Aufgabe 1

In einem landwirtschaftlichen Betrieb erhielten von 20 Versuchsrindern 10 Rinder (Versuchsgruppe 1) jeden Tag Kraftfutter der Zusammensetzung A, die übrigen 10 Rinder (Versuchsgruppe 2) erhielten das herkömmliche Futter der Zusammensetzung B. Nach einer gewissen Zeit wurde die Gewichtszunahme in kg in beiden Gruppen festgestellt:

Gruppe 1:	7,2	4,1	5,5	4,5	5,7	3,8	4,6	6,0	5,2	5,4
Gruppe 2:	5,3	4,4	5,0	3,5	3,9	4,9	5,6	2,5	4,0	3,6

a) Unter der Annahme, dass sich die Gewichtszunahme durch unabhängige, in beiden Fällen identisch normalverteilte Zufallsvariablen beschreiben lässt, prüfe man mit einem geeigneten Test zum Niveau $\alpha = 0{,}1$, ob die Annahme, dass die Gewichtszunahme bei Verabreichung von Kraftfutter der Zusammensetzung A die gleiche Streuung aufweist wie die Gewichtszunahme bei Verabreichung des herkömmlichen Futters der Zusammensetzung B, zu verwerfen ist.

b) Unter der Annahme, dass sich die Gewichtszunahme durch unabhängige, in beiden Fällen identisch normalverteilte Zufallsvariablen mit gleicher Varianz beschreiben lässt, prüfe man mit einem geeigneten Test zum Niveau $\alpha = 0{,}025$ die Hypothese, dass die Gewichtszunahme bei Verabreichung von Kraftfutter der Zusammensetzung A nicht größer ist als die Gewichtszunahme bei Verabreichung des herkömmlichen Futters der Zusammensetzung B.

Lösung 1a) F-Test

Sei $X = \{\text{Gewichtszunahme in kg}\} \sim \mathcal{N}$ und μ, σ^2 unbekannt. Es soll zum Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}1$ geprüft werden, ob

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \qquad \text{gegen} \qquad H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

Bestand hat.

Wir bestimmen den empirischen Mittelwert $\overline{x}_A = \frac{52}{10} = 5{,}2$ kg von Gruppe 1 und $\overline{x}_B = \frac{42{,}7}{10} = 4{,}27$ kg von Gruppe 2, sowie die korrigierte empirische Varianz:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \\ &= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 \right) - n \cdot \overline{x}^2 \right) \end{aligned}$$

Also für Gruppe 1

$$\begin{aligned} s_A^2 &= \frac{1}{9} (279{,}44 - 10 \cdot 27{,}04) \\ &= 1{,}00\overline{4} \text{ kg}^2 \end{aligned}$$

und für Gruppe 2

$$\begin{aligned} s_B^2 &= \frac{1}{9}(190{,}49 - 10 \cdot 18{,}2329) \\ &= 0{,}906\overline{7}\ \text{kg}^2. \end{aligned}$$

Unter der Hypothese H_0 liegt eine F-Verteilung

$$\frac{s_A^2}{s_B^2} \underset{H_0}{\sim} F_{n-1,\ m-1}$$

mit 9 Freiheitsgraden vor.

Test:

$$\begin{aligned} \frac{s_A^2}{s_B^2} < F_{9;\ 9;\ \frac{\alpha}{2}} \quad &\vee \quad \frac{s_A^2}{s_B^2} > F_{9;\ 9;\ (1-\frac{\alpha}{2})} \\ 1{,}107707 < F_{9;\ 9;\ 0{,}05} \quad &\vee \quad 1{,}107707 > F_{9;\ 9;\ 0{,}95} \end{aligned}$$

Da die Teststatistik kleiner bzw. größer ist, als der kritische Wert $F_{9;\ 9;\ 0{,}05} = 0{,}314575$ bzw. $F_{9;\ 9;\ 0{,}95} = 3{,}17889$ (unteres/oberes 5%-Quantil der $F_{9;9}$-Verteilung) also

$$0{,}314575 \leq 1{,}107707 \leq 3{,}17889$$

ist, kann die Nullhypothese H_0 nicht abgelehnt werden. Es gibt also keinen signifikaten Unterschied in den Varianzen der Gewichtszunahme zwischen den beiden Gruppen.

Lösung 1b) t-Test

Es soll zum Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}025$ geprüft werden, ob

$$H_0 : \mu_A \leq \mu_B \qquad \text{gegen} \qquad H_1 : \mu_A > \mu_B$$

besteht.

Teststatistik:

$$\begin{aligned} T &= \frac{\overline{x}_A - \overline{x}_B}{\sqrt{\frac{s_A^2}{n} + \frac{s_B^2}{m}}} \\ &= \frac{5{,}2 - 4{,}27}{\sqrt{\frac{1{,}004+0{,}9067}{10}}} \\ &= \frac{0{,}93}{\sqrt{0{,}19107}} \\ &\approx 2{,}12758 \end{aligned}$$

Kritischer t-Wert:

$$t_{n+m-2;\ 1-\alpha} = t_{18;\ 0{,}975} = 2{,}101$$

Da $|T| = 2{,}128 > 2{,}101 = t_{18;\,0{,}975}$ wird die Nullhypothese abgelehnt und H_1 bestätigt. Das bedeutet, dass die Gewichtszunahme bei Verabreichung von Kraftfuttermittel der Zusammensetzung A signifikant größer ist als die Gewichtszunahme bei Verabreichung des herkömmlichen Futters der Zusammensetzung B.

