Aufgabe 1

Untersuchen Sie, ob folgende Funktionen an der Stelle x_0 stetig ergänzbar sind:
(a)

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{für } x < -1 \\ 4x-1 & \text{für } x > -1 \end{cases} \text{ und } x_0 = -1$$

(b)

$$f(x) = x \cdot \cos\frac{1}{x} \text{ und } x_0 = 0$$

(c)

$$f(x) = \frac{1}{e^{\frac{1}{x-1}}} \text{ und } x_0 = 1$$

Lösung 1

Eine Funktion $f(x)$ ist stetig in einem Punkt x_0, genau dann wenn

$$\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Lösung 1a

Zeige Unstetigkeit mit dem Folgenkriterium:

Dazu die Folge $r_n = -1 + \frac{1}{n}$ für die Annäherung von rechts und $l_n = -1 - \frac{1}{n}$ für die Annäherung von links, da

$$\lim_{n\to\infty} l_n = \lim_{n\to\infty} r_n = -1.$$

Setzt man r_n und l_n in $f(x)$ für die entsprechenden Bereiche, so erhält man für $x < -1$

$$\begin{aligned} f(l_n) &= 2 \cdot l_n + 1 \\ &= 2 \cdot \left(-1 - \tfrac{1}{n}\right) + 1 \\ &= -2 - \tfrac{2}{n} + 1 \\ &= -\tfrac{2}{n} - 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} f(l_n) = \lim_{n\to\infty} -\frac{2}{n} - 1 = -1$$

und für $x > -1$

$$\begin{aligned} f(r_n) &= 4 \cdot r_n - 1 \\ &= 4 \cdot \left(-1 + \tfrac{1}{n}\right) - 1 \\ &= -4 + \tfrac{4}{n} - 1 \\ &= -5 + \tfrac{4}{n} \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} -5 + \frac{4}{n} = -5$$

$\Rightarrow$ Die Funktion $f(x)$ ist an der Stelle x_0 nicht stetig.

Lösung 1b

Die Funktion

$$f(x) = x \cdot \cos\frac{1}{x}$$

ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht definiert $f(x_0) \neq 0$, jedoch ist sie stetig ergänzbar, da

$$\lim_{x\uparrow x_0} f(x) = \lim_{x\uparrow x_0}\left(x \cdot \cos\frac{1}{x}\right) = \underbrace{\lim_{x\uparrow x_0} x}_{\to 0} \cdot \underbrace{\lim_{x\uparrow x_0} \cos\frac{1}{x}}_{\to 0} = 0$$

$$\lim_{x\downarrow x_0} f(x) = \lim_{x\downarrow x_0}\left(x \cdot \cos\frac{1}{x}\right) = \underbrace{\lim_{x\downarrow x_0} x}_{\to 0} \cdot \underbrace{\lim_{x\downarrow x_0} \cos\frac{1}{x}}_{\to 0} = 0$$

gilt und die Funktion daher um $f(x_0) = 0$ ergänzt werden und wie folgt angegeben werden kann:

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \cos\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Lösung 1c

