
Aufgabe 5

Zeigen Sie:

- a) Ist die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ im Intervall $[1; 3]$ selbstkontrahierend?
- b) Ist die Funktion $f(x) = x^2 - 2x$ im Intervall $[0; 2]$ selbstkontrahierend?

Lösung 5

Fixpunktsatz:

Sei $f : [a; b] \rightarrow [c; d]$ stetig mit $[c; d] \subset [a; b]$ (selbstkontrahierend), dann existiert ein Fixpunkt $u = f(x)$.

Lösung 5a

Die Wurzelfunktion ist bekannterweise stetig und monoton wachsen für $x > 0$, also ist sie auch im Intervall $[1; 3]$ stetig und monoton wachsend.

Setze die Grenzen ein:

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 \in [1; 3] \\ f(3) &= \sqrt{3} \in [1; 3] \end{aligned}$$

Somit ist $[1; \sqrt{3}] \subset [1; 3]$ und die Funktion selbstkontrahierend.

Lösung 5b

Selbstkontraktion:

$$f(1) = -1 \notin [0; 2]$$

Somit ist die Funktion nicht selbstkontrahierend.