Aufgabe 3

Berechnen Sie:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\int\limits_0^x \frac{1}{t+e^{-1}}\,dt\right)$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\int\limits_0^x \frac{t+1}{t^2+2}\,dt\right)$

Lösung 3a

Wir betrachten das Integral $\int_0^x \frac{1}{t+e^{-1}}dt$ und substituieren $u(t) = t + e^{-1}$. Das bedeutet für die untere Grenze $u(0) = e^{-1}$ und für die obere Grenze $u(x) = x + e^{-1}$.

$$\int\limits_0^x \frac{1}{t+e^{-1}}\,dt = \int\limits_{e^{-1}}^{x+e^{-1}} \frac{1}{u}\,du = [\ln(u)]_{e^{-1}}^{x+e^{-1}} = \ln\left(x+\frac{1}{e}\right) - \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \ln(e\cdot x+1)+1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\int\limits_0^x \frac{1}{t+e^{-1}}\,dt\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln(e\cdot x+1)+1}{x}\right)$$

Nach dem Satz von L'Hospital gilt hier, mit $f(x) = \ln(e\cdot x+1)+1$ und $f'(x) = \frac{e}{1+e\cdot x}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln(e\cdot x+1)+1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{e}{1+e\cdot x}}{1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{e}{1+e\cdot x}\right) = 0$$

Lösung 3b

Analog gilt mit L'Hospital auch hier

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\int\limits_0^x \frac{t+1}{t^2+2}\,dt\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x^2+2} - 0\right)$$

Der größte Exponent im Nenner des Terms ist x^2, weshalb wir Zähler und Nenner dadurch teilen. Wir erhalten:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)+\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)}{1+\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x^2}\right)} = \frac{0+0}{1+0} = 0$$