Aufgabe 1

Für die Ereignisse A, B und C aus einem Ereignissystem gilt

$$P(A) = 0{,}5 \qquad P(B) = 0{,}2 \qquad P(C) = 0{,}3$$

$$P(A \cap B \cap C) = 0{,}02 \qquad P(A \cup B) = 0{,}6 \qquad P(A \cup C) = 0{,}6 \qquad P(B \cap C) = 0{,}1$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für:

a) $P(B \cup C)$

b) $P(A \cap C)$

c) $P(A \cap B)$

d) $P(A \cup B \cup C)$

Lösung 1

Die Wahrscheinlichkeiten für die gegebenen Ereignismengen aus dem Ereignissystem sind:

a)
$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = 0{,}2 + 0{,}3 - 0{,}1 = 0{,}4$$

b)
$$P(A \cap C) = P(A) + P(C) - P(A \cup C) = 0{,}5 + 0{,}3 - 0{,}6 = 0{,}2$$

c)
$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0{,}5 + 0{,}2 - 0{,}6 = 0{,}1$$

d)
$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ &\quad + P(A \cap B \cap C) \\ &= 0{,}5 + 0{,}2 + 0{,}3 - 0{,}1 - 0{,}2 - 0{,}1 + 0{,}02 \\ &= 0{,}62 \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Eine Spieler bzw. eine Spielerin wirft zwei verschiedenfarbige „faire“ Würfel. Sind die Augenzahlen gleich und gerade, erhält sie/er einen Gewinn von 6 Euro. Sind die Augenzahlen aber gleich und ungerade, muss der Spieler bzw. die Spielerin 6 Euro an die Bank zahlen. Sind die Augenzahlen beider Würfel ungleich und stellt deren Summe eine ungerade Zahl dar, verliert der Spieler bzw. die Spielerin 3 Euro. Ansonsten (ungleiche Augenzahlen bei gerader Summe) beträgt der Gewinn 3 Euro. Wählen Sie eine zweckmäßige Zufallsvariable X aus.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Werte der Zufallsvariable.

b) Berechnen Sie anschließend den Erwartungswert für X.

Lösung 2

Aus dem Grundraum $\Omega = \{1,\ldots,6\} \times \{1,\ldots,6\}$ sei $A = \left\{(\omega_1,\omega_2) \in \Omega^2 \middle| \omega_1 = \omega_2\right\}$ und $B = \left\{(\omega_1,\omega_2) \in \Omega^2 \middle| (\omega_1+\omega_2) \text{ ist gerade}\right\}$. **Achtung:** Dabei sind die Augenzahlen jeweils einzeln o.B.d.A. gerade, wenn ihre Summe ungerade ist.
Die Zufallsvariable $X(\omega)$ soll der Gewinn oder Verlust des Spiels sein. Das bedeutet für die Zufallsvariable:

$$X(\omega): \begin{cases} \Omega^2 \to \mathbb{R} \\ \omega \mapsto \begin{cases} 6 & \omega \in A \wedge \omega \notin B \\ -6 & \omega \in A \wedge \omega \in B \\ -3 & \omega \notin A \wedge \omega \notin B \\ 3 & \omega \notin A \wedge \omega \in B \end{cases} \end{cases}$$

Lösung 2a

Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten betrachten wir die folgenden Zerlegungen der Grundmenge durch die Werte -6, -3, 3 und 6 für die Zufallsvariable X:

$$\begin{aligned} \{X{=}6\} &= \{(2{,}2),(4{,}4),(6{,}6)\} \\ \{X{=}-6\} &= \{(1{,}1),(3{,}3),(5{,}5)\} \\ \{X{=}-3\} &= A \setminus B \\ &= \{(1{,}2),(1{,}4),(1{,}6),\ldots,(6{,}1),(6{,}3),(6{,}5)\} \\ \{X{=}3\} &= B \setminus A \\ &= \{(1{,}3),(1{,}5),(2{,}4),(2{,}6),(3{,}1),(3{,}5), \\ &\quad (4{,}2),(4{,}6),(5{,}1),(5{,}3),(6{,}2),(6{,}4)\} \end{aligned}$$

Die Mächtigkeit der Menge $|\{X{=}6\}| = |\{X{=}-6\}| = 3$, die von $|\{X{=}-3\}| = 18$ und die von $|\{X{=}3\}| = 12$. Die Mächtigkeit der Grundmenge ist $\left|\Omega^2\right| = 36$, sodass sich die Wahrscheinlichkeiten wie folgt ergeben:

$$\begin{aligned} P(X{=}6) &= \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \\ P(X{=}-6) &= \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \\ P(X{=}-3) &= \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \\ P(X{=}3) &= \frac{12}{36} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Lösung 2b

Der Erwartungswert $E(X)$ ist die gewichtete Summe der Zufallsvariablen auf Ω aller Ereignisse.

