Aufgabe 1

Die Wahrscheinlichkeit, einen bestimmten Antikörper zu haben, sei gleich 4%.

a) Modellieren Sie die Zufallsvariable, die die Anzahl der Antikörper-Träger unter 10.000 Untersuchten zählt (Verteilung angeben).

b) Berechnen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Untersuchung von 10.000 Personen zwischen 300 und 500 Personen den Antikörper haben.

Lösung 1

Die Zufallsvariable $X = \{\#\text{Antikörper-Träger unter 10k}\}$ wird durch die Binominalverteilung $X \sim \text{Bin}(n{=}10.000, p{=}0{,}04)$ modelliert.
Entsprechend lautet die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$P(X{=}x) = \binom{10.000}{x} \cdot 0{,}04^x \cdot 0{,}96^{10.000-x}.$$

Um nun approximativ die Wahrscheinlichkeit $P(500{>}X{>}300)$ zu berechnen, prüfen wir zunächst die Approximationsbedingungen. Da wir ein großes n bei kleinem p vorliegen haben, beginnen wir zunächst mit der Approximationsbedingung für die Approximation durch eine Poisson-Verteilung:

$$n \cdot p = 10.000 \cdot 0{,}04 = 400 \not\leq 10$$

Approximationsbedingung für Normalverteilung:

$$n \cdot p \cdot (1-p) = 10.000 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}96 = 384 > 9 \quad \checkmark$$

Die zweite Bedingung ist erfüllt, sodass wir mit einer Normalverteilung approximieren können.

$$X \sim \text{Bin}(n{=}10.000, p{=}0{,}04) \approx \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

Da bei einer Normalverteilung $E(X) = \mu = n \cdot p$ gilt und für $\text{Var}(X) = np \cdot (1-p)$ ist, erhalten wir

$$X \sim \text{Bin}(n{=}10.000, p{=}0{,}04) \approx \mathcal{N}(\mu{=}400, \sigma^2{=}384).$$

Statt

$$P(300{\leq}X{\leq}500) = \sum_{j=300}^{500} \binom{10.000}{j} \cdot 0{,}04^j \cdot 0{,}96^{10.000-j}$$

können wir nun über die Approximation (ohne Stetigkeitskorrektur) Folgendes berechnen:

$$\begin{aligned}
P(300{\leq}X{\leq}500) &\approx \Phi\left(\frac{500-400}{\sqrt{400 \cdot 0{,}96}}\right) - \Phi\left(\frac{300-400}{\sqrt{400 \cdot 0{,}96}}\right) \\
&\approx \Phi(5{,}10310) - \Phi(-5{,}10310) \\
&= 2 \cdot \Phi(5{,}10310) - 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Bei der Untersuchung von 10.000 Personen zwischen 300 und 500 Personen mit Antikörpern anzutreffen ist somit ein **sicheres Ereignis**.

Aufgabe 2

Das Abwassersystem einer Gemeinde, an das 1.332 Haushalte angeschlossen sind, ist für eine maximale Last von 13.500 Litern pro Stunde ausgelegt.

Nehmen Sie an, dass die einzelnen Abflussraten von n angeschlossenen Haushalten durch stochastisch unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ beschrieben werden können, wobei X_i für $i \in \{1, \ldots, n\}$ normalverteilt ist mit Erwartungswert $\mu = 10$ [Liter/ Stunde] und Varianz $\sigma^2 = 4$ [Liter^2 / Stunde^2].

Berechnen Sie

a) den Erwartungswert und die Varianz für die 1.332 angeschlossenen Haushalte.

b) die Wahrscheinlichkeit einer Überlastung des Abwassersystems (für 1.332 angeschlossene Haushalte).

Lösung 2

$$X \sim \mathcal{N}(\mu{=}10, \sigma^2{=}4)$$

Der Erwartungswert beträgt

$$E\left(\bigcap_{i\in\{1,\ldots,n\}} X_i\right) = n \cdot \mu = 1.332 \cdot 10 = 13.320$$

also 13.320 [Liter / Stunde] und die Varianz

$$\mathrm{Var}\left(\bigcap_{i\in\{1,\ldots,n\}} X_i\right) = 1.332 \cdot 4 = 5.328$$

5.328 [Liter^2 / Stunde^2].

