Karlsruher Institut für Technologie

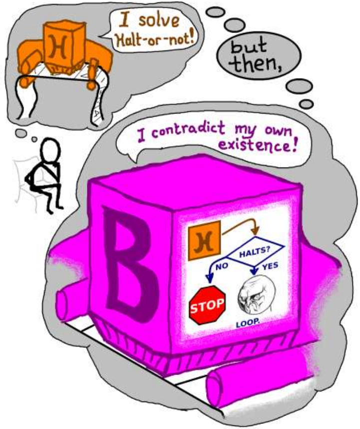
Diagonalisierung und polynomielle Hierarchie

Corvin Paul, Matthias Schimek

Institut für Theoretische Informatik - Algorithmik I

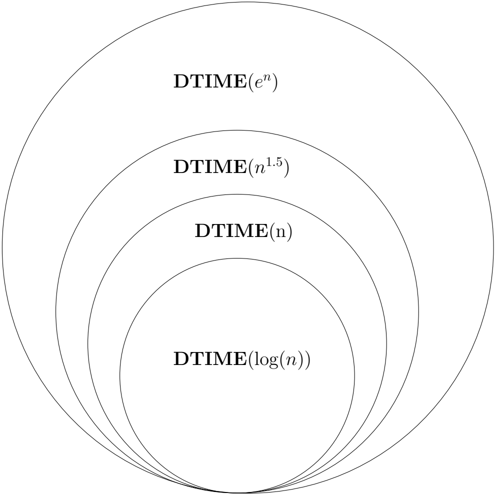
Diagonalisierung als Beweistechnik

Diagonalisierung : Was ist das eigentlich?



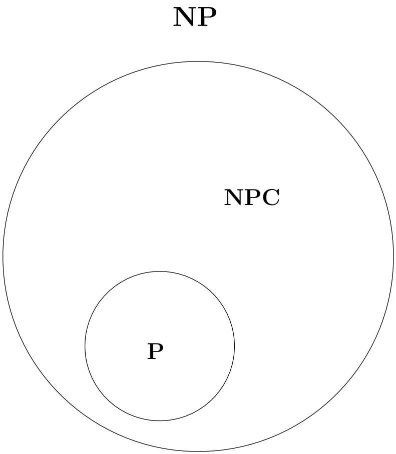
Diagonalisierung als Beweistechnik

Eine Hierarchie von Komplexitätsklassen



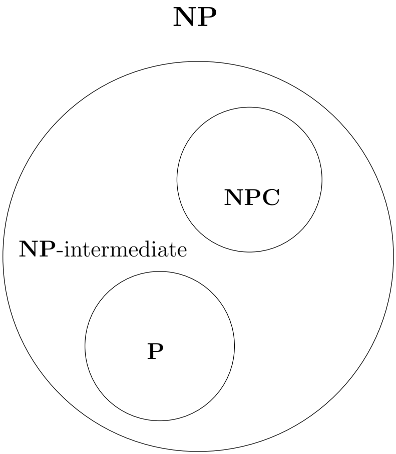
Diagonalisierung als Beweistechnik

P oder NPC : gibt es noch mehr in NP?



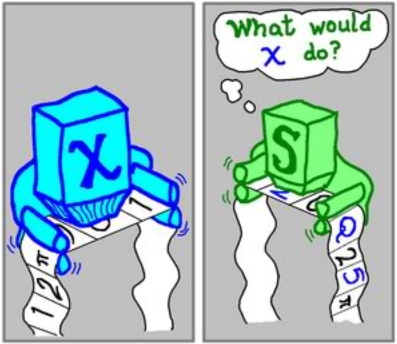
Diagonalisierung als Beweistechnik

P oder NPC : gibt es noch mehr in NP?



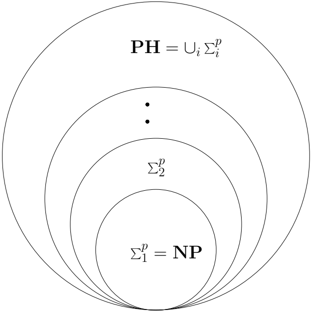
Diagonalisierung als Beweistechnik

Grenzen der Diagonalisierung



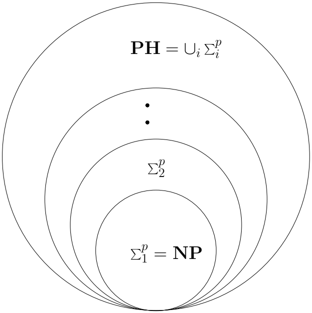
- Orakelmaschinen und die P, NP Frage

Die polynomielle Hierarchie



- Verallgemeinerung von **P** – **NP**
- Kollabiert die **PH**?

Die polynomielle Hierarchie



- Verallgemeinerung von **P** – **NP**
- Kollabiert die **PH**?

Gliederung

Diagonalisierung
- Was verstehen wir unter Diagonalisierung?
- Time Hierarchy
- Satz von Ladner
- Orakelmaschinen - Grenzen der Diagonalisierung

Die polynomielle Hierarchie
- Motivation und Beispiele
- Die Klasse **PH**

Gliederung

Diagonalisierung
- Was verstehen wir unter Diagonalisierung?
- Time Hierarchy
- Satz von Ladner
- Orakelmaschinen - Grenzen der Diagonalisierung

Die polynomielle Hierarchie
- Motivation und Beispiele
- Die Klasse **PH**

Diagonalisierung
Was verstehen wir darunter?

$w \in \{0,1\}^*$	Gödelnummer w_0	w_1	w_2	w_3	w_4
w_0	$\boxed{0}$	0	1	1	1
w_1	1	$\boxed{1}$	0	0	0
w_2	1	1	$\boxed{1}$	1	0
w_3	0	0	0	$\boxed{1}$	1
w_4	1	0	1	0	$\boxed{1}$

- Unentscheidbarkeit des Halteproblems
- Diagonalisierung nicht immer "schön" zu sehen
- In späteren Beweisen gewisse Abstraktion

Diagonalisierung

Was verstehen wir darunter?

$w \in \{0,1\}^*$	Gödelnummer				
	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4
w_0	0	0	1	1	1
w_1	1	1	0	0	0
w_2	1	1	1	1	0
w_3	0	0	0	1	1
w_4	1	0	1	0	1

- Unentscheidbarkeit des Halteproblems
- Diagonalisierung nicht immer "schön" zu sehen
- In späteren Beweisen gewisse Abstraktion

Diagonalisierung

Was verstehen wir darunter?

$w \in \{0,1\}^*$	Gödelnummer				
	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4
w_0	0	0	1	1	1
w_1	1	1	0	0	0
w_2	1	1	1	1	0
w_3	0	0	0	1	1
w_4	1	0	1	0	1

- Unentscheidbarkeit des Halteproblems
- Diagonalisierung nicht immer "schön" zu sehen
- In späteren Beweisen gewisse Abstraktion

Diagonalisierung

Was verstehen wir darunter?

Was ist Diagonalisierung

Als Diagonalisierung wird (in der Informatik) ein Beweis bezeichnet, der nur auf den beiden folgenden Eigenschaften von TM aufbaut.

1. Die Existenz einer Repräsentation von TM durch Zeichenketten (Gödelnummer)
2. Die Fähigkeit eine andere TM mit geringem zusätzlichen Zeit- oder Platzbedarf zu simulieren (Universelle TM)

Diagonalisierung

Was verstehen wir darunter?

Was ist Diagonalisierung

Als Diagonalisierung wird (in der Informatik) ein Beweis bezeichnet, der nur auf den beiden folgenden Eigenschaften von TM aufbaut.

1. Die Existenz einer Repräsentation von TM durch Zeichenketten (Gödelnummer)
2. Die Fähigkeit eine andere TM mit geringem zusätzlichen Zeit- oder Platzbedarf zu simulieren (Universelle TM)

Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

Diagonalisierung

Was verstehen wir darunter?

Was ist Diagonalisierung

Als Diagonalisierung wird (in der Informatik) ein Beweis bezeichnet, der nur auf den beiden folgenden Eigenschaften von TM aufbaut.

1. Die Existenz einer Repräsentation von TM durch Zeichenketten (Gödelnummer)
2. Die Fähigkeit eine andere TM mit geringem zusätzlichen Zeit- oder Platzbedarf zu simulieren (Universelle TM)

Gliederung

Time Hierarchy
Vorraussetzungen

Wiederholung :

- Für $i \in \mathbb{N}$ beschreibt i die TM M_i
- Jede TM wird von unendlich vielen $i \in \mathbb{N}$ beschrieben
- Es existiert eine universelle TM U, die jede TM mit logarithmischem Overhead simulieren kann

Time Hierarchy

Vorraussetzungen

Wiederholung :

- Für $i \in \mathbb{N}$ beschreibt i die TM M_i
- Jede TM wird von unendlich vielen $i \in \mathbb{N}$ beschrieben
- Es existiert eine universelle TM U, die jede TM mit logarithmischem Overhead simulieren kann

Time Hierarchy

Vorraussetzungen

Wiederholung :

- Für $i \in \mathbb{N}$ beschreibt i die TM M_i
- Jede TM wird von unendlich vielen $i \in \mathbb{N}$ beschrieben
- Es existiert eine universelle TM U, die jede TM mit logarithmischem Overhead simulieren kann

Time Hierarchy

Vorraussetzungen

Universelle TM

TM M_i läuft bei Eingabe x in $\mathcal{O}(f(n)) \Rightarrow$ TM U läuft bei Eingabe i, x in $\mathcal{O}(f(n)\log(f(n)))$

Time Hierarchy

Vorraussetzungen

Definition Time-constructible functions

Wir nennen eine Funktion f time-constructible, falls gilt :
$f(n)$ ist in $\mathcal{O}(f(n))$ berechenbar.

Definition DTIME

DTIME$(f(n)) = \{L \mid \exists$ deterministische Turingmaschine, die L in $\mathcal{O}(f(n))$ entscheidet $\}$

Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

Time Hierarchy
Vorraussetzungen

Definition Time-constructible functions

Wir nennen eine Funktion f time-constructible, falls gilt :
$f(n)$ ist in $\mathcal{O}(f(n))$ berechenbar.

Definition DTIME

$\textbf{DTIME}(f(n)) = \{L \mid \exists$ deterministische Turingmaschine, die L in $\mathcal{O}(f(n))$ entscheidet $\}$

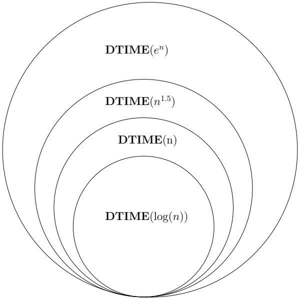
Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

Time Hierarchy

Deterministische Time Hierarchy

Satz: Time Hierarchy Theorem, 65

Seien f, g time-constructible mit $f(n)\log(f(n)) \in o(g(n))$, dann gilt $\mathbf{DTIME}(f(n)) \subsetneq \mathbf{DTIME}(g(n))$



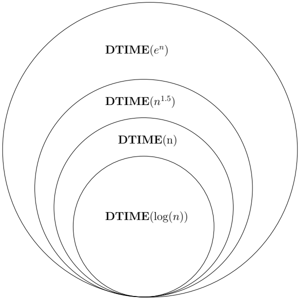
Frage : Warum brauchen wir den Faktor $\log(f(n))$?

Time Hierarchy

Deterministische Time Hierarchy

Satz: Time Hierarchy Theorem, 65

Seien f, g time-constructible mit $f(n)\log(f(n)) \in o(g(n))$, dann gilt $\mathbf{DTIME}(f(n)) \subsetneq \mathbf{DTIME}(g(n))$



Frage : Warum brauchen wir den Faktor $\log(f(n))$?

Time Hierarchy

Beweis det. Time Hierarchy

Wir zeigen $\mathbf{DTIME}(n) \subsetneq \mathbf{DTIME}(n^{1.5})$

Definition Turing Maschine D

Bei Eingabe x : Simuliere die TM M_x mit Eingabe x genau für $|x|^{1.4}$ Schritte. Danach gebe folgendes aus :

$$D(x) = \begin{cases} \overline{M_x(x)} & \text{falls die Simulation eine Ausgabe hatte} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei $L = \{x | D(x) = 1\}$ die von D erzeugte Sprache

Time Hierarchy

Beweis det. Time Hierarchy

Wir zeigen $\mathbf{DTIME}(n) \subsetneq \mathbf{DTIME}(n^{1.5})$

Definition Turing Maschine D

Bei Eingabe x : Simuliere die TM M_x mit Eingabe x genau für $|x|^{1.4}$ Schritte. Danach gebe folgendes aus :

$$D(x) = \begin{cases} \overline{M_x(x)} & \text{falls die Simulation eine Ausgabe hatte} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei $L = \{x | D(x) = 1\}$ die von D erzeugte Sprache

Time Hierarchy

Beweis det. Time Hierarchy

Behauptung

$L \in \textbf{DTIME}(n^{1.5})$ und $L \notin \textbf{DTIME}(n)$

- Wir nehmen an , dass $L \in \textbf{DTIME}(n)$
- $\Rightarrow \exists$ Turing Maschine M, die L entscheidet ($\Leftrightarrow \forall x \in \{0,1\}^*$ D(x) = M(x)) und für Eingabe x höchstens c|x| Schritte benötigt. (c ist konstant)
- Wir konstruieren Wiederspruch, indem wir D eine Gödelnummer x mit $M_x = M$ als Eingabe geben.

Time Hierarchy

Beweis det. Time Hierarchy

Behauptung

$L \in \textbf{DTIME}(n^{1.5})$ und $L \notin \textbf{DTIME}(n)$

- Wir nehmen an , dass $L \in \textbf{DTIME}(n)$
- $\Rightarrow \exists$ Turing Maschine M, die L entscheidet ($\Leftrightarrow \forall x \in \{0,1\}^*$ D(x) = M(x)) und für Eingabe x höchstens c|x| Schritte benötigt. (c ist konstant)
- Wir konstruieren Wiederspruch, indem wir D eine Gödelnummer x mit $M_x = M$ als Eingabe geben.

Time Hierarchy

Beweis det. Time Hierarchy

Behauptung

$L \in \mathbf{DTIME}(n^{1.5})$ und $L \notin \mathbf{DTIME}(n)$

- Wir nehmen an , dass $L \in \mathbf{DTIME}(n)$
- $\Rightarrow \exists$ Turing Maschine M, die L entscheidet ($\Leftrightarrow \forall x \in \{0, 1\}^*$ D(x) = M(x)) und für Eingabe x höchstens c|x| Schritte benötigt. (c ist konstant)
- Wir konstruieren Wiederspruch, indem wir D eine Gödelnummer x mit $M_x = M$ als Eingabe geben.

Time Hierarchy

Beweis det. Time Hierarchy

Behauptung

$L \in \mathbf{DTIME}(n^{1.5})$ und $L \notin \mathbf{DTIME}(n)$

- Wir nehmen an , dass $L \in \mathbf{DTIME}(n)$
- $\Rightarrow \exists$ Turing Maschine M, die L entscheidet ($\Leftrightarrow \forall x \in \{0, 1\}^*$ D(x) = M(x)) und für Eingabe x höchstens c|x| Schritte benötigt. (c ist konstant)
- Wir konstruieren Wiederspruch, indem wir D eine Gödelnummer x mit $M_x = M$ als Eingabe geben.

Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

Time Hierarchy

Beweis det. Time Hierarchy

Definition Turing Maschine D

Bei Eingabe x : Simuliere die TM M_x mit Eingabe x genau für $|x|^{1.4}$ Schritte. Danach gebe das invertierte Ergebniss von M_x aus

- Wollen $|x|$ groß genug, dass D für M_x eine Ausgabe erhält !
- M simuliert auf U läuft in $c|x|\log(|x|)$
- Wir wählen dazu Gödelnummer x mit $M_x = M$ so groß, dass gilt : $|x|^{1.4} > c|x|\log(|x|)$
- Damit läuft M_x in der Simulation in D komplett durch und D invertiert das Ergebniss
- Nun gilt $D(x) \neq M(x)$ □
- Beweis ähnlich auf allgemeinen Fall übertragbar

Time Hierarchy

Beweis det. Time Hierarchy

Definition Turing Maschine D

Bei Eingabe x : Simuliere die TM M_x mit Eingabe x genau für $|x|^{1.4}$ Schritte. Danach gebe das invertierte Ergebniss von M_x aus

- Wollen $|x|$ groß genug, dass D für M_x eine Ausgabe erhält !
- M simuliert auf U läuft in $c|x|\log(|x|)$
- Wir wählen dazu Gödelnummer x mit $M_x = M$ so groß, dass gilt : $|x|^{1.4} > c|x|\log(|x|)$
- Damit läuft M_x in der Simulation in D komplett durch und D invertiert das Ergebniss
- Nun gilt $D(x) \neq M(x)$ $\square$
- Beweis ähnlich auf allgemeinen Fall übertragbar

Time Hierarchy

Beweis det. Time Hierarchy

Definition Turing Maschine D

Bei Eingabe x : Simuliere die TM M_x mit Eingabe x genau für $|x|^{1.4}$ Schritte. Danach gebe das invertierte Ergebniss von M_x aus

- Wollen $|x|$ groß genug, dass D für M_x eine Ausgabe erhält !
- M simuliert auf U läuft in $c|x|\log(|x|)$
- Wir wählen dazu Gödelnummer x mit $M_x = M$ so groß, dass gilt : $|x|^{1.4} > c|x|\log(|x|)$
- Damit läuft M_x in der Simulation in D komplett durch und D invertiert das Ergebniss
- Nun gilt $D(x) \neq M(x)$ $\square$
- Beweis ähnlich auf allgemeinen Fall übertragbar

Time Hierarchy

Beweis det. Time Hierarchy

Definition Turing Maschine D

Bei Eingabe x : Simuliere die TM M_x mit Eingabe x genau für $|x|^{1.4}$ Schritte. Danach gebe das invertierte Ergebniss von M_x aus

- Wollen $|x|$ groß genug, dass D für M_x eine Ausgabe erhält !
- M simuliert auf U läuft in $c|x|\log(|x|)$
- Wir wählen dazu Gödelnummer x mit $M_x = M$ so groß, dass gilt : $|x|^{1.4} > c|x|\log(|x|)$
- Damit läuft M_x in der Simulation in D komplett durch und D invertiert das Ergebniss
- Nun gilt $D(x) \neq M(x)$ $\square$
- Beweis ähnlich auf allgemeinen Fall übertragbar

Time Hierarchy

Beweis det. Time Hierarchy

Karlsruher Institut für Technologie

Definition Turing Maschine D

Bei Eingabe x : Simuliere die TM M_x mit Eingabe x genau für $|x|^{1.4}$ Schritte. Danach gebe das invertierte Ergebniss von M_x aus

- Wollen $|x|$ groß genug, dass D für M_x eine Ausgabe erhält !
- M simuliert auf U läuft in $c|x|\log(|x|)$
- Wir wählen dazu Gödelnummer x mit $M_x = M$ so groß, dass gilt : $|x|^{1.4} > c|x|\log(|x|)$
- Damit läuft M_x in der Simulation in D komplett durch und D invertiert das Ergebniss
- Nun gilt $D(x) \neq M(x)$ $\square$
- Beweis ähnlich auf allgemeinen Fall übertragbar

Time Hierarchy

Beweis det. Time Hierarchy

Definition Turing Maschine D

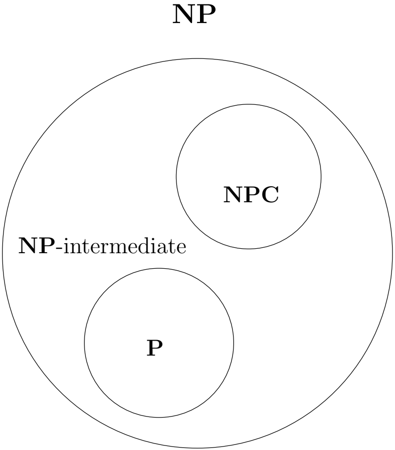
Bei Eingabe x : Simuliere die TM M_x mit Eingabe x genau für $|x|^{1.4}$ Schritte. Danach gebe das invertierte Ergebniss von M_x aus

- Wollen $|x|$ groß genug, dass D für M_x eine Ausgabe erhält !
- M simuliert auf U läuft in $c|x|\log(|x|)$
- Wir wählen dazu Gödelnummer x mit $M_x = M$ so groß, dass gilt : $|x|^{1.4} > c|x|\log(|x|)$
- Damit läuft M_x in der Simulation in D komplett durch und D invertiert das Ergebniss
- Nun gilt $D(x) \neq M(x)$ $\square$
- Beweis ähnlich auf allgemeinen Fall übertragbar

Gliederung

Satz von Ladner

Motivation



Frage : Gibt es **NP** Probleme, die nicht **NP**-vollständig sind, aber auch nicht in **P** liegen?

Satz von Ladner

NP-intermediate Probleme

Mögliche Kandidaten :

- Graphisomorphie (kommt in Vortrag 7)
- Faktorisierungsproblem
- Kein "natürliches" Problem bekannt

aber,

Satz von Ladner

Behauptung

Existenz einer NP-intermediate Sprache, Ladner, 75

Wenn $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ dann gilt :
Es existiert eine Sprache $L \in \mathbf{NP} \setminus \mathbf{P}$ die nicht **NP**-vollständig ist

Satz von Ladner

Beweisidee

Konstruieren Sprache mit diesen Eigenschaften und zeigen, dass sie in **NP** - intermediate ist, falls **P** $\neq$ **NP** :

Die Sprache $\textbf{SAT}_H$

Für eine Funktion $H : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definieren wir :
$\textbf{SAT}_H = \{\psi 0 1^{n^{H(n)}} : \psi \in \textbf{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$

Beispiel für $\textbf{SAT}_H$

Für $H(n) = n - 1$ und $\psi = a \wedge b$ gilt :
$(a \wedge b)01^{3^2} = (a \wedge b)0111111111 \in \textbf{SAT}_H$

Satz von Ladner

Beweisidee

Konstruieren Sprache mit diesen Eigenschaften und zeigen, dass sie in **NP** - intermediate ist, falls **P** $\neq$ **NP** :

Die Sprache SAT$_H$

Für eine Funktion $H : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definieren wir :
$\textbf{SAT}_H = \{\psi 0 1^{n^{H(n)}} : \psi \in \textbf{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$

Beispiel für SAT$_H$

Für $H(n) = n - 1$ und $\psi = a \wedge b$ gilt :
$(a \wedge b)01^{3^2} = (a \wedge b)0111111111 \in \textbf{SAT}_H$

Satz von Ladner

Beweisidee

Konstruieren Sprache mit diesen Eigenschaften und zeigen, dass sie in **NP** - intermediate ist, falls **P** $\neq$ **NP** :

Die Sprache SAT$_H$

Für eine Funktion $H : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definieren wir :
$\textbf{SAT}_H = \{\psi 0 1^{n^{H(n)}} : \psi \in \textbf{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$

Beispiel für SAT$_H$

Für $H(n) = n - 1$ und $\psi = a \wedge b$ gilt :
$(a \wedge b)01^{3^2} = (a \wedge b)0111111111 \in \textbf{SAT}_H$

Satz von Ladner

Beweis : Wahl von H

Definition von H

- Betrachte die TM $M_1, M_2, \ldots, M_{\lfloor \log(\log(n)) \rfloor}$.
- Wähle unter diesen die TM M_i mit kleinster Gödelnummer i, welche für alle $|x| \leq \log(n)$ $\mathbf{SAT}_H(x)$ in $i|x|^i$ Schritten berechnet
- Setze $H(n) = i$.
- Falls eine solche TM nicht existiert, setze $H(n) = \log(\log(n))$

Gewähltes H erfüllt die folgenden Eigenschaften

$\mathbf{SAT}_H \in \mathbf{P} \Leftrightarrow H(n) \in O(1)$ (also $H(n) \leq C$ für alle n)
und damit insbesondere $\lim_{n\to\infty} H(n) = \infty$ für $\mathbf{SAT}_H \notin \mathbf{P}$

- H erfüllt diese und ist polynomiell berechenbar.
- (ohne Beweis)

Satz von Ladner

Beweis : Wahl von H

Definition von H

- Betrachte die TM $M_1, M_2, ..., M_{\lfloor \log(\log(n)) \rfloor}$.
- Wähle unter diesen die TM M_i mit kleinster Gödelnummer i, welche für alle $|x| \leq \log(n)$ $\textbf{SAT}_H(x)$ in $i|x|^i$ Schritten berechnet
- Setze $H(n) = i$.
- Falls eine solche TM nicht existiert, setze $H(n) = \log(\log(n))$

Gewähltes H erfüllt die folgenden Eigenschaften

$\textbf{SAT}_H \in \textbf{P} \Leftrightarrow H(n) \in O(1)$ (also $H(n) \leq C$ für alle n)
und damit insbesondere $\lim_{n\to\infty} H(n) = \infty$ für $\textbf{SAT}_H \notin \textbf{P}$

- H erfüllt diese und ist polynomiell berechenbar.
- (ohne Beweis)

Satz von Ladner

Beweis : Wahl von H

Definition von H

- Betrachte die TM $M_1, M_2, ..., M_{\lfloor \log(\log(n)) \rfloor}$.
- Wähle unter diesen die TM M_i mit kleinster Gödelnummer i, welche für alle $|x| \leq \log(n)$ $\mathbf{SAT}_H(x)$ in $i|x|^i$ Schritten berechnet
- Setze $H(n) = i$.
- Falls eine solche TM nicht existiert, setze $H(n) = \log(\log(n))$

Gewähltes H erfüllt die folgenden Eigenschaften

$\mathbf{SAT}_H \in \mathbf{P} \Leftrightarrow H(n) \in O(1)$ (also $H(n) \leq C$ für alle n)
und damit insbesondere $\lim_{n\to\infty} H(n) = \infty$ für $\mathbf{SAT}_H \notin \mathbf{P}$

- H erfüllt diese und ist polynomiell berechenbar.
- (ohne Beweis)

Beweis von Ladner

$\mathbf{SAT}_H$ weder in P noch NP-complete

Definition von $\mathbf{SAT}_H$

$$\mathbf{SAT}_H = \{\psi 01^{n^{H(n)}} : \psi \in \mathbf{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$$

Gewähltes H erfüllt die folgenden Eigenschaften

$\mathbf{SAT}_H \in \mathbf{P} \Leftrightarrow H(n) \in O(1)$ (also $H(n) \leq C$ für alle n)

$\mathbf{SAT}_H$ ist nicht in P

- Angenommen $\mathbf{SAT}_H \in \mathbf{P} \Rightarrow H(n) \leq C$, C Konstante
- $\mathbf{SAT}_H$ ist also **SAT** mit höchsten polynomiell vielen angehängten 1en
- **SAT** kann somit durch dieselbe TM wie $\mathbf{SAT}_H$ gelöst werden
  - Konstruiere für Eingabe φ die $\mathbf{SAT}_H$-Instanz $\varphi 01^{|\varphi|^{H(|\varphi|)}}$
  - gebe diese Instanz in TM, welche $\mathbf{SAT}_H$ polynomiell entscheidet
- $\Rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{NP}$

Beweis von Ladner

$\mathbf{SAT}_H$ weder in P noch NP-complete

Definition von $\mathbf{SAT}_H$

$$\mathbf{SAT}_H = \{\psi 0 1^{n^{H(n)}} : \psi \in \mathbf{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$$

Gewähltes H erfüllt die folgenden Eigenschaften

$\mathbf{SAT}_H \in \mathbf{P} \Leftrightarrow H(n) \in O(1)$ (also $H(n) \leq C$ für alle n)

$\mathbf{SAT}_H$ ist nicht in P

- Angenommen $\mathbf{SAT}_H \in \mathbf{P} \Rightarrow H(n) \leq C$, C Konstante
- $\mathbf{SAT}_H$ ist also **SAT** mit höchsten polynomiell vielen angehängten 1en
- **SAT** kann somit durch dieselbe TM wie $\mathbf{SAT}_H$ gelöst werden
  - Konstruiere für Eingabe ψ die $\mathbf{SAT}_H$-Instanz $\psi 0 1^{n^{H(n)}}$
  - gebe diese Instanz in TM, welche $\mathbf{SAT}_H$ polynomiell entscheidet
- $\Rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{NP}$

Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

Beweis von Ladner

$\mathbf{SAT}_H$ weder in P noch NP-complete

Definition von $\mathbf{SAT}_H$

$\mathbf{SAT}_H = \{\psi 01^{n^{H(n)}} : \psi \in \mathbf{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$

Gewähltes H erfüllt die folgenden Eigenschaften

$\mathbf{SAT}_H \in \mathbf{P} \Leftrightarrow H(n) \in O(1)$ (also $H(n) \leq C$ für alle n)

$\mathbf{SAT}_H$ ist nicht in P

- Angenommen $\mathbf{SAT}_H \in \mathbf{P} \Rightarrow H(n) \leq C$, C Konstante
- $\mathbf{SAT}_H$ ist also **SAT** mit höchsten polynomiell vielen angehängten 1en
- **SAT** kann somit durch dieselbe TM wie $\mathbf{SAT}_H$ gelöst werden
  - Konstruiere für Eingabe φ die $\mathbf{SAT}_H$-Instanz $\varphi 01^{|\varphi|^{H(|\varphi|)}}$
  - gebe diese Instanz in TM, welche $\mathbf{SAT}_H$ polynomiell entscheidet
- $\Rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{NP}$

Beweis von Ladner

$\mathbf{SAT}_H$ weder in P noch NP-complete

Definition von $\mathbf{SAT}_H$

$\mathbf{SAT}_H = \{\psi 0 1^{n^{H(n)}} : \psi \in \mathbf{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$

Gewähltes H erfüllt die folgenden Eigenschaften

$\mathbf{SAT}_H \in \mathbf{P} \Leftrightarrow H(n) \in O(1)$ (also $H(n) \leq C$ für alle n)

$\mathbf{SAT}_H$ ist nicht in P

- Angenommen $\mathbf{SAT}_H \in \mathbf{P} \Rightarrow H(n) \leq C$, C Konstante
- $\mathbf{SAT}_H$ ist also **SAT** mit höchsten polynomiell vielen angehängten 1en
- **SAT** kann somit durch dieselbe TM wie $\mathbf{SAT}_H$ gelöst werden
  - Konstruiere für Eingabe φ die $\mathbf{SAT}_H$-Instanz $\varphi 0 1^{|\varphi|^{H(|\varphi|)}}$
  - gebe diese Instanz in TM, welche $\mathbf{SAT}_H$ polynomiell entscheidet
- $\Rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{NP}$

Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

Beweis von Ladner

SAT$_H$ weder in P noch NP-complete

Definition von SAT$_H$

$\textbf{SAT}_H = \{\psi 01^{n^{H(n)}} : \psi \in \textbf{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$

Gewähltes H erfüllt die folgenden Eigenschaften

$\textbf{SAT}_H \in \textbf{P} \Leftrightarrow H(n) \in O(1)$ (also $H(n) \leq C$ für alle n)

SAT$_H$ ist nicht in P

- Angenommen $\textbf{SAT}_H \in \textbf{P} \Rightarrow H(n) \leq C$, C Konstante
- **SAT**$_H$ ist also **SAT** mit höchsten polynomiell vielen angehängten 1en
- **SAT** kann somit durch dieselbe TM wie **SAT**$_H$ gelöst werden
  - Konstruiere für Eingabe φ die **SAT**$_H$-Instanz $\varphi 01^{|\varphi|^{H(|\varphi|)}}$
  - gebe diese Instanz in TM, welche **SAT**$_H$ polynomiell entscheidet
- $\Rightarrow \textbf{P} = \textbf{NP}$

Beweis von Ladner

$\textbf{SAT}_H$ weder in P noch NP-complete

Definition von $\textbf{SAT}_H$

$\textbf{SAT}_H = \{\psi 0 1^{n^{H(n)}} : \psi \in \textbf{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$

Gewähltes H erfüllt die folgenden Eigenschaften

$\textbf{SAT}_H \in \textbf{P} \Leftrightarrow H(n) \in O(1)$ (also $H(n) \leq C$ für alle n)

$\textbf{SAT}_H$ ist nicht in P

- Angenommen $\textbf{SAT}_H \in \textbf{P} \Rightarrow H(n) \leq C$, C Konstante
- $\textbf{SAT}_H$ ist also **SAT** mit höchsten polynomiell vielen angehängten 1en
- **SAT** kann somit durch dieselbe TM wie $\textbf{SAT}_H$ gelöst werden
  - Konstruiere für Eingabe φ die $\textbf{SAT}_H$-Instanz $\varphi 0 1^{|\varphi|^{H(|\varphi|)}}$
  - gebe diese Instanz in TM, welche $\textbf{SAT}_H$ polynomiell entscheidet
- $\Rightarrow \textbf{P} = \textbf{NP}$

Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

Beweis von Ladner

$\textbf{SAT}_H$ weder in P noch NP-complete

Definition von $\textbf{SAT}_H$

$\textbf{SAT}_H = \{\psi 0 1^{n^{H(n)}} : \psi \in \textbf{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$

Gewähltes H erfüllt die folgenden Eigenschaften

$\textbf{SAT}_H \in \textbf{P} \Leftrightarrow H(n) \in O(1)$ (also $H(n) \leq C$ für alle n)

$\textbf{SAT}_H$ ist nicht in P

- Angenommen $\textbf{SAT}_H \in \textbf{P} \Rightarrow H(n) \leq C$, C Konstante
- $\textbf{SAT}_H$ ist also **SAT** mit höchsten polynomiell vielen angehängten 1en
- **SAT** kann somit durch dieselbe TM wie $\textbf{SAT}_H$ gelöst werden
  - Konstruiere für Eingabe φ die $\textbf{SAT}_H$-Instanz $\varphi 0 1^{|\varphi|^{H(|\varphi|)}}$
  - gebe diese Instanz in TM, welche $\textbf{SAT}_H$ polynomiell entscheidet
- $\Rightarrow \textbf{P} = \textbf{NP}$

Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

Beweis von Ladner

$\mathbf{SAT}_H$ weder in P noch NP-complete

Definition von $\mathbf{SAT}_H$

$\mathbf{SAT}_H = \{\psi 0 1^{n^{H(n)}} : \psi \in \mathbf{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$

Gewähltes H erfüllt die folgenden Eigenschaften

$\mathbf{SAT}_H \in \mathbf{P} \Leftrightarrow H(n) \in O(1)$ (also $H(n) \leq C$ für alle n)

$\mathbf{SAT}_H$ ist nicht in P

- Angenommen $\mathbf{SAT}_H \in \mathbf{P} \Rightarrow H(n) \leq C$, C Konstante
- $\mathbf{SAT}_H$ ist also **SAT** mit höchsten polynomiell vielen angehängten 1en
- **SAT** kann somit durch dieselbe TM wie $\mathbf{SAT}_H$ gelöst werden
  - Konstruiere für Eingabe φ die $\mathbf{SAT}_H$-Instanz $\varphi 0 1^{|\varphi|^{H(|\varphi|)}}$
  - gebe diese Instanz in TM, welche $\mathbf{SAT}_H$ polynomiell entscheidet
- $\Rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{NP}$

Beweis von Ladner

$\mathbf{SAT}_H$ weder in P noch NP-complete

Definition von $\mathbf{SAT}_H$

$\mathbf{SAT}_H = \{\psi 0 1^{n^{H(n)}} : \psi \in \mathbf{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$

- Angenommen $\mathbf{SAT}_H \in \mathbf{NPC} \Rightarrow$ es existiert poly. Reduktion f von **SAT** auf $\mathbf{SAT}_H$.
- Da $\mathbf{SAT}_H \notin \mathbf{P}$ geht $H(n)$ gegen ∞
- **SAT**-Instanz φ wird mit f auf $\mathbf{SAT}_H$-Instanz der Form $\psi 0 1^{\psi^{H(|\psi|)}}$ abgebildet.
- $|f(\varphi)| = |\psi| + |0| + |\psi|^{H(|\psi|)}$

Beweis von Ladner

$\mathbf{SAT}_H$ weder in P noch NP-complete

Definition von $\mathbf{SAT}_H$

$\mathbf{SAT}_H = \{\psi 01^{n^{H(n)}} : \psi \in \mathbf{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$

$\mathbf{SAT}_H$ ist nicht in NPC

- Angenommen $\mathbf{SAT}_H \in \mathbf{NPC} \Rightarrow$ es existiert poly. Reduktion f von **SAT** auf $\mathbf{SAT}_H$.
- Da $\mathbf{SAT}_H \notin \mathbf{P}$ geht $H(n)$ gegen ∞
- **SAT**-Instanz φ wird mit f auf $\mathbf{SAT}_H$-Instanz der Form $\psi 01^{\psi^{H(|\psi|)}}$ abgebildet.
- $|f(\varphi)| = |\psi| + |0| + |\psi|^{H(|\psi|)}$

Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

Beweis von Ladner

$\mathbf{SAT}_H$ weder in P noch NP-complete

Definition von $\mathbf{SAT}_H$

$\mathbf{SAT}_H = \{\psi 01^{n^{H(n)}} : \psi \in \mathbf{SAT}$ und $n = |\psi|\}$

$\mathbf{SAT}_H$ ist nicht in NPC

- Angenommen $\mathbf{SAT}_H \in \mathbf{NPC} \Rightarrow$ es existiert poly. Reduktion f von **SAT** auf $\mathbf{SAT}_H$.
- Da $\mathbf{SAT}_H \notin \mathbf{P}$ geht $H(n)$ gegen ∞
- **SAT**-Instanz φ wird mit f auf $\mathbf{SAT}_H$-Instanz der Form $\psi 01^{\psi^{H(|\psi|)}}$ abgebildet.
- $|f(\varphi)| = |\psi| + |0| + |\psi|^{H(|\psi|)}$

Beweis von Ladner

$\mathbf{SAT}_H$ weder in P noch NP-complete

Definition von $\mathbf{SAT}_H$

$\mathbf{SAT}_H = \{\psi 01^{n^{H(n)}} : \psi \in \mathbf{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$

$\mathbf{SAT}_H$ ist nicht in NPC

- Angenommen $\mathbf{SAT}_H \in$ **NPC** $\Rightarrow$ es existiert poly. Reduktion f von **SAT** auf $\mathbf{SAT}_H$.
- Da $\mathbf{SAT}_H \notin$ **P** geht $H(n)$ gegen ∞
- **SAT**-Instanz φ wird mit f auf $\mathbf{SAT}_H$-Instanz der Form $\psi 01^{\psi^{H(|\psi|)}}$ abgebildet.
- $|f(\varphi)| = |\psi| + |0| + |\psi|^{H(|\psi|)}$

Beweis von Ladner

$\mathbf{SAT}_H$ weder in P noch NP-complete

Definition von $\mathbf{SAT}_H$

$\mathbf{SAT}_H = \{\psi 0 1^{n^{H(n)}} : \psi \in \mathbf{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$

$\mathbf{SAT}_H$ ist nicht in NPC

- Angenommen $\mathbf{SAT}_H \in \mathbf{NPC} \Rightarrow$ es existiert poly. Reduktion f von **SAT** auf $\mathbf{SAT}_H$.
- Da $\mathbf{SAT}_H \notin \mathbf{P}$ geht $H(n)$ gegen ∞
- **SAT**-Instanz φ wird mit f auf $\mathbf{SAT}_H$-Instanz der Form $\psi 0 1^{\psi^{H(|\psi|)}}$ abgebildet.
- $|f(\varphi)| = |\psi| + |0| + |\psi|^{H(|\psi|)}$

Beweis von Ladner

SAT$_H$ weder in P noch NP-complete

Definition von SAT$_H$

$\mathbf{SAT}_H = \{\psi 01^{n^{H(n)}} : \psi \in \mathbf{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$

- Für beliebig große **SAT**-Instanz φ wird $|\psi|$ in **SAT**$_H$ beliebig groß.
- $\Rightarrow$ ab gewisser Größe müssen **SAT**-Instanz φ von f auf **SAT**$_H$-Instanz mit $|\psi| \in o(n)$ abgebildet werden.
- Ansonsten wegen $H(n)$ gegen ∞ $||\psi|^{H(|\psi|)}|$ und damit $\Rightarrow$ $|\psi 01^{|\psi|^{H(|\psi|)}}|$ größer als jedes $p(|\varphi|)$.
- $|\psi|$ also echt kleiner als $\frac{|\varphi|}{2}$
- Algorithmus der **SAT** in poly. Zeit entscheidet
  - bilde **SAT**-Instanz φ mit f auf $\psi 01^{|\psi|^{H(|\psi|)}}$ ab
  - $|\psi|$ kleiner $\frac{|\varphi|}{2}$ und es gilt $\varphi \in \mathbf{SAT} \Leftrightarrow \psi \in \mathbf{SAT}$
  - Wiederhole ersten Schritt mit ψ als Eingabe
- Widerspruch zu $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$

Beweis von Ladner

$\textbf{SAT}_H$ weder in P noch NP-complete

Definition von $\textbf{SAT}_H$

$$\textbf{SAT}_H = \{\psi 0 1^{n^{H(n)}} : \psi \in \textbf{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$$

- Für beliebig große **SAT**-Instanz φ wird $|\psi|$ in $\textbf{SAT}_H$ beliebig groß.
- $\Rightarrow$ ab gewisser Größe müssen **SAT**-Instanz φ von f auf $\textbf{SAT}_H$-Instanz mit $|\psi| \in o(n)$ abgebildet werden.
- Ansonsten wegen $H(n)$ gegen ∞ $||\psi|^{H(|\psi|)}|$ und damit $\Rightarrow$ $|\psi 0 1^{|\psi|^{H(|\psi|)}}|$ größer als jedes $p(|\varphi|)$.
- $|\psi|$ also echt kleiner als $\frac{|\varphi|}{2}$
- Algorithmus der **SAT** in poly. Zeit entscheidet
  - bilde **SAT**-Instanz φ mit f auf $\psi 0 1^{|\psi|^{H(|\psi|)}}$ ab
  - $|\psi|$ kleiner $\frac{|\varphi|}{2}$ und es gilt $\varphi \in \textbf{SAT} \Leftrightarrow \psi \in \textbf{SAT}$
  - Wiederhole ersten Schritt mit ψ als Eingabe
- Widerspruch zu $\textbf{P} \neq \textbf{NP}$

Beweis von Ladner

$\mathbf{SAT}_H$ weder in P noch NP-complete

Definition von $\mathbf{SAT}_H$

$\mathbf{SAT}_H = \{\psi 0 1^{n^{H(n)}} : \psi \in \mathbf{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$

- Für beliebig große **SAT**-Instanz φ wird $|\psi|$ in $\mathbf{SAT}_H$ beliebig groß.
- $\Rightarrow$ ab gewisser Größe müssen **SAT**-Instanz φ von f auf $\mathbf{SAT}_H$-Instanz mit $|\psi| \in o(n)$ abgebildet werden.
- Ansonsten wegen $H(n)$ gegen ∞ $||\psi|^{H(|\psi|)}|$ und damit $\Rightarrow$ $|\psi 0 1^{|\psi|^{H(|\psi|)}}|$ größer als jedes $p(|\varphi|)$.
- $|\psi|$ also echt kleiner als $\frac{|\varphi|}{2}$
- Algorithmus der **SAT** in poly. Zeit entscheidet
  - bilde **SAT**-Instanz φ mit f auf $\psi 0 1^{|\psi|^{H(|\psi|)}}$ ab
  - $|\psi|$ kleiner $\frac{|\varphi|}{2}$ und es gilt $\varphi \in \mathbf{SAT} \Leftrightarrow \psi \in \mathbf{SAT}$
  - Wiederhole ersten Schritt mit ψ als Eingabe
- Widerspruch zu $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$

Beweis von Ladner

$\mathbf{SAT}_H$ weder in P noch NP-complete

Definition von $\mathbf{SAT}_H$

$$\mathbf{SAT}_H = \{\psi 0 1^{n^{H(n)}} : \psi \in \mathbf{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$$

- Für beliebig große **SAT**-Instanz φ wird $|\psi|$ in $\mathbf{SAT}_H$ beliebig groß.
- $\Rightarrow$ ab gewisser Größe müssen **SAT**-Instanz φ von f auf $\mathbf{SAT}_H$-Instanz mit $|\psi| \in o(n)$ abgebildet werden.
- Ansonsten wegen $H(n)$ gegen ∞ $||\psi|^{H(|\psi|)}|$ und damit $\Rightarrow$ $|\psi 0 1^{|\psi|^{H(|\psi|)}}|$ größer als jedes $p(|\varphi|)$.
- $|\psi|$ also echt kleiner als $\frac{|\varphi|}{2}$
- Algorithmus der **SAT** in poly. Zeit entscheidet
  - bilde **SAT**-Instanz φ mit f auf $\psi 0 1^{|\psi|^{H(|\psi|)}}$ ab
  - $|\psi|$ kleiner $\frac{|\varphi|}{2}$ und es gilt $\varphi \in \mathbf{SAT} \Leftrightarrow \psi \in \mathbf{SAT}$
  - Wiederhole ersten Schritt mit ψ als Eingabe
- Widerspruch zu $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$

Beweis von Ladner

$\mathbf{SAT}_H$ weder in P noch NP-complete

Definition von $\mathbf{SAT}_H$

$\mathbf{SAT}_H = \{\psi 0 1^{n^{H(n)}} : \psi \in \mathbf{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$