Die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{e^{\frac{1}{x-1}}}$$

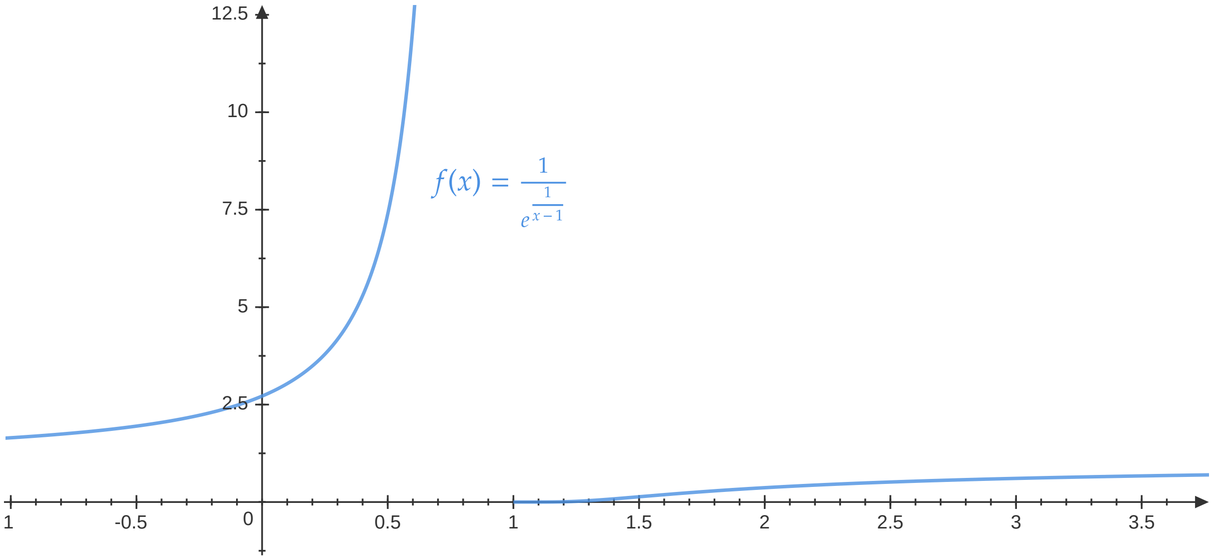

Abbildung 1: Graph von $f(x)$

ist an der Stelle $x_0 = 1$ nicht stetig und kann auch nicht stetig ergänzt werden, da

$$\lim_{x\uparrow x_0} f(x) = \lim_{x\uparrow x_0}\left(\frac{1}{e^{\frac{1}{x-1}}}\right) = \lim_{x\uparrow x_0} \underbrace{\frac{1}{\underbrace{e^{\overbrace{\frac{1}{x-1}}^{}}}_{\to 0}}}_{\to\infty} = \infty$$

$$\lim_{x\uparrow x_0} f(x) = \lim_{x\uparrow x_0}\left(\frac{1}{e^{\frac{1}{x-1}}}\right) = \lim_{x\uparrow x_0} \underbrace{\frac{1}{\underbrace{e^{\underbrace{\frac{1}{x-1}}_{\to -\infty}}}_{\to 0}}}_{\to\infty} = \infty$$

$$\lim_{x\downarrow x_0} f(x) = \lim_{x\downarrow x_0}\left(\frac{1}{e^{\frac{1}{x-1}}}\right) = \lim_{x\downarrow x_0} \underbrace{\frac{1}{\underbrace{e^{\underbrace{\frac{1}{x-1}}_{\to \infty}}}_{\to \infty}}}_{\to 0} = 0$$

gilt und somit

$$\lim_{x\uparrow x_0} f(x) \neq \lim_{x\downarrow x_0} f(x).$$

Aufgabe 2

Entscheiden Sie, ob die folgende Funktion auf dem Intervall $[-1;1]$ gleichmäßig stetig ist

$$f(x) = \frac{x}{4 - x^2}$$

Lösung 2

Die Funktion $f(x)$ ist an der Stelle x_0 stetig, falls

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta(x_0, \epsilon) > 0 \ : \ \forall (x - x_0) < \delta \ : \ |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Die Funktion $f(x)$ ist **gleichmäßig stetig** in einem Intervall D, wenn in jedem Punkt $x_0 \in D$ gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0 \forall x, x_0 \in D : (|x - x_0| < \delta(\epsilon) \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon).$$

Hinweis: Dabei muss δ unabhängig von x_0 sein.

