

Diagonalisierung und polynomielle Hierarchie

Corvin Paul, Matthias Schimek

Institut für Theoretische Informatik - Algorithmik I

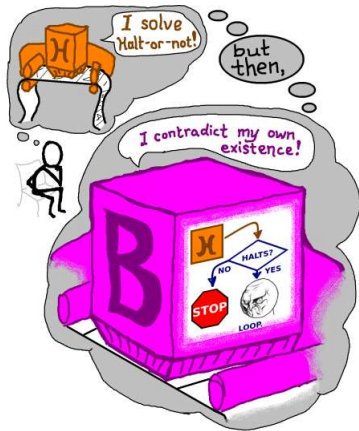


P=NP?

A photograph of the text "P=NP?" written in glowing neon lights against a dark, textured wooden background. The neon is bright white/yellow, and the background is dark brown with visible wood grain and some lighter patches.

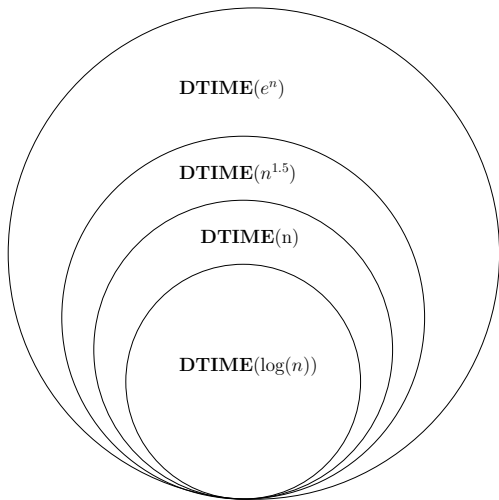
Diagonalisierung als Beweistechnik

Diagonalisierung : Was ist das eigentlich?

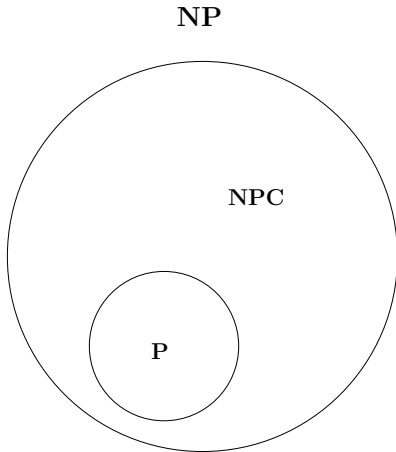


Diagonalisierung als Beweistechnik

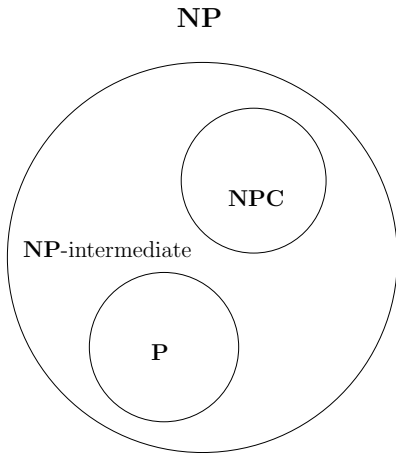
Eine Hierarchie von Komplexitätsklassen



P oder NPC : gibt es noch mehr in NP?



P oder NPC : gibt es noch mehr in NP?



Diagonalisierung als Beweistechnik

Grenzen der Diagonalisierung

- Orakelmaschinen und die P, NP Frage

- Verallgemeinerung von $P = NP$
- Kollabiert die PH ?

- Verallgemeinerung von $P = NP$
- Kollabiert die PH ?

Diagonalisierung

Was verstehen wir unter Diagonalisierung?

Time Hierarchy

Satz von Ladner

Orakelmaschinen - Grenzen der Diagonalisierung

Die polynomielle Hierarchie

Motivation und Beispiele

Die Klasse **PH**

Diagonalisierung

Was verstehen wir unter Diagonalisierung?

Time Hierarchy

Satz von Ladner

Orakelmaschinen - Grenzen der Diagonalisierung

Die polynomielle Hierarchie

Motivation und Beispiele

Die Klasse **PH**

Diagonalisierung

Was verstehen wir darunter?

- Unentscheidbarkeit des Halteproblems
- Diagonalisierung nicht immer "schön" zu sehen
- In späteren Beweisen gewisse Abstraktion vom "Diagonalprinzip"

| $w \in \{0,1\}^*$ | Gödelnummer | | | | |
|-------------------|-------------|-------|-------|-------|-------|
| | w_0 | w_1 | w_2 | w_3 | w_4 |
| w_0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| w_1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| w_2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| w_3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| w_4 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

Diagonalisierung

Was verstehen wir darunter?

- Unentscheidbarkeit des Halteproblems
- Diagonalisierung nicht immer "schön" zu sehen
- In späteren Beweisen gewisse Abstraktion vom "Diagonalprinzip"

| $w \in \{0,1\}^*$ | Gödelnummer | | | | |
|-------------------|-------------|-------|-------|-------|-------|
| | w_0 | w_1 | w_2 | w_3 | w_4 |
| w_0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| w_1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| w_2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| w_3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| w_4 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

Diagonalisierung

Was verstehen wir darunter?

- Unentscheidbarkeit des Halteproblems
- Diagonalisierung nicht immer "schön" zu sehen
- In späteren Beweisen gewisse Abstraktion vom "Diagonalprinzip"

| $w \in \{0,1\}^*$ | Gödelnummer | | | | |
|-------------------|-------------|-------|-------|-------|-------|
| | w_0 | w_1 | w_2 | w_3 | w_4 |
| w_0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| w_1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| w_2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| w_3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| w_4 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

Diagonalisierung

Was verstehen wir darunter?

Was ist Diagonalisierung

Als Diagonalisierung wird (in der Informatik) ein Beweis bezeichnet, der nur auf den beiden folgenden Eigenschaften von TM aufbaut.

1. Die Existenz einer Repräsentation von TM durch Zeichenketten (Gödelnummer)
2. Die Fähigkeit eine andere TM mit geringem zusätzlichen Zeit- oder Platzbedarf zu simulieren (Universelle TM)

Diagonalisierung

Was verstehen wir darunter?

Was ist Diagonalisierung

Als Diagonalisierung wird (in der Informatik) ein Beweis bezeichnet, der nur auf den beiden folgenden Eigenschaften von TM aufbaut.

1. Die Existenz einer Repräsentation von TM durch Zeichenketten (Gödelnummer)
2. Die Fähigkeit eine andere TM mit geringem zusätzlichen Zeit- oder Platzbedarf zu simulieren (Universelle TM)

Diagonalisierung

Was verstehen wir darunter?

Was ist Diagonalisierung

Als Diagonalisierung wird (in der Informatik) ein Beweis bezeichnet, der nur auf den beiden folgenden Eigenschaften von TM aufbaut.

1. Die Existenz einer Repräsentation von TM durch Zeichenketten (Gödelnummer)
2. Die Fähigkeit eine andere TM mit geringem zusätzlichen Zeit- oder Platzbedarf zu simulieren (Universelle TM)

Diagonalisierung

Was verstehen wir unter Diagonalisierung?

Time Hierarchy

Satz von Ladner

Orakelmaschinen - Grenzen der Diagonalisierung

Die polynomielle Hierarchie

Motivation und Beispiele

Die Klasse **PH**

Wiederholung :

- Für $i \in \mathbb{N}$ beschreibt i die TM M_i
- Jede TM wird von unendlich vielen $i \in \mathbb{N}$ beschrieben
- Es existiert eine universelle TM U , die jede TM mit logarithmischem Overhead simulieren kann

Wiederholung :

- Für $i \in \mathbb{N}$ beschreibt i die TM M_i
- Jede TM wird von unendlich vielen $i \in \mathbb{N}$ beschrieben
- Es existiert eine universelle TM U , die jede TM mit logarithmischem Overhead simulieren kann

Wiederholung :

- Für $i \in \mathbb{N}$ beschreibt i die TM M_i
- Jede TM wird von unendlich vielen $i \in \mathbb{N}$ beschrieben
- Es existiert eine universelle TM U , die jede TM mit logarithmischem Overhead simulieren kann

Universelle TM

TM M_i läuft bei Eingabe x in $\mathcal{O}(f(n)) \Rightarrow$ TM U läuft bei Eingabe i, x in $\mathcal{O}(f(n) \log(f(n)))$

Definition Time-constructible functions

Wir nennen eine Funktion f time-constructible, falls gilt :
 $f(n)$ ist in $\mathcal{O}(f(n))$ berechenbar.

Definition DTIME

$\text{DTIME}(f(n)) = \{ L \mid \exists \text{ deterministische Turingmaschine, die } L \text{ in } \mathcal{O}(f(n)) \text{ entscheidet} \}$

Definition Time-constructible functions

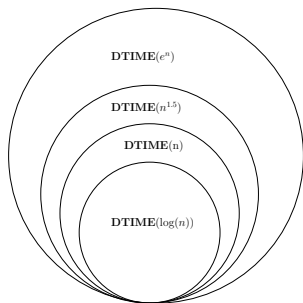
Wir nennen eine Funktion f time-constructible, falls gilt :
 $f(n)$ ist in $\mathcal{O}(f(n))$ berechenbar.

Definition DTIME

DTIME $(f(n)) = \{ L \mid \exists \text{ deterministische Turingmaschine , die } L \text{ in } \mathcal{O}(f(n)) \text{ entscheidet} \}$

Satz: Time Hierarchy Theorem, 65

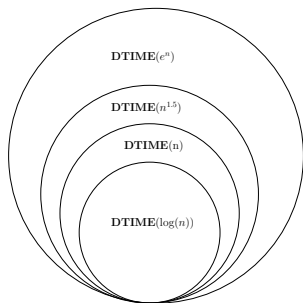
Seien f, g time-constructible mit $f(n) \log(f(n)) \in o(g(n))$, dann gilt
 $\text{DTIME}(f(n)) \subsetneq \text{DTIME}(g(n))$



Frage : Warum brauchen wir den Faktor $\log(f(n))$?

Satz: Time Hierarchy Theorem, 65

Seien f, g time-constructible mit $f(n) \log(f(n)) \in o(g(n))$, dann gilt
 $\text{DTIME}(f(n)) \subsetneq \text{DTIME}(g(n))$



Frage : Warum brauchen wir den Faktor $\log(f(n))$?

Wir zeigen $\mathbf{DTIME}(n) \subsetneq \mathbf{DTIME}(n^{1.5})$

Definition Turing Maschine D

Bei Eingabe x : Simuliere die TM M_x mit Eingabe x genau für $|x|^{1.4}$ Schritte. Danach gebe folgendes aus :

$$D(x) = \begin{cases} \overline{M_x(x)} & \text{falls die Simulation eine Ausgabe hatte} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei $L = \{x \mid D(x) = 1\}$ die von D erzeugte Sprache

Wir zeigen $\mathbf{DTIME}(n) \subsetneq \mathbf{DTIME}(n^{1.5})$

Definition Turing Maschine D

Bei Eingabe x : Simuliere die TM M_x mit Eingabe x genau für $|x|^{1.4}$ Schritte. Danach gebe folgendes aus :

$$D(x) = \begin{cases} \overline{M_x(x)} & \text{falls die Simulation eine Ausgabe hatte} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei $L = \{x \mid D(x) = 1\}$ die von D erzeugte Sprache

Time Hierarchy

Beweis det. Time Hierarchy

Behauptung

$L \in \mathbf{DTIME}(n^{1.5})$ und $L \notin \mathbf{DTIME}(n)$

- Wir nehmen an , dass $L \in \mathbf{DTIME}(n)$
- $\Rightarrow \exists$ Turing Maschine M , die L entscheidet
($\Leftrightarrow \forall x \in \{0,1\}^* D(x) = M(x)$) und für Eingabe x höchstens $c|x|$ Schritte benötigt. (c ist konstant)
- Wir konstruieren Widerspruch , indem wir D eine Gödelnummer x mit $M_x = M$ als Eingabe geben.