- Für beliebig große **SAT**-Instanz φ wird $|\psi|$ in $\mathbf{SAT}_H$ beliebig groß.
- $\Rightarrow$ ab gewisser Größe müssen **SAT**-Instanz φ von f auf $\mathbf{SAT}_H$-Instanz mit $|\psi| \in o(n)$ abgebildet werden.
- Ansonsten wegen $H(n)$ gegen ∞ $||\psi|^{H(|\psi|)}|$ und damit $\Rightarrow |\psi 0 1^{|\psi|^{H(|\psi|)}}|$ größer als jedes $p(|\varphi|)$.
- $|\psi|$ also echt kleiner als $\frac{|\varphi|}{2}$
- Algorithmus der **SAT** in poly. Zeit entscheidet
  - bilde **SAT**-Instanz φ mit f auf $\psi 0 1^{|\psi|^{H(|\psi|)}}$ ab
  - $|\psi|$ kleiner $\frac{|\varphi|}{2}$ und es gilt $\varphi \in \mathbf{SAT} \Leftrightarrow \psi \in \mathbf{SAT}$
  - Wiederhole ersten Schritt mit ψ als Eingabe
- Widerspruch zu $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$

Beweis von Ladner

$\mathbf{SAT}_H$ weder in P noch NP-complete

Definition von $\mathbf{SAT}_H$

$$\mathbf{SAT}_H = \{\psi 01^{n^{H(n)}} : \psi \in \mathbf{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$$

- Für beliebig große **SAT**-Instanz φ wird $|\psi|$ in $\mathbf{SAT}_H$ beliebig groß.
- $\Rightarrow$ ab gewisser Größe müssen **SAT**-Instanz φ von f auf $\mathbf{SAT}_H$-Instanz mit $|\psi| \in o(n)$ abgebildet werden.
- Ansonsten wegen $H(n)$ gegen ∞ $||\psi|^{H(|\psi|)}|$ und damit $\Rightarrow$ $|\psi 01^{|\psi|^{H(|\psi|)}}|$ größer als jedes $p(|\varphi|)$.
- $|\psi|$ also echt kleiner als $\frac{|\varphi|}{2}$
- Algorithmus der **SAT** in poly. Zeit entscheidet
  - bilde **SAT**-Instanz φ mit f auf $\psi 01^{|\psi|^{H(|\psi|)}}$ ab
  - $|\psi|$ kleiner $\frac{|\varphi|}{2}$ und es gilt $\varphi \in \mathbf{SAT} \Leftrightarrow \psi \in \mathbf{SAT}$
  - Wiederhole ersten Schritt mit ψ als Eingabe
- Widerspruch zu $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$

Beweis von Ladner

$\mathbf{SAT}_H$ weder in P noch NP-complete

Definition von $\mathbf{SAT}_H$

$\mathbf{SAT}_H = \{\psi 0 1^{n^{H(n)}} : \psi \in \mathbf{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$

- Für beliebig große **SAT**-Instanz φ wird $|\psi|$ in $\mathbf{SAT}_H$ beliebig groß.
- $\Rightarrow$ ab gewisser Größe müssen **SAT**-Instanz φ von f auf $\mathbf{SAT}_H$-Instanz mit $|\psi| \in o(n)$ abgebildet werden.
- Ansonsten wegen $H(n)$ gegen ∞ $||\psi|^{H(|\psi|)}|$ und damit $\Rightarrow$ $|\psi 0 1^{|\psi|^{H(|\psi|)}}|$ größer als jedes $p(|\varphi|)$.
- $|\psi|$ also echt kleiner als $\frac{|\varphi|}{2}$
- Algorithmus der **SAT** in poly. Zeit entscheidet
  - bilde **SAT**-Instanz φ mit f auf $\psi 0 1^{|\psi|^{H(|\psi|)}}$ ab
  - $|\psi|$ kleiner $\frac{|\varphi|}{2}$ und es gilt $\varphi \in \mathbf{SAT} \Leftrightarrow \psi \in \mathbf{SAT}$
  - Wiederhole ersten Schritt mit ψ als Eingabe
- Widerspruch zu $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$

Beweis von Ladner

$\mathbf{SAT}_H$ weder in P noch NP-complete

Definition von $\mathbf{SAT}_H$

$\mathbf{SAT}_H = \{\psi 0 1^{n^{H(n)}} : \psi \in \mathbf{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$

- Für beliebig große **SAT**-Instanz φ wird $|\psi|$ in $\mathbf{SAT}_H$ beliebig groß.
- $\Rightarrow$ ab gewisser Größe müssen **SAT**-Instanz φ von f auf $\mathbf{SAT}_H$-Instanz mit $|\psi| \in o(n)$ abgebildet werden.
- Ansonsten wegen $H(n)$ gegen ∞ $||\psi|^{H(|\psi|)}|$ und damit $\Rightarrow$ $|\psi 0 1^{|\psi|^{H(|\psi|)}}|$ größer als jedes $p(|\varphi|)$.
- $|\psi|$ also echt kleiner als $\frac{|\varphi|}{2}$
- Algorithmus der **SAT** in poly. Zeit entscheidet
  - bilde **SAT**-Instanz φ mit f auf $\psi 0 1^{|\psi|^{H(|\psi|)}}$ ab
  - $|\psi|$ kleiner $\frac{|\varphi|}{2}$ und es gilt $\varphi \in \mathbf{SAT} \Leftrightarrow \psi \in \mathbf{SAT}$
  - Wiederhole ersten Schritt mit ψ als Eingabe
- Widerspruch zu $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$

Beweis von Ladner

$\mathbf{SAT}_H$ weder in P noch NP-complete

Definition von $\mathbf{SAT}_H$

$\mathbf{SAT}_H = \{\psi 01^{n^{H(n)}} : \psi \in \mathbf{SAT} \text{ und } n = |\psi|\}$

- Für beliebig große **SAT**-Instanz φ wird $|\psi|$ in $\mathbf{SAT}_H$ beliebig groß.
- $\Rightarrow$ ab gewisser Größe müssen **SAT**-Instanz φ von f auf $\mathbf{SAT}_H$-Instanz mit $|\psi| \in o(n)$ abgebildet werden.
- Ansonsten wegen $H(n)$ gegen ∞ $||\psi|^{H(|\psi|)}|$ und damit $\Rightarrow$ $|\psi 01^{|\psi|^{H(|\psi|)}}|$ größer als jedes $p(|\varphi|)$.
- $|\psi|$ also echt kleiner als $\frac{|\varphi|}{2}$
- Algorithmus der **SAT** in poly. Zeit entscheidet
  - bilde **SAT**-Instanz φ mit f auf $\psi 01^{|\psi|^{H(|\psi|)}}$ ab
  - $|\psi|$ kleiner $\frac{|\varphi|}{2}$ und es gilt $\varphi \in \mathbf{SAT} \Leftrightarrow \psi \in \mathbf{SAT}$
  - Wiederhole ersten Schritt mit ψ als Eingabe
- Widerspruch zu $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$

Gliederung

Diagonalisierung
- Was verstehen wir unter Diagonalisierung?
- Time Hierarchy
- Satz von Ladner
- Orakelmaschinen - Grenzen der Diagonalisierung

Die polynomielle Hierarchie
- Motivation und Beispiele
- Die Klasse **PH**

Grenzen der Diagonalisierung

Wiederholung Diagonalisierung

Was ist Diagonalisierung

Als Diagonalisierung wird (hier) ein Beweis bezeichnet, der nur auf den beiden folgenden Eigenschaften von TM aufbaut.

1. Die Existenz einer Repräsentation von TM durch Zeichenketten (Gödelnummer)
2. Die Fähigkeit eine andere TM mit geringem zusätzlichen Zeit- oder Platzbedarf zu simulieren (Universelle TM)

Grenzen der Diagonalisierung

Wiederholung Diagonalisierung

Was ist Diagonalisierung

Als Diagonalisierung wird (hier) ein Beweis bezeichnet, der nur auf den beiden folgenden Eigenschaften von TM aufbaut.

1. Die Existenz einer Repräsentation von TM durch Zeichenketten (Gödelnummer)
2. Die Fähigkeit eine andere TM mit geringem zusätzlichen Zeit- oder Platzbedarf zu simulieren (Universelle TM)

Grenzen der Diagonalisierung

Wiederholung Diagonalisierung

Was ist Diagonalisierung

Als Diagonalisierung wird (hier) ein Beweis bezeichnet, der nur auf den beiden folgenden Eigenschaften von TM aufbaut.

1. Die Existenz einer Repräsentation von TM durch Zeichenketten (Gödelnummer)
2. Die Fähigkeit eine andere TM mit geringem zusätzlichen Zeit- oder Platzbedarf zu simulieren (Universelle TM)

Grenzen der Diagonalisierung

Definition von Orakelmschinen

- Werden zeigen, dass Diagonalisierung allein **P** / **NP** Frage nicht beantworten kann
- benötigen hierzu ein weitere Kategorie von Turingmaschinen.

Definition Orakel-Turingmaschine

Eine Orakel-Turingmaschine M ist eine TM, die folgende zusätzliche Eigenschaften hat:

- ein spezielles zusätzliches Band (Orakelband) und 3 spezielle zusätzliche Zustände $q_{query}, q_{yes}, q_{no}$.
- ein Orakel $O \subseteq \{0,1\}^*$
- Wenn M den Zustand q_{query} betritt, ist der Folgezustand
  - q_{yes}, wenn für Inhalt s des Orakelbands gilt $s \in O$ und
  - q_{no}, wenn $s \notin O$
- Das Orakel liefert die Antwort in einem Berechnungsschritt

Grenzen der Diagonalisierung

Definition von Orakelmschinen

- Werden zeigen, dass Diagonalisierung allein **P** / **NP** Frage nicht beantworten kann
- benötigen hierzu ein weitere Kategorie von Turingmaschinen.

Definition Orakel-Turingmaschine

Eine Orakel-Turingmaschine M ist eine TM, die folgende zusätzliche Eigenschaften hat:

- ein spezielles zusätzliches Band (Orakelband) und 3 spezielle zusätzliche Zustände $q_{query}, q_{yes}, q_{no}$.
- ein Orakel $O \subseteq \{0,1\}^*$
- Wenn M den Zustand q_{query} betritt, ist der Folgezustand
  - q_{yes}, wenn für Inhalt s des Orakelbands gilt $s \in O$ und
  - q_{no}, wenn $s \notin O$
- Das Orakel liefert die Antwort in einem Berechnungsschritt

Grenzen der Diagonalisierung

Definition von Orakelmschinen

- Werden zeigen, dass Diagonalisierung allein **P** / **NP** Frage nicht beantworten kann
- benötigen hierzu ein weitere Kategorie von Turingmaschinen.

Definition Orakel-Turingmaschine

Eine Orakel-Turingmaschine M ist eine TM, die folgende zusätzliche Eigenschaften hat:

- ein spezielles zusätzliches Band (Orakelband) und 3 spezielle zusätzliche Zustände $q_{query}, q_{yes}, q_{no}$.
- ein Orakel $O \subseteq \{0,1\}^*$
- Wenn M den Zustand q_{query} betritt, ist der Folgezustand
  - q_{yes}, wenn für Inhalt s des Orakelbands gilt $s \in O$ und
  - q_{no}, wenn $s \notin O$
- Das Orakel liefert die Antwort in einem Berechnungsschritt

Grenzen der Diagonalisierung

Definition von Orakelmschinen

- Werden zeigen, dass Diagonalisierung allein **P** / **NP** Frage nicht beantworten kann
- benötigen hierzu ein weitere Kategorie von Turingmaschinen.

Definition Orakel-Turingmaschine

Eine Orakel-Turingmaschine M ist eine TM, die folgende zusätzliche Eigenschaften hat:

- ein spezielles zusätzliches Band (Orakelband) und 3 spezielle zusätzliche Zustände $q_{query}, q_{yes}, q_{no}$.
- ein Orakel $O \subseteq \{0,1\}^*$
- Wenn M den Zustand q_{query} betritt, ist der Folgezustand
  - q_{yes}, wenn für Inhalt s des Orakelbands gilt $s \in O$ und
  - q_{no}, wenn $s \notin O$
- Das Orakel liefert die Antwort in einem Berechnungsschritt

Grenzen der Diagonalisierung

Definition von Orakelmschinen

- Werden zeigen, dass Diagonalisierung allein **P** / **NP** Frage nicht beantworten kann
- benötigen hierzu ein weitere Kategorie von Turingmaschinen.

Definition Orakel-Turingmaschine

Eine Orakel-Turingmaschine M ist eine TM, die folgende zusätzliche Eigenschaften hat:

- ein spezielles zusätzliches Band (Orakelband) und 3 spezielle zusätzliche Zustände $q_{query}, q_{yes}, q_{no}$.
- ein Orakel $O \subseteq \{0,1\}^*$
- Wenn M den Zustand q_{query} betritt, ist der Folgezustand
  - q_{yes}, wenn für Inhalt s des Orakelbands gilt $s \in O$ und
  - q_{no}, wenn $s \notin O$
- Das Orakel liefert die Antwort in einem Berechnungsschritt

Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

Grenzen der Diagonalisierung

Orakel-Komplexitätsklassen + Beispiel

Komplexitätsklassen von Orakelmaschinen

Für jedes $\mathbf{O} \subseteq \{0,1\}^*$ ist $\mathbf{P}^{\mathbf{O}}$ die Menge aller Sprachen, die eine det. Orakel-TM mit Orakel **O** entscheiden kann. $\mathbf{NP}^{\mathbf{O}}$ analog für nichtdet. Orakel-TM.

$\overline{\textbf{SAT}}$

- Für $\overline{\mathbf{SAT}}$, Sprache der nicht erfüllbaren Formeln, gilt $\overline{SAT} \in \mathbf{P}^{\mathbf{SAT}}$.
- Mit Orakel **SAT** kann TM in $\mathcal{O}(1)$ entscheiden, ob $\varphi \in$ **SAT** und gegenteilige Antwort ausgeben.

Grenzen der Diagonalisierung

Orakel-Komplexitätsklassen + Beispiel

Komplexitätsklassen von Orakelmaschinen

Für jedes $\mathbf{O} \subseteq \{0,1\}^*$ ist $\mathbf{P}^{\mathbf{O}}$ die Menge aller Sprachen, die eine det. Orakel-TM mit Orakel **O** entscheiden kann. $\mathbf{NP}^{\mathbf{O}}$ analog für nichtdet. Orakel-TM.

$\overline{\textbf{SAT}}$

- Für $\overline{\textbf{SAT}}$, Sprache der nicht erfüllbaren Formeln, gilt $\overline{SAT} \in \mathbf{P}^{\mathbf{SAT}}$.
- Mit Orakel **SAT** kann TM in $\mathcal{O}(1)$ entscheiden, ob $\varphi \in \mathbf{SAT}$ und gegenteilige Antwort ausgeben.

Grenzen der Diagonalisierung

Orakel-Komplexitätsklassen + Beispiel

Komplexitätsklassen von Orakelmaschinen

Für jedes $\mathbf{O} \subseteq \{0,1\}^*$ ist $\mathbf{P}^{\mathbf{O}}$ die Menge aller Sprachen, die eine det. Orakel-TM mit Orakel **O** entscheiden kann. $\mathbf{NP}^{\mathbf{O}}$ analog für nichtdet. Orakel-TM.

$\overline{\textbf{SAT}}$

- Für $\overline{\textbf{SAT}}$, Sprache der nicht erfüllbaren Formeln, gilt $\overline{SAT} \in \mathbf{P}^{\mathbf{SAT}}$.
- Mit Orakel **SAT** kann TM in $\mathcal{O}(1)$ entscheiden, ob $\varphi \in \mathbf{SAT}$ und gegenteilige Antwort ausgeben.

