Aufgabe 1

Berechnen Sie

a) $\int\limits_1^2 \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{\sin(x)}}\,dx$

Lösung 1a

Um die Stammfunktion zu bestimmen substituieren wir $u = 4 - x^2$. Somit gilt für $dx = -\frac{1}{2x}du$.

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int \frac{x^3}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{-2x} = \frac{1}{2}\int \frac{4-x^2-4}{\sqrt{u}}du = \frac{1}{2}\int \frac{u-4}{\sqrt{u}}du$$

Aus der Linearität des Integrals lässt sich mit $u \cdot u^{-1/2} = u^{1/2}$ folgern:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int \frac{u-4}{\sqrt{u}}du &= \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,du - 2\int u^{-1/2}du \\ &= \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,du - 2\int u^{-1/2}du \\ &= \frac{1}{3}\left[u^{3/2}\right] - 4\left[u^{1/2}\right]\end{aligned}$$

Durch Rücksubstitution von $u = 4 - x^2$ ergibt sich $F(x) = \frac{1}{3}\left(4-x^2\right)^{3/2} - 4\left(4-x^2\right)^{1/2} + C$

$$\begin{aligned}\int\limits_1^2 \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx &= \left[\frac{1}{3}\left(4-x^2\right)^{3/2} - 4\left(4-x^2\right)^{1/2}\right]_1^2 \\ &= -\left(\sqrt{3} - 4\sqrt{3}\right) \\ &= 3\sqrt{3}\end{aligned}$$

Lösung 1b

Substituriere $u = \sin(x)$. Somit gilt $dx = \frac{du}{\cos(x)}$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{\sin(x)}}\, dx &= \int \cos(x) \cdot \sin(x)^{-1/3}\, dx \\
&= \int \cos(x) \cdot u^{-1/3}\, \tfrac{du}{\cos(x)} \\
&= \int u^{-1/3}\, du \\
&= \tfrac{3}{2} \cdot u^{2/3} + C
\end{aligned}$$

Nach Rücksubstitution ergibt sich für das eigentliche Integral:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{\sin(x)}}\, dx &= \left[\tfrac{3}{2} \cdot \sin(x)^{2/3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \tfrac{3}{2} \cdot \sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^{2/3} - \tfrac{3}{2} \cdot \sin(0)^{2/3} \\
&= \tfrac{3}{2} - 0 \\
&= \tfrac{3}{2}
\end{aligned}$$