Aufgabe 8

Gegeben sei die Basis $B = \{1,\ x^2,\ x^4\}$ des Vektorraums V der achsensymmetrischen Polynome maximal 4. Grades.

a) Zeigen Sie, dass die Lineare Hülle von B einen Untervektorraum vom Vektorraum P_4 der Polynome vom Grad 4 bildet.

b) Untersuchen Sie die folgenden Polynome aus V auf lineare Unabhängigkeit:

$$3x^4 - 7x^2 + 2$$
$$-x^4 + 2x^2 - 1$$
$$4x^4 + 3x^2 + 2$$

Lösung 8a

Für einen Untervektorraum $U \subseteq V$ muss nach Definition 3.27 gelten:

$$U \neq \emptyset$$
$$\forall x, y \in U : x \oplus y \in U$$
$$\forall x \in U, \forall \lambda \in K : \lambda \odot x \in U$$

Die Elemente des Untervektorraums sei die Lineare Hülle von B, also

$$\mathcal{L}(B) = \lambda_1 + \lambda_2 \cdot x^2 + \lambda_3 \cdot x^4 \text{ mit } \lambda_{1,2,3} \in K.$$

Außerdem betrachten wir den Vektorraum der Polynome vom Grad 4 allgemein als

$$P_4 = \left\{ p \in P \middle| \forall a_k \in K : p = \sum_{k=0}^{4} a_k \cdot x^k \right\}$$

Teilmengenbeziehung:

$$\mathcal{L}(B) \subseteq P_4 \Leftrightarrow x \in \mathcal{L}(B) \Rightarrow x \in P_4$$

Setze für $a_0 = \lambda_1, a_1 = 0, a_2 = \lambda_2, a_3 = 0, a_4 = \lambda_3$, dann gilt $\mathcal{L}(B) = P_4$. Da $0 \in K$ und $\lambda_{1,2,3} \in K$ folgt daraus die bezeichnete Teilmengenrelation.

Abgeschlossenheit bzgl. der Addition:
Seien $p_1, p_2 \in \mathcal{L}(B)$ beliebig, so muss auch $(p_1 + p_2) \in \mathcal{L}(B)$ sein.

$$p_1 + p_2 = \lambda_1 + \lambda_2 \cdot x^2 + \lambda_3 \cdot x^4 + \mu_1 + \mu_2 \cdot x^2 + \mu_3 \cdot x^4$$

$$= \underbrace{(\lambda_1 + \mu_1)}_{\in K} + \underbrace{(\lambda_2 + \mu_2)}_{\in K} \cdot x^2 + \underbrace{(\lambda_3 + \mu_3)}_{\in K} \cdot x^4$$

$$\Rightarrow (p_1 + p_2) \in \mathcal{L}(B) \checkmark$$

Abgeschlossenheit bzgl. der Multiplikation:
Sei $p_1 \in \mathcal{L}(B)$ beliebig und $r \in K$, so muss auch $(r \cdot p_1) \in \mathcal{L}(B)$ sein.

$$\begin{aligned} r \cdot p_1 &= r \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 \cdot x^2 + \lambda_3 \cdot x^4) \\ &= \underbrace{r \cdot \lambda_1}_{\in K} + \underbrace{r \cdot \lambda_2}_{\in K} \cdot x^2 + \underbrace{r \cdot \lambda_3}_{\in K} \cdot x^4 \\ &\Rightarrow (r \cdot p_1) \in \mathcal{L}(B) \checkmark \end{aligned}$$

Lösung 8b

Die Polynome sind linear **unabhängig**, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix **ungleich** 0 ist.

$$\det \begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 12 + 28 - 6 - 14 + 9 - 16 = 13 \neq 0$$

Daraus folgt, dass die Polynome linear unabhängig sind.