Grenzen der Diagonalisierung

Satz von Baker, Gill, Solovay

relativierende Beweise

Wir nennen einen Beweis, der auch für TM mit Orakel gilt, einen *relativierenden Beweis*

Satz (Baker, Gill, Solovay, 75)

Es existieren Orakel A, B , so dass $\mathbf{P}^A = \mathbf{NP}^A$ und $\mathbf{P}^B \neq \mathbf{NP}^B$

- Diagonalisierung ist relativierend und kann damit nicht für die $\mathbf{P} - \mathbf{NP}$ Frage genutzt werden.
- $\Rightarrow$ ein Beweis für die $\mathbf{P} - \mathbf{NP}$ Frage muss ein nicht relativierendes Verfahren nutzen !

Grenzen der Diagonalisierung

Satz von Baker, Gill, Solovay

relativierende Beweise

Wir nennen einen Beweis, der auch für TM mit Orakel gilt, einen *relativierenden Beweis*

Satz (Baker, Gill, Solovay, 75)

Es existieren Orakel A, B , so dass $\mathbf{P}^A = \mathbf{NP}^A$ und $\mathbf{P}^B \neq \mathbf{NP}^B$

- Diagonalisierung ist relativierend und kann damit nicht für die $\mathbf{P} - \mathbf{NP}$ Frage genutzt werden.
- $\Rightarrow$ ein Beweis für die $\mathbf{P} - \mathbf{NP}$ Frage muss ein nicht relativierendes Verfahren nutzen !

Grenzen der Diagonalisierung

Satz von Baker, Gill, Solovay

relativierende Beweise

Wir nennen einen Beweis, der auch für TM mit Orakel gilt, einen *relativierenden Beweis*

Satz (Baker, Gill, Solovay, 75)

Es existieren Orakel A, B , so dass $\mathbf{P}^A = \mathbf{NP}^A$ und $\mathbf{P}^B \neq \mathbf{NP}^B$

- Diagonalisierung ist relativierend und kann damit nicht für die $\mathbf{P} - \mathbf{NP}$ Frage genutzt werden.
- $\Rightarrow$ ein Beweis für die $\mathbf{P} - \mathbf{NP}$ Frage muss ein nicht relativierendes Verfahren nutzen !

Grenzen der Diagonalisierung

Satz von Baker, Gill, Solovay

relativierende Beweise

Wir nennen einen Beweis, der auch für TM mit Orakel gilt, einen *relativierenden Beweis*

Satz (Baker, Gill, Solovay, 75)

Es existieren Orakel A, B , so dass $\mathbf{P}^A = \mathbf{NP}^A$ und $\mathbf{P}^B \neq \mathbf{NP}^B$

- Diagonalisierung ist relativierend und kann damit nicht für die $\mathbf{P} - \mathbf{NP}$ Frage genutzt werden.
- $\Rightarrow$ ein Beweis für die $\mathbf{P} - \mathbf{NP}$ Frage muss ein nicht relativierendes Verfahren nutzen !

Grenzen der Diagonalisierung

Beweis : $\mathbf{P}^A = \mathbf{NP}^A$

Beweis des Satzes von Baker:

- Sei **EXPCOM** folgende Sprache:

  $$\{(M, x, 1^n) : M \textit{ akzeptiert } x \textit{ innerhalb von } 2^n \textit{ Schritten}\}$$

  Dann gilt $\mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{EXP}$.

- $\mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}}$

  TM M entscheide $L \in$ EXP in exponentieller Zeit.
  Baue Orakel-TM, die Orakel mit $(M, x, 1^{[illegible]})$ befragt

- $\mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$

  M polynomielle nichtdet. TM mit Orakel EXPCOM [illegible]
  Ausführung von M det. in Exponentialzeit simulieren
  Orakelaufruf in Exponentialzeit simulieren [illegible]

- $\Rightarrow \mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$

Grenzen der Diagonalisierung

Beweis : $\mathbf{P}^A = \mathbf{NP}^A$

Beweis des Satzes von Baker:

- Sei **EXPCOM** folgende Sprache:

$$\{(M, x, 1^n) : M \textit{ akzeptiert } x \textit{ innerhalb von } 2^n \textit{ Schritten}\}$$

  Dann gilt $\mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{EXP}$.
- $\mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}}$
  - TM M entscheide $L \in \mathbf{EXP}$ in exponentieller Zeit
  - Baue Orakel-TM, die Orakel mit $(M, x, q(|x|))$ aufruft
- $\mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$
  - M polynomielle nichtdet. TM mit Orakel **EXPCOM** für $L \in \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}}$.
  - Ausführung von M det. in Exponentialzeit simulieren
  - Orakelaufruf in Exponentialzeit simulieren (max $2^{|x|} \cdot 2^{q(|x|)}$ Schritte)
- $\Rightarrow \mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$

Grenzen der Diagonalisierung

Beweis : $\mathbf{P}^A = \mathbf{NP}^A$

Beweis des Satzes von Baker:

- Sei **EXPCOM** folgende Sprache:

  $$\{(M, x, 1^n) : M \textit{ akzeptiert } x \textit{ innerhalb von } 2^n \textit{ Schritten}\}$$

  Dann gilt $\mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{EXP}$.
- $\mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}}$
  - TM M entscheide $L \in \mathbf{EXP}$ in exponentieller Zeit
  - Baue Orakel-TM, die Orakel mit $(M, x, q(|x|))$ aufruft
- $\mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$
  - M polynomielle nichtdet. TM mit Orakel **EXPCOM** für $L \in \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}}$.
  - Ausführung von M det. in Exponentialzeit simulieren
  - Orakelaufruf in Exponentialzeit simulieren (max $2^{|x|} \cdot 2^{q(|x|)}$ Schritte)
- $\Rightarrow \mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$

Grenzen der Diagonalisierung

Beweis : $\mathbf{P}^A = \mathbf{NP}^A$

Beweis des Satzes von Baker:

- Sei **EXPCOM** folgende Sprache:

$$\{(M, x, 1^n) : M \textit{ akzeptiert } x \textit{ innerhalb von } 2^n \textit{ Schritten}\}$$

  Dann gilt $\mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{EXP}$.

- $\mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}}$
  - TM M entscheide $L \in$ **EXP** in exponentieller Zeit
  - Baue Orakel-TM, die Orakel mit $(M, x, q(|x|))$ aufruft
- $\mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$
  - M polynomielle nichtdet. TM mit Orakel **EXPCOM** für $L \in \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}}$.
  - Ausführung von M det. in Exponentialzeit simulieren
  - Orakelaufruf in Exponentialzeit simulieren (max $2^{|x|} \cdot 2^{q(|x|)}$ Schritte)
- $\Rightarrow \mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$

Grenzen der Diagonalisierung

Beweis : $\mathbf{P}^A = \mathbf{NP}^A$

Beweis des Satzes von Baker:

- Sei **EXPCOM** folgende Sprache:

$$\{(M, x, 1^n) : M \textit{ akzeptiert } x \textit{ innerhalb von } 2^n \textit{ Schritten}\}$$

  Dann gilt $\mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{EXP}$.

- $\mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}}$
  - TM M entscheide $L \in \mathbf{EXP}$ in exponentieller Zeit
  - Baue Orakel-TM, die Orakel mit $(M, x, q(|x|))$ aufruft
- $\mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$
  - M polynomielle nichtdet. TM mit Orakel **EXPCOM** für $L \in \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}}$.
  - Ausführung von M det. in Exponentialzeit simulieren
  - Orakelaufruf in Exponentialzeit simulieren (max $2^{|x|} \cdot 2^{q(|x|)}$ Schritte)
- $\Rightarrow \mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$

Grenzen der Diagonalisierung

Beweis : $\mathbf{P}^A = \mathbf{NP}^A$

Beweis des Satzes von Baker:

- Sei **EXPCOM** folgende Sprache:

$$\{(M, x, 1^n) : M \text{ } akzeptiert \text{ } x \text{ } innerhalb \text{ } von \text{ } 2^n \text{ } Schritten\}$$

  Dann gilt $\mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{EXP}$.

- $\mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}}$
  - TM M entscheide $L \in \mathbf{EXP}$ in exponentieller Zeit
  - Baue Orakel-TM, die Orakel mit $(M, x, q(|x|))$ aufruft
- $\mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$
  - M polynomielle nichtdet. TM mit Orakel **EXPCOM** für $L \in \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}}$.
  - Ausführung von M det. in Exponentialzeit simulieren
  - Orakelaufruf in Exponentialzeit simulieren (max $2^{|x|} \cdot 2^{q(|x|)}$ Schritte)
- $\Rightarrow \mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$

Grenzen der Diagonalisierung

Beweis : $\mathbf{P}^A = \mathbf{NP}^A$

Beweis des Satzes von Baker:

- Sei **EXPCOM** folgende Sprache:

$$\{(M, x, 1^n) : M \textit{ akzeptiert } x \textit{ innerhalb von } 2^n \textit{ Schritten}\}$$

  Dann gilt $\mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{EXP}$.
- $\mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}}$
  - TM M entscheide $L \in \mathbf{EXP}$ in exponentieller Zeit
  - Baue Orakel-TM, die Orakel mit $(M, x, q(|x|))$ aufruft
- $\mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$
  - M polynomielle nichtdet. TM mit Orakel **EXPCOM** für $L \in \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}}$:
  - Ausführung von M det. in Exponentialzeit simulieren
  - Orakelaufruf in Exponentialzeit simulieren (max $2^{|x|} \cdot 2^{q(|x|)}$ Schritte)
- $\Rightarrow \mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$

Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

Grenzen der Diagonalisierung

Beweis : $\mathbf{P}^A = \mathbf{NP}^A$

Beweis des Satzes von Baker:

- Sei **EXPCOM** folgende Sprache:

$$\{(M, x, 1^n) : M \textit{ akzeptiert } x \textit{ innerhalb von } 2^n \textit{ Schritten}\}$$

  Dann gilt $\mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{EXP}$.
- $\mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}}$
  - TM M entscheide $L \in \mathbf{EXP}$ in exponentieller Zeit
  - Baue Orakel-TM, die Orakel mit $(M, x, q(|x|))$ aufruft
- $\mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$
  - M polynomielle nichtdet. TM mit Orakel **EXPCOM** für $L \in \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}}$:
  - Ausführung von M det. in Exponentialzeit simulieren
  - Orakelaufruf in Exponentialzeit simulieren (max $2^{|x|} \cdot 2^{q(|x|)}$ Schritte)
- $\Rightarrow \mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$

Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

Grenzen der Diagonalisierung

Beweis : $\mathbf{P}^A = \mathbf{NP}^A$

Beweis des Satzes von Baker:

- Sei **EXPCOM** folgende Sprache:

$$\{(M, x, 1^n) : M \textit{ akzeptiert } x \textit{ innerhalb von } 2^n \textit{ Schritten}\}$$

  Dann gilt $\mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{EXP}$.
- $\mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}}$
  - TM M entscheide $L \in \mathbf{EXP}$ in exponentieller Zeit
  - Baue Orakel-TM, die Orakel mit $(M, x, q(|x|))$ aufruft
- $\mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$
  - M polynomielle nichtdet. TM mit Orakel **EXPCOM** für $L \in \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}}$:
  - Ausführung von M det. in Exponentialzeit simulieren
  - Orakelaufruf in Exponentialzeit simulieren (max $2^{|x|} \cdot 2^{q(|x|)}$ Schritte)
- $\Rightarrow \mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$

Grenzen der Diagonalisierung

Beweis : $\mathbf{P}^A = \mathbf{NP}^A$

Beweis des Satzes von Baker:

- Sei **EXPCOM** folgende Sprache:

  $$\{(M, x, 1^n) : M \textit{ akzeptiert } x \textit{ innerhalb von } 2^n \textit{ Schritten}\}$$

  Dann gilt $\mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} = \mathbf{EXP}$.
- $\mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}}$
  - TM M entscheide $L \in \mathbf{EXP}$ in exponentieller Zeit
  - Baue Orakel-TM, die Orakel mit $(M, x, q(|x|))$ aufruft
- $\mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$
  - M polynomielle nichtdet. TM mit Orakel **EXPCOM** für $L \in \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}}$:
  - Ausführung von M det. in Exponentialzeit simulieren
  - Orakelaufruf in Exponentialzeit simulieren (max $2^{|x|} \cdot 2^{q(|x|)}$ Schritte)
- $\Rightarrow \mathbf{EXP} \subseteq \mathbf{P}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{NP}^{\mathbf{EXPCOM}} \subseteq \mathbf{EXP}$

Grenzen der Diagonalisierung

Beweis : $\mathbf{P}^B \neq \mathbf{NP}^B$

Definition: unäre Sprache U_B

Für eine Sprache B sei $U_B = \{1^n : \text{Es gibt einen String der Länge } n \text{ in } B\}$

- Warum gilt $U_B \in \mathbf{NP}^B$?
- Müssen also nur noch B so konstruieren, dass $U_B \notin \mathbf{P}^B$

Grenzen der Diagonalisierung

Beweis : $\mathbf{P}^B \neq \mathbf{NP}^B$

Definition: unäre Sprache U_B

Für eine Sprache B sei $U_B = \{1^n : \text{Es gibt einen String der Länge } n \text{ in } B\}$

- Warum gilt $U_B \in \mathbf{NP}^B$?
- Müssen also nur noch B so konstruieren, dass $U_B \notin \mathbf{P}^B$

Grenzen der Diagonalisierung

Beweis : $\mathbf{P}^B \neq \mathbf{NP}^B$

Definition: unäre Sprache U_B

Für eine Sprache B sei $U_B = \{1^n :$ Es gibt einen String der Länge n in $B\}$

- Warum gilt $U_B \in \mathbf{NP}^B$?
- Müssen also nur noch B so konstruieren, dass $U_B \notin \mathbf{P}^B$

Grenzen der Diagonalisierung

Konstruktion von B

Wir konstruieren eine Folge von Sprachen $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ so , dass $B = \lim_{i \to \infty} B_i$

- Dazu iterieren wir über alle Turing Maschinen M_i und stellen sicher, dass M_i nicht in polynomieller Zeit U_B entscheiden kann
- Nutze dabei, dass die Anzahl der Wörter exponentiell in der Eingabelänge wächst

Grenzen der Diagonalisierung
Konstruktion von B

Wir konstruieren eine Folge von Sprachen $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ so , dass $B = \lim_{i\to\infty} B_i$

- Dazu iterieren wir über alle Turing Maschinen M_i und stellen sicher, dass M_i nicht in polynomieller Zeit U_B entscheiden kann
- Nutze dabei, dass die Anzahl der Wörter exponentiell in der Eingabelänge wächst

Grenzen der Diagonalisierung
Konstruktion von B

Wir fangen an mit $B_0 = \emptyset$. Konstruktion für B_{i+1} :

- Wähle n so, dass n größer als alle Strings in B_i
- Lasse M_i auf Eingabe 1^n genau $2^n/10$ Schritte laufen (Beachte, dass M_i das Orakel B hat!)

Grenzen der Diagonalisierung

Konstruktion von B

Wir fangen an mit $B_0 = \emptyset$. Konstruktion für B_{i+1} :

- Wähle n so, dass n größer als alle Strings in B_i
- Lasse M_i auf Eingabe 1^n genau $2^n/10$ Schritte laufen
  (Beachte, dass M_i das Orakel B hat!)

