

Dördülleştirilmiş irakgörür dizeylerinin belirlenimi

Coşar Gözükırmızı

13 Mart 2016

1 Giriş

Olasılıksal evrim kuramı (OEK) bağlamında yapılan çalışmalar özellikle sağ yanı ikinci derece çokçokterimli olan belirtik sıradan türevli denklem takımlarının başlangıç değer sorununun çözümü için önemli aygıtlar oluşturmuna olanak sağlamaktadır. Birim dizeyler ile Kronecker çarpım kullanarak dizey boyutlarının büyütüldüğü yapıdan kaçınmak için dördülleştirim olgusu gündeme getirilmiştir. Dördülleştirilmiş irakgörür dizeylerinin kullanımı, boyutları değişmeyen dizey ve yöneylerle çalışmayı olanaklı kılmaktadır.

2 Olasılıksal evrim kuramı

Olasılıksal evrim kuramı ile sağ yanı ikinci derece çokçokterimli olan belirtik std çözümü

$$\mathbf{x} = e^{\beta t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{e^{\beta t} - 1}{\beta} \right)^j \mathbf{T}_j \mathbf{a}^{\otimes(j+1)} \quad (1)$$

biçimindedir. Dördülleştirim kullanımı ise

$$\mathbf{T}_j \mathbf{a}^{\otimes(j+1)} = \mathbf{S}_j(\mathbf{a}) \mathbf{a}, \quad j = 0, 1, \dots \quad (2)$$

yapısını öngörür. Dördülleştirimin tanımı

$$[\mathbf{F}, \mathbf{a}] = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{F}^{(i)} \quad (3)$$

biçimindedir. $\mathbf{F}^{(i)}$ ile belirtilen dördül dizeyler, \mathbf{F} dizeyinin öbekleridir. Gerekli olan olgu $\mathbf{S}_j(\mathbf{a})$ dizeylerinin dördülleştirimler biçiminden yazımıdır.

3 Dördülleştirim

OEK bağlamında gündeme gelen irakgörür dizeyleri daha belirtik bir anlatımla gündeme getirilebilir.

Irakgörür dizeylerinin yapısı,

$$\mathbf{T}_j = \prod_{k=1}^j \mathbf{M}_k \quad (4)$$

biçimindedir. Irakgörürün bölümleri ise

$$\mathbf{M}_j = \sum_{k=0}^{j-1} (\mathbf{I}_n^{\otimes k} \otimes \mathbf{F} \otimes \mathbf{I}_n^{\otimes j-k-1}) \quad (5)$$

olarak gündeme gelir.

En baştaki birkaç terim

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{F} \quad (6)$$

$$\mathbf{M}_2 = (\mathbf{F} \otimes \mathbf{I}) + (\mathbf{I} \otimes \mathbf{F}) \quad (7)$$

$$\mathbf{M}_3 = (\mathbf{F} \otimes \mathbf{I}^{\otimes 2}) + (\mathbf{I} \otimes \mathbf{F} \otimes \mathbf{I}) + (\mathbf{I}^{\otimes 2} \otimes \mathbf{F}) \quad (8)$$

biçimindedir. Tanım olarak

$$\mathbf{T}_0 = \mathbf{I} \quad (9)$$

olarak gündeme gelmektedir. Yine kolaylıkla görülebileceği gibi

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{F} \quad (10)$$

yapısındadır. Bir sonraki ırakgörür dizeyi ise

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_2 &= \mathbf{F} [(\mathbf{F} \otimes \mathbf{I}) + (\mathbf{I} \otimes \mathbf{F})] \\ &= \mathbf{F} (\mathbf{F} \otimes \mathbf{I}) + \mathbf{F} (\mathbf{I} \otimes \mathbf{F}) \end{aligned} \quad (11)$$

olarak karşımıza çıkar. Benzer inceleyleş ile,

$$\mathbf{T}_3 = \mathbf{F} [(\mathbf{F} \otimes \mathbf{I}) + (\mathbf{I} \otimes \mathbf{F})] [(\mathbf{F} \otimes \mathbf{I}^{\otimes 2}) + (\mathbf{I} \otimes \mathbf{F} \otimes \mathbf{I}) + (\mathbf{I}^{\otimes 2} \otimes \mathbf{F})] \quad (12)$$

elde edilebilir.

$\mathbf{S}_j(\mathbf{a})$ dizeylerinin bulunumu için ilgili yapıları kullanarak ve çarpım ve Kronecker çarpımın birbirleri üzerinde dağılma özelliğini göz önünde bulundurarak ilerlenebilir. Bu biçimde, $\mathbf{S}_j(\mathbf{a})$ dizeyleri eşsiz biçimde elde edilebilir. Bu bulunum, cebircil indirgeyleş içerir. Cebircil indirdeyleşin sayıcıl olarak biçelenişi, bulunumu kolaylaştırır. Dördülleştirim cebirinin sayıcıl biçelenişi, çalışmanın çekirdeğini oluşturmaktadır.

