Aufgabe 8

Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$x = \begin{pmatrix} -3/5 \\ 4/5 \\ 0 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \\ 0 \end{pmatrix},\ z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis des euklidischen Raums R^3 (mit dem Standardskalarprodukt) bilden.

Lösung 8

Nach Definition 3.128, Seite 111 muss für eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}_{ON} = (x, y, z)$ folgende Bedingungen erfüllt sein:
1. Orthogonalsystem: $x \perp y \wedge y \perp z \wedge x \perp z$
2. Orthonormalsystem: $\|x\| = \|y\| = \|z\| = 1$
3. Orthogonalbasis: x, y, z ist ein minimales Erzeugendensystem vom Vektorraum V

1. $\mathcal{B}_{ON}$ ist ein Orthogonalsystem, wenn alle Vektoren paarweise orthogonal sind:

$$< x, y > = \tfrac{-3\cdot 4}{5} + \tfrac{4\cdot 3}{5} + 0$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow x \perp y$$

$$< y, z > = \tfrac{4\cdot 0}{5} + \tfrac{3\cdot 0}{5} + 0$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow y \perp z$$

$$< x, z > = \tfrac{-3\cdot 0}{5} + \tfrac{4\cdot 0}{5} + 0$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow x \perp z$$

$\Rightarrow x \perp y \wedge y \perp z \wedge x \perp z$ ✓

2. Ein Orthogonalsystem $\mathcal{B}_{ON}$ ist ein Orthonormalsystem, wenn die Norm aller Vektoren 1 beträgt:

$$\begin{aligned}\|x\| &= \sqrt{\left(\tfrac{-3}{5}\right)^2 + \left(\tfrac{4}{5}\right)^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{\tfrac{9}{25} + \tfrac{16}{25}} \\ &= \sqrt{\tfrac{25}{25}} \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|y\| &= \sqrt{\left(\tfrac{4}{5}\right)^2 + \left(\tfrac{3}{5}\right)^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{\tfrac{16}{25} + \tfrac{9}{25}} \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|z\| &= \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} \\ &= 1\end{aligned}$$

$\Rightarrow \|x\| = \|y\| = \|z\| = 1$

3. Ein Orthogonalsystem $\mathcal{B}_{ON}$ ist eine Orthogonalbasis von V, wenn es eine Basis von V ist. Man sieht, dass die Vektoren x, y, z eine Lineare Hülle aufspannen, sodass $L(x, y, z) = \mathbb{R}^3$. Es bleibt die lineare Unabhängigkeit der Vektoren zu zeigen:

$$\begin{aligned}\det(x, y, z) &= \tfrac{-9}{5} + 0 + 0 - 0 - 0 - \left(\tfrac{-9}{5}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow x, y, z$ ist ein minimales Erzeugendes System vom Vektorraum V. ✓

Aus 1, 2 und 3 folgt, dass es sich bei der $\mathcal{B}_{ON}$ um eine Orthonormalbasis des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ handelt.