

极客时间算法训练营

第四课

递归、分治

李煜东

《算法竞赛进阶指南》作者



目录

1. 递归的本质与基本实现形式
2. 递归题目实战
3. 分治：子问题的划分与合并
4. 分治算法的应用

递归的本质与基本实现形式

递归 Recursion

如何理解递归？

- 函数自身调用自身
- 通过函数体来进行的循环
- 以自相似的方法重复进行的过程

「禁止套娃」是什么梗？

17 人赞同了该回答

“禁止套娃”是什么梗？

发布于 2020-06-24

▲ 赞同 17



💬 2 条评论

➦ 分享

★ 收藏

♥ 喜欢



递归 Recursion

计算 $n!$

$$n! = 1 * 2 * 3 * \dots * n \quad \text{for } n > 1$$
$$= n * (n-1)!$$

```
def factorial(n):
```

```
    if n <= 1:
```

```
        return 1
```

```
    return n * factorial(n - 1)
```

递归 Recursion

factorial(6)

6 * factorial(5)

6 * (5 * factorial(4))

6 * (5 * (4 * factorial(3)))

6 * (5 * (4 * (3 * factorial(2))))

6 * (5 * (4 * (3 * (2 * factorial(1)))))

6 * (5 * (4 * (3 * (2 * 1)))) 1! = 1

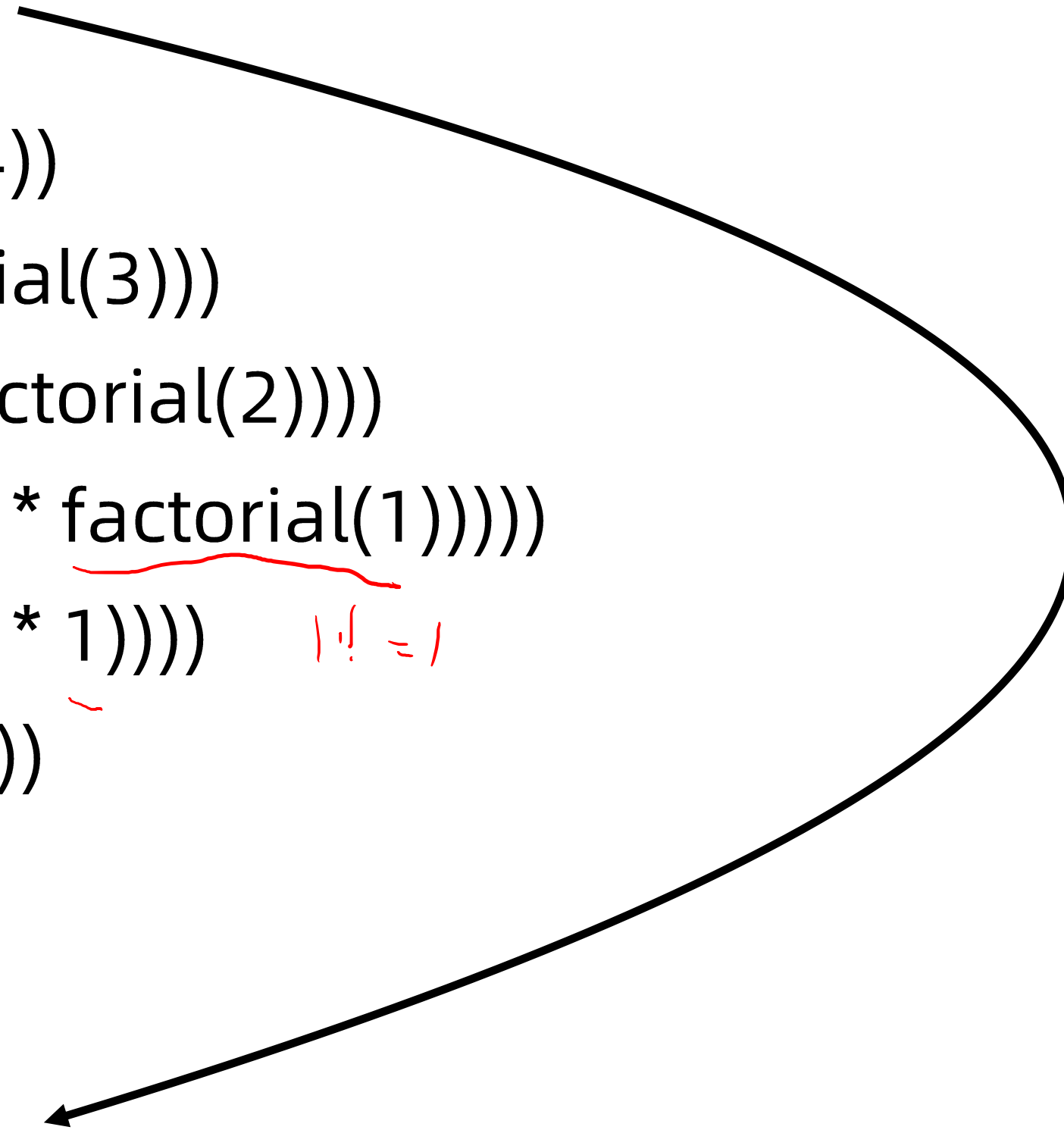
6 * (5 * (4 * (3 * 2)))

