Aufgabe 7

Überprüfen Sie, welche der folgenden Menge Untervektorräume sind:

a) $W_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 = y\right\}$

b) $W_2 = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \middle| x_1 + x_4 = x_2\right\}$

c) $W_3 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \middle| x_2 = 0\right\}$

Lösung 7a

W_1ist kein Untervektorraum, da

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\notin W_1}$$

Lösung 7b

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 + y_4 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_1 + x_4 + y_1 + y_4 \\ x_3 + y_3 \\ x_4 + y_4 \end{pmatrix} \in W_2 \checkmark$$

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda(x_1 + x_4) \\ \lambda(x_3) \\ \lambda(x_4) \end{pmatrix} \in W_2 \checkmark$$

Es sind beide Bedingungen erfüllt, also ist W_2 ein Untervektorraum. $W_3 \subset \mathbb{R}^3$

Lösung 7c

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ 0 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} \in W_3 \checkmark$$

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ 0 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix} \in W_3 \checkmark$$

Es sind beide Bedingungen erfüllt, also ist W_3 ein Untervektorraum. $W_3 \subset \mathbb{R}^3$