Aufgabe 4

Überprüfen Sie, ob und wie die folgenden Funktionen in $x_0 = -1$ stetig ergänzbar sind.

a) $f(x) = \frac{x^3-x^2-x+1}{x^2+3x+2}$

b) $g(x) = \frac{x^4-5x^2+4}{x^3+2x^2-5x-6}$

c) $h(x) = \frac{4x}{x^2+2x+1}$

Lösung 4

Eine Funktion $f(x)$ ist genau dann stetig in x_0, wenn

$$l - \lim_{x\to x_0} f(x) = r - \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Sei $f(x)$ steitg für $x \neq x_0, x_0 \notin D$. Dann erhält man mit $f(x_0) := \lim_{x\to x_0} f(x)$ eine stetige Funktion, wenn der Grenzwert exisitert. x_0 wird dann als *hebbare Lücke* bezeichnet.

Lösung 4a

$$\begin{aligned}\lim_{x\uparrow -1} f(x) &= \lim_{x\uparrow -1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^2+3x+2} \\ &\underset{\underset{\left[\frac{0}{0}\right]}{\uparrow}}{\overset{l'H}{=}} \lim_{x\uparrow -1} \frac{3x^2-2x-1}{2x+3} \\ &= 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\downarrow -1} f(x) &= \lim_{x\downarrow -1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^2+3x+2} \\ &\underset{\underset{\left[\frac{0}{0}\right]}{\uparrow}}{\overset{l'H}{=}} \lim_{x\downarrow -1} \frac{3x^2-2x-1}{2x+3} \\ &= 4\end{aligned}$$

Da $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 4$ existiert, kann die Funktion an der Stelle x_0 stetig ergänzt werden.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^2+3x+2} & \text{für } x \neq -1 \\ 4 & \text{für } x = -1 \end{cases}$$

Lösung 4b

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1} g(x) &= \lim_{x\to -1} \tfrac{x^4-5x^2+4}{x^3+2x^2-5x-6} \\ &\underset{\substack{\uparrow \\ \left[\frac{0}{0}\right]}}{\overset{l'H}{=}} \lim_{x\to -1} \tfrac{4x^3-10x}{3x^2+4x-5} \\ &= \tfrac{6}{-6} \\ &= -1\end{aligned}$$

Da der Grenzwert existiert, kann die Funktion an der Stelle x_0 stetig ergänzt werden.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^4-5x^2+4}{x^3+2x^2-5x-6} & \text{für } x \neq -1 \\ -1 & \text{für } x = -1 \end{cases}$$

Lösung 4c

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1} h(x) &= \lim_{x\to -1} \tfrac{4x}{x^2+2x+1} \\ &= \lim_{x\to -1} \tfrac{4x}{x^2\cdot\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} \\ &= \lim_{x\to -1} \tfrac{4}{x} \cdot \tfrac{1}{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} \\ &= -4 \cdot \lim_{x\to -1} \underbrace{\frac{1}{\underbrace{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}_{\to 0}}}_{\to\infty} \\ &= -\infty\end{aligned}$$

$$\lim_{x\uparrow -1} h(x) = \lim_{x\downarrow -1} h(x)$$

Die Funktion divergiert an der Stelle x_0 und kann somit nicht ergänzt werden.