Aufgabe 1

Untersuchen Sie, ob folgende Funktionen an der Stelle x_0 stetig ergänzbar sind:
a)

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{für } x < -1 \\ 4x-1 & \text{für } x > -1 \end{cases} \text{ und } \; x_0 = -1$$

b)

$$f(x) = x \cdot \cos \frac{1}{x} \text{ und } \; x_0 = 0$$

c)

$$f(x) = \frac{1}{e^{\frac{1}{x-1}}} \text{ und } \; x_0 = 1$$

Lösung 1a

Unstetigkeit mit Folgenkriterium gezeigt:
Dazu die Folge $r_n = -1 + \frac{1}{n}$ für die Annährung von rechts und $l_n = -1 - \frac{1}{n}$ für die Annhärung von links, da

$$\lim_{n\to\infty} l_n = \lim_{n\to\infty} r_n = -1.$$

Setzt man r_n und l_n in $f(x)$ für die entsprechenden Bereiche, so erhält man für $x < -1$

$$\begin{aligned} f(l_n) &= 2 \cdot l_n + 1 \\ &= 2 \cdot \left(-1 - \tfrac{1}{n}\right) + 1 \\ &= -2 - \tfrac{2}{n} + 1 \\ &= -\tfrac{2}{n} - 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} f(l_n) = \lim_{n\to\infty} -\frac{2}{n} - 1 = -1$$

und für $x > -1$

$$\begin{aligned} f(r_n) &= 4 \cdot r_n - 1 \\ &= 4 \cdot \left(-1 + \tfrac{1}{n}\right) - 1 \\ &= -4 + \tfrac{4}{n} - 1 \\ &= -5 + \tfrac{4}{n} \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} -5 + \frac{4}{n} = -5$$

$\Rightarrow$ Die Funktion $f(x)$ ist an der Stelle x_0 nicht stetig.