Aufgabe 1

Aus einer Urne, in der sich zwei Kugeln mit der Ziffer „1“ und drei Kugeln mit der Ziffer „2“ befinden, werden ohne Zurücklegen 2 Kugeln entnommen. Es seien die folgenden Zufallsgrößen definiert

$$X_1 = \{\text{Ziffer der beim 1. Versuch gezogenen Kugel}\}$$

$$X_2 = \{\text{Ziffer der beim 2. Versuch gezogenen Kugel}\}$$

a) Bestimmen Sie die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x_1, x_2)$.

b) Bestimmen Sie die Randverteilung der Zufallsvariablen X_1 und X_2.

c) Prüfen Sie die Zufallsvariablen auf stochastische Unabhängigkeit.

Lösung 1a

Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(x_1, x_2)$ ergibt sich über die Wahrscheinlichkeitstabelle der Zufallsvariablen X_1, X_2.

		X_1	
		1	2
X_2	1	1⁄10	3⁄10
	2	3⁄10	3⁄10

Das bedeutet, wir können die Wahrscheinlichkeitsfunktion wie folgt angeben:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0{,}1 & \text{für } x_1 = x_2 = 1 \\ 0{,}3 & \text{für } x_1 = 2 \vee x_2 = 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lösung 1b

Randverteilung von X_1:

$$f_1(x_1) = \begin{cases} 0{,}4 & \text{für } x_1 = 1 \\ 0{,}6 & \text{für } x_1 = 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Randverteilung von X_2:

$$f_2(x_2) = \begin{cases} 0{,}4 & \text{für } x_2 = 1 \\ 0{,}6 & \text{für } x_2 = 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lösung 1c

Die Zufallsvariablen sind stochastisch unabhängig, wenn für alle x_1, x_2 gilt:

$$f(x_1, x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$$

Gegenbeispiel: $f(1,1) = 0{,}1$ jedoch ist $f_1(1) \cdot f_2(1) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16$. Somit sind die Zufallsvariablen stochastisch abhängig.

Aufgabe 2

X repräsentiere die täglichen Verkäufe eines bestimmten Produktes und besitze die Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x	7.000	7.500	8.000	8.500	9.000	9.500	10.000
$P(X{=}x)$	0,05	0,2	0,35	0,19	0,12	0,08	0,01

a) Berechnen Sie

   i. den Erwartungswert,

   ii. die Varianz sowie die Standardabweichung.

b) Der Nettogewinn, der sich bei einem Verkauf von X Einheiten ergibt, sei durch $Z = 5 \cdot X - 38.000$ gegeben. Berechnen Sie

   i. den Erwartungswert

   ii. und die Varianz

   des Nettogewinns Z.

Lösung 2a

Der Erwartungswert von X auf dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) mit $\Omega = \{7.000, 7.500, 8.000, 8.500, 9.000, 9.500, 10.000\}$ beträgt

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega) \cdot P(\omega) \\
&= 7.000 \cdot 0{,}05 + 7.500 \cdot 0{,}2 + 8.000 \cdot 0{,}35 + 8.500 \cdot 0{,}19 \\
&\quad + 9.000 \cdot 0{,}12 + 9.500 \cdot 0{,}08 + 10.000 \cdot 0{,}01 \\
&= 8.205.
\end{aligned}$$

Die Varianz von X ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= E\left(X^2\right) - E(X)^2 \\
&= \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)^2 \cdot P(\omega) - 8.205^2 \\
&= 7.000^2 \cdot 0{,}05 + 7.500^2 \cdot 0{,}2 + 8.000^2 \cdot 0{,}35 + 8.500^2 \cdot 0{,}19 \\
&\quad + 9.000^2 \cdot 0{,}12 + 9.500^2 \cdot 0{,}08 + 10.000^2 \cdot 0{,}01 - 8.205^2 \\
&= 445.475.
\end{aligned}$$

Lösung 2b

Der Erwartungswert von dem oben beschriebenen Nettogewinn lässt sich wie folgt errechnen:

$$\begin{aligned} E(Z) &= E(5X - 38.000) \\ &= 5 \cdot E(X) - 38.000 \\ &= 5 \cdot 8.205 - 38.000 \\ &= 3.025 \end{aligned}$$

Um die Varianz zu berechnen ermitteln wir zunächst $E\left(Z^2\right)$ und wenden dann die Formel $\operatorname{Var}(Z) = E\left(Z^2\right) - E(Z)^2$ an.

