Aufgabe 1

Bei einer Geschwindigkeitskontrolle registrierte die Verkehrspolizei, dass 20% der Fahrzeuge mit überhöhter Geschwindigkeit fuhren. 20% der Fahrer und Fahrerinnen, die aufgrund der zu hohen Geschwindigkeit angehalten wurden, standen unter Alkoholeinfluss. Von den übrigen Kraftfahrern und -fahrerinnen, die nicht zu schnell fuhren, wurden mittels Stichproben ermittelt, dass 5% von ihnen ebenfalls zu hohe Promillewerte Alkohol aufwiesen.

a) Wie viel Prozent aller Kraftfahrer und -fahrerinnen, die die betreffende Kontrolle passiert haben, standen unter Alkoholeinfluss?

b) Wie viel Prozent der Kraftfahrer und -fahrerinnen, die Alkohol getrunken hatten, fuhren zu schnell?

Lösung 1

Hinweis: Wir nehmen an, dass die Polizei alle Fahrzeuge, bei denen eine überhöhte Geschwindigkeit registriert wurde, auch angehalten hat, also „Registrieren" und „Anhalten" gleichbedeutend sind.

Wir lesen $P(S) = 0{,}2$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Auto zu schnell war und $P(A|S) = 0{,}2$, dass der Fahrer dabei alkoholisiert war. Dann ist $P(\overline{S}) = 0{,}8$ die Wahrscheinlichkeit, dass ein Auto nicht zu schnell war und dem Text entnehmen wir weiter, dass $P(A|\overline{S}) = 0{,}05$ die Wahrscheinlichkeit ist, dass der Fahrer dabei alkoholisiert war.

Der Anteil der Fahrenden, welche unter Alkoholeinfluss standen $P(A)$, setzt sich nun wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(S) \cdot P(A|S) + P(\overline{S}) \cdot P(A|\overline{S}) \\ &= 0{,}2 \cdot 0{,}2 + 0{,}8 \cdot 0{,}05 \\ &= 0{,}08 = 8\% \end{aligned}$$

Der Anteil der Fahrenden, welche unter Alkoholeinfluss zu schnell fuhren $P(S|A)$ ist

$$\begin{aligned} P(S|A) &= \frac{P(S) \cdot P(A|S)}{P(S) \cdot P(A|S) + P(\overline{S}) \cdot P(A|\overline{S})} \\ &= \frac{0{,}2 \cdot 0{,}2}{0{,}2 \cdot 0{,}2 + 0{,}8 \cdot 0{,}05} \\ &= \frac{1}{2} = 50\%. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Eine Fabrik stellt ein Gerät her, welches einen elektronischen Schalter enthält. Dieser Schalter wird von zwei Firmen A und B bezogen, wobei 60% aller Schalter von A und 40% aller Schalter von B stammen. Erfahrungsgemäß sind 5% aller A-Schalter und 2% aller B-Schalter defekt. Die Endkontrolle der Fabrik akzeptiert jeden intakten Schalter und fälschlicherweise auch 5% der defekten Schalter jeder Firma.

a) Modellieren Sie die Situation durch ein geeignetes mehrstufiges Experiment und bestimmen Sie in diesem Modell die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gerät in den Verkauf gelangt und einen defekten Schalter besitzt.

b) Ein Kunde beanstandet einen gekauften Schalter. Wie wahrscheinlich ist es, dass der Schalter

   i. von Firma A stammt?

   ii. von Firma B stammt?

