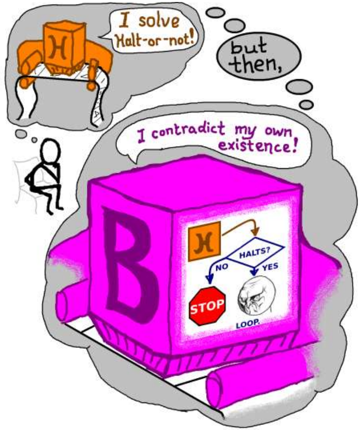
Diagonalisierung und polynomielle Hierarchie

Corvin Paul, Matthias Schimek

Institut für Theoretische Informatik - Algorithmik I

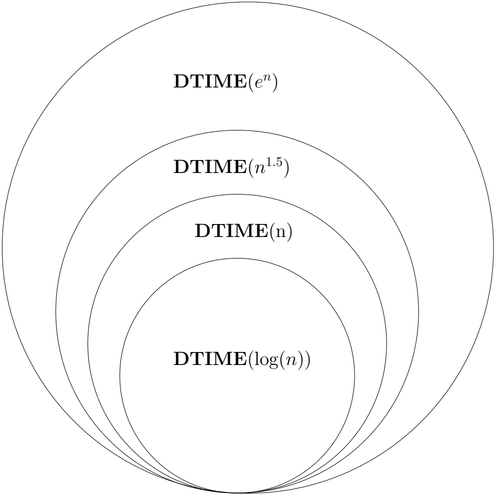
Diagonalisierung als Beweistechnik

Diagonalisierung : Was ist das eigentlich?



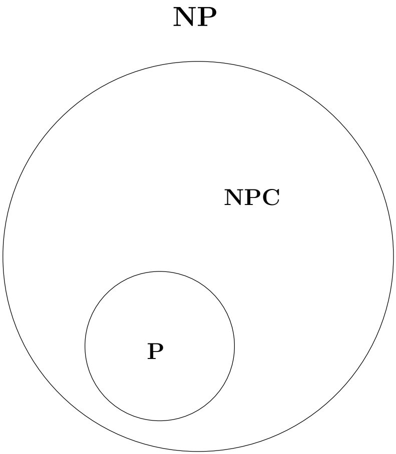
Diagonalisierung als Beweistechnik

Eine Hierarchie von Komplexitätsklassen



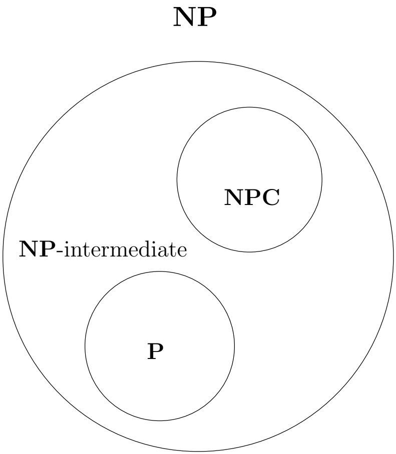
Diagonalisierung als Beweistechnik

P oder NPC : gibt es noch mehr in NP?



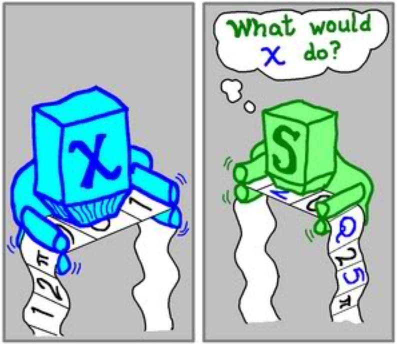
Diagonalisierung als Beweistechnik

P oder NPC : gibt es noch mehr in NP?



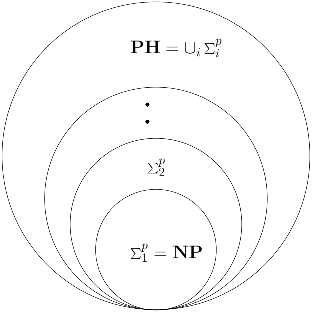
Diagonalisierung als Beweistechnik

Grenzen der Diagonalisierung



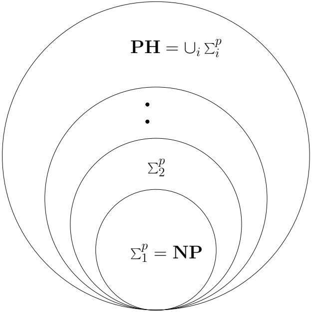
- Orakelmaschinen und die P, NP Frage

Die polynomoielle Hierarchie



- Verallgemeinerung von **P** – **NP**
- Kollabiert die **PH**?

Die polynomoielle Hierarchie



- Verallgemeinerung von **P** – **NP**
- Kollabiert die **PH**?

Gliederung

Diagonalisierung

- Was verstehen wir unter Diagonalisierung?
- Time Hierarchy
- Satz von Ladner
- Orakelmaschinen - Grenzen der Diagonalisierung

Die polynomielle Hierarchie

- Motivation und Beispiele
- Die Klasse **PH**

Gliederung

Diagonalisierung
- Was verstehen wir unter Diagonalisierung?
- Time Hierarchy
- Satz von Ladner
- Orakelmaschinen - Grenzen der Diagonalisierung

Die polynomielle Hierarchie
- Motivation und Beispiele
- Die Klasse **PH**

Diagonalisierung

Was verstehen wir darunter?

- Unentscheidbarkeit des Halteproblems
- Diagonalisierung nicht immer "schön" zu sehen
- In späteren Beweisen gewisse Abstraktion vom "Diagonalprinzip"

$w \in \{0,1\}^*$	Gödelnummer w_0	w_1	w_2	w_3	w_4
w_0	0	0	1	1	1
w_1	1	1	0	0	0
w_2	1	1	1	1	0
w_3	0	0	0	1	1
w_4	1	0	1	0	1

Corvin Paul, Matthias Schimek:
Diagonalisierung und polynomielle Hierarchie

Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

Diagonalisierung

Was verstehen wir darunter?

- Unentscheidbarkeit des Halteproblems
- Diagonalisierung nicht immer "schön" zu sehen
- In späteren Beweisen gewisse Abstraktion vom "Diagonalprinzip"

$w \in \{0,1\}^*$	Gödelnummer				
	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4
w_0	0	0	1	1	1
w_1	1	1	0	0	0
w_2	1	1	1	1	0
w_3	0	0	0	1	1
w_4	1	0	1	0	1

Diagonalisierung

Was verstehen wir darunter?

- Unentscheidbarkeit des Halteproblems
- Diagonalisierung nicht immer "schön" zu sehen
- In späteren Beweisen gewisse Abstraktion vom "Diagonalprinzip"

$w \in \{0,1\}^*$	Gödelnummer				
	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4
w_0	0	0	1	1	1
w_1	1	1	0	0	0
w_2	1	1	1	1	0
w_3	0	0	0	1	1
w_4	1	0	1	0	1

Diagonalisierung

Was verstehen wir darunter?

Was ist Diagonalisierung

Als Diagonalisierung wird (in der Informatik) ein Beweis bezeichnet, der nur auf den beiden folgenden Eigenschaften von TM aufbaut.

1. Die Existenz einer Repräsentation von TM durch Zeichenketten (Gödelnummer)
2. Die Fähigkeit eine andere TM mit geringem zusätzlichen Zeit- oder Platzbedarf zu simulieren (Universelle TM)

Diagonalisierung

Was verstehen wir darunter?

Was ist Diagonalisierung

Als Diagonalisierung wird (in der Informatik) ein Beweis bezeichnet, der nur auf den beiden folgenden Eigenschaften von TM aufbaut.

1. Die Existenz einer Repräsentation von TM durch Zeichenketten (Gödelnummer)
2. Die Fähigkeit eine andere TM mit geringem zusätzlichen Zeit- oder Platzbedarf zu simulieren (Universelle TM)

Diagonalisierung

Was verstehen wir darunter?

Was ist Diagonalisierung

Als Diagonalisierung wird (in der Informatik) ein Beweis bezeichnet, der nur auf den beiden folgenden Eigenschaften von TM aufbaut.

1. Die Existenz einer Repräsentation von TM durch Zeichenketten (Gödelnummer)
2. Die Fähigkeit eine andere TM mit geringem zusätzlichen Zeit- oder Platzbedarf zu simulieren (Universelle TM)

Gliederung

Diagonalisierung

- Was verstehen wir unter Diagonalisierung?
- Time Hierarchy
- Satz von Ladner
- Orakelmaschinen - Grenzen der Diagonalisierung

Die polynomielle Hierarchie

- Motivation und Beispiele
- Die Klasse **PH**

Time Hierarchy
Vorraussetzungen

Wiederholung :

- Für $i \in \mathbb{N}$ beschreibt i die TM M_i
- Jede TM wird von unendlich vielen $i \in \mathbb{N}$ beschrieben
- Es existiert eine universelle TM U, die jede TM mit logarithmischem Overhead simulieren kann

Time Hierarchy

Vorraussetzungen

Wiederholung :

- Für $i \in \mathbb{N}$ beschreibt i die TM M_i
- Jede TM wird von unendlich vielen $i \in \mathbb{N}$ beschrieben
- Es existiert eine universelle TM U, die jede TM mit logarithmischem Overhead simulieren kann

Time Hierarchy

Vorraussetzungen

Wiederholung :

- Für $i \in \mathbb{N}$ beschreibt i die TM M_i
- Jede TM wird von unendlich vielen $i \in \mathbb{N}$ beschrieben
- Es existiert eine universelle TM U, die jede TM mit logarithmischem Overhead simulieren kann

Time Hierarchy

Vorraussetzungen

Universelle TM

TM M_i läuft bei Eingabe x in $\mathcal{O}(f(n)) \Rightarrow$ TM U läuft bei Eingabe i, x in $\mathcal{O}(f(n)log(f(n)))$

Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

Time Hierarchy

Vorraussetzungen

Definition Time-constructible functions

Wir nennen eine Funktion f time-constructible, falls gilt :
f(n) ist in $\mathcal{O}(f(n))$ berechenbar.

Definition DTIME

DTIME(f(n)) = { L | $\exists$ deterministische Turingmaschine , die L in $\mathcal{O}(f(n))$ entscheidet }

Time Hierarchy

Vorraussetzungen

Definition Time-constructible functions

Wir nennen eine Funktion f time-constructible, falls gilt :
f(n) ist in $\mathcal{O}(f(n))$ berechenbar.

Definition DTIME

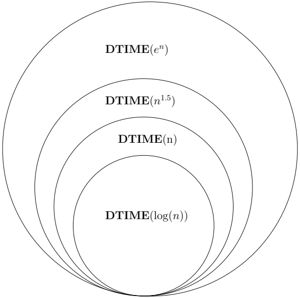
DTIME(f(n)) = $\{$ L $|\exists$ deterministische Turingmaschine , die L in $\mathcal{O}(f(n))$ entscheidet $\}$

Time Hierarchy

Deterministische Time Hierarchy

Satz: Time Hierarchy Theorem, 65

Seien f, g time-constructible mit $f(n)\log(f(n)) \in o(g(n))$, dann gilt $\mathbf{DTIME}(f(n)) \subsetneq \mathbf{DTIME}(g(n))$



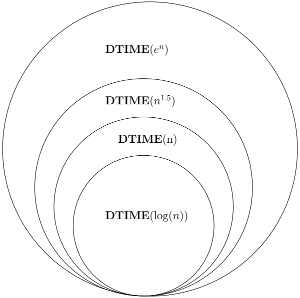
Frage : Warum brauchen wir den Faktor $\log(f(n))$?

Time Hierarchy

Deterministische Time Hierarchy

Satz: Time Hierarchy Theorem, 65

Seien f, g time-constructible mit $f(n)\log(f(n)) \in o(g(n))$, dann gilt $\mathbf{DTIME}(f(n)) \subsetneq \mathbf{DTIME}(g(n))$



Frage : Warum brauchen wir den Faktor $\log(f(n))$?

