Aufgabe 1

Der durchschnittliche Kraftstoffverbrauch (in Liter/100 km) von Autos eines bestimmten Typs kann durch eine $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$-verteilte Zufallsvariable mit $\mu \geq 0$ und $\sigma > 0$ beschrieben werden. Der Hersteller gibt an, dass Fahrzeuge diesen Types einen Durchschnittsverbrauch von weniger als 8,5 Liter/100 km haben.

Entscheiden Sie, welches der folgenden Testverfahren zur Überprüfung der Aussage des Herstellers zu einem Signifikanzniveau $\alpha \in (0;1)$ geeignet ist. Begründen Sie ihre Antwort.

1) der t-Test mit den Hypothesen $H_0 : \mu \leq 8{,}5$ gegen $H_1 : \mu > 8{,}5$
2) der Gauß-Test mit den Hypothesen $H_0 : \mu \geq 8{,}5$ gegen $H_1 : \mu < 8{,}5$
3) der t-Test mit den Hypothesen $H_0 : \mu \geq 8{,}5$ gegen $H_1 : \mu < 8{,}5$
4) der t-Test mit den Hypothesen $H_0 : \mu = 8{,}5$ gegen $H_1 : \mu \neq 8{,}5$

Hypothesentests

Gauß-Test:

- **Einsatzgebiet:** Wenn Sie eine Hypothese über den Mittelwert einer normalverteilten Grundgesamtheit testen möchten und die Varianz der Grundgesamtheit bekannt ist.
- **Typische Situationen:** Dieser Test wird oft in Qualitätssicherungsprozessen oder bei der Überprüfung von Herstellungsstandards eingesetzt, wo die Varianz aus historischen Daten bekannt ist.
- **Annahmen:** Die Stichprobenwerte müssen unabhängig und identisch verteilt sein, und die Grundgesamtheit muss normalverteilt sein.

Einstichproben-t-Test:

- **Einsatzgebiet:** Dieser Test wird angewendet, wenn Sie eine Hypothese über den Mittelwert einer normalverteilten Grundgesamtheit testen möchten, aber die Varianz der Grundgesamtheit ist nicht bekannt.
- **Typische Situationen:** Der Test ist nützlich in der Forschung und anderen Anwendungen, wo Daten aus einer normalverteilten Grundgesamtheit stammen, aber keine ausreichenden Informationen über die Varianz vorliegen.
- **Annahmen:** Die Stichproben müssen unabhängig und identisch verteilt sein, und die Grundgesamtheit muss normalverteilt sein. Der Test ist robust gegenüber Verletzungen der Normalverteilungsannahme, besonders bei größeren Stichproben.

Zweistichproben-t-Test:

- **Einsatzgebiet:** Wenn Sie die Mittelwerte von zwei unabhängigen Stichproben vergleichen möchten, wobei angenommen wird, dass beide Stichproben aus normalverteilten Grundgesamtheiten mit unbekannten, aber gleichen Varianzen stammen.
- **Typische Situationen:** Dieser Test ist hilfreich, wenn Sie beispielsweise die Wirksamkeit zweier Medikamente oder die Unterschiede zwischen zwei verschiedenen Produktionsprozessen bewerten wollen.
- **Annahmen:** Beide Stichproben müssen unabhängig voneinander sein, die Daten in beiden Gruppen müssen normalverteilt sein, und die Varianzen der beiden Grundgesamtheiten werden als gleich angenommen.

Lösung 1

Für das Szenario ist das Testverfahren 1 zu wählen, also einen Einstichproben-t-Test mit der Nullhypothese $H_0 : \mu \leq 8{,}5$, da dies die vom Hersteller aufgestellte Behauptung ist, welche wir überprüfen wollen, wobei die Varianz unbekannt ist.

Aufgabe 2

Das durchschnittliche Geburtsgewicht von Kindern von Nichtraucherinnen beträgt 3.500 g. In einer Studie soll gezeigt werden, dass das Geburtsgewicht von Kindern, deren Mütter starke Raucherinnen sind, im Durchschnitt niedriger ist als 3.500 g. Dazu wird das Geburtsgewicht von n Kindern gemessen, deren Mütter während der Schwangerschaft täglich mehr als 20 Zigaretten rauchten. Wir nehmen dabei an, dass die Geburtsgewichte als Realisierungen unabhängiger Zufallsvariablen mit gleicher Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu; 350^2)$ modelliert werden können.

a) Formulieren Sie eine geeignete Hypothese und Alternative, um die obige Behauptung „statistisch nachzuweisen“.

b) Zu welchem Ergebnis kommt der Test bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 5\%$, wenn bei den 20 Kindern ein durchschnittliches Geburtsgewicht von $\overline{x}_{20} = 3.200$ g gemessen wurde?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird mit der in b) ermittelten Entscheidungsregel eine Fehlentscheidung getroffen, wenn im Fall $n = 20$ das durchschnittliche Geburtsgewicht in Wirklichkeit 3.400 g beträgt?

