Aufgabe 1

Gegeben sei die folgende zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$f(x,y) = P(X{=}x,Y{=}y)$$

Y / X	0	1
0	0/32	2/32
1	1/32	1/32
2	3/32	7/32
3	10/32	8/32

a) Berechnen Sie die Randwahrscheinlichkeiten für beide Zufallsvariablen.

b) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsvariable X unter der Bedingung $Y = 1$.

c) Überprüfen Sie, ob die Zufallsvariablen X und Y stochastisch unabhängig sind.

d) Berechnen Sie aus den Randverteilungen

   i. die Erwartungswerte und

   ii. die Varianzen

   für X und Y.

e) Berechnen Sie für das gegebene Beispiel die Kovarianz $\text{Kov}(X,Y)$.

f) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizient ρ_{XY} und treffen Sie eine Aussage über die Stärke des linearen Zusammenhanges zwischen X und Y.

Lösung 1

Y / X	0	1	$P(Xx)$
0	0/32	2/32	2/32
1	1/32	1/32	2/32
2	3/32	7/32	10/32
3	10/32	8/32	18/32
$P(Y)$	14/32	18/32	1

Die **Wahrscheinlichkeitsverteilung** $P(X|Y{=}1)$ für die Zufallsvariable X lässt sich über eine Tabelle

X	$P(X\|Y{=}1)$
0	2/18
1	1/18
2	7/18
3	8/18

oder als eine Funktion angeben:

$$P(X{=}x|Y{=}1) = f_{Y=1}(x) = \begin{cases} {}^2\!/_{18} & x = 0 \\ {}^1\!/_{18} & x = 1 \\ {}^7\!/_{18} & x = 2 \\ {}^8\!/_{18} & x = 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Stochastische Unabhängigkeit Damit zwei Zufallsvariablen stochastisch unabhängig sind, muss für alle $A, V \in \Omega$ gelten $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$. Dies ist hier nicht der Fall, da

$$P(X{=}0) \cdot P(Y{=}0) = {}^7\!/_{256} \neq {}^0\!/_{32} = P(X{=}0, Y{=}0),$$

somit sind die Zufallsvariablen stochastisch abhängig.

Erwartungswerte

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{2}{32} \cdot 0 + \frac{2}{32} \cdot 1 + \frac{10}{32} \cdot 2 + \frac{18}{32} \cdot 3 \\ &= \frac{19}{8} = 2{,}375 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= \frac{14}{32} \cdot 0 + \frac{18}{32} \cdot 1 \\ &= \frac{9}{16} = 0.5625 \end{aligned}$$

Die **Varianzen** berechnen wir wieder über die Formel $\operatorname{Var}(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2$:

$$\begin{aligned} E\left(X^2\right) &= \frac{2 + 40 + 162}{32} = \frac{204}{32} \\ \operatorname{Var}(X) &= \frac{204}{32} - \left(\frac{19}{8}\right)^2 = \frac{47}{64} \\ E\left(Y^2\right) &= \frac{18}{32} \\ \operatorname{Var}(Y) &= \frac{18}{32} - \left(\frac{9}{16}\right)^2 = \frac{63}{256} \end{aligned}$$

Kovarianz

$$\begin{aligned}
\operatorname{Kov}(X,Y) &= E\left[(X-E(X))\cdot(Y-E(Y))\right] \\
&= E\left(X\cdot Y\right) - E(X)\cdot E(Y) \\
&= \frac{1}{32} + \frac{2\cdot 7}{32} + \frac{3\cdot 8}{32} - \frac{19}{8}\cdot\frac{9}{16} \\
&= -\frac{15}{128}
\end{aligned}$$

Korrelationskoeffizient

$$\begin{aligned}
\rho(X,Y) &= \frac{\operatorname{Kov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X)\cdot\operatorname{Var}(Y)}} \\
&= \frac{-\frac{15}{128}}{\sqrt{\frac{47}{64}\cdot\frac{63}{256}}} \\
&\approx -0.2756589
\end{aligned}$$

Der Pearson-Korrelationskoeffizient ist ein Maß für die Stärke und Richtung einer linearen Beziehung zwischen zwei Zufallsvariablen. Ein Wert von $\rho(X,Y) \approx -0.28$ zeigt eine schwach negative lineare Beziehung hin.