Time Hierarchy

Beweis det. Time Hierarchy

Wir zeigen **DTIME**$(n) \subsetneq$ **DTIME**$(n^{1.5})$

Definition Turing Maschine D

Bei Eingabe x : Simuliere die TM M_x mit Eingabe x genau für $|x|^{1.4}$ Schritte. Danach gebe folgendes aus :

$$D(x) = \begin{cases} \overline{M_x(x)} & \text{falls die Simulation eine Ausgabe hatte} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei $L = \{x | D(x) = 1\}$ die von D erzeugte Sprache

Time Hierarchy

Beweis det. Time Hierarchy

Wir zeigen $\textbf{DTIME}(n) \subsetneq \textbf{DTIME}(n^{1.5})$

Definition Turing Maschine D

Bei Eingabe x : Simuliere die TM M_x mit Eingabe x genau für $|x|^{1.4}$ Schritte. Danach gebe folgendes aus :

$$D(x) = \begin{cases} \overline{M_x(x)} & \text{falls die Simulation eine Ausgabe hatte} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei $L = \{x|D(x) = 1\}$ die von D erzeugte Sprache

Time Hierarchy

Beweis det. Time Hierarchy

Behauptung

$L \in \textbf{DTIME}(n^{1.5})$ und $L \notin \textbf{DTIME}(n)$

- Wir nehmen an , dass $L \in \textbf{DTIME}(n)$
- $\Rightarrow \exists$ Turing Maschine M , die L entscheidet ($\Leftrightarrow \forall x \in \{0,1\}^*$ D(x) = M(x)) und für Eingabe x höchstens c|x| Schritte benötigt. (c ist konstant)
- Wir konstruieren Wiederspruch , indem wir D eine Gödelnummer x mit $M_x = M$ als Eingabe geben.

Karlsruher Institut für Technologie

Behauptung

$L \in \mathbf{DTIME}(n^{1.5})$ und $L \notin \mathbf{DTIME}(n)$

- Wir nehmen an , dass $L \in \mathbf{DTIME}(n)$
- $\Rightarrow \exists$ Turing Maschine M , die L entscheidet ($\Leftrightarrow \forall x \in \{0,1\}^*$ D(x) = M(x)) und für Eingabe x höchstens c|x| Schritte benötigt. (c ist konstant)
- Wir konstruieren Wiederspruch , indem wir D eine Gödelnummer x mit $M_x = M$ als Eingabe geben.

Time Hierarchy

Beweis det. Time Hierarchy

Behauptung

$L \in \mathbf{DTIME}(n^{1.5})$ und $L \notin \mathbf{DTIME}(n)$

- Wir nehmen an , dass $L \in \mathbf{DTIME}(n)$
- $\Rightarrow \exists$ Turing Maschine M , die L entscheidet ($\Leftrightarrow \forall x \in \{0,1\}^*$ D(x) = M(x)) und für Eingabe x höchstens c|x| Schritte benötigt. (c ist konstant)
- Wir konstruieren Wiederspruch , indem wir D eine Gödelnummer x mit $M_x = M$ als Eingabe geben.

Time Hierarchy

Beweis det. Time Hierarchy

Behauptung

$L \in \mathbf{DTIME}(n^{1.5})$ und $L \notin \mathbf{DTIME}(n)$

- Wir nehmen an , dass $L \in \mathbf{DTIME}(n)$
- $\Rightarrow \exists$ Turing Maschine M , die L entscheidet ($\Leftrightarrow \forall x \in \{0,1\}^*$ D(x) = M(x)) und für Eingabe x höchstens c|x| Schritte benötigt. (c ist konstant)
- Wir konstruieren Wiederspruch , indem wir D eine Gödelnummer x mit $M_x = M$ als Eingabe geben.

Time Hierarchy

Beweis det. Time Hierarchy

Definition Turing Maschine D

Bei Eingabe x : Simuliere die TM M_x mit Eingabe x genau für $|x|^{1.4}$ Schritte. Danach gebe das invertierte Ergebniss von M_x aus

- Wollen $|x|$ groß genug, dass D für M_x eine Ausgabe erhält !
- M simuliert auf U läuft in $c|x|\log(|x|)$
- Wir wählen dazu Gödelnummer x mit $M_x = M$ so groß, dass gilt : $|x|^{1.4} > c|x|\log(|x|)$
- Damit läuft M_x in der Simulation in D komplett durch und D invertiert das Ergebniss
- Nun gilt $D(x) \neq M(x)$ $\square$
- Beweis ähnlich auf allgemeinen Fall übertragbar

Time Hierarchy

Beweis det. Time Hierarchy

Definition Turing Maschine D

Bei Eingabe x : Simuliere die TM M_x mit Eingabe x genau für $|x|^{1.4}$ Schritte. Danach gebe das invertierte Ergebniss von M_x aus

- Wollen $|x|$ groß genug, dass D für M_x eine Ausgabe erhält !
- M simuliert auf U läuft in $c|x|\log(|x|)$
- Wir wählen dazu Gödelnummer x mit $M_x = M$ so groß, dass gilt : $|x|^{1.4} > c|x|\log(|x|)$
- Damit läuft M_x in der Simulation in D komplett durch und D invertiert das Ergebniss
- Nun gilt $D(x) \neq M(x)$ $\square$
- Beweis ähnlich auf allgemeinen Fall übertragbar

Time Hierarchy

Beweis det. Time Hierarchy

Definition Turing Maschine D

Bei Eingabe x : Simuliere die TM M_x mit Eingabe x genau für $|x|^{1.4}$ Schritte. Danach gebe das invertierte Ergebniss von M_x aus

- Wollen $|x|$ groß genug, dass D für M_x eine Ausgabe erhält !
- M simuliert auf U läuft in $c|x|\log(|x|)$
- Wir wählen dazu Gödelnummer x mit $M_x = M$ so groß, dass gilt : $|x|^{1.4} > c|x|\log(|x|)$
- Damit läuft M_x in der Simulation in D komplett durch und D invertiert das Ergebniss
- Nun gilt $D(x) \neq M(x)$ □
- Beweis ähnlich auf allgemeinen Fall übertragbar

Time Hierarchy

Beweis det. Time Hierarchy

Definition Turing Maschine D

Bei Eingabe x : Simuliere die TM M_x mit Eingabe x genau für $|x|^{1.4}$ Schritte. Danach gebe das invertierte Ergebniss von M_x aus

- Wollen $|x|$ groß genug, dass D für M_x eine Ausgabe erhält !
- M simuliert auf U läuft in $c|x|\log(|x|)$
- Wir wählen dazu Gödelnummer x mit $M_x = M$ so groß, dass gilt : $|x|^{1.4} > c|x|\log(|x|)$
- Damit läuft M_x in der Simulation in D komplett durch und D invertiert das Ergebniss
- Nun gilt $D(x) \neq M(x)$ □
- Beweis ähnlich auf allgemeinen Fall übertragbar

Time Hierarchy

Beweis det. Time Hierarchy

Karlsruher Institut für Technologie

Definition Turing Maschine D

Bei Eingabe x : Simuliere die TM M_x mit Eingabe x genau für $|x|^{1.4}$ Schritte. Danach gebe das invertierte Ergebniss von M_x aus

- Wollen $|x|$ groß genug, dass D für M_x eine Ausgabe erhält !
- M simuliert auf U läuft in $c|x|\log(|x|)$
- Wir wählen dazu Gödelnummer x mit $M_x = M$ so groß, dass gilt : $|x|^{1.4} > c|x|\log(|x|)$
- Damit läuft M_x in der Simulation in D komplett durch und D invertiert das Ergebniss
- Nun gilt $D(x) \neq M(x)$ $\square$
- Beweis ähnlich auf allgemeinen Fall übertragbar

Time Hierarchy

Beweis det. Time Hierarchy

Definition Turing Maschine D

Bei Eingabe x : Simuliere die TM M_x mit Eingabe x genau für $|x|^{1.4}$ Schritte. Danach gebe das invertierte Ergebniss von M_x aus

- Wollen $|x|$ groß genug, dass D für M_x eine Ausgabe erhält !
- M simuliert auf U läuft in $c|x|\log(|x|)$
- Wir wählen dazu Gödelnummer x mit $M_x = M$ so groß, dass gilt : $|x|^{1.4} > c|x|\log(|x|)$
- Damit läuft M_x in der Simulation in D komplett durch und D invertiert das Ergebniss
- Nun gilt $D(x) \neq M(x)$ $\square$
- Beweis ähnlich auf allgemeinen Fall übertragbar

Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

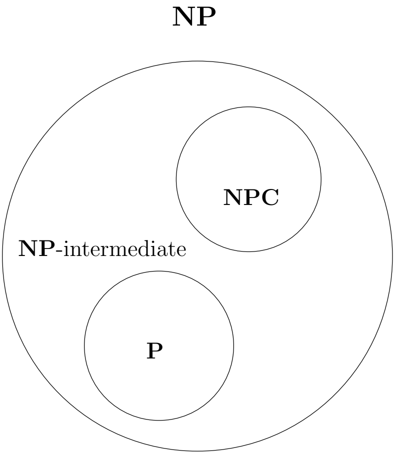
Gliederung

Diagonalisierung
- Was verstehen wir unter Diagonalisierung?
- Time Hierarchy
- Satz von Ladner
- Orakelmaschinen - Grenzen der Diagonalisierung

Die polynomielle Hierarchie
- Motivation und Beispiele
- Die Klasse **PH**

Satz von Ladner

Motivation



Frage : Gibt es **NP** Probleme , die nicht **NP**-vollständig sind , aber auch nicht in **P** liegen?

Satz von Ladner

NP-intermediate Probleme

Mögliche Kandidaten :

- Graphisomorphie (kommt in Vortrag 7)
- Faktorisierungsproblem
- Kein "natürliches" Problem bekannt

aber,

Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

Satz von Ladner

Behauptung

Existenz einer NP-intermediate Sprache, Ladner, 75

Wenn $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ dann gilt :
Es existiert eine Sprache $L \in \mathbf{NP} \setminus \mathbf{P}$ die nicht **NP**-vollständig ist

Satz von Ladner

Beweisidee

Konstruieren Sprache mit diesen Eigenschaften und zeigen, dass sie in **NP** - intermediate ist, falls **P** $\neq$ **NP** :

Die Sprache SAT$_H$

Für eine Funktion $H : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definieren wir :
$\mathbf{SAT}_H = \{\psi 0 1^{n^{H(n)}} : \psi \in \mathbf{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$

Beispiel für SAT$_H$

Für $H(n) = n - 1$ und $\psi = a \wedge b$ gilt :
$(a \wedge b)01^{3^2} = (a \wedge b)0111111111 \in \mathbf{SAT}_H$

Satz von Ladner

Beweisidee

Konstruieren Sprache mit diesen Eigenschaften und zeigen, dass sie in **NP** - intermediate ist, falls $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$:

Die Sprache $\mathbf{SAT}_H$

Für eine Funktion $H : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definieren wir :

$\mathbf{SAT}_H = \{\psi 0 1^{n^{H(n)}} : \psi \in \mathbf{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$

Beispiel für $\mathbf{SAT}_H$

Für $H(n) = n - 1$ und $\psi = a \wedge b$ gilt :

$(a \wedge b)01^{3^2} = (a \wedge b)0111111111 \in \mathbf{SAT}_H$

Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

Satz von Ladner

Beweisidee

Karlsruher Institut für Technologie

Konstruieren Sprache mit diesen Eigenschaften und zeigen, dass sie in **NP** - intermediate ist, falls **P** $\neq$ **NP** :

Die Sprache $\textbf{SAT}_H$

Für eine Funktion $H : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definieren wir :
$\textbf{SAT}_H = \{\psi 0 1^{n^{H(n)}} : \psi \in \textbf{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$

Beispiel für $\textbf{SAT}_H$

Für $H(n) = n - 1$ und $\psi = a \wedge b$ gilt :
$(a \wedge b)01^{3^2} = (a \wedge b)0111111111 \in \textbf{SAT}_H$

Satz von Ladner

Beweis : Wahl von H

Definition von H

- Betrachte die TM $M_1, M_2, \ldots M_{\lfloor \log(\log(n)) \rfloor}$.
- Wähle unter diesen die TM M_i mit kleinster Gödelnummer i, welche für alle $|x| \leq \log(n)$ $\mathbf{SAT}_H(x)$ in $i|x|^i$ Schritten berechnet
- Setze $H(n) = i$.
- Falls eine solche TM nicht existiert, setze $H(n) = \log(\log(n))$

Gewähltes H erfüllt die folgenden Eigenschaften

$\mathbf{SAT}_H \in \mathbf{P} \Leftrightarrow H(n) \in O(1)$ (also $H(n) \leq C$ für alle n)
und damit insbesondere $\lim_{n\to\infty} H(n) = \infty$ für $\mathbf{SAT}_H \notin \mathbf{P}$

- H erfüllt diese und ist polynomiell berechenbar.
- (ohne Beweis)

Satz von Ladner

Beweis : Wahl von H

Definition von H

- Betrachte die TM $M_1, M_2, ...M_{\lfloor \log(\log(n)) \rfloor}$.
- Wähle unter diesen die TM M_i mit kleinster Gödelnummer i, welche für alle $|x| \leq \log(n)$ $\mathbf{SAT}_H(x)$ in $i|x|^i$ Schritten berechnet
- Setze $H(n) = i$.
- Falls eine solche TM nicht existiert, setze $H(n) = \log(\log(n))$