6 * (5 * (4 * 6))

6 * (5 * 24)

6 * 120

720



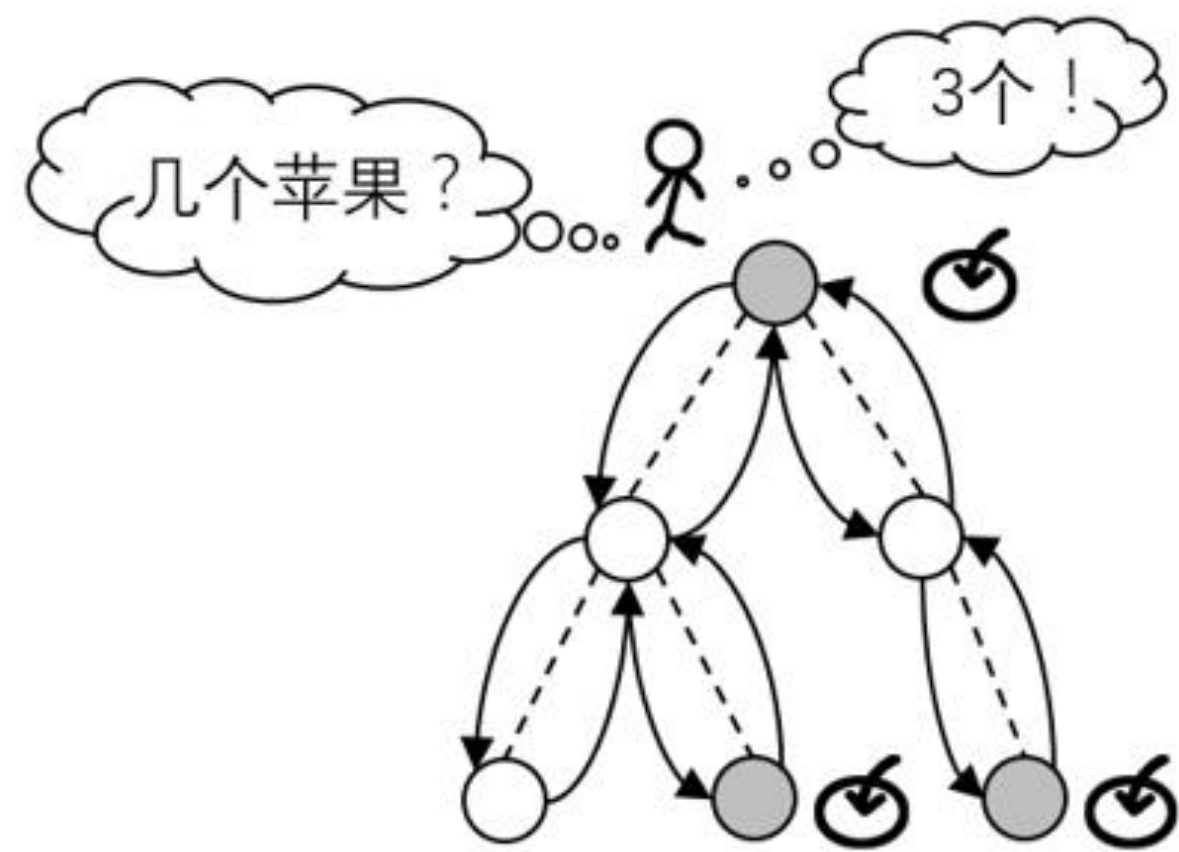
递归 Recursion

啊喂，求 $n!$ 用递推它不香吗.....