$$\begin{aligned} E\left(Z^2\right) &= \sum_{i=1}^{7} (5x_i - 38.000)^2 \cdot P(X = x_i) \\ &= (5 \cdot 7.000 - 38.000)^2 \cdot 0{,}05 + (5 \cdot 7.500 - 38.000)^2 \cdot 0{,}2 \\ &\quad + (5 \cdot 8.000 - 38.000)^2 \cdot 0{,}35 + (5 \cdot 8.500 - 38.000)^2 \cdot 0{,}19 \\ &\quad + (5 \cdot 9.000 - 38.000)^2 \cdot 0{,}12 + (5 \cdot 9.500 - 38.000)^2 \cdot 0{,}08 \\ &\quad + (5 \cdot 10.000 - 38.000)^2 \cdot 0{,}01 \\ &= 20.287.500 \end{aligned}$$

Somit beträgt die Varianz des Nettogewinns Z

$$\operatorname{Var}(Z) = 20.287.500 - 3.025^2 = 11.136.875.$$

Aufgabe 3

20% aller Kälber erkranken in den ersten sechs Lebensmonaten an einer bestimmten, nicht ansteckenden Krankheit. Um drei verschiedene Impfstoffe A, B und C auf ihre Wirksamkeit gegen die betreffende Krankheit zu testen, wurden 18 neugeborene Kälber eines Bauernhofes mit A, 11 neugeborene eines anderen Bauernhofes mit B und 26 neugeborene eines dritten Bauernhofes mit C geimpft. In den ersten sechs Lebensmonaten

a) erkrankte genau eines der mit A geimpften Kälber,

b) erkrankte keines der mit B geimpften Kälber,

c) erkrankten genau zwei der mit C geimpften Kälber.

Unter geeigneter Verteilungsannahme berechne man die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei völliger Wirkungslosigkeit des jeweiligen Impfstoffes keine größere als die unter a) bzw. b) bzw. c) angegebene Anzahl von Erkrankungen auftritt.

Lösung 3

Sei $A = \{\#\text{Erkrankungen bei Hof A}\}$ und $n_A = 18$ die Anzahl der neugeborenen und geimpften Kälber auf dem Bauernhof A. Unter Annahme einer Binominalverteilung $\sim \text{Binom}(n_A = 18, p = 0{,}2)$ berechnet sich die Wahrscheinlichkeit für die Erkrankung von **nicht mehr als** genau einem der mit A geimpften Kälber durch

$$\begin{aligned} P(A \leq 1) &= \binom{18}{0} \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^{18-0} + \binom{18}{1} \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^{18-1} \\ &\approx 9{,}91\%. \end{aligned}$$

Sei $B = \{\#\text{Erkrankungen bei Hof B}\}$ und $n_B = 11$, so kann mit $\sim \text{Binom}(n_B = 11p = 0{,}2)$ die Wahrscheinlichkeit für die Erkrankung von **nicht mehr als** keines der mit B geimpften Kälber durch

$$\begin{aligned} P(B{=}0) &= \binom{11}{0} \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^{11-0} \\ &\approx 8{,}59\%. \end{aligned}$$

Sei $C = \{\#\text{Erkrankungen bei Hof C}\}$ und $n_C = 26$, so kann mit $\sim \text{Binom}(n_C = 26p = 0{,}2)$ die Wahrscheinlichkeit für die Erkrankung von **nicht mehr als** genau zwei der mit C geimpften Kälber durch

$$\begin{aligned} P(C \leq 2) &= \binom{26}{0} \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^{26-0} + \binom{26}{1} \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^{26-1} \\ &+ \binom{26}{2} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^{26-2} \\ &\approx 8{,}41\%. \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Aus einem Skatspiel mit 32 Karten wird eine Karte zufällig entnommen.

a) Sie spielen folgende Spielvariante: Jede Karte wird einzeln gezogen. Sie notieren, welche Karte es gewesen ist und legen die Karte zurück. Sie wiederholen dieses Vorgehen 10 mal. Wie wahrscheinlich ist es, dass genau zwei Buben dabei gewesen sind?

b) Wie oft muss man eine Karte ziehen, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, mindestens ein rotes Ass zu ziehen, größer als 0,5 wird?

Lösung 4a

Es befindet sich für jeder der vier Fraktionen ($\heartsuit$, $\diamondsuit$, $\clubsuit$, $\spadesuit$) ein Bube in dem Kartenspiel, sodass die Wahrscheinlichkeit einen Buben zu ziehen $P(X = \#\text{Buben}) = \frac{4}{32}$ beträgt.

