Aufgabe 1

Untersuchen Sie, ob folgende Funktionen an der Stelle x_0 stetig ergänzbar sind:
(a)

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{für } x < -1 \\ 4x-1 & \text{für } x > -1 \end{cases} \text{ und } x_0 = -1$$

(b)

$$f(x) = x \cdot \cos\frac{1}{x} \text{ und } x_0 = 0$$

(c)

$$f(x) = \frac{1}{e^{\frac{1}{x-1}}} \text{ und } x_0 = 1$$

Lösung 1

Eine Funktion $f(x)$ ist stetig in einem Punkt x_0, genau dann wenn

$$\lim_{x\uparrow x_0} f(x) = \lim_{x\downarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Lösung 1a

Zeige Unstetigkeit mit dem Folgenkriterium:

Dazu die Folge $r_n = -1 + \frac{1}{n}$ für die Annäherung von rechts und $l_n = -1 - \frac{1}{n}$ für die Annäherung von links, da

$$\lim_{n\to\infty} l_n = \lim_{n\to\infty} r_n = -1.$$

Setzt man r_n und l_n in $f(x)$ für die entsprechenden Bereiche, so erhält man für $x < -1$

$$\begin{aligned} f(l_n) &= 2 \cdot l_n + 1 \\ &= 2 \cdot \left(-1 - \tfrac{1}{n}\right) + 1 \\ &= -2 - \tfrac{2}{n} + 1 \\ &= -\tfrac{2}{n} - 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} f(l_n) = \lim_{n\to\infty} -\frac{2}{n} - 1 = -1$$

und für $x > -1$

$$\begin{aligned} f(r_n) &= 4 \cdot r_n - 1 \\ &= 4 \cdot \left(-1 + \tfrac{1}{n}\right) - 1 \\ &= -4 + \tfrac{4}{n} - 1 \\ &= -5 + \tfrac{4}{n} \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} -5 + \frac{4}{n} = -5$$

$\Rightarrow$ Die Funktion $f(x)$ ist an der Stelle x_0 nicht stetig.

Lösung 1b

Die Funktion
$$f(x) = x \cdot \cos\frac{1}{x}$$
ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht definiert $f(x_0) \neq 0$, jedoch ist sie stetig ergänzbar, da

$$\lim_{x\uparrow x_0} f(x) = \lim_{x\uparrow x_0}\left(x \cdot \cos\frac{1}{x}\right) = \underbrace{\lim_{x\uparrow x_0} x}_{\to 0} \cdot \underbrace{\lim_{x\uparrow x_0} \cos\frac{1}{x}}_{\to 0} = 0$$

$$\lim_{x\downarrow x_0} f(x) = \lim_{x\downarrow x_0}\left(x \cdot \cos\frac{1}{x}\right) = \underbrace{\lim_{x\downarrow x_0} x}_{\to 0} \cdot \underbrace{\lim_{x\downarrow x_0} \cos\frac{1}{x}}_{\to 0} = 0$$

gilt und die Funktion daher um $f(x_0) = 0$ ergänzt werden und wie folgt angegeben werden kann:

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \cos\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Lösung 1c

Die Funktion
$$f(x) = \frac{1}{e^{\frac{1}{x-1}}}$$

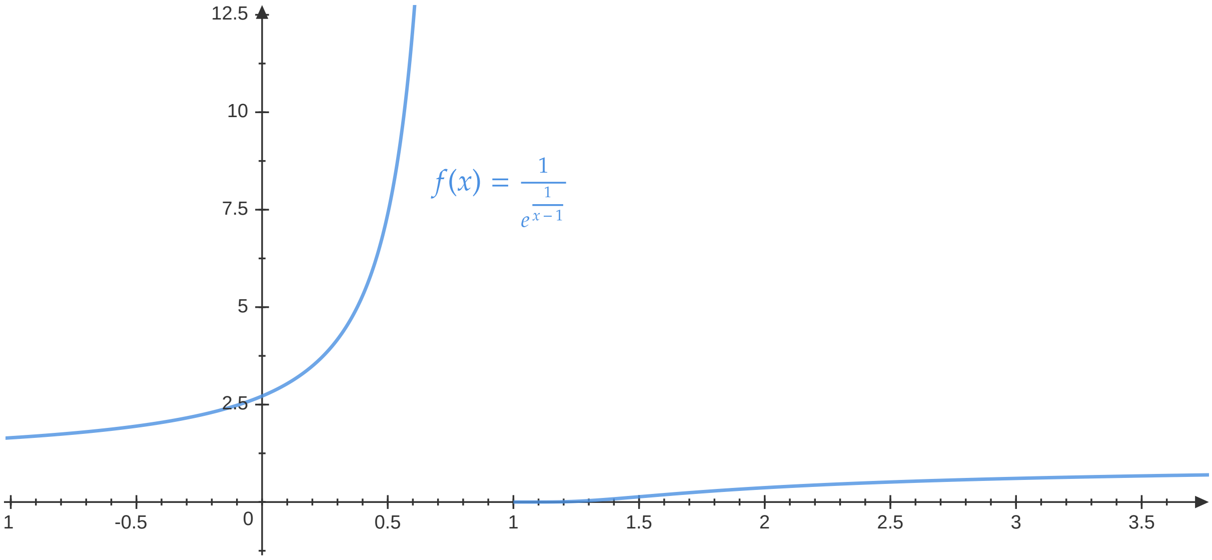

Abbildung 1: Graph von $f(x)$

ist an der Stelle $x_0 = 1$ nicht stetig und kann auch nicht stetig ergänzt werden, da

$$\lim_{x\uparrow x_0} f(x) = \lim_{x\uparrow x_0}\left(\frac{1}{e^{\frac{1}{x-1}}}\right) = \lim_{x\uparrow x_0} \underbrace{\frac{1}{\underbrace{e^{\underbrace{\frac{1}{x-1}}_{\to-\infty}}}_{\to 0}}}_{\to\infty} = \infty$$

$$\lim_{x\downarrow x_0} f(x) = \lim_{x\downarrow x_0}\left(\frac{1}{e^{\frac{1}{x-1}}}\right) = \lim_{x\downarrow x_0} \underbrace{\frac{1}{\underbrace{e^{\underbrace{\frac{1}{x-1}}_{\to\infty}}}_{\to\infty}}}_{\to 0} = 0$$

gilt und somit

$$\lim_{x\uparrow x_0} f(x) \neq \lim_{x\downarrow x_0} f(x).$$