Behauptung

$L \in \mathbf{DTIME}(n^{1.5})$ und $L \notin \mathbf{DTIME}(n)$

- Wir nehmen an , dass $L \in \mathbf{DTIME}(n)$
- $\Rightarrow \exists$ Turing Maschine M , die L entscheidet
($\Leftrightarrow \forall x \in \{0, 1\}^* D(x) = M(x)$) und für Eingabe x höchstens $c|x|$ Schritte benötigt. (c ist konstant)
- Wir konstruieren Widerspruch , indem wir D eine Gödelnummer x mit $M_x = M$ als Eingabe geben.

Behauptung

$L \in \mathbf{DTIME}(n^{1.5})$ und $L \notin \mathbf{DTIME}(n)$

- Wir nehmen an , dass $L \in \mathbf{DTIME}(n)$
- $\Rightarrow \exists$ Turing Maschine M , die L entscheidet
($\Leftrightarrow \forall x \in \{0, 1\}^* D(x) = M(x)$) und für Eingabe x höchstens $c|x|$ Schritte benötigt. (c ist konstant)
- Wir konstruieren Widerspruch , indem wir D eine Gödelnummer x mit $M_x = M$ als Eingabe geben.

Behauptung

$L \in \mathbf{DTIME}(n^{1.5})$ und $L \notin \mathbf{DTIME}(n)$

- Wir nehmen an , dass $L \in \mathbf{DTIME}(n)$
- $\Rightarrow \exists$ Turing Maschine M , die L entscheidet
($\Leftrightarrow \forall x \in \{0, 1\}^* D(x) = M(x)$) und für Eingabe x höchstens $c|x|$ Schritte benötigt. (c ist konstant)
- Wir konstruieren Widerspruch , indem wir D eine Gödelnummer x mit $M_x = M$ als Eingabe geben.

Definition Turing Maschine D

Bei Eingabe x : Simuliere die TM M_x mit Eingabe x genau für $|x|^{1.4}$ Schritte. Danach gebe das invertierte Ergebniss von M_x aus

- Wollen $|x|$ groß genug, dass D für M_x eine Ausgabe erhält !
- M simuliert auf U läuft in $c|x| \log(|x|)$
- Wir wählen dazu n_0 so groß, dass $\forall n \geq n_0$ gilt : $n^{1.4} > cn \log(n)$
- Nun wählen wir eine Gödelnummer x , so dass $|x| > n_0$ und $M_x = M$
- Damit läuft M_x in der Simulation in D komplett durch und D invertiert das Ergebniss
- Nun gilt $D(x) \neq M(x)$ □
- Beweis ähnlich auf allgemeinen Fall übertragbar

Definition Turing Maschine D

Bei Eingabe x : Simuliere die TM M_x mit Eingabe x genau für $|x|^{1.4}$ Schritte. Danach gebe das invertierte Ergebniss von M_x aus

- Wollen $|x|$ groß genug, dass D für M_x eine Ausgabe erhält !
- M simuliert auf U läuft in $c|x| \log(|x|)$
- Wir wählen dazu n_0 so groß, dass $\forall n \geq n_0$ gilt : $n^{1.4} > cn \log(n)$
- Nun wählen wir eine Gödelnummer x , so dass $|x| > n_0$ und $M_x = M$
- Damit läuft M_x in der Simulation in D komplett durch und D invertiert das Ergebniss
- Nun gilt $D(x) \neq M(x)$ □
- Beweis ähnlich auf allgemeinen Fall übertragbar

Definition Turing Maschine D

Bei Eingabe x : Simuliere die TM M_x mit Eingabe x genau für $|x|^{1.4}$ Schritte. Danach gebe das invertierte Ergebniss von M_x aus

- Wollen $|x|$ groß genug, dass D für M_x eine Ausgabe erhält !
- M simuliert auf U läuft in $c|x| \log(|x|)$
- Wir wählen dazu n_0 so groß, dass $\forall n \geq n_0$ gilt : $n^{1.4} > cn \log(n)$
- Nun wählen wir eine Gödelnummer x , so dass $|x| > n_0$ und $M_x = M$
- Damit läuft M_x in der Simulation in D komplett durch und D invertiert das Ergebniss
- Nun gilt $D(x) \neq M(x)$ □
- Beweis ähnlich auf allgemeinen Fall übertragbar

Definition Turing Maschine D

Bei Eingabe x : Simuliere die TM M_x mit Eingabe x genau für $|x|^{1.4}$ Schritte. Danach gebe das invertierte Ergebniss von M_x aus

- Wollen $|x|$ groß genug, dass D für M_x eine Ausgabe erhält !
- M simuliert auf U läuft in $c|x| \log(|x|)$
- Wir wählen dazu n_0 so groß, dass $\forall n \geq n_0$ gilt : $n^{1.4} > cn \log(n)$
- Nun wählen wir eine Gödelnummer x , so dass $|x| > n_0$ und $M_x = M$
- Damit läuft M_x in der Simulation in D komplett durch und D invertiert das Ergebniss
- Nun gilt $D(x) \neq M(x)$
- Beweis ähnlich auf allgemeinen Fall übertragbar



Definition Turing Maschine D

Bei Eingabe x : Simuliere die TM M_x mit Eingabe x genau für $|x|^{1.4}$ Schritte. Danach gebe das invertierte Ergebniss von M_x aus

- Wollen $|x|$ groß genug, dass D für M_x eine Ausgabe erhält !
- M simuliert auf U läuft in $c|x| \log(|x|)$
- Wir wählen dazu n_0 so groß, dass $\forall n \geq n_0$ gilt : $n^{1.4} > cn \log(n)$
- Nun wählen wir eine Gödelnummer x , so dass $|x| > n_0$ und $M_x = M$
- Damit läuft M_x in der Simulation in D komplett durch und D invertiert das Ergebniss
- Nun gilt $D(x) \neq M(x)$
- Beweis ähnlich auf allgemeinen Fall übertragbar



Definition Turing Maschine D

Bei Eingabe x : Simuliere die TM M_x mit Eingabe x genau für $|x|^{1.4}$ Schritte. Danach gebe das invertierte Ergebniss von M_x aus

- Wollen $|x|$ groß genug, dass D für M_x eine Ausgabe erhält !
- M simuliert auf U läuft in $c|x| \log(|x|)$
- Wir wählen dazu n_0 so groß, dass $\forall n \geq n_0$ gilt : $n^{1.4} > cn \log(n)$
- Nun wählen wir eine Gödelnummer x , so dass $|x| > n_0$ und $M_x = M$
- Damit läuft M_x in der Simulation in D komplett durch und D invertiert das Ergebniss
- Nun gilt $D(x) \neq M(x)$ □
- Beweis ähnlich auf allgemeinen Fall übertragbar

Definition Turing Maschine D

Bei Eingabe x : Simuliere die TM M_x mit Eingabe x genau für $|x|^{1.4}$ Schritte. Danach gebe das invertierte Ergebniss von M_x aus

- Wollen $|x|$ groß genug, dass D für M_x eine Ausgabe erhält !
- M simuliert auf U läuft in $c|x| \log(|x|)$
- Wir wählen dazu n_0 so groß, dass $\forall n \geq n_0$ gilt : $n^{1.4} > cn \log(n)$
- Nun wählen wir eine Gödelnummer x , so dass $|x| > n_0$ und $M_x = M$
- Damit läuft M_x in der Simulation in D komplett durch und D invertiert das Ergebniss
- Nun gilt $D(x) \neq M(x)$
- Beweis ähnlich auf allgemeinen Fall übertragbar



Diagonalisierung

Was verstehen wir unter Diagonalisierung?

Time Hierarchy

Satz von Ladner

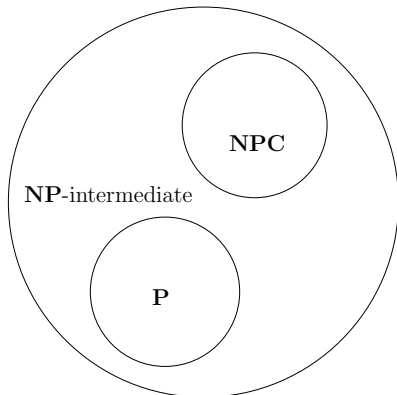
Orakelmaschinen - Grenzen der Diagonalisierung

Die polynomielle Hierarchie

Motivation und Beispiele

Die Klasse **PH**

NP



Frage : Gibt es **NP** Probleme , die nicht **NP**-vollständig sind , aber auch nicht in **P** liegen?

Satz von Ladner

NP-intermediate Probleme

Mögliche Kandidaten :

- Graphisomorphie (kommt in Vortrag 7)
- Faktorisierungsproblem
- Kein "natürliches" Problem bekannt

aber,

Satz von Ladner

Behauptung

Existenz einer NP-intermediate Sprache, Ladner, 75

Wenn $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ dann gilt :

Es existiert eine Sprache $L \in \mathbf{NP} \setminus \mathbf{P}$ die nicht \mathbf{NP} -vollständig ist

Satz von Ladner

Beweisidee

Konstruieren Sprache mit diesen Eigenschaften und zeigen, dass sie in **NP** - intermediate ist, falls **P** \neq **NP** :

Die Sprache SAT_H

Für eine Funktion $H : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definieren wir :

$$\text{SAT}_H = \{ \psi 01^{n^{H(n)}} : \psi \in \text{SAT} \text{ und } n = |\psi| \}$$

Beispiel für SAT_H

Für $H(n) = n - 1$ und $\psi = a \wedge b$ gilt :

$$(a \wedge b) 01^{3^2} = (a \wedge b) 0111111111 \in \text{SAT}_H$$

Satz von Ladner

Beweisidee

Konstruieren Sprache mit diesen Eigenschaften und zeigen, dass sie in **NP** - intermediate ist, falls **P** \neq **NP** :

Die Sprache SAT_H

Für eine Funktion $H : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definieren wir :

$$\text{SAT}_H = \{ \psi 01^{n^{H(n)}} : \psi \in \text{SAT} \text{ und } n = |\psi| \}$$

Beispiel für SAT_H

Für $H(n) = n - 1$ und $\psi = a \wedge b$ gilt :

$$(a \wedge b) 01^{3^2} = (a \wedge b) 0111111111 \in \text{SAT}_H$$

Satz von Ladner

Beweisidee

Konstruieren Sprache mit diesen Eigenschaften und zeigen, dass sie in **NP** - intermediate ist, falls **P** \neq **NP** :

Die Sprache SAT_H

Für eine Funktion $H : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definieren wir :

$$\text{SAT}_H = \{\psi 01^{n^{H(n)}} : \psi \in \text{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$$

