Aufgabe 6

Berechnen Sie die Bestapproximation des Punktes $V = (2|3|1)$ auf die, von den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aufgespannte Ebene. Klären Sie zunächst, wie die Bestapproximation in der analytischen Geometrie genannt wird. Nutzen Sie bei der Berechnung die orthogonale Projektion auf Unterräume. Bestimmen Sie auch den minimalen Abstand von V zur Ebene.

Lösung 6

Die Bestapproximation wird in der analytischen Geometrie orthogonale Projektion oder auch Orthogonalprojektion genannt.
Nach Satz 3.151 gilt für die Bestapproximation:

$$\|v - p_U(v)\| = \min_{u \in U} \|u - v\|$$

Nach Satz 3.121 gilt für die orthogonale Projektion $p_b(a)$ eines Vektors a auf b mit $b \neq 0$ in jedem unitären Vektorraum:

$$p_b(a) = \frac{\langle a, b \rangle}{\langle b, b \rangle} \cdot b$$

Für die orthogonale Projektion $p_U(a) \in U$ eines Vektors $a \in V$ auf einen endlich erzeugten Untervektorraum U muss nach Satz 3.122 gelten:

$$a - p_U(a) \perp u \; \forall u \in U$$

Für die orthogonale Projektion $p_E(a)$ des Vektors a auf eine Ebene E, welche durch den Ursprung verläuft und mit $E = \mu \cdot \overrightarrow{v} + \lambda \cdot \overrightarrow{u}$ beschrieben ist, wobei $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{u}$, gilt entsprechend:

$$p_E(a) = \frac{\langle a, v \rangle}{\langle v, v \rangle} \cdot v + \frac{\langle a, u \rangle}{\langle u, u \rangle} \cdot u$$

Wir betrachten die durch v_1 und v_2 aufgespannte Ebene als Untervektorraum U des $\mathbb{R}^3$. Dadurch, dass wir den Nullvektor als Aufpunkt wählen, stellen wir sicher, dass sich dieser in der Hyperebene befindet und wir somit von einem Untervektorraum sprechen können.

$$U = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \middle| x = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mu, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Für die Orthogonalprojektion von dem Ortsvektor a des Punktes V, mit $a = (2;3;1)^T$, auf den Untervektorraum U gilt also:

$$\begin{aligned} p_U(a) &= \tfrac{\langle a,v_1\rangle}{\langle v_1,v_1\rangle} \cdot v_1 + \tfrac{\langle a,v_2\rangle}{\langle v_2,v_2\rangle} \cdot v_2 \\ &= \tfrac{10}{9} \cdot v_1 - \tfrac{1}{9} \cdot v_2 \\ &= \tfrac{1}{9} \cdot (10 \cdot v_1 - v_2) \\ &= \tfrac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 22 \\ 19 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Für die Bestapproximation gilt nun:

$$\|a - p_U(a)\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 \\ 22 \\ 19 \end{pmatrix} \right\| = \frac{\sqrt{225}}{9} = \frac{15}{3}$$

Da die Orthogonalprojektion des Punktes V auf den Untervektorraum U auch Lotfußpunkt genannt wird und der Differenzvektor zwischen dem Punkt V und seiner Orthogonalprojektion das Lot ist, dessen Länge sich über seine $\updownarrow_2$-Norm berechnet, ist der minimale Abstand von a zur Ebene

$$\min_{u \in U} \|u - a\| = \|a - p_U(a)\| = \frac{5}{3}.$$

Aufgabe 7

Gegeben sei ein Vektorraum V. U und W seien Untervektorräume von V. Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) $U = \left(U^\perp\right)^\perp$

b) $U \subset W \Rightarrow W^\perp \subset U^\perp$

c) $W^\perp \subset U^\perp \Rightarrow U \subset W$

Lösung 7

Aufgabe 8

Folgende Vektoren spannen einen Unterraum U des $\mathbb{R}^4$ auf:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

a) Bestimmen Sie aus V eine Orthonormalbasis von U, falls dies möglich ist.

b) Welche Dimension hat das orthogonale Komplement $U^{\perp}$?

Lösung 8a

Orthogonalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt.

$$\begin{aligned} w_1 &:= \tfrac{v_1}{\|v_1\|} \\ r_{k+1} &:= v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle v_{k+1}, w_i \rangle \, w_i \\ w_{k+1} &= \tfrac{r_{k+1}}{\|r_{k+1}\|} \end{aligned}$$

Sei V ein unitärer Vektorraum und die Vektoren $v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängig, dann bilden $w_1, \ldots, w_m$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{L}(v_1, \ldots, v_m)$.

$$w_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

$$= \frac{v_1}{3}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

$$r_2 := v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle \, w_1$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} - 6 \cdot \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \frac{r_2}{\|r_2\|}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$r_3 := v_3 - (\langle v_3, w_1 \rangle \, w_1 + \langle v_3, w_2 \rangle \, w_2)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \\ -4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$$w_3 = \frac{r_3}{\|r_3\|}$$

$$= \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \right\}$$

Probe:
Lineare Unabhängigkeit:
Die Vektoren w_1, w_2 und w_3 sind linear unabhängig.
Normiertheit:
$\|w_1\| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = 1 \wedge \|w_2\| = 1 \wedge \|w_3\| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = 1}$ ✓
Orthogonalität:
$\langle w_1, w_2 \rangle = 0 \wedge \langle w_2, w_3 \rangle = 0 \ \wedge \langle w_1, w_3 \rangle = 0$ ✓
$\Rightarrow W$ ist eine Orthonormalbasis von U.

Lösung 8b

Nach Folgerung 3.145 gilt für einen endlich erzeugten unitären Vektorraum V und einem beliebigen Untervektorraum U

$$\dim(V) = \dim(U) + \dim\left(U^{\perp}\right).$$

Damit gilt auch $\dim\left(U^{\perp}\right) = \dim(V) - \dim(U)$, was bedeutet, dass $\dim\left(U^{\perp}\right) = 1$