Gewähltes H erfüllt die folgenden Eigenschaften

$\mathbf{SAT}_H \in \mathbf{P} \Leftrightarrow H(n) \in O(1)$ (also $H(n) \leq C$ für alle n)
und damit insbesondere $\lim_{n\to\infty} H(n) = \infty$ für $\mathbf{SAT}_H \notin \mathbf{P}$

- H erfüllt diese und ist polynomiell berechenbar.
- (ohne Beweis)

Satz von Ladner

Beweis : Wahl von H

Definition von H

- Betrachte die TM $M_1, M_2, \ldots M_{\lfloor \log(\log(n)) \rfloor}$.
- Wähle unter diesen die TM M_i mit kleinster Gödelnummer i, welche für alle $|x| \leq \log(n)$ $\mathbf{SAT}_H(x)$ in $i|x|^i$ Schritten berechnet
- Setze $H(n) = i$.
- Falls eine solche TM nicht existiert, setze $H(n) = \log(\log(n))$

Gewähltes H erfüllt die folgenden Eigenschaften

$\mathbf{SAT}_H \in \mathbf{P} \Leftrightarrow H(n) \in O(1)$ (also $H(n) \leq C$ für alle n)
und damit insbesondere $\lim_{n \to \infty} H(n) = \infty$ für $\mathbf{SAT}_H \notin \mathbf{P}$

- H erfüllt diese und ist polynomiell berechenbar.
- (ohne Beweis)

Beweis von Ladner

$\textbf{SAT}_H$ weder in P noch NP-complete

Definition von $\textbf{SAT}_H$

$$\textbf{SAT}_H = \{\psi 0 1^{n^{H(n)}} : \psi \in \textbf{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$$

Gewähltes H erfüllt die folgenden Eigenschaften

$\textbf{SAT}_H \in \textbf{P} \Leftrightarrow H(n) \in O(1)$ (also $H(n) \leq C$ für alle n)

$\textbf{SAT}_H$ ist nicht in P

- Angenommen $\textbf{SAT}_H \in \textbf{P} \Rightarrow H(n) \leq C$, C Konstante
- $\textbf{SAT}_H$ ist also **SAT** mit höchsten polynomiell vielen angehängten 1en
- **SAT** kann somit durch dieselbe TM wie $\textbf{SAT}_H$ gelöst werden
  $\Rightarrow \textbf{P} = \textbf{NP}$

Beweis von Ladner

$\mathbf{SAT}_H$ weder in P noch NP-complete

Definition von $\mathbf{SAT}_H$

$$\mathbf{SAT}_H = \{\psi 0 1^{n^{H(n)}} : \psi \in \mathbf{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$$

Gewähltes H erfüllt die folgenden Eigenschaften

$$\mathbf{SAT}_H \in \mathbf{P} \Leftrightarrow H(n) \in O(1) \text{ (also } H(n) \leq C \text{ für alle n)}$$

$\mathbf{SAT}_H$ ist nicht in P

- Angenommen $\mathbf{SAT}_H \in \mathbf{P} \Rightarrow H(n) \leq C$, C Konstante
- $\mathbf{SAT}_H$ ist also **SAT** mit höchsten polynomiell vielen angehängten 1en
- **SAT** kann somit durch dieselbe TM wie $\mathbf{SAT}_H$ gelöst werden $\Rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{NP}$

Beweis von Ladner

$\mathbf{SAT}_H$ weder in P noch NP-complete

Definition von $\mathbf{SAT}_H$

$\mathbf{SAT}_H = \{\psi 0 1^{n^{H(n)}} : \psi \in \mathbf{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$

Gewähltes H erfüllt die folgenden Eigenschaften

$\mathbf{SAT}_H \in \mathbf{P} \Leftrightarrow H(n) \in O(1)$ (also $H(n) \leq C$ für alle n)

$\mathbf{SAT}_H$ ist nicht in P

- Angenommen $\mathbf{SAT}_H \in \mathbf{P} \Rightarrow H(n) \leq C$, C Konstante
- $\mathbf{SAT}_H$ ist also **SAT** mit höchsten polynomiell vielen angehängten 1en
- **SAT** kann somit durch dieselbe TM wie $\mathbf{SAT}_H$ gelöst werden $\Rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{NP}$

Beweis von Ladner

$\mathbf{SAT}_H$ weder in P noch NP-complete

Definition von $\mathbf{SAT}_H$

$\mathbf{SAT}_H = \{\psi 0 1^{n^{H(n)}} : \psi \in \mathbf{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$

Gewähltes H erfüllt die folgenden Eigenschaften

$\mathbf{SAT}_H \in \mathbf{P} \Leftrightarrow H(n) \in O(1)$ (also $H(n) \leq C$ für alle n)

$\mathbf{SAT}_H$ ist nicht in P

- Angenommen $\mathbf{SAT}_H \in \mathbf{P} \Rightarrow H(n) \leq C$, C Konstante
- $\mathbf{SAT}_H$ ist also **SAT** mit höchsten polynomiell vielen angehängten 1en
- **SAT** kann somit durch dieselbe TM wie $\mathbf{SAT}_H$ gelöst werden $\Rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{NP}$

Beweis von Ladner

$\mathbf{SAT}_H$ weder in P noch NP-complete

Definition von $\mathbf{SAT}_H$

$\mathbf{SAT}_H = \{\psi 0 1^{n^{H(n)}} : \psi \in \mathbf{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$

Gewähltes H erfüllt die folgenden Eigenschaften

$\mathbf{SAT}_H \in \mathbf{P} \Leftrightarrow H(n) \in O(1)$ (also $H(n) \leq C$ für alle n)

$\mathbf{SAT}_H$ ist nicht in P

- Angenommen $\mathbf{SAT}_H \in \mathbf{P} \Rightarrow H(n) \leq C$, C Konstante
- $\mathbf{SAT}_H$ ist also **SAT** mit höchsten polynomiell vielen angehängten 1en
- **SAT** kann somit durch dieselbe TM wie $\mathbf{SAT}_H$ gelöst werden
  $\Rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{NP}$

Beweis von Ladner

SAT$_H$ weder in P noch NP-complete

Definition von SAT$_H$

$\mathbf{SAT}_H = \{\psi 01^{n^{H(n)}} : \psi \in \mathbf{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$

- Angenommen $\mathbf{SAT}_H \in \mathbf{NPC} \Rightarrow$ es existiert poly. Reduktion f von **SAT** auf $\mathbf{SAT}_H$.
- Da $\mathbf{SAT}_H \notin \mathbf{P}$ geht $H(n)$ gegen ∞
- **SAT**-Instanz φ wird mit f auf $\mathbf{SAT}_H$-Instanz der Form $\psi 01^{\psi^{H(|\psi|)}}$ abgebildet.
- $|f(\varphi)| = |\psi| + |\psi|^{H(|\psi|)}$

Beweis von Ladner

$\mathbf{SAT}_H$ weder in P noch NP-complete

Definition von $\mathbf{SAT}_H$

$\mathbf{SAT}_H = \{\psi 0 1^{n^{H(n)}} : \psi \in \mathbf{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$

$\mathbf{SAT}_H$ ist nicht in NPC

- Angenommen $\mathbf{SAT}_H \in \mathbf{NPC} \Rightarrow$ es existiert poly. Reduktion f von **SAT** auf $\mathbf{SAT}_H$.
- Da $\mathbf{SAT}_H \notin \mathbf{P}$ geht $H(n)$ gegen ∞
- **SAT**-Instanz φ wird mit f auf $\mathbf{SAT}_H$-Instanz der Form $\psi 0 1^{\psi^{H(|\psi|)}}$ abgebildet.
- $|f(\varphi)| = |\psi| + |\psi|^{H(|\psi|)}$

Beweis von Ladner

$\mathbf{SAT}_H$ weder in P noch NP-complete

Definition von $\mathbf{SAT}_H$

$\mathbf{SAT}_H = \{\psi 0 1^{n^{H(n)}} : \psi \in \mathbf{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$

$\mathbf{SAT}_H$ ist nicht in NPC

- Angenommen $\mathbf{SAT}_H \in \mathbf{NPC} \Rightarrow$ es existiert poly. Reduktion f von **SAT** auf $\mathbf{SAT}_H$.
- Da $\mathbf{SAT}_H \notin \mathbf{P}$ geht $H(n)$ gegen ∞
- **SAT**-Instanz φ wird mit f auf $\mathbf{SAT}_H$-Instanz der Form $\psi 0 1^{\psi^{H(|\psi|)}}$ abgebildet.
- $|f(\varphi)| = |\psi| + |\psi|^{H(|\psi|)}$

Beweis von Ladner

SAT_H weder in P noch NP-complete

Definition von SAT_H

$\mathbf{SAT}_H = \{\psi 0 1^{n^{H(n)}} : \psi \in \mathbf{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$

SAT_H ist nicht in NPC

- Angenommen $\mathbf{SAT}_H \in \mathbf{NPC} \Rightarrow$ es existiert poly. Reduktion f von **SAT** auf $\mathbf{SAT}_H$.
- Da $\mathbf{SAT}_H \notin \mathbf{P}$ geht $H(n)$ gegen ∞
- **SAT**-Instanz φ wird mit f auf $\mathbf{SAT}_H$-Instanz der Form $\psi 0 1^{\psi^{H(|\psi|)}}$ abgebildet.
- $|f(\varphi)| = |\psi| + |\psi|^{H(|\psi|)}$

Beweis von Ladner

$\mathbf{SAT}_H$ weder in P noch NP-complete

Definition von $\mathbf{SAT}_H$

$\mathbf{SAT}_H = \{\psi 0 1^{n^{H(n)}} : \psi \in \mathbf{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$

$\mathbf{SAT}_H$ ist nicht in NPC

- Angenommen $\mathbf{SAT}_H \in \mathbf{NPC} \Rightarrow$ es existiert poly. Reduktion f von **SAT** auf $\mathbf{SAT}_H$.
- Da $\mathbf{SAT}_H \notin \mathbf{P}$ geht $H(n)$ gegen ∞
- **SAT**-Instanz φ wird mit f auf $\mathbf{SAT}_H$-Instanz der Form $\psi 0 1^{\psi^{H(|\psi|)}}$ abgebildet.
- $|f(\varphi)| = |\psi| + |\psi|^{H(|\psi|)}$

Beweis von Ladner

SAT_H weder in P noch NP-complete

Definition von SAT_H

$\mathbf{SAT}_H = \{\psi 0 1^{n^{H(n)}} : \psi \in \mathbf{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$

- Ab gewisser Größe müssen **SAT**-Instanz φ von f auf $\mathbf{SAT}_H$-Instanz mit $|\psi| \in o(n)$ abgebildet werden.
  Ansonsten wegen $H(n)$ gegen ∞
  $\Rightarrow |\psi 0 1^{|\psi|^{H(|\psi|)}}|$ nicht mehr polynomiell in Eingabegröße φ.
- $|\psi|$ also echt kleiner als $\frac{|\varphi|}{2}$
- Algorithmus der **SAT** in poly. Zeit entscheidet
  - bilde **SAT**-Instanz φ mit f auf $\psi 0 1^{|\psi|^{H(|\psi|)}}$ ab
  - $|\psi|$ kleiner $\frac{|\varphi|}{2}$ und es gilt $\varphi \in \mathbf{SAT} \Leftrightarrow \psi \in \mathbf{SAT}$
  - Wiederhole ersten Schritt mit ψ als Eingabe

Beweis von Ladner

$\mathbf{SAT}_H$ weder in P noch NP-complete

Definition von $\mathbf{SAT}_H$

$$\mathbf{SAT}_H = \{\psi 01^{n^{H(n)}} : \psi \in \mathbf{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$$

- Ab gewisser Größe müssen **SAT**-Instanz φ von f auf $\mathbf{SAT}_H$-Instanz mit $|\psi| \in o(n)$ abgebildet werden.
  Ansonsten wegen $H(n)$ gegen ∞
  $\Rightarrow |\psi 01^{|\psi|^{H(|\psi|)}}|$ nicht mehr polynomiell in Eingabegröße φ.
- $|\psi|$ also echt kleiner als $\frac{|\varphi|}{2}$
- Algorithmus der **SAT** in poly. Zeit entscheidet
  - bilde **SAT**-Instanz φ mit f auf $\psi 01^{|\psi|^{H(|\psi|)}}$ ab
  - $|\psi|$ kleiner $\frac{|\varphi|}{2}$ und es gilt $\varphi \in \mathbf{SAT} \Leftrightarrow \psi \in \mathbf{SAT}$
  - Wiederhole ersten Schritt mit ψ als Eingabe