(11) bağıntısında \mathbf{T}_2 için açıkça gösterildiği gibi, bütün ırakgörür dizeylerinin toplamcıl terimleri vardır. Her toplamcıl terim, \mathbf{F} 'nin içinde bir kere bulunduğu çarpanlardan oluşur. Bu çarpanlarda ise \mathbf{F} 'nin sağında ve solunda 0 ya da daha büyük sayıda birim dizeyin Kronecker çarpımı bulunmaktadır. Birim dizeyin Kronecker üslüsü yerine, bu birim dizeylerin ardarda Kronecker çarpım ile belirtik olarak yazıldığı yapı düşünülürse, her bir çarpanda \mathbf{F} 'nin konumu bir tamsayı ile gösterilebilir. Bu işlem, her bir terim için yinelenenir. \mathbf{T}_2 için somutlaştırmak gerekirse, \mathbf{T}_2 iki dizilim ile eşsiz biçimde nitelendirilebilir. Bu dizilimler

$$\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \quad (13)$$

dizilimleridir. Dizilimlerde birince sayı, birinci çarpandaki \mathbf{F} 'nin yerini, ikinci sayı ise ikinci çarpandaki \mathbf{F} 'nin yerini gösterir. Aslında birinci çarpanda yalnızca bir yer olduğu için, dizilimin birinci ögesi yalnızca 1 değerini alabilir. Dizilimin ikinci ögesi ise 1 ve 2 değerlerini alabilir. Burada gözlemlenmesi gereken olgu, dizilimlerin bir altüçgen içerisinde gündeme gelebilecek bütün yapılar olduğudur.

Benzer bir inceleme ile, \mathbf{T}_3 için

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 1 \\
1 & 1 & 3 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 1
\end{array} \tag{14}$$

elde edilebilir. \mathbf{T}_2 'deki bütün dizilimlerin azalmayan nitelikte olmasına karşın, \mathbf{T}_3 'deki 1 2 1 dizilimi azalan niteliktedir. \mathbf{T}_3 için, bütün dizilimlere karşılık gelen çarpanlar ilgili yöney Kronecker üslüsü ile ayrı ayrı çarpılır ise, 1 2 1 ve 1 1 3 dizilimlerine karşılık gelen yapıların aynı katkıyı ürettikleri gözlemlenebilir. Bu olgu dördülleştirim cebrinde kendini açık olarak göstermektedir. Bunun nedeni, çarpanlar arasında özel bir değişimin geçerli olmasıdır. Bu bulgu somut olarak

$$\mathbf{F}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{F})(\mathbf{F} \otimes \mathbf{I}^{\otimes 2}) \mathbf{a}^{\otimes 4} = \mathbf{F}(\mathbf{F} \otimes \mathbf{I})(\mathbf{I}^{\otimes 2} \otimes \mathbf{F}) \mathbf{a}^{\otimes 4} \tag{15}$$

olarak gösterilebilir. Bu iki katkı birbirine eşit olduğu için, bir kez belirleyip, 2 katsayısı ile çarpmak daha verimli bir yol olarak görülmektedir.

Aynı katkıyı üretecek olan dizilimler, dizilimlerin kendilerini kullanarak somut adımlarla belirlenebilir ve bu adımlar aslında dördülleştirim cebrinin bir yansımasıdır. Terimlerin tamsayı katsayılarının bulunumu olarak da değerlendirilebilecek bu işlem için önerilen yöntem kabarcıklı sıralayışı temel alan özel kabarcıklı sıralayış yöntemidir. Kabarcıklı sıralayış, dizilimdeki ardışık öğelerin karşılaştırılıp, eğer sıraya aykırılık söz konusu ise, öğelerin yer değiştirimine dayanır. Bu işlem azalmayan sıralanım elde edene kadar yinelenir. Özel kabarcıklı sıralayış ile kabarcıklı sıralayış arasında önemli ve yalın bir ayrım vardır. Özel kabarcıklı sıralayışta yer değiştirimi yapılırken, sola aktarılan öğenin değerinin korunmasına karşın, sağa aktarılan öğenin değeri bir artırılır. Dolayısıyla, özel kabarcıklı sıralayış öge değerlerini değiştirir.

\mathbf{T}_3 bağlamında gündeme gelen dizilimler için bu olguyu örneklendirelim. Yapılması gereken sıralı olmayan dizilimlerin belirlenip, bu dizilimlerin hangi sıralı (azalmayan) dizilimlerle eşdeğerli olduğunun bulunmasıdır. \mathbf{T}_3 için yalnızca bir adet azalabilen dizilim bulunmaktadır: 1 2 1. Özel kabarcıklı sıralayışın adımları şu biçimdedir.

- 1 ile 2 sıralı mı: Evet.
- 2 ile 1 sıralı mı: Hayır. 2'ye 1 ekle ve sağındaki 1 ile yer değiştir. Yeni dizilim: 1 1 3.
- 1 ile 1 sıralı mı: Evet.
- 1 ile 3 sıralı mı: Evet.

