Aufgabe 7

$x_1, \ldots, x_n$ seien linear unabhängige Vektoren aus einem K-Vektorraum V. Weiter sei $x = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i$ und $\mu_i \in K$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Es ist zu zeigen, dass unter der Voraussetzung $\sum_{i=1}^n \mu_i \neq 1$ die Vektoren $x - x_1, \ldots x - x_n$ linear unabhängig sind.

Lösung 7a

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x - x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i x) - \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i x_i) \\
&= x \cdot \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i) - \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\mu_i x_i) \cdot \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i) - \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} (\lambda_j) \cdot \mu_i x_i \right) - \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\left(\sum_{j=1}^{n} (\lambda_j) \cdot \mu_i \right) - \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i) \right) x_i \right)
\end{aligned}$$

Aus der linearen Unabhängigkeit folgt:

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} (\lambda_j) \cdot \mu_i \right) - \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i) \\
\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} (\lambda_j) \cdot \mu_i \right) \\
\Rightarrow \forall i \in [1; n] : \lambda_i &= \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j) \cdot \mu_i
\end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \lambda_i &= \sum_{i=1}^{n} \left(\mu_i \cdot \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \right) \\
\Leftrightarrow \quad 0 &= \sum_{i=1}^{n} \left(\mu_i \cdot \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \right) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \\
\Leftrightarrow \quad 0 &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} (\mu_i) - 1 \right)
\end{aligned}$$

Da $\sum_{i=1}^n \mu_i \neq 1$ ist, muss $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ gelten.

Lösung 7b

Aus $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$ und $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x - x_i) = 0$ folgt

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x - x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \\
&= x \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}_{=0} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \\
&= - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \ \checkmark
\end{aligned}$$

Aus den folgenden Informationen

$$0 = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i x) - \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i x_i)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$$

lässt sich nun (beinahe) zeigen, dass

$$\begin{aligned}
& & 0 &= x \cdot \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i) - \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i x_i) \\
&\Leftrightarrow & 0 &= x \cdot \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i) \\
&\Rightarrow \forall i \in [1; n] : \lambda_i = 0
\end{aligned}$$