Beispiel für SAT_H

Für $H(n) = n - 1$ und $\psi = a \wedge b$ gilt :

$$(a \wedge b) 01^{3^2} = (a \wedge b) 0111111111 \in \text{SAT}_H$$

Definition von H

- Betrachte die TM $M_1, M_2, \dots, M_{\lfloor \log(\log(n)) \rfloor}$.
- Wähle unter diesen die TM M_i mit kleinster Gödelnummer i , welche für alle $|x| \leq \log(n)$ $\text{SAT}_H(x)$ in $i|x|^i$ Schritten berechnet
- Setze $H(n) = i$.
- Falls eine solche TM nicht existiert, setze $H(n) = \log(\log(n))$

Gewähltes H erfüllt die folgenden Eigenschaften

$\text{SAT}_H \in \mathbf{P} \Leftrightarrow H(n) \in O(1)$ (also $H(n) \leq C$ für alle n)
und damit insbesondere $\lim_{n \rightarrow \infty} H(n) = \infty$ für $\text{SAT}_H \notin \mathbf{P}$

- H erfüllt diese und ist polynomiell berechenbar.
- (ohne Beweis)

Satz von Ladner

Beweis : Wahl von H

Definition von H

- Betrachte die TM $M_1, M_2, \dots, M_{\lfloor \log(\log(n)) \rfloor}$.
- Wähle unter diesen die TM M_i mit kleinster Gödelnummer i , welche für alle $|x| \leq \log(n)$ **SAT** $_H(x)$ in $i|x|^i$ Schritten berechnet
- Setze $H(n) = i$.
- Falls eine solche TM nicht existiert, setze $H(n) = \log(\log(n))$

Gewähltes H erfüllt die folgenden Eigenschaften

SAT $_H \in \mathbf{P} \Leftrightarrow H(n) \in O(1)$ (also $H(n) \leq C$ für alle n)
und damit insbesondere $\lim_{n \rightarrow \infty} H(n) = \infty$ für **SAT** $_H \notin \mathbf{P}$

- H erfüllt diese und ist polynomiell berechenbar.
- (ohne Beweis)

Definition von H

- Betrachte die TM $M_1, M_2, \dots, M_{\lfloor \log(\log(n)) \rfloor}$.
- Wähle unter diesen die TM M_i mit kleinster Gödelnummer i , welche für alle $|x| \leq \log(n)$ **SAT** $_H(x)$ in $i|x|^i$ Schritten berechnet
- Setze $H(n) = i$.
- Falls eine solche TM nicht existiert, setze $H(n) = \log(\log(n))$

Gewähltes H erfüllt die folgenden Eigenschaften

SAT $_H \in \mathbf{P} \Leftrightarrow H(n) \in O(1)$ (also $H(n) \leq C$ für alle n)
und damit insbesondere $\lim_{n \rightarrow \infty} H(n) = \infty$ für **SAT** $_H \notin \mathbf{P}$

- H erfüllt diese und ist polynomiell berechenbar.
- (ohne Beweis)

Beweis von Ladner

SAT_H weder in P noch NP-complete

Definition von SAT_H

$$\text{SAT}_H = \{\psi 01^{n^{H(n)}} : \psi \in \text{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$$

Gewähltes H erfüllt die folgenden Eigenschaften

$$\text{SAT}_H \in \mathbf{P} \Leftrightarrow H(n) \in O(1) \text{ (also } H(n) \leq C \text{ für alle } n)$$

SAT_H ist nicht in P

- Angenommen $\text{SAT}_H \in \mathbf{P} \Rightarrow H(n) \leq C$, C Konstante
- SAT_H ist also SAT mit höchstens polynomiell vielen angehängten 1en
- SAT kann somit durch dieselbe TM wie SAT_H gelöst werden
 $\Rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{NP}$

Beweis von Ladner

SAT_H weder in P noch NP-complete

Definition von SAT_H

$$\text{SAT}_H = \{\psi 01^{n^{H(n)}} : \psi \in \text{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$$

Gewähltes H erfüllt die folgenden Eigenschaften

$$\text{SAT}_H \in \mathbf{P} \Leftrightarrow H(n) \in O(1) \text{ (also } H(n) \leq C \text{ für alle } n)$$

SAT_H ist nicht in P

- Angenommen $\text{SAT}_H \in \mathbf{P} \Rightarrow H(n) \leq C$, C Konstante
- SAT_H ist also SAT mit höchstens polynomiell vielen angehängten 1en
- SAT kann somit durch dieselbe TM wie SAT_H gelöst werden
 $\Rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{NP}$

Beweis von Ladner

SAT_H weder in \mathbf{P} noch \mathbf{NP} -complete

Definition von SAT_H

$$\text{SAT}_H = \{\psi 01^{n^{H(n)}} : \psi \in \mathbf{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$$

Gewähltes H erfüllt die folgenden Eigenschaften

$$\text{SAT}_H \in \mathbf{P} \Leftrightarrow H(n) \in O(1) \text{ (also } H(n) \leq C \text{ für alle } n)$$

SAT_H ist nicht in \mathbf{P}

- Angenommen $\text{SAT}_H \in \mathbf{P} \Rightarrow H(n) \leq C$, C Konstante
- SAT_H ist also \mathbf{SAT} mit höchstens polynomiell vielen angehängten 1en
- \mathbf{SAT} kann somit durch dieselbe TM wie SAT_H gelöst werden
 $\Rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{NP}$

Beweis von Ladner

SAT_H weder in P noch NP-complete

Definition von SAT_H

$$\text{SAT}_H = \{\psi 01^{n^{H(n)}} : \psi \in \text{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$$

Gewähltes H erfüllt die folgenden Eigenschaften

$$\text{SAT}_H \in \mathbf{P} \Leftrightarrow H(n) \in O(1) \text{ (also } H(n) \leq C \text{ für alle } n)$$

SAT_H ist nicht in P

- Angenommen $\text{SAT}_H \in \mathbf{P} \Rightarrow H(n) \leq C$, C Konstante
- SAT_H ist also SAT mit höchstens polynomiell vielen angehängten 1en
- SAT kann somit durch dieselbe TM wie SAT_H gelöst werden
 $\Rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{NP}$

Beweis von Ladner

SAT_H weder in \mathbf{P} noch \mathbf{NP} -complete

Definition von SAT_H

$$\text{SAT}_H = \{\psi 01^{n^{H(n)}} : \psi \in \text{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$$

Gewähltes H erfüllt die folgenden Eigenschaften

$$\text{SAT}_H \in \mathbf{P} \Leftrightarrow H(n) \in O(1) \text{ (also } H(n) \leq C \text{ für alle } n)$$

SAT_H ist nicht in \mathbf{P}

- Angenommen $\text{SAT}_H \in \mathbf{P} \Rightarrow H(n) \leq C$, C Konstante
- SAT_H ist also SAT mit höchstens polynomiell vielen angehängten 1en
- SAT kann somit durch dieselbe TM wie SAT_H gelöst werden
 $\Rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{NP}$

Beweis von Ladner

SAT_H weder in P noch NP-complete

Definition von SAT_H

$$\text{SAT}_H = \{\psi 01^{n^{H(n)}} : \psi \in \text{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$$

- Angenommen $\text{SAT}_H \in \text{NPC} \Rightarrow$ es existiert poly. Reduktion f von SAT auf SAT_H .
- Da $\text{SAT}_H \notin \text{P}$ geht $H(n)$ gegen ∞
- SAT-Instanz φ wird mit f auf SAT_H -Instanz der Form $\psi 01^{\psi^{H(|\psi|)}}$ abgebildet.
- $|f(\varphi)| = |\psi| + |\psi|^{H(|\psi|)}$

Beweis von Ladner

SAT_H weder in \mathbf{P} noch \mathbf{NP} -complete

Definition von SAT_H

$$\text{SAT}_H = \{\psi 01^{n^{H(n)}} : \psi \in \text{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$$

SAT_H ist nicht in \mathbf{NPC}

- Angenommen $\text{SAT}_H \in \mathbf{NPC} \Rightarrow$ es existiert poly. Reduktion f von SAT auf SAT_H .
- Da $\text{SAT}_H \notin \mathbf{P}$ geht $H(n)$ gegen ∞
- SAT -Instanz φ wird mit f auf SAT_H -Instanz der Form $\psi 01^{\psi^{H(|\psi|)}}$ abgebildet.
- $|f(\varphi)| = |\psi| + |\psi|^{H(|\psi|)}$

Beweis von Ladner

SAT_H weder in \mathbf{P} noch \mathbf{NP} -complete

Definition von SAT_H

$$\text{SAT}_H = \{\psi 01^{n^{H(n)}} : \psi \in \text{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$$

SAT_H ist nicht in \mathbf{NPC}

- Angenommen $\text{SAT}_H \in \mathbf{NPC} \Rightarrow$ es existiert poly. Reduktion f von SAT auf SAT_H .
- Da $\text{SAT}_H \notin \mathbf{P}$ geht $H(n)$ gegen ∞
- SAT -Instanz φ wird mit f auf SAT_H -Instanz der Form $\psi 01^{\psi^{H(|\psi|)}}$ abgebildet.
- $|f(\varphi)| = |\psi| + |\psi|^{H(|\psi|)}$

Beweis von Ladner

SAT_H weder in \mathbf{P} noch \mathbf{NP} -complete

Definition von SAT_H

$$\text{SAT}_H = \{\psi 01^{n^{H(n)}} : \psi \in \text{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$$

SAT_H ist nicht in \mathbf{NPC}

- Angenommen $\text{SAT}_H \in \mathbf{NPC} \Rightarrow$ es existiert poly. Reduktion f von SAT auf SAT_H .
- Da $\text{SAT}_H \notin \mathbf{P}$ geht $H(n)$ gegen ∞
- SAT -Instanz φ wird mit f auf SAT_H -Instanz der Form $\psi 01^{\psi^{H(|\psi|)}}$ abgebildet.
- $|f(\varphi)| = |\psi| + |\psi|^{H(|\psi|)}$

Beweis von Ladner

SAT_H weder in \mathbf{P} noch \mathbf{NP} -complete

Definition von SAT_H

$$\text{SAT}_H = \{\psi 01^{n^{H(n)}} : \psi \in \text{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$$

SAT_H ist nicht in \mathbf{NPC}

- Angenommen $\text{SAT}_H \in \mathbf{NPC} \Rightarrow$ es existiert poly. Reduktion f von SAT auf SAT_H .
- Da $\text{SAT}_H \notin \mathbf{P}$ geht $H(n)$ gegen ∞
- SAT -Instanz φ wird mit f auf SAT_H -Instanz der Form $\psi 01^{\psi^{H(|\psi|)}}$ abgebildet.
- $|f(\varphi)| = |\psi| + |\psi|^{H(|\psi|)}$

Beweis von Ladner

SAT_H weder in P noch NP-complete

Definition von SAT_H

$$\text{SAT}_H = \{\psi 01^{n^{H(n)}} : \psi \in \text{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$$

- Ab gewisser Größe müssen **SAT**-Instanz φ von f auf **SAT**_H-Instanz mit $|\psi| \in o(n)$ abgebildet werden.
Ansonsten wegen $H(n)$ gegen ∞
 $\Rightarrow |\psi 01^{|\psi|^{H(|\psi|)}}|$ nicht mehr polynomiell in Eingabegröße φ .
- $|\psi|$ also echt kleiner als $\frac{|\varphi|}{2}$
- Algorithmus der **SAT** in poly. Zeit entscheidet
 - bilde **SAT**-Instanz φ mit f auf $\psi 01^{|\psi|^{H(|\psi|)}}$ ab
 - $|\psi|$ kleiner $\frac{|\varphi|}{2}$ und es gilt $\varphi \in \text{SAT} \Leftrightarrow \psi \in \text{SAT}$
 - Wiederhole ersten Schritt mit ψ als Eingabe

