

Aufgabe 1

Ein Einzelhändler hat drei DVD-Player einer bestimmten Marke geliefert bekommen und überprüft deren Funktionalität, bevor er sie an seine Kunden weitergibt. Es bezeichne nun $A_i (i = 1, 2, 3)$ das Ereignis, dass beim i -ten DVD-Player ein Defekt festgestellt wird. Beschreiben Sie mit Hilfe von A_1, A_2, A_3 und den passenden Mengenoperationen die folgenden Ereignisse.

- a) alle DVD-Player sind defekt,
- b) mindestens ein DVD-Player ist defekt,
- c) höchstens ein DVD-Player ist defekt,
- d) alle DVD-Player sind intakt,
- e) der erste DVD-Player ist defekt und von den beiden anderen Geräten hat höchstens eines einen Fehler,
- f) genau zwei DVD-Player sind defekt.

Lösung 1

- a) alle DVD-Player sind defekt

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3$$

- b) mindestens ein DVD-Player ist defekt

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

- c) höchstens ein DVD-Player ist defekt

$$\mathbb{C}((A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3))$$

- d) alle DVD-Player sind intakt

$$\mathbb{C}(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$$

- e) der erste DVD-Player ist defekt und von den beiden anderen Geräten hat höchstens eines einen Fehler

$$A_1 \setminus (A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

- f) genau zwei DVD-Player sind defekt

$$((A_1 \cap A_2) \cup (A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_3)) \setminus (A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

Aufgabe 2

Eine Urne enthält 4 rote Kugeln mit einem Kreuz, 5 rote Kugeln ohne Kreuz, 3 blaue Kugeln mit einem Kreuz, 2 blaue Kugeln ohne Kreuz, 3 weiße Kugeln mit einem Kreuz und 3 weiße Kugeln ohne Kreuz. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim einmaligen Ziehen einer Kugel

- a) eine weiße Kugel zu ziehen,
- b) eine Kugel mit Kreuz zu ziehen,
- c) eine blaue Kugel mit einem Kreuz oder eine weiße Kugel ohne Kreuz zu ziehen,
- d) eine rote Kugel oder eine Kugel mit einem Kreuz zu ziehen,

Lösung 2

Es sind $n = 20$ Kugeln aus der Grundmenge $\Omega = \{r_k, r, b_k, b, w_k, w\}$ in einer Urne und es wird einmal gezogen, sodass die Wahrscheinlichkeit

- a) eine weiße Kugel zu ziehen

$$P(A_{w_k} \cup A_w) = \frac{3 + 3}{10} = \frac{3}{10}$$

- b) eine Kugel mit Kreuz zu ziehen

$$P(A_{r_k} \cup A_{b_k} \cup A_{w_k}) = \frac{4 + 3 + 3}{20} = \frac{1}{2}$$

- c) eine blaue Kugel mit einem Kreuz oder eine weiße Kugel ohne Kreuz zu ziehen

$$P(A_{b_k} \cup A_w) = \frac{3 + 3}{20} = \frac{3}{10}$$

- d) eine rote Kugel oder eine Kugel mit einem Kreuz zu ziehen

$$P(A_r \cup A_{r_k} \cup A_{b_k} \cup A_{w_k}) = \frac{5 + 4 + 3 + 3}{20} = \frac{3}{4}$$

beträgt.

Aufgabe 3

Bei einer Pressekonferenz sollen auf 20 Plätze 10 Broschüren verteilt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür, wenn

- a) es die gleichen Broschüren sind

- i. und auf jedem Platz höchstens eine liegen soll?
 - ii. und auf jedem Platz beliebig viele Broschüren liegen dürfen?
- b) die Broschüren unterschiedlich sind
- i. und auf jedem Platz höchstens eine liegen soll?
 - ii. und auf jedem Platz beliebig viele Broschüren liegen dürfen?

Lösung 3

Die Anzahl der Möglichkeiten $k = 10$ Broschüren auf $n = 20$ Plätzen zu verteilen beträgt, wenn

- a) es die gleichen Broschüren sind (*Kombination*)

- i. und auf jedem Platz höchstens eine liegen soll (*ohne Wiederholung*)

$$\left| \text{Kom}_{k=10}^{n=20}(\text{oW}) \right| = \binom{20}{10} = \frac{20!}{10! \cdot 10!} = 184.756.$$

- ii. und auf jedem Platz beliebig viele Broschüren liegen dürfen (*mit Wiederholung*)

$$\left| \text{Kom}_{k=10}^{n=20}(\text{mW}) \right| = \binom{20 + 10 - 1}{10} = \frac{29!}{19! \cdot 10!} = 20.030.010.$$

- b) die Broschüren unterschiedlich sind (*Permutationen*)

- i. und auf jedem Platz höchstens eine liegen soll (*ohne Wiederholung*)

$$\left| \text{Per}_{k=10}^{n=20}(\text{oW}) \right| = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{20!}{10!} = 670.442.572.800.$$

- ii. und auf jedem Platz beliebig viele Broschüren liegen dürfen (*mit Wiederholung*)

$$\left| \text{Per}_{k=10}^{n=20}(\text{mW}) \right| = n^k = 20^{10} = 1024 \cdot 10^{10}.$$

Aufgabe 4

Zehn Wagen parken zufällig in vier großen Parkbereichen, d.h. jeder Fahrer wählt unabhängig von den anderen rein zufällig einen Parkbereich aus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

- a) in dem ersten Parkbereich keine Wagen abgestellt werden?
- b) in den ersten beiden Parkbereichen jeweils 2 und in den anderen beiden jeweils 3 Wagen abgestellt werden?
- c) mindestens 2 Wagen in jedem Parkbereich abgestellt werden?