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega^2} X(\omega) \cdot P(\omega)$$

Das bedeutet hier:

$$\begin{aligned}
E(X) &= 6 \cdot P(X{=}6) + (-6) \cdot P(X{=}-6) + (-3) \cdot P(X{=}-3) + 3 \cdot P(X{=}3) \\
&= \frac{6 \cdot 3}{36} - \frac{6 \cdot 3}{36} - \frac{3 \cdot 18}{36} + \frac{3 \cdot 12}{36} \\
&= \frac{3 \cdot 12 - 3 \cdot 18}{36} \\
&= -\frac{18}{36} = -0{,}5
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Die Zufallsvariable X besitze den Erwartungswert $E(X) = 2$. Berechnen Sie den Erwartungswert der folgenden linearen Transformationen:

a) $Z_1 = 2X - 3$

b) $Z_2 = -0{,}5X + 2$

c) $Z_3 = 10X$

d) $Z_4 = 2$

Lösung 3

a) $E(Z_1) = E(2X - 3) = 2 \cdot E(X) - 3 = 2 \cdot 2 - 3 = 1$

b) $E(Z_2) = E(-0{,}5X + 2) = -0{,}5 \cdot E(X) + 2 = 1$

c) $E(Z_3) = E(10X) = 10 \cdot E(X) = 20$

d) $E(Z_4) = 2$

Aufgabe 4

An einem Schwimmwettbewerb nehmen 20 Schwimmer:innen teil. Darunter sind 12 Auszubildende und 8 Schüler:innen.

a) Wie wahrscheinlich ist es, dass die ersten drei Plätze nur von Auszubildenden eingenommen werden?

b) Die Zufallsvariable X sei nun die „Anzahl der Auszubildenden unter den ersten drei Plätzen“. Welches der folgenden Ereignisse ist am Wahrscheinlichsten:

   i. 1 Auszubildende:r unter den ersten drei
   ii. 2 Auszubildende unter den ersten drei
   iii. 3 Auszubildende unter den ersten drei

Lösung 4

Der Ergebnisraum $\Omega = \{(\omega_1, \ldots, \omega_{20}) | \omega_i \in \{A, S\}\}$ hat die Mächtigkeit $|\Omega| = 2^{20} = 1.048.576$.

Lösung 4a

Die Wahrscheinlichkeit, dass unter den ersten drei Plätzen nur Auszubildende sind $A = \{(\omega_1, \ldots, \omega_{20}) \in \Omega | \omega_{1,2,3} = A\}$, beträgt

$$P(A) = \frac{12}{20} \cdot \frac{11}{19} \cdot \frac{10}{18} = \frac{11}{57} \approx 19{,}298\%.$$

Lösung 4b

Wir betrachten eine hypergeometrische Verteilung mit der Grundgesamtheit des Umfangs $N = 20$, von denen $M = 12$ die gewünschte Eigenschaft besitzen, beim auswählen von $n = 3$ Wettbewerber:innen (Stichprobe des Umfangs n) genau x der ersten drei Plätze zu belegen.

$$P(X{=}x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad x \in [0{,}n]$$

Also gilt für das Ereignis ein Auszubildende:r unter den ersten drei

$$\begin{aligned} P(X{=}1) &= \frac{\binom{12}{1}\binom{20-12}{3-1}}{\binom{20}{3}} \\ &= \frac{\frac{12!8!}{11!6!2!}}{\frac{20!}{17!3!}} \\ &= \frac{3!8!12!17!}{2!6!11!20!} \\ &= \frac{28}{95} \approx 29{,}47\% \end{aligned}$$

zwei Auszubildende unter den ersten drei

$$\begin{aligned}P(X{=}2) &= \frac{\binom{12}{2}\binom{20-12}{3-2}}{\binom{20}{3}} \\ &= \frac{\binom{12}{2}\cdot 8}{\binom{20}{3}} \\ &= \frac{44}{95} \approx 46{,}32\%\end{aligned}$$

und für das Ereignis drei Auszubildende unter den ersten drei eine Wahrscheinlichkeit von

$$\begin{aligned}P(X{=}3) &= \frac{\binom{12}{3}\binom{20-12}{3-3}}{\binom{20}{3}} \\ &= \frac{11}{54} \approx 19{,}30\%.\end{aligned}$$

Damit ist das Ereignis, dass zwei Auszubildende unter den ersten drei Plätzen landen $\{X{=}2\}$ am wahrscheinlichsten.