Bu bağlamda 1 2 1'in özel kabarcıklı sıralayıştan geçmiş biçimi 1 1 3 dizilimidir. Dolayısıyla, altüçgendeki azalmayan dizilimleri oluşturup, bu dizilimlerin herbirine bir de tamsayı katsayı eşleştirmek yoluna gidilebilir. \mathbf{T}_3 için azalmayan nitelikteki dizilimler

$$\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 3 \\
1 & 2 & 2 \\
1 & 1 & 3 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 1
\end{array} \tag{16}$$

biçimindedir. Bu yapıya karşılık gelen katsayı dizilimi ise

$$1 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad (17)$$

olarak karşımıza çıkmaktadır. $j = 3$ durumu için azalmayan nitelikteki dizilimlerin sayısı 5'tir. Bu sayı, Catalan diziliminde, $n=3$ durumuna karşılık gelen sayıdır. Catalan diziliminin genel terimi

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{2n!}{(n+1)!n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

olarak tanımlanmaktadır.

\mathbf{T}_4 için de aynı adımlar uygulanabilir. Altüçgendeki bütün dizilimler

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \quad (19)$$

biçimdedir. Bu dizilimlerden yalnızca ondört adedi azalmayan dizilimlerdir. Ondört sayısı, beşinci Catalan sayısıdır. Azalmayan dizilimler,

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

$$\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 3 & 3 \\
1 & 2 & 2 & 4 \\
1 & 2 & 2 & 3 \\
1 & 2 & 2 & 2 \\
1 & 1 & 3 & 4 \\
1 & 1 & 3 & 3 \\
1 & 1 & 2 & 4 \\
1 & 1 & 2 & 3 \\
1 & 1 & 2 & 2 \\
1 & 1 & 1 & 4 \\
1 & 1 & 1 & 3 \\
1 & 1 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 1 & 1
\end{array} \tag{20}$$

biçimindedir. Bir azalan dizilimin hangi azalmayan dizilime karşılık geldiğini belirlemek için özel kabarcıklı sıralayış gündemdedir. Bu işlem yapıldıktan sonra, bütün azalmayan dizilimlere bir tamsayı çarpan eşlik ettirilebilir. Bu tamsayı çarpanların oluşturduğu dizilim ise

$$1 \ 1 \ 2 \ 1 \ 1 \ 3 \ 3 \ 3 \ 1 \ 1 \ 3 \ 2 \ 1 \ 1 \tag{21}$$

biçimindedir. Burada gözlemlenmesi gereken olgu, (21) diziliminin (17) dizilimini baştan başlayan bir altdizilim olarak içeriyor olmasıdır.

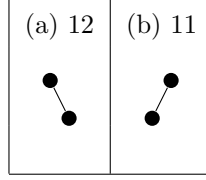
Catalan dizilimi OEIS olarak bilinen ansiklopedide A000108 olarak kayıtlıdır. Dolayısıyla, j . Catalan sayısı, A000108(j) olarak gösterilebilir. Catalan diziliminin birinci değişimleri ise A000245 olarak kayıtlıdır. Bu çalışma bağlamında gündeme gelen katsayılar dizilimi ise A262180 olarak kaydedilmiştir.

Irakgörür dizeyi \mathbf{T}_j için A000108($j+1$) adet azalmayan dizilim oluşmaktadır. Bu dizilimlerin tamsayı katsayılarını içeren katsayı dizilimi ise özel kabarcıklı sıralayışı kullanarak belirlenebilir. Bu katsayı dizilimi, \mathbf{T}_{j-1} için oluşturulan katsayı dizilimini baştan başlayan bir altdizilim olarak içerir. Dolayısıyla katsayı dizilimi A262180, düzensiz bir üçgen oluşturur. Bu düzensiz üçgen

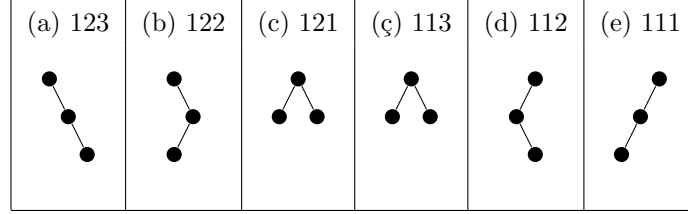
$$\begin{array}{ccccccc}
[1] & 1 & & & & & \\
[2] & 1 & & & & & \\
[3] & 2 & 1 & 1 & & & \\
[4] & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\
\vdots & \vdots & & & & & & & &
\end{array} \tag{22}$$

yapısındadır. Üçgenin j . sırası, $j > 1$ ise, A000245(j) terimidir.

