Aufgabe 6

Untersuchen Sie, ob die folgenden Systeme von Vektoren des $\mathbb{R}^n$ linear abhängig oder unabhängig sind.

a) $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Lösung 6a

Wären die beiden Vektoren linear abhängig, dann würde gelten: $\exists\ \lambda$, sodass gilt:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \lambda = -10 \ \lightning \\ \lambda = 1 \quad \lightning \end{array}$$

Da $\lambda \cdot 4 = -4\ \wedge \lambda \cdot (-1) = 10 \wedge \lambda \cdot 2 = 2\ \lightning$, also kein λ existiert, welches die Gleichung erfüllen könnte, müssen die Vektoren linear unabhängig sein.

Lösung 6b

Die vier gegebenen Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$ müssen zwangsläufig linear abhängig voneinander sein, da maximal $\dim\left(\mathbb{R}^3\right) = 3$ Vektoren linear unabhängig aus dem Vektorraum sein können.

Lösung 6c

Wären die drei Vektoren linear abhängig, dann würde gelten: $\exists\ \lambda, \mu$, sodas gilt:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \mu = 1/3 \\ \mu = 1/3 \\ \lambda = 0 \\ \lambda = -1/2\ \lightning \end{array}$$

Da $\lambda \cdot 2 = 0 \wedge \lambda \cdot 2 = -1\ \lightning$ sind die Vektoren linear unabhängig.

Aufgabe 7

$x_1, \dots, x_n$ seien linear unabhängige Vektoren aus einem K-Vektorraum V. Weiter sei $x = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i$ und $\mu_i \in K$ für alle $i = 1, \dots, n$. Es ist zu zeigen, dass unter der Voraussetzung $\sum_{i=1}^{n} \mu_i \neq 1$ die Vektoren $x - x_1, \dots, x - x_n$ linear unabhängig sind.

Lösung 7a

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x - x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i x) - \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i x_i) \\
&= x \cdot \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i) - \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\mu_i x_i) \cdot \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i) - \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} (\lambda_j) \cdot \mu_i x_i \right) - \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\left(\sum_{j=1}^{n} (\lambda_j) \cdot \mu_i \right) - \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i) \right) x_i \right)
\end{aligned}$$

Aus der linearen Unabhängigkeit folgt:

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} (\lambda_j) \cdot \mu_i \right) - \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i) \\
\Leftrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} (\lambda_j) \cdot \mu_i \right) \\
\Rightarrow \forall i \in [1; n] : \lambda_i &= \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j) \cdot \mu_i
\end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \lambda_i &= \sum_{i=1}^{n} \left(\mu_i \cdot \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \right) \\
\Leftrightarrow \quad 0 \quad &= \sum_{i=1}^{n} \left(\mu_i \cdot \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \right) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \\
\Leftrightarrow \quad 0 \quad &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} (\mu_i) - 1 \right)
\end{aligned}$$

Da $\sum_{i=1}^{n} \mu_i \neq 1$ ist, muss $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$ gelten.

Lösung 7b

Aus $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$ und $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x - x_i) = 0$ folgt

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x - x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \\
&= x \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}_{=0} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \\
&= - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \checkmark
\end{aligned}$$

Aus den folgenden Informationen

$$0 = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i x) - \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i x_i)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$$

lässt sich nun zeigen, dass

$$\begin{aligned}
& & 0 &= x \cdot \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i) - \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i x_i) \\
&\Leftrightarrow & 0 &= x \cdot \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i) \\
&\Rightarrow \forall i \in [1; n] : \lambda_i = 0
\end{aligned}$$

Aus der linearen Unabhängigkeit von $x_1, \ldots, x_n$ folgt, dass $\lambda_1, \ldots, \lambda_n = 0$ gilt. ✓
Daraus folgt, dass $x - x_1, \ldots, x - x_n$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 8

Schreiben Sie das Polynom $v(t) = t^2 + 4t - 3$ auf $\mathbb{R}$ als eine Linearkombination der Polynome $e_1(t) = t^2 - 2t + 5,\ e_2(t) = 2t^2 - 3t$ und $e_3(t) = t + 3$.

Lösung 8

Gesucht sind α, β, γ sodass gilt:

$$v(t) = \alpha \cdot e_1(t) + \beta \cdot e_2(t) + \gamma \cdot e_3(t)$$

Aus den gegebenen Polynomen lässt sich die folgende Koeffizientenmatrix des LGS aufstellen (die Spalten entsprechen den Polynomen e_1, e_2, e_3 und die Ergebnisspalte dem Polynom v):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +2 \cdot I \\ +2 \cdot II - I \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -8 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +8 \cdot II \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 13 & 52 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ :13 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -III \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 \cdot II \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow\ \alpha = -3,\ \beta = 2,\ \gamma = 4$

$$
\begin{aligned}
v(t) &= \alpha \cdot e_1(t) + \beta \cdot e_2(t) + \gamma \cdot e_3(t) \\
\Rightarrow v(t) &= -3 \cdot e_1(t) + 2 \cdot e_2(t) + 4 \cdot e_3(t) \\
\Rightarrow v(t) &= -3 \cdot \left(t^2 - 2t + 5\right) + 2 \cdot \left(2t^2 - 3t\right) + 4 \cdot (t + 3) \\
&= -3t^2 + 6t - 15 + 4t^2 - 6t + 4t + 12 \\
&= t^2 + 4t - 3 \checkmark
\end{aligned}
$$