Aufgabe 1

384 zufällig ausgewählte Personen wurden nach ihrem Unfall in einer bestimmten Angelegenheit befragt. Zur statistischen Auswertung wurden die Urteile jeweils in eine von 6 Kategorien eingeordnet und in folgender Tabelle dargestellt:

Kategorie	I	II	III	IV	V	VI
Anzahl der Urteile	58	61	72	67	57	69

Testen Sie mit einem geeigneten Testverfahren zum Niveau $\alpha = 0{,}05$, ob in der Grundgesamtheit alle sechs Kategorien gleich wahrscheinlich sind.

Lösung 1 Chi-Quadrat-Anpassungstest

Der Chi-Quadrat-Anpassungstest vergleicht die beobachteten Häufigkeiten O_i in den Klassen mit den erwarteten Häufigkeiten E_i unter der Annahme, dass die Zahlen gleichverteilt sind.

Bei einer Gleichverteilung der Urteile über die $d = 6$ Kategorien, erwarten wir, dass jede Klasse etwa $E_i = \frac{n}{d} = \frac{384}{6} = 64$ Urteile enthält.

Die Chi-Quadrat-Teststatistik D wird wie folgt berechnet:

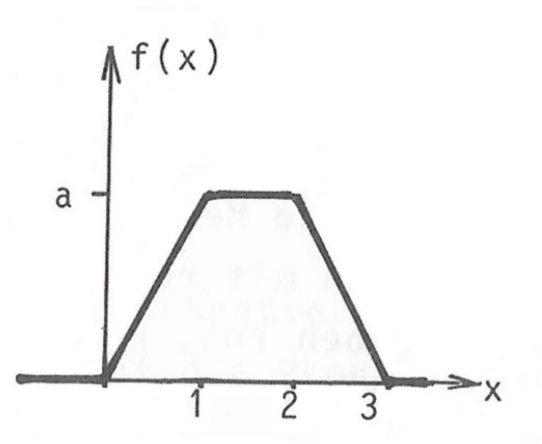
$$
\begin{aligned}
D &= \sum_{i=1}^{d} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \\
&= \sum_{i=1}^{6} \frac{(O_i - 64)^2}{64} \\
&= \frac{1}{64}\left(6^2 + 3^2 + 8^2 + 3^2 + 7^2 + 5^2\right) \\
&= 3
\end{aligned}
$$

Diesen Wert vergleichen wir mit dem 0,95-Quantil der Chi-Quadrat-Verteilung für $d - 1 = 5$ Freiheitsgrade.

Da $D = 3 < 11{,}07 = \chi_{5;\,0{,}95}$ können wir die Nullhypothese nicht ablehnen.

Aufgabe 2

Von einer Zufallsvariablen X wird vermutet, dass sie die nebenstehende Dichte f besitzt mit $f(x) = 0$ für $x \neq [0;3]$.



a) Bestimmen Sie die Konstante a so, dass f eine Dichte ist.

b) Testen Sie die Vermutung mit folgender Stichprobe zum Niveau $\alpha = 0{,}05$:

Klasse	abs. Häufigkeit
$[0;1]$	15
$(1;2]$	29
$(2;3]$	6

Lösung 2

Damit die Funktion f eine Dichtefunktion sein kann, muss $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ sein. Dies ist der Fall für $a = 0{,}5$.
Bei einer Stichprobe vom Umfang $n = 50$ würde man unter Annahme der Dichte erwarten, dass Klasse A_1 im Intervall $[0;1]$ und Klasse A_3 im Intervall $(2;3]$ jeweils $E_{1,3} = 12{,}5$ Elemente, sowie Klasse A_2 im Intervall $(1;2]$ $E_2 = 25$ Elemente enthält.
Wir berechnen die Chi-Quadrat-Teststatistik D:

$$\begin{aligned} D &= \sum_{i=1}^{d} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \\ &= \frac{(15-12{,}5)^2}{12{,}5} + \frac{(29-25)^2}{25} + \frac{(6-12{,}5)^2}{12{,}5} \\ &= 4{,}52 \end{aligned}$$

Diesen Wert vergleichen wir mit dem 0,95-Quantil der Chi-Quadrat-Verteilung für $d-1 = 2$ Freiheitsgrade $\chi_{2;\,0{,}95} = 5{,}991$.

Da $D = 4{,}52 < 5{,}991 = \chi_{2;\,0{,}95}$ können wir die Nullhypothese nicht ablehnen.

Aufgabe 3

Bei der Bestimmung des Geburtsgewichts von 100 Mädchen ergaben sich folgende gerundeten Werte:

Gewicht in kg	2,7	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
Anzahl der Mädchen	6	8	11	13	14	11	13	8	9	7

Testen Sie zum Niveau $\alpha = 0{,}05$ die Hypothese das Geburtsgewicht folgt einer

a) Gleichverteilung in $[2{,}65; 3{,}65]$ mit der Klasseneinteilung

$$[2{,}65; 3{,}0],\ (3{,}0; 3{,}3],\ (3{,}3; 3{,}65].$$

b) Normalverteilung mit der Klasseneinteilung

$$(-\infty; 2{,}8],\ (2{,}8; 3{,}0],\ (3{,}0; 3{,}2],\ (3{,}2; 3{,}4] \text{ und } (3{,}4; \infty).$$

Lösung 3