Aufgabe 1

In einem landwirtschaftlichen Betrieb erhielten von 20 Versuchsrindern 10 Rinder (Versuchsgruppe 1) jeden Tag Kraftfutter der Zusammensetzung A, die übrigen 10 Rinder (Versuchsgruppe 2) erhielten das herkömmliche Futter der Zusammensetzung B. Nach einer gewissen Zeit wurde die Gewichtszunahme in kg in beiden Gruppen festgestellt:

Gruppe 1:	7,2	4,1	5,5	4,5	5,7	3,8	4,6	6,0	5,2	5,4
Gruppe 2:	5,3	4,4	5,0	3,5	3,9	4,9	5,6	2,5	4,0	3,6

a) Unter der Annahme, dass sich die Gewichtszunahme durch unabhängige, in beiden Fällen identisch normalverteilte Zufallsvariablen beschreiben lässt, prüfe man mit einem geeigneten Test zum Niveau $\alpha = 0{,}1$, ob die Annahme, dass die Gewichtszunahme bei Verabreichung von Kraftfutter der Zusammensetzung A die gleiche Streuung aufweist wie die Gewichtszunahme bei Verabreichung des herkömmlichen Futters der Zusammensetzung B, zu verwerfen ist.

b) Unter der Annahme, dass sich die Gewichtszunahme durch unabhängige, in beiden Fällen identisch normalverteilte Zufallsvariablen mit gleicher Varianz beschreiben lässt, prüfe man mit einem geeigneten Test zum Niveau $\alpha = 0{,}025$ die Hypothese, dass die Gewichtszunahme bei Verabreichung von Kraftfutter der Zusammensetzung A nicht größer ist als die Gewichtszunahme bei Verabreichung des herkömmlichen Futters der Zusammensetzung B.

Lösung 1

Sei $X = \{\text{Gewichtszunahme in kg}\} \sim \mathcal{N}$ und μ, σ^2 unbekannt. Es soll zum Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}1$ geprüft werden, ob

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \qquad \text{gegen} \qquad H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

Bestand hat.
Wir bestimmen den empirischen Mittelwert $\overline{x}_A = \frac{52}{10} = 5{,}2$ kg von Gruppe 1 und $\overline{x}_B = \frac{42{,}7}{10} = 4{,}27$ kg von Gruppe 2, sowie die korrigierte empirische Varianz:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \\ &= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 \right) - n \cdot \overline{x}^2 \right) \end{aligned}$$

Also für Gruppe 1:

$$\begin{aligned} s_A^2 &= \frac{1}{9} (279{,}44 - 10 \cdot 27{,}04) \\ &= 1{,}00\overline{4} \end{aligned}$$

und für Gruppe 2:

$$\begin{aligned} s_B^2 &= \frac{1}{9}(190{,}49 - 10 \cdot 18{,}2329) \\ &= 0{,}906\overline{7} \end{aligned}$$

Unter der Hypothese H_0 liegt eine F-Verteilung

$$\frac{s_A^2}{s_B^2} \underset{H_0}{\sim} F_{n-1,\, m-1}$$

mit 9 Freiheitsgraden vor.
Test:

$$\begin{aligned} \frac{s_A^2}{s_B^2} < F_{9;\,9;\,\frac{\alpha}{2}} \quad &\vee \quad \frac{s_A^2}{s_B^2} > F_{9;\,9;\,(1-\frac{\alpha}{2})} \\ 1{,}107707 < F_{9;\,9;\,0{,}05} \quad &\vee \quad 1{,}107707 > F_{9;\,9;\,0{,}95} \end{aligned}$$

Da $F_{9;\,9;\,0{,}05} = 0{,}314575$ und $F_{9;\,9;\,0{,}95} = 3{,}17889$ (unteres/oberes 5%-Quantil der $F_{9;9}$-Verteilung) also

$$0{,}314575 \leq 1{,}107707 \leq 3{,}17889$$

ist, wird H_0 nicht abgelehnt.

Aufgabe 2

Ein Schraubenhersteller behauptet, dass seine Maschine Schrauben der Länge $20mm$ und Varianz $0{,}3mm^2$ produziert. Eine stochastisch unabhängig, identisch verteilte Stichprobe der Länge des Umfangs $n = 9$ ergab:

$$\overline{x} = 19{,}85mm \qquad \text{und} \qquad s^2 = 0{,}42mm^2$$

Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass die Schraubenlänge normalverteilt ist.

a) Testen Sie mit der Fehlerwahrscheinlichkeit $\alpha = 0{,}01$ die folgende Hypothese:

$$H_0 : \sigma^2 \leq 0{,}3 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \sigma^2 > 0{,}3$$

b) Testen Sie mit der Fehlerwahrscheinlichkeit $\alpha = 0{,}01$ die folgende Hypothese:

$$H_0 : \mu = 20 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \mu \neq 20$$

Lösung 2

Aufgabe 3

Ein Taschenrechner liefert Zufallszahlen zwischen 0 und 1. Es wurden nacheinander 1.000 dieser Zahlen erzeugt. Nach Einteilung des Intervalls [0,1] in 10 gleichgroße Teilintervalle wurde gezählt, wie viele der 1.000 Zufallszahlen auf die einzelnen Klassen entfielen. Man erhielt folgende Tabelle:

Klasse	[0, 0.1]	(0,1; 0,2]	(0,2; 0,3]	(0,3; 0,4]	(0,4; 0,5]	(0,5; 0,6]	(0,6; 0,7]	(0,7; 0,8]	(0,8; 0,9]	(0,9; 1,0]
Anzahl	68	116	101	107	92	100	136	101	79	100

Mithilfe eines geeigneten Chi-Quadrat-Anpassungstests zum Niveau $\alpha = 0{,}05$ überprüfe man, ob die Zufallszahlen $x_1, \ldots, x_{1.000}$ als eine Folge von im Intervall $[0;1]$-gleichverteilten Zufallszahlen angesehen werden können.

Lösung 3