Beweis von Ladner

SAT_H weder in P noch NP-complete

Definition von SAT_H

$$\text{SAT}_H = \{\psi 01^{n^{H(n)}} : \psi \in \text{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$$

- Ab gewisser Größe müssen **SAT**-Instanz φ von f auf **SAT**_H-Instanz mit $|\psi| \in o(n)$ abgebildet werden.
Ansonsten wegen $H(n)$ gegen ∞
 $\Rightarrow |\psi 01^{|\psi|^{H(|\psi|)}}|$ nicht mehr polynomiell in Eingabegröße φ .
- $|\psi|$ also echt kleiner als $\frac{|\varphi|}{2}$
- Algorithmus der **SAT** in poly. Zeit entscheidet
 - bilde **SAT**-Instanz φ mit f auf $\psi 01^{|\psi|^{H(|\psi|)}}$ ab
 - $|\psi|$ kleiner $\frac{|\varphi|}{2}$ und es gilt $\varphi \in \text{SAT} \Leftrightarrow \psi \in \text{SAT}$
 - Wiederhole ersten Schritt mit ψ als Eingabe

Beweis von Ladner

SAT_H weder in P noch NP-complete

Definition von SAT_H

$$\text{SAT}_H = \{\psi 01^{n^{H(n)}} : \psi \in \text{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$$

- Ab gewisser Größe müssen **SAT**-Instanz φ von f auf **SAT**_H-Instanz mit $|\psi| \in o(n)$ abgebildet werden.
Ansonsten wegen $H(n)$ gegen ∞
 $\Rightarrow |\psi 01^{|\psi|^{H(|\psi|)}}|$ nicht mehr polynomiell in Eingabegröße φ .
- $|\psi|$ also echt kleiner als $\frac{|\varphi|}{2}$
- Algorithmus der **SAT** in poly. Zeit entscheidet
 - bilde **SAT**-Instanz φ mit f auf $\psi 01^{|\psi|^{H(|\psi|)}}$ ab
 - $|\psi|$ kleiner $\frac{|\varphi|}{2}$ und es gilt $\varphi \in \text{SAT} \Leftrightarrow \psi \in \text{SAT}$
 - Wiederhole ersten Schritt mit ψ als Eingabe

Beweis von Ladner

SAT_H weder in P noch NP-complete

Definition von SAT_H

$$\text{SAT}_H = \{\psi 01^{n^{H(n)}} : \psi \in \text{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$$

- Ab gewisser Größe müssen **SAT**-Instanz φ von f auf **SAT**_H-Instanz mit $|\psi| \in o(n)$ abgebildet werden.
Ansonsten wegen $H(n)$ gegen ∞
 $\Rightarrow |\psi 01^{|\psi|^{H(|\psi|)}}|$ nicht mehr polynomiell in Eingabegröße φ .
- $|\psi|$ also echt kleiner als $\frac{|\varphi|}{2}$
- Algorithmus der **SAT** in poly. Zeit entscheidet
 - bilde **SAT**-Instanz φ mit f auf $\psi 01^{|\psi|^{H(|\psi|)}}$ ab
 - $|\psi|$ kleiner $\frac{|\varphi|}{2}$ und es gilt $\varphi \in \text{SAT} \Leftrightarrow \psi \in \text{SAT}$
 - Wiederhole ersten Schritt mit ψ als Eingabe

Beweis von Ladner

SAT_H weder in P noch NP-complete

Definition von SAT_H

$$\text{SAT}_H = \{\psi 01^{n^{H(n)}} : \psi \in \text{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$$

- Ab gewisser Größe müssen **SAT**-Instanz φ von f auf **SAT**_H-Instanz mit $|\psi| \in o(n)$ abgebildet werden.
Ansonsten wegen $H(n)$ gegen ∞
 $\Rightarrow |\psi 01^{|\psi|^{H(|\psi|)}}|$ nicht mehr polynomiell in Eingabegröße φ .
- $|\psi|$ also echt kleiner als $\frac{|\varphi|}{2}$
- Algorithmus der **SAT** in poly. Zeit entscheidet
 - bilde **SAT**-Instanz φ mit f auf $\psi 01^{|\psi|^{H(|\psi|)}}$ ab
 - $|\psi|$ kleiner $\frac{|\varphi|}{2}$ und es gilt $\varphi \in \text{SAT} \Leftrightarrow \psi \in \text{SAT}$
 - Wiederhole ersten Schritt mit ψ als Eingabe

Beweis von Ladner

SAT_H weder in P noch NP-complete

Definition von SAT_H

$$\text{SAT}_H = \{\psi 01^{n^{H(n)}} : \psi \in \text{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$$

- Ab gewisser Größe müssen **SAT**-Instanz φ von f auf **SAT**_H-Instanz mit $|\psi| \in o(n)$ abgebildet werden.
Ansonsten wegen $H(n)$ gegen ∞
 $\Rightarrow |\psi 01^{|\psi|^{H(|\psi|)}}|$ nicht mehr polynomiell in Eingabegröße φ .
- $|\psi|$ also echt kleiner als $\frac{|\varphi|}{2}$
- Algorithmus der **SAT** in poly. Zeit entscheidet
 - bilde **SAT**-Instanz φ mit f auf $\psi 01^{|\psi|^{H(|\psi|)}}$ ab
 - $|\psi|$ kleiner $\frac{|\varphi|}{2}$ und es gilt $\varphi \in \text{SAT} \Leftrightarrow \psi \in \text{SAT}$
 - Wiederhole ersten Schritt mit ψ als Eingabe

Diagonalisierung

Was verstehen wir unter Diagonalisierung?

Time Hierarchy

Satz von Ladner

Orakelmaschinen - Grenzen der Diagonalisierung

Die polynomielle Hierarchie

Motivation und Beispiele

Die Klasse **PH**

Was ist Diagonalisierung

Als Diagonalisierung wird (hier) ein Beweis bezeichnet, der nur auf den beiden folgenden Eigenschaften von TM aufbaut.

1. Die Existenz einer Repräsentation von TM durch Zeichenketten (Gödelnummer)
2. Die Fähigkeit eine andere TM mit geringem zusätzlichen Zeit- oder Platzbedarf zu simulieren (Universelle TM)

Was ist Diagonalisierung

Als Diagonalisierung wird (hier) ein Beweis bezeichnet, der nur auf den beiden folgenden Eigenschaften von TM aufbaut.

1. Die Existenz einer Repräsentation von TM durch Zeichenketten (Gödelnummer)
2. Die Fähigkeit eine andere TM mit geringem zusätzlichen Zeit- oder Platzbedarf zu simulieren (Universelle TM)

Was ist Diagonalisierung

Als Diagonalisierung wird (hier) ein Beweis bezeichnet, der nur auf den beiden folgenden Eigenschaften von TM aufbaut.

1. Die Existenz einer Repräsentation von TM durch Zeichenketten (Gödelnummer)
2. Die Fähigkeit eine andere TM mit geringem zusätzlichen Zeit- oder Platzbedarf zu simulieren (Universelle TM)

Grenzen der Diagonalisierung

Definition von Orakelschienen

- Werden zeigen, dass Diagonalisierung allein **P/NP** Frage nicht beantworten kann
- benötigen hierzu eine weitere Kategorie von Turingmaschinen.

Definition Orakel-Turingmaschine

Eine Orakel-Turingmaschine M ist eine TM, die folgende zusätzliche Eigenschaften hat:

- ein spezielles zusätzliches Band (Orakelband) und 3 spezielle zusätzliche Zustände q_{query} , q_{yes} , q_{no} .
- ein Orakel $O \subseteq \{0, 1\}^*$
- Wenn M den Zustand q_{query} betritt, ist der Folgezustand
 - q_{yes} , wenn für Inhalt s des Orakelbands gilt $s \in O$ und
 - q_{no} , wenn $s \notin O$
- Das Orakel liefert die Antwort in einem Berechnungsschritt

Grenzen der Diagonalisierung

Definition von Orakelschienen

- Werden zeigen, dass Diagonalisierung allein **P/NP** Frage nicht beantworten kann
- benötigen hierzu eine weitere Kategorie von Turingmaschinen.

Definition Orakel-Turingmaschine

Eine Orakel-Turingmaschine M ist eine TM, die folgende zusätzliche Eigenschaften hat:

- ein spezielles zusätzliches Band (Orakelband) und 3 spezielle zusätzliche Zustände q_{query} , q_{yes} , q_{no} .
- ein Orakel $O \subseteq \{0, 1\}^*$
- Wenn M den Zustand q_{query} betritt, ist der Folgezustand
 - q_{yes} , wenn für Inhalt s des Orakelbands gilt $s \in O$ und
 - q_{no} , wenn $s \notin O$
- Das Orakel liefert die Antwort in einem Berechnungsschritt

Grenzen der Diagonalisierung

Definition von Orakelmaschinen

- Werden zeigen, dass Diagonalisierung allein **P/NP** Frage nicht beantworten kann
- benötigen hierzu eine weitere Kategorie von Turingmaschinen.

Definition Orakel-Turingmaschine

Eine Orakel-Turingmaschine M ist eine TM, die folgende zusätzliche Eigenschaften hat:

- ein spezielles zusätzliches Band (Orakelband) und 3 spezielle zusätzliche Zustände q_{query} , q_{yes} , q_{no} .
- ein Orakel $O \subseteq \{0, 1\}^*$
- Wenn M den Zustand q_{query} betritt, ist der Folgezustand
 - q_{yes} , wenn für Inhalt s des Orakelbands gilt $s \in O$ und
 - q_{no} , wenn $s \notin O$
- Das Orakel liefert die Antwort in einem Berechnungsschritt

Grenzen der Diagonalisierung

Definition von Orakelmaschinen

- Werden zeigen, dass Diagonalisierung allein **P/NP** Frage nicht beantworten kann
- benötigen hierzu eine weitere Kategorie von Turingmaschinen.

Definition Orakel-Turingmaschine

Eine Orakel-Turingmaschine M ist eine TM, die folgende zusätzliche Eigenschaften hat:

- ein spezielles zusätzliches Band (Orakelband) und 3 spezielle zusätzliche Zustände q_{query} , q_{yes} , q_{no} .
- ein Orakel $O \subseteq \{0, 1\}^*$
- Wenn M den Zustand q_{query} betritt, ist der Folgezustand
 - q_{yes} , wenn für Inhalt s des Orakelbands gilt $s \in O$ und
 - q_{no} , wenn $s \notin O$
- Das Orakel liefert die Antwort in einem Berechnungsschritt

Grenzen der Diagonalisierung

Definition von Orakelmaschinen

- Werden zeigen, dass Diagonalisierung allein **P/NP** Frage nicht beantworten kann
- benötigen hierzu eine weitere Kategorie von Turingmaschinen.

