Aufgabe 2

Berechnen Sie die Mantelfläche des Rotationskörpers, der durch Drehung des Graphen der Wurzelfunktion um die x-Achse im Intervall $[0;5]$ entsteht.

Lösung 2

Die Manteloberfläche lässt sich nach der folgenden Formel berechnen:

$$M_a^b(f) \;=\; 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Für $f(x) = \sqrt{x}$ und entsprechend $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ bedeutet dies im Intervall $x \in [0;5]$:

$$\begin{aligned}
M_a^b(f) =&\; 2\pi \cdot \textstyle\int_0^5 \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\, dx \\
=&\; 2\pi \cdot \textstyle\int_0^5 \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dx \\
=&\; 2\pi \cdot \textstyle\int_0^5 \sqrt{x} \cdot \sqrt{\frac{4x+1}{4x}}\, dx \\
=&\; 2\pi \cdot \textstyle\int_0^5 \sqrt{x} \cdot \sqrt{\frac{x+\frac{1}{4}}{x}}\, dx \\
=&\; 2\pi \cdot \textstyle\int_0^5 \sqrt{x} \cdot \frac{\sqrt{x+\frac{1}{4}}}{\sqrt{x}}\, dx \\
=&\; 2\pi \cdot \textstyle\int_0^5 \sqrt{x + \frac{1}{4}}\, dx
\end{aligned}$$

Die Substitution mit $u = x + \frac{1}{4}$ und $du = dx$ gibt die neue untere Grenze $u(0) = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ und die obere Grenze $u(5) = 5 + \frac{1}{4} = \frac{21}{4}$.

$$\begin{aligned}
M_a^b(f) =&\; 2\pi \cdot \textstyle\int_{1/4}^{21/4} \sqrt{u}\, du \\
=&\; 2\pi \cdot \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_{1/4}^{21/4} \\
=&\; 2\pi \cdot \left(\frac{2}{3}\left(\frac{21}{4}\right)^{3/2} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{3/2} \right) \\
=&\; \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\left(\frac{21}{4}\right)^{3/2} - \left(\frac{1}{4}\right)^{3/2} \right) \\
=&\; \frac{\pi}{6} \cdot \left(21\sqrt{21} - 1\right) \\
\approx&\; 49{,}864\; FE
\end{aligned}$$