Um die Wahrscheinlichkeit einer Überlastung des Abwassersystems $P\left(\bigcap_{i\in\{1,\ldots,n\}} X_i{>}13.500\right)$ zu berechnen, sagen wir $S_n := \bigcap_{i\in\{1,\ldots,n\}} X_i$ und betrachten die Normalverteilung mit den oben bestimmten Parametern $S_n \sim \mathcal{N}(\mu{=}13.320, \sigma^2{=}5.328)$.

$$\begin{aligned}
P(S_n{>}13.500) &= 1 - P(S_n{\le}13.500) \\
&= 1 - P\left(\frac{S_n - \mu}{\sigma} {\le} \frac{13.500 - 13.320}{\sqrt{5.328}}\right) \\
&= 1 - P\left(\frac{S_n - \mu}{\sigma} {\le} \frac{180}{\sqrt{5.328}}\right) \\
&\approx 1 - \Phi(2{,}47) \\
&= 1 - 0{,}99324 = 0{,}676\%
\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass es zu einer Überlastung des Abwassersystems für 1.332 angeschlossene Haushalte kommt, beträgt 0,676%.

Aufgabe 3

Die Dichtefunktion einer stetigen Verteilung laute

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 \cdot (3-x) & \text{für } 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie den Parameter a.

b) Bestimmen Sie die zugehörige Verteilungsfunktion?

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X einen Wert kleiner oder gleich 2 annimmt.

Lösung 3

Eine Zufallsvariable X heißt **stetig verteilt**, wenn es eine nichtnegative integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ \mathrm{d}t = 1$$

gibt, sodass die Verteilungsfunktion F von X die Darstellung

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ \mathrm{d}t, \qquad x \in \mathbb{R}$$

besitzt. Die Funktion f heißt Dichtefunktion (oder auch *Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion, Probability Density Function, PDF*) von X.

3a)

Um die o.g. Eigenschaft der Normiertheit zu gewähren, muss a so gewählt werden, dass

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ \mathrm{d}t &= 1 \\ \Leftrightarrow \quad \int_0^3 ax^2 \cdot (3-x)\ \mathrm{d}x &= 1 \\ \Leftrightarrow \quad \left[ax^3 - \frac{a}{4}x^4\right]_0^3 &= 1 \\ \Leftrightarrow \quad 3^3 a - \frac{a}{4}3^4 &= 1 \\ \Leftrightarrow \quad a &= \frac{4}{27} \end{aligned}$$

gilt.

3b)

Die zugehörige Verteilungsfunktion $F(x)$ ist nun für $x \in [0,3]$ durch das Integral

$$\begin{aligned}\hat{F}(x) &= \int_0^x \frac{4}{27}t^2 \cdot (3-t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in \mathbb{R} \\ &= \left[\frac{4}{27}t^3 - \frac{1}{27}t^4\right]_0^x \\ &= \frac{4}{27}x^3 - \frac{1}{27}x^4\end{aligned}$$

beschrieben. Für $x < 0$ ist $f(x) = 0 = F(x)$ und für $x > 3$ ist $F(x) = 1$, da die Dichtefunktion monoton wachsend, im unendlichen gleich eins und bei $F(3) = 1$ ist.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{4}{27}x^3 - \frac{1}{27}x^4 & 0 \leq x \leq 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$

3c)

$$\begin{aligned}P(X{\leq}2) &= F(2) \\ &= \frac{4}{27}2^3 - \frac{1}{27}2^4 \\ &= \frac{32-16}{27} = \frac{16}{27} \\ &= 59{,}2\overline{592}\%\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Bei der Verpackung von Kartoffeln in Beutel kann das Normalgewicht von 10kg i.A. nicht exakt eingehalten werden. Die Erfahrung zeigt, dass das Füllgewicht eines Beutels durch eine Zufallsvariable $Y = X + 10$ beschrieben werden kann, wobei X eine auf dem Intervall $[-0{,}25;\ 0{,}75]$ gleichverteilte Zufallsvariable ist.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz des Füllgewichtes eines Beutels.

b) Die abgefüllten Beutel sollen mit einem Kleintransporter befördert werden. Berechnen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die zulässige Nutzlast von 1.020kg bei Zuladung von 100 Beuteln überschritten wird.