Definition Orakel-Turingmaschine

Eine Orakel-Turingmaschine M ist eine TM, die folgende zusätzliche Eigenschaften hat:

- ein spezielles zusätzliches Band (Orakelband) und 3 spezielle zusätzliche Zustände q_{query} , q_{yes} , q_{no} .
- ein Orakel $O \subseteq \{0, 1\}^*$
- Wenn M den Zustand q_{query} betritt, ist der Folgezustand
 - q_{yes} , wenn für Inhalt s des Orakelbands gilt $s \in O$ und
 - q_{no} , wenn $s \notin O$
- Das Orakel liefert die Antwort **in einem Berechnungsschritt**

Grenzen der Diagonalisierung

Definition von Orakelmaschinen

Komplexitätsklassen von Orakelmaschinen

Für jedes $\mathbf{O} \subseteq \{0, 1\}^*$ ist $\mathbf{P}^{\mathbf{O}}$ die Menge aller Sprachen, die eine det. Orakel-TM mit Orakel \mathbf{O} entscheiden kann. $\mathbf{NP}^{\mathbf{O}}$ analog für nichtdet. Orakel-TM.

Grenzen der Diagonalisierung

Beispiele für Orakelmaschinen

EXPCOM

- Sei **EXPCOM** folgende Sprache:

$$\{(M, x, 1^n) : M \text{ entscheidet } x \text{ innerhalb von } 2^n \text{ Schritten}\}$$

Dann gilt **P**^{EXPCOM} = **NP**^{EXPCOM} = **EXP**.

- **EXP** \subseteq **P**^{EXPCOM}

- TM M entscheidet $L \in \text{EXP}$
- Baue Orakel-TM, die Orakel mit $(M, x, |x|)$ aufruft

- **NP**^{EXPCOM} \subseteq **EXP**

- M nichtdet. TM mit Orakel **EXPCOM**:
- Ausführung von M det. in Exponentialzeit simulieren
- Orakelaufruf in Exponentialzeit simulieren ($\max 2^{|x|} \cdot 2^{q(|x|)}$ Schritte)

- $\Rightarrow \text{EXP} \subseteq \text{P}^{\text{EXPCOM}} \subseteq \text{NP}^{\text{EXPCOM}} \subseteq \text{EXP}$

Grenzen der Diagonalisierung

Beispiele für Orakelmaschinen

EXPCOM

- Sei **EXPCOM** folgende Sprache:

$$\{(M, x, 1^n) : M \text{ entscheidet } x \text{ innerhalb von } 2^n \text{ Schritten}\}$$

Dann gilt $\mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{EXP}$.

- $\mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}}$

- TM M entscheidet $L \in \mathbf{EXP}$
- Baue Orakel-TM, die Orakel mit $(M, x, |x|)$ aufruft

- $\mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$

- M nichtdet. TM mit Orakel **EXPCOM**:
- Ausführung von M det. in Exponentialzeit simulieren
- Orakelaufruf in Exponentialzeit simulieren ($\max 2^{|x|} \cdot 2^{q(|x|)}$ Schritte)

- $\Rightarrow \mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$

Grenzen der Diagonalisierung

Beispiele für Orakelmaschinen

EXPCOM

- Sei **EXPCOM** folgende Sprache:

$$\{(M, x, 1^n) : M \text{ entscheidet } x \text{ innerhalb von } 2^n \text{ Schritten}\}$$

Dann gilt $\mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{EXP}$.

- EXP** \subseteq **P**^{EXPCOM}

- TM M entscheidet $L \in \mathbf{EXP}$
- Baue Orakel-TM, die Orakel mit $(M, x, |x|)$ aufruft

- NP**^{EXPCOM} \subseteq **EXP**

- M nichtdet. TM mit Orakel **EXPCOM**:
- Ausführung von M det. in Exponentialzeit simulieren
- Orakelaufruf in Exponentialzeit simulieren ($\max 2^{|x|} \cdot 2^{q(|x|)}$ Schritte)

- $\Rightarrow \mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$

Grenzen der Diagonalisierung

Beispiele für Orakelmaschinen

EXPCOM

- Sei **EXPCOM** folgende Sprache:

$$\{(M, x, 1^n) : M \text{ entscheidet } x \text{ innerhalb von } 2^n \text{ Schritten}\}$$

Dann gilt $\mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{EXP}$.

- $\mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}}$

- TM M entscheidet $L \in \mathbf{EXP}$
- Baue Orakel-TM, die Orakel mit $(M, x, |x|)$ aufruft

- $\mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$

- M nichtdet. TM mit Orakel **EXPCOM**:
- Ausführung von M det. in Exponentialzeit simulieren
- Orakelaufruf in Exponentialzeit simulieren ($\max 2^{|x|} \cdot 2^{q(|x|)}$ Schritte)

- $\Rightarrow \mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$

Grenzen der Diagonalisierung

Beispiele für Orakelmaschinen

EXPCOM

- Sei **EXPCOM** folgende Sprache:

$$\{(M, x, 1^n) : M \text{ entscheidet } x \text{ innerhalb von } 2^n \text{ Schritten}\}$$

Dann gilt $\mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{EXP}$.

- $\mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}}$

- TM M entscheidet $L \in \mathbf{EXP}$
- Baue Orakel-TM, die Orakel mit $(M, x, |x|)$ aufruft

- $\mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$

- M nichtdet. TM mit Orakel **EXPCOM**:
- Ausführung von M det. in Exponentialzeit simulieren
- Orakelaufruf in Exponentialzeit simulieren ($\max 2^{|x|} \cdot 2^{q(|x|)}$ Schritte)

- $\Rightarrow \mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$

Grenzen der Diagonalisierung

Beispiele für Orakelmaschinen

EXPCOM

- Sei **EXPCOM** folgende Sprache:

$$\{(M, x, 1^n) : M \text{ entscheidet } x \text{ innerhalb von } 2^n \text{ Schritten}\}$$

Dann gilt $\mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{EXP}$.

- $\mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}}$

- TM M entscheidet $L \in \mathbf{EXP}$
- Baue Orakel-TM, die Orakel mit $(M, x, |x|)$ aufruft

- $\mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$

- M nichtdet. TM mit Orakel **EXPCOM**:
 - Ausführung von M det. in Exponentialzeit simulieren
 - Orakelaufruf in Exponentialzeit simulieren ($\max 2^{|x|} \cdot 2^{q(|x|)}$ Schritte)

- $\Rightarrow \mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$

Grenzen der Diagonalisierung

Beispiele für Orakelmaschinen

EXPCOM

- Sei **EXPCOM** folgende Sprache:

$$\{(M, x, 1^n) : M \text{ entscheidet } x \text{ innerhalb von } 2^n \text{ Schritten}\}$$

Dann gilt $\mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{EXP}$.

- $\mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}}$

- TM M entscheidet $L \in \mathbf{EXP}$
- Baue Orakel-TM, die Orakel mit $(M, x, |x|)$ aufruft

- $\mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$

- M nichtdet. TM mit Orakel **EXPCOM**:
- Ausführung von M det. in Exponentialzeit simulieren
- Orakelaufruf in Exponentialzeit simulieren ($\max 2^{|x|} \cdot 2^{q(|x|)}$ Schritte)

- $\Rightarrow \mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$

Grenzen der Diagonalisierung

Beispiele für Orakelmaschinen

EXPCOM

- Sei **EXPCOM** folgende Sprache:

$$\{(M, x, 1^n) : M \text{ entscheidet } x \text{ innerhalb von } 2^n \text{ Schritten}\}$$

Dann gilt $\mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{EXP}$.

- $\mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}}$

- TM M entscheidet $L \in \mathbf{EXP}$
- Baue Orakel-TM, die Orakel mit $(M, x, |x|)$ aufruft

- $\mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$

- M nichtdet. TM mit Orakel **EXPCOM**:
- Ausführung von M det. in Exponentialzeit simulieren
- Orakelaufruf in Exponentialzeit simulieren ($\max 2^{|x|} \cdot 2^{q(|x|)}$ Schritte)

$$\Rightarrow \mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$$

Grenzen der Diagonalisierung

Beispiele für Orakelmaschinen

EXPCOM

- Sei **EXPCOM** folgende Sprache:

$$\{(M, x, 1^n) : M \text{ entscheidet } x \text{ innerhalb von } 2^n \text{ Schritten}\}$$

Dann gilt $\mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{EXP}$.

- $\mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}}$

- TM M entscheidet $L \in \mathbf{EXP}$
- Baue Orakel-TM, die Orakel mit $(M, x, |x|)$ aufruft

- $\mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$

- M nichtdet. TM mit Orakel **EXPCOM**:
- Ausführung von M det. in Exponentialzeit simulieren
- Orakelaufruf in Exponentialzeit simulieren ($\max 2^{|x|} \cdot 2^{q(|x|)}$ Schritte)

- $\Rightarrow \mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$

Grenzen der Diagonalisierung

Satz von Baker-Gill-Solovay

Satz (Baker, Gill, Solovay, 75)

Es existieren Orakel A, B so dass $\mathbf{P}^A = \mathbf{NP}^A$ und $\mathbf{P}^B \neq \mathbf{NP}^B$

Grenzen der Diagonalisierung

Satz von Baker-Gill-Solovay

Satz (Baker, Gill, Solovay, 75)

Es existieren Orakel A, B so dass $P^A = NP^A$ und $P^B \neq NP^B$

relativierende Beweise

Wir nennen einen Beweis, der auch für TM mit Orakel gilt, einen *relativierenden Beweis*

- Diagonalisierung ist relativierend und kann damit nicht für die **P – NP** Frage genutzt werden.
- \Rightarrow ein Beweis für die **P – NP** Frage muss ein nicht relativierendes Verfahren nutzen !

Grenzen der Diagonalisierung

Satz von Baker-Gill-Solovay

Satz (Baker, Gill, Solovay, 75)

Es existieren Orakel A, B so dass $\mathbf{P}^A = \mathbf{NP}^A$ und $\mathbf{P}^B \neq \mathbf{NP}^B$

relativierende Beweise

Wir nennen einen Beweis, der auch für TM mit Orakel gilt, einen *relativierenden Beweis*

- Diagonalisierung ist relativierend und kann damit nicht für die $\mathbf{P} - \mathbf{NP}$ Frage genutzt werden.
- \Rightarrow ein Beweis für die $\mathbf{P} - \mathbf{NP}$ Frage muss ein nicht relativierendes Verfahren nutzen !

Grenzen der Diagonalisierung

Beweis : $P^A = NP^A$

- $P^A = NP^A$ haben wir gerade schon gesehen: Nutze einfach das Orakel $A = \mathbf{EXPCOM}$
- B zu konstruieren ist schwieriger (und interessanter!)

Grenzen der Diagonalisierung

Beweis : $P^A = NP^A$

- $P^A = NP^A$ haben wir gerade schon gesehen: Nutze einfach das Orakel $A = \mathbf{EXPCOM}$
- B zu konstruieren ist schwieriger (und interessanter!)