Grenzen der Diagonalisierung

Konstruktion von B

$B_i = \{11011011, 10, 101, 111, 000111\}$

Orakel

B

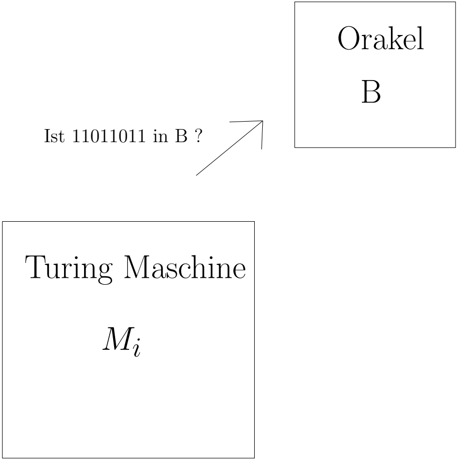
Turing Maschine

M_i

- Das Orakel antwortet konsistent auf dem bisherigen B_i
- Wir merken uns alle Strings der Länge n, die M_i an fragt!

Grenzen der Diagonalisierung
Konstruktion von B

$B_i = \{11011011, 10, 101, 111, 000111\}$

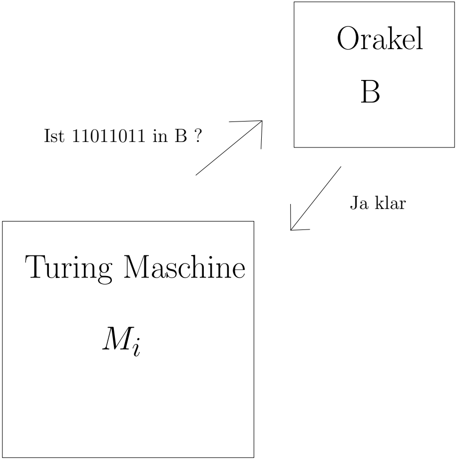


- Das Orakel antwortet konsistent auf dem bisherigen B_i
- Wir merken uns alle Strings der Länge n, die M_i an fragt!

Grenzen der Diagonalisierung

Konstruktion von B

$B_i = \{11011011, 10, 101, 111, 000111\}$



- Das Orakel antwortet konsistent auf dem bisherigen B_i
- Wir merken uns alle Strings der Länge n, die M_i an fragt!

Grenzen der Diagonalisierung

Konstruktion von *B*

$B_i = \{11011011, 10, 101, 111, 000111\}$

Orakel

B

Turing Maschine

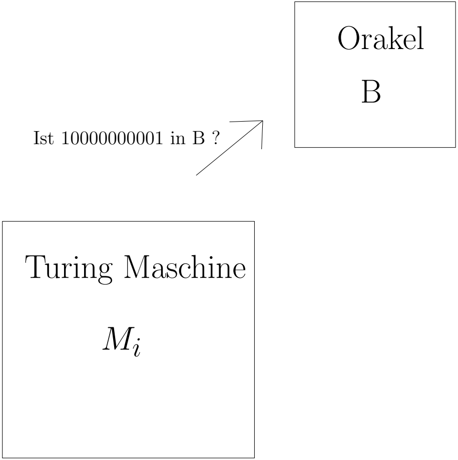
M_i

- Das Orakel antwortet konsistent auf dem bisherigen B_i
- Wir merken uns alle Strings der Länge n, die M_i an fragt!

Grenzen der Diagonalisierung

Konstruktion von *B*

$B_i = \{11011011, 10, 101, 111, 000111\}$

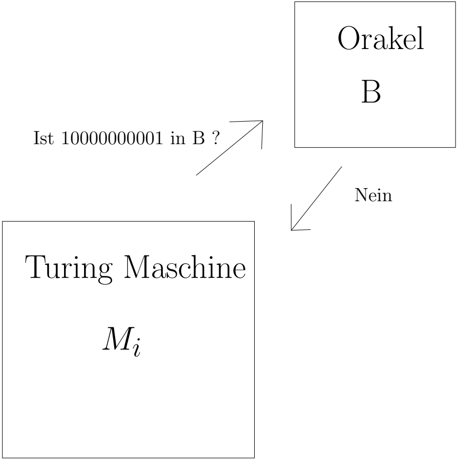


- Das Orakel antwortet konsistent auf dem bisherigen B_i
- Wir merken uns alle Strings der Länge n, die M_i an fragt!

Grenzen der Diagonalisierung

Konstruktion von *B*

$B_i = \{11011011, 10, 101, 111, 000111\}$



- Das Orakel antwortet konsistent auf dem bisherigen B_i
- Wir merken uns alle Strings der Länge n, die M_i an fragt!

Grenzen der Diagonalisierung

Konstruktion von B

- Wir definieren nun B_{i+1} wie folgt :
- Wenn M_i nicht gehalten hat : $B_{i+1} = B_i$
- ansonsten :
  - M_i akzeptiert 1^n : Wir definieren, dass kein String der Länge n in B ist
  - M_i lehnt ab : Wähle $x \in \{0,1\}^n$, welches nicht von M_i an gefragt wurde und setze $B_{i+1} = B_i \cup \{x\}$
  - warum existiert dieses x?

Grenzen der Diagonalisierung

Konstruktion von B

- Wir definieren nun B_{i+1} wie folgt :
- Wenn M_i nicht gehalten hat : $B_{i+1} = B_i$
- ansonsten :
  - M_i akzeptiert 1^n : Wir definieren, dass kein String der Länge n in B ist
  - M_i lehnt ab : Wähle $x \in \{0, 1\}^n$, welches nicht von M_i an gefragt wurde und setze $B_{i+1} = B_i \cup \{x\}$
  - warum existiert dieses x?

Grenzen der Diagonalisierung

Konstruktion von B

- Wir definieren nun B_{i+1} wie folgt :
- Wenn M_i nicht gehalten hat : $B_{i+1} = B_i$
- ansonsten :
  - M_i akzeptiert 1^n : Wir definieren, dass kein String der Länge n in B ist
  - M_i lehnt ab : Wähle $x \in \{0,1\}^n$, welches nicht von M_i an gefragt wurde und setze $B_{i+1} = B_i \cup \{x\}$
  - warum existiert dieses x?

Grenzen der Diagonalisierung

Konstruktion von B

Karlsruher Institut für Technologie

- Wir definieren nun B_{i+1} wie folgt :
- Wenn M_i nicht gehalten hat : $B_{i+1} = B_i$
- ansonsten :
  - M_i akzeptiert 1^n : Wir definieren, dass kein String der Länge n in B ist
  - M_i lehnt ab : Wähle $x \in \{0,1\}^n$, welches nicht von M_i an gefragt wurde und setze $B_{i+1} = B_i \cup \{x\}$
  - warum existiert dieses x?

Grenzen der Diagonalisierung

Konstruktion von B

- Wir definieren nun B_{i+1} wie folgt :
- Wenn M_i nicht gehalten hat : $B_{i+1} = B_i$
- ansonsten :
  - M_i akzeptiert 1^n : Wir definieren, dass kein String der Länge n in B ist
  - M_i lehnt ab : Wähle $x \in \{0, 1\}^n$, welches nicht von M_i an gefragt wurde und setze $B_{i+1} = B_i \cup \{x\}$
  - warum existiert dieses x?

Grenzen der Diagonalisierung

Konstruktion von B

- Wir definieren nun B_{i+1} wie folgt :
- Wenn M_i nicht gehalten hat : $B_{i+1} = B_i$
- ansonsten :
  - M_i akzeptiert 1^n : Wir definieren, dass kein String der Länge n in B ist
  - M_i lehnt ab : Wähle $x \in \{0,1\}^n$, welches nicht von M_i an gefragt wurde und setze $B_{i+1} = B_i \cup \{x\}$
  - warum existiert dieses x?

Grenzen der Diagonalisierung

Beweis Schluss

- Haben oben ein gesehen, dass $U_B \in \mathbf{NP}^B$
- Und für jede polynomiell beschränkte TM M existiert ein i (mit zugehörigem n aus Schritt i), so dass
  - $M = M_i$
  - M auf der Eingabe 1^n weniger als $2^n/10$ Schritte benötigt
  - und damit M_i nach Konstruktion die Frage $1^n \in U_B$ falsch beantwortet
- $\Rightarrow U_B \notin \mathbf{P}^B$ und damit $P^B \neq \mathbf{NP}^B$ □

Grenzen der Diagonalisierung

Beweis Schluss

- Haben oben ein gesehen, dass $U_B \in \mathbf{NP}^B$
- Und für jede polynomiell beschränkte TM M existiert ein i (mit zugehörigem n aus Schritt i), so dass
  - $M = M_i$
  - M auf der Eingabe 1^n weniger als $2^n/10$ Schritte benötigt
  - und damit M_i nach Konstruktion die Frage $1^n \in U_B$ falsch beantwortet
- $\Rightarrow U_B \notin \mathbf{P}^B$ und damit $P^B \neq \mathbf{NP}^B$ $\square$

Grenzen der Diagonalisierung

Beweis Schluss

- Haben oben ein gesehen, dass $U_B \in \mathbf{NP}^B$
- Und für jede polynomiell beschränkte TM M existiert ein i (mit zugehörigem n aus Schritt i), so dass
  - $M = M_i$
  - M auf der Eingabe 1^n weniger als $2^n/10$ Schritte benötigt
  - und damit M_i nach Konstruktion die Frage $1^n \in U_B$ falsch beantwortet
- $\Rightarrow U_B \notin \mathbf{P}^B$ und damit $P^B \neq \mathbf{NP}^B$ $\square$

Grenzen der Diagonalisierung

Beweis Schluss

- Haben oben ein gesehen, dass $U_B \in \mathbf{NP}^B$
- Und für jede polynomiell beschränkte TM M existiert ein i (mit zugehörigem n aus Schritt i), so dass
  - $M = M_i$
  - M auf der Eingabe 1^n weniger als $2^n/10$ Schritte benötigt
  - und damit M_i nach Konstruktion die Frage $1^n \in U_B$ falsch beantwortet
- $\Rightarrow U_B \notin \mathbf{P}^B$ und damit $P^B \neq \mathbf{NP}^B$ $\square$

Grenzen der Diagonalisierung

Beweis Schluss

- Haben oben ein gesehen, dass $U_B \in \mathbf{NP}^B$
- Und für jede polynomiell beschränkte TM M existiert ein i (mit zugehörigem n aus Schritt i), so dass
  - $M = M_i$
  - M auf der Eingabe 1^n weniger als $2^n/10$ Schritte benötigt
  - und damit M_i nach Konstruktion die Frage $1^n \in U_B$ falsch beantwortet
- $\Rightarrow U_B \notin \mathbf{P}^B$ und damit $P^B \neq \mathbf{NP}^B$ □

Grenzen der Diagonalisierung

Beweis Schluss

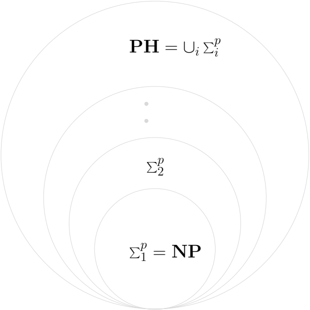
- Haben oben ein gesehen, dass $U_B \in \mathbf{NP}^B$
- Und für jede polynomiell beschränkte TM M existiert ein i (mit zugehörigem n aus Schritt i), so dass
  - $M = M_i$
  - M auf der Eingabe 1^n weniger als $2^n/10$ Schritte benötigt
  - und damit M_i nach Konstruktion die Frage $1^n \in U_B$ falsch beantwortet
- $\Rightarrow U_B \notin \mathbf{P}^B$ und damit $P^B \neq \mathbf{NP}^B$ $\square$

Gliederung

Motivation und Beispiele

Verallgemeinerung

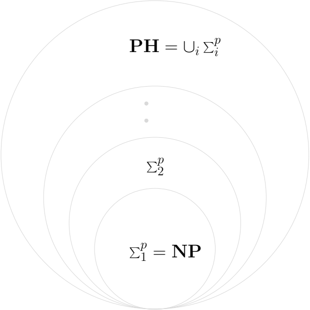
- bisher die Komplexitätsklassen **P**, **NP**, **coNP**
- es gibt Probleme, die sich nicht mit diesen klassifizieren lassen
- durch Verallgemeinerung dieser Klassen kann eine Reihe weiterer Probleme "eingefangen" werden
- Verallgemeinerung ist die "polynomielle Hierarchie" **PH**



Motivation und Beispiele

Verallgemeinerung

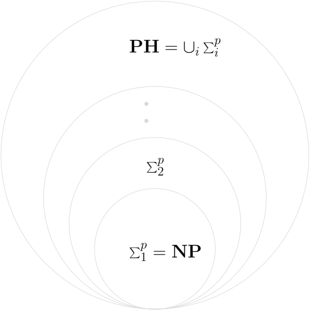
- bisher die Komplexitätsklassen **P**, **NP**, **coNP**
- es gibt Probleme, die sich nicht mit diesen klassifizieren lassen
- durch Verallgemeinerung dieser Klassen kann eine Reihe weiterer Probleme "eingefangen" werden
- Verallgemeinerung ist die "polynomielle Hierarchie" **PH**



Motivation und Beispiele

Verallgemeinerung

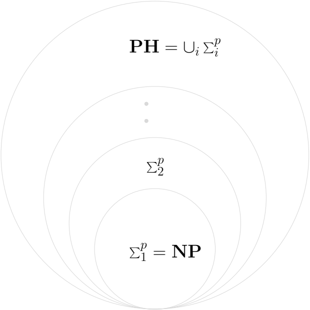
- bisher die Komplexitätsklassen **P**, **NP**, **coNP**
- es gibt Probleme, die sich nicht mit diesen klassifizieren lassen
- durch Verallgemeinerung dieser Klassen kann eine Reihe weiterer Probleme "eingefangen" werden
- Verallgemeinerung ist die "polynomielle Hierarchie" **PH**



Motivation und Beispiele

Verallgemeinerung

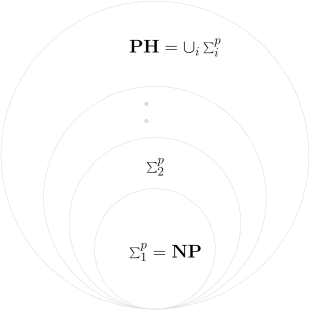
- bisher die Komplexitätsklassen **P**, **NP**, **coNP**
- es gibt Probleme, die sich nicht mit diesen klassifizieren lassen
- durch Verallgemeinerung dieser Klassen kann eine Reihe weiterer Probleme "eingefangen" werden
- Verallgemeinerung ist die "polynomielle Hierarchie" **PH**



Motivation und Beispiele

Verallgemeinerung

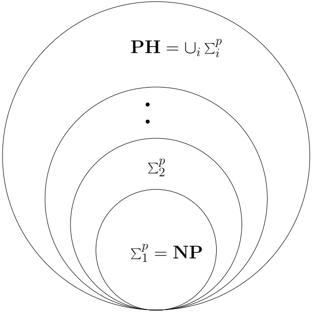
- bisher die Komplexitätsklassen **P**, **NP**, **coNP**
- es gibt Probleme, die sich nicht mit diesen klassifizieren lassen
- durch Verallgemeinerung dieser Klassen kann eine Reihe weiterer Probleme "eingefangen" werden
- Verallgemeinerung ist die "polynomielle Hierarchie" **PH**



Motivation und Beispiele

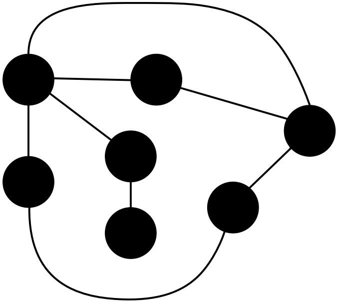
Verallgemeinerung

- bisher die Komplexitätsklassen **P**, **NP**, **coNP**
- es gibt Probleme, die sich nicht mit diesen klassifizieren lassen
- durch Verallgemeinerung dieser Klassen kann eine Reihe weiterer Probleme "eingefangen" werden
- Verallgemeinerung ist die "polynomielle Hierarchie" **PH**



