Aufgabe 1

Ein Einzelhändler hat drei DVD-Player einer bestimmten Marke geliefert bekommen und überprüft deren Funktionalität, bevor er sie an seine Kunden weitergibt. Es bezeichne nun $A_i (i = 1, 2, 3)$ das Ereignis, dass beim i-ten DVD-Player ein Defekt festgestellt wird. Beschreiben Sie mit Hilfe von A_1, A_2, A_3 und den passenden Mengenoperationen die folgenden Ereignisse.

a) alle DVD-Player sind defekt,

b) mindestens ein DVD-Player ist defekt,

c) höchstens ein DVD-Player ist defekt,

d) alle DVD-Player sind intakt,

e) der erste DVD-Player ist defekt und von den beiden anderen Geräten hat höchstens eines einen Fehler,

f) genau zwei DVD-Player sind defekt.

Lösung 1

a) alle DVD-Player sind defekt

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3$$

b) mindestens ein DVD-Player ist defekt

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

c) höchstens ein DVD-Player ist defekt

$$\complement((A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3))$$

d) alle DVD-Player sind intakt

$$\complement(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$$

e) der erste DVD-Player ist defekt und von den beiden anderen Geräten hat höchstens eines einen Fehler

$$A_1 \setminus (A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

f) genau zwei DVD-Player sind defekt

$$((A_1 \cap A_2) \cup (A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_3)) \setminus (A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

Aufgabe 2

Eine Urne enthält 4 rote Kugeln mit einem Kreuz, 5 rote Kugeln ohne Kreuz, 3 blaue Kugeln mit einem Kreuz, 2 blaue Kugeln ohne Kreuz, 3 weiße Kugeln mit einem Kreuz und 3 weiße Kugeln ohne Kreuz. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim einmaligen Ziehen einer Kugel

a) eine weiße Kugel zu ziehen,

b) eine Kugel mit Kreuz zu ziehen,

c) eine blaue Kugel mit einem Kreuz oder eine weiße Kugel ohne Kreuz zu ziehen,

d) eine rote Kugel oder eine Kugel mit einem Kreuz zu ziehen,

Lösung 2

Es sind $n = 20$ Kugeln aus der Grundmenge $\Omega_1 = \{r_k, r, b_k, b, w_k, w\}$ in einer Urne und es wird einmal gezogen, sodass die Wahrscheinlichkeit

a) eine weiße Kugel zu ziehen

$$P(A_{w_k} \cup A_w) = \frac{3+3}{10} = \frac{3}{10}$$

b) eine Kugel mit Kreuz zu ziehen

$$P(A_{r_k} \cup A_{b_k} \cup A_{w_k}) = \frac{4+3+3}{20} = \frac{1}{2}$$

c) eine blaue Kugel mit einem Kreuz oder eine weiße Kugel ohne Kreuz zu ziehen

$$P(A_{b_k} \cup A_w) = \frac{3+3}{20} = \frac{3}{10}$$

d) eine rote Kugel oder eine Kugel mit einem Kreuz zu ziehen

$$P(A_r \cup A_{r_k} \cup A_{b_k} \cup A_{w_k}) = \frac{5+4+3+3}{20} = \frac{3}{5}$$

beträgt.

Aufgabe 3

Bei einer Pressekonferenz sollen auf 20 Plätze 10 Broschüren verteilt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür, wenn

a) es die gleichen Broschüren sind

i. und auf jedem Platz höchstens eine liegen soll?
ii. und auf jedem Platz beliebig viele Broschüren liegen dürfen?

b) die Broschüren unterschiedlich sind

i. und auf jedem Platz höchstens eine liegen soll?
ii. und auf jedem Platz beliebig viele Broschüren liegen dürfen?

Lösung 3

Die Anzahl der Möglichkeiten $k = 10$ Broschüren auf $n = 20$ Plätzen zu verteilen beträgt, wenn

a) es die gleichen Broschüren sind *(Kombination)*

i. und auf jedem Platz höchstens eine liegen soll *(ohne Wiederholung)*

$$\mathrm{Kom}_k^n(\mathrm{oW}) = \binom{n}{k} = \frac{20!}{10! \cdot 10!} = 184.756.$$

ii. und auf jedem Platz beliebig viele Broschüren liegen dürfen *(mit Wiederholung)*

$$\mathrm{Kom}_k^n(\mathrm{mW}) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{29!}{19! \cdot 10!} = 20.030.010.$$

b) die Broschüren unterschiedlich sind *(Permutationen)*

i. und auf jedem Platz höchstens eine liegen soll *(ohne Wiederholung)*

$$\mathrm{Per}_k^n(\mathrm{oW}) = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{20!}{10!} = 670.442.572.800.$$

ii. und auf jedem Platz beliebig viele Broschüren liegen dürfen *(mit Wiederholung)*

$$\mathrm{Per}_k^n(\mathrm{mW}) = n^k = 20^{10} = 1024 \cdot 10^{10}.$$

Aufgabe 4

Zehn Wagen parken zufällig in vier großen Parkbereichen, d.h. jeder Fahrer wählt unabhängig von den anderen rein zufällig einen Parkbereich aus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

a) in dem ersten Parkbereich keine Wagen abgestellt werden?

b) in den ersten beiden Parkbereichen jeweils 2 und in den anderen beiden jeweils 3 Wagen abgestellt werden?

c) mindestens 2 Wagen in jedem Parkbereich abgestellt werden?

Lösung 4

Unter der Annahme, dass jeder Parkbereich beliebig viele Wagen aufnehmen kann, wählen wir $k = 10$ Parkpositionen aus $n = 4$ Bereichen und erhalten

$$\mathrm{Kom}_{k=10}^{n=4}(\mathrm{mW}) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{13!}{3! \cdot 10!} = 286$$

Kombinationsmöglichkeiten.
Davon kommen

$$\mathrm{Kom}_{10}^{3}(\mathrm{mW}) = \frac{12!}{2! \cdot 10!} = 66$$

Kombinationen nur mir drei der vier Parkbereiche aus. Man könnte nun annehmen, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass auf einem Parkbereich keine Wagen abgestellt werden sich nun aus $^{66}/_{286}$ ergibt, jedoch ist das Eintreten jeder dieser Konfigurationen nicht mehr gleich wahrscheinlich!
Bspw. ist die Konfiguration $(10, 0, 0, 0)$ (alle Autos stehen in Parkbereich 1) nur durch eine einzige Abfolge von Parkereignissen zu erzielen, während es die Konfiguration $(2, 2, 3, 3)$ durch 25.200 verschiedene Abfolgen erzielt werden kann.
Wir müssen also mit

$$\mathrm{Per}_{10}^{4}(\mathrm{mW}) = 4^{10}$$

möglichen Konfigurationen rechnen, von denen $\mathrm{Per}_{10}^{3}(\mathrm{mW}) = 3^{10}$ einen bestimmten Parkplatz freilassen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in dem ersten Parkbereich keine Wagen abgestellt werden ist also

$$P_a = \frac{\mathrm{Per}_{10}^{3}(\mathrm{mW})}{\mathrm{Per}_{10}^{4}(\mathrm{mW})} = \left(\frac{3}{4}\right)^{10} \approx 5{,}63\%.$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in den ersten beiden Parkbereichen jeweils 2 und in den anderen beiden jeweils 3 Wagen abgestellt werden beträgt

$$P_b = \frac{25.200}{1.048.576} \approx 2{,}4\%.$$

Und die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 2 Wagen in jedem Parkbereich abgestellt werden beträgt

$$P_c = \frac{226.800}{1.048.576} \approx 21{,}63\%.$$