für } x > \pi \end{cases}$$

stetig?

Lösung 3

Wir betrachten die Grenzwerte der Funktion $f(x)$ an der Grenze $x \to \pi$:

$$\lim_{x\uparrow\pi} f(x) = \lim_{x\uparrow\pi} \cos(x) = \cos(\pi) = -1$$

$$\lim_{x\downarrow\pi} f(x) = \lim_{x\downarrow\pi} \frac{\sin(x)}{x-\pi} \underset{\substack{\uparrow \\ \left[\frac{0}{0}\right]}}{\overset{l'H}{=}} \lim_{x\downarrow\pi} \frac{\cos(x)}{1} = -1$$

$\Rightarrow$ Die Funktion ist an der Stell π stetig.

Aufgabe 4

Überprüfen Sie, ob und wie die folgenden Funktionen in $x_0 = -1$ stetig ergänzbar sind.

a) $f(x) = \frac{x^3-x^2-x+1}{x^2+3x+2}$

b) $g(x) = \frac{x^4-5x^2+4}{x^3+2x^2-5x-6}$

c) $h(x) = \frac{4x}{x^2+2x+1}$

Lösung 4

Eine Funktion $f(x)$ ist genau dann stetig in x_0, wenn

$$l - \lim_{x \to x_0} f(x) = r - \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Sei $f(x)$ steitg für $x \neq x_0, x_0 \notin D$. Dann erhält man mit $f(x_0) := \lim_{x \to x_0} f(x)$ eine stetige Funktion, wenn der Grenzwert exisitert. x_0 wird dann als *hebbare Lücke* bezeichnet.

Lösung 4a

$$\begin{aligned}
\lim_{x \uparrow -1} f(x) &= \lim_{x \uparrow -1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^2+3x+2} \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \left[\frac{0}{0}\right]}}{\overset{l'H}{=}} \lim_{x \uparrow -1} \frac{3x^2-2x-1}{2x+3} \\
&= 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \downarrow -1} f(x) &= \lim_{x \downarrow -1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^2+3x+2} \\
&\underset{\substack{\uparrow \\ \left[\frac{0}{0}\right]}}{\overset{l'H}{=}} \lim_{x \downarrow -1} \frac{3x^2-2x-1}{2x+3} \\
&= 4
\end{aligned}$$

Da $\lim_{x\to -1} f(x) = 4$ existiert, kann die Funktion an der Stelle x_0 stetig ergänzt werden.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^2+3x+2} & \text{für } x \neq -1 \\ 4 & \text{für } x = -1 \end{cases}$$

Lösung 4b

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -1} g(x) &= \lim_{x\to -1} \frac{x^4-5x^2+4}{x^3+2x^2-5x-6} \\
&\underset{\left[\frac{0}{0}\right]}{\overset{l'H}{=}} \lim_{x\to -1} \frac{4x^3-10x}{3x^2+4x-5} \\
&= \frac{6}{-6} \\
&= -1
\end{aligned}$$

Da der Grenzwert existiert, kann die Funktion an der Stelle x_0 stetig ergänzt werden.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^4-5x^2+4}{x^3+2x^2-5x-6} & \text{für } x \neq -1 \\ -1 & \text{für } x = -1 \end{cases}$$

Lösung 4c

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -1} h(x) &= \lim_{x\to -1} \frac{4x}{x^2+2x+1} \\
&= \lim_{x\to -1} \frac{4x}{x^2 \cdot \left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} \\
&= \lim_{x\to -1} \frac{4}{x} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} \\
&= -4 \cdot \lim_{x\to -1} \underbrace{\frac{1}{\underbrace{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}_{\to 0}}}_{\to\infty} \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

$$\lim_{x\uparrow -1} h(x) = \lim_{x\downarrow -1} h(x)$$

Die Funktion divergiert an der Stelle x_0 und kann somit nicht ergänzt werden.

Aufgabe 5

Zeigen Sie:

a) Ist die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ im Intervall $[1;3]$ selbstkontrahierend?

b) Ist die Funktion $f(x) = x^2 - 2x$ im Intervall $[0;2]$ selbstkontrahierend?

Lösung 5

Fixpunktsatz:
Sei $f : [a;b] \to [c;d]$ stetig mit $[c;d] \subset [a;b]$ (selbstkontrahierend), dann exisitert ein Fixpunkt $u = f(x)$.

Lösung 5a

Die Wurzelfunktion ist bekannterweise stetig und monoton wachsen für $x > 0$, also ist sie auch im Intervall $[1;3]$ stetig und monoton wachsend.
Setze die Grenzen ein:

$$f(1) = 1 \in [1;3]$$
$$f(3) = \sqrt{3} \in [1;3]$$

Somit ist $\left[1;\sqrt{3}\right] \subset [1;3]$ und die Funktion selbstkontrahierend.

Lösung 5b

Selbstkontraktion:

$$f(1) = -1 \notin [0;2]$$

Somit ist die Funktion nicht selbstkontrahierend.