Aufgabe 1

Die störungsfreie Laufzeit X (in Stunden) eines Computers in einem Betrieb besitze folgende Dichtefunktion:

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \mathrm{e}^{-a \cdot x} & \text{für } x \geq 0 \text{ und } a = 0{,}02 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion.

b) Berechnen Sie für X

   i. den Erwartungswert

   ii. die Varianz

   iii. den Median

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Maschine

   i. höchstens 30 Stunden ohne Störung läuft?

   ii. mindestens 40, aber höchstens 80 Stunden ohne Störung läuft?

   iii. mindestens 40 Stunden läuft, wenn sie bereits 20 Stunden gelaufen ist?

Lösung 1a

Die Verteilungsfunktion $F(x)$ einer Exponentialverteilung ist das Integral der Dichtefunktion in den Grenzen von $[-\infty, x]$.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t &= \overbrace{\int_{-\infty}^{0} f(t)\ \mathrm{d}t}^{=0} + \int_{0}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_{0}^{x} a \cdot \mathrm{e}^{-a \cdot t}\ \mathrm{d}t \\
&= \left[-e^{-a \cdot t}\right]_{0}^{x} \\
&= -e^{-a \cdot x} - \mathrm{e}^{0} \\
&= -e^{-a \cdot x} + 1
\end{aligned}$$

Wir erhalten somit die Verteilungsfunktion $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda = a)$:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-a \cdot x} & \text{für} \quad x \geq 0 \wedge a = 0{,}02 \\ 0 & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$$

Lösung 1b

Der Erwartungswert der Zufallsvariablen X ist

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{0}^{\infty} x \cdot 0{,}02\,\mathrm{e}^{-0{,}02x}\ \mathrm{d}x \\ &= 50 \text{ Stunden.} \end{aligned}$$

Um die Varianz zu bestimmen, bestimmen wir zunächst das zweite Moment von X, also $E(X^2)$, wobei X^2 als neue Zufallsvariable im Sinne von $X^2 = g(X)$ verstanden werden kann.

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{0}^{\infty} x^2 \cdot 0{,}02\,\mathrm{e}^{-0{,}02x}\ \mathrm{d}x \\ &= 5.000 \end{aligned}$$

Die Varianz ist nun $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 5.000 - 2.500 = 2.500$ Stunden^2.

Um nun den Median zu bestimmen, suchen wir ein μ, sodass gilt:

$$P(X \le \mu - x) = P(X \ge \mu + x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Der Median wird auch $Q_{0.5}$ oder 0,5-Quantil genannt und halbiert die Fläche unter der Dichtefunktion. Hier ist der Median $\frac{\ln(2)}{0{,}02} \approx 34{,}6574$ Stunden.

Allgemein können wir bei einer Exponentialverteilung der Form $a \cdot \mathrm{e}^{-a \cdot x}$ also Erwartungswert, Varianz und Median direkt über die folgenden Formeln berechnen:

- Der Erwartungswert einer Exponentialverteilung ist $\frac{1}{a}$.
- Die Varianz einer Exponentialverteilung ist $\frac{1}{a^2}$.
- Der Median einer Exponentialverteilung ist $\frac{\ln(2)}{a}$.

Lösung 1c

Somit lassen sich die obigen Fragen wie folgt beantworten:
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Computer höchstens 30 Stunden ohne Störung läuft:

$$\begin{aligned} P(X \le 30) &= F(30) \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-0{,}02 \cdot 30} \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-0{,}6} \\ &\approx 0{,}451188 = 45{,}1188\% \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Computer mindestens 40, aber höchstens 80 Stunden läuft:

$$\begin{aligned} P(40 \leq X \leq 80) &= F(80) - F(40) \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-0{,}02 \cdot 80} - (1 - \mathrm{e}^{-0{,}02 \cdot 40}) \\ &= \mathrm{e}^{-0{,}8} - \mathrm{e}^{-1{,}6} \\ &\approx 0{,}247432 = 24{,}7432\% \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Computer mindestens 40 Stunden läuft, wenn er bereits 20 Stunden gelaufen ist:

$$\begin{aligned} P(X \geq 40 | X \geq 20) &= \frac{P(\{X \geq 40\} \cap \{X \geq 20\})}{P(X \geq 20)} \\ &= \frac{P(X \geq 40)}{P(X \geq 20)} \\ &= \frac{1 - P(X < 40)}{1 - P(X < 20)} \\ &= \frac{1 - F(40)}{1 - F(20)} \\ &\approx \frac{0{,}449329}{0{,}670320} \\ &\approx 0{,}6703 = 67{,}03\% \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Gegeben sei folgende zweidimensionale Dichtefunktion der Zufallsvariablen X und Y:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2x + \frac{2}{3}y & \text{für } -0{,}5 \leq x \leq 0{,}5 \text{ und } 1 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Berechnen Sie die Randverteilung ($f_X(x)$ und $f_Y(y)$) für beide Zufallsvariablen X und Y.

b) Sind die Zufallsvariablen X und Y stochastisch unabhängig?

c) Berechnen Sie aus der Randverteilung

   i. den Erwartungswert $E(Y)$ sowie

   ii. die Varianz $\mathrm{Var}(Y)$.

