Aufgabe 6

Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen keine Vektorräume über $\mathbb{R}$ bilden.

a)

$$V = \mathbb{R}^3 \text{ mit}$$

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\lambda x = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

b)

$$V = \mathbb{R}^3 \text{ mit}$$

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\lambda x = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) $V = \{x \in \mathbb{R}^n | x_1 \geq 0\}$ mit der Addition und skalaren Multiplikation des $\mathbb{R}^n$.

Lösung 6a

Axiom 5

$$\forall \lambda, \mu \in K, x \in V : (\lambda + \mu) \odot x = (\lambda \odot x) \oplus (\mu \odot x)$$

verletzt, da

$$\begin{pmatrix} (\lambda + \mu) x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda + \mu) x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix} \lightning$$

Da $x_2 \neq 2x_2$ und $x_3 \neq 2x_3$.

Lösung 6b

Axiom 3

$$\forall x \in V : \mathbb{1} \odot x = x$$

(mit $\mathbb{1}$ als dem neutralen Element der Multiplikation) verletzt, da für jedes $x \neq (0,0,0)^T$

$$\mathbb{1} \odot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq x$$

Lösung 6c

Abgeschlossenheit verletzt.
Sei $n = 2,\ \lambda = -1,\ x_1 \neq 0$

$$-1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}}_{\notin V}$$