

Aufgabe 1

Bestimmen Sie mit Hilfe des Differentialquotienten die Tangentensteigung an der Stelle $x_0 = 3$ von folgenden Funktionen:

$$\text{a) } f(x) = 2x^3 + x - 1 \qquad \text{b) } f(x) = \frac{2}{3x^3} \qquad \text{c) } f(x) = \sqrt{2x + 3}$$

Lösung 1

Der Differentialquotient oder auch die Ableitung von f an der Stelle x_0 ist:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \Delta(x) = f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Entsprechend gilt im Folgenden:

Lösung 1a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \Delta(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2(x_0+h)^3 + x_0+h-1) - (2x_0^3 + x_0-1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x_0+h)^3 + h - 2x_0^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x_0^3 + 6x_0^2h + 6x_0h^2 + 2h^3 + h - 2x_0^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot (6x_0^2 + 6x_0h + 2h^2 + 1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 6x_0^2 + 6x_0h + 2h^2 + 1 \\ &= 6x_0^2 + 1 \\ &\stackrel{x_0=3}{=} 6 \cdot 9 + 1 \\ &= 55 \end{aligned}$$

Lösung 1b

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow x_0} \Delta(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3(x_0+h)^3} - \frac{2}{3(x_0)^3}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{6 \cdot x_0^3 - 6 \cdot (x_0+h)^3}{9 \cdot (x_0+h)^3 \cdot (x_0)^3}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6 \cdot x_0^3 - 6 \cdot (x_0^3 + 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3)}{9 \cdot (x_0^3 + 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3) \cdot x_0^3} \cdot \frac{1}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot (-18x_0^2 - 18x_0h - 6h^2)}{(9x_0^3 + 27x_0^2h + 27x_0h^2 + 9h^3) \cdot x_0^3 \cdot h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-18x_0^2 - 18x_0h - 6h^2}{(9x_0^3 + 27x_0^2h + 27x_0h^2 + 9h^3) \cdot x_0^3} \\
 &= \frac{-18x_0^2 - \lim_{h \rightarrow 0} (18x_0h - 6h^2)}{9x_0^6 + \lim_{h \rightarrow 0} (27x_0^5h + 27x_0^4h^2 + 9h^3x_0^3)} \\
 &= \frac{-18x_0^2}{9x_0^6} \\
 &= -\frac{2}{x_0^4} \\
 &\stackrel{x_0=3}{=} -\frac{2}{3^4} \\
 &= -\frac{2}{81}
 \end{aligned}$$

Lösung 1c

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \Delta(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2(x_0+h)+3} - \sqrt{2x_0+3}}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x_0+2h+3} - \sqrt{2x_0+3}}{h} \\&\stackrel{x_0=3}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{6+2h+3} - \sqrt{6+3}}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+2h} - \sqrt{9}}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{9+2h}-3) \cdot (\sqrt{9+2h}+3)}{h \cdot (\sqrt{9+2h}+3)} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9+2h-9}{h \cdot (\sqrt{9+2h}+3)} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{9+2h}+3} \\&= \frac{2}{\sqrt{9+3}} \\&= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten die Ableitung der folgenden Funktionen an einem Punkt x_0 .

a) $j(x) = 3x$

b) $k(x) = x^2 + 5$

c) $l(x) = x^3 + 1$

Lösung 2

Der Differenzenquotient von f in x_0 ist definiert als

$$\Delta(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Lösung 2a

$$\begin{aligned}\Delta(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{3x - 3x_0}{x - x_0} \\&= \frac{3 \cdot (x - x_0)}{x - x_0} \\&= 3\end{aligned}$$

Lösung 2b

$$\begin{aligned}\Delta(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{x^2+5-(x_0^2+5)}{x-x_0} \\ &= \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} \\ &= \frac{(x+x_0) \cdot (x-x_0)}{x-x_0} \\ &= x+x_0\end{aligned}$$

Lösung 2c

$$\begin{aligned}\Delta(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{x^3+1-(x_0^3+1)}{x-x_0} \\ &= \frac{x^3-x_0^3}{x-x_0} \\ &= \frac{(x^2+x \cdot x_0+x_0^2) \cdot (x-x_0)}{x-x_0} \\ &= x^2+x \cdot x_0+x_0^2\end{aligned}$$

Aufgabe 3

- a) Bestimmen Sie die Tangentengleichung der Kurve $f(x) = x^3$ an der Stelle $x = 2$.
b) Bestimmen Sie die Gerade, welche eine Tangente an der folgenden Funktion ist:

$$f(x) = x^2 \quad \text{und} \quad g(x) = x^2 - 2x$$

Lösung 3

Aufgabe 4

Differenzieren Sie:

a) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

b) $f(x) = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}$

c) $f(x) = x^{\cos(x)}$

d) $f(x) = \sqrt{x \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt{x}}}$

e) $f(x) = x^{x^a}$ für $a > 0$

f) $f(x) = x^{ax}$ für $a > 0$

g) $f(x) = \cos \left(\ln \left(\tan \left(\sqrt{1+x^2} \right) \right) \right)$

h) $f(x) = x^2 \cdot e^{\frac{x}{x+1}}$

Lösung 4

Aufgabe 5

Gegeben sei die Funktion

$$f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2 \cdot \ln \left(x^3 + \sqrt{2-x^2} \right)$$

Zeigen Sie durch Anwendung des Mittelwertsatzes: $\exists y \in]0; 1[$ mit $f'(y) = \ln(2)$

Lösung 5

Mittelwertsatz:

Es sei f stetig auf $[a, b]$ und f differenzierbar auf (a, b)

$$\Rightarrow \exists \epsilon \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\epsilon).$$

$$\begin{aligned} \exists y \in (0; 1) : \frac{f(1)-f(0)}{1-0} &= \frac{2 \cdot \ln(1^3 + \sqrt{2-1^2}) - 2 \cdot \ln(0^3 + \sqrt{2-0^2})}{1-0} \\ &= 2 \cdot \ln(1 + \sqrt{1}) - 2 \cdot \ln(\sqrt{2}) \\ &= 2 \cdot \ln\left(\frac{1+\sqrt{1}}{\sqrt{2}}\right) \\ &= 2 \cdot \ln(\sqrt{2}) \\ &= \ln(2) \end{aligned}$$