Beweis von Ladner

$\mathbf{SAT}_H$ weder in P noch NP-complete

Definition von $\mathbf{SAT}_H$

$\mathbf{SAT}_H = \{\psi 01^{n^{H(n)}} : \psi \in \mathbf{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$

- Ab gewisser Größe müssen **SAT**-Instanz φ von f auf $\mathbf{SAT}_H$-Instanz mit $|\psi| \in o(n)$ abgebildet werden.
  Ansonsten wegen $H(n)$ gegen ∞
  $\Rightarrow |\psi 01^{|\psi|^{H(|\psi|)}}|$ nicht mehr polynomiell in Eingabegröße φ.
- $|\psi|$ also echt kleiner als $\frac{|\varphi|}{2}$
- Algorithmus der **SAT** in poly. Zeit entscheidet
  - bilde **SAT**-Instanz φ mit f auf $\psi 01^{|\psi|^{H(|\psi|)}}$ ab
  - $|\psi|$ kleiner $\frac{|\varphi|}{2}$ und es gilt $\varphi \in \mathbf{SAT} \Leftrightarrow \psi \in \mathbf{SAT}$
  - Wiederhole ersten Schritt mit ψ als Eingabe

Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

Beweis von Ladner

$\mathbf{SAT}_H$ weder in P noch NP-complete

Definition von $\mathbf{SAT}_H$

$\mathbf{SAT}_H = \{\psi 01^{n^{H(n)}} : \psi \in \mathbf{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$

- Ab gewisser Größe müssen **SAT**-Instanz φ von f auf $\mathbf{SAT}_H$-Instanz mit $|\psi| \in o(n)$ abgebildet werden.
  Ansonsten wegen $H(n)$ gegen ∞
  $\Rightarrow |\psi 01^{|\psi|^{H(|\psi|)}}|$ nicht mehr polynomiell in Eingabegröße φ.
- $|\psi|$ also echt kleiner als $\frac{|\varphi|}{2}$
- Algorithmus der **SAT** in poly. Zeit entscheidet
  - bilde **SAT**-Instanz φ mit f auf $\psi 01^{|\psi|^{H(|\psi|)}}$ ab
  - $|\psi|$ kleiner $\frac{|\varphi|}{2}$ und es gilt $\varphi \in \mathbf{SAT} \Leftrightarrow \psi \in \mathbf{SAT}$
  - Wiederhole ersten Schritt mit ψ als Eingabe

Beweis von Ladner

SAT_H weder in P noch NP-complete

Definition von SAT_H

$\mathbf{SAT}_H = \{\psi 01^{n^{H(n)}} : \psi \in \mathbf{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$

- Ab gewisser Größe müssen **SAT**-Instanz φ von f auf $\mathbf{SAT}_H$-Instanz mit $|\psi| \in o(n)$ abgebildet werden.
  Ansonsten wegen $H(n)$ gegen ∞
  $\Rightarrow |\psi 01^{|\psi|^{H(|\psi|)}}|$ nicht mehr polynomiell in Eingabegröße φ.
- $|\psi|$ also echt kleiner als $\frac{|\varphi|}{2}$
- Algorithmus der **SAT** in poly. Zeit entscheidet
  - bilde **SAT**-Instanz φ mit f auf $\psi 01^{|\psi|^{H(|\psi|)}}$ ab
  - $|\psi|$ kleiner $\frac{|\varphi|}{2}$ und es gilt $\varphi \in \mathbf{SAT} \Leftrightarrow \psi \in \mathbf{SAT}$
  - Wiederhole ersten Schritt mit ψ als Eingabe

Beweis von Ladner

$\mathbf{SAT}_H$ weder in P noch NP-complete

Definition von $\mathbf{SAT}_H$

$\mathbf{SAT}_H = \{\psi 0 1^{n^{H(n)}} : \psi \in \mathbf{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$

- Ab gewisser Größe müssen **SAT**-Instanz φ von f auf $\mathbf{SAT}_H$-Instanz mit $|\psi| \in o(n)$ abgebildet werden.
  Ansonsten wegen $H(n)$ gegen ∞
  $\Rightarrow |\psi 0 1^{|\psi|^{H(|\psi|)}}|$ nicht mehr polynomiell in Eingabegröße φ.
- $|\psi|$ also echt kleiner als $\frac{|\varphi|}{2}$
- Algorithmus der **SAT** in poly. Zeit entscheidet
  - bilde **SAT**-Instanz φ mit f auf $\psi 0 1^{|\psi|^{H(|\psi|)}}$ ab
  - $|\psi|$ kleiner $\frac{|\varphi|}{2}$ und es gilt $\varphi \in \mathbf{SAT} \Leftrightarrow \psi \in \mathbf{SAT}$
  - Wiederhole ersten Schritt mit ψ als Eingabe

Gliederung

Diagonalisierung
- Was verstehen wir unter Diagonalisierung?
- Time Hierarchy
- Satz von Ladner
- Orakelmaschinen - Grenzen der Diagonalisierung

Die polynomielle Hierarchie
- Motivation und Beispiele
- Die Klasse **PH**

Grenzen der Diagonalisierung

Wiederholung Diagonalisierung

Was ist Diagonalisierung

Als Diagonalisierung wird (hier) ein Beweis bezeichnet, der nur auf den beiden folgenden Eigenschaften von TM aufbaut.

1. Die Existenz einer Repräsentation von TM durch Zeichenketten (Gödelnummer)
2. Die Fähigkeit eine andere TM mit geringem zusätzlichen Zeit- oder Platzbedarf zu simulieren (Universelle TM)

Grenzen der Diagonalisierung

Wiederholung Diagonalisierung

Was ist Diagonalisierung

Als Diagonalisierung wird (hier) ein Beweis bezeichnet, der nur auf den beiden folgenden Eigenschaften von TM aufbaut.

1. Die Existenz einer Repräsentation von TM durch Zeichenketten (Gödelnummer)
2. Die Fähigkeit eine andere TM mit geringem zusätzlichen Zeit- oder Platzbedarf zu simulieren (Universelle TM)

Grenzen der Diagonalisierung

Wiederholung Diagonalisierung

Was ist Diagonalisierung

Als Diagonalisierung wird (hier) ein Beweis bezeichnet, der nur auf den beiden folgenden Eigenschaften von TM aufbaut.

1. Die Existenz einer Repräsentation von TM durch Zeichenketten (Gödelnummer)
2. Die Fähigkeit eine andere TM mit geringem zusätzlichen Zeit- oder Platzbedarf zu simulieren (Universelle TM)

Grenzen der Diagonalisierung

Definition von Orakelmschinen

- Werden zeigen, dass Diagonalisierung allein **P** / **NP** Frage nicht beantworten kann
- benötigen hierzu ein weitere Kategorie von Turingmaschinen.

Definition Orakel-Turingmaschine

Eine Orakel-Turingmaschine M ist eine TM, die folgende zusätzliche Eigenschaften hat:

- ein spezielles zusätzliches Band (Orakelband) und 3 spezielle zusätzliche Zustände $q_{query}, q_{yes}, q_{no}$.
- ein Orakel $O \subseteq \{0,1\}^*$
- Wenn M den Zustand q_{query} betritt, ist der Folgezustand
  - q_{yes}, wenn für Inhalt s des Orakelbands gilt $s \in O$ und
  - q_{no}, wenn $s \notin O$
- Das Orakel liefert die Antwort in einem Berechnungsschritt

Grenzen der Diagonalisierung

Definition von Orakelmschinen

- Werden zeigen, dass Diagonalisierung allein **P** / **NP** Frage nicht beantworten kann
- benötigen hierzu ein weitere Kategorie von Turingmaschinen.

Definition Orakel-Turingmaschine

Eine Orakel-Turingmaschine M ist eine TM, die folgende zusätzliche Eigenschaften hat:

- ein spezielles zusätzliches Band (Orakelband) und 3 spezielle zusätzliche Zustände $q_{query}, q_{yes}, q_{no}$.
- ein Orakel $O \subseteq \{0,1\}^*$
- Wenn M den Zustand q_{query} betritt, ist der Folgezustand
  - q_{yes}, wenn für Inhalt s des Orakelbands gilt $s \in O$ und
  - q_{no}, wenn $s \notin O$
- Das Orakel liefert die Antwort in einem Berechnungsschritt

Grenzen der Diagonalisierung

Definition von Orakelmschinen

- Werden zeigen, dass Diagonalisierung allein **P** / **NP** Frage nicht beantworten kann
- benötigen hierzu ein weitere Kategorie von Turingmaschinen.

Definition Orakel-Turingmaschine

Eine Orakel-Turingmaschine M ist eine TM, die folgende zusätzliche Eigenschaften hat:

- ein spezielles zusätzliches Band (Orakelband) und 3 spezielle zusätzliche Zustände $q_{query}, q_{yes}, q_{no}$.
- ein Orakel $O \subseteq \{0, 1\}^*$
- Wenn M den Zustand q_{query} betritt, ist der Folgezustand
  - q_{yes}, wenn für Inhalt s des Orakelbands gilt $s \in O$ und
  - q_{no}, wenn $s \notin O$
- Das Orakel liefert die Antwort in einem Berechnungsschritt

Grenzen der Diagonalisierung

Definition von Orakelmschinen

- Werden zeigen, dass Diagonalisierung allein **P** / **NP** Frage nicht beantworten kann
- benötigen hierzu ein weitere Kategorie von Turingmaschinen.

Definition Orakel-Turingmaschine

Eine Orakel-Turingmaschine M ist eine TM, die folgende zusätzliche Eigenschaften hat:

- ein spezielles zusätzliches Band (Orakelband) und 3 spezielle zusätzliche Zustände $q_{query}, q_{yes}, q_{no}$.
- ein Orakel $O \subseteq \{0,1\}^*$
- Wenn M den Zustand q_{query} betritt, ist der Folgezustand
  - q_{yes}, wenn für Inhalt s des Orakelbands gilt $s \in O$ und
  - q_{no}, wenn $s \notin O$
- Das Orakel liefert die Antwort in einem Berechnungsschritt

Grenzen der Diagonalisierung

Definition von Orakelmschinen

- Werden zeigen, dass Diagonalisierung allein **P** / **NP** Frage nicht beantworten kann
- benötigen hierzu ein weitere Kategorie von Turingmaschinen.

Definition Orakel-Turingmaschine

Eine Orakel-Turingmaschine M ist eine TM, die folgende zusätzliche Eigenschaften hat:

- ein spezielles zusätzliches Band (Orakelband) und 3 spezielle zusätzliche Zustände $q_{query}, q_{yes}, q_{no}$.
- ein Orakel $O \subseteq \{0, 1\}^*$
- Wenn M den Zustand q_{query} betritt, ist der Folgezustand
  - q_{yes}, wenn für Inhalt s des Orakelbands gilt $s \in O$ und
  - q_{no}, wenn $s \notin O$
- Das Orakel liefert die Antwort in einem Berechnungsschritt

Grenzen der Diagonalisierung

Satz von Baker-Gill-Solovay

Komplexitätsklassen von Orakelmaschinen

Für jedes $\mathbf{O} \subseteq \{0,1\}^*$ ist $\mathbf{P}^{\mathbf{O}}$ die Menge aller Sprachen, die eine det. Orakel-TM mit Orakel $\mathbf{O}$ entscheiden kann. $\mathbf{NP}^{\mathbf{O}}$ analog für nichtdet. Orakel-TM.

Satz (Baker,Gill,Solovay, 75)

Es existieren Orakel A, B so dass $\mathbf{P}^A = \mathbf{NP}^A$ und $\mathbf{P}^B \neq \mathbf{NP}^B$

Grenzen der Diagonalisierung

Satz von Baker-Gill-Solovay

Komplexitätsklassen von Orakelmaschinen

Für jedes $\mathbf{O} \subseteq \{0,1\}^*$ ist $\mathbf{P}^{\mathbf{O}}$ die Menge aller Sprachen, die eine det. Orakel-TM mit Orakel $\mathbf{O}$ entscheiden kann. $\mathbf{NP}^{\mathbf{O}}$ analog für nichtdet. Orakel-TM.

Satz (Baker,Gill,Solovay, 75)

Es existieren Orakel A, B so dass $\mathbf{P}^A = \mathbf{NP}^A$ und $\mathbf{P}^B \neq \mathbf{NP}^B$

Grenzen der Diagonalisierung

relativierende Beweise

Satz (Baker,Gill,Solovay, 75)

Es existieren Orakel A, B so dass $\mathbf{P}^A = \mathbf{NP}^A$ und $\mathbf{P}^B \neq \mathbf{NP}^B$

relativierende Beweise

Wir nennen einen Beweis, der auch für TM mit Orakel gilt, einen *relativierenden Beweis*

- Diagonalisierung ist relativierend und kann damit nicht für die $\mathbf{P} - \mathbf{NP}$ Frage genutzt werden.
- $\Rightarrow$ ein Beweis für die $\mathbf{P} - \mathbf{NP}$ Frage muss ein nicht relativierendes Verfahren nutzen !