Lösung 4

Für eine Gleichverteilung $X \sim \mathcal{U}(a,b)$ gilt:

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$E(Y) = E(X+10) = 10 + E(X) = 10 + \frac{0{,}5}{2} = 10{,}25$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(X+10) = \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{12}$$

Der Erwartungswert des Füllgewichtes eines Beutels beträgt 10,25kg und die die Varianz beträgt $\frac{1}{12}\mathrm{kg}^2$.

Sei $G = \{\text{Gewicht von 100 Beuteln}\} = \bigcup_{i\in\{1,\dots,100\}} Y_i$, so ist $E(G) = 100 \cdot E(Y) =$ 1.025kg und $\mathrm{Var}(G) = 100 \cdot \mathrm{Var}(Y) = \frac{25}{3}\mathrm{kg}^2$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Nutzlast überschritten wird $P(G{>}1.020)$ errechnet sich nun wie folgt:

$$\begin{aligned} P(G{>}1.020) &= 1 - P(G{\leq}1.020) \\ &= 1 - P\left(\frac{G-\mu}{\sigma} \leq \frac{1.020 - 1.025}{\sqrt{\frac{25}{3}}}\right) \\ &\approx 1 - \Phi\left(-\sqrt{3}\right) \\ &\approx \Phi(1{,}73) \approx 0{,}95818 \\ &= 95{,}818\% \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit die zulässige Nutzlast von 1.020kg bei Zuladung von 100 Beuteln zu überschreiten beträgt somit rund 95,818%.

Aufgabe 5

Bei der Reinigung eines Kühlschrankes im Haushalt lässt sich eine leichte Verstellung des Thermostates nie ganz vermeiden. Wir fassen die sich nach der Reinigung einstellende Temperatur als eine normalverteilte Zufallsvariable mit dem Erwartungswert 3°C und der Varianz 9°C^2 auf.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Temperatur den kritisch angegebenen Wert von 9°C übersteigt?

b) Wie wahrscheinlich ist es, dass der Gefrierpunkt von 0°C unterschritten wird?

c) Welche Temperatur wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% nicht überschritten?

Lösung 5

Sei $X = \{\text{Temperatur}\} \sim \mathcal{N}(\mu{=}3, \sigma^2{=}9)$.

5a)

Wir bestimmen $P(X{>}9)$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
P(X{>}9) &= 1 - P(X{\leq}9) \\
&= 1 - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{9-3}{\sqrt{9}}\right) \\
&= 1 - \Phi(2) \\
&\approx 1 - 0{,}97725 = 0{,}02275 \\
&= 2{,}275\%
\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Kühlschrank die kritische Temperatur von 9°C übersteigt beträgt 2,275 %.

5b)

$$\begin{aligned}
P(X{\leq}0) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{0-3}{\sqrt{9}}\right) \\
&= \Phi(-1) \\
&= 1 - \Phi(1) \\
&\approx 0{,}15866 \\
&= 15{,}866\%
\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Gefrierpunkt unterschritten wird, beträgt 15,866 %.

5c)

$$\begin{aligned}
& & P(X{\leq}k) &= 0{,}99 \\
&\Leftrightarrow & P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{k-3}{\sqrt{9}}\right) &= 0{,}99 \\
&\Leftrightarrow & \Phi\left(\frac{k-3}{3}\right) &= 0{,}99 \\
&\Leftrightarrow & \frac{k-3}{3} &= \Phi^{-1}(0{,}99) \\
&\Rightarrow & \frac{k-3}{3} &\approx 2{,}33 \\
&\Leftrightarrow & k &\approx 9{,}99
\end{aligned}$$

Eine Temperatur von rund 10°C wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% nicht überschritten.