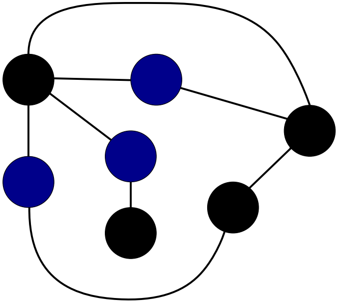
Motivation und Beispiel

Independent Set



Motivation und Beispiel

Independent Set



Motivation und Beispiele

Beispiele

Definition INDSET

Sei **INDSET** $= \{\langle G, k\rangle$: Graph G hat ein Independent set, welches Größe k hat $\}$

Bekannt : **INDSET** $\in$ **NPC**

Definition EXACTINDSET

Sei **EXACTINDSET** $= \{\langle G, k\rangle$: das größte independent set in G hat Größe genau k$\}$
$=\{\langle G, k\rangle$: $\exists$ independent set der Größe k in G und $\forall$ independent sets in G haben Größe $\leq k\}$

Motivation und Beispiele

Beispiele

Definition INDSET

Sei **INDSET** $= \{\langle G, k\rangle$: Graph G hat ein Independent set, welches Größe k hat $\}$

Bekannt : **INDSET** $\in$ **NPC**

Definition EXACTINDSET

Sei **EXACTINDSET** $= \{\langle G, k\rangle$: das größte independent set in G hat Größe genau k$\}$
$=\{\langle G, k\rangle$: $\exists$ independent set der Größe k in G und $\forall$ independent sets in G haben Größe $\leq k\}$

Motivation und Beispiele

Beispiele

Definition INDSET

Sei **INDSET** $= \{\langle G, k\rangle$: Graph G hat ein Independent set, welches Größe k hat $\}$

Bekannt : **INDSET** $\in$ **NPC**

Definition EXACTINDSET

Sei **EXACTINDSET** $= \{\langle G, k\rangle$: das größte independent set in G hat Größe genau k$\}$
$=\{\langle G, k\rangle$: $\exists$ independent set der Größe k in G und $\forall$ independent sets in G haben Größe $\leq k\}$

Motivation und Beispiele

Die Klasse $\sum_2^p$

INDSET

Sei **INDSET** $= \{\langle G, k\rangle$: $\exists$ independent set in G, welches Größe k hat $\}$

Wiederholung NP

NP ist die Menge aller Sprachen L für die gilt :
Es gibt eine deterministische polynomielle TM M und ein Polynom q so, dass :

$$x \in L \Leftrightarrow \exists u \in \{0,1\}^{q(|x|)} \;\; M(x,u) = 1$$

Motivation und Beispiele

Die Klasse $\sum_2^p$

EXACTINDSET

Sei **INDSET** $= \{\langle G, k\rangle$: $\exists$ independent set in G, welches Größe k hat und $\forall$ independent sets in G haben Größe $\leq k\}$

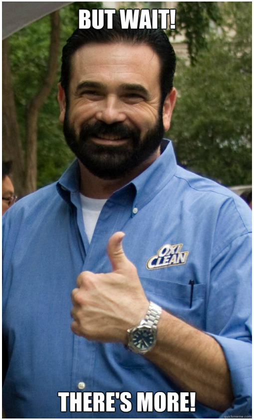
Definition $\sum_2^p$

$\sum_2^p$ ist die Menge aller Sprachen L für die gilt :
Es gibt eine deterministische polynomielle TM M und ein Polynom q so, dass :

$$x \in L \Leftrightarrow \exists u \in \{0,1\}^{q(|x|)}\ \forall v \in \{0,1\}^{q(|x|)}\ M(x,u,v) = 1$$

Motivation und Beispiele

Noch mehr Quantoren?



Gliederung

Die Klasse PH

Definition von PH

Definition $\sum_i^p$

$\sum_i^p$ ist die Menge aller Sprachen L für die gilt :
Es gibt deterministische polynomielle TM M und ein Polynom q so, dass :

$$x \in L \Leftrightarrow \exists u_1 \in \{0,1\}^{q(|x|)} \ \forall u_2 \in \{0,1\}^{q(|x|)} \ldots \mathcal{Q}_i u_i \in \{0,1\}^{q(|x|)} \ M(x, u_1, \ldots, u_i) = 1$$

gilt,wobei $\mathcal{Q}_i$ entweder $\forall$ oder $\exists$ beschreibt, abhängig davon ob i gerade oder ungerade ist.

Definition PH

Die polynomielle Hierarchie ist **PH** $= \cup_{i \in \mathbb{N}} \sum_i^p$

Die Klasse PH

Definition von PH

Definition $\sum_i^p$

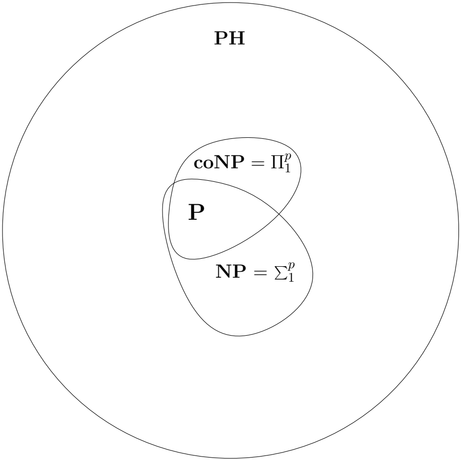
$\sum_i^p$ ist die Menge aller Sprachen L für die gilt :
Es gibt deterministische polynomielle TM M und ein Polynom q so, dass :

$$x \in L \Leftrightarrow \exists u_1 \in \{0,1\}^{q(|x|)} \; \forall u_2 \in \{0,1\}^{q(|x|)} \ldots \mathcal{Q}_i u_i \in \{0,1\}^{q(|x|)} \; M(x, u_1, \ldots, u_i) = 1$$

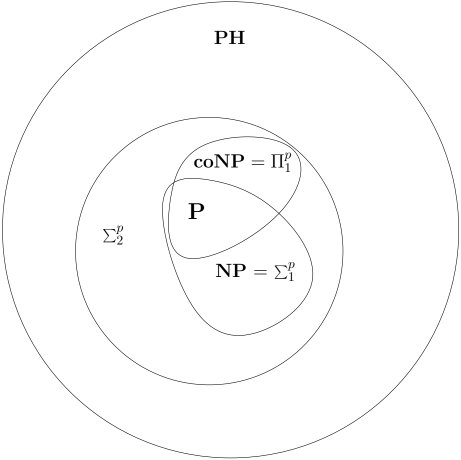
gilt,wobei $\mathcal{Q}_i$ entweder $\forall$ oder $\exists$ beschreibt, abhängig davon ob i gerade oder ungerade ist.

Definition PH

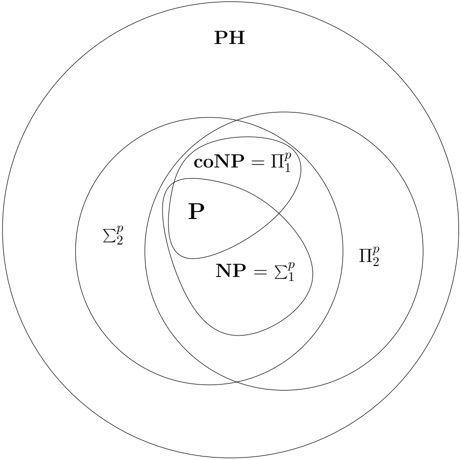
Die polynomielle Hierarchie ist $\mathbf{PH} = \cup_{i \in \mathbb{N}} \sum_i^p$



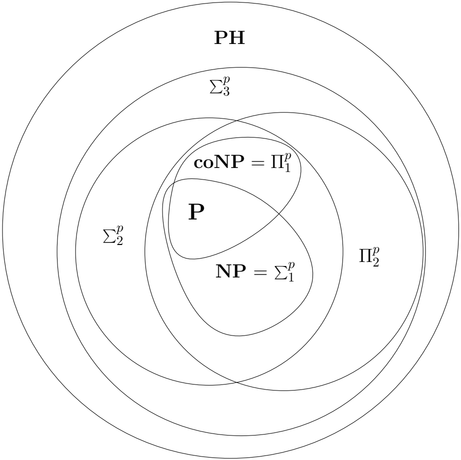
- Man sieht : $\sum_1^p = \mathbf{NP}$
- $\Pi_i^p := co\sum_i^p$
- $\sum_i^p \subseteq \Pi_{i+1}^p \subseteq \sum_{i+2}^p$



- Man sieht : $\sum_1^p = \mathbf{NP}$
- $\Pi_i^p := co\sum_i^p$
- $\sum_i^p \subseteq \Pi_{i+1}^p \subseteq \sum_{i+2}^p$



- Man sieht : $\sum_1^p = \mathbf{NP}$
- $\Pi_i^p := co \sum_i^p$
- $\sum_i^p \subseteq \Pi_{i+1}^p \subseteq \sum_{i+2}^p$



- Man sieht : $\sum_1^p = \mathbf{NP}$
- $\Pi_i^p := co\sum_i^p$
- $\sum_i^p \subseteq \Pi_{i+1}^p \subseteq \sum_{i+2}^p$

- Vermutung: **P** $\neq$ **NP** und **NP** $\neq$ **coNP**
- Verallgemeinerung: $\sum_i^p \subsetneq \sum_{i+1}^p$ für alle i
- "The polynomial hierarchy does not collapse"

Satz: Kollaps von PH und Auswirkungen auf P – NP

- Für alle $i \geq 0$ gilt: $\sum_i^p = \prod_i^p \quad \Rightarrow \quad \mathbf{PH} = \sum_i^p$
- Wenn $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, dann folgt $\mathbf{PH} = \mathbf{P}$

Die Klasse PH

Eigenschaften von PH

- Vermutung: **P** $\neq$ **NP** und **NP** $\neq$ **coNP**
- Verallgemeinerung: $\sum_i^p \subsetneq \sum_{i+1}^p$ für alle i
- "The polynomial hierarchy does not collapse"

Satz: Kollaps von PH und Auswirkungen auf P – NP

- Für alle $i \geq 0$ gilt: $\sum_i^p = \prod_i^p \Rightarrow$ **PH** $= \sum_i^p$
- Wenn **P** $=$ **NP**, dann folgt **PH** $=$ **P**

Die Klasse PH
Eigenschaften von PH

- Vermutung: **P** $\neq$ **NP** und **NP** $\neq$ **coNP**
- Verallgemeinerung: $\sum_i^p \subsetneq \sum_{i+1}^p$ für alle i
- "The polynomial hierarchy does not collapse"

Satz: Kollaps von PH und Auswirkungen auf P – NP

- Für alle $i \geq 0$ gilt: $\sum_i^p = \prod_i^p \Rightarrow \mathbf{PH} = \sum_i^p$
- Wenn $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, dann folgt $\mathbf{PH} = \mathbf{P}$

Die Klasse PH
Eigenschaften von PH

- Vermutung: $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ und $\mathbf{NP} \neq \mathbf{coNP}$
- Verallgemeinerung: $\sum_i^p \subsetneq \sum_{i+1}^p$ für alle i
- "The polynomial hierarchy does not collapse"

Satz: Kollaps von PH und Auswirkungen auf P – NP

- Für alle $i \geq 0$ gilt: $\sum_i^p = \prod_i^p \Rightarrow \mathbf{PH} = \sum_i^p$
- Wenn $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, dann folgt $\mathbf{PH} = \mathbf{P}$

Die Klasse PH
Eigenschaften von PH

- Vermutung: $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ und $\mathbf{NP} \neq \mathbf{coNP}$
- Verallgemeinerung: $\sum_i^p \subsetneq \sum_{i+1}^p$ für alle i
- "The polynomial hierarchy does not collapse"

Satz: Kollaps von PH und Auswirkungen auf P − NP

1. Für alle $i \geq 0$ gilt: $\sum_i^p = \prod_i^p \quad \Rightarrow \quad \mathbf{PH} = \sum_i^p$
2. Wenn $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, dann folgt $\mathbf{PH} = \mathbf{P}$

Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

Die Klasse PH
Eigenschaften von PH

- Vermutung: $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ und $\mathbf{NP} \neq \mathbf{coNP}$
- Verallgemeinerung: $\sum_i^p \subsetneq \sum_{i+1}^p$ für alle i
- "The polynomial hierarchy does not collapse"

Satz: Kollaps von PH und Auswirkungen auf $\mathbf{P} - \mathbf{NP}$

1. Für alle $i \geq 0$ gilt: $\sum_i^p = \prod_i^p \quad \Rightarrow \quad \mathbf{PH} = \sum_i^p$
2. Wenn $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, dann folgt $\mathbf{PH} = \mathbf{P}$

Die Klasse PH

Beweis

Beweis von $\mathbf{P} = \mathbf{NP} \Rightarrow \mathbf{PH} = \mathbf{P}$

- Sei $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, beweisen über Induktion $\sum_i^p, \prod_i^p \subseteq \mathbf{P}$ für alle i

- IA: $i = 1$, nach Voraussetzung: $\sum_1^p = \mathbf{NP}$, $\prod_1^p = \mathbf{coNP}$ und $\mathbf{P} = \mathbf{coP} = \mathbf{NP} = \mathbf{coNP}$ gilt

- IV: Es gelte $\sum_{i-1}^p \subseteq \mathbf{P}$ für $i - 1 \in \mathbb{N}$
- Anm: $\prod_{i-1}^p$ besteht aus Komplementsprachen der Sprachen in $\sum_{i-1}^p$ $\mathbf{P}$ ist abgeschlossen unter Komplementbildung $\Rightarrow \prod_{i-1}^p \subseteq \mathbf{P}$ unter IV.

Die Klasse PH

Beweis

Beweis von P = NP ⇒ PH = P

- Sei **P** = **NP**, beweisen über Induktion $\sum_i^p, \prod_i^p \subseteq$ **P** für alle i
- IA: $i = 1$, nach Voraussetzung: $\sum_1^p =$ **NP**, $\prod_1^p =$ **coNP** und **P** = **coP** = **NP** = **coNP** gilt
- IV: Es gelte $\sum_{i-1}^p \subseteq$ **P** für $i - 1 \in \mathbb{N}$
- Anm: $\prod_{i-1}^p$ besteht aus Komplementsprachen der Sprachen in $\sum_{i-1}^p$ **P** ist abgeschlossen unter Komplementbildung $\Rightarrow \prod_{i-1}^p \subseteq$ **P** unter IV.

Die Klasse PH

Beweis

Beweis von $\mathbf{P} = \mathbf{NP} \Rightarrow \mathbf{PH} = \mathbf{P}$

- Sei $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, beweisen über Induktion $\sum_i^p, \prod_i^p \subseteq \mathbf{P}$ für alle i
- IA: $i = 1$, nach Voraussetzung: $\sum_1^p = \mathbf{NP}, \quad \prod_1^p = \mathbf{coNP}$ und $\mathbf{P} = \mathbf{coP} = \mathbf{NP} = \mathbf{coNP}$ gilt
- IV: Es gelte $\sum_{i-1}^p \subseteq \mathbf{P}$ für $i - 1 \in \mathbb{N}$
- Anm: $\prod_{i-1}^p$ besteht aus Komplementsprachen der Sprachen in $\sum_{i-1}^p$ $\mathbf{P}$ ist abgeschlossen unter Komplementbildung $\Rightarrow \prod_{i-1}^p \subseteq \mathbf{P}$ unter IV.

