Aufgabe 6

Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden durch die Punkte A und B. Untersuchen Sie jeweils, ob der Punkt C auf dieser Geraden liegt.
(a)

$$A = (-2|1),\ B = (2|2),\ C = (-10|5)$$

(b)

$$A = (1|2|3),\ B = (3|1|2),\ C = (-9|7|8)$$

Lösung 6a

Eine Gerade G kann durch eine Geradengleichung der Form $\forall x \in G : x = \vec{p} + \alpha \cdot \vec{v}$ beschrieben werden, welche den Ortsvektor $\vec{p}$ zum Punkt A, sowie den Richtungsvektor $\vec{v} = \overrightarrow{OB} - \vec{p}$ zwischen dem Punkt B und A verwendet.

$$\begin{aligned} x &= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ \Leftrightarrow \quad x &= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad x &= \begin{pmatrix} 4\alpha - 2 \\ \alpha + 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 4\alpha - 2 \\ x_2 &= \alpha + 1 \end{aligned}$$

Der Punkt C liegt auf der Gerade, wenn $\exists \alpha : -10 = 4\alpha - 2 \land 5 = \alpha + 1$ ↯
$\Rightarrow$ Es existiert keine Gerade, auf der alle Punkte liegen.

Lösung 6b

Nach der gleichen Argumentation gilt in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} x &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \\ \Leftrightarrow \quad x &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad x &= \begin{pmatrix} 1 + 2\alpha \\ 2 - \alpha \\ 3 - \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wenn der Punkt C auf der Geraden liegt, muss ein α existieren, für dass $x = c$:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + 2\alpha \\ x_2 &= 2 - \alpha \\ x_3 &= 3 - \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lcrl} x_1: & & -9 = & 1 + 2\alpha \\ & \Leftrightarrow & \alpha = & -5 \\ x_2: & & 7 = & 2 - (-5) \quad \checkmark \\ x_3: & & 8 = & 3 - (-5) \quad \checkmark \end{array}$$

$\Rightarrow$ Der Punkt C liegt auf der Geraden.

Aufgabe 7

Gegeben sei die Gerade g mit

$$g : x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie eine Gerade, die senkrecht zu der Geraden g ist und zusätzlich durch den Punkt (4|3) geht.

Lösung 7

Durch Bemerkung 2.21 wissen wir, dass der Vektor $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ liegt. Damit ist der Richtungsvektor der gesuchten Geraden gegeben.

Verwendet man nun den Punkt (4|3) als Aufpunkt, so erhält man die Gerade h, welche notwendigerweise senkrecht zu g ist und durch den Punkt (4|3) geht:

$$h : x = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8

Bestimmen Sie die Lösungen x der Gleichung $a \times x = b$ für $a = (2,\ -1,\ 3)^T$ und
(a)

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(b)

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

falls es überhaupt Lösungen gibt.

Lösung 8a

$$a \times x = b$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -x_3 - 3x_2 \\ 3x_1 - 2x_3 \\ 2x_2 + x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Dies kann man als Lineares Gleichungssystem schreiben:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \to III \\ \to II \\ \to I \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot (-1/3) \\ +(-3\cdot I) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & -6 & -2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +(6\cdot II) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Das LGS ist unterbestimmt, also existiert keine eindeutige Lösung.

Lösung 8b

$$a \times x = b$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -x_3 - 3x_2 \\ 3x_1 - 2x_3 \\ 2x_2 + x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Als LGS:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \to III \\ \to II \\ \to I \end{array}$$
$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-1/3) \\ +(-3\cdot I) \end{array}$$
$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & -6 & -2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +(6\cdot II) \end{array}$$
$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \lightning \end{array}$$

Durch den Widerspruch ist gezeigt, dass keine Lösung existiert. $\mathbb{L} = \emptyset$