Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Potenzreihe und den Konvergenzradius der Funktion $g(x) = \dfrac{4}{2x-5}$ mit $x \neq \dfrac{5}{2}$ um die Entwicklungspunkte

a) $x_0 = 0$ b) $x_0 = 1$ c) $x_0 = -1$

Lösung 1a

$$g(x) = \frac{4}{2x-5}$$

Es soll die Funktion $g(x)$ in eine Potenzreihe der Form

$$\frac{1}{1-a(x-x_0)} = \sum_{n=0}^{\infty}(a(x-x_0))^n$$

entwickelt werden.
Dazu wird $g(x)$ wie folgt umgeformt

$$\begin{aligned} g(x) &= \tfrac{4}{2x-5} \\ &= \tfrac{-4}{5-2x} \\ &= (-4)\cdot \tfrac{1}{5-2x} \\ &= (-4)\cdot \tfrac{1}{5\cdot(1-\frac{2}{5}x)} \\ &= \tfrac{-4}{5}\cdot \tfrac{1}{1-\frac{2}{5}x} \\ &= \tfrac{-4}{5}\cdot \tfrac{1}{1-\frac{2}{5}(x-0)} \end{aligned}$$

Die Funktion wird nun als Potenzreihe in der zuvor genannten Form mit $a = \dfrac{2}{5}$ für den Bereich $\left|\dfrac{2}{5}\cdot x\right| < 1$ geschrieben.

$$\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5}x\right)^n = \left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n x^n\right)$$

Für den Konvergenzradius gilt

$$\begin{aligned} & 1 > |a(x-x_0)| \\ \Leftrightarrow\ & 1 > \left|\tfrac{2}{5}\cdot x\right| \\ \Leftrightarrow\ & 1 > \tfrac{2}{5}\cdot|x| \\ \Leftrightarrow\ & \tfrac{5}{2} > |x| \end{aligned}$$

$\Rightarrow \left(-\dfrac{5}{2}\right) < x < \dfrac{5}{2}$

Die Funktion $g(x)$ lässt sich für den Konvergenzradius a um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ als Potenzreihe darstellen.
Von der Potenzreihe ist bekannt, dass sie konvergent in dem Bereich ist. Nun bleibt zu untersuchen, ob die Ränder selbst konvergent oder diverget sind.
Die Reihe

$$\left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}x\right)^n$$

ist für $x = -\frac{5}{2}$:

$$\left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

divergent, da die Folge $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent ist.
Für $x = \frac{5}{2}$ muss die Divergenz nicht untersucht werden, da bereits gegeben war, dass $\frac{5}{2} \notin X$.
Daher ist die Potenzreihe konvergent in dem Intervall $x \in]-\frac{5}{2}; \frac{5}{2}[$.

Lösung 1b

Für die Betrachtung um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$

$$\begin{aligned} g(x) &= \tfrac{4}{2x-5} \\ &= 4 \cdot \tfrac{1}{2\cdot(x-1)-5+2} \\ &= 4 \cdot \tfrac{1}{2\cdot(x-1)-3} \\ &= 4 \cdot \tfrac{1}{-3+2\cdot(x-1)} \\ &= 4 \cdot \tfrac{1}{-3\left(1+\frac{2}{-3}\cdot(x-1)\right)} \\ &= \tfrac{4}{-3} \cdot \tfrac{1}{1-\frac{2}{3}\cdot(x-1)} \end{aligned}$$

Die Funktion wird nun als Potenzreihe in der zuvor genannten Form mit $a = \frac{2}{3}$ für den Bereich $\left|\frac{2}{3} \cdot (x - x_0)\right| < 1$ geschrieben.

$$\left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}(x-1)\right)^n$$

Für den Konvergenzradius gilt

$$\begin{aligned} & 1 > |a(x - x_0)| \\ \Leftrightarrow\ & 1 > \left|\tfrac{2}{3} \cdot (x-1)\right| \\ \Leftrightarrow\ & 1 > \left|\tfrac{2}{3}x - \tfrac{2}{3}\right| \\ \Leftrightarrow\ & 1 > \left|\tfrac{2x-2}{3}\right| \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Für $x > 1$:

$$\begin{aligned} 1 &> \tfrac{2x-2}{3} \\ 3 &> 2x-2 \\ 5 &> 2x \\ \tfrac{5}{2} &> x \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Für $x < 1$:

$$\begin{aligned} 1 &> -\tfrac{2x-2}{3} \\ 3 &> -2x+2 \\ 1 &> -2x \\ -\tfrac{1}{2} &< x \end{aligned}$$

Die Funktion $g(x)$ lässt sich für den Konvergenzradius von

$$-\frac{1}{2} < x < \frac{5}{2}$$

um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ als Potenzreihe darstellen.
Da der obere Rand nicht Teil der Definitionsmenge ist, bleibt die Konvergenz am unteren Rand zu untersuchen.
Die Reihe

$$\left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}(x-1)\right)^n$$

ist für $x = -\dfrac{1}{2}$:

$$\left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2} - 1\right)\right)^n = \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)\right)^n = \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

divergent, da die Folge $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent ist.