Die Klasse PH
Beweis

Beweis von $\mathbf{P} = \mathbf{NP} \Rightarrow \mathbf{PH} = \mathbf{P}$

- Sei $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, beweisen über Induktion $\sum_i^p, \prod_i^p \subseteq \mathbf{P}$ für alle i
- IA: $i = 1$, nach Voraussetzung: $\sum_1^p = \mathbf{NP}, \quad \prod_1^p = \mathbf{coNP}$
  und $\mathbf{P} = \mathbf{coP} = \mathbf{NP} = \mathbf{coNP}$ gilt
- IV: Es gelte $\sum_{i-1}^p \subseteq \mathbf{P}$ für $i - 1 \in \mathbb{N}$
- Anm: $\prod_{i-1}^p$ besteht aus Komplementsprachen der Sprachen in $\sum_{i-1}^p$
  P ist abgeschlossen unter Komplementbildung $\Rightarrow \prod_{i-1}^p \subseteq \mathbf{P}$ unter IV.

Die Klasse PH

Beweis

- IS: Sei $L \in \sum_i^p$, dann ex. TM M und Polynom q so, dass

$$x \in L \Leftrightarrow \exists u_1 \in \{0,1\}^{q(|x|)} \forall u_2 \in \{0,1\}^{q(|x|)} \ldots \mathcal{Q}_i u_i \in \{0,1\}^{q(|x|)} M(x, u_1, u_2, ..., u_i) = 1$$

  gilt

- Definiere Sprache L'

$$(x, u_1) \in L' \Leftrightarrow \forall u_2 \in \{0,1\}^{q(|x|)} \ldots \mathcal{Q}_i u_i \in \{0,1\}^{q(|x|)} M(x, u_1, u_2, ...u_i) = 1$$

Die Klasse PH

Beweis

- IS: Sei $L \in \sum_i^p$, dann ex. TM M und Polynom q so, dass

$$x \in L \Leftrightarrow \exists u_1 \in \{0,1\}^{q(|x|)} \forall u_2 \in \{0,1\}^{q(|x|)} \dots \mathcal{Q}_i u_i \in \{0,1\}^{q(|x|)} \; M(x, u_1, u_2, \dots, u_i) = 1$$

  gilt

- Definiere Sprache L'

$$(x, u_1) \in L' \Leftrightarrow \forall u_2 \in \{0,1\}^{q(|x|)} \dots \mathcal{Q}_i u_i \in \{0,1\}^{q(|x|)} \; M(x, u_1, u_2, \dots u_i) = 1$$

Die Klasse PH

Beweis

- L' ist in $\prod_{i-1}^{p}$, denn

$$(x, u_1) \in L' \Leftrightarrow \forall u_2 \in \{0,1\}^{q(|x|)} \ldots \mathcal{Q}_i u_i \in \{0,1\}^{q(|x|)}$$
$$M(x, u_1, u_2, \ldots u_i) = 1$$

$$(x, u_1) \in \overline{L'} \Leftrightarrow \exists u_2 \in \{0,1\}^{q(|x|)} \ldots \overline{\mathcal{Q}_i} u_i \in \{0,1\}^{q(|x|)}$$
$$\overline{M(x, u_1, u_2, \ldots u_i)} = 1$$

- Also $\overline{L'} \in \sum_{i-1}^{p}$ und damit folgt Behauptung.

Die Klasse PH
Beweis

- L' ist in $\prod_{i-1}^{p}$, denn

$$(x, u_1) \in L' \Leftrightarrow \forall u_2 \in \{0,1\}^{q(|x|)} \ldots \mathcal{Q}_i u_i \in \{0,1\}^{q(|x|)} \\ M(x, u_1, u_2, \ldots u_i) = 1$$

$$(x, u_1) \in \overline{L'} \Leftrightarrow \exists u_2 \in \{0,1\}^{q(|x|)} \ldots \overline{\mathcal{Q}_i} u_i \in \{0,1\}^{q(|x|)} \\ \overline{M(x, u_1, u_2, \ldots u_i)} = 1$$

- Also $\overline{L'} \in \sum_{i-1}^{p}$ und damit folgt Behauptung.

Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

Die Klasse

Beweis

- L' ist in $\prod_{i-1}^{p}$
- Nach IV gilt: $\prod_{i-1}^{p} \subseteq \mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad L' \in \mathbf{P}$
- Damit ex. det. TM M', die L' in polynom. Zeit berechnet
- Nach Konstruktion gilt: $x \in L \Leftrightarrow \exists u_1 \in \{0,1\}^{q(|x|)} (x, u_1) \in L'$
- $$x \in L \Leftrightarrow \exists u_1 \in \{0,1\}^{q(|x|)} M'(x, u_1) = 1$$
- Damit $L \in \mathbf{NP}$ und da $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ vorausgesetzt, folgt $L \in \mathbf{P}$
- Somit $\sum_i^p, \prod_i^p \subseteq \mathbf{P}$ für alle i
- Also $\mathbf{PH} = \mathbf{P}$ □

Die Klasse
Beweis

- L' ist in $\prod_{i-1}^{p}$
- Nach IV gilt: $\prod_{i-1}^{p} \subseteq \mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad L' \in \mathbf{P}$
- Damit ex. det. TM M', die L' in polynom. Zeit berechnet
- Nach Konstruktion gilt: $x \in L \Leftrightarrow \exists u_1 \in \{0,1\}^{q(|x|)} (x, u_1) \in L'$
- $$x \in L \Leftrightarrow \exists u_1 \in \{0,1\}^{q(|x|)} M'(x, u_1) = 1$$
- Damit $L \in \mathbf{NP}$ und da $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ vorausgesetzt, folgt $L \in \mathbf{P}$
- Somit $\sum_i^p, \prod_i^p \subseteq \mathbf{P}$ für alle i
- Also $\mathbf{PH} = \mathbf{P}$ $\square$

Die Klasse
Beweis

- L' ist in $\prod_{i-1}^{p}$
- Nach IV gilt: $\prod_{i-1}^{p} \subseteq \mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad L' \in \mathbf{P}$
- Damit ex. det. TM M', die L' in polynom. Zeit berechnet
- Nach Konstruktion gilt: $x \in L \Leftrightarrow \exists u_1 \in \{0,1\}^{q(|x|)} (x, u_1) \in L'$
- $$x \in L \Leftrightarrow \exists u_1 \in \{0,1\}^{q(|x|)} M'(x, u_1) = 1$$
- Damit $L \in \mathbf{NP}$ und da $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ vorausgesetzt, folgt $L \in \mathbf{P}$
- Somit $\sum_i^p, \prod_i^p \subseteq \mathbf{P}$ für alle i
- Also $\mathbf{PH} = \mathbf{P}$ $\square$

Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

Die Klasse

Beweis

- L' ist in $\prod_{i-1}^{p}$
- Nach IV gilt: $\quad \prod_{i-1}^{p} \subseteq \mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad L' \in \mathbf{P}$
- Damit ex. det. TM M', die L' in polynom. Zeit berechnet
- Nach Konstruktion gilt: $x \in L \Leftrightarrow \exists u_1 \in \{0,1\}^{q(|x|)} (x, u_1) \in L'$
-
$$x \in L \Leftrightarrow \exists u_1 \in \{0,1\}^{q(|x|)} M'(x, u_1) = 1$$
- Damit $L \in \mathbf{NP}$ und da $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ vorausgesetzt, folgt $L \in \mathbf{P}$
- Somit $\sum_i^p, \prod_i^p \subseteq \mathbf{P}$ für alle i
- Also $\mathbf{PH} = \mathbf{P}$ $\square$

Die Klasse
Beweis

- L' ist in $\prod_{i-1}^{p}$
- Nach IV gilt: $\prod_{i-1}^{p} \subseteq \mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad L' \in \mathbf{P}$
- Damit ex. det. TM M', die L' in polynom. Zeit berechnet
- Nach Konstruktion gilt: $x \in L \Leftrightarrow \exists u_1 \in \{0,1\}^{q(|x|)}(x, u_1) \in L'$
- $$x \in L \Leftrightarrow \exists u_1 \in \{0,1\}^{q(|x|)} M'(x, u_1) = 1$$
- Damit $L \in \mathbf{NP}$ und da $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ vorausgesetzt, folgt $L \in \mathbf{P}$
- Somit $\sum_i^p, \prod_i^p \subseteq \mathbf{P}$ für alle i
- Also $\mathbf{PH} = \mathbf{P}$ $\square$

Die Klasse

Beweis

- L' ist in $\prod_{i-1}^{p}$
- Nach IV gilt: $\prod_{i-1}^{p} \subseteq \mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad L' \in \mathbf{P}$
- Damit ex. det. TM M', die L' in polynom. Zeit berechnet
- Nach Konstruktion gilt: $x \in L \Leftrightarrow \exists u_1 \in \{0,1\}^{q(|x|)} (x, u_1) \in L'$
-
$$x \in L \Leftrightarrow \exists u_1 \in \{0,1\}^{q(|x|)} M'(x, u_1) = 1$$
- Damit $L \in \mathbf{NP}$ und da $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ vorausgesetzt, folgt $L \in \mathbf{P}$
- Somit $\sum_i^p, \prod_i^p \subseteq \mathbf{P}$ für alle i
- Also $\mathbf{PH} = \mathbf{P}$ $\square$

Die Klasse

Beweis

- L' ist in $\prod_{i-1}^{p}$
- Nach IV gilt: $\prod_{i-1}^{p} \subseteq \mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad L' \in \mathbf{P}$
- Damit ex. det. TM M', die L' in polynom. Zeit berechnet
- Nach Konstruktion gilt: $x \in L \Leftrightarrow \exists u_1 \in \{0,1\}^{q(|x|)}(x, u_1) \in L'$
- $$x \in L \Leftrightarrow \exists u_1 \in \{0,1\}^{q(|x|)} M'(x, u_1) = 1$$
- Damit $L \in \mathbf{NP}$ und da $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ vorausgesetzt, folgt $L \in \mathbf{P}$
- Somit $\sum_i^p, \prod_i^p \subseteq \mathbf{P}$ für alle i
- Also $\mathbf{PH} = \mathbf{P}$

Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

Die Klasse

Beweis

- L' ist in $\prod_{i-1}^{p}$
- Nach IV gilt: $\prod_{i-1}^{p} \subseteq \mathbf{P} \quad \Rightarrow \quad L' \in \mathbf{P}$
- Damit ex. det. TM M', die L' in polynom. Zeit berechnet
- Nach Konstruktion gilt: $x \in L \Leftrightarrow \exists u_1 \in \{0,1\}^{q(|x|)} (x, u_1) \in L'$
- $$x \in L \Leftrightarrow \exists u_1 \in \{0,1\}^{q(|x|)} M'(x, u_1) = 1$$
- Damit $L \in \mathbf{NP}$ und da $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ vorausgesetzt, folgt $L \in \mathbf{P}$
- Somit $\sum_i^p, \prod_i^p \subseteq \mathbf{P}$ für alle i
- Also $\mathbf{PH} = \mathbf{P}$ $\square$

Die Klasse PH

PH Vollständigkeit

Wir definieren **PH** Vollständigkeit analog zur **NP** Vollständigkeit und erhalten damit :

Überlegung zur PH Vollständigkeit

Wenn eine **PH**-vollständige Sprache L existiert dann existiert ein i so, dass **PH** $= \sum_i^p$

Beweis :

- Da **PH** $= \cup_{k \in \mathbb{N}} \sum_k^p \; \exists i$ so dass $L \in \sum_i^p$
- Können durch **PH** Vollständigkeit jedes $L' \in$ **PH** in pol. Zeit auf L reduzieren
- und damit also auch $L' \in \sum_i^p$ $\square$

Die Klasse PH

PH Vollständigkeit

Wir definieren **PH** Vollständigkeit analog zur **NP** Vollständigkeit und erhalten damit :

Überlegung zur PH Vollständigkeit

Wenn eine **PH**-vollständige Sprache L existiert dann existiert ein i so, dass **PH** $= \sum_i^p$

Beweis :

- Da **PH** $= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \sum_k^p$ $\exists i$ so dass $L \in \sum_i^p$
- Können durch **PH** Vollständigkeit jedes $L' \in$ **PH** in pol. Zeit auf L reduzieren
- und damit also auch $L' \in \sum_i^p$ $\square$

Die Klasse PH

PH Vollständigkeit

Wir definieren **PH** Vollständigkeit analog zur **NP** Vollständigkeit und erhalten damit :

Überlegung zur PH Vollständigkeit

Wenn eine **PH**-vollständige Sprache L existiert dann existiert ein i so, dass **PH** $= \sum_i^p$

Beweis :

- Da **PH** $= \cup_{k \in \mathbb{N}} \sum_k^p \; \exists i$ so dass $L \in \sum_i^p$
- Können durch **PH** Vollständigkeit jedes $L' \in$ **PH** in pol. Zeit auf L reduzieren
- und damit also auch $L' \in \sum_i^p$ $\square$

Die Klasse PH

PH Vollständigkeit

Wir definieren **PH** Vollständigkeit analog zur **NP** Vollständigkeit und erhalten damit :

Überlegung zur PH Vollständigkeit

Wenn eine **PH**-vollständige Sprache L existiert dann existiert ein i so, dass **PH** $= \sum_i^p$

Beweis :

- Da **PH** $= \cup_{k \in \mathbb{N}} \sum_k^p$ $\exists i$ so dass $L \in \sum_i^p$
- Können durch **PH** Vollständigkeit jedes $L' \in$ **PH** in pol. Zeit auf L reduzieren
- und damit also auch $L' \in \sum_i^p$ $\square$

Corvin Paul, Matthias Schimek:

Fakultät für Informatik
Institut für Theoretische Informatik

Die Klasse PH

PH Vollständigkeit

Wir definieren **PH** Vollständigkeit analog zur **NP** Vollständigkeit und erhalten damit :

Überlegung zur PH Vollständigkeit

Wenn eine **PH**-vollständige Sprache L existiert dann existiert ein i so, dass **PH** $= \sum_i^p$

Beweis :

- Da **PH** $= \cup_{k \in \mathbb{N}} \sum_k^p \; \exists i$ so dass $L \in \sum_i^p$
- Können durch **PH** Vollständigkeit jedes $L' \in$ **PH** in pol. Zeit auf L reduzieren
- und damit also auch $L' \in \sum_i^p$ $\square$

Zusammenfassung

Was wir heute gelernt haben :

- Was Diagonalisierung ist
- Es gibt eine Hierarchie, die von der verfügbaren Rechenzeit abhängt
- Existenz von **NP** – *intermediate* Problemen
- Diagonalisierung allein kann die **P** – **NP** Frage nicht lösen
- **P** – **NP** lassen sich zur polynomiellen Hierarchie verallgemeinern

- Bild Anfangsseite : https://jeremykun.files.wordpress.com/2012/02/pvsnp.jpg
- Einleitung Halteproblem : http://s1060.photobucket.com/user/LandruBek/media/dkos/bitter-b8.jpg.html
- Halteproblem Diagonalisierung : http://i11www.iti.uni-karlsruhe.de/_media/teaching/winter2011/tgi/tgi_skript_ws11.pdf