Grenzen der Diagonalisierung

Beweis : $P^B \neq NP^B$

Definition unäre Sprache U_B

Für eine Sprache B sei $U_B = \{1^n : \text{Es gibt einen String der Länge } n \text{ in } B\}$

- Wir sehen sofort ein : $U_B \in NP^B$, da eine nicht det. TM ein Zertifikat raten kann
- Müssen also nur noch B so konstruieren, dass $U_B \notin P^B$

Grenzen der Diagonalisierung

Beweis : $P^B \neq NP^B$

Definition unäre Sprache U_B

Für eine Sprache B sei $U_B = \{1^n : \text{Es gibt einen String der Länge } n \text{ in } B\}$

- Wir sehen sofort ein : $U_B \in \mathbf{NP}^B$, da eine nicht det. TM ein Zertifikat raten kann
- Müssen also nur noch B so konstruieren, dass $U_B \notin \mathbf{P}^B$

Beweis : $P^B \neq NP^B$

Definition unäre Sprache U_B

Für eine Sprache B sei $U_B = \{1^n : \text{Es gibt einen String der Länge } n \text{ in } B\}$

- Wir sehen sofort ein : $U_B \in \mathbf{NP}^B$, da eine nicht det. TM ein Zertifikat raten kann
- Müssen also nur noch B so konstruieren, dass $U_B \notin \mathbf{P}^B$

Grenzen der Diagonalisierung

Konstruktion von B

Wir konstruieren eine Folge von Sprachen $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ so , dass
 $B = \lim_{n \rightarrow \infty} B_i$

- Wie stellen wir sicher, dass alle Turing Maschinen U_B nicht in polynomieller Zeit entscheiden können?
- Tipp: Die Menge aller Turing Maschinen ist abzählbar

Wir konstruieren eine Folge von Sprachen $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ so, dass
 $B = \lim_{n \rightarrow \infty} B_i$

- Wie stellen wir sicher, dass alle Turing Maschinen U_B nicht in polynomieller Zeit entscheiden können?
- Tipp: Die Menge aller Turing Maschinen ist abzählbar

Grenzen der Diagonalisierung

Konstruktion von B

- Genau : Wir iterieren über alle Turing Maschinen M_i und stellen sicher, dass M_i nicht in polynomieller Zeit U_B entscheiden kann
- Nutze dabei, dass die Anzahl der Wörter exponentiell in der Eingabelänge wächst

Grenzen der Diagonalisierung

Konstruktion von B

- Genau : Wir iterieren über alle Turing Maschinen M_i und stellen sicher, dass M_i nicht in polynomieller Zeit U_B entscheiden kann
- Nutze dabei, dass die Anzahl der Wörter exponentiell in der Eingabelänge wächst

Grenzen der Diagonalisierung

Konstruktion von B

Wir fangen an mit $B_0 = \emptyset$. Konstruktion für B_i :

- Wähle n so , dass n größer als alle Strings in B_{i-1}
- Lasse M_i auf Eingabe 1^n genau $2^n/10$ Schritte laufen
(Beachte, dass M_i das Orakel B hat!)

Grenzen der Diagonalisierung

Konstruktion von B

Wir fangen an mit $B_0 = \emptyset$. Konstruktion für B_i :

- Wähle n so , dass n größer als alle Strings in B_{i-1}
- Lasse M_i auf Eingabe 1^n genau $2^n / 10$ Schritte laufen
(Beachte, dass M_i das Orakel B hat!)

Grenzen der Diagonalisierung

Konstruktion von B

$$B_i = \{11011011, 10, 101, 111, 000111\}$$

Orakel

B

Turing Maschine

M_i

- Das Orakel antwortet konsistent auf dem bisherigen B_i
- Wir merken uns alle Strings der Länge n , die M_i an fragt!

Grenzen der Diagonalisierung

Konstruktion von B

$$B_i = \{11011011, 10, 101, 111, 000111\}$$

Ist 11011011 in B ?



Orakel
B

Turing Maschine

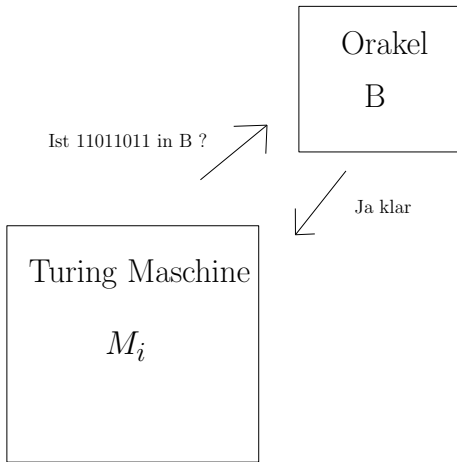
M_i

- Das Orakel antwortet konsistent auf dem bisherigen B_i
- Wir merken uns alle Strings der Länge n , die M_i an fragt!

Grenzen der Diagonalisierung

Konstruktion von B

$$B_i = \{11011011, 10, 101, 111, 000111\}$$



- Das Orakel antwortet konsistent auf dem bisherigen B_i
- Wir merken uns alle Strings der Länge n, die M_i an fragt!

Grenzen der Diagonalisierung

Konstruktion von B

$$B_i = \{11011011, 10, 101, 111, 000111\}$$

Orakel

B

Turing Maschine

M_i

- Das Orakel antwortet konsistent auf dem bisherigen B_i
- Wir merken uns alle Strings der Länge n , die M_i an fragt!

Grenzen der Diagonalisierung

Konstruktion von B

$$B_i = \{11011011, 10, 101, 111, 000111\}$$

Ist 1^i in B ?



Orakel
B

Turing Maschine

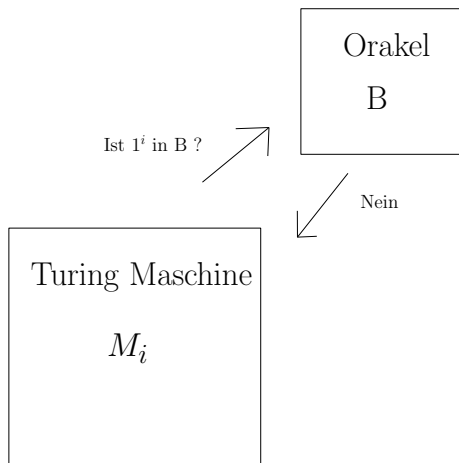
M_i

- Das Orakel antwortet konsistent auf dem bisherigen B_i
- Wir merken uns alle Strings der Länge n , die M_i an fragt!

Grenzen der Diagonalisierung

Konstruktion von B

$$B_i = \{11011011, 10, 101, 111, 000111\}$$



- Das Orakel antwortet konsistent auf dem bisherigen B_i
- Wir merken uns alle Strings der Länge n, die M_i an fragt!

Grenzen der Diagonalisierung

Konstruktion von B

- Wir definieren nun B_{i+1} wie folgt :
- Wenn M_i nicht gehalten hat : $B_{i+1} = B_i$
- ansonsten :
 - M_i akzeptiert 1^n : Wir definieren, dass kein String der Länge n in B ist
 - M_i lehnt ab : Wähle $x \in \{0,1\}^n$, welches nicht von M_i an gefragt wurde und setze $B_{i+1} = B_i \cup \{x\}$
 - warum existiert dieses x ?

Grenzen der Diagonalisierung

Konstruktion von B

- Wir definieren nun B_{i+1} wie folgt :
- Wenn M_i nicht gehalten hat : $B_{i+1} = B_i$
- ansonsten :
 - M_i akzeptiert 1^n : Wir definieren, dass kein String der Länge n in B ist
 - M_i lehnt ab : Wähle $x \in \{0,1\}^n$, welches nicht von M_i an gefragt wurde und setze $B_{i+1} = B_i \cup \{x\}$
 - warum existiert dieses x ?

Grenzen der Diagonalisierung

Konstruktion von B

- Wir definieren nun B_{i+1} wie folgt :
- Wenn M_i nicht gehalten hat : $B_{i+1} = B_i$
- ansonsten :
 - M_i akzeptiert 1^n : Wir definieren, dass kein String der Länge n in B ist
 - M_i lehnt ab : Wähle $x \in \{0, 1\}^n$, welches nicht von M_i an gefragt wurde und setze $B_{i+1} = B_i \cup \{x\}$
 - warum existiert dieses x ?

Grenzen der Diagonalisierung

Konstruktion von B

- Wir definieren nun B_{i+1} wie folgt :
- Wenn M_i nicht gehalten hat : $B_{i+1} = B_i$
- ansonsten :
 - M_i akzeptiert 1^n : Wir definieren, dass kein String der Länge n in B ist
 - M_i lehnt ab : Wähle $x \in \{0, 1\}^n$, welches nicht von M_i an gefragt wurde und setze $B_{i+1} = B_i \cup \{x\}$
 - warum existiert dieses x ?

Grenzen der Diagonalisierung

Konstruktion von B

- Wir definieren nun B_{i+1} wie folgt :
- Wenn M_i nicht gehalten hat : $B_{i+1} = B_i$
- ansonsten :
 - M_i akzeptiert 1^n : Wir definieren, dass kein String der Länge n in B ist
 - M_i lehnt ab : Wähle $x \in \{0, 1\}^n$, welches nicht von M_i an gefragt wurde und setze $B_{i+1} = B_i \cup \{x\}$
 - warum existiert dieses x ?

Grenzen der Diagonalisierung

Konstruktion von B

- Wir definieren nun B_{i+1} wie folgt :
- Wenn M_i nicht gehalten hat : $B_{i+1} = B_i$
- ansonsten :
 - M_i akzeptiert 1^n : Wir definieren, dass kein String der Länge n in B ist
 - M_i lehnt ab : Wähle $x \in \{0, 1\}^n$, welches nicht von M_i an gefragt wurde und setze $B_{i+1} = B_i \cup \{x\}$
 - warum existiert dieses x ?

Grenzen der Diagonalisierung

Beweis Schluss

- Haben oben ein gesehen, dass $U_B \in \mathbf{NP}^B$
- Und für jede polynomiell beschränkte TM M existiert ein i , so dass
 - $M = M_i$
 - M auf der Eingabe 1^i weniger als $2^i/10$ Schritte benötigt
 - und damit M_i nach Konstruktion die Frage $1^i \in U_B$ falsch beantwortet
- $\Rightarrow U_B \notin \mathbf{P}^B$ und damit $\mathbf{P}^B \neq \mathbf{NP}^B$ □

- Haben oben ein gesehen, dass $U_B \in \mathbf{NP}^B$
- Und für jede polynomiell beschränkte TM M existiert ein i , so dass
 - $M = M_i$
 - M auf der Eingabe 1^i weniger als $2^i / 10$ Schritte benötigt
 - und damit M_i nach Konstruktion die Frage $1^i \in U_B$ falsch beantwortet
- $\Rightarrow U_B \notin \mathbf{P}^B$ und damit $\mathbf{P}^B \neq \mathbf{NP}^B$ □

- Haben oben ein gesehen, dass $U_B \in \mathbf{NP}^B$
- Und für jede polynomiell beschränkte TM M existiert ein i , so dass
 - $M = M_i$
 - M auf der Eingabe 1^i weniger als $2^i/10$ Schritte benötigt
 - und damit M_i nach Konstruktion die Frage $1^i \in U_B$ falsch beantwortet
- $\Rightarrow U_B \notin \mathbf{P}^B$ und damit $\mathbf{P}^B \neq \mathbf{NP}^B$ □

- Haben oben ein gesehen, dass $U_B \in \mathbf{NP}^B$
- Und für jede polynomiell beschränkte TM M existiert ein i , so dass
 - $M = M_i$
 - M auf der Eingabe 1^i weniger als $2^i / 10$ Schritte benötigt
 - und damit M_i nach Konstruktion die Frage $1^i \in U_B$ falsch beantwortet
- $\Rightarrow U_B \notin \mathbf{P}^B$ und damit $\mathbf{P}^B \neq \mathbf{NP}^B$ □

- Haben oben ein gesehen, dass $U_B \in \mathbf{NP}^B$
- Und für jede polynomiell beschränkte TM M existiert ein i , so dass
 - $M = M_i$
 - M auf der Eingabe 1^i weniger als $2^i / 10$ Schritte benötigt
 - und damit M_i nach Konstruktion die Frage $1^i \in U_B$ falsch beantwortet
- $\Rightarrow U_B \notin \mathbf{P}^B$ und damit $\mathbf{P}^B \neq \mathbf{NP}^B$ □

- Haben oben ein gesehen, dass $U_B \in \mathbf{NP}^B$
- Und für jede polynomiell beschränkte TM M existiert ein i , so dass
 - $M = M_i$
 - M auf der Eingabe 1^i weniger als $2^i / 10$ Schritte benötigt
 - und damit M_i nach Konstruktion die Frage $1^i \in U_B$ falsch beantwortet
- $\Rightarrow U_B \notin \mathbf{P}^B$ und damit $\mathbf{P}^B \neq \mathbf{NP}^B$ □

Diagonalisierung

Was verstehen wir unter Diagonalisierung?

