Aufgabe 1

Aus einer Urne, in der sich zwei Kugeln mit der Ziffer „1“ und drei Kugeln mit der Ziffer „2“ befinden, werden ohne Zurücklegen 2 Kugeln entnommen. Es seien die folgenden Zufallsgrößen definiert

$$X_1 = \{\text{Ziffer der beim 1. Versuch gezogenen Kugel}\}$$

$$X_2 = \{\text{Ziffer der beim 2. Versuch gezogenen Kugel}\}$$

a) Bestimmen Sie die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x_1, x_2)$.

b) Bestimmen Sie die Randverteilung der Zufallsvariablen X_1 und X_2.

c) Prüfen Sie die Zufallsvariablen auf stochastische Unabhängigkeit.

Lösung 1a

Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x_1, x_2)$ ergibt sich über die Tabelle der Zufallsvariablen X_1, X_2 zu

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0{,}1 & \text{wenn } x_1 = x_2 = 1 \\ 0{,}3 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Lösung 1b

Randverteilung von X_1:

$$f_1(x_1) = \begin{cases} 0{,}4 & \text{für } x_1 = 1 \\ 0{,}6 & \text{für } x_1 = 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Randverteilung von X_2:

$$f_2(x_2) = \begin{cases} 0{,}4 & \text{für } x_2 = 1 \\ 0{,}6 & \text{für } x_2 = 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lösung 1c

Die Zufallsvariablen sind stochastisch unabhängig, wenn für alle x_1, x_2 gilt:

$$f(x_1, x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$$

Gegenbeispiel: $f(1, 1) = 0{,}1$ jedoch ist $f_1(1) \cdot f_2(1) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16$. Somit sind die Zufallsvariablen nicht stochastisch unabhängig.

Aufgabe 2

X repräsentiere die täglichen Verkäufe eines bestimmten Produktes und besitze die Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x	7.000	7.500	8.000	8.500	9.000	9.500	10.000
$P(X=x)$	0,05	0,2	0,35	0,19	0,12	0,08	0,01

a) Berechnen Sie

   i. den Erwartungswert,

   ii. die Varianz sowie die Standardabweichung.

b) Der Nettogewinn, der sich bei einem Verkauf von X Einheiten ergibt, sei durch $Z = 5 \cdot X - 38.000$ gegeben. Berechnen Sie

   i. den Erwartungswert

   ii. und die Varianz

   des Nettogewinns Z.

Lösung 2a

Der Erwartungswert von X auf dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, P) mit $\Omega = \{7.000, 7.500, 8.000, 8.500, 9.000, 9.500, 10.000\}$ beträgt

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\omega) \\
&= 7.000 \cdot 0{,}05 + 7.500 \cdot 0{,}2 + 8.000 \cdot 0{,}35 + 8.500 \cdot 0{,}19 + 9.000 \cdot 0{,}12 \\
&\quad + 9.500 \cdot 0{,}08 + 10.000 \cdot 0{,}01 \\
&= 8.205.
\end{aligned}$$

Die Varianz von X ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= E((X - E(X))^2) \\
&= E((X - 8.205)^2)
\end{aligned}$$

Lösung 2b

Aufgabe 3

20% aller Kälber erkranken in den ersten sechs Lebensmonaten an einer bestimmten nicht ansteckenden Krankheit. Um drei verschiedene Impfstoffe A, B und C auf ihre Wirksamkeit gegen die betreffende Krankheit zu testen, wurden 18 neugeborene Kälber eines Bauernhofes mit A, 11 neugeborene eines anderen Bauernhofes mit B und 26 neugeborene eines dritten Bauernhofes mit C geimpft. In den ersten sechs Lebensmonaten

a) erkrankte genau eines der mit A geimpften Kälber,

b) erkrankte keines der mit B geimpften Kälber,

c) erkrankten genau zwei der mit C geimpften Kälber.

Unter geeigneter Verteilungsannahme berechne man die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei völliger Wirkungslosigkeit des jeweiligen Impfstoffes keine größere als die unter a) bzw. b) bzw. c) angegebene Anzahl von Erkrankungen auftritt.

Lösung 3

Aufgabe 4

Aus einem Skatspiel mit 32 Karten wird eine Karte zufällig entnommen.

a) Sie spielen folgende Spielvariante: Jede Karte wird einzeln gezogen. Sie notieren, welche Karte es gewesen ist und legen die Karte zurück. Sie wiederholen dieses Vorgehen 10 mal. Wie wahrscheinlich ist es, dass genau zwei Buben dabei gewesen sind?

b) Wie oft muss man eine Karte ziehen, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, mindestens ein rotes Ass zu ziehen, größer als 0,5 wird?

Lösung 4

Aufgabe 5

Im letzten Wintersemester nahmen 120 Studierende an der Stochastik-Klausur teil. Im Folgenden ist Punkteverteilung einer Stochastik-Klausur-Aufgabe angegeben:

Punkte	6	5	4	3	2	1
Anzahl	0	10	30	40	20	20
Wahrscheinlichkeit	0	$\frac{10}{120}$	$\frac{30}{120}$	$\frac{40}{120}$	$\frac{20}{120}$	$\frac{20}{120}$

a) Berechnen Sie

   i. den Erwartungswert.

   ii. die Varianz und die Standardabweichung.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt der Punkteschnitt im Bereich $[\mu - 2; \mu + 2]$? Nutzen Sie zur Abschätzung die Tschebyscheffsche Ungleichung.

Lösung 5