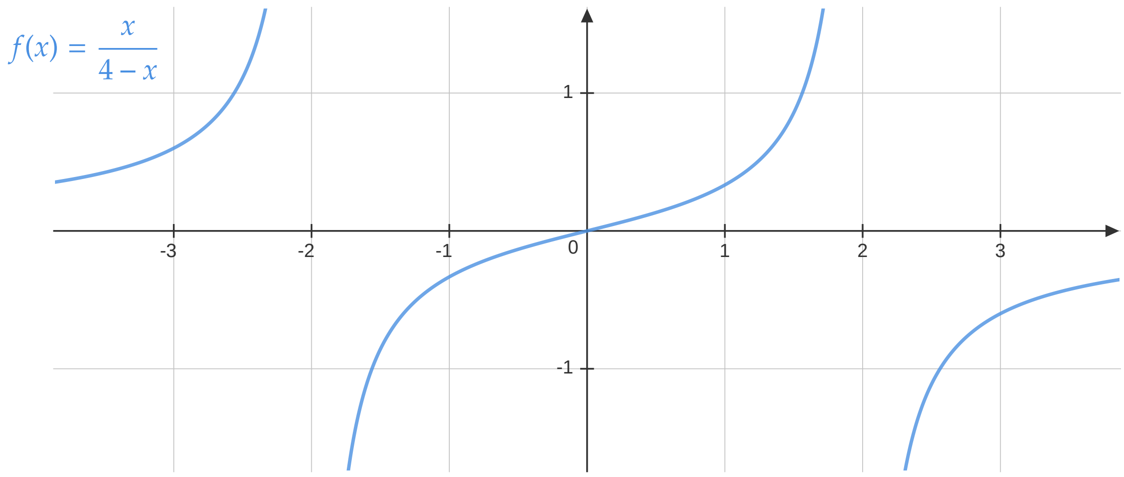

Abbildung 2: Graph von $f(x)$

Stetigkeit mit ϵ-δ-Beweis zu zeigen. Sei $\epsilon > 0$ und $x_0 \in [-1;1]$

$$
\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &\equiv \left| \frac{x}{4-x^2} - \frac{x_0}{4-x_0^2} \right| \\
&= \left| \frac{x \cdot (4-x_0^2) - x_0 \cdot (4-x^2)}{(4-x^2)\cdot(4-x_0^2)} \right| \\
&= \left| \frac{4x - x_0^2 x - 4x_0 + x_0 x^2}{(4-x^2)\cdot(4-x_0^2)} \right| \\
&= \left| \frac{(4x - 4x_0) + x_0 x^2 - x_0^2 x}{(4-x^2)\cdot(4-x_0^2)} \right| \\
&= \left| \frac{4(x-x_0) + (x-x_0)x_0 x}{(4-x^2)\cdot(4-x_0^2)} \right| \\
&= \left| \frac{(x-x_0)\cdot(4+x_0 x)}{(4-x^2)\cdot(4-x_0^2)} \right| \\
&= \frac{\overbrace{|x-x_0|}^{\delta} \cdot \overbrace{|4+x_0 x|}^{\le 5}}{\underbrace{\left|4-x^2\right|}_{\ge 3} \cdot \underbrace{\left|4-x_0^2\right|}_{\ge 3}} \\
&\overset{x,x_0 \in [-1;1]}{\le} \frac{\delta \cdot 5}{3 \cdot 3} \\
&= \frac{5}{9} \cdot \delta \\
&< \epsilon \\
\Leftrightarrow \qquad \delta &< \frac{9}{5} \cdot \epsilon
\end{aligned}
$$

Unter Verwendung des Intervalls konnte $\delta(\epsilon)$ abgeschätzt und allein in Abhängigkeit von ϵ angegeben werden. Somit ist die Funktion im Intervall gleichmäßig stetig.

Aufgabe 3

Sind die folgende Funktionen lokal Lipschitz-stetig im Punkt x_0? Berechnen Sie ggf. die Lipschitz-Konstante L in Abhängigkeit von δ.

(a) $f(x) = \sqrt{2+3x}$, $x_0 = 1$

(b) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, $x_0 = -1$

Lösung 3

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig in einem Punkt $x_0 \in D$, wenn gilt

$$\exists L \geq 0 \forall x, x_0 \in D : |f(x) - f(x_0)| \leq L \cdot |x - x_0|.$$

Daraus folgt für die Lipschitz-Konstante L

$$L \geq \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|}$$

Außerdem gilt $|x - x_0| < \delta \Leftrightarrow x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$.

Lösung 3a

$$\begin{aligned}
& L \geq \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|} \\
\equiv \quad & L \geq \frac{\left|\sqrt{2+3x}-\sqrt{2+3x_0}\right|}{|x-x_0|} \\
& = \frac{\left|\sqrt{2+3x}-\sqrt{2+3x_0}\right| \cdot \left|\sqrt{2+3x}+\sqrt{2+3x_0}\right|}{|x-x_0| \cdot \left|\sqrt{2+3x}+\sqrt{2+3x_0}\right|} \\
& = \frac{|2+3x|-|2+3 \cdot x_0|}{|x-x_0| \cdot \left|\sqrt{2+3x}+\sqrt{2+3x_0}\right|} \\
& = \frac{3 \cdot |(x-x_0)|}{|x-x_0| \cdot \left|\sqrt{2+3x}+\sqrt{2+3x_0}\right|} \\
& = \frac{3}{\left|\sqrt{2+3x}+\sqrt{2+3x_0}\right|} \\
& > \frac{3}{\left|\sqrt{2+3(x_0+\delta)}+\sqrt{2+3x_0}\right|} \\
\Rightarrow L(\delta) & > \frac{3}{\left|\sqrt{5+3\delta}+\sqrt{5}\right|}
\end{aligned}$$