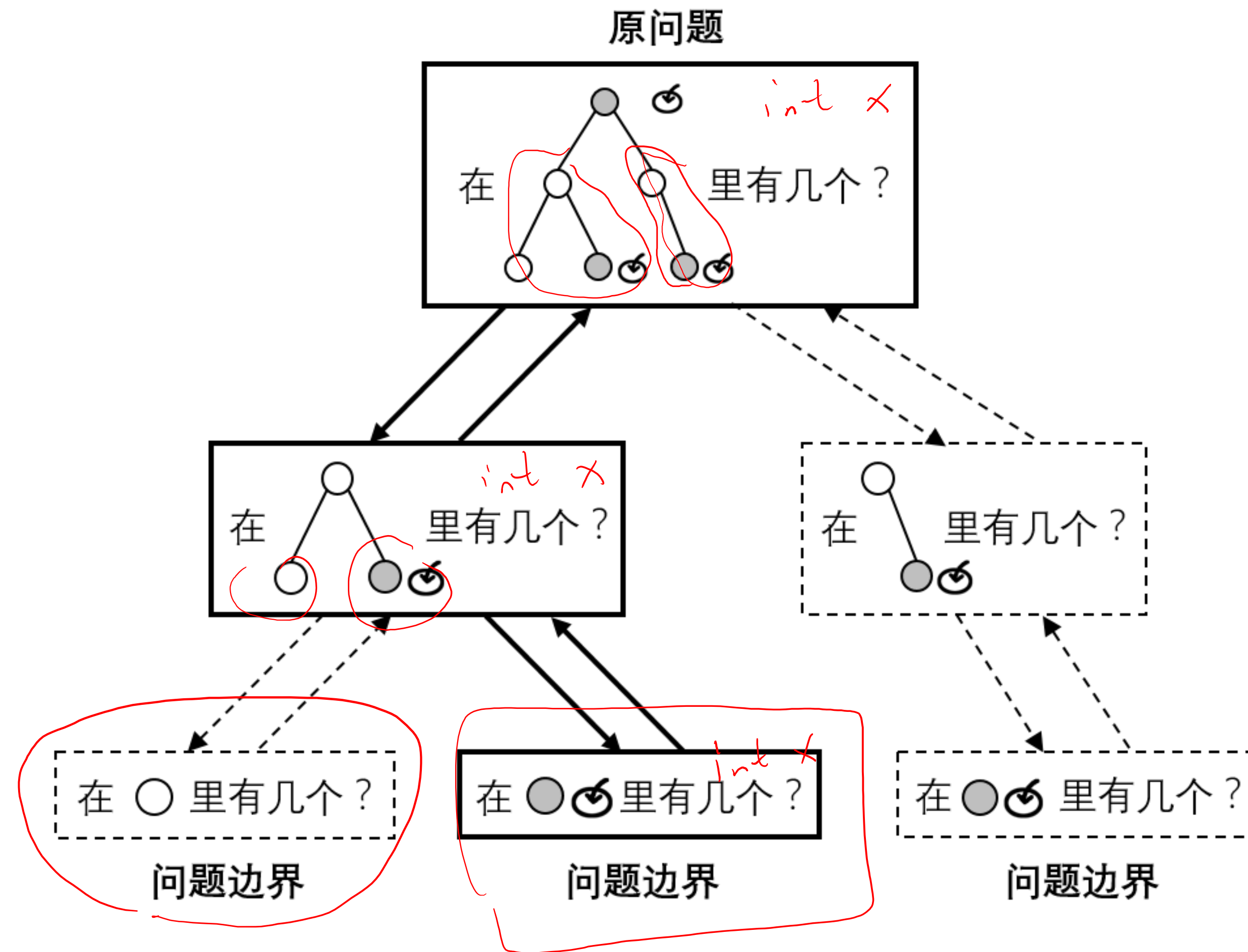
确实，因为 $n!$ 的推导路径我们已经知道了，for 一遍就好了。

但如果是不太容易找到推导路径的问题呢？

比如下面的问题，一棵树，在根节点的时候，我们是不知道下边长什么样的.....



