Aufgabe 6

Untersuchen Sie, ob die folgenden Ebenen einen eindeutigen Schnittpunkt im $\mathbb{R}^3$ besitzen:
a)

$$E_1 : x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$
$$E_2 : x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},$$
$$E_3 : x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b)

$$E_1 : x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$E_2 : x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$
$$E_3 : x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Lösung 6

Zunächst werden die Normalenvektoren der gegebenen Ebenen berechnet.
Ist das LGS der drei Ebenen eindeutig lösbar, so existiert ein eindeutiger Schnittpunkt der Ebenen.
Dies ist der Fall, wenn die Ebenen E_1 und E_2 nicht parallel liegen ($\overrightarrow{n_{E_1}} \times \overrightarrow{n_{E2}} \neq 0$) und deren Schnittgerade nicht parallel zu E_3 ist.

$$\left\langle \left(\overrightarrow{n_{E_1}} \times \overrightarrow{n_{E_2}}\right), \overrightarrow{n_{E_3}} \right\rangle \neq 0$$

Da dies auch die Definition der Determinante ist, gilt ebenso:

$$\det\left(\overrightarrow{n_{E_1}}, \overrightarrow{n_{E_2}}, \overrightarrow{n_{E_3}}\right) \neq 0$$

Lösung 6a

$$\overrightarrow{n_{E_1}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{n_{E_2}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -15 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{n_{E_3}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det\left(\overrightarrow{n_{E_1}}, \overrightarrow{n_{E_2}}, \overrightarrow{n_{E_3}}\right) &= \det \begin{pmatrix} -4 & -3 & -1 \\ -4 & -15 & -3 \\ -4 & 9 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (-4)(-15) + (-3)(-3)(-4) + (-1)(-4) \cdot 9 \\ &\quad -(-4)(-3) \cdot 9 - (-3)(-4) - (-1)(-15)(-4) \\ &= 60 - 36 + 36 - 108 - 12 + 60 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\implies$ Es existiert **kein** Schnittpunkt in $\mathbb{R}^3$.

Lösung 6b

$$\overrightarrow{n_{E_1}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{n_{E_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{n_{E_3}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det\left(\overrightarrow{n_{E_1}}, \overrightarrow{n_{E_2}}, \overrightarrow{n_{E_3}}\right) &= \det \begin{pmatrix} -1 & 3 & 16 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 8 \end{pmatrix} \\ &= 3 \cdot 4 \cdot (-3) + (16 \cdot (-2) - (-1) \cdot 4 - 3 \cdot (-2) \cdot 8 \\ &= -36 - 32 + 4 + 48 \\ &= -16 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Es existiert **ein** eindeutiger Schnittpunkt in $\mathbb{R}^3$.