Lösung 3b

$$\begin{aligned}
& L \geq \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|} \\
\equiv \quad & L \geq \frac{\left|\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x_0^2+1}\right|}{|x-x_0|} \\
& = \frac{\left|\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x_0^2+1}\right| \cdot \left|\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x_0^2+1}\right|}{|x-x_0| \cdot \left|\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x_0^2+1}\right|} \\
& = \frac{\left|x^2+1\right|-\left|x_0^2+1\right|}{|x-x_0| \cdot \left|\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x_0^2+1}\right|} \\
& = \frac{|x-x_0| \cdot |x+x_0|}{|x-x_0| \cdot \left|\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x_0^2+1}\right|} \\
& = \frac{|x+x_0|}{\left|\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x_0^2+1}\right|} \\
& > \frac{|(x_0-\delta)+x_0|}{\left|\sqrt{(x_0+\delta)^2+1}+\sqrt{x_0^2+1}\right|} \\
& = \frac{|2x_0-\delta|}{\left|\sqrt{(x_0+\delta)^2+1}+\sqrt{x_0^2+1}\right|} \\
\Rightarrow & L(\delta) > \frac{|2x_0-\delta|}{\left|\sqrt{(x_0+\delta)^2+1}+\sqrt{x_0^2+1}\right|}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$$

(a) Beweisen Sie, dass $f(x)$ mindestens eine Nullstelle im Intervall $\left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$ besitzt.

(b) Welche Auswirkung hat die Vergrößerung des zu untersuchenden Intervall auf $\left[-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right]$? Was bedeutet dies für die Nullstellensuche?

(c) Wie viele Nullstellen kann ein Polynom n-ten Gerades maximal haben?

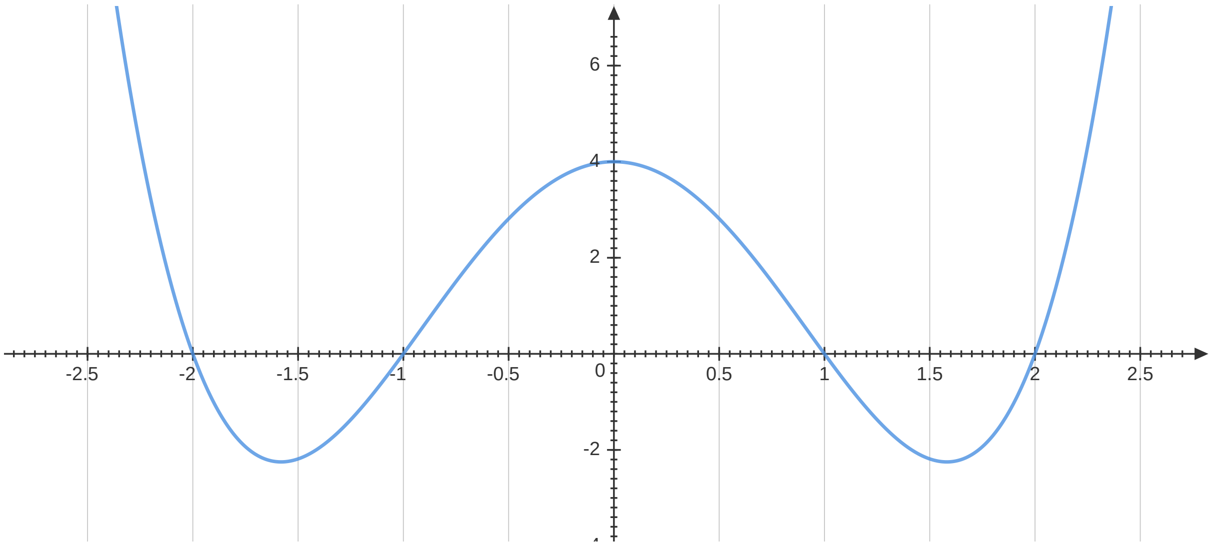

Abbildung 3: Graph von $f(x)$

Lösung 4

Lösung 4a

Untersuchung mit Nullstellensatz (die Stetigkeit des Polynoms kann vorausgesetzt werden):