Wir betrachten nun den Fall, dass genau zwei Buben gezogen wurden und die übrigen Karten keine Buben waren. Da beide Buben jedoch in einer beliebigen Reihenfolge gezogenen werden dürfen, handelt es sich um eine Binominalverteilung $\sim \text{Binom}(n = 10, p = \frac{4}{32})$.

$$\begin{aligned} P(X{=}2) &= \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{4}{32}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{4}{32}\right)^8 \\ &= 45 \cdot \frac{1}{64} \cdot \left(\frac{28}{32}\right)^8 \\ &= 45 \cdot \frac{5.764.801}{1.073.741.824} \\ &\approx 24{,}16\% \end{aligned}$$

Lösung 4b

Sei nun $A = \{\#\heartsuit \text{ Ass}, \#\diamondsuit \text{ Ass}\}$ und n wieder die Anzahl der Ziehungen. Wir betrachten die Binominalverteilung $\sim \text{Binom}(n, p = \frac{2}{32})$ und die folgende Wahrscheinlichkeit:

$$P(A{=}a) \quad = \binom{n}{a} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^a \cdot \left(\frac{15}{16}\right)^{(n-a)}$$

Gesucht ist ein n für das $P(A \geq 1) > 0{,}5$ gilt. Beim Ziehen ohne Zurücklegen würde die Betrachtung von $P(A{=}1) + P(A{=}2)$ ausreichen, da maximal zwei rote Asse gezogen werden könnten. Da wir hier jedoch zurücklegen und auch das dreifache oder mehrfache Ziehen von roten Assen nicht zum Abbruch der Ziehung führt, müssen wir hier $P(A{=}1) + P(A{=}2) + P(A{=}3) + \ldots$ betrachten. Daher ist es einfacher das Komplementärereignis zu betrachten, nämlich dass nach n Ziehungen noch kein rotes Ass gezogen wurde. $P(A{\geq}1) = 1 - P(A{=}0)$ Wir können also wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} & 0{,}5 && < P(A{\geq}1) \\ \Leftrightarrow\; & 0{,}5 && < 1 - P(A{=}0) \\ \Leftrightarrow\; & 0{,}5 && > \binom{n}{0} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^0 \cdot \left(\frac{15}{16}\right)^{n-0} \\ \Leftrightarrow\; & 0{,}5 && > \left(\frac{15}{16}\right)^n \\ \Leftrightarrow\; & n && > \frac{\ln 0{,}5}{\ln \frac{15}{16}} \\ \Leftrightarrow\; & n && > 10{,}74 \end{aligned}$$

Es muss also mindestens 11 mal gezogen werden, damit die Wahrscheinlichkeit dafür mehr als ein rotes Ass zu ziehen, größer als 50% wird.

Aufgabe 5

Im letzten Wintersemester nahmen 120 Studierende an der Stochastik-Klausur teil. Im Folgenden ist die Punkteverteilung einer Stochastik-Klausur-Aufgabe angegeben:

Punkte	6	5	4	3	2	1
Anzahl	0	10	30	40	20	20
Wahrscheinlichkeit	0	$^{10}/_{120}$	$^{30}/_{120}$	$^{40}/_{120}$	$^{20}/_{120}$	$^{20}/_{120}$

a) Berechnen Sie

i. den Erwartungswert.

ii. die Varianz und die Standardabweichung.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt der Punkteschnitt im Bereich $[\mu - 2; \mu + 2]$? Nutzen Sie zur Abschätzung die Tschebyscheffsche Ungleichung.

Lösung 5a

Sei $X = \{\text{Anzahl der Punkte}\}$, so beträgt der Erwartungswert nach der gegebenen Tabelle $E(X) = {}^{35}/_{12} \approx 2{,}92$. Um die Varianz zu ermitteln, berechnen wir zunächst $E(X^2) = {}^{119}/_{12} \approx 9{,}92$ und sodann

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(X) &= E\left(X^2\right) - E(X)^2 \\ &= \frac{119}{12} - \left(\frac{35}{12}\right)^2 \\ &= \frac{203}{144} \approx 1{,}41.\end{aligned}$$

Die Standardabweichung beträgt somit $\sigma = \sqrt{\frac{203}{144}} \approx 1{,}187$.

Lösung 5b

Nach Tschebyschow gilt allgemein

$$\begin{aligned}P\left(|X-\mu| \geq k\right) &\leq \frac{\sigma^2}{k^2} \\ P\left(|X-\mu| < k\right) &\geq 1 - \frac{\sigma^2}{k^2}.\end{aligned}$$

Damit der Punkteschnitt im Bereich $[\mu - 2; \mu + 2]$ liegt, betrachten wir hier die zweite Gleichung und setzen $k = 2$, da $P\left(X \in [\mu - 2; \mu + 2]\right) = P(|X - \mu \leq 2|)$ ist.

$$\begin{aligned}& P\left(|X-\mu| < 2\right) && \geq 1 - \frac{\frac{203}{144}}{2^2} \\ \Leftrightarrow\quad & P\left(|X-\mu| < 2\right) && \geq \frac{373}{576} \approx 64{,}76\%\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Varianz $\text{Var} = \sigma^2 \approx 1{,}187$ und dem Erwartungswert $\mu \approx 2{,}92$ lässt sich also sagen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein Studierender bei der Aufgabe zwischen 0,92 und 4,92 Punkte erzielen konnte, 64,76% beträgt.