递归 Recursion

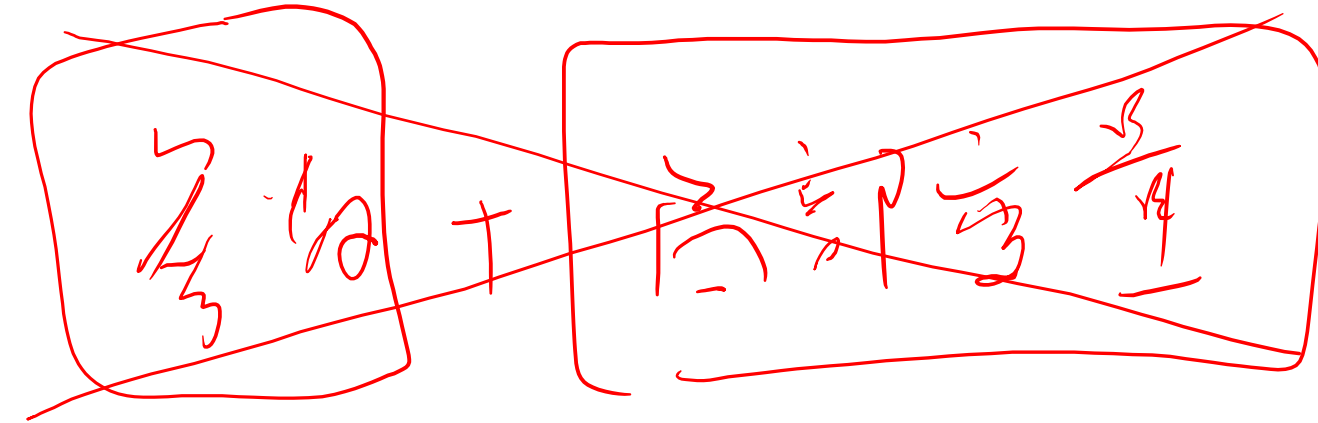


```
int visit [ ];
```


递归 Recursion

递归的三个关键：

- 定义需要递归的问题（重叠子问题）——数学归纳法思维
- 确定递归边界
- ~~保护与还原现场~~



全局变量. (class, 成员)

C++ / Java 代码模板

```
void recursion(int level, int param) {  
    // terminator  
    if (level > MAX_LEVEL) {  
        // process result  
        return;  
    }  
  
    // process logic in current level  
    process(level, param);  
  
    // drill down  
    recur(level + 1, new_param);  
  
    // restore the current level status  
}
```

Python 代码模板

```
def recursion(level, param1, param2, ...):  
    # recursion terminator  
    if level > MAX_LEVEL:  
        # process result  
        return  
  
    # process logic in current level  
    process(level, data...)   
  
    # drill down  
    self.recursion(level + 1, new_param1, ...)   
  
    # restore the current level status if needed
```

实战

子集

<https://leetcode-cn.com/problems/subsets/>

组合

<https://leetcode-cn.com/problems/combinations/>

全排列

<https://leetcode-cn.com/problems/permutations/>

全排列 II (Homework)