Aufgabe 2

Ein Schraubenhersteller behauptet, dass seine Maschine Schrauben der Länge 20 mm und Varianz 0,3 mm^2 produziert. Eine stochastisch unabhängig, identisch verteilte Stichprobe der Länge des Umfangs $n = 9$ ergab:

$$\overline{x} = 19{,}85\text{mm} \qquad \text{und} \qquad s^2 = 0{,}42\text{mm}^2$$

Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass die Schraubenlänge normalverteilt ist.

a) Testen Sie mit der Fehlerwahrscheinlichkeit $\alpha = 0{,}01$ die folgende Hypothese:

$$H_0 : \sigma^2 \leq 0{,}3 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \sigma^2 > 0{,}3$$

b) Testen Sie mit der Fehlerwahrscheinlichkeit $\alpha = 0{,}01$ die folgende Hypothese:

$$H_0 : \mu = 20 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \mu \neq 20$$

Lösung 2a) Chi-Quadrat-Test für die Varianz

χ^2-Test für $\sigma_0^2 = 0{,}3$ zum Signifikanzniveau $\alpha = 1\%$ bei einer Stichprobengröße von $n = 9$.

Bestimmung von c:

$$\begin{aligned} c &= \frac{\sigma_0^2}{n-1} \cdot \chi^2_{n-1;\,1-\alpha} \\ &= \frac{0{,}3}{8} \cdot \chi^2_{8;\,0{,}99} \\ &= 0{,}0375 \cdot 20{,}09 \\ &= 0{,}753375 \end{aligned}$$

Da $s^2 = 0{,}42 < 0{,}75 = c$ wird H_0 zum 1%-Niveau nicht abgelehnt. Es gibt also keine ausreichenden Beweise, um zu behaupten, dass die Varianz der Schraubenlängen größer als 0,3 mm^2 ist.

Lösung 2b) t-Test

Da die Stichprobengröße mit $n = 9$ klein und die Varianz der Population nicht bekannt ist, aber angenommen wird, dass die Population normalverteilt ist, verwenden wir den Einstichproben-t-Test.

Die Teststatistik ist:

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{x}_n - \mu_0}{s_n} \\ &= \sqrt{9} \cdot \frac{19{,}85 - 20}{\sqrt{0{,}42}} \\ &\approx -0{,}694365 \end{aligned}$$

Da es sich um einen zweiseitigen Test handelt, lehnen wir H_0 ab, wenn T größer als das $(1 - \frac{\alpha}{2})$-Quantil der t-Verteilung mit $n - 1 = 8$ Freiheitsgraden ist.

Der kritische t-Wert für $1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}995$ und 8 Freiheitsgraden ist $t_{\text{krit}} = 3{,}355$.

Da $|t| < t_{\text{krit}}$ ist, kann auch hier die Nullhypothese nicht abgelehnt werden.
Es deutet also nichts darauf hin, dass der Mittelwert der Schraubenlängen signifikant von 20 mm abweicht.

Aufgabe 3

Ein Taschenrechner liefert Zufallszahlen zwischen 0 und 1. Es wurden nacheinander 1.000 dieser Zahlen erzeugt. Nach Einteilung des Intervalls [0,1] in 10 gleichgroße Teilintervalle wurde gezählt, wie viele der 1.000 Zufallszahlen auf die einzelnen Klassen entfielen. Man erhielt folgende Tabelle:

Klasse	[0, 0.1]	(0,1; 0,2]	(0,2; 0,3]	(0,3; 0,4]	(0,4; 0,5]	(0,5; 0,6]	(0,6; 0,7]	(0,7; 0,8]	(0,8; 0,9]	(0,9; 1,0]
Anzahl	68	116	101	107	92	100	136	101	79	100

Mithilfe eines geeigneten Chi-Quadrat-Anpassungstests zum Niveau $\alpha = 0{,}05$ überprüfe man, ob die Zufallszahlen $x_1, \dots, x_{1.000}$ als eine Folge von im Intervall $[0;1]$-gleichverteilten Zufallszahlen angesehen werden können.

Lösung 3 Chi-Quadrat-Anpassungstest

Der Chi-Quadrat-Anpassungstest vergleicht die beobachteten Häufigkeiten O_i in den Klassen mit den erwarteten Häufigkeiten E_i unter der Annahme, dass die Zahlen gleichverteilt sind.

Bei einer Gleichverteilung im Intervall $[0;1]$ und 10 gleich großen Klassen, erwarten wir, dass jede Klasse etwa $\frac{1000}{10} = 100$ Zahlen enthält.

Die Chi-Quadrat-Teststatistik D wird wie folgt berechnet:

$$D = \sum_i \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

$$\begin{aligned}
D &= \frac{1}{100} \cdot \Big((68-100)^2 + (116-100)^2 + (101-100)^2 + (107-100)^2 + (92-100)^2 \\
&\quad + (100-100)^2 + (136-100)^2 + (101-100)^2 + (79-100)^2 + (100-100)^2 \Big) \\
&= \frac{1}{100} \cdot \Big(32^2 + 16^2 + 1 + 7^2 + 8^2 + 0 + 36^2 + 1 + 21^2 + 0 \Big) \\
&= 31{,}32
\end{aligned}$$

Diesen Wert vergleichen wir mit dem 0,95-Quantil der Chi-Quadrat-Verteilung für $d-1=9$ Freiheitsgrade, wobei d die Anzahl der Klassen ist.

Da $D = 31{,}32 > 16{,}92 = \chi_{9;\ 0{,}95}$ lehnen wir die Nullhypothese ab.Dies deutet darauf hin, dass die Zufallszahlen nicht als gleichverteilt im Intervall $[0;1]$ angesehen werden können. Der p-Wert des Tests beträgt etwa 0,00026, was deutlich unter dem gewählten Signifikanzniveau von 0,05 liegt und somit das Ergebnis bestätigt.