Herhangi bir azalmayan dizilimin hangi azalabilen dizilimlerle eşdeğer olduğunu bulmak için, özel kabarcıklı sırabozuş kullanılabilir. Özel kabarcıklı sırabozuş, özel kabarcıklı sıralayışın evrik işlemidir. Dizilimin $(j + 1)$ inci ögesinin j inci ögesinden en az iki daha büyük olduğu bütün yerler imlenerek sırabozuşa



Çizelge 1: S_2 bağlamında gündeme gelen ikili ağaç yapıları



Çizelge 2: S_3 bağlamında gündeme gelen ikili ağaç yapıları

başlanabilir. Bu yerlerde $(j + 1)$ 'inci öğeden bir çıkarılıp j 'inci öge ile yer değiştirilerek yeni bir dal yaratılır. İşlem yeni oluşan her dizilimde yinelenir. Eğer daha önce elde edilmiş bir dizilim yeniden elde edilir ise o dalda ilerlenmez. Bu bağlamda azalmayan dizilime karşılık gelen bütün azalabilen dizilimler bulunabilir.

Buradaki önemli aşamalardan biri, dizilimden ilgili toplamdizi katkısının elde edinimidir. Bu işlem, doğrudan dizilimi inceleyerek yapılabilir, ama bir ara aygıt olarak ikili ağaçların kullanımı bu işlemi kolaylaştırır. Her azalmayan dizilim için bir ikili ağaç üretimi söz konusudur. Dizilim öğeleri sıra ile işlenir. İlk öge kökü oluşturur. Bir sonraki öge aynı değerde ise, bu yeni eklenecek olan öge sol çocuğu oluşturur. Bir sonraki öğenin değeri, ağaca konmuş olan öğenin değerinden bir büyük ise, sağ çocuk oluşur. Yeni gelen öğede dizilimin bir sonraki terimi incelenir ve aynı adımlar yinelenir. Eğer son eklenen öge ile yeni öge arasındaki değişim 2 ya da daha büyük ise, sıralı gezinişte (ing: inorder traversal) ilgili değer kadar ilerideki yere konumlandırım gerçekleştirilir. Aşlında bu işlem, azalabilen dizilimler için de tanımlanabilir ve o durumda, azalım noktasında sıralı gezinişte daha geride bir konuma konumlandırım ile yöntem genelleştirilebilir. Bu biçimde genelleştirim yapılnca, özel kabarcıklı sıralayış altında aynı dizilimi üreten dizilimlerin aynı ağacı ürettikleri gözlemlenir. Ağaç oluşturulduktan sonra, düğüm değerlerinin bir önemi yoktur. Önemli olan ağacın yapısıdır. Düğüm değerleri ağacın yapısında, özlerini dolaylı olarak bulundurur. İkinci, üçüncü ve dördüncü dördüleştirilmiş irakgörür dizeyleri bağlamında gündeme gelen ağaç yapıları, sırasıyla çizim 1,2 ve 3'te verilmiştir. S_1 'e karşılık gelen ağaç ise, bir düğümlü ağaçtır.

Ağaçtan dizey cebircil yapıya geçiş için sıralı geziniş kullanılabilir. Sıralı gezinişin kuralı, her düğüm için önce sol altağacın işlenmesi, sonra düğümün kendisinin işlenmesi ve daha sonra sağ altağacın işlenmesidir. Bu olgu, başlangıç noktası olarak, kökten olabildiğince kez sol çocuğa geçişe neden olur. Bir düğüm, yalnız başına, bir dördüleştirime karşılık gelmektedir. Daha somut söylemek gerekirse, bir düğüm, yalnız başına düşünüldüğünde, $[F, a]$ yapısını betimler. Dolayısıyla, sıralı gezinişin başlangıç noktası budur. Soldan ebeveyne geçiş, sol altağaçtaki yapının dördüleştirimini oluşturur. Sıralı geziniş bağlamında, düğümden sağ çocuğa geçiş ise sağ altağacın oluşturduğu yapı ile sağdan çarpmaya karşılık gelir. Bu bağlamda, ağaca yalnızca bakarak bile, nasıl bir dizey cebircil yapı oluşturduğu ile ilgili birşeyler söylemek olanaklıdır.

Ağaçtan dizey cebirine geçiş için, ağacın dizin gösterilimi kullanılabilir. Ağacın dizin gösterilimi, bütün ağacı üç ögeli bir dizin olarak ele alır. Bu dizinin birinci ögesi sol altağa karşılık gelen dizin, ikinci ögesi kök, üçüncü ögesi ise sağ altağa karşılık gelen dizindir. Altağaçlar için de aynı işlem uygulanır ve iç

(a) 1234	(b) 1233	(c) 1232	(ç) 1231	(d) 1224	(e) 1223	(f) 1222	(g) 1221
(h) 1214	(i) 1213	(i) 1212	(j) 1211	(k) 1134	(l) 1133	(m) 1132	(n) 1131
(o) 1124	(ö) 1123	(p) 1122	(r) 1121	(s) 1114	(ş) 1113	(t) 1112	(u) 1111