Grenzen der Diagonalisierung

relativierende Beweise

Satz (Baker,Gill,Solovay, 75)

Es existieren Orakel A, B so dass $\mathbf{P}^A = \mathbf{NP}^A$ und $\mathbf{P}^B \neq \mathbf{NP}^B$

relativierende Beweise

Wir nennen einen Beweis, der auch für TM mit Orakel gilt, einen *relativierenden Beweis*

- Diagonalisierung ist relativierend und kann damit nicht für die $\mathbf{P} - \mathbf{NP}$ Frage genutzt werden.
- $\Rightarrow$ ein Beweis für die $\mathbf{P} - \mathbf{NP}$ Frage muss ein nicht relativierendes Verfahren nutzen !

Grenzen der Diagonalisierung

Beispiele für Orakelmaschinen

$\overline{\textbf{SAT}}$

- Für $\overline{\textbf{SAT}}$, Sprache der nicht erfüllbaren Formeln, gilt $\overline{SAT} \in \mathbf{P}^{\textbf{SAT}}$.
- Mit Orakel **SAT** kann TM in $\mathcal{O}(1)$ entscheiden, ob $\varphi \in \textbf{SAT}$ und gegenteilige Antwort ausgeben.

Grenzen der Diagonalisierung

Beispiele für Orakelmaschinen

$\overline{\textbf{SAT}}$

- Für $\overline{\textbf{SAT}}$, Sprache der nicht erfüllbaren Formeln, gilt $\overline{SAT} \in \mathbf{P}^{\mathbf{SAT}}$.
- Mit Orakel **SAT** kann TM in $\mathcal{O}(1)$ entscheiden, ob $\varphi \in \mathbf{SAT}$ und gegenteilige Antwort ausgeben.

Grenzen der Diagonalisierung

Beweis : $\mathbf{P}^A = \mathbf{NP}^A$

Beweis des Satzes von Baker:

- Sei **EXPCOM** folgende Sprache:

$$\{(M, x, 1^n) : M \textit{ entscheidet } x \textit{ innerhalb von } 2^n \textit{ Schritten}\}$$

  Dann gilt $\mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{EXP}$.
- $\mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}}$
  - TM M entscheidet $L \in \mathbf{EXP}$
  - Baue Orakel-TM, die Orakel mit $(M, x, |x|)$ aufruft
- $\mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$
  - M nichtdet. TM mit Orakel **EXPCOM**:
  - Ausführung von M det. in Exponentialzeit simulieren
  - Orakelaufruf in Exponentialzeit simulieren (max $2^{|x|} \cdot 2^{q(|x|)}$ Schritte)
- $\Rightarrow \mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$

Grenzen der Diagonalisierung

Beweis : $\mathbf{P}^A = \mathbf{NP}^A$

Beweis des Satzes von Baker:

- Sei **EXPCOM** folgende Sprache:

  $$\{(M, x, 1^n) : M \textit{ entscheidet } x \textit{ innerhalb von } 2^n \textit{ Schritten}\}$$

  Dann gilt $\mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{EXP}$.
- $\mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}}$
  - TM M entscheidet $L \in \mathbf{EXP}$
  - Baue Orakel-TM, die Orakel mit $(M, x, |x|)$ aufruft
- $\mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$
  - M nichtdet. TM mit Orakel **EXPCOM**:
  - Ausführung von M det. in Exponentialzeit simulieren
  - Orakelaufruf in Exponentialzeit simulieren (max $2^{|x|} \cdot 2^{q(|x|)}$ Schritte)
- $\Rightarrow \mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$

Grenzen der Diagonalisierung

Beweis : $\mathbf{P}^A = \mathbf{NP}^A$

Beweis des Satzes von Baker:

- Sei **EXPCOM** folgende Sprache:

$$\{(M, x, 1^n) : M \textit{ entscheidet } x \textit{ innerhalb von } 2^n \textit{ Schritten}\}$$

  Dann gilt $\mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{EXP}$.
- $\mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}}$
  - TM M entscheidet $L \in \mathbf{EXP}$
  - Baue Orakel-TM, die Orakel mit $(M, x, |x|)$ aufruft
- $\mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$
  - M nichtdet. TM mit Orakel **EXPCOM**:
  - Ausführung von M det. in Exponentialzeit simulieren
  - Orakelaufruf in Exponentialzeit simulieren (max $2^{|x|} \cdot 2^{q(|x|)}$ Schritte)
- $\Rightarrow \mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$

Grenzen der Diagonalisierung

Beweis : $\mathbf{P}^A = \mathbf{NP}^A$

Beweis des Satzes von Baker:

- Sei **EXPCOM** folgende Sprache:

$$\{(M, x, 1^n) : M \textit{ entscheidet } x \textit{ innerhalb von } 2^n \textit{ Schritten}\}$$

  Dann gilt $\mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{EXP}$.
- $\mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}}$
  - TM M entscheidet $L \in \mathbf{EXP}$
  - Baue Orakel-TM, die Orakel mit $(M, x, |x|)$ aufruft
- $\mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$
  - M nichtdet. TM mit Orakel **EXPCOM**:
  - Ausführung von M det. in Exponentialzeit simulieren
  - Orakelaufruf in Exponentialzeit simulieren (max $2^{|x|} \cdot 2^{q(|x|)}$ Schritte)
- $\Rightarrow \mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$

Grenzen der Diagonalisierung

Beweis : $\mathbf{P}^A = \mathbf{NP}^A$

Beweis des Satzes von Baker:

- Sei **EXPCOM** folgende Sprache:

$$\{(M, x, 1^n) : M \textit{ entscheidet } x \textit{ innerhalb von } 2^n \textit{ Schritten}\}$$

  Dann gilt $\mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{EXP}$.
- $\mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}}$
  - TM M entscheidet $L \in \mathbf{EXP}$
  - Baue Orakel-TM, die Orakel mit $(M, x, |x|)$ aufruft
- $\mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$
  - M nichtdet. TM mit Orakel **EXPCOM**:
  - Ausführung von M det. in Exponentialzeit simulieren
  - Orakelaufruf in Exponentialzeit simulieren (max $2^{|x|} \cdot 2^{q(|x|)}$ Schritte)
- $\Rightarrow \mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$

Grenzen der Diagonalisierung

Beweis : $\mathbf{P}^A = \mathbf{NP}^A$

Beweis des Satzes von Baker:

- Sei **EXPCOM** folgende Sprache:

$$\{(M, x, 1^n) : M \textit{ entscheidet } x \textit{ innerhalb von } 2^n \textit{ Schritten}\}$$

  Dann gilt $\mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{EXP}$.
- $\mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}}$
  - TM M entscheidet $L \in \mathbf{EXP}$
  - Baue Orakel-TM, die Orakel mit $(M, x, |x|)$ aufruft
- $\mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$
  - M nichtdet. TM mit Orakel **EXPCOM**:
  - Ausführung von M det. in Exponentialzeit simulieren
  - Orakelaufruf in Exponentialzeit simulieren (max $2^{|x|} \cdot 2^{q(|x|)}$ Schritte)
- $\Rightarrow \mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$

Grenzen der Diagonalisierung

Beweis : $\mathbf{P}^A = \mathbf{NP}^A$

Beweis des Satzes von Baker:

- Sei **EXPCOM** folgende Sprache:

$$\{(M, x, 1^n) : M \textit{ entscheidet } x \textit{ innerhalb von } 2^n \textit{ Schritten}\}$$

  Dann gilt $\mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{EXP}$.
- $\mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}}$
  - TM M entscheidet $L \in \mathbf{EXP}$
  - Baue Orakel-TM, die Orakel mit $(M, x, |x|)$ aufruft
- $\mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$
  - M nichtdet. TM mit Orakel **EXPCOM**:
  - Ausführung von M det. in Exponentialzeit simulieren
  - Orakelaufruf in Exponentialzeit simulieren (max $2^{|x|} \cdot 2^{q(|x|)}$ Schritte)
- $\Rightarrow \mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$

Grenzen der Diagonalisierung

Beweis : $\mathbf{P}^A = \mathbf{NP}^A$

Beweis des Satzes von Baker:

- Sei **EXPCOM** folgende Sprache:

$$\{(M, x, 1^n) : M \textit{ entscheidet } x \textit{ innerhalb von } 2^n \textit{ Schritten}\}$$

  Dann gilt $\mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{EXP}$.
- $\mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}}$
  - TM M entscheidet $L \in \mathbf{EXP}$
  - Baue Orakel-TM, die Orakel mit $(M, x, |x|)$ aufruft
- $\mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$
  - M nichtdet. TM mit Orakel **EXPCOM**:
  - Ausführung von M det. in Exponentialzeit simulieren
  - Orakelaufruf in Exponentialzeit simulieren (max $2^{|x|} \cdot 2^{q(|x|)}$ Schritte)
- $\Rightarrow \mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$

Grenzen der Diagonalisierung

Beweis : $\mathbf{P}^A = \mathbf{NP}^A$

Beweis des Satzes von Baker:

- Sei **EXPCOM** folgende Sprache:

$$\{(M, x, 1^n) : M \textit{ entscheidet } x \textit{ innerhalb von } 2^n \textit{ Schritten}\}$$

  Dann gilt $\mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{EXP}$.
- $\mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}}$
  - TM M entscheidet $L \in \mathbf{EXP}$
  - Baue Orakel-TM, die Orakel mit $(M, x, |x|)$ aufruft
- $\mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$
  - M nichtdet. TM mit Orakel **EXPCOM**:
  - Ausführung von M det. in Exponentialzeit simulieren
  - Orakelaufruf in Exponentialzeit simulieren (max $2^{|x|} \cdot 2^{q(|x|)}$ Schritte)
- $\Rightarrow \mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$

Grenzen der Diagonalisierung

Beweis : $\mathbf{P}^B \neq \mathbf{NP}^B$

Definition: unäre Sprache U_B

Für eine Sprache B sei $U_B = \{1^n$: Es gibt einen String der Länge n in B $\}$

- Warum gilt $U_B \in \mathbf{NP}^B$?
- Müssen also nur noch B so konstruieren, dass $U_B \notin \mathbf{P}^B$

Grenzen der Diagonalisierung

Beweis : $\mathbf{P}^B \neq \mathbf{NP}^B$

Definition: unäre Sprache U_B

Für eine Sprache B sei $U_B = \{1^n$: Es gibt einen String der Länge n in B $\}$

- Warum gilt $U_B \in \mathbf{NP}^B$?
- Müssen also nur noch B so konstruieren, dass $U_B \notin \mathbf{P}^B$

Grenzen der Diagonalisierung

Beweis : $\mathbf{P}^B \neq \mathbf{NP}^B$

Definition: unäre Sprache U_B

Für eine Sprache B sei $U_B = \{1^n$: Es gibt einen String der Länge n in B $\}$

- Warum gilt $U_B \in \mathbf{NP}^B$?
- Müssen also nur noch B so konstruieren, dass $U_B \notin \mathbf{P}^B$

Grenzen der Diagonalisierung

Konstruktion von B

Wir konstruieren eine Folge von Sprachen $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ so , dass $B = \lim_{i\to\infty} B_i$

- Dazu iterieren wir über alle Turing Maschinen M_i und stellen sicher, dass M_i nicht in polynomieller Zeit U_B entscheiden kann
- Nutze dabei, dass die Anzahl der Wörter exponentiell in der Eingabelänge wächst

Grenzen der Diagonalisierung

Konstruktion von B

Wir konstruieren eine Folge von Sprachen $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ so , dass $B = \lim_{i \to \infty} B_i$

- Dazu iterieren wir über alle Turing Maschinen M_i und stellen sicher, dass M_i nicht in polynomieller Zeit U_B entscheiden kann
- Nutze dabei, dass die Anzahl der Wörter exponentiell in der Eingabelänge wächst

Grenzen der Diagonalisierung

Konstruktion von B

Wir fangen an mit $B_0 = \emptyset$. Konstruktion für B_i :

- Wähle n so , dass n größer als alle Strings in B_{i-1}
- Lasse M_i auf Eingabe 1^n genau $2^n/10$ Schritte laufen (Beachte, dass M_i das Orakel B hat!)

Grenzen der Diagonalisierung

Konstruktion von B

Wir fangen an mit $B_0 = \emptyset$. Konstruktion für B_i :

- Wähle n so , dass n größer als alle Strings in B_{i-1}
- Lasse M_i auf Eingabe 1^n genau $2^n/10$ Schritte laufen
  (Beachte, dass M_i das Orakel B hat!)

