Aufgabe 3

Untersuchen Sie das folgende Integral auf Konvergenz

$$\int_3^\infty \frac{x-2}{x^4 - x^3 + 13x^2 - 4x + 3}\,dx$$

Lösung 3

Nach dem Integralkriterium können wir das Konvergenzverhalten dieses Integrals untersuchen, in dem wir die Reihe auf konvergenz untersuchen.

$$\lim_{a\to\infty} \int_3^a \frac{x-2}{x^4 - x^3 + 13x^2 - 4x + 3}\,dx$$

$$\sum_{x=3}^{\infty} \frac{x-2}{x^4 - x^3 + 13x^2 - 4x + 3}$$

Aus dem Majorantenkriterium folgt, dass wenn

$$\forall x \in \mathbb{N}, x \geq 3 : \frac{x-2}{x^4 - x^3 + 13x^2 - 4x + 3} \leq \frac{1}{x^2}$$

auch

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x-2}{x^4 - x^3 + 13x^2 - 4x + 3} \leq \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{x^2}$$

gelten muss.
Weil die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ nach $\frac{\pi^2}{6}$ konvergiert und für die Reihe ab Laufindex $n = 3$ gilt

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{5}{4} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4}$$

muss auch die zu untersuchende Reihe konvergieren und damit auch das Integral.