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{35}{16} \text{ und } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{45}{16}$$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \Longrightarrow \exists\, x^* \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right] \text{ mit } f\left(x^*\right) = 0$$

Lösung 4b

Die Untersuchung mit dem Nullstellensatz funktioniert nun nicht mehr, da mit

$$f\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{189}{16}$$

$$f\left(-\frac{5}{2}\right) \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) > 0 \not\Rightarrow \exists\, x^* \in \left[-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right] \text{ mit } f\left(x^*\right) = 0$$

keine oder eine gerade Anzahl an Nullstellen vorliegen können.

Lösung 4c

Ein Polynom p vom Grad n kann keine oder endlich viele, aber maximal n verschiedene Nullstellen haben $x_1, x_2, \ldots, x_r$ $(r \leq n)$.

Aufgabe 5

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x} + 2$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion auf dem Intervall $[2; 5]$ die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes erfüllt.

(b) Mit dem Startpunkt $x_0 = 3$ berechnen Sie mit der a-priori-Abschätzung die notwendige Anzahl Iterationen, um den Fixpunkt mit der Genauigkeit $\epsilon = \frac{1}{1.000}$ zu berechnen.

(c) Mit demselben Startpunkt und derselben verlangten Genauigkeit, berechnen Sie die Iterationen, bis mit der a-posteriori Abschätzung die Genauigkeit erreicht ist.

Sie dürfen die Monotonie der Funktion ausnutzen.

Lösung 5

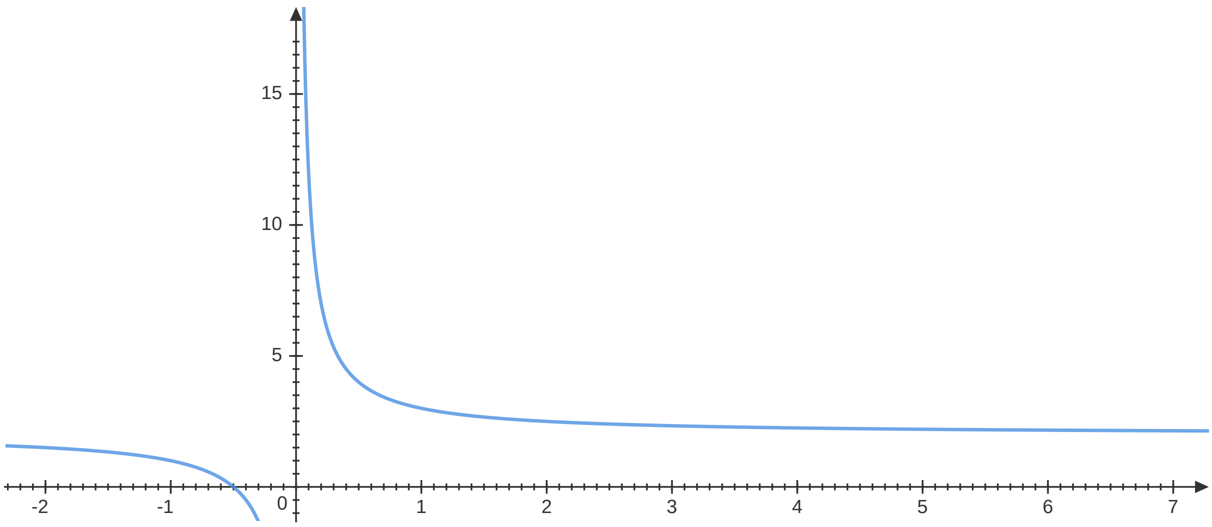

Abbildung 4: Graph von $f(x)$

Lösung 5a

Fixpunktsatz: Sei $f : [a, b] \to [c, d]$ stetig mit $[c, d] \subset [a, b]$ (selbstkontrahierend), dann existiert ein Fixpunkt $u = f(u)$. *(Schelthoff, S. 157 Satz 143)*[1]

[1] Schelthoff, Christof (2018): MATSE-MATIK. Analysis 1, 6. Auflage, Aachen, Shaker Verlag.

