1IIP

Asignatura: Matemáticas I

Actividad 2: Polinomio de Taylor

Nombre y Apellidos de los Alumnos del Grupo:

1. **Mateo Orive Escalada**
2. **Álvaro Calderón Izquierdo**
3.
4.

Fecha de entrega: 11 Diciembre - 7 Enero

Universidad Nebrija

Índice/Tabla de contenidos

UNIVERSIDAD
NEBRIJA

1. PRESENTACIÓN Y OBJETIVOS DE LA ACTIVIDAD

El polinomio de Taylor de una función en un punto permite aproximar los valores de una función cerca de ese punto.

La actividad que se propone consta de dos partes.

En la primera parte, se propone una exposición escrita, en la que el grupo debe desarrollar unas cuestiones teóricas generales sobre el polinomio de Taylor

La segunda parte consta de dos ejercicios (Ejercicios 1 y 2) en los que se pretende aplicar el uso del polinomio para aproximar funciones

2. METODOLOGÍA Y FORMATO DE LA ACTIVIDAD

2.1 Esta actividad tiene dos partes:

- **Parte I:** generar un documento escrito (2 hojas máximo) que aborde la exposición del siguiente punto:

  Polinomio de Taylor de orden n de y=f(x) en torno a un punto x= *a*: T_n (f,a)
  - Definición
  - ¿Qué propiedad tiene la gráfica T_n (f,a) con respecto a la gráfica de la función f(x) cerca de x=a ?
  - Error cometido al aproximar f(x) por T_n (f,a) (Resto de Taylor)
  - Serie de Taylor de una función. Ejemplos

- **Parte II: resolver un problema de cálculo**

2.2 Forma de evaluación:

PARTE I (Exposición escrita)

- Se tendrán en cuenta la calidad de la exposición (si es clara y sintética) y los ejemplos elegidos, con una ponderación en la evaluación de 60% y 40%, respectivamente.

PARTE II (Ejercicio)

- La ponderación en la evaluación de esta primera parte se hará como sigue:
  40% apartado a), 40% apartado b), y 20% apartado c).
  Se tendrá en cuenta tanto la resolución como la solución de cada apartado.

La entrega se realizará a través del campus virtual mediante un archivo pdf en el plazo estipulado: del 7 de diciembre al 7 de enero

UNIVERSIDAD
NEBRIJA

3. PARTE I: EXPOSICIÓN ESCRITA

- **Parte I:** generar un documento escrito (2 hojas máximo) que aborde la exposición del siguiente punto:

Definición:

Recibe el nombre de polinomio de Taylor de grado n para la función f en el punto a, denotado por P(n,a) , el polinomio:
(Es un polinomio que se construye entorno a la función y un punto).

$$P_{n,a}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

¿Qué propiedad tiene la gráfica Tn (f,a) con respecto a la gráfica de la función f(x) cerca de x=a ?

Ambas funciones/graficas convergen en ese punto, el valor de las funciones y el de sus derivadas en ese punto es el mismo cerca del punto las funciones tienen valores similares, lo que nos permite usar la función aproximada (polinomio de Taylor) para estimar valores de la original.

Error cometido al aproximar f(x) por Tn (f,a) (Resto de Taylor)

Para cada x cogido cerca de ase cumple |f(x)-Tn(f,a)(a)|.

Ejemplos:

Ejemplo:

$$f(x) = e^x$$

$$T_2(f,1)(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}\cdot(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}\cdot(x-1)^2$$

Derivadas

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = e^x \rightsquigarrow f'(1) = e \\ f''(x) = e^x \rightsquigarrow f'(1) = e \end{array}\right\} \Rightarrow T_2(f,1) = e + e(x-1) + \frac{e}{2!}\cdot(x-1)^2$$

Estimar error cometido al aproximar $f(x)$ por $T_2(f(x),1)(x)$ en $x = 1,5$.

$$\left|T_2(f,1)\cdot(1,5) - e^{1,5}\right| = \left|\frac{f^{3)}(\xi_{1,5})}{3!}\cdot(1,5-1)^3\right| =$$

$$= \left|\frac{e^{\xi_{1,5}}}{3!}\cdot(1,5-1)^3\right| = \frac{(0,5)^3}{3!}\cdot e^{\xi_{1,5}} =$$

$$= \frac{(0,5)^3}{3!} \leq e^{\xi_{1,5}} \leq \frac{(0,5)^3\, e^{1,5}}{3!}$$

Sol: $\xi_{1,5}$ está entre $1,5$ y 1 //

Ejemplo II:

Ejemplo del polinomio de Taylor:

$f(x) = x$ en $a=1$ de orden $n=2$

$f'(x) = 1$

$f''(x) = 0$

$$T_2(f, a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 = f(1) + f'(1)\cdot(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 = 1 + x - 1 = x$$

$$\boxed{T_2 = x}$$

4. PARTE II: Ejercicio

Ejercicio

Se considera la función

$$f(x) = xe^x$$

Se pide:

a) Calcular el polinomio de Taylor de $f(x)$ en $x_0 = 0$ de grado $n = 2$

b) Estimar el error cometido al aproximar el valor de $f(0.1)$ por el valor del polinomio del apartado anterior evaluado en 0.1

c) ¿Puedes calcular el polinomio de Taylor de $f(x)$ en $x_0 = 0$ de cualquier grado n?

a)

Polinomio Taylor $f(x) = x \cdot e^x$

$$f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x(1+x)$$

$$f''(x) = e^x \cdot 1 + e^x \cdot (1+x) = e^x(2+x)$$

$$f'''(x) = e^x \cdot 1 + (e^x \cdot (2+x)) = e^x(3+x)$$

Formula:

$$T_N(f,a)(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^N(a)}{N!} \cdot (x-a)^N$$

$$P_{n,a}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$

$$P_{(2,0)}(x) = 0 + \frac{1}{1!} \cdot (x-0) + \frac{2}{2!}(x-0)^2 =$$

$$\begin{cases} f'(a) = e^0 \cdot (1+0) \\ f''(a) = e^0(2+0) \end{cases}$$

$$= (x-0) + (x-0)^2 =$$

$$= (x-0) + (x^2 + 0^2 - 2x \cdot 0) = \boxed{x + x^2}$$

$$\boxed{P_{2,0}(x) = x + x^2}$$

a)
Y
b)

$f(x) = x e^x$ $\quad n = 2$ (orden del polinomio)

$x_0 = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} f'(x) &= 1\cdot e^x + x\cdot e^x = e^x(1+x) \\ f''(x) &= e^x\cdot(1+x) + e^x\cdot 1 = e^x + e^x(1+x) \\ f''(x) &= e^x(2+x) \end{aligned}}$$

$$T_2(f,x)(x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$= \underbrace{x_0 e^{x_0}}_{0} + \underbrace{\frac{e^{x_0}(1+x_0)\cdot(x-x_0)}{1}}_{x} + \underbrace{\frac{e^{x_0}(2+x_0)}{2}}_{1}\underbrace{(x-x_0)^2}_{x^2} = x + x^2$$

$$\boxed{f'''(x) = e^x(3+x)}$$

$a = 0,1$ Estimar error al aproximar

$$|f(a) - T_2(f,x_0)(a)| = \left|\frac{f'''(\xi\cdot a)}{(2+1)!}(a-x_0)^{2+1}\right| = \left|\frac{f'''(\xi\cdot a)}{3!}\cdot(0'1)^3\right| =$$

$$= \left|\frac{f'''(\xi\cdot 0'1)}{3!}\cdot(0'1)^3\right| \le \frac{M}{(2+1)!}(a-x_0)^{2+1} \qquad f^{n+1}(x) \le M$$

$$f'''(0,1\cdot\xi) = e^{0,1\cdot\xi}(3+(0,1\cdot\xi))$$

$$\left|\frac{f'''(\xi\cdot 0'1)}{3!}\cdot(0'1)^3\right| = \frac{e^{\xi\cdot 0'1}\cdot(3+(0,1\cdot\xi))}{6}\cdot 0'001 = \frac{0'001}{6}\cdot e^{\xi\cdot 0'1}\cdot(3+0,1\cdot\xi)) \le$$

$$\le \underbrace{\frac{(0,1)^3}{6}}_{(x-a)^{n+1}} \cdot \underbrace{e^{0'1}(3+0,1)}_{f'''(0,1)}$$

c)

c) ¿Puedes calcular el polinomio de Taylor de $f(x)$ en $x_0 = 0$ de cualquier grado n?

Siempre que n sea un número natural.

Analizando las derivadas de $f(x) = x \cdot e^x$, obtenemos que la derivada $f^N(x) = e^x \cdot (N + x)$, teniendo como $x = 0$, sacamos la siguiente expresión;

$(f^n(x) = n)$, sustituyendo $f^n(a) = n$, en el polinomio de Taylor llegaremos a un resultado igual a:

$$P_{(n,0)}(x) = (x-0) + (x-0)^2 \dots + (x-0)^n = \boxed{x + x^2 \dots + x^n}$$

Sol: Si, podremos calcular el polinomio de Taylor para cualquier grado "n" natural.