

Aufgabe 1

Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Monotonie und begründen Sie anhand der Definition.

$$\text{a) } a_n = \frac{3n-5}{3n-10}$$

$$\text{b) } a_n = 2n^2 - 6n + 10$$

Lösung 1

Wir betrachten für ein festes, aber beliebiges Folgenglied a_n und dessen Nachfolger a_{n+1} den Abstand $a_n - a_{n+1}$.

1a)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{3n-5}{3n-10} \\ a_{n+1} &= \frac{3(n+1)-5}{3(n+1)-10} \\ a_n - a_{n+1} &= \frac{3n-5}{3n-10} - \frac{3(n+1)-5}{3(n+1)-10} \\ &= \frac{3n-5}{3n-10} - \frac{3n-2}{3n-7} \\ &= \frac{(3n-5)(3n-7) - (3n-2)(3n-10)}{(3n-10)(3n-7)} \\ &= \frac{9n^2 - 21n - 15n - 35 - (9n^2 - 30n - 6n - 20)}{(3n-10)(3n-7)} \\ &= \frac{-35 - (-20)}{(3n-10)(3n-7)} \\ &= \frac{-15}{(3n-10)(3n-7)} \end{aligned}$$

Der Ausdruck ist negativ, wenn $(3n - 10)(3n - 7) > 0$ und positiv, wenn $(3n - 10)(3n - 7) < 0$. Dazu sucht man nach möglichen Nullstellen

$$\begin{aligned}(3n - 10) \cdot (3n - 7) &= 0 \\ \Leftrightarrow 9n^2 - 51n + 70 &= 0 \\ \Leftrightarrow n^2 - \frac{51}{9}n + \frac{70}{9} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{51}{18} \pm \sqrt{\left(\frac{51}{18}\right)^2 - \frac{70}{9}} &= n \\ \Leftrightarrow \frac{17}{6} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} &= n \\ \Rightarrow n_1 = \frac{7}{3} \wedge n_2 = \frac{10}{3}\end{aligned}$$

$n_1, n_2 \notin \mathbb{N}$ aber in dem Intervall $(n_1; n_2)$ liegt der Punkt $n_3 = 3$. Für n_3 ist der Ausdruck $a_n - a_{n+1} > 0$. Für alle anderen Punkte jedoch $a_n - a_{n+1} < 0$. Die Folge ist also ab $n > 3$ streng monoton steigend.

1b)

Wir betrachten für ein festes, aber beliebiges Folgeglied a_n und dessen Nachfolger a_{n+1} den Abstand $a_n - a_{n+1}$.

$$\begin{aligned}a_n &= 2n^2 - 6n + 10 \\ a_{n+1} &= 2(n+1)^2 - 6(n+1) + 10 \\ &= 2n^2 + 4n + 2 - 6n - 6 + 10 \\ &= 2n^2 - 2n + 6 \\ a_n - a_{n+1} &= (2n^2 - 6n + 10) - (2n^2 - 2n + 6) \\ &= -4n + 4\end{aligned}$$

Da für jedes beliebige $n \in \mathbb{N}$ gilt $-4n + 4 \geq 0$ ist die Folge monoton wachsend.

Aufgabe 2

Gegeben sei die Folge

$$a_n = \frac{5n^2 + n - 5}{7n^2 - 5n + 4}$$

Zeigen Sie die Konvergenz der Folge und geben Sie ein n_0 in Abhängigkeit von ϵ an.

Lösung 2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + n - 5}{7n^2 - 5n + 4}$$

Erweitern man den Bruch mit $\frac{1}{n^2}$ und wendet die Rechenregeln für Limes an, so erhält man

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2}}{7 - \frac{5}{n} + \frac{4}{n^2}} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(7 - \frac{5}{n} + \frac{4}{n^2}\right)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (5) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right) - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{n^2}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (7) - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{n}\right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{n^2}\right)} \\ &= \frac{5 + 0 - 0}{7 - 0 + 0} = \frac{5}{7} \end{aligned}$$

als den Grenzwert a der Folge a_n .