Lösung 4

Unter der Annahme, dass jeder Parkbereich bis zu 10 Wagen aufnehmen kann, wählen wir $k = 10$ Parkpositionen aus $n = 4$ Bereichen.

Wir untersuchen also 10-Tupel der Form

$$(x_1, \dots, x_{10}) \in \text{Per}_{10}^4(\text{mW}) \quad \text{mit} \quad x_i \in \{1, \dots, 4\}$$

also 10-Tupel aus dem Ergebnisraum $\Omega = \{(x_1, \dots, x_{10}) | 1 \leq x_i \leq 4\}$, welcher die Mächtigkeit $|\Omega| = 4^{10}$ hat.

Lösung 4a

Das Ereignis $A = \mathbb{C}\{\text{Wagen im ersten Parkbereich}\} = \text{Per}_{10}^3(\text{mW})$ und hat die Mächtigkeit $|A| = |\text{Per}_{10}^3(\text{mW})| = 3^{10}$.

Nach Laplace beträgt also die Wahrscheinlichkeit dafür dass ein Parkplatz freigelassen wird

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|\text{Per}_{10}^3(\text{mW})|}{|\text{Per}_{10}^4(\text{mW})|} = \frac{3^{10}}{4^{10}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{10} \approx 5,63\%.$$

Lösung 4b

Die Ereignismenge

$$B = \{\{2 \text{ Wagen im ersten Bereich}\} \cap \{2 \text{ Wagen im zweiten Bereich}\} \\ \cap \{3 \text{ Wagen im dritten Bereich}\} \cap \{3 \text{ Wagen im vierten Bereich}\}\}$$

setzt sich zusammen aus Kombinationen ohne Wiederholung, nämlich der Menge aller Möglichkeiten 2 aus 10 Wagen für den ersten Bereich anzuordnen, 2 aus den 8 übrigen Wagen für den zweiten Bereich, 3 aus 6 für den dritten und 3 aus 3 für den vierten Bereich anzuordnen, also

$$B = \text{Kom}_2^{10}(\text{oW}) \times \text{Kom}_2^8(\text{oW}) \times \text{Kom}_3^6(\text{oW}) \times \text{Kom}_3^3(\text{oW}).$$

Die Mächtigkeit der Ereignismenge $|B|$ berechnet sich entsprechend wie folgt:

$$\begin{aligned} |B| &= \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{3} \cdot \binom{3}{3} \\ &= \frac{10! \cdot 8! \cdot 6! \cdot 3!}{(10-2)!2! \cdot (8-2)!2! \cdot (6-3)!3! \cdot (3-3)!3!} \\ &= \frac{10! \cdot \cancel{8!} \cdot \cancel{6!} \cdot \cancel{3!}}{\cancel{8!}2! \cdot \cancel{6!}2! \cdot \cancel{3!}3! \cdot 3!} \\ &= \frac{10!}{4 \cdot 6 \cdot 6} \\ &= 25.200 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in den ersten beiden Parkbereichen jeweils 2 und in den anderen beiden jeweils 3 Wagen abgestellt werden beträgt nach Laplace somit

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{25.200}{4^{10}} \approx 2,4\%.$$

Lösung 4c

Die Ereignismenge

$$C = \{2 \text{ oder mehr Wagen in jedem Bereich}\}$$

setzt sich zusammen aus der Menge der Ereignisse, bei denen zwei mal 2 Wagen und zwei mal 3 Wagen angeordnet werden ($C_1 = B$) und der Menge der Ereignisse bei denen drei mal 2 und einmal 4 Wagen angeordnet werden (C_2). Dabei gibt es $\binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} = 6$ Variationen von C_1 (also $(2,2,3,3), (3,3,2,2), (3,2,2,3), \dots$), sowie $\binom{4}{1} \cdot \binom{3}{3} = 4$ Variationen von C_2 (also $(2,2,2,4), (2,2,4,2), (2,4,2,2)$ und $(4,2,2,2)$).

Die Mächtigkeit der Ereignismenge C setzt sich somit zusammen aus $|C| = 6 \cdot |C_1| + 4 \cdot |C_2|$, wobei

$$C_2 = \text{Kom}_2^{10}(\text{oW}) \times \text{Kom}_2^8(\text{oW}) \times \text{Kom}_2^6(\text{oW}) \times \text{Kom}_4^4(\text{oW})$$

ist und die Mächtigkeit $|C_1| = |B| = 25.200$ bereits aus Teilaufgabe b) bekannt ist. Wir berechnen

$$\begin{aligned} |C_2| &= \binom{10}{8} \cdot \binom{8}{6} \cdot \binom{6}{4} \cdot \binom{4}{4} \\ &= \frac{10! \cdot \cancel{8!} \cdot \cancel{6!}}{\cancel{8!} 2! \cdot \cancel{6!} 2! \cdot 2! 4!} \\ &= \frac{10!}{8 \cdot 4!} \\ &= 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \cancel{8} \cdot 9 \cdot 10 \\ &= 18.900 \end{aligned}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} |C| &= 6 \cdot |C_1| + 4 \cdot |C_2| \\ &= 6 \cdot 25.200 + 4 \cdot 18.900 \\ &= 226.800. \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 2 Wagen in jedem Parkbereich abgestellt werden, beträgt somit nach Laplace

$$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{226.800}{4^{10}} \approx 21,63\%.$$