<https://leetcode-cn.com/problems/permutations-ii/>

index = 0

index = 1

index = 2

index = 3

⊗ ⊗

$$2^0 + 2^1 + \dots + 2^n$$

$$= 2^{n+1} - 1 = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}$$

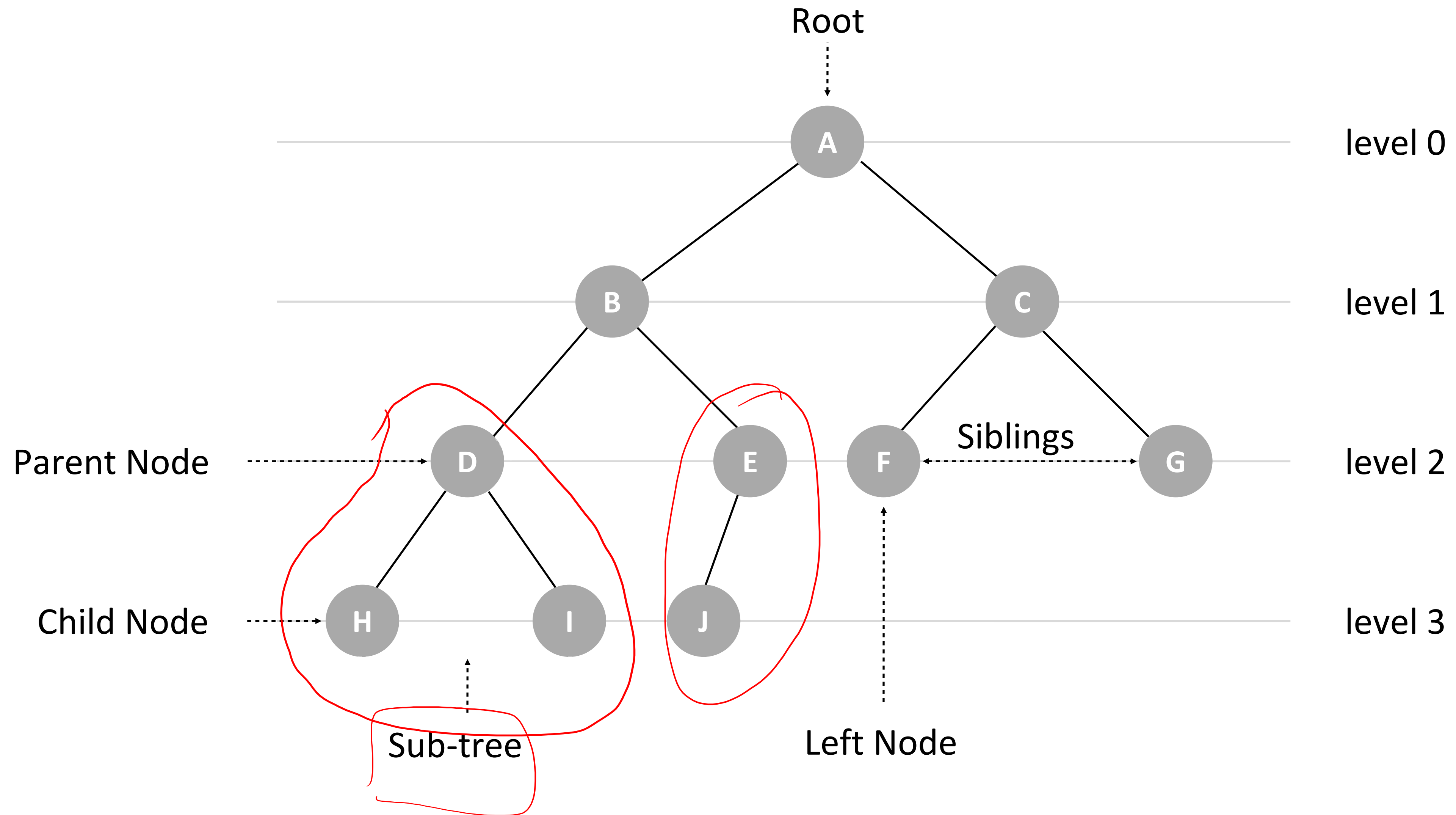
$$(100000)_2 = (111111)_2$$

递归基本形式总结

以上三个问题都是递归实现的“暴力搜索”（或者叫枚举、回溯等）
可以总结为以下三种基本形式

| 递归形式 | 时间复杂度规模 | 问题举例 |
|------|-----------------------|--------------|
| 指数型 | k^n | 子集、大体积背包 |
| 排列型 | $n!$ | 全排列、旅行商、N 皇后 |
| 组合型 | $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ | 组合选数 |