Time Hierarchy

Satz von Ladner

Orakelmaschinen - Grenzen der Diagonalisierung

Die polynomielle Hierarchie

Motivation und Beispiele

Die Klasse **PH**

- bisher die Komplexitätsklassen **P**, **NP**, **coNP**
- es gibt Probleme, die sich nicht mit diesen klassifizieren lassen
- durch Verallgemeinerung dieser Klassen kann eine Reihe weiterer Probleme "eingefangen" werden
- Verallgemeinerung ist die "polynomielle Hierarchie" **PH**

- bisher die Komplexitätsklassen **P**, **NP**, **coNP**
- es gibt Probleme, die sich nicht mit diesen klassifizieren lassen
- durch Verallgemeinerung dieser Klassen kann eine Reihe weiterer Probleme "eingefangen" werden
- Verallgemeinerung ist die "polynomielle Hierarchie" **PH**

- bisher die Komplexitätsklassen **P**, **NP**, **coNP**
- es gibt Probleme, die sich nicht mit diesen klassifizieren lassen
- durch Verallgemeinerung dieser Klassen kann eine Reihe weiterer Probleme "eingefangen" werden
- Verallgemeinerung ist die "polynomielle Hierarchie" **PH**

- bisher die Komplexitätsklassen **P**, **NP**, **coNP**
- es gibt Probleme, die sich nicht mit diesen klassifizieren lassen
- durch Verallgemeinerung dieser Klassen kann eine Reihe weiterer Probleme "eingefangen" werden
- Verallgemeinerung ist die "polynomielle Hierarchie" **PH**

Definition INDSET

Sei **INDSET** = $\{\langle G, k \rangle : \text{Graph } G \text{ hat ein independent set, welches Größe } k \text{ hat}\}$

Bekannt : **INDSET** \in NPC

Definition EXACTINDSET

Sei **EXACTINDSET** = $\{\langle G, k \rangle : \text{das größte independent set in } G \text{ hat Größe genau } k\}$
 $= \{\langle G, k \rangle : \exists \text{ independent set der Größe } k \text{ in } G \text{ und } \forall \text{ independent sets in } G \text{ haben Größe } \leq k\}$

Definition INDSET

Sei **INDSET** = $\{\langle G, k \rangle : \text{Graph } G \text{ hat ein independent set, welches Größe } k \text{ hat}\}$

Bekannt : **INDSET** \in **NPC**

Definition EXACTINDSET

Sei **EXACTINDSET** = $\{\langle G, k \rangle : \text{das größte independent set in } G \text{ hat Größe genau } k\}$
 $= \{\langle G, k \rangle : \exists \text{ independent set der Größe } k \text{ in } G \text{ und } \forall \text{ independent sets in } G \text{ haben Größe } \leq k\}$

Definition INDSET

Sei **INDSET** = $\{\langle G, k \rangle : \text{Graph } G \text{ hat ein independent set, welches Größe } k \text{ hat}\}$

Bekannt : **INDSET** \in **NPC**

Definition EXACTINDSET

Sei **EXACTINDSET** = $\{\langle G, k \rangle : \text{das größte independent set in } G \text{ hat Größe genau } k\}$
 $= \{\langle G, k \rangle : \exists \text{ independent set der Größe } k \text{ in } G \text{ und } \forall \text{ independent sets in } G \text{ haben Größe } \leq k\}$

Die Klasse Σ_2^P

INDSET

Sei **INDSET** = $\{ \langle G, k \rangle : \exists \text{ independent set in } G, \text{ welches Größe } k \text{ hat} \}$

Wiederholung NP

NP ist die Menge aller Sprachen L für die gilt :

Es gibt eine deterministische polynomielle TM M und ein Polynom q so dass :

$$x \in L \Leftrightarrow \exists u \in \{0, 1\}^{q(|x|)} \quad M(x, u) = 1$$

Die Klasse Σ_2^P

EXACTINDSET

Sei **INDSET** = $\{\langle G, k \rangle : \exists \text{ independent set in } G, \text{ welches Größe } k \text{ hat und } \forall \text{ independent sets in } G \text{ haben Größe } \leq k\}$

Definition Σ_2^P

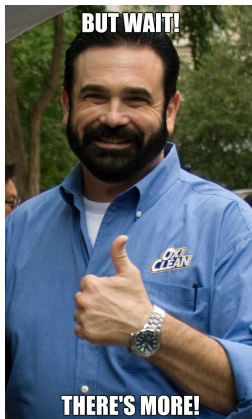
Σ_2^P ist die Menge aller Sprachen L für die gilt :

Es gibt eine deterministische polynomielle TM M und ein Polynom q so dass :

$$x \in L \Leftrightarrow \exists u \in \{0, 1\}^{q(|x|)} \forall v \in \{0, 1\}^{q(|x|)} M(x, u, v) = 1$$

Motivation und Beispiele

Noch mehr Quantoren?



Diagonalisierung

Was verstehen wir unter Diagonalisierung?

Time Hierarchy

Satz von Ladner

Orakelmaschinen - Grenzen der Diagonalisierung

Die polynomielle Hierarchie

Motivation und Beispiele

Die Klasse **PH**

Definition Σ_i^P

Σ_i^P ist die Menge aller Sprachen L für die gilt :

Es gibt deterministische polynomielle TM M und ein Polynom q so dass :

$$x \in L \Leftrightarrow \exists u_1 \in \{0,1\}^{q(|x|)} \forall u_2 \in \{0,1\}^{q(|x|)} \dots \mathcal{Q}_i u_i \in \{0,1\}^{q(|x|)} \\ M(x, u_1, \dots, u_i) = 1$$

wobei \mathcal{Q}_i entweder \forall oder \exists beschreibt, abhängig davon ob i gerade oder ungerade ist

Definition Σ_i^p

Σ_i^p ist die Menge aller Sprachen L für die gilt :

Es gibt deterministische polynomielle TM M und ein Polynom q so dass :

$$x \in L \Leftrightarrow \exists u_1 \in \{0, 1\}^{q(|x|)} \forall u_2 \in \{0, 1\}^{q(|x|)} \dots \mathcal{Q}_i u_i \in \{0, 1\}^{q(|x|)} \\ M(x, u_1, \dots, u_i) = 1$$

wobei \mathcal{Q}_i entweder \forall oder \exists beschreibt, abhängig davon ob i gerade oder ungerade ist

Definition PH

Die polynomielle Hierarchie ist $\mathbf{PH} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_i^p$

Definition Σ_i^P

Σ_i^P ist die Menge aller Sprachen L für die gilt :

Es gibt deterministische polynomielle TM M und ein Polynom q so dass :

$$x \in L \Leftrightarrow \exists u_1 \in \{0, 1\}^{q(|x|)} \forall u_2 \in \{0, 1\}^{q(|x|)} \dots \mathcal{Q}_i u_i \in \{0, 1\}^{q(|x|)} \\ M(x, u_1, \dots, u_i) = 1$$

wobei \mathcal{Q}_i entweder \forall oder \exists beschreibt, abhängig davon ob i gerade oder ungerade ist

- Man sieht : $\Sigma_1^P = \mathbf{NP}$
- $\Pi_i^P := \text{co} \Sigma_i^P$
- $\Sigma_i^P \subseteq \Pi_{i+1}^P \subseteq \Sigma_{i+2}^P$

- Vermutung: $P \neq NP$ und $NP \neq coNP$
- Verallgemeinerung: $\Sigma_i^P \subsetneq \Sigma_{i+1}^P$ für alle i
- "The polynomial hierarchy does not collapse"

Satz Kollaps von PH und Auswirkungen auf P – NP

Für alle $i \geq 0$ gilt: $\Sigma_i^P = \Pi_i^P \Rightarrow PH = \Sigma_i^P$

Wenn $P = NP$, dann folgt $PH = P$

- Vermutung: $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ und $\mathbf{NP} \neq \mathbf{coNP}$
- Verallgemeinerung: $\Sigma_i^P \subsetneq \Sigma_{i+1}^P$ für alle i
- "The polynomial hierarchy does not collapse"

Satz Kollaps von PH und Auswirkungen auf P – NP

Für alle $i \geq 0$ gilt: $\Sigma_i^P = \Pi_i^P \Rightarrow \mathbf{PH} = \Sigma_i^P$

Wenn $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, dann folgt $\mathbf{PH} = \mathbf{P}$

- Vermutung: $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ und $\mathbf{NP} \neq \mathbf{coNP}$
- Verallgemeinerung: $\Sigma_i^P \subsetneq \Sigma_{i+1}^P$ für alle i
- "The polynomial hierarchy does not collapse"

Satz Kollaps von PH und Auswirkungen auf $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$

Für alle $i \geq 0$ gilt: $\Sigma_i^P = \Pi_i^P \Rightarrow \mathbf{PH} = \Sigma_i^P$

Wenn $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, dann folgt $\mathbf{PH} = \mathbf{P}$

- Vermutung: $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ und $\mathbf{NP} \neq \mathbf{coNP}$
- Verallgemeinerung: $\Sigma_i^P \subsetneq \Sigma_{i+1}^P$ für alle i
- "The polynomial hierarchy does not collapse"

Satz Kollaps von PH und Auswirkungen auf P – NP

Für alle $i \geq 0$ gilt: $\Sigma_i^P = \Pi_i^P \Rightarrow \mathbf{PH} = \Sigma_i^P$

Wenn $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, dann folgt $\mathbf{PH} = \mathbf{P}$

- Vermutung: $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ und $\mathbf{NP} \neq \mathbf{coNP}$
- Verallgemeinerung: $\Sigma_i^P \subsetneq \Sigma_{i+1}^P$ für alle i
- "The polynomial hierarchy does not collapse"

Satz Kollaps von PH und Auswirkungen auf $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$

1. Für alle $i \geq 0$ gilt: $\Sigma_i^P = \Pi_i^P \Rightarrow \mathbf{PH} = \Sigma_i^P$

2. Wenn $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, dann folgt $\mathbf{PH} = \mathbf{P}$

- Vermutung: $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ und $\mathbf{NP} \neq \mathbf{coNP}$
- Verallgemeinerung: $\Sigma_i^P \subsetneq \Sigma_{i+1}^P$ für alle i
- "The polynomial hierarchy does not collapse"

Satz Kollaps von PH und Auswirkungen auf $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$

1. Für alle $i \geq 0$ gilt: $\Sigma_i^P = \Pi_i^P \Rightarrow \mathbf{PH} = \Sigma_i^P$
2. Wenn $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, dann folgt $\mathbf{PH} = \mathbf{P}$

Beweis von $P = NP \Rightarrow PH = P$

- Sei $P = NP$, beweisen über Induktion $\Sigma_i^P, \Pi_i^P \subseteq P$ für alle i
- IA: $i = 1$, nach Voraussetzung: $\Sigma_1^P = NP$, $\Pi_1^P = coNP$
und $P = coP = NP = coNP$ gilt
- IV: Es gelte $\Sigma_{i-1}^P \subseteq P$ für $i - 1 \in \mathbb{N}$
- Anm: Π_{i-1}^P besteht aus Komplementsprachen der Sprachen in Σ_{i-1}^P
 P ist abgeschlossen unter Komplementbildung $\Rightarrow \Pi_{i-1}^P \subseteq P$ unter IV.