Lösung 1c

[Fehlt]

Aufgabe 2

Berechnen Sie den Wert der Reihe:

a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{2k+3}{k!}$ b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{k^2+4k-1}{k!}$

Lösung 2a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+3}{k!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{(k-1)!} + \frac{3}{k!}\right) \\
&= 2\cdot \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{1}{k!} + 3\cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \\
&= 2\cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} + \frac{2}{(-1)!} + 3\cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \\
&= 2\cdot e + 0 + 3\cdot e \\
&= 5e
\end{aligned}$$

Lösung 2b

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2+4k-1}{k!} \quad =$$

Aufgabe 3

Vereinfachen Sie die folgenden Terme mithilfe der Additionstheoreme.

a) $\frac{\sin(2x)}{\sin(x)}$ b) $\sin^4(x) - \cos^4(x)$

Lösung 3a

Mit dem Additionstheorem (*Lemma 108, Seite 131)*

$$\sin(u + v) = \sin(u)\cdot \cos(v) + \sin(v)\cdot \cos(u)$$

gilt mit $\sin(2x) = \sin(x + x)$ für

$$\begin{aligned} \sin(x + x) = &\ \sin(x)\cdot \cos(x) + \sin(x)\cdot \cos(x) \\ = &\ \sin(x)\cdot (\cos(x) + \cos(x)) \end{aligned}$$

sodass

$$\begin{aligned} \tfrac{\sin(2x)}{\sin(x)} &= \tfrac{\sin(x)\cdot(\cos(x)+\cos(x))}{\sin(x)} \\ &= \cos(x) + \cos(x) \\ &= 2\cdot \cos(x) \end{aligned}$$

vereinfacht werden kann.

Lösung 3b

Aus dem Additionstheorem (*Lemma 108, Seite 131)*

$$1 = \cos^2(x) + \sin^2(x)$$

folgt mit der 3. Binomischen Formel:

$$\begin{aligned} \sin^4(x) - \cos^4(x) &= \left(\sin^2(x) + \cos^2(x)\right) \cdot \left(\sin^2(x) - \cos^2(x)\right) \\ &= \sin^2(x) - \cos^2(x) \\ &= 1 - \cos^2(x) - \cos^2(x) \\ &= 1 - 2\cos^2(x) \\ &= -\cos(2x) \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass die folgende Funktion $f(x)$ stetig ist.

$$f(x) = \begin{cases} 8a + 16x & \text{für } x < 2 \\ a^2 \cdot (x+2) & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

Lösung 4

Sei $f_1(x) = 8a + 16x$ und $f_2(x) = a^2 \cdot (x+2)$ so ist für $a = 4$

$$\begin{aligned} 8 \cdot 4 + 16x &= 4^2 \cdot x + 4^2 \cdot 2 \\ \Leftrightarrow \quad 32 + 16x &= 16x + 32 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Die Gerade $f(x) = 16x + 32$ ist stetig.

Aufgabe 5

Untersuchen Sie die folgenden Reihen mittels eines geeigneten Kriteriums auf Konvergenz.

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{13^{n+2} \cdot n^{n^2}}{5^{n-2} \cdot (n+1)^{n^2}}$ b) $\sum\limits_{l=1}^{\infty} \frac{l!}{l^l}$ c) $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1)^8 \cdot 3^m}{m!}$

Lösung 5a

Die Folge $a_n = \dfrac{13^{n+2} \cdot n^{n^2}}{5^{n-2} \cdot (n+1)^{n^2}}$ für $n \in \mathbb{N}$ lässt sich mit den Potenzgesetzen zunächst so umformen:

$$a_n = \frac{13^{n+2} \cdot n^{n^2}}{5^{n-2}(n+1)^{n^2}} = \frac{13^n \cdot 13^2 \cdot n^{n \cdot n}}{\frac{5^n}{5^2} \cdot (n+1)^{n \cdot n}} = \frac{13^2 \cdot 5^2 \cdot 13^n \cdot n^{n \cdot n}}{5^n \cdot (n+1)^{n \cdot n}} = 13^2 \cdot 5^2 \cdot \left(\frac{13 \cdot n^n}{5 \cdot (n+1)^n}\right)^n$$

Für die Reihe gilt nun:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{13^{n+2} \cdot n^{n^2}}{5^{n-2} \cdot (n+1)^{n^2}} = 13^2 \cdot 5^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{13 \cdot n^n}{5 \cdot (n+1)^n}\right)^n$$

Diese wird nun mit dem Wurzelkriterium untersucht.

$$\begin{aligned} r &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{13 \cdot n^n}{5 \cdot (n+1)^n}\right)^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{13 \cdot n^n}{5 \cdot (n+1)^n}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{13}{5} \cdot \left(\frac{n}{(n+1)}\right)^n\right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{13}{5} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n\right| \\ &= \frac{13}{5} \cdot \left|\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n}\right| \\ &= \frac{13}{5e} \\ &< 1 \end{aligned}$$

Aus $r < 1 \Rightarrow$ die gegebene Reihe ist konvergent.

Lösung 5b

Die gegebene Reihe soll mit dem Quotientenkriterium untersucht werden. Dazu betrachten wir die Folge $a_l = \dfrac{l!}{l^l}$:

$$\begin{aligned}
r &= \lim_{l\to\infty} \tfrac{a_{l+1}}{a_l} \\
&= \lim_{l\to\infty} \tfrac{(l+1)!}{(l+1)^{l+1}} \cdot \tfrac{l^l}{l!} \\
&= \lim_{l\to\infty} \tfrac{(l+1)\cdot l^l}{(l+1)^{l+1}} \\
&= \lim_{l\to\infty} (l+1)^{1-(l+1)} \cdot l^l \\
&= \lim_{l\to\infty} (l+1)^{-l} \cdot l^l \\
&= \lim_{l\to\infty} \left(\tfrac{l}{l+1}\right)^{l} \\
&= \lim_{l\to\infty} \left(\tfrac{l+1}{l}\right)^{-l} \\
&= \lim_{l\to\infty} \left(\tfrac{l}{l} + \tfrac{1}{l}\right)^{-l} \\
&= \lim_{l\to\infty} \left(1 + \tfrac{1}{l}\right)^{-l} \\
&= \tfrac{1}{e} < 1
\end{aligned}$$

Aus $r < 1 \Rightarrow$ die gegebene Reihe ist konvergent.