13.02.2024

Занятие № 2. Классическое и статистическое определение вероятности

©*Составитель: д.ф.-м.н., проф. Рябов П.Е.*

Ко всем задачам, где есть числовой ответ, напишите программу (код) с использованием инструментария ***Jupyter Notebook***, который иллюстрирует статистическую устойчивость события A, а также постройте график зависимости относительной частоты $\hat{p}(A) \overset{\text{def}}{=} \frac{N(A)}{N}$ события A от числа проведенных реализаций опыта N.

2.1. Среди 17 студентов группы, из которых 8 девушек, разыгрывается 7 лотерейных билетов. Найдите вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся 4 девушки.

Ответ: $0,302$.

2.2. Корзина содержит 23 шара: 8 белых, 6 синих и 9 красных. На каждом шаге из корзины «наудачу» извлекается шар и назад в корзину не возвращается. Исход n последовательных извлечений называется выборкой объема n ***без возвращения*** или ***бесповторной выборкой***. Из корзины наудачу (без возвращения) извлечены 6 шаров. Найдите вероятности следующих событий и покажите их статистическую устойчивость:

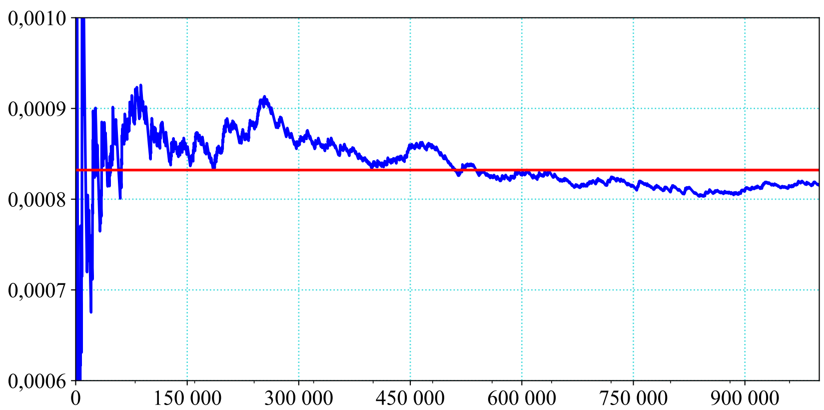
а) $A = \{$все шары красные$\}$;

б) $B = \{$3 синих, 2 белых и 1 красный$\}$;

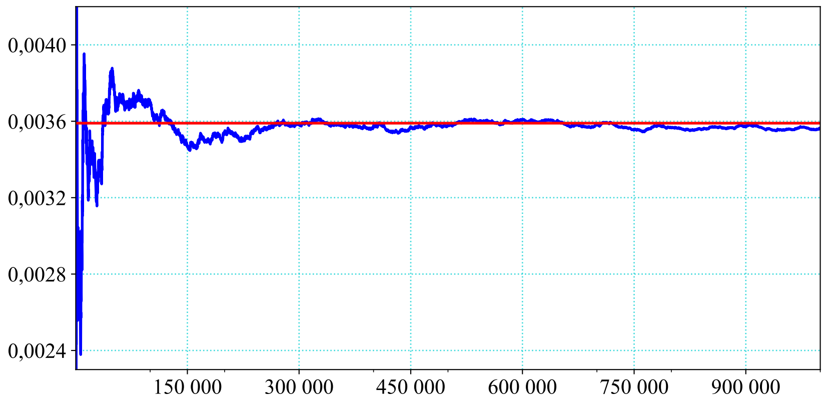
в) $D = \{$в точности 4 белых шара$\}$.

г) Разобрать случай извлечения шаров с ***возвращением***. Найдите вероятность $\mathbb{P}\,(A)$ события A, если “статистическая вероятность” равна $\hat{p}(A) \approx 0,\ 00358549$.

Ответ: а) точный ответ $\mathbb{P}\,(A) = \frac{4}{4807} \approx 0,\ 0008321198252548367$. Статистическая устойчивость изображена на рисунке:



Ответ: г) Для случая извлечения шаров *с возвращением* статистическая устойчивость события A изображена на рисунке:



2.3. Среди кандидатов в студенческий совет факультета 3 первокурсника, 5 второкурсников и 7 третьекурсников. Наудачу выбирают 5 человек на конференцию. Найдите вероятности следующих событий: A – будут выбраны одни третьекурсники; B – все первокурсники попадут на конференцию; C – не будет выбрано ни одного второкурсника.