树



实战

翻转二叉树

<https://leetcode-cn.com/problems/invert-binary-tree/description/>

验证二叉搜索树

<https://leetcode-cn.com/problems/validate-binary-search-tree/>

重叠子问题：翻转 or 验证左、右子树

当前层逻辑：翻转 or 验证大小关系

递归边界：叶子节点（无子树）



实战

二叉树的最大/最小深度

<https://leetcode-cn.com/problems/maximum-depth-of-binary-tree/>

<https://leetcode-cn.com/problems/minimum-depth-of-binary-tree/>

思路一（自底向上统计信息，分治思想）

最大深度 = $\max(\text{左子树最大深度}, \text{右子树最大深度}) + 1$

思路二（自顶向下维护信息）

把“深度”作为一个全局变量——一个跟随结点移动而动态变化的信息

递归一层，变量+1，在叶子处更新答案

这种写法需要注意保护和还原现场

分治算法

分治

分治，即“分而治之”

就是把原问题划分成若干个同类子问题，分别解决后，再把结果合并起来

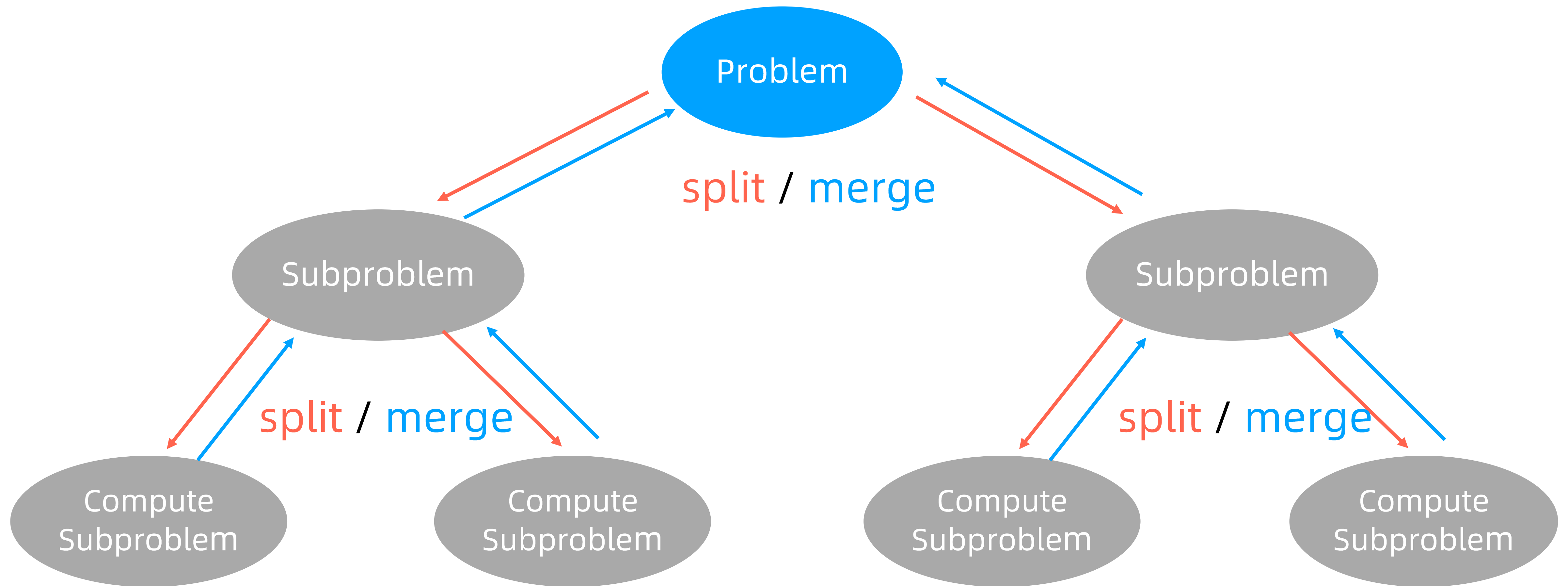
关键点：

原问题和各个子问题都是重复的（同类的）——递归定义

除了向下递归“问题”，还要向上合并“结果”