Lösung 2

Seien die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und $X_i = \{\text{Geburtsgewicht}\} \sim \mathcal{N}(\mu, 350^2)$.

Lösung 2a

Die Studie untersucht, ob das durchschnittliche Geburtsgewicht von Kindern, deren Mütter während der Schwangerschaft mehr als 20 Zigaretten am Tag geraucht haben, kleiner als 3.500 g ist. Als Nullhypothese können wir also $H_0 : \mu \geq 3.500$ g wählen. Die Gegenhypothese dazu ist $H_1 : \mu < 3.500$ g.

Lösung 2b

Da die Standardabweichung $\sigma = 350$ g bekannt und $X \sim \mathcal{N}$ ist, können wir den Gauß-Test mit einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$ anwenden. Bei $n = 20$ Kindern und einem durchschnittlichen Geburtsgewicht von $\overline{X}_{20} = 3.200$ g.
Wir berechnen die Teststatistik Z mit

$$
\begin{aligned}
Z &= \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{X}_{20} - \mu_0}{\sigma} \\
&= \sqrt{20} \cdot \frac{3.200 - 3.500}{350} \\
&- \frac{12\sqrt{5}}{7} \\
&\approx -3{,}833259.
\end{aligned}
$$

Die Entscheidungsregel lautet: Lehne H_0 ab, wenn Z kleiner als das (kritische) $(1 - \alpha)$-Quantil der Standardnormalverteilung ist.

Das kritische Quantil für ein Signifikanzniveu von 5% bei einem einseitigen Test beträgt nach Tabelle etwa $u_{0,05} = -u_{0,95} = -1{,}64$.

Da $Z = -3{,}8 < -1{,}64 = u_{0,05}$ ist, lehnen wir die die Nullhypothese ab. Das heißt, dass hinreichend sicher ist, dass das durchschnittliche Geburtsgewicht von Kindern, deren Mütter starke Raucherinnen sind, statistisch signifikant niedriger als 3.500 g ist.

Lösung 2c

Gefragt ist nach der Wahrscheinlichkeit für einen Fehler zweiter Art (einem Typ-II-Fehler), nämlich der Wahrscheinlichkeit, eine tatsächlich falsche Nullhypothese H_0 nicht abzulehnen, wenn bei einer Stichprobe vom Umfang $n = 20$ das durchschnittliche Geburtsgewicht 3.400 g beträgt.

$$\begin{aligned}\beta(\mu = 3.400) &= 1 - g(3.400)\\ &= 1 - P_\mu\left(\sqrt{n}\cdot\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{s_n} < t_{n-1;\alpha}\right)\\ &= 1 - \Phi\left(\sqrt{n}\cdot\frac{\mu_0 - \mu}{s_n} + u_\alpha\right)\\ &= 1 - \Phi\left(\sqrt{20}\cdot\frac{3.500 - 3.400}{350} - 1{,}64\right)\\ &= 1 - \Phi\left(-0{,}362247\right)\\ &= \Phi\left(0{,}362247\right)\\ &\approx 0{,}64058 = 64{,}058\%\end{aligned}$$

Das bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit, dass wir die Nullhypothese H_0 fälschlicherweise beibehalten, wenn das durchschnittliche Geburtsgewicht 3.400 g beträgt, etwa 64% ist.

Aufgabe 3

Ein Unternehmer vertritt die Meinung, dass ein von ihm eingeführtes Geschäftsmodell den Umsatz seines Unternehmens gesteigert hat. Vor der Einführung des Modells hat das Unternehmen einem Umsatz von durchschnittlich 2,45 Mio. Euro pro Monat erwirtschaftet. In den acht Monaten seit Einführung des neuen Modells wurden folgende monatlichen Umsätze (in Mio. Euro) erzielt:

Monat	1	2	3	4	5	6	7	8
Umsatz	2,39	2,55	2,51	2,45	2,62	2,53	2,41	2,59

a) Bestimmen Sie einen geeigneten Test zur Überprüfung der Aussage des Unternehmens. Gehen Sie hierbei davon aus, dass man die Monatsumsätze als Realisationen stochastisch unabhängiger, jeweils $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$-verteilter Zufallsvariablen mit $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ ansehen kann.

b) Können Sie die Aussage des Unternehmens anhand der gegebenen Daten zum Niveau $\alpha = 0{,}05$ bestätigen?

