02.04.2024

Занятие № 7. Ковариация и коэффициент корреляции.

©*Составитель: д.ф.-м.н., проф. Рябов П.Е.*

Желательно (а для некоторых студентов обязательно), там, где есть ответ, придумать способ док-ва статистической устойчивости полученного ответа.

7.1. Независимые случайные величины X, Y, X, U, V, W имеют дисперсию, равную 1. Найдите $\rho_{S,T}$ – коэффициент корреляции случайных величин $S = 3X + 3Y + 2Z + U + V + W$ и $T = 9X + 3Y + 2Z + 2U + V + W$

7.2. Дисперсии независимых случайных величин U, V равны 1. Для случайных величин $X = U + V, Y = 7U + V, Z = 7U - V$ найдите: а) корреляционную матрицу; б) определитель корреляционной матрицы.

7.3. Инвестор сформировал портфель x из акций компаний A и B, затратив на приобретение акций A в 10 раз больше средств, чем на покупку акций B. Ожидаемая доходность за период владения акциями A и B составляет 2% и 5%, при этом стандартное отклонение доходности равно 3% и 8%, соответственно. Найдите (в $\%$) ожидаемую доходность $E\left(R_x\right)$ и стандартное отклонение $\sigma(R_x)$ доходности портфеля инвестора, если известно, что коэффициент корреляции доходностей акций A и B равен $0{,}1$.

7.4. Ожидаемая доходность и стандартное отклонение доходности за период для акций компаний A, B и C составляют 2%, 2%, 3% и 3%, 4%, 6%, соответственно. Предполагая независимость доходностей акций A, B и C, найдите (в $\%$) ожидаемую доходность $E\left(R_x\right)$ портфеля x, составленного из этих акций так, чтобы дисперсия $\mathrm{Var}(R_x)$ его доходности была минимальной. В ответе укажите также стоимостные доли (в $\%$) акций A, B и C в портфеле x.

7.5. Пусть R_1, R_2 – доходности ценных бумаг двух видов, $\rho = \rho(R_1, R_2)$, $\mu_i = E\left(R_i\right)$, $\sigma_i = \sigma(R_i)$, $i = 1, 2$. Пусть X – портфель, составленный из бумаг данного вида. Найдите математическое ожидание портфеля X с наименьшей дисперсией доходности, если $\mu_1 = 7\%$, $\sigma_i = 1\%$, $\mu_2 = 14\%$, $\sigma_2 = 2\%$, $\rho = -0, 5$. Укажите также стандартное отклонение полученной доходности.

7.6. Написано n писем, но адреса на конвертах написаны в случайном порядке. Пусть X_n – число писем, которые будут получены теми адресатами, которым они предназначались. Показать, что $E\left(X_n\right) = \mathrm{Var}(X_n) = 1$.

7.7. Корзина содержит N пронумерованных шаров $1; 2; ...; N$. Из корзины без возвращения извлекаются $n \leqslant N$ шаров. Пусть S обозначает сумму номеров вынутых шаров. Найдите математическое ожидание $E\left(S\right)$ и дисперсию $\mathrm{Var}(S)$ этой суммы.

7.8. Случайные величины X и Y независимы и

$$\mathbf{P}\,(X=1)=\mathbf{P}\,(X=-1)=\mathbf{P}\,(Y=0)=\frac{1}{2},$$
$$\mathbf{P}\,(Y=1)=\mathbf{P}\,(Y=-1)=\frac{1}{4}.$$

Будут ли случайные величины $X\cdot Y$ и Y: а) независимыми; б) некоррелированными?

7.9. Пусть X_1, X_2, ..., X_n – случайные величины, коэффициент корреляции любых двух из них равен ϱ. Показать, что $\varrho \geqslant -\frac{1}{n-1}$.

7.10. Найти коэффициент корреляции между числом единиц и числом шестерок при n бросаниях игрального кубика.

7.11. Случайные величины $X_1, ..., X_{15}$ могут принимать только три значения: 0, 1 и 7. Известны вероятности 0 и 1: $\mathrm{P}(X_i = 0) = 0,3$; $\mathrm{P}(X_i = 1) = 0,2$, где $i = 1, ..., 15$. Кроме того, известно, что $\mathrm{P}(X_i + X_j = 2) = 0,07$; $\mathrm{P}(X_i + X_j = 8) = 0,17$ и $\mathrm{P}(X_i + X_j = 14) = 0,28$ для $1 \le i < j \le 15$. Пусть $S = X_1 + ... + X_{15}$. Найдите:

1) ковариацию $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$, для $i \neq j$;

2) дисперсию $\mathrm{Var}(S)$.