

Aufgabe 1

Für die Ereignisse A , B und C aus einem Ereignissystem gilt

$$P(A) = 0,5 \quad P(B) = 0,2 \quad P(C) = 0,3$$

$$P(A \cap B \cap C) = 0,02 \quad P(A \cup B) = 0,6 \quad P(A \cup C) = 0,6 \quad P(B \cap C) = 0,1$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für:

- a) $P(B \cup C)$
- b) $P(A \cap C)$
- c) $P(A \cap B)$
- d) $P(A \cup B \cup C)$

Lösung 1

Die Wahrscheinlichkeiten für die gegebenen Ereignismengen aus dem Ereignissystem sind:

a)

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = 0,2 + 0,3 - 0,1 = 0,4$$

b)

$$P(A \cap C) = P(A) + P(C) - P(A \cup C) = 0,5 + 0,3 - 0,6 = 0,2$$

c)

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,5 + 0,2 - 0,6 = 0,1$$

d)

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ &\quad + P(A \cap B \cap C) \\ &= 0,5 + 0,2 + 0,3 - 0,1 - 0,2 - 0,1 + 0,02 \\ &= 0,62 \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Eine Spieler bzw. eine Spielerin wirft zwei verschiedenfarbige „faire“ Würfel. Sind die Augenzahlen gleich und gerade, erhält sie/er einen Gewinn von 6 Euro. Sind die Augenzahlen aber gleich und ungerade, muss der Spieler bzw. die Spielerin 6 Euro an die Bank zahlen. Sind die Augenzahlen beider Würfel ungleich und stellt deren Summe eine ungerade Zahl dar, verliert der Spieler bzw. die Spielerin 3 Euro. Ansonsten (ungleiche Augenzahlen bei gerader Summe) beträgt der Gewinn 3 Euro. Wählen Sie eine zweckmäßige Zufallsvariable X aus.

- a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Werte der Zufallsvariable.
- b) Berechnen Sie anschließend den Erwartungswert für X .

Lösung 2

Aus dem Grundraum $\Omega = \{1, \dots, 6\} \times \{1, \dots, 6\}$ sei $A = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega^2 \mid \omega_1 = \omega_2\}$ und $B = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega^2 \mid (\omega_1 + \omega_2) \text{ ist gerade}\}$. **Achtung:** Dabei sind die Augenzahlen jeweils einzeln o.B.d.A. gerade, wenn ihre Summe ungerade ist.

Die Zufallsvariable $X(\omega)$ soll der Gewinn oder Verlust des Spiels sein. Das bedeutet für die Zufallsvariable:

$$X(\omega) : \begin{cases} \Omega^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ \omega \mapsto \begin{cases} 6 & \omega \in A \wedge \omega \notin B \\ -6 & \omega \in A \wedge \omega \in B \\ -3 & \omega \notin A \wedge \omega \notin B \\ 3 & \omega \notin A \wedge \omega \in B \end{cases} \end{cases}$$

Lösung 2a

Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten betrachten wir die folgenden Zerlegungen der Grundmenge durch die Werte -6, -3, 3 und 6 für die Zufallsvariable X:

$$\begin{aligned} \{X=6\} &= \{(2,2), (4,4), (6,6)\} \\ \{X=-6\} &= \{(1,1), (3,3), (5,5)\} \\ \{X=-3\} &= A \setminus B \\ &= \{(1,2), (1,4), (1,6), \dots, (6,1), (6,3), (6,5)\} \\ \{X=3\} &= B \setminus A \\ &= \{(1,3), (1,5), (2,4), (2,6), (3,1), (3,5), \\ &\quad (4,2), (4,6), (5,1), (5,3), (6,2), (6,4)\} \end{aligned}$$

Die Mächtigkeit der Menge $|\{X=6\}| = |\{X=-6\}| = 3$, die von $|\{X=-3\}| = 18$ und die von $|\{X=3\}| = 12$. Die Mächtigkeit der Grundmenge ist $|\Omega^2| = 36$, sodass sich die Wahrscheinlichkeiten wie folgt ergeben:

$$\begin{aligned} P(X=6) &= \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \\ P(X=-6) &= \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \\ P(X=-3) &= \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \\ P(X=3) &= \frac{12}{36} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Lösung 2b

Der Erwartungswert $E(X)$ ist die gewichtete Summe der Zufallsvariablen auf Ω aller Ereignisse.