Grenzen der Diagonalisierung

Konstruktion von B

$B_i = \{11011011, 10, 101, 111, 000111\}$

Orakel

B

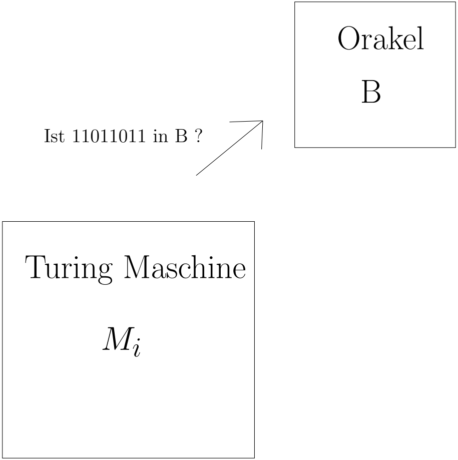
Turing Maschine

M_i

- Das Orakel antwortet konsistent auf dem bisherigen B_i
- Wir merken uns alle Strings der Länge n, die M_i an fragt!

Grenzen der Diagonalisierung
Konstruktion von B

$B_i = \{11011011, 10, 101, 111, 000111\}$

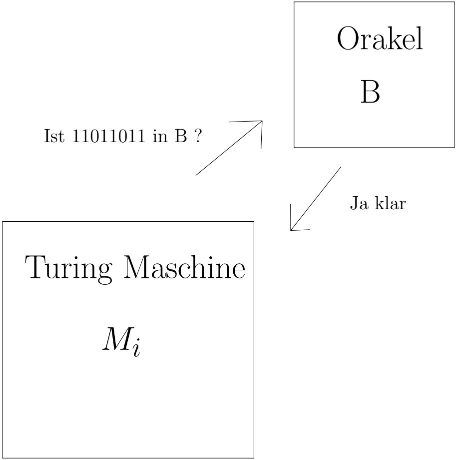


- Das Orakel antwortet konsistent auf dem bisherigen B_i
- Wir merken uns alle Strings der Länge n, die M_i an fragt!

Grenzen der Diagonalisierung

Konstruktion von B

$B_i = \{11011011, 10, 101, 111, 000111\}$



- Das Orakel antwortet konsistent auf dem bisherigen B_i
- Wir merken uns alle Strings der Länge n, die M_i an fragt!

Grenzen der Diagonalisierung
Konstruktion von B

$B_i = \{11011011, 10, 101, 111, 000111\}$

Orakel

B

Turing Maschine

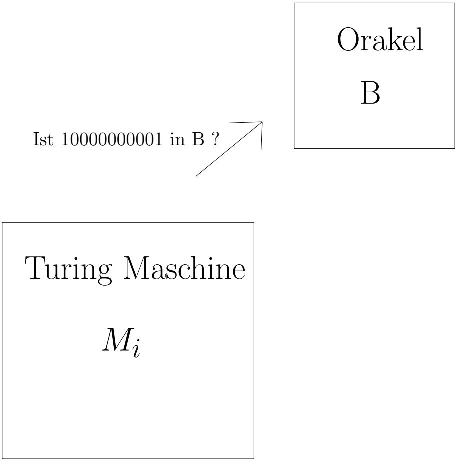
M_i

- Das Orakel antwortet konsistent auf dem bisherigen B_i
- Wir merken uns alle Strings der Länge n, die M_i an fragt!

Grenzen der Diagonalisierung

Konstruktion von B

$B_i = \{11011011, 10, 101, 111, 000111\}$

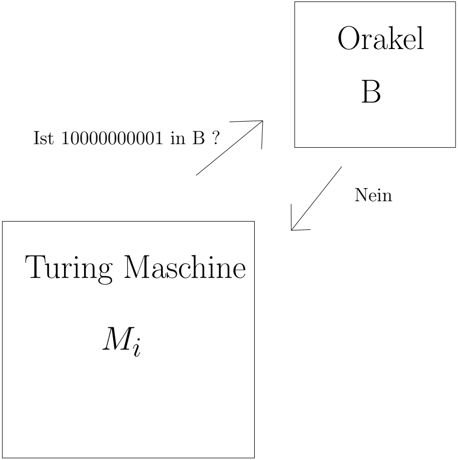


- Das Orakel antwortet konsistent auf dem bisherigen B_i
- Wir merken uns alle Strings der Länge n, die M_i an fragt!

Grenzen der Diagonalisierung

Konstruktion von B

$B_i = \{11011011, 10, 101, 111, 000111\}$



- Das Orakel antwortet konsistent auf dem bisherigen B_i
- Wir merken uns alle Strings der Länge n, die M_i an fragt!

Grenzen der Diagonalisierung

Konstruktion von B

- Wir definieren nun B_{i+1} wie folgt :
- Wenn M_i nicht gehalten hat : $B_{i+1} = B_i$
- ansonsten :
  - M_i akzeptiert 1^n : Wir definieren, dass kein String der Länge n in B ist
  - M_i lehnt ab : Wähle $x \in \{0,1\}^n$, welches nicht von M_i an gefragt wurde und setze $B_{i+1} = B_i \cup \{x\}$
  - warum existiert dieses x?

Grenzen der Diagonalisierung

Konstruktion von B

- Wir definieren nun B_{i+1} wie folgt :
- Wenn M_i nicht gehalten hat : $B_{i+1} = B_i$
- ansonsten :
  - M_i akzeptiert 1^n : Wir definieren, dass kein String der Länge n in B ist
  - M_i lehnt ab : Wähle $x \in \{0, 1\}^n$, welches nicht von M_i an gefragt wurde und setze $B_{i+1} = B_i \cup \{x\}$
  - warum existiert dieses x?

Grenzen der Diagonalisierung

Konstruktion von B

- Wir definieren nun B_{i+1} wie folgt :
- Wenn M_i nicht gehalten hat : $B_{i+1} = B_i$
- ansonsten :
  - M_i akzeptiert 1^n : Wir definieren, dass kein String der Länge n in B ist
  - M_i lehnt ab : Wähle $x \in \{0, 1\}^n$, welches nicht von M_i an gefragt wurde und setze $B_{i+1} = B_i \cup \{x\}$
  - warum existiert dieses x?

Grenzen der Diagonalisierung

Konstruktion von B

- Wir definieren nun B_{i+1} wie folgt :
- Wenn M_i nicht gehalten hat : $B_{i+1} = B_i$
- ansonsten :
  - M_i akzeptiert 1^n : Wir definieren, dass kein String der Länge n in B ist
  - M_i lehnt ab : Wähle $x \in \{0,1\}^n$, welches nicht von M_i an gefragt wurde und setze $B_{i+1} = B_i \cup \{x\}$
  - warum existiert dieses x?

Grenzen der Diagonalisierung

Konstruktion von B

- Wir definieren nun B_{i+1} wie folgt :
- Wenn M_i nicht gehalten hat : $B_{i+1} = B_i$
- ansonsten :
  - M_i akzeptiert 1^n : Wir definieren, dass kein String der Länge n in B ist
  - M_i lehnt ab : Wähle $x \in \{0, 1\}^n$, welches nicht von M_i an gefragt wurde und setze $B_{i+1} = B_i \cup \{x\}$
  - warum existiert dieses x?

Grenzen der Diagonalisierung

Konstruktion von B

- Wir definieren nun B_{i+1} wie folgt :
- Wenn M_i nicht gehalten hat : $B_{i+1} = B_i$
- ansonsten :
  - M_i akzeptiert 1^n : Wir definieren, dass kein String der Länge n in B ist
  - M_i lehnt ab : Wähle $x \in \{0, 1\}^n$, welches nicht von M_i an gefragt wurde und setze $B_{i+1} = B_i \cup \{x\}$
  - warum existiert dieses x?

Grenzen der Diagonalisierung

Beweis Schluss

- Haben oben ein gesehen, dass $U_B \in \mathbf{NP}^B$
- Und für jede polynomiell beschränkte TM M existiert ein i,so dass
  - M = M_i
  - M auf der Eingabe 1^i weniger als $2^i/10$ Schritte benötigt
  - und damit M_i nach Konstruktion die Frage $1^i \in U_B$ falsch beantwortet
- $\Rightarrow U_B \notin \mathbf{P}^B$ und damit $P^B \neq \mathbf{NP}^B$ $\square$

Grenzen der Diagonalisierung

Beweis Schluss

- Haben oben ein gesehen, dass $U_B \in \mathbf{NP}^B$
- Und für jede polynomiell beschränkte TM M existiert ein i,so dass
  - M = M_i
  - M auf der Eingabe 1^i weniger als $2^i/10$ Schritte benötigt
  - und damit M_i nach Konstruktion die Frage $1^i \in U_B$ falsch beantwortet
- $\Rightarrow U_B \notin \mathbf{P}^B$ und damit $P^B \neq \mathbf{NP}^B$ $\square$

Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

Grenzen der Diagonalisierung

Beweis Schluss

- Haben oben ein gesehen, dass $U_B \in \mathbf{NP}^B$
- Und für jede polynomiell beschränkte TM M existiert ein i,so dass
  - M = M_i
  - M auf der Eingabe 1^i weniger als $2^i/10$ Schritte benötigt
  - und damit M_i nach Konstruktion die Frage $1^i \in U_B$ falsch beantwortet
- $\Rightarrow U_B \notin \mathbf{P}^B$ und damit $P^B \neq \mathbf{NP}^B$ $\square$

Grenzen der Diagonalisierung

Beweis Schluss

- Haben oben ein gesehen, dass $U_B \in \mathbf{NP}^B$
- Und für jede polynomiell beschränkte TM M existiert ein i,so dass
  - M = M_i
  - M auf der Eingabe 1^i weniger als $2^i/10$ Schritte benötigt
  - und damit M_i nach Konstruktion die Frage $1^i \in U_B$ falsch beantwortet
- $\Rightarrow U_B \notin \mathbf{P}^B$ und damit $P^B \neq \mathbf{NP}^B$ $\square$

Grenzen der Diagonalisierung

Beweis Schluss

- Haben oben ein gesehen, dass $U_B \in \mathbf{NP}^B$
- Und für jede polynomiell beschränkte TM M existiert ein i,so dass
  - M = M_i
  - M auf der Eingabe 1^i weniger als $2^i/10$ Schritte benötigt
  - und damit M_i nach Konstruktion die Frage $1^i \in U_B$ falsch beantwortet
- $\Rightarrow U_B \notin \mathbf{P}^B$ und damit $P^B \neq \mathbf{NP}^B$ $\square$

Grenzen der Diagonalisierung

Beweis Schluss

- Haben oben ein gesehen, dass $U_B \in \mathbf{NP}^B$
- Und für jede polynomiell beschränkte TM M existiert ein i,so dass
  - M = M_i
  - M auf der Eingabe 1^i weniger als $2^i/10$ Schritte benötigt
  - und damit M_i nach Konstruktion die Frage $1^i \in U_B$ falsch beantwortet
- $\Rightarrow U_B \notin \mathbf{P}^B$ und damit $P^B \neq \mathbf{NP}^B$ □

Gliederung

Diagonalisierung
- Was verstehen wir unter Diagonalisierung?
- Time Hierarchy
- Satz von Ladner
- Orakelmaschinen - Grenzen der Diagonalisierung

Die polynomielle Hierarchie
- Motivation und Beispiele
- Die Klasse **PH**

Motivation und Beispiele

Verallgemeinerung

- bisher die Komplexitätsklassen **P**, **NP**, **coNP**
- es gibt Probleme, die sich nicht mit diesen klassifizieren lassen
- durch Verallgemeinerung dieser Klassen kann eine Reihe weiterer Probleme "eingefangen" werden
- Verallgemeinerung ist die "polynomielle Hierarchie" **PH**

Motivation und Beispiele
Verallgemeinerung

- bisher die Komplexitätsklassen **P**, **NP**, **coNP**
- es gibt Probleme, die sich nicht mit diesen klassifizieren lassen
- durch Verallgemeinerung dieser Klassen kann eine Reihe weiterer Probleme "eingefangen" werden
- Verallgemeinerung ist die "polynomielle Hierarchie" **PH**

Motivation und Beispiele

Verallgemeinerung

- bisher die Komplexitätsklassen **P**, **NP**, **coNP**
- es gibt Probleme, die sich nicht mit diesen klassifizieren lassen
- durch Verallgemeinerung dieser Klassen kann eine Reihe weiterer Probleme "eingefangen" werden
- Verallgemeinerung ist die "polynomielle Hierarchie" **PH**

Motivation und Beispiele

Verallgemeinerung

- bisher die Komplexitätsklassen **P**, **NP**, **coNP**
- es gibt Probleme, die sich nicht mit diesen klassifizieren lassen
- durch Verallgemeinerung dieser Klassen kann eine Reihe weiterer Probleme "eingefangen" werden
- Verallgemeinerung ist die "polynomielle Hierarchie" **PH**