Ответ: $\frac{1}{143}$; $\frac{2}{91}$; $\frac{12}{143}$.

2.4. Студент знает ответы на 20 вопросов из 25. Зачёт считается сданным при правильном ответе им не менее чем на 3 вопроса из 4 в билете. Какова вероятность того, что студент сдаст зачёт, если, взглянув на первый вопрос билета, он обнаружил, что его знает.

Ответ: $0,9$

2.5. 10 футбольных команд, среди которых два призера и один аутсайдер по результатам предыдущего чемпионата, путем жеребьевки разбиваются на две подгруппы по 5 команд. Найдите вероятности следующих событий: A – команды-призеры попадут в разные группы; B – оба призера и аутсайдер попадут в разные группы; C – оба призера и аутсайдер попадут в одну группу.

Ответ: $\frac{5}{9}$; $\frac{5}{36}$; $\frac{1}{12}$.

2.6. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 10 студентов. Найдите вероятность того, что среди отобранных студентов 7 отличников.

Ответ: $\frac{16}{33}$.

2.7. В выпуклом n-угольнике случайным образом выбирают две вершины и соединяют их отрезком. Чему равна вероятность того, что построенный отрезок является диагональю n-угольника?

Ответ: $\frac{n-3}{n-1}$.

2.8. Десять различных книг расставлены на полке наудачу. Найдите вероятность того, что при этом три определенные книги окажутся поставленными вместе.

Ответ: $\frac{1}{15}$.

2.9. Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 записываются в случайном порядке. Найдите вероятности следующих событий: A – числа записаны в порядке возрастания; B – числа 1 и 2 стоят рядом в порядке возрастания; C – числа **3**, **6** и **9** расположены в порядке возрастания; D – на чётных местах стоят чётные числа; E – сумма чисел, равноудалённых от концов числа, равна **10**.

Ответ: $\frac{1}{9!}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{126}$; $\frac{1}{945}$.

2.10. Группа из 8 человек занимает места за круглым столом в случайном порядке. Найдите вероятность того, что определённые два лица окажутся рядом.

Ответ: $\frac{2}{7}$.

2.11. Группа из 8 человек занимает места с одной стороны прямоугольного стола. Найдите вероятность того, что определённые два лица окажутся рядом при условии: а) число мест 8 (событие A); б) число мест 12 (событие B).

Ответ: $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{6}$.

2.12. 10 студентов, среди которых Иванов и Петров, занимают очередь в столовую. Какова вероятность того, что между Ивановым и Петровым в очереди окажется менее трех человек?

Ответ: $\frac{8}{15}$.

2.13. 5 мужчин и 5 женщин случайным образом рассаживаются в ряд на 10 мест. Найдите вероятности следующих событий: A – любые две женщины не сидят рядом; B – все мужчины сидят рядом;

Ответ: $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{42}$.

2.14. Шесть человек вошли в лифт на первом этаже 7-этажного дома. Найдите вероятности событий: A – на втором, третьем и четвёртом этажах не вышел ни один из пассажиров; B – три пассажира вышли на седьмом этаже; C – на каждом этаже вышел один пассажир; D – все пассажиры вышли на одном этаже.

Ответ: $\frac{1}{64}$; $0,0536$; $0,0154$; 0.000128601.

2.15. Бросают 4 одинаковые игральные кости. Вычислить вероятности следующих событий: A – ни на одной кости не выпадет 6 очков; B – хотя бы на одной кости выпадет 6 очков; C – на 2 костях выпадет по 6 очков.

Ответ: $0,482$; $0,518$; $\frac{1}{36}$.

2.16. Наудачу раскрывается телефонная книга и случайно выбирается семизначный номер телефона. Считая, что все комбинации цифр равновозможные, найдите вероятности следующих событий: A – четыре последние цифры телефонного номера одинаковы; B – номер начинается с цифры 5; C – номер содержит три цифры 5, две цифры 1 и две цифры 2.

Ответ: $\frac{1}{1000}$; $\frac{1}{10}$; $0,000021$.

2.17. Какова вероятность того, что в группе из 12 студентов хотя бы у двух окажется одинаковый день рождения?

Ответ: $0,167$.

2.18. Предположим, что “несимметричную” (“неправильную”) монету бросают до тех пор, пока она не выпадет дважды одной и той же стороной подряд (вероятность выпадения “герба” равна $p = 0{,}7$). Построить вероятностную модель т.е. $(\Omega, \mathbb{P}(\cdot))$ и найти вероятность того, что потребуется: а) чётное число бросаний; б) число бросаний кратно 4.