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega^2} X(\omega) \cdot P(\omega)$$

Das bedeutet hier:

$$\begin{aligned} E(X) &= 6 \cdot P(X=6) + (-6) \cdot P(X=-6) + (-3) \cdot P(X=-3) + 3 \cdot P(X=3) \\ &= \frac{6 \cdot 3}{36} - \frac{6 \cdot 3}{36} - \frac{3 \cdot 18}{36} + \frac{3 \cdot 12}{36} \\ &= \frac{3 \cdot 12 - 3 \cdot 18}{36} \\ &= -\frac{18}{36} = -0,5 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Die Zufallsvariable X besitze den Erwartungswert $E(X) = 2$. Berechnen Sie den Erwartungswert der folgenden linearen Transformationen:

- a) $Z_1 = 2X - 3$
- b) $Z_2 = -0,5X + 2$
- c) $Z_3 = 10X$
- d) $Z_4 = 2$

Lösung 3

- a) $E(Z_1) = E(2X - 3) = 2 \cdot E(X) - 3 = 2 \cdot 2 - 3 = 1$
- b) $E(Z_2) = E(-0,5X + 2) = -0,5 \cdot E(X) + 2 = 1$
- c) $E(Z_3) = E(10X) = 10 \cdot E(X) = 20$
- d) $E(Z_4) = 2$

Aufgabe 4

An einem Schwimmwettbewerb nehmen 20 Schwimmer:innen teil. Darunter sind 12 Auszubildende und 8 Schüler:innen.

- a) Wie wahrscheinlich ist es, dass die ersten drei Plätze nur von Auszubildenden eingenommen werden?

- b) Die Zufallsvariable X sei nun die „Anzahl der Auszubildenden unter den ersten drei Plätzen“. Welches der folgenden Ereignisse ist am Wahrscheinlichsten:
- 1 Auszubildende:r unter den ersten drei
 - 2 Auszubildende unter den ersten drei
 - 3 Auszubildende unter den ersten drei

Lösung 4

Der Ergebnisraum $\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_{20}) | \omega_i \in \{A, S\}\}$ hat die Mächtigkeit $|\Omega| = 2^{20} = 1.048.576$.

Lösung 4a

Die Wahrscheinlichkeit, dass unter den ersten drei Plätzen nur Auszubildende sind $A = \{(\omega_1, \dots, \omega_{20}) \in \Omega | \omega_{1,2,3} = A\}$, beträgt

$$P(A) = \frac{12}{20} \cdot \frac{11}{19} \cdot \frac{10}{18} = \frac{11}{57} \approx 19,298\%.$$

Lösung 4b

Wir betrachten eine hypergeometrische Verteilung mit der Grundgesamtheit des Umfangs $N = 20$, von denen $M = 12$ die gewünschte Eigenschaft besitzen, beim auswählen von $n = 3$ Wettbewerber:innen (Stichprobe des Umfangs n) genau x der ersten drei Plätze zu belegen.

$$P(X=x) = \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad x \in [0, n]$$

Also gilt für das Ereignis ein Auszubildende:r unter den ersten drei

$$\begin{aligned} P(X=1) &= \frac{\binom{12}{1} \binom{20-12}{3-1}}{\binom{20}{3}} \\ &= \frac{\frac{12!8!}{11!6!2!}}{\frac{20!}{17!3!}} \\ &= \frac{3!8!12!17!}{2!6!11!20!} \\ &= \frac{28}{95} \approx 29,47\% \end{aligned}$$

zwei Auszubildende unter den ersten drei

$$\begin{aligned} P(X=2) &= \frac{\binom{12}{2} \binom{20-12}{3-2}}{\binom{20}{3}} \\ &= \frac{\binom{12}{2} \cdot 8}{\binom{20}{3}} \\ &= \frac{44}{95} \approx 46,32\% \end{aligned}$$

und für das Ereignis drei Auszubildende unter den ersten drei eine Wahrscheinlichkeit von

$$\begin{aligned} P(X=3) &= \frac{\binom{12}{3} \binom{20-12}{3-3}}{\binom{20}{3}} \\ &= \frac{11}{54} \approx 19,30\%. \end{aligned}$$

Damit ist das Ereignis, dass zwei Auszubildende unter den ersten drei Plätzen landen $\{X=2\}$ am wahrscheinlichsten.