Motivation und Beispiele

Beispiele

Definition INDSET

Sei **INDSET** $= \{\langle G, k\rangle$: Graph G hat ein independent set , welches Größe k hat $\}$

Bekannt : **INDSET** $\in$ **NPC**

Definition EXACTINDSET

Sei **EXACTINDSET** $= \{\langle G, k\rangle$: das größte independent set in G hat Größe genau k$\}$
$=\{\langle G, k\rangle$: $\exists$ independent set der Größe k in G und $\forall$ independent sets in G haben Größe $\leq k\}$

Motivation und Beispiele

Beispiele

Definition INDSET

Sei **INDSET** $= \{\langle G, k\rangle :$ Graph G hat ein independent set , welches Größe k hat $\}$

Bekannt : **INDSET** $\in$ **NPC**

Definition EXACTINDSET

Sei **EXACTINDSET** $= \{\langle G, k\rangle :$ das größte independent set in G hat Größe genau k$\}$
$=\{\langle G, k\rangle : \exists$ independent set der Größe k in G und $\forall$ independent sets in G haben Größe $\leq k\}$

Motivation und Beispiele

Beispiele

Definition INDSET

Sei **INDSET** $= \{\langle G, k\rangle$: Graph G hat ein independent set , welches Größe k hat $\}$

Bekannt : **INDSET** $\in$ **NPC**

Definition EXACTINDSET

Sei **EXACTINDSET** $= \{\langle G, k\rangle$: das größte independent set in G hat Größe genau k$\}$
$=\{\langle G, k\rangle$: $\exists$ independent set der Größe k in G und $\forall$ independent sets in G haben Größe $\leq k\}$

Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

Motivation und Beispiele

Die Klasse $\sum_2^p$

INDSET

Sei **INDSET** $= \{\langle G, k \rangle$: $\exists$ independent set in G, welches Größe k hat $\}$

Wiederholung NP

NP ist die Menge aller Sprachen L für die gilt :
Es gibt eine deterministische polynomielle TM M und ein Polynom q so dass :

$$x \in L \Leftrightarrow \exists u \in \{0,1\}^{q(|x|)} \quad M(x,u) = 1$$

Motivation und Beispiele

Die Klasse $\sum_2^p$

EXACTINDSET

Sei **INDSET** $= \{\langle G, k\rangle$: $\exists$ independent set in G, welches Größe k hat und $\forall$ independent sets in G haben Größe $\leq k\}$

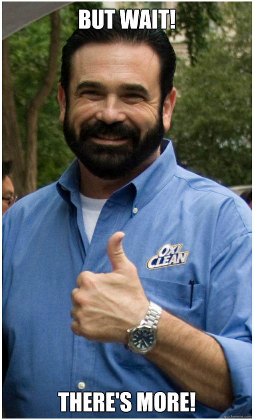
Definition $\sum_2^p$

$\sum_2^p$ ist die Menge aller Sprachen L für die gilt :
Es gibt eine deterministische polynomielle TM M und ein Polynom q so dass :

$$x \in L \Leftrightarrow \exists u \in \{0,1\}^{q(|x|)}\ \forall v \in \{0,1\}^{q(|x|)}\ M(x,u,v) = 1$$

Motivation und Beispiele

Noch mehr Quantoren?



Gliederung

Diagonalisierung
- Was verstehen wir unter Diagonalisierung?
- Time Hierarchy
- Satz von Ladner
- Orakelmaschinen - Grenzen der Diagonalisierung

Die polynomielle Hierarchie
- Motivation und Beispiele
- Die Klasse **PH**

Die Klasse PH

Definition von PH

Definition $\sum_i^p$

$\sum_i^p$ ist die Menge aller Sprachen L für die gilt :
Es gibt deterministische polynomielle TM M und ein Polynom q so dass :

$$x \in L \Leftrightarrow \exists u_1 \in \{0,1\}^{q(|x|)} \forall u_2 \in \{0,1\}^{q(|x|)} \dots \mathcal{Q}_i u_i \in \{0,1\}^{q(|x|)} M(x, u_1, \dots, u_i) = 1$$

wobei $\mathcal{Q}_i$ entweder $\forall$ oder $\exists$ beschreibt, abhängig davon ob i gerade oder ungerade ist

Definition PH

Die polynomielle Hierarchie ist **PH** $= \cup_{i \in \mathbb{N}} \sum_i^p$

Die Klasse PH

Definition von PH

Definition $\sum_i^p$

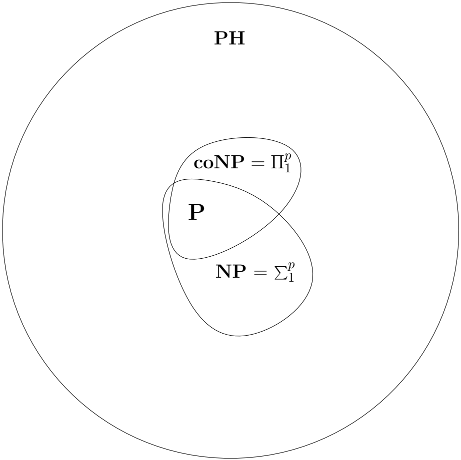
$\sum_i^p$ ist die Menge aller Sprachen L für die gilt :
Es gibt deterministische polynomielle TM M und ein Polynom q so dass :

$$x \in L \Leftrightarrow \exists u_1 \in \{0,1\}^{q(|x|)} \forall u_2 \in \{0,1\}^{q(|x|)} \ldots \mathcal{Q}_i u_i \in \{0,1\}^{q(|x|)} M(x, u_1, \ldots, u_i) = 1$$

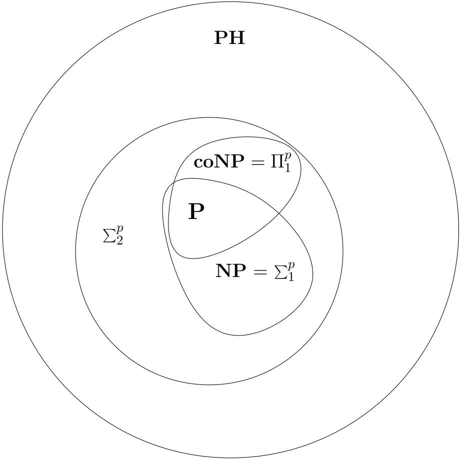
wobei $\mathcal{Q}_i$ entweder $\forall$ oder $\exists$ beschreibt, abhängig davon ob i gerade oder ungerade ist

Definition PH

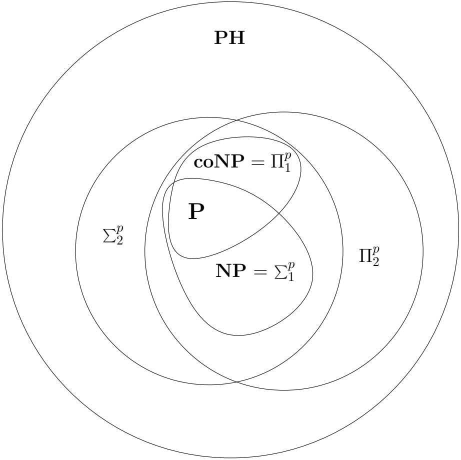
Die polynomielle Hierarchie ist **PH** $= \cup_{i \in \mathbb{N}} \sum_i^p$



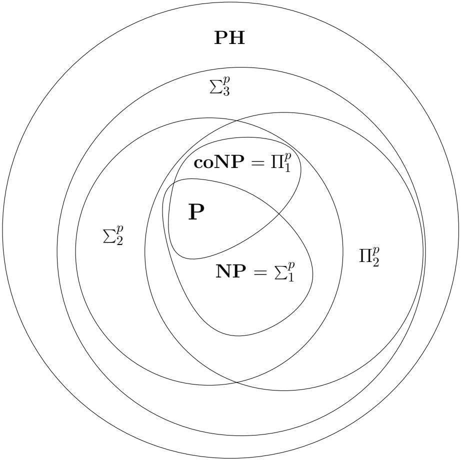
- Man sieht : $\sum_1^p = \mathbf{NP}$
- $\Pi_i^p := co\sum_i^p$
- $\sum_i^p \subseteq \Pi_{i+1}^p \subseteq \sum_{i+2}^p$



- Man sieht : $\sum_1^p = \mathbf{NP}$
- $\Pi_i^p := co\sum_i^p$
- $\sum_i^p \subseteq \Pi_{i+1}^p \subseteq \sum_{i+2}^p$



- Man sieht : $\sum_1^p = \mathbf{NP}$
- $\Pi_i^p := co\sum_i^p$
- $\sum_i^p \subseteq \Pi_{i+1}^p \subseteq \sum_{i+2}^p$



- Man sieht : $\sum_1^p = \mathbf{NP}$
- $\Pi_i^p := co\sum_i^p$
- $\sum_i^p \subseteq \Pi_{i+1}^p \subseteq \sum_{i+2}^p$

Die Klasse PH

Eigenschaften von PH

- Vermutung: $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ und $\mathbf{NP} \neq \mathbf{coNP}$
- Verallgemeinerung: $\sum_i^p \subsetneq \sum_{i+1}^p$ für alle i
- "The polynomial hierarchy does not collapse"

Satz Kollaps von PH und Auswirkungen auf P − NP

- Für alle $i \geq 0$ gilt: $\sum_i^p = \prod_i^p \Rightarrow \mathbf{PH} = \sum_i^p$
- Wenn $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, dann folgt $\mathbf{PH} = \mathbf{P}$

Die Klasse PH

Eigenschaften von PH

- Vermutung: $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ und $\mathbf{NP} \neq \mathbf{coNP}$
- Verallgemeinerung: $\sum_i^p \subsetneq \sum_{i+1}^p$ für alle i
- "The polynomial hierarchy does not collapse"

Satz Kollaps von PH und Auswirkungen auf P – NP

- Für alle $i \geq 0$ gilt: $\quad \sum_i^p = \prod_i^p \quad \Rightarrow \quad \mathbf{PH} = \sum_i^p$
- Wenn $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, dann folgt $\mathbf{PH} = \mathbf{P}$

Die Klasse PH

Eigenschaften von PH

- Vermutung: $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ und $\mathbf{NP} \neq \mathbf{coNP}$
- Verallgemeinerung: $\sum_i^p \subsetneq \sum_{i+1}^p$ für alle i
- "The polynomial hierarchy does not collapse"

Satz Kollaps von PH und Auswirkungen auf $\mathbf{P} - \mathbf{NP}$

- Für alle $i \geq 0$ gilt: $\sum_i^p = \prod_i^p \Rightarrow \mathbf{PH} = \sum_i^p$
- Wenn $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, dann folgt $\mathbf{PH} = \mathbf{P}$

Die Klasse PH

Eigenschaften von PH

- Vermutung: $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ und $\mathbf{NP} \neq \mathbf{coNP}$
- Verallgemeinerung: $\sum_i^p \subsetneq \sum_{i+1}^p$ für alle i
- "The polynomial hierarchy does not collapse"

Satz Kollaps von PH und Auswirkungen auf $\mathbf{P} - \mathbf{NP}$

- Für alle $i \geq 0$ gilt: $\quad \sum_i^p = \prod_i^p \quad \Rightarrow \quad \mathbf{PH} = \sum_i^p$
- Wenn $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, dann folgt $\mathbf{PH} = \mathbf{P}$

Die Klasse PH
Eigenschaften von PH

- Vermutung: $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ und $\mathbf{NP} \neq \mathbf{coNP}$
- Verallgemeinerung: $\sum_i^p \subsetneq \sum_{i+1}^p$ für alle i
- "The polynomial hierarchy does not collapse"

Satz Kollaps von PH und Auswirkungen auf $\mathbf{P} - \mathbf{NP}$

1. Für alle $i \geq 0$ gilt: $\quad \sum_i^p = \prod_i^p \quad \Rightarrow \quad \mathbf{PH} = \sum_i^p$
2. Wenn $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, dann folgt $\mathbf{PH} = \mathbf{P}$

Die Klasse PH
Eigenschaften von PH

- Vermutung: **P** $\neq$ **NP** und **NP** $\neq$ **coNP**
- Verallgemeinerung: $\sum_i^p \subsetneq \sum_{i+1}^p$ für alle i
- "The polynomial hierarchy does not collapse"

Satz Kollaps von PH und Auswirkungen auf P – NP

1. Für alle $i \geq 0$ gilt: $\sum_i^p = \prod_i^p \quad \Rightarrow \quad \mathbf{PH} = \sum_i^p$
2. Wenn $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, dann folgt $\mathbf{PH} = \mathbf{P}$

Die Klasse PH

Beweis

Beweis von $\mathbf{P} = \mathbf{NP} \Rightarrow \mathbf{PH} = \mathbf{P}$

- Sei $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, beweisen über Induktion $\sum_i^p, \prod_i^p \subseteq \mathbf{P}$ für alle i

- IA: $i = 1$, nach Voraussetzung: $\sum_1^p = \mathbf{NP}$, $\prod_1^p = \mathbf{coNP}$ und $\mathbf{P} = \mathbf{coP} = \mathbf{NP} = \mathbf{coNP}$ gilt

- IV: Es gelte $\sum_{i-1}^p \subseteq \mathbf{P}$ für $i - 1 \in \mathbb{N}$
- Anm: $\prod_{i-1}^p$ besteht aus Komplementsprachen der Sprachen in $\sum_{i-1}^p$ **P** ist abgeschlossen unter Komplementbildung $\Rightarrow \prod_{i-1}^p \subseteq \mathbf{P}$ unter IV.

