Aufgabe 6

Bestimmen Sie das orthogonale Komplement $\mathcal{L}^{\perp}$ zu $\mathcal{L}$, der linearen Hülle der gegebenen Vektoren.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Welche Dimension besitzt $\mathcal{L}^{\perp}$?

Lösung 6

Sei $V = \mathbb{R}^4$ und nach Definition $\mathcal{L}^{\perp} = \{x \in V | \langle x, l \rangle = 0\}$ so erhalten wir ein LGS, dessen erweiterte Koeffizientenmatrix mit Gauß zu lösen ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +I \cdot (-1) \\ +I \cdot (-1) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow x_3 = -x_1 \\ \Rightarrow x_2 = 0 \\ \Rightarrow x_4 = 0 \end{matrix}$$

$\Rightarrow$

$$\mathcal{L}^{\perp} = \left\{ x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

Die Dimension des orthogonale Komplements zu $\mathcal{L}$ ist $\dim\left(\mathcal{L}^{\perp}\right) = 1$, da die Basis von $\mathcal{L}^{\perp}$ nur aus dem Vektor $v_1 = (x_1,\ 0,\ -x_1,\ 0)^T$ besteht.

Aufgabe 7

Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Seien zwei endliche Mengen M und N Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Aus $N \subseteq M$ folgt $\mathcal{L}(N) \subseteq \mathcal{L}(M)$.

b) Für $M \subseteq \mathbb{R}^n$, M endlich, gilt $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(\mathcal{L}(M))$.

Lösung 7a

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{L}(N) \Rightarrow x = & \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \cdot n_k \\ = & \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \cdot n_k + 0 \\ = & \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \cdot n_k + \sum_{m \in M \setminus N} 0 \cdot m \\ \Rightarrow \quad & x \in \mathcal{L}(M) \\ \Rightarrow \quad & \mathcal{L}(N) \subseteq \mathcal{L}(M) \checkmark \end{aligned}$$

Lösung 7b

Es ist zu zeigen, dass $\mathcal{L}(\mathcal{L}(M)) \subseteq \mathcal{L}(M)$.

Sei $x \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(N))$ so gilt $x = \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot m_i$ mit $m_i \in \mathcal{L}(N)$ für $n \in [1;k]$.
Dann ist $m_i = \sum_{j=1}^{l} k_j \cdot n_j$.
Somit ist $a_i \cdot m_i = a_i \cdot \sum_{j=1}^{l} b_j \cdot n_j = \sum_{j=1}^{1} a_i \cdot b_j \cdot n_j$. Außerdem ist dann

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot m_i &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} a_i \cdot b_j \cdot n_j \\ &= \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot b_j \cdot n_j \\ &= \sum_{j=1}^{l} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{k} a_i \right) \cdot b_j}_{:= c_j} \cdot n_j \end{aligned}$$

So sieht man, dass $x \in \mathcal{L}(N)$ ✓
Aus $M \subseteq N$ folgt $\mathcal{L}(M) \subseteq \mathcal{L}(N)$. Setze ein $N = \mathcal{L}(M)$. Da $M \subseteq \mathcal{L}(M)$ ist, folgt ebenso $\mathcal{L}(M) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{L}(M))$. ✓

Aufgabe 8

Gegeben sei die Basis $B = \{1,\ x^2,\ x^4\}$ des Vektorraums V der achsensymmetrischen Polynome maximal 4. Grades.

a) Zeigen Sie, dass die Lineare Hülle von B einen Untervektorraum vom Vektorraum P_4 der Polynome vom Grad 4 bildet.

b) Untersuchen Sie die folgenden Polynome aus V auf lineare Unabhängigkeit:

$$3x^4 - 7x^2 + 2$$
$$-x^4 + 2x^2 - 1$$
$$4x^4 + 3x^2 + 2$$

Lösung 8a

Für einen Untervektorraum $U \subseteq V$ muss nach Definition 3.27 gelten:

$$U \neq \emptyset$$
$$\forall x, y \in U : x \oplus y \in U$$
$$\forall x \in U, \forall \lambda \in K : \lambda \odot x \in U$$

Die Elemente des Untervektorraums sei die Lineare Hülle von B, also

$$\mathcal{L}(B) = \lambda_1 + \lambda_2 \cdot x^2 + \lambda_3 \cdot x^4 \text{ mit } \lambda_{1,2,3} \in K.$$

Außerdem betrachten wir den Vektorraum der Polynome vom Grad 4 allgemein als

$$P_4 = \left\{ p \in P \middle| \forall a_k \in K : p = \sum_{k=0}^{4} a_k \cdot x^k \right\}$$

Teilmengenbeziehung:

$$\mathcal{L}(B) \subseteq P_4 \Leftrightarrow x \in \mathcal{L}(B) \Rightarrow x \in P_4$$

Setze für $a_0 = \lambda_1, a_1 = 0, a_2 = \lambda_2, a_3 = 0, a_4 = \lambda_3$, dann gilt $\mathcal{L}(B) = P_4$. Da $0 \in K$ und $\lambda_{1,2,3} \in K$ folgt daraus die bezeichnete Teilmengenrelation.

Abgeschlossenheit bzgl. der Addition:
Seien $p_1, p_2 \in \mathcal{L}(B)$ beliebig, so muss auch $(p_1 + p_2) \in \mathcal{L}(B)$ sein.

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &= \lambda_1 + \lambda_2 \cdot x^2 + \lambda_3 \cdot x^4 + \mu_1 + \mu_2 \cdot x^2 + \mu_3 \cdot x^4 \\ &= \underbrace{(\lambda_1 + \mu_1)}_{\in K} + \underbrace{(\lambda_2 + \mu_2)}_{\in K} \cdot x^2 + \underbrace{(\lambda_3 + \mu_3)}_{\in K} \cdot x^4 \\ &\Rightarrow (p_1 + p_2) \in \mathcal{L}(B) \checkmark \end{aligned}$$

Abgeschlossenheit bzgl. der Multiplikation:
Sei $p_1 \in \mathcal{L}(B)$ beliebig und $r \in K$, so muss auch $(r \cdot p_1) \in \mathcal{L}(B)$ sein.

$$\begin{aligned} r \cdot p_1 &= r \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 \cdot x^2 + \lambda_3 \cdot x^4) \\ &= \underbrace{r \cdot \lambda_1}_{\in K} + \underbrace{r \cdot \lambda_2}_{\in K} \cdot x^2 + \underbrace{r \cdot \lambda_3}_{\in K} \cdot x^4 \\ &\Rightarrow (r \cdot p_1) \in \mathcal{L}(B) \checkmark \end{aligned}$$

Lösung 8b

Die Polynome sind linear **unabhängig**, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix **ungleich** 0 ist.

$$\det \begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 12 + 28 - 6 - 14 + 9 - 16 = 13 \neq 0$$

Daraus folgt, dass die Polynome linear unabhängig sind.