Lösung 2

Berechnung der Randverteilungen $f_X(x)$ und $f_Y(y)$:
Die Randdichtefunktion $f_X(x)$ erhält man durch Integration der gemeinsamen Dichtefunktion $f_{X,Y}(x,y)$ über den Bereich von y:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_1^2 f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_1^2 2x + \frac{2}{3}y\,\mathrm{d}y \\ &= \left[2xy + \frac{1}{3}y^2\right]_1^2 \\ &= 4x + \frac{4}{3} - 2x - \frac{1}{3} \\ &= 2x + 1 \end{aligned}$$

Die Randdichtefunktion $f_Y(y)$ entsprechend über den Integrationsbereich von x:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-0,5}^{0,5} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-0,5}^{0,5} 2x + \frac{2}{3}y\,\mathrm{d}x \\ &= \left[x^2 + \frac{2}{3}yx\right]_{-0,5}^{0,5} \\ &= \frac{2}{3}y \end{aligned}$$

Wir erhalten somit

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \in [-0{,}5; 0{,}5] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{3}y & y \in [1, 2] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Stochastische Unabhängigkeit:

Zwei Zufallsvariablen X und Y sind stochastisch unabhängig, wenn für alle x und y gilt, dass $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$. Wir überprüfen also, ob diese Bedingung erfüllt ist und wählen $x = \frac{1}{2}, y = 1$ als Gegenbeispiel:

$$f_{X,Y}\left(\frac{1}{2}, 1\right) = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \neq \frac{4}{3} = 2 \cdot \frac{2}{3} = f_X\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f_Y(1)$$

Die die Zufallsvariablen X und Y sind somit nicht stochastisch unabhängig.

Erwartungswert und Varianz von Y
Der Erwartungswert $E(Y)$ ist das Integral von $y \cdot f_Y(y)$ über den Bereich von y.

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_1^2 y \cdot f_Y(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_1^2 \frac{2}{3} \cdot y^2\,\mathrm{d}y \\ &= \left[\frac{2}{9} y^3\right]_1^2 \\ &= \frac{14}{9} \end{aligned}$$

Die Varianz $\mathrm{Var}(Y)$ ist das Integral von $(y - E(Y))^2 \cdot f_Y(y)$ über den Bereich von y.

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Y) &= \int_1^2 y^2 \cdot f_Y(y)\,\mathrm{d}y - \left(\frac{14}{9}\right)^2 \\ &= \int_1^2 \frac{2}{3} \cdot y^3\,\mathrm{d}y - \frac{196}{81} \\ &= \left[\frac{1}{6} \cdot y^4\right]_1^2 - \frac{196}{81} \\ &= \frac{15}{6} - \frac{196}{81} \\ &= \frac{13}{162} \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Eine Maschine produziert Bolzen, deren Durchmesser normalverteilt sind mit Mittelwert 9,8 mm und Standardabweichung 0,10 mm. Eine andere Maschine bohrt Löcher in einer Metallplatte, deren Durchmesser normalverteilt sind mit Mittelwert 10,0 mm und Standardabweichung 0,08 mm. Die beiden Durchmesser dürfen als unabhängig betrachtet werden.

a) Welche Verteilung beschreibt den Abstand zwischen Bolzen und Loch in einer Metallplatte?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebig ausgewählter Bolzen in ein beliebig ausgewähltes Loch passt?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergibt sich bei einer zufälligen Auswahl von Bolzen und Loch eine Verbindung mit zu viel Spiel, wenn der Unterschied zwischen Durchmesser des Lochs in der Metallplatte und Bolzendurchmesser höchstens 0,5 mm betragen darf?