Die Klasse PH

Beweis

Beweis von $\mathbf{P} = \mathbf{NP} \Rightarrow \mathbf{PH} = \mathbf{P}$

- Sei $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, beweisen über Induktion $\sum_i^p, \prod_i^p \subseteq \mathbf{P}$ für alle i
- IA: $i = 1$, nach Voraussetzung: $\sum_1^p = \mathbf{NP}$, $\prod_1^p = \mathbf{coNP}$ und $\mathbf{P} = \mathbf{coP} = \mathbf{NP} = \mathbf{coNP}$ gilt
- IV: Es gelte $\sum_{i-1}^p \subseteq \mathbf{P}$ für $i - 1 \in \mathbb{N}$
- Anm: $\prod_{i-1}^p$ besteht aus Komplementsprachen der Sprachen in $\sum_{i-1}^p$
  $\mathbf{P}$ ist abgeschlossen unter Komplementbildung $\Rightarrow \prod_{i-1}^p \subseteq \mathbf{P}$ unter IV.

Die Klasse PH

Beweis

Beweis von $\mathbf{P} = \mathbf{NP} \Rightarrow \mathbf{PH} = \mathbf{P}$

- Sei $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, beweisen über Induktion $\sum_i^p, \prod_i^p \subseteq \mathbf{P}$ für alle i
- IA: $i = 1$, nach Voraussetzung: $\sum_1^p = \mathbf{NP}$, $\prod_1^p = \mathbf{coNP}$ und $\mathbf{P} = \mathbf{coP} = \mathbf{NP} = \mathbf{coNP}$ gilt
- IV: Es gelte $\sum_{i-1}^p \subseteq \mathbf{P}$ für $i - 1 \in \mathbb{N}$
- Anm: $\prod_{i-1}^p$ besteht aus Komplementsprachen der Sprachen in $\sum_{i-1}^p$ $\mathbf{P}$ ist abgeschlossen unter Komplementbildung $\Rightarrow \prod_{i-1}^p \subseteq \mathbf{P}$ unter IV.

Die Klasse PH

Beweis

Beweis von $\mathbf{P} = \mathbf{NP} \Rightarrow \mathbf{PH} = \mathbf{P}$

- Sei $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, beweisen über Induktion $\sum_i^p, \prod_i^p \subseteq \mathbf{P}$ für alle i
- IA: $i = 1$, nach Voraussetzung: $\sum_1^p = \mathbf{NP}$, $\prod_1^p = \mathbf{coNP}$
und $\mathbf{P} = \mathbf{coP} = \mathbf{NP} = \mathbf{coNP}$ gilt
- IV: Es gelte $\sum_{i-1}^p \subseteq \mathbf{P}$ für $i - 1 \in \mathbb{N}$
- Anm: $\prod_{i-1}^p$ besteht aus Komplementsprachen der Sprachen in $\sum_{i-1}^p$
$\mathbf{P}$ ist abgeschlossen unter Komplementbildung $\Rightarrow \prod_{i-1}^p \subseteq \mathbf{P}$ unter IV.

Die Klasse PH
Beweis

- IS: Sei $L \in \sum_i^p$, dann ex. TM M und Polynom q so, dass

$$x \in L \Leftrightarrow \exists u_1 \in \{0,1\}^{q(|x|)} \forall u_2 \in \{0,1\}^{q(|x|)} \ldots Q_i u_i \in \{0,1\}^{q(|x|)}$$
$$M(x, u_1, u_2, \ldots, u_i) = 1 (Definition)$$

gilt

- Definiere Sprache L'

$$(x, u_1) \in L' \Leftrightarrow \forall u_2 \in \{0,1\}^{q(|x|)} \ldots Q_i u_i \in \{0,1\}^{q(|x|)}$$
$$M(x, u_1, u_2, \ldots u_i) = 1$$

Die Klasse PH

Beweis

- IS: Sei $L \in \sum_i^p$, dann ex. TM M und Polynom q so, dass

$$x \in L \Leftrightarrow \exists u_1 \in \{0,1\}^{q(|x|)} \forall u_2 \in \{0,1\}^{q(|x|)} \dots Q_i u_i \in \{0,1\}^{q(|x|)}$$
$$M(x, u_1, u_2, \dots, u_i) = 1 (\mathit{Definition})$$

gilt

- Definiere Sprache L'

$$(x, u_1) \in L' \Leftrightarrow \forall u_2 \in \{0,1\}^{q(|x|)} \dots Q_i u_i \in \{0,1\}^{q(|x|)}$$
$$M(x, u_1, u_2, \dots u_i) = 1$$

Die Klasse

Beweis

- L' ist in $\prod_{i-1}^{p}$ (für $\overline{L'}$ alle Quantoren und M negieren $\Rightarrow \overline{L'} \in \sum_{i-1}^{p}$)
- Nach IV gilt: $\prod_{i-1}^{p} \in \mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad L' \in \mathbf{P}$
- Damit ex. det. TM M', die L' in polynom. Zeit berechnet
- $$x \in L \Leftrightarrow \exists u_1 \in \{0,1\}^{q(|x|)} M'(x, u_1) = 1$$
- Damit $L \in \mathbf{NP}$ und da $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ vorausgesetzt, folgt $L \in \mathbf{P}$ □

Die Klasse
Beweis

- L' ist in $\prod^p_{i-1}$ (für $\overline{L'}$ alle Quantoren und M negieren $\Rightarrow \overline{L'} \in \sum^p_{i-1}$)
- Nach IV gilt: $\prod^p_{i-1} \in \mathbf{P} \Rightarrow L' \in \mathbf{P}$
- Damit ex. det. TM M', die L' in polynom. Zeit berechnet
- $$x \in L \Leftrightarrow \exists u_1 \in \{0,1\}^{q(|x|)} M'(x, u_1) = 1$$
- Damit $L \in \mathbf{NP}$ und da $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ vorausgesetzt, folgt $L \in \mathbf{P}$ $\square$

Die Klasse

Beweis

- L' ist in $\prod_{i-1}^{p}$ (für $\overline{L'}$ alle Quantoren und M negieren $\Rightarrow \overline{L'} \in \sum_{i-1}^{p}$)
- Nach IV gilt: $\prod_{i-1}^{p} \in \mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad L' \in \mathbf{P}$
- Damit ex. det. TM M', die L' in polynom. Zeit berechnet
- $$x \in L \Leftrightarrow \exists u_1 \in \{0,1\}^{q(|x|)} M'(x, u_1) = 1$$
- Damit $L \in \mathbf{NP}$ und da $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ vorausgesetzt, folgt $L \in \mathbf{P}$ $\square$

Die Klasse

Beweis

- L' ist in $\prod_{i-1}^{p}$ (für $\overline{L'}$ alle Quantoren und M negieren $\Rightarrow \overline{L'} \in \sum_{i-1}^{p}$)
- Nach IV gilt: $\prod_{i-1}^{p} \in \mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad L' \in \mathbf{P}$
- Damit ex. det. TM M', die L' in polynom. Zeit berechnet
- $$x \in L \Leftrightarrow \exists u_1 \in \{0,1\}^{q(|x|)} M'(x, u_1) = 1$$
- Damit $L \in \mathbf{NP}$ und da $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ vorausgesetzt, folgt $L \in \mathbf{P}$ □

Die Klasse

Beweis

- L' ist in $\prod_{i-1}^{p}$ (für $\overline{L'}$ alle Quantoren und M negieren $\Rightarrow \overline{L'} \in \sum_{i-1}^{p}$)
- Nach IV gilt: $\prod_{i-1}^{p} \in \mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad L' \in \mathbf{P}$
- Damit ex. det. TM M', die L' in polynom. Zeit berechnet
- $$x \in L \Leftrightarrow \exists u_1 \in \{0,1\}^{q(|x|)} M'(x, u_1) = 1$$
- Damit $L \in \mathbf{NP}$ und da $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ vorausgesetzt, folgt $L \in \mathbf{P}$ $\square$

Die Klasse PH

PH Vollständigkeit

Wir definieren **PH** Vollständigkeit analog zur **NP** Vollständigkeit und erhalten damit :

Überlegung zur PH Vollständigkeit

Wenn eine **PH**-vollständige Sprache L existiert dann existiert ein i so dass $\mathbf{PH} = \sum_i^p$

Beweis :

- Da $\mathbf{PH} = \cup_{k \in \mathbb{N}} \sum_k^p \; \exists i$ so dass $L \in \sum_i^p$
- Können durch **PH** Vollständigkeit jedes $L' \in \mathbf{PH}$ in pol. Zeit auf L reduzieren
- und damit also auch $L' \in \sum_i^p$ $\square$

Wir definieren **PH** Vollständigkeit analog zur **NP** Vollständigkeit und erhalten damit :

Überlegung zur PH Vollständigkeit

Wenn eine **PH**-vollständige Sprache L existiert dann existiert ein i so dass **PH** $= \Sigma_i^p$

Beweis :

- Da **PH** $= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Sigma_k^p$ $\exists i$ so dass $L \in \Sigma_i^p$
- Können durch **PH** Vollständigkeit jedes $L' \in$ **PH** in pol. Zeit auf L reduzieren
- und damit also auch $L' \in \Sigma_i^p$ $\square$

Die Klasse PH

PH Vollständigkeit

Wir definieren **PH** Vollständigkeit analog zur **NP** Vollständigkeit und erhalten damit :

Überlegung zur PH Vollständigkeit

Wenn eine **PH**-vollständige Sprache L existiert dann existiert ein i so dass **PH** $= \sum_i^p$

Beweis :

- Da **PH** $= \cup_{k \in \mathbb{N}} \sum_k^p$ $\exists i$ so dass $L \in \sum_i^p$
- Können durch **PH** Vollständigkeit jedes $L' \in$ **PH** in pol. Zeit auf L reduzieren
- und damit also auch $L' \in \sum_i^p$ $\square$

Die Klasse PH

PH Vollständigkeit

Wir definieren **PH** Vollständigkeit analog zur **NP** Vollständigkeit und erhalten damit :

Überlegung zur PH Vollständigkeit

Wenn eine **PH**-vollständige Sprache L existiert dann existiert ein i so dass **PH** $= \sum_i^p$

Beweis :

- Da **PH** $= \cup_{k \in \mathbb{N}} \sum_k^p \; \exists i$ so dass $L \in \sum_i^p$
- Können durch **PH** Vollständigkeit jedes $L' \in$ **PH** in pol. Zeit auf L reduzieren
- und damit also auch $L' \in \sum_i^p$ □

Die Klasse PH

PH Vollständigkeit

Wir definieren **PH** Vollständigkeit analog zur **NP** Vollständigkeit und erhalten damit :

Überlegung zur PH Vollständigkeit

Wenn eine **PH**-vollständige Sprache L existiert dann existiert ein i so dass **PH** $= \sum_i^p$

Beweis :

- Da **PH** $= \cup_{k \in \mathbb{N}} \sum_k^p \; \exists i$ so dass $L \in \sum_i^p$
- Können durch **PH** Vollständigkeit jedes $L' \in$ **PH** in pol. Zeit auf L reduzieren
- und damit also auch $L' \in \sum_i^p$ $\square$

Zusammenfassung

Was wir heute gelernt haben :

- Was Diagonalisierung ist
- Es gibt eine Hierarchie, die von der verfügbaren Rechenzeit abhängt
- Existenz von **NP** – *intermediate* Problemen
- Diagonalisierung allein kann die **P** – **NP** Frage nicht lösen
- **P** – **NP** lassen sich zur polynomiellen Hierarchie verallgemeinern

- Bild Anfangsseite : https://jeremykun.files.wordpress.com/2012/02/pvsnp.jpg
- Einleitung Halteproblem : http://s1060.photobucket.com/user/LandruBek/media/dkos/bitter-b8.jpg.html