Aufgabe 1

Ein Einzelhändler hat drei DVD-Player einer bestimmten Marke geliefert bekommen und überprüft deren Funktionalität, bevor er sie an seine Kunden weitergibt. Es bezeichne nun $A_i (i = 1, 2, 3)$ das Ereignis, dass beim i-ten DVD-Player ein Defekt festgestellt wird. Beschreiben Sie mit Hilfe von A_1, A_2, A_3 und den passenden Mengenoperationen die folgenden Ereignisse.

a) alle DVD-Player sind defekt,

b) mindestens ein DVD-Player ist defekt,

c) höchstens ein DVD-Player ist defekt,

d) alle DVD-Player sind intakt,

e) der erste DVD-Player ist defekt und von den beiden anderen Geräten hat höchstens eines einen Fehler,

f) genau zwei DVD-Player sind defekt.

Lösung 1

a) alle DVD-Player sind defekt

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3$$

b) mindestens ein DVD-Player ist defekt

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

c) höchstens ein DVD-Player ist defekt

$$\complement((A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3))$$

d) alle DVD-Player sind intakt

$$\complement(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$$

e) der erste DVD-Player ist defekt und von den beiden anderen Geräten hat höchstens eines einen Fehler

$$A_1 \setminus (A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

f) genau zwei DVD-Player sind defekt

$$((A_1 \cap A_2) \cup (A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_3)) \setminus (A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

Aufgabe 2

Eine Urne enthält 4 rote Kugeln mit einem Kreuz, 5 rote Kugeln ohne Kreuz, 3 blaue Kugeln mit einem Kreuz, 2 blaue Kugeln ohne Kreuz, 3 weiße Kugeln mit einem Kreuz und 3 weiße Kugeln ohne Kreuz. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim einmaligen Ziehen einer Kugel

a) eine weiße Kugel zu ziehen,

b) eine Kugel mit Kreuz zu ziehen,

c) eine blaue Kugel mit einem Kreuz oder eine weiße Kugel ohne Kreuz zu ziehen,

d) eine rote Kugel oder eine Kugel mit einem Kreuz zu ziehen,

Lösung 2

Es sind $n = 20$ Kugeln aus der Grundmenge $\Omega = \{r_k, r, b_k, b, w_k, w\}$ in einer Urne und es wird einmal gezogen, sodass die Wahrscheinlichkeit

a) eine weiße Kugel zu ziehen

$$P(A_{w_k} \cup A_w) = \frac{3+3}{10} = \frac{3}{10}$$

b) eine Kugel mit Kreuz zu ziehen

$$P(A_{r_k} \cup A_{b_k} \cup A_{w_k}) = \frac{4+3+3}{20} = \frac{1}{2}$$

c) eine blaue Kugel mit einem Kreuz oder eine weiße Kugel ohne Kreuz zu ziehen

$$P(A_{b_k} \cup A_w) = \frac{3+3}{20} = \frac{3}{10}$$

d) eine rote Kugel oder eine Kugel mit einem Kreuz zu ziehen

$$P(A_r \cup A_{r_k} \cup A_{b_k} \cup A_{w_k}) = \frac{5+4+3+3}{20} = \frac{3}{4}$$

beträgt.

Aufgabe 3

Bei einer Pressekonferenz sollen auf 20 Plätze 10 Broschüren verteilt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür, wenn

a) es die gleichen Broschüren sind

i. und auf jedem Platz höchstens eine liegen soll?
ii. und auf jedem Platz beliebig viele Broschüren liegen dürfen?

b) die Broschüren unterschiedlich sind

i. und auf jedem Platz höchstens eine liegen soll?
ii. und auf jedem Platz beliebig viele Broschüren liegen dürfen?

Lösung 3

Die Anzahl der Möglichkeiten $k = 10$ Broschüren auf $n = 20$ Plätzen zu verteilen beträgt, wenn

a) es die gleichen Broschüren sind *(Kombination)*

i. und auf jedem Platz höchstens eine liegen soll *(ohne Wiederholung)*

$$\left|\mathrm{Kom}_{k=10}^{n=20}(\mathrm{oW})\right| = \binom{20}{10} = \frac{20!}{10! \cdot 10!} = 184.756.$$

ii. und auf jedem Platz beliebig viele Broschüren liegen dürfen *(mit Wiederholung)*

$$\left|\mathrm{Kom}_{k=10}^{n=20}(\mathrm{mW})\right| = \binom{20+10-1}{10} = \frac{29!}{19! \cdot 10!} = 20.030.010.$$

b) die Broschüren unterschiedlich sind *(Permutationen)*

i. und auf jedem Platz höchstens eine liegen soll *(ohne Wiederholung)*

$$\left|\mathrm{Per}_{k=10}^{n=20}(\mathrm{oW})\right| = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{20!}{10!} = 670.442.572.800.$$

ii. und auf jedem Platz beliebig viele Broschüren liegen dürfen *(mit Wiederholung)*

$$\left|\mathrm{Per}_{k=10}^{n=20}(\mathrm{mW})\right| = n^k = 20^{10} = 1024 \cdot 10^{10}.$$

Aufgabe 4

Zehn Wagen parken zufällig in vier großen Parkbereichen, d.h. jeder Fahrer wählt unabhängig von den anderen rein zufällig einen Parkbereich aus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

a) in dem ersten Parkbereich keine Wagen abgestellt werden?

b) in den ersten beiden Parkbereichen jeweils 2 und in den anderen beiden jeweils 3 Wagen abgestellt werden?

c) mindestens 2 Wagen in jedem Parkbereich abgestellt werden?