Çizelge 3: S_4 bağlamında gündeme gelen ikili ağaç yapıları

içe dizinler yapısı kurulur. Buradan dizey cebircil yapıya geçiş için, dizin işlemeye daha uygun olan işlevcil buyruk dizileyiş yaklaşımı kullanılabileceği gibi, bir kısayol olarak, simge katarı işlenimi yöntemi kullanılabilir. Dizin gösterilimi bir simge katarı olarak düşünülüp, üzerinde bazı yalın işlemler yapılır ise, ilgili iç içe işlev çağrıları yapısı oluşturulabilir. Oluşturulan bu kısa betik çalıştırılarak, dizeycil katkı elde edilebilir. İlgili betik yapısının bu bağlamda kullanımı aşağıdaki örnek betikte gösterilmiştir.

```
>> package("Squtelmat");
>> alias(d = combinat::trees::dummyLabel):
>> bt:=combinat::binaryTrees([d, [d, [d, [d, [], []], []], [d, [], []]], []]);
```

```

      o
      /
     /\
    /

```

```
>> Squtelmat::tree2nestedCalls(bt);
```

```
"(Squtelmat::sq(F,Squtelmat::sq(F,Squtelmat::sq(F,Squtelmat::sq(F,
a) * a) * a) * Squtelmat::sq(F,a) * a))"
```

4 Betikleyiş

Betikleyiş, *Ubuntu Linux* ortamında, *MuPAD Pro Version 4.0.6* ile yapılmıştır. *PET*, *Squtelmat* ve *Below-DiagonalTraversal* adlarında üç ayrı okunaklık ve bu okunaklıkları kullanan betik oluşturulmuştur. Sınayış amaçlı olarak da adımlar atılmıştır. Bunlardan biri, OEK bağlamında elde edilen denklem çözümünün

ayrıklaştırım tabanlı yöntemlerle karşılaştırmadır. Bu bağlamdaki çalışmalar derinleştirilecektir. Bir diğer sınavış ise, dördülleştirim üzerinedir. Dördülleştirim kullanılan OEK yöntemi ile kullanılmayan OEK yöntemi karşılaştırılmış, sonuçlar arasında tam örtüşüm görülmüştür. Bu sınavışlarda $j = 8$ durumuna kadar çıkmıştır.

5 İleri konular

Yöntemi kullanarak $j = 8$ ya da $j = 9$ durumundan öteye geçmek, yapının şu anki durumuyla olanaklı görünmemektedir. Bunu olanaklı kılmak için kuramcıl geliştirimler gereklidir. Betikte en önemli zaman alıcı olgu, katsayı diziliminin belirlenışidir. Bu katsayı diziliminin std takımından bağımsız olduğu unutulmamalıdır. Bu nedenle, bir kez belirlenimi ve tutamak ya da veritabanında saklanımı yeterlidir. Diğer önemli zaman alıcı olgu ise dizey ya da yöney katkıların belirlenimi ve toplanımıdır. Burada bazı küçük iyileştirimler yapılabilir. Ama asıl hızlandırım, ancak dördülleştirilmiş irakgörür dizeyleri arasında bir özyineleyiş elde edinimi ile olabilir. Bu özyineleyişin elde edinimi için adımlar atılmıştır.

Bunun için bazı gözlemlerle yola çıkılmalıdır. İlk gözlem \mathbf{S}_{j+1} içerisinde \mathbf{S}_j 'nin bütününün dördülleştiriminin bulunduğudur. Bunun anlamı \mathbf{S}_j 'nin bütün terimlerinin dördülleştiriminin aynı katsayılarla kendini göstermesidir. İkinci olgu ise \mathbf{S}_j 'nin bütün terimlerinin soldan $[\mathbf{F}, \mathbf{a}]$ ile çarpımının aynı katsayılarla, \mathbf{S}_{j+1} içinde bulunmasıdır. Geri kalan $(A000108(j+2) - 2 \times A000108(j+1))$ terim ise yine somut olarak \mathbf{S}_j ile ilişkilendirilebilmesine karşın daha çapraşık yapıdadır.

İkinci dördülleştirilmiş irakgörür dizeyi, birincisi biçiminden

$$\mathbf{S}_2 = [\mathbf{F}, \mathbf{S}_1 \mathbf{a}] + [\mathbf{F}, \mathbf{a}] \mathbf{S}_1 \quad (23)$$

olarak yazılabilir. Elbette \mathbf{S}_j dizeyleri arasındaki olası ilişkilendirimler eşsiz değildir. Burada önerilen, olası ilişkilendirim biçimlerinden yalnızca biridir. \mathbf{S}_3 için ise gerek \mathbf{S}_2 ve gerek \mathbf{S}_1 dizeylerini içinde barındıran

$$\mathbf{S}_3 = [\mathbf{F}, \mathbf{a}] \mathbf{S}_2 + 2[\mathbf{F}, \mathbf{S}_1 \mathbf{a}] \mathbf{S}_1 + [\mathbf{F}, \mathbf{S}_2 \mathbf{a}] \quad (24)$$