Lösung 3

Seien $X_1, \ldots, X_N$ unabhängig und $X_i = \{\text{Monatsumsatz}\} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, sowie $\mu_0 = 2{,}45$ M€ pro Monat. Bei einer Stichprobe vom Umfang $n = 8$ soll nun überprüft werden, ob $H_0 : \mu \leq \mu_0$ (also nach Einführung des Geschäftsmodells keine Steigerung stattgefunden hat) oder $H_1 : \mu > \mu_0$ (der Umsatz gestiegen ist).

Ein geeigneter Test zur Überprüfung der Annahme ist der Einstichproben-t-Test mit der Nullhypothese $H_0 : \mu \leq 2{,}45$.

Wir berechnen den t-Wert mit der Formel

$$t = \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{x} - \mu_0}{s}$$

wobei wir den Durchschnitt $\overline{x} = 2{,}50625$ M€ und die Standardabweichung $s = 0{,}083141$ aus der Stichprobe berechnen können.

Wir erhalten somit einen t-Wert von

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{x} - \mu_0}{s} \\ &= \sqrt{8} \cdot \frac{2{,}50625 - 2{,}45}{0{,}083141} \\ &\approx 1{,}91360 \end{aligned}$$

welchen wir mit dem kritischen t-Wert für $\alpha = 0{,}05$ bei $n - 1 = 7$ Freiheitsgraden und erhalten aus der Tabelle $t_{\text{kritisch}} = 1{,}895$.
Da der berechnete t-Wert $t = 1{,}914$ größer als der kritische t-Wert $t_{\text{kritisch}} = 1{,}895$ ist, können wir die Nullhypothese $H_0 : \mu \leq 2{,}45$ zum Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$ ablehnen. Dies bedeutet, dass die Daten darauf hindeuten, dass das neue Geschäftsmodell den Durchschnittsumsatz tatsächlich erhöht hat.

Aufgabe 4

Ein Sportlehrer hat eine Schulklasse in 2 Mannschaften aufgeteilt. Während die 1. Mannschaft gegen die Nachbarklasse Fußball spielt, trainiert die 2. Mannschaft Kugelstoßen. Nach einem Monat werden die Leistungen im Kugelstoßen verglichen.

Die 11 Schülerinnen und Schüler der 1. Mannschaft erzielen im Durchschnitt eine Weite von 6,54 m mit einer empirischen Stichprobenvarianz von 1,68 m^2. Die 16 Schülerinnen und Schüler der 2. Mannschaft erzielen im Durchschnitt eine Weite von 7,85 m mit einer empirischen Stichprobenvarianz von 2,04 m^2.

Ist der Unterschied der Mittelwerte signifikant bei einem Signifikanzniveau von 5%?

Hinweis: Sie können die Gleichheit der unbekannten Varianz voraussetzen.

Lösung 4

Stichprobe 1:

$$n_1 = 11, \quad \mu_1 = 6{,}54, \quad s_1^2 = 1{,}68$$

Stichprobe 2:

$$n_2 = 16, \quad \mu_2 = 7{,}85, \quad s_2^2 = 2{,}04$$

Unter der Annahme, dass die Leistungen der Schlüler:innen jeweils normalverteilt sind, eignet sich der Zweistichproben-t-Test um den Vergleich der Mittelwerte durchzuführen. Mit einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$ untersuchen wir, ob die Mittelwerte sich unterscheiden, also

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \qquad \text{gegen} \qquad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2.$$

Wir bestimmen

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}} \cdot \frac{\mu_1 - \mu_2}{s} \\ &= \sqrt{\frac{11 \cdot 16}{11 + 16}} \cdot \frac{6{,}54 - 7{,}85}{s} \end{aligned}$$

wobei sich das unbekannt s durch

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{\frac{1}{n_1 + n_2 - 2} \cdot \left((n_1 - 1) \cdot s_1^2 + (n_2 - 1) \cdot s_2^2\right)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{11 + 16 - 2} \cdot (10 \cdot 1{,}68 + 15 \cdot 2{,}04)} \\ &\approx 1{,}37695 \end{aligned}$$

ergibt. Somit erhalten wir die Teststatistik

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{\frac{11 \cdot 16}{11 + 16}} \cdot \frac{6{,}54 - 7{,}85}{1{,}37695} \\ &\approx -2{,}42900. \end{aligned}$$

Der kritische t-Wert für ein zweiseitiges 95%-Konfidenzintervall mit $n_1 + n_2 - 2 = 25$ Freiheitsgraden und $p = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}975$ ist etwa $t_{\text{kritisch}} = 2{,}060$.

Da der Absolutwert der Teststatistik $|T| = 2{,}429 > t_{\text{kritisch}}$ ist, lehnen wir die Nullhypothese zu Gunsten von H_1 ab.

Dies bedeutet, dass der Unterschied in den Mittelwerten der beiden Mannschaften statistisch signifikant, mit einem Signifikanzniveau von 5% ist.