Lösung 4

Unter der Annahme, dass jeder Parkbereich bis zu 10 Wagen aufnehmen kann, wählen wir $k = 10$ Parkpositionen aus $n = 4$ Bereichen.
Wir untersuchen also 10-Tupel der Form

$$(x_1, \dots, x_{10}) \in \mathrm{Per}_{10}^4(\mathrm{mW}) \qquad \text{mit} \quad x_i \in \{1, \dots, 4\}$$

also 10-Tupel aus dem Ergebnisraum $\Omega = \{(x_1, \dots, x_{10}) | 1 \leq x_i \leq 4\}$, welcher die Mächtigkeit $|\Omega| = 4^{10}$ hat.

Lösung 4a

Das Ereignis $A = \complement\{\text{Wagen im ersten Parkbereich}\} = \mathrm{Per}_{10}^3(\mathrm{mW})$ und hat die Mächtigkeit $|A| = \left|\mathrm{Per}_{10}^3(\mathrm{mW})\right| = 3^{10}$.
Nach Laplace beträgt also die Wahrscheinlichkeit dafür dass ein Parkplatz freigelassen wird

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\mathrm{Per}_{10}^3(\mathrm{mW})}{\mathrm{Per}_{10}^4(\mathrm{mW})} = \frac{3^{10}}{4^{10}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{10} \approx 5{,}63\%.$$

Lösung 4b

Die Ereignismenge

$$\begin{aligned} B = \{&\{2 \text{ Wagen im ersten Bereich}\} \cap \{2 \text{ Wagen im zweiten Bereich}\} \\ &\cap \{3 \text{ Wagen im dritten Bereich}\} \cap \{3 \text{ Wagen im vierten Bereich}\}\} \end{aligned}$$

setzt sich zusammen aus Kombinationen ohne Wiederholung, nämlich der Menge aller Möglichkeiten 2 aus 10 Wagen für den ersten Bereich anzuordnet, 2 aus den 8 übrigen Wagen für den zweiten Bereich, 3 aus 6 für den dritten und 3 aus 3 für den vierten Bereich anzuordnen, also

$$B = \mathrm{Kom}_2^{10}(\mathrm{oW}) \times \mathrm{Kom}_2^{8}(\mathrm{oW}) \times \mathrm{Kom}_3^{6}(\mathrm{oW}) \times \mathrm{Kom}_3^{3}(\mathrm{oW}).$$

Die Mächtigkeit der Ereignismenge $|B|$ berechnet sich entsprechend wie folgt:

$$\begin{aligned} |B| &= \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3} \\ &= \frac{10! \cdot 8! \cdot 6! \cdot 3!}{(10-2)!2! \cdot (8-2)!2! \cdot (6-3)!3! \cdot (3-3)!3!} \\ &= \frac{10! \cdot \cancel{8!} \cdot \cancel{6!} \cdot \cancel{3!}}{\cancel{8!}2! \cdot \cancel{6!}2! \cdot \cancel{3!}3! \cdot 3!} \\ &= \frac{10!}{4 \cdot 6 \cdot 6} \\ &= 25.200 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in den ersten beiden Parkbereichen jeweils 2 und in den anderen beiden jeweils 3 Wagen abgestellt werden beträgt nach Laplace somit

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{25.200}{4^{10}} \approx 2{,}4\%.$$

Lösung 4c

Die Ereignismenge

$$C = \{2 \text{ oder mehr Wagen in jedem Bereich}\}$$

setzt sich zusammen aus der Menge der Ereignisse, bei denen zwei mal 2 Wagen und zwei mal 3 Wagen angeordnet werden ($C_1 = B$) und der Menge der Ereignisse bei denen drei mal 2 und einmal 4 Wagen angeordnet werden (C_2). Dabei gibt es $\binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} = 6$ Variationen von C_1 (also $(2{,}2{,}3{,}3), (3{,}3{,}2{,}2), (3{,}2{,}2{,}3), \ldots$), sowie $\binom{4}{1} \cdot \binom{3}{3} = 4$ Variationen von C_2 (also $(2{,}2{,}2{,}4), (2{,}2{,}4{,}2), (2{,}4{,}2{,}2)$ und $(4{,}2{,}2{,}2)$).
Die Mächtigkeit der Ereignismenge C setzt sich somit zusammen aus $|C| = 6 \cdot |C_1| + 4 \cdot |C_2|$, wobei

$$C_2 = \mathrm{Kom}_2^{10}(\mathrm{oW}) \times \mathrm{Kom}_2^{8}(\mathrm{oW}) \times \mathrm{Kom}_2^{6}(\mathrm{oW}) \times \mathrm{Kom}_4^{4}(\mathrm{oW})$$

ist und die Mächtigkeit $|C_1| = |B| = 25.200$ bereits aus Teilaufgabe b) bekannt ist.
Wir berechnen

$$\begin{aligned} |C_2| &= \binom{10}{8} \cdot \binom{8}{6} \cdot \binom{6}{4} \cdot \binom{4}{4} \\ &= \frac{10! \cdot \cancel{8!} \cdot \cancel{6!}}{\cancel{8!}2! \cdot \cancel{6!}2! \cdot 2!4!} \\ &= \frac{10!}{8 \cdot 4!} \\ &= 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \cancel{8} \cdot 9 \cdot 10 \\ &= 18.900 \end{aligned}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} |C| &= 6 \cdot |C_1| + 4 \cdot |C_2| \\ &= 6 \cdot 25.200 + 4 \cdot 18.900 \\ &= 226.800. \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 2 Wagen in jedem Parkbereich abgestellt werden, beträgt somit nach Laplace

$$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{226.800}{4^{10}} \approx 21{,}63\%.$$