ilişkilendirmesi ortaya konulabilir. Bir sonraki dizey ise

$$\mathbf{S}_4 = [\mathbf{F}, \mathbf{a}] \mathbf{S}_3 + 3[\mathbf{F}, \mathbf{S}_2 \mathbf{a}] [\mathbf{F}, \mathbf{a}] + 3[\mathbf{F}, [\mathbf{F}, \mathbf{a}] \mathbf{a}] \mathbf{S}_2 + [\mathbf{F}, \mathbf{S}_3 \mathbf{a}] \quad (25)$$

yapısındadır. Bu biçimde ilerlenebilir. Bir sonraki dizey ise

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_5 = & [\mathbf{F}, \mathbf{a}] \mathbf{S}_4 + 4[\mathbf{F}, \mathbf{S}_3 \mathbf{a}] [\mathbf{F}, \mathbf{a}] + 6[\mathbf{F}, \mathbf{S}_2 \mathbf{a}] \mathbf{S}_2 \\ & + 4[\mathbf{F}, [\mathbf{F}, \mathbf{a}] \mathbf{a}] \mathbf{S}_3 + [\mathbf{F}, \mathbf{S}_4 \mathbf{a}] \end{aligned} \quad (26)$$

yapısında gündeme gelir. Bir sonraki dizeyin yapısının gözle ve kağıt kalemle belirlenışı, terim sayısının çokluğundan dolayı zordur. Yapılması gereken, buraya kadar elde edilen ve doğruluğu gözle denetlenebilen yapının nasıl bir örüntü ortaya çıkardığını gündeme getirmektir. Bu örüntü kullanılarak diğer dizeyler de elde edilebilir. Katsayılar olarak, ikiterimli açılımı katsayıları gündemdedir. Terimler ise, daha küçük sırasayılı \mathbf{S}_j dizeylerine oldukça somut kurallarla bağlıdır. Sonraki iki dizey için, örüntü temel alınarak, önerilen yapılar aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_6 = & [\mathbf{F}, \mathbf{a}] \mathbf{S}_5 + 5[\mathbf{F}, \mathbf{S}_4 \mathbf{a}] [\mathbf{F}, \mathbf{a}] + 5[\mathbf{F}, [\mathbf{F}, \mathbf{a}] \mathbf{a}] \mathbf{S}_4 + 10[\mathbf{F}, [\mathbf{F}, [\mathbf{F}, \mathbf{a}] \mathbf{a}] \mathbf{a}] \mathbf{S}_3 \\ & + 10[\mathbf{F}, [\mathbf{F}, \mathbf{S}_3 \mathbf{a}] \mathbf{a}] [\mathbf{F}, \mathbf{a}] + [\mathbf{F}, \mathbf{S}_5 \mathbf{a}] \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_7 &= [\mathbf{F}, \mathbf{a}] \mathbf{S}_6 + 6[\mathbf{F}, \mathbf{S}_5 \mathbf{a}] [\mathbf{F}, \mathbf{a}] + 6[\mathbf{F}, [\mathbf{F}, \mathbf{a}] \mathbf{a}] \mathbf{S}_5 + 15[\mathbf{F}, [\mathbf{F}, [\mathbf{F}, \mathbf{a}] \mathbf{a}] \mathbf{a}] \mathbf{S}_4 \\ &+ 15[\mathbf{F}, [\mathbf{F}, \mathbf{S}_4 \mathbf{a}] \mathbf{a}] [\mathbf{F}, \mathbf{a}] + 20[\mathbf{F}, \mathbf{S}_3 \mathbf{a}] \mathbf{S}_3 + [\mathbf{F}, \mathbf{S}_6 \mathbf{a}] . \end{aligned} \quad (28)$$

(27) ve (28) bağıntıları ile ilgili doğrulayış çalışması yapılacaktır. Ama kolay sınavıışlar hemen yapılabilir. Örneğin \mathbf{S}_6 dizeyinin

$$10[\mathbf{F}, [\mathbf{F}, [\mathbf{F}, \mathbf{a}] \mathbf{a}] \mathbf{S}_3] \quad (29)$$

terimini inceleme altına alalım. Bu terimin yaptığı işlem, üçüncü dördülleştirilmiş irakgörür dizeyini soldan üçlü dördülleştirim ile çarpmaktır. Bu bağlamda

$$1 \quad 2 \quad 3 \rightarrow 1 \quad 1 \quad 1 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad (30)$$

olmaktadır. Soldan üçlü dördülleştirim ile çarpım işlemi bu biçimde tanımlandığına göre katsayı da tutarlı olmalıdır. Özel kabarcıklı sırazobuş ile bu dizilimin eşdeğerlilik kümesinde 10 adet dizilim olduğu gösterilebilir. Bu dizilimler

$$\begin{aligned} S_{1,1,1,4,5,6} &= \{[1, 1, 1, 4, 5, 6], [1, 1, 3, 1, 5, 6], [1, 2, 1, 1, 5, 6], [1, 1, 3, 4, 1, 6], [1, 1, 3, 4, 5, 1], [1, 2, 1, 4, 1, 6], \\ &[1, 2, 1, 4, 5, 1], [1, 2, 3, 1, 1, 6], [1, 2, 3, 1, 5, 1], [1, 2, 3, 4, 1, 1]\} \end{aligned} \quad (31)$$

dizilimleridir. Dolayısıyla, bu katkı için tutarlılık söz konusudur.