$f(x) = \frac{1}{x}$ ist bekanntermaßen stetig für $x \neq 0$ und da die Definitionslücke nicht in dem untersuchten Intervall enthalten ist $0 \notin [2;5]$ ist die Funktion in dem Intervall stetig. Die Funktion bildet das Intervall $[2;5]$ auf das Intervall $\left[\frac{5}{2};\frac{11}{5}\right]$ ab

$$f : [2;5] \ \rightarrow \left[\frac{5}{2};\frac{11}{5}\right]$$

und der Wertebereich ist Teilmenge des Definitionsbereichs

$$\left[\frac{5}{2};\frac{11}{5}\right] \subset [2;5] \checkmark$$

also exisiter ein Fixpunkt.

Lösung 5b

Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig in einem Punkt $x_0 \in D$, wenn gilt

$$\exists L \geq 0 \forall x, x_0 \in D : |f(x) - f(x_0)| \leq L \cdot |x - x_0|.$$

Daraus folgt für die Lipschitz-Konstante L

$$L \geq \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|}$$

Für die gegebene Funktion bedeutet das:

$$\begin{aligned} L &\geq \frac{\left|(\frac{1}{x}+2)-\left(\frac{1}{x_0}+2\right)\right|}{|x-x_0|} \\ &= \frac{\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|}{|x-x_0|} \\ &= \frac{\frac{|x_0-x|}{x \cdot x_0}}{|x-x_0|} \\ &= \frac{|x_0-x|}{x \cdot x_0 \cdot |x-x_0|} \\ &= \frac{1}{x \cdot x_0} \end{aligned}$$

Die Fixpunkt-Iteration zur numerische Annäherung an Fixpunkt x_{n+1} lautet

$$x_{n+1} = f(x_n) = \frac{1}{x_n} + 2$$

Diese ist gleichmäßig stetig auf dem Intervall $[2;5]$ mit

$$\left|\left(\frac{1}{x}+2\right) - \left(\frac{1}{x_0}+2\right)\right| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| \leq \left|\frac{x_0 - x}{x \cdot x_0}\right| \leq \frac{1}{2 \cdot 2}|x - x_0|$$

und die Abbildung ist kontrahierend. Weiterhin ist mit $x_0 = 3$ dann $x_1 = f(3) = \frac{7}{3}$, also ist

$$|x_1 - x_0| = \left|\frac{7}{3} - \frac{9}{3}\right| = \frac{2}{3}.$$

Der Fixpunkt soll mit einer Genauigkeit von $\epsilon = \frac{1}{1.000}$ berechnet werden.
Eine a-priori Abschätzung erfolgt für den Fehler $|x_n - x^*|$, wobei x_n ist der Fixpunkt mit der Genauigkeit ϵ und x^* der eigentlich Fixpunkt ist, nach folgender Definition (Schelthoff, S. 157 Satz 144):

$$|x_n - x^*| \leq \frac{L^n}{1-L} \cdot |x_1 - x_0| < \epsilon \text{ mit } x_0 \in [a;b],\ x_1 = f(x_0).$$

Mit $L = \frac{1}{4}$ ergibt sich nach der folgenden Umformung für die Anzahl der Iterationen:

$$\begin{aligned}
L^n &< \tfrac{\epsilon\cdot(1-L)}{|x_1-x_0|} \\
\Leftrightarrow\ n &> \frac{\ln\left(\frac{|x_1-x_0|}{\epsilon\cdot(1-L)}\right)}{\ln\left(\frac{1}{L}\right)} \\
\equiv\ n &> \frac{\ln\left(\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{1.000}\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)}\right)}{\ln(4)} \\
&= \frac{\ln\left(\frac{2\cdot 1.000}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)}{\ln(4)} \\
&= \frac{\ln\left(\frac{2\cdot 1.000\cdot 4}{3\cdot 3}\right)}{\ln(4)} \\
&= \frac{\ln\left(\frac{8.000}{9}\right)}{\ln(4)} \\
&\approx 4,897\ldots
\end{aligned}$$

Damit ist $n_0 = 5$ und die Berechnung des Fixpunktes in der gewünschten Genauigkeit nach 5 Iterationen erreicht.

Lösung 5c

Für die a-posteriori Abschätzung gilt analog $|x_n - x^*| \leq \frac{1}{1-L} \cdot |x_n - x_{n-1}| < \epsilon$ und bleibt dem Leser als Aufgabe selbst überlassen.