Aufgabe 2

Entscheiden Sie, ob die folgende Funktion auf dem Intervall $[-1;1]$ gleichmäßig stetig ist

$$f(x) = \frac{x}{4-x^2}$$

Lösung 2

Die Funktion$f(x)$ ist an der Stelle x_0 stetig, falls

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta(x_0, \epsilon) > 0 \ : \ \forall (x - x_0) < \delta \ : \ |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Die Funktion $f(x)$ ist **gleichmäßig stetig** in einem Intervall D, wenn in jedem Punkt $x_0 \in D$ gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0 \forall x, x_0 \in D : (|x - x_0| < \delta(\epsilon) \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon).$$

Hinweis: Dabei muss δ unabhängig von x_0 sein.

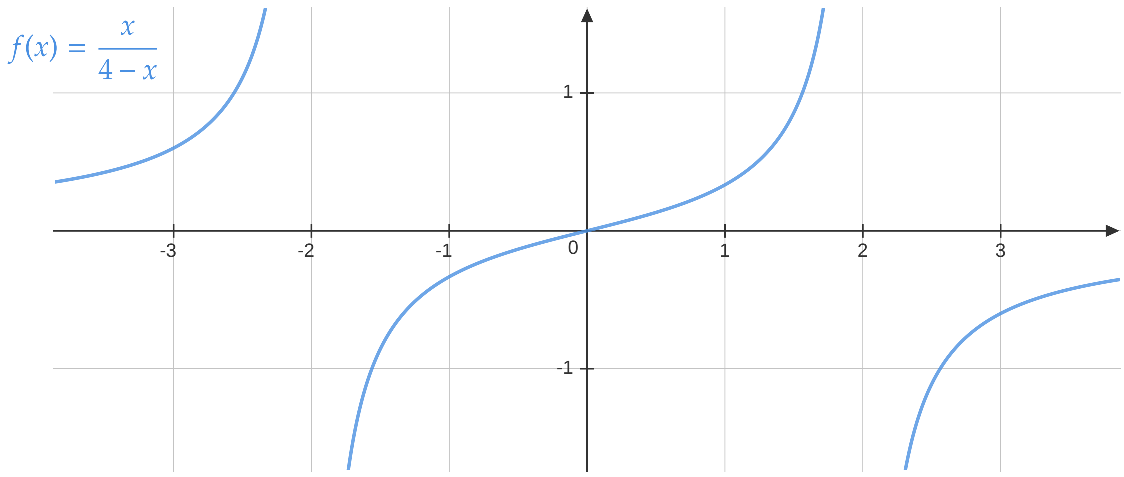

Abbildung 1: Graph von $f(x)$

Stetigkeit mit ϵ-δ-Beweis zu zeigen. Sei $\epsilon > 0$ und $x_0 \in [-1;1]$

$$
\begin{aligned}
|f(x) - f(x_0)| &\equiv \left|\frac{x}{4-x^2} - \frac{x_0}{4-x_0^2}\right| \\
&= \left|\frac{x\cdot(4-x_0^2)-x_0\cdot(4-x^2)}{(4-x^2)\cdot(4-x_0^2)}\right| \\
&= \left|\frac{4x-x_0^2x-4x_0+x_0x^2}{(4-x^2)\cdot(4-x_0^2)}\right| \\
&= \left|\frac{(4x-4x_0)+x_0x^2-x_0^2x}{(4-x^2)\cdot(4-x_0^2)}\right| \\
&= \left|\frac{4(x-x_0)+(x-x_0)x_0x}{(4-x^2)\cdot(4-x_0^2)}\right| \\
&= \left|\frac{(x-x_0)\cdot(4+x_0x)}{(4-x^2)\cdot(4-x_0^2)}\right| \\
&= \frac{\overbrace{|x-x_0|}^{\delta}\cdot\overbrace{|4+x_0x|}^{\leq\ 5}}{\underbrace{\left|4-x^2\right|}_{\geq 3}\cdot\underbrace{\left|4-x_0^2\right|}_{\geq 3}} \\
&\overset{x,x_0\in[-1;1]}{\leq} \frac{\delta\cdot 5}{3\cdot 3} \\
&= \frac{5}{9}\cdot\delta \\
&< \epsilon \\
\Leftrightarrow \qquad \delta &< \frac{9}{5}\cdot\epsilon
\end{aligned}
$$

Unter Verwendung des Intervalls konnte $\delta(\epsilon)$ abgeschätzt und allein in Abhängigkeit von ϵ angegeben werden. Somit ist die Funktion im Intervall gleichmäßig stetig.