Aslında,

$$\mathbf{S}_j = \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j-1}{k} [\mathbf{F}, \mathbf{S}_k \mathbf{a}] \mathbf{S}_{(j-1-k)}, \quad \mathbf{S}_0 = \mathbf{I}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (32)$$

olduğu görülebilir. (32) bağıntısı, bir dizeycil özyineleyiştir. Bu özyineleyiş doğrusal değildir ve yerel değildir.

6 Köklü ağaç yaklaşımı

Bilimsel yazında, türev işleçlerini betimlemek için köklü ağaçlar sıklıkla kullanılır [1]. Köklü ağaçlara, John C. Butcher'ın adını anımsatacak biçimde B-ağaçları da denmektedir. Köklü ağaçların, ikili ağaç kullanımına göre ne gibi bir getiri sağladığı pek açık değildir. Aslında, köklü ağaçlar ve ikili ağaçlar birbirlerine dönüştürülebilir.

Dördülleştirilmiş irakgörür dizeyleri bağlamında düşünerek, ilk birkaç \mathbf{S} için ilgili ikili ve köklü ağaçlar çizelge 4, 5, 6 ve 7'de belirtilmiştir.

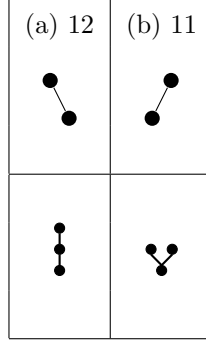
Bilimsel yazında aynı özellikleri gösteren cebirlere özyineleme oluşturmak için izlenen yol aşılama (ing: grafting) kullanan yapılardır. Aşılama, katışimsal (ing: combinatorial) bir olgudur. Bir ağacı, başka bir ağacın bütün düğümlerinde araya sokarak oluşan bütün ağaçları toplamak anlamına gelir. Dolayısıyla, aşılama, burada öngörülen özyineleme ile yine burada öngörülen özel kabarcıklı yapı arasında bir yöntemdir. Çünkü, hem katışimsal, hem de özyineleyimcil yapıdadır.

(32) özyineleyişi, köklü ağaçlar biçiminden de gündeme getirilebilir. Bunun için öncelikle Butcher çarpımından söz etmek gerekir. Butcher çarpımı, iki köklü ağaç arasında tanımlanan bir işlemdir. Yapılan işlem ise ilk ağacı, ikincinin köküne soldan bağlamaktır. Bu işlem, aşağıda örneklendirilmiştir.

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \circ \end{array} \star \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} = \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \star \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} = (\bullet \star \circ) \star ((\bullet \star (\bullet \star \bullet)) \star \bullet) \quad (33)$$



Çizelge 4: \mathbf{S}_1 bağlamında gündeme gelen ikili ve köklü ağaç yapıları



Çizelge 5: \mathbf{S}_2 bağlamında gündeme gelen ikili ve köklü ağaç yapıları

Düğümün beyaz olarak gösterimi, anlaşılrlık sağlamak içindir. Birinci ağaç ikincinin kökünün soluna bağlandığı için bu işleme sol Butcher çarpımı da denebilir.

Benzer biçimde sağ Butcher çarpımı da tanımlanabilir. Bilimsel yazında karşılaşmadığım, ama tanımlanmasında da herhangi bir sakınca olmayan bu işlemde, birinci ağaç ikincinin köküne sağdan bağlanır. Bu işlem, sağ alt köşesinde r simgesi olan yıldızla gösterilecektir. Aşağıda bu işleme bir örnek verilmiştir.

$$\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} \star_r \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array} = \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} \quad (34)$$

Butcher çarpımı, toplam üzerinde dağılabilir bir işlem olarak gündeme getirilmelidir. Dolayısıyla,

$$\mathcal{S}_2 \star \mathcal{S}_1 = \left(\begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \right) \star_r \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} = \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \quad (35)$$

söz konusudur.

(32) özyineleyişi, sağ Butcher çarpımı kullanılarak,

$$\mathcal{S}_j = \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j-1}{k} (\mathcal{S}_k \star_r \mathcal{S}_{(j-1-k)}) , \quad \mathcal{S}_0 = \bullet, \quad j = 1, 2, \dots \quad (36)$$

yazılabilir. Bu özyineleyiş, köklü ağaç doğrusal birleştirimleri arasında bir özyineleyiştir. Bu özyineleyiş, aşılama bağlamında gündeme gelen katışimsal özyineleyiştten daha yalın yapıdadır.