Aufgabe 2

Während einer Theaterprobe wird eine Russisch-Roulette-Szene geübt. Dazu wird ein Revolver, der 6 Platzpatronen fasst, mit nur einer Platzpatrone geladen.

a) Mit welcher Verteilung kann die Zufallsvariable

$$X = \{\text{die Person überlebt bis einschließlich Abfeuern des x-ten Schusses}\}$$

beschrieben werden, wenn nach jedem Versuch die Trommel erneut gedreht wird?

b) Wie wahrscheinlich ist es, mehr als 5 Runden zu überleben?

Lösung 2

Die Zufallsvariable kann mit einer geometrischen Verteilung beschrieben werden.

$$X \sim G\left(p = \frac{1}{6}\right)$$

Diese hat die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$P(X{=}k) = \left(1-\frac{1}{6}\right)^k \cdot \frac{1}{6} \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Die Wahrscheinlichkeit mehr als 5 Runden zu überleben $P(X > 5)$ lässt sich mit dem Gegenereignis $1 - P(X \leq 5)$ leicht bestimmen:

$$
\begin{aligned}
P(X > 5) &= 1 - P(X \leq 5) \\
&= 1 - P(X{=}5) - P(X{=}4) - P(X{=}3) - P(X{=}2) - P(X{=}1) - P(X{=}0) \\
&= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5 \frac{1}{6} - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \frac{1}{6} - \left(\frac{5}{6}\right)^3 \frac{1}{6} - \left(\frac{5}{6}\right)^2 \frac{1}{6} - \left(\frac{5}{6}\right)^1 \frac{1}{6} - \left(\frac{5}{6}\right)^0 \frac{1}{6} \\
&= \frac{15625}{46656} \approx 33{,}4898\%
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3

Die Anzahl X der abgesetzten Notebooks in einer beliebigen Woche in einer Filiale der PC-Kette Hypercom lässt sich durch eine Poissionverteilung mit Erwartungswert 4 beschreiben.

a) Bestimmen Sie für eine beliebige Woche die Wahrscheinlichkeit, dass

   i. kein Gerät
   ii. mindestens ein Gerät

   verkauft wird.

b) Wie groß ist die Varianz von X?

c) Bestimmen Sie für den Zeitraum von zwei Wochen die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als sechs aber höchstens acht Geräte verkauft werden.

Lösung 3

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion einer Poisson-Verteilung $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ ist gegeben durch

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k \, \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}$$

und beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass genau k Ereignisse auftreten.

a)

Die Wahrscheinlichkeit, dass in einer beliebigen Woche kein Gerät gekauft wird $P(X{=}0) = \frac{4^0 \, \mathrm{e}^{-4}}{0!} = \mathrm{e}^{-4}$ also ungefähr 1,83%.

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Gerät gekauft wird $P(X \geq 1)$ ist $1 - P(X{=}0) = 1 - \mathrm{e}^{-4}$ also ungefähr 98,168%.

b)

Für $X \sim \text{Poi}(\lambda)$ gilt $E(X) = \text{Var}(X) = \lambda$, was in diesem Fall $\text{Var}(X) = 4$ ist.

c)

Sei $Y = \{\text{\# Notbookverkäufe in zwei Wochen}\}$. Der Erwartungswert $E(Y) = 2 \cdot E(X) = 8$, was nach dem Additionsgesetz

$$X + Y \sim \text{Poi}(\lambda + \mu)$$

für zwei voneinander stochastisch unabhängige Wochen plausibel erscheint, sodass wir folgern können

$$P\,(Y{=}k) = \frac{8^k\,\mathrm{e}^{-8}}{k!}.$$

$$\begin{aligned}
P\,(8 \geq Y > 6) &= P(Y{=}7) + P(Y{=}8) \\
&= \frac{8^7\,\mathrm{e}^{-8}}{7!} + \frac{8^8\,\mathrm{e}^{-8}}{8!} \\
&= \frac{262.144}{315} \cdot \mathrm{e}^{-8} \\
&\approx 27{,}9173\%
\end{aligned}$$