Die Indexfunktion $n_0(\epsilon)$ wird durch die Eigenschaft $|a_n - a| < \epsilon$ beschrieben.

$$\begin{aligned} \epsilon &> |a_n - a| \\ \Rightarrow \epsilon &> \left| \frac{5n^2 + n - 5}{7n^2 - 5n + 4} - \frac{5}{7} \right| \\ \Leftrightarrow \epsilon &> \left| \frac{(5n^2 + n - 5) \cdot 7 - 5 \cdot (7n^2 - 5n + 4)}{(7n^2 - 5n + 4) \cdot 7} \right| \\ \Leftrightarrow \epsilon &> \left| \frac{(35n^2 + 7n - 35) - (35n^2 - 25n + 20)}{49n^2 - 35n + 28} \right| \\ \Leftrightarrow \epsilon &> \left| \frac{32n - 55}{49n^2 - 35n + 28} \right| \\ \Rightarrow \epsilon &> \left| \frac{32}{14n} \right| > \left| \frac{32n}{49n^2 - 35n} \right| > \left| \frac{32n - 55}{49n^2 - 35n + 28} \right| \\ \Rightarrow n &> \frac{16}{7\epsilon} \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Ermitteln Sie den Grenzwert der gegebenen Folge mithilfe des Sandwich-Lemmas

$$a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$$

Lösung 3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\sqrt{-1+n} + \sqrt{n} \right) = 0$$

Aufgabe 4

Untersuchen Sie die Folge

$$a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}$$

auf Monotonie und Beschränktheit.

Lösung 4

Um die Folge a_n auf Monotonie und Beschränktheit zu untersuchen, lässt sich zunächst die Folge allgemein für n sowie für den Nachfolger $n + 1$ notieren:

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k^2} \right) + \frac{1}{n} \\ a_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{k^2} \right) + \frac{1}{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k^2} \right) + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Um zu zeigen, in welchem Verhältnis a_n und a_{n+1} zueinander stehen, lässt sich wieder die Differenz untersuchen:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{k^2} \right) + \frac{1}{n+1} - \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k^2} \right) + \frac{1}{n} \right) \\ \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k^2} \right) + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k^2} \right) - \frac{1}{n} \\ \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n &= \frac{n}{(n+1)^2 \cdot n} + \frac{(n+1) \cdot n}{(n+1)^2 \cdot n} - \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2 \cdot n} \\ \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n &= \frac{n+n \cdot (n+1) - (n+1)^2}{(n+1)^2 \cdot n} \\ \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n &= \frac{n+n^2+n-n^2-2n-1}{n^3+2n^2+n} \\ \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n &= \frac{-1}{n^3+2n^2+n} \end{aligned}$$

Daraus lässt sich sehen, dass die Differenz eines beliebigen, aber festen Folgegliedes subtrahiert von seinem Nachfolger

$$\frac{\overbrace{-1}^{<0}}{\underbrace{n^3+2n^2+n}_{>0 \ \forall n \in \mathbb{N}}}$$

insgesamt immer $< 0 \forall n \in \mathbb{N}$ ist. Daraus folgt, dass die Folge a_n streng monoton fallend ist.

Zur Untersuchung der oberen Schranke reicht auf Grund der Monotonie also die Bestimmung von $a_1 = 2$.

Für die Untere Schranke soll gelten:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k^2} \right) + \frac{1}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k^2} \right) \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k^2} \right) \right) + 0 \\ &= \frac{\pi^2}{6}\end{aligned}$$

Aufgabe 5

Berechnen Sie die Grenzwerte:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{2}{n} \right)^{3n} \right) \qquad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{7+3n}{3n} \right)^{-n} \right)$$

Lösung 5

Es gilt:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n &= e \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n &= e^{-1}\end{aligned}$$

5a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{2}{n} \right)^{3n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{2}{n} \right)^n \right)^3 = \left(\frac{1}{e^2} \right)^3 = \frac{1}{e^6}$$

5b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{7+3n}{3n} \right)^{-n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{7+3n}{3n} \right)^{-n} \right) = \frac{1}{e^3}$$