7 Bilimsel yazında olasılıksal evrim kuramı

Olasılıksal evrim kuramı (OEK) ile ilgili çalışmaların sayısı artmaktadır. Özellikle, nicem dizgelerin beklenen değer devinimi bağlamında çözümü üzerine güncel çalışmalar bulunmaktadır.

(a) 123	(b) 122	(c) 121	(ç) 113	(d) 112	(e) 111

Çizelge 6: S_3 bağlamında gündeme gelen ikili ve köklü ağaç yapıları

(a) 1234	(b) 1233	(c) 1232	(ç) 1231	(d) 1224	(e) 1223	(f) 1222	(g) 1221
(h) 1214	(ı) 1213	(i) 1212	(j) 1211	(k) 1134	(l) 1133	(m) 1132	(n) 1131
(o) 1124	(ö) 1123	(p) 1122	(r) 1121	(s) 1114	(ş) 1113	(t) 1112	(u) 1111

Çizelge 7: S_4 bağlamında gündeme gelen ikili ve köklü ağaç yapıları

Burada, yalnızca bu çalışma ile birincil düzeyde ilgili kaynaklara kısaca değinilecektir. İlgilenen okuyucu, yazılarda kullanılan kaynakları inceleyebilir ya da arama araçları kullanarak, belirli alanlarda derinleşme yoluna gidebilir.

Sağ yanı ikinci derece çokçokterimli olan belirtik sıradan türevli denklem takımlarının çözümü ile ilgili bilgi edinmek için Coşar Gözükrımı ve Metin Demiralp'in *Journal of Mathematical Chemistry*'de yayımlanan yazıları incelenmelidir [2, 3]. Dördülleştirim ile ilgili ise bildiri düzeyinde önemli kaynaklar erişilebilir durumdadır [4, 5, 6]. Dördülleştirim bağlamında gündeme gelen katsayıların oluşturduğu dizilim, Coşar Gözükrımı tarafından *Online Encyclopedia of Integer Sequences*'a eklenmiştir [7, 8]. Coşar Gözükrımı tarafından oluşturulan, sağ yanı ikinci derece çokçokterimli olan belirtik sıradan türevli denklem takımlarının başlangıç değer sorununu yaklaşık olarak çözen betik ise *GitHub*'da erişilebilir durumdadır [9].

Önümüzdeki yıllarda OEK ve çevresindeki konular bağlamında yapılan çalışmaların artması; yazı ve bilimsel toplantılar bağlamında oluşan etkileşimler ile kuramın kullanımının yaygınlaşması beklenmektedir.

Kaynaklar

- [1] Hans Z. Munthe-Kaas and Alexander Lundervold. On post-lie algebras, lie–butcher series and moving frames. *Foundations of Computational Mathematics*, 13(4):583–613, 2013. doi:10.1007/s10208-013-9167-7.
- [2] Coşar Gözükrımı and Metin Demiralp. Probabilistic evolution approach for the solution of explicit autonomous ordinary differential equations. part 1: Arbitrariness and equipartition theorem in kronecker power series. *Journal of Mathematical Chemistry*, 52(3):866–880, 2014. doi:10.1007/s10910-013-0298-5.
- [3] Coşar Gözükrımı and Metin Demiralp. Probabilistic evolution approach for the solution of explicit autonomous ordinary differential equations. part 2: Kernel separability, space extension, and, series solution via telescopic matrices. *Journal of Mathematical Chemistry*, 52(3):881–898, 2014. doi:10.1007/s10910-013-0299-4.
- [4] Metin Demiralp. Squarificating the telescope matrix images of initial value vector in probabilistic evolution theory (pet). In *Proceedings of the 19th International Conference on Applied Mathematics (AM-ATH'14)*, ISBN: 978-1-61804-258-3, pages 99–104, İstanbul, Türkiye, December 2014. WSEAS Press.
- [5] Coşar Gözükrımı and Metin Demiralp. Probabilistic evolution theory for ode sets with second degree multinomial right hand side functions: Implementation. In *Proceedings of 11th International Conference of Computational Methods in Sciences and Engineering*, 2015. doi:10.1063/1.4938937.
- [6] Melike Ebru Kırkın and Coşar Gözükrımı. Probabilistic evolution theory for ode sets with second degree multinomial right hand side functions: Certain reductive cases. In *Proceedings of 11th International Conference of Computational Methods in Sciences and Engineering*, 2015. doi:10.1063/1.4938947.
- [7] Coşar Gözükrımı. Sequence A262180 in [7], 2015.
- [8] The OEIS Foundation Inc. The online encyclopedia of integer sequences. <http://oeis.org>, 2012.

- [9] Coşar Gözükırmızı. Olasılıksal evrim kuramı (probabilistic evolution theory). <https://github.com/cosargozukirmizi/Olasiliksal-evrim-kurami-Probabilistic-Evolution-Theory->, 2015.