Lösung 2

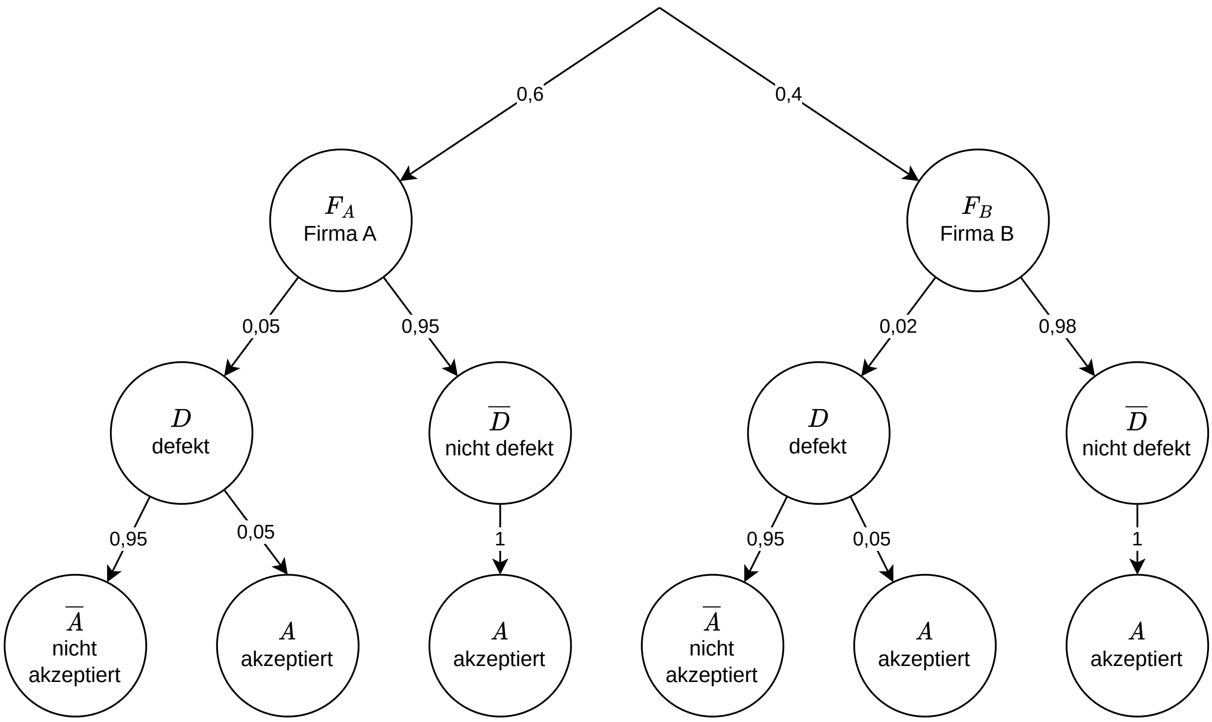

Abbildung 1: Modell der Produktion und Prüfung

2a)

Ein defektes Gerät gelingt in den Verkauf, wenn es defekt ist und fälschlicherweise durch die Endkontrolle akzeptiert wird. $P(A \cap D)$

$$\begin{aligned} P(A \cap D) &= P(F_A \cap D \cap A) + P(F_B \cap D \cap A) \\ &= 0{,}6 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}05 + 0{,}4 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}05 \\ &= 0{,}19\% \end{aligned}$$

2b)

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein defekter, und in der Endkontolle akzeptierter, Schalter von

i. Firma A stammt $P(F_A|A \cap D)$

ii. Firma B stammt $P(F_B|B \cap D)$

errechnet sich durch die Formel von Bayes:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i) \cdot P(A|B_i)}{\sum\limits_{j \in I} P(A|B_j) \cdot P(B_j)}$$

Das bedeutet hier:

$$\begin{aligned} P(F_A|A \cap D) &= \frac{P(A \cap D \cap F_A)}{P(A \cap D)} \\ &= \frac{0{,}6 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}05}{0{,}0019} \\ &\approx 78{,}95\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(F_B|A \cap D) &= \frac{P(A \cap D \cap F_B)}{P(A \cap D)} \\ &= \frac{0{,}4 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}05}{0{,}0019} \\ &\approx 21{,}05\% \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Auf einem Tisch stehen n äußerlich nicht unterscheidbare Urnen $U_1, U_2, \ldots, U_n$ wobei in Urne U_i genau i weiße und $n - i$ andersfarbige Kugeln sind. Aus einer zufällig ausgewählten Urne werde eine Kugel gezogen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel weiß ist?

Lösung 3

Die Wahrscheinlichkeit aus Urne U_i zu ziehen ist $P(U_i) = \frac{1}{n}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass die dort gezogene Kugel weiß ist, ist $P(W|U_i) = \frac{i}{n}$. Gesucht ist $P(W)$, welche wir mit der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit wie folgt ermitteln können:

$$\begin{aligned}
P(W) &= \sum_{i=1}^{n} P(U_i) \cdot P(W|U_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{i}{n} \\
&= \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} i \\
&= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{(n+1) \cdot n}{2} \\
&= \frac{n+1}{2n}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Für die Ereignisse A, B gelte:

$$P(A) = 0{,}4 \qquad P(B) = 0{,}3 \qquad \text{und} \qquad P(A \cap B) = 0{,}12$$

a) Sind die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig?

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse

   i. $\overline{A}$
   ii. $A \cup B$
   iii. $A \cap \overline{B}$
   iv. $\overline{A} \cup \overline{B}$

Lösung 4

a) Die Ereignisse A und B sind stochastisch unabhängig, da gilt $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$, also $0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12$. ✓

b) Es ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten wie folgt:

   i. $P(\overline{A}) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$
   ii. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}58$
   iii. $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}28$
   iv. $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(A \cap B) = 0{,}88$

Aufgabe 5

Zwei Abwasserpumpen arbeiten völlig unabhängig voneinander (Redundanz). Nach Auswertung der Wartungshefte zeigt sich, dass die neue Pumpe eine Ausfallwahrscheinlichkeit von 5%, die ältere von 10% hat. Die Wahrscheinlichkeit für den gleichzeitigen Ausfall beider Pumpen beträgt 0,5%. Da ein Notbetrieb mit einer Pumpe nur kurzzeitig möglich ist, ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten dieses Notbetriebes gesucht.

Lösung 5

Wir unterscheiden den Ausfall der neueren Pumpe A und den Ausfall der älteren Pumpe B. Es ist gegeben, dass $P(A) = 0{,}05$, $P(B) = 0{,}1$ und $P(A \cap B) = 0{,}005$.
Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine der beiden Pumpen, aber nicht beide Pumpen gleichzeitig ausfallen $P(A \cup B \setminus (A \cap B))$, welche sich, aufgrund der stochastischen Unabhängigkeit beider Ereignisse, wie folgt berechnen lässt:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \setminus (A \cap B)) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(A \cap B) \\ &= 0{,}05 + 0{,}1 - 2 \cdot 0{,}005 \\ &= 14\% \end{aligned}$$