Lösung 3a

Bolzendurchmesser:
Normalverteilung mit Mittelwert $\mu_1 = 9{,}8$ mm und Standardabweichung $\sigma = 0{,}1$ mm.
Lochdurchmesser:
Normalverteilung mit Mittelwert $\mu_2 = 10$ mm und Standardabweichung $\sigma = 0{,}08$ mm.
Abstand:
Sind zwei unabhängige Zufallsvariablen normalverteilt, so ist auch ihre Differenz normalverteilt. Der Abstand zwischen dem Bolzen und dem Loch in einer Metallplatte kann als Differenz der beiden normalverteilten Größen betrachtet werden. Somit ist die Verteilung des Abstands D (Lochdurchmesser minus Bolzendurchmesser) eine Normalverteilung mit folgenden Parameter:

- Mittelwert $\mu_D = \mu_2 - \mu_1 = 0{,}2$ mm
- Standardabweichung $\sigma_D = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \approx 0{,}12806$ mm

Somit gilt $D \sim \mathcal{N}(\mu_D, \sigma_D^2) = \mathcal{N}(0{,}2 \text{ mm}; 0{,}016399 \text{ mm}^2)$.

Lösung 3b

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebig ausgewählter Bolzen in ein beliebig ausgewähltes Loch passt $P(D \geq 0)$ bzw. $1 - P(D \leq 0)$ lässt sich in R mit dem Befehl `1 - pnorm(q=0, mean=0.2, sd=0.12806)` berechnen und ergibt den Wert 0,9408287. Sie beträgt also ungefähr 94,083 %.
Händisch würden wir dazu so vorgehen:

$$
\begin{aligned}
1 - P(D \leq 0) &= 1 - P\left(\frac{D - 0{,}2}{0{,}12806} \leq \frac{0 - 0{,}2}{0{,}12806}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{-0{,}2}{0{,}12806}\right) \\
&\approx \Phi(1.562) = 0{,}94062
\end{aligned}
$$

Lösung 3c

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer zufälligen Auswahl von Bolzen und Loch eine Verbindung mit einem Abstand von mehr als 0,5 mm zustande kommt $P(D > 0{,}5) = 1 - P(D \leq 0{,}5)$ beträgt (mit gleichem Rechenweg wie zuvor) 0,9573619%.

Aufgabe 4

Bei einem Produktionsvorgang werden Zylinder in den ausgefrästen Kreis eines Metallsockels eingepasst. Die beiden Teile werden rein zufällig aus den bisher produzierten Zylindern bzw. ausgefrästen Metallplatten ausgewählt. Der Durchmesser des Zylinders ist (in mm) nach $\mathcal{N}(\mu_1{=}24{,}9, \sigma_1^2{=}(0{,}03)^2)$-verteilt, der Durchmesser des, in den Metallsockel eingefrästen, Kreises ist nach $\mathcal{N}(\mu_2{=}25, \sigma_2^2{=}(0{,}04)^2)$-verteilt. Der Zylinder kann noch eingepasst werden, falls die lichte Weite der Durchmessers (also Durchmesser des gefrästen Kreises minus Durchmesser des Zylinders) nicht mehr als 0,2mm beträgt.

a) Berechnen Sie

   i. den Erwartungswert

   ii. die Varianz

   der Zufallsvariablen „lichte Weite des Durchmessers“.

b) In wie viel Prozent aller Fälle lässt sich der Zylinder nicht in die Metallplatte einpassen?

Lösung 4

Für die Zufallsvariable $X = \{\text{lichte Weite}\}$ ist der Erwartungswert $E(X) = \mu_2 - \mu_1 = 25 - 24{,}9 = 0{,}1$ mm. Die Varianz beträgt $\mathrm{Var}(X) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = 0{,}0025\ \mathrm{mm}^2$. Somit gilt $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = \mathcal{N}(0{,}1\ \mathrm{mm}; 0{,}0025\ \mathrm{mm}^2)$.

Da ein Zylinder noch eingepasst werden kann, wenn $x \in \{X \leq 0{,}2\}$, betrachten wir die relative Häufigkeit von dem Gegenereignis $1 - P(X \leq 0{,}2)$.

$$\begin{aligned}
P(X \geq 0{,}2) &= 1 - P(X \leq 0{,}2) \\
&= 1 - P\left(\frac{X - 0{,}1}{\sqrt{0{,}0025}} \leq \frac{0{,}2 - 0{,}1}{\sqrt{0{,}0025}}\right) \\
&= 1 - P\left(\frac{X - 0{,}1}{0{,}05} \leq \frac{0{,}1}{0{,}05}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{0{,}1}{0{,}05}\right) = 1 - \Phi(2) \\
&\approx 1 - 0{,}97725 = 2{,}275\%
\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Zylinder nicht passt, liegt somit bei ungefähr 2,275 %.