分治算法一般用递归实现

分治算法的“递归状态树”



实战

Pow(x, n)

<https://leetcode-cn.com/problems/powx-n/>

- n 为偶数: $\text{Pow}(x, n) = \text{Pow}(x, n/2) * \text{Pow}(x, n/2)$ temp =
- n 为奇数: $\text{Pow}(x, n) = \text{Pow}(x, n/2) * \text{Pow}(x, n/2) * x$
- 递归边界: $\text{Pow}(x, 0) = 1$
- n < 0 时: $\text{Pow}(x, n) = 1 / \text{Pow}(x, -n)$ 下取整
- $O(\log n)$

$$x^n = \left(x^{\frac{n}{2}}\right)^2 \quad \text{偶 } n$$

$$x^n = \left(x^{\frac{n}{2}}\right)^2 \cdot x \quad \text{奇 } n$$

-4-1

实战

括号生成

<https://leetcode-cn.com/problems/generate-parentheses/>

分治划分子问题的标准：不重不漏

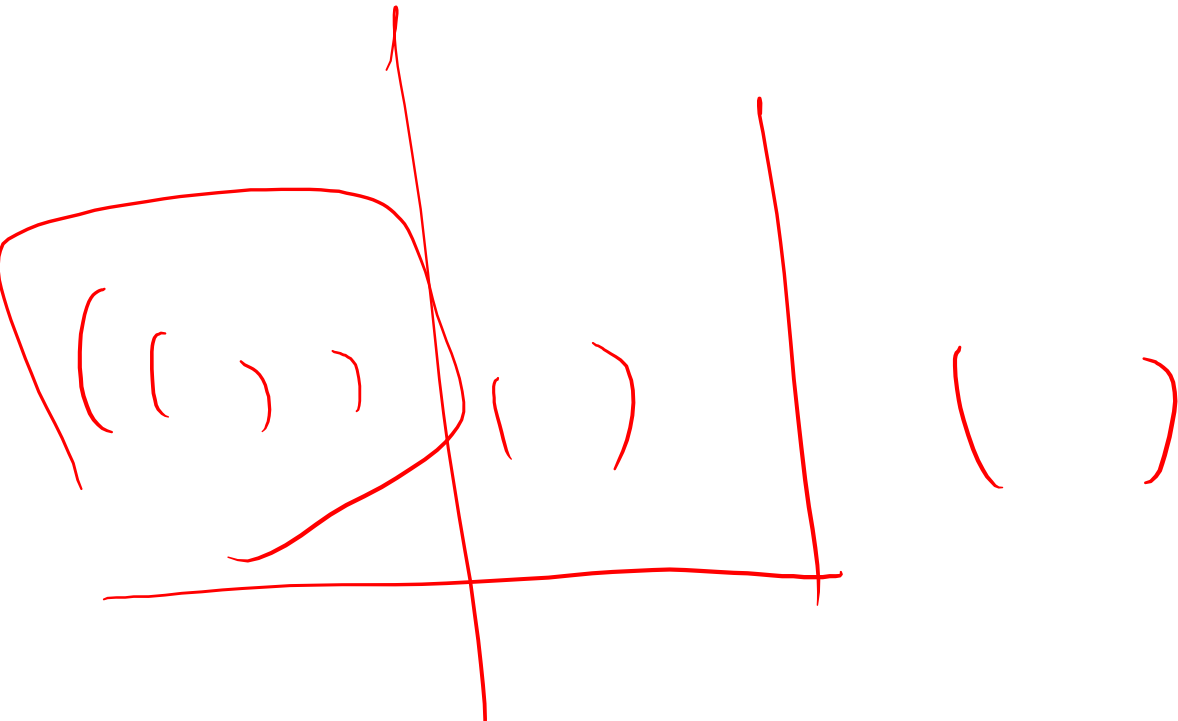
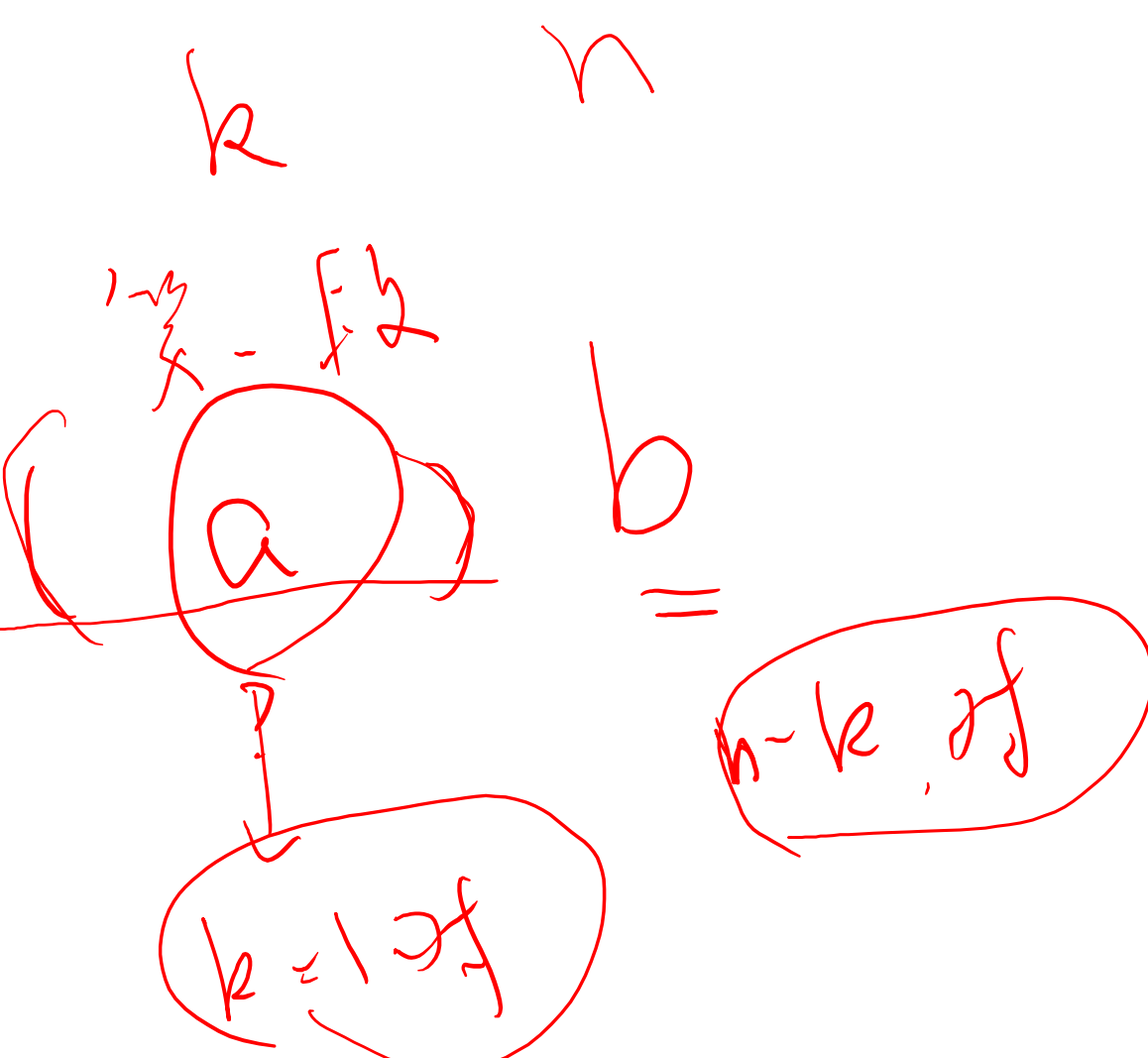
~~((()))()~~

正确的划分：

- (a)b — (()) () ()

错误的划分：

- ~~abc~~ — (()) () () 时间复杂度爆炸
- ~~ab~~ — (()) () () 与 (()) () () 重复



Homework

合并K个升序链表

<https://leetcode-cn.com/problems/merge-k-sorted-lists/>

要求：用分治实现，不要用堆

THANKS

 极客时间 | 训练营