Beweis von $P = NP \Rightarrow PH = P$

- Sei $P = NP$, beweisen über Induktion $\Sigma_i^P, \Pi_i^P \subseteq P$ für alle i
- **IA:** $i = 1$, nach Voraussetzung: $\Sigma_1^P = NP$, $\Pi_1^P = coNP$
und $P = coP = NP = coNP$ gilt
- **IV:** Es gelte $\Sigma_{i-1}^P \subseteq P$ für $i - 1 \in \mathbb{N}$
- Anm: Π_{i-1}^P besteht aus Komplementsprachen der Sprachen in Σ_{i-1}^P
 P ist abgeschlossen unter Komplementbildung $\Rightarrow \Pi_{i-1}^P \subseteq P$ unter IV.

Beweis von $P = NP \Rightarrow PH = P$

- Sei $P = NP$, beweisen über Induktion $\Sigma_i^P, \Pi_i^P \subseteq P$ für alle i
- **IA:** $i = 1$, nach Voraussetzung: $\Sigma_1^P = NP$, $\Pi_1^P = coNP$
und $P = coP = NP = coNP$ gilt
- **IV:** Es gelte $\Sigma_{i-1}^P \subseteq P$ für $i - 1 \in \mathbb{N}$
- Anm: Π_{i-1}^P besteht aus Komplementsprachen der Sprachen in Σ_{i-1}^P
 P ist abgeschlossen unter Komplementbildung $\Rightarrow \Pi_{i-1}^P \subseteq P$ unter IV.

Beweis von $P = NP \Rightarrow PH = P$

- Sei $P = NP$, beweisen über Induktion $\Sigma_i^P, \Pi_i^P \subseteq P$ für alle i
- **IA:** $i = 1$, nach Voraussetzung: $\Sigma_1^P = NP$, $\Pi_1^P = coNP$
und $P = coP = NP = coNP$ gilt
- **IV:** Es gelte $\Sigma_{i-1}^P \subseteq P$ für $i - 1 \in \mathbb{N}$
- Anm: Π_{i-1}^P besteht aus Komplementsprachen der Sprachen in Σ_{i-1}^P
 P ist abgeschlossen unter Komplementbildung $\Rightarrow \Pi_{i-1}^P \subseteq P$ unter IV.

- **IS:** Sei $L \in \Sigma_i^P$, dann ex. TM M und Polynom q so, dass

$$x \in L \Leftrightarrow \exists u_1 \in \{0, 1\}^{q(|x|)} \forall u_2 \in \{0, 1\}^{q(|x|)} \dots Q_i u_i \in \{0, 1\}^{q(|x|)} \\ M(x, u_1, u_2, \dots, u_i) = 1 \text{ (Definition)}$$

gilt

- Definiere Sprache L'

$$(x, u_1) \in L' \Leftrightarrow \forall u_2 \in \{0, 1\}^{q(|x|)} \dots Q_i u_i \in \{0, 1\}^{q(|x|)} \\ M(x, u_1, u_2, \dots, u_i) = 1$$

- **IS:** Sei $L \in \Sigma_i^P$, dann ex. TM M und Polynom q so, dass

$$x \in L \Leftrightarrow \exists u_1 \in \{0, 1\}^{q(|x|)} \forall u_2 \in \{0, 1\}^{q(|x|)} \dots Q_i u_i \in \{0, 1\}^{q(|x|)} \\ M(x, u_1, u_2, \dots, u_i) = 1 \text{ (Definition)}$$

gilt

- Definiere Sprache L'

$$(x, u_1) \in L' \Leftrightarrow \forall u_2 \in \{0, 1\}^{q(|x|)} \dots Q_i u_i \in \{0, 1\}^{q(|x|)} \\ M(x, u_1, u_2, \dots, u_i) = 1$$

- L' ist in Π_{i-1}^p (für $\overline{L'}$ alle Quantoren und M negieren $\Rightarrow \overline{L'} \in \Sigma_{i-1}^p$)
- Nach IV gilt: $\Pi_{i-1}^p \in \mathbf{P} \Rightarrow L' \in \mathbf{P}$
- Damit ex. det. TM M' , die L' in polynom. Zeit berechnet
- $$x \in L \Leftrightarrow \exists u_1 \in \{0, 1\}^{q(|x|)} M'(x, u_1) = 1$$
- Damit $L \in \mathbf{NP}$ und da $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ vorausgesetzt, folgt $L \in \mathbf{P}$ □

- L' ist in Π_{i-1}^p (für $\overline{L'}$ alle Quantoren und M negieren $\Rightarrow \overline{L'} \in \Sigma_{i-1}^p$)
- Nach IV gilt: $\Pi_{i-1}^p \in \mathbf{P} \Rightarrow L' \in \mathbf{P}$

■ Damit ex. det. TM M' , die L' in polynom. Zeit berechnet

■

$$x \in L \Leftrightarrow \exists u_1 \in \{0, 1\}^{q(|x|)} M'(x, u_1) = 1$$

- Damit $L \in \mathbf{NP}$ und da $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ vorausgesetzt, folgt $L \in \mathbf{P}$ □

- L' ist in Π_{i-1}^p (für $\overline{L'}$ alle Quantoren und M negieren $\Rightarrow \overline{L'} \in \Sigma_{i-1}^p$)
- Nach IV gilt: $\Pi_{i-1}^p \in \mathbf{P} \Rightarrow L' \in \mathbf{P}$
- Damit ex. det. TM M' , die L' in polynom. Zeit berechnet
-

$$x \in L \Leftrightarrow \exists u_1 \in \{0, 1\}^{q(|x|)} M'(x, u_1) = 1$$

- Damit $L \in \mathbf{NP}$ und da $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ vorausgesetzt, folgt $L \in \mathbf{P}$ □

- L' ist in Π_{i-1}^p (für $\overline{L'}$ alle Quantoren und M negieren $\Rightarrow \overline{L'} \in \Sigma_{i-1}^p$)
- Nach IV gilt: $\Pi_{i-1}^p \in \mathbf{P} \Rightarrow L' \in \mathbf{P}$
- Damit ex. det. TM M' , die L' in polynom. Zeit berechnet
-

$$x \in L \Leftrightarrow \exists u_1 \in \{0, 1\}^{q(|x|)} M'(x, u_1) = 1$$

- Damit $L \in \mathbf{NP}$ und da $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ vorausgesetzt, folgt $L \in \mathbf{P}$ □

- L' ist in Π_{i-1}^p (für $\overline{L'}$ alle Quantoren und M negieren $\Rightarrow \overline{L'} \in \Sigma_{i-1}^p$)
- Nach IV gilt: $\Pi_{i-1}^p \in \mathbf{P} \Rightarrow L' \in \mathbf{P}$
- Damit ex. det. TM M' , die L' in polynom. Zeit berechnet
-

$$x \in L \Leftrightarrow \exists u_1 \in \{0, 1\}^{q(|x|)} M'(x, u_1) = 1$$

- Damit $L \in \mathbf{NP}$ und da $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ vorausgesetzt, folgt $L \in \mathbf{P}$ □

Wir definieren **PH** Vollständigkeit analog zur **NP** Vollständigkeit und erhalten damit :

Überlegung zur PH Vollständigkeit

Wenn eine **PH**-vollständige Sprache L existiert dann existiert ein i so dass $\mathbf{PH} = \Sigma_i^P$

Beweis :

- Da $\mathbf{PH} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Sigma_k^P \exists i$ so dass $L \in \Sigma_i^P$
- Können durch **PH** Vollständigkeit jedes $L' \in \mathbf{PH}$ in pol. Zeit auf L reduzieren
- und damit also auch $L' \in \Sigma_i^P$ □

Wir definieren **PH** Vollständigkeit analog zur **NP** Vollständigkeit und erhalten damit :

Überlegung zur PH Vollständigkeit

Wenn eine **PH**-vollständige Sprache L existiert dann existiert ein i so dass $\mathbf{PH} = \Sigma_i^P$

Beweis :

- Da $\mathbf{PH} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Sigma_k^P \exists i$ so dass $L \in \Sigma_i^P$
- Können durch **PH** Vollständigkeit jedes $L' \in \mathbf{PH}$ in pol. Zeit auf L reduzieren
- und damit also auch $L' \in \Sigma_i^P$ □

Wir definieren **PH** Vollständigkeit analog zur **NP** Vollständigkeit und erhalten damit :

Überlegung zur PH Vollständigkeit

Wenn eine **PH**-vollständige Sprache L existiert dann existiert ein i so dass $\mathbf{PH} = \Sigma_i^P$

Beweis :

- Da $\mathbf{PH} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Sigma_k^P \exists i$ so dass $L \in \Sigma_i^P$
- Können durch **PH** Vollständigkeit jedes $L' \in \mathbf{PH}$ in pol. Zeit auf L reduzieren
- und damit also auch $L' \in \Sigma_i^P$



Wir definieren **PH** Vollständigkeit analog zur **NP** Vollständigkeit und erhalten damit :

Überlegung zur PH Vollständigkeit

Wenn eine **PH**-vollständige Sprache L existiert dann existiert ein i so dass $\mathbf{PH} = \Sigma_i^P$

Beweis :

- Da $\mathbf{PH} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Sigma_k^P \exists i$ so dass $L \in \Sigma_i^P$
- Können durch **PH** Vollständigkeit jedes $L' \in \mathbf{PH}$ in pol. Zeit auf L reduzieren
- und damit also auch $L' \in \Sigma_i^P$



Wir definieren **PH** Vollständigkeit analog zur **NP** Vollständigkeit und erhalten damit :

Überlegung zur PH Vollständigkeit

Wenn eine **PH**-vollständige Sprache L existiert dann existiert ein i so dass $\mathbf{PH} = \Sigma_i^P$

Beweis :

- Da $\mathbf{PH} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Sigma_k^P \exists i$ so dass $L \in \Sigma_i^P$
- Können durch **PH** Vollständigkeit jedes $L' \in \mathbf{PH}$ in pol. Zeit auf L reduzieren
- und damit also auch $L' \in \Sigma_i^P$



- Bild Anfangsseite :
<https://jeremykun.files.wordpress.com/2012/02/pvsnp.jpg>
- Einleitung Halteproblem :
<http://s1060.photobucket.com/user/LandruBek/media/dkos/bitter-b8.jpg.html>