16.04.2024

Занятие № 10. Подготовка к тесту (темы: “Специальные дискретные распределения, формула полной вероятности и Байеса, условные характеристики относительно группы событий, приближенное вычисление вероятности методом Монте-Карло.”)

©*Составитель: д.ф.-м.н., проф. Рябов П.Е., к.ф.-м.н., доц. Браилов А.В.*

Ко всем задачам, где есть числовой ответ, напишите программу (код) с использованием инструментария ***Jupyter Notebook***, который иллюстрирует статистическую устойчивость полученного ответа: **1)** вероятности $\mathbb{P}(A)$ события A; **2)** математического ожидания $\mathbb{E}(X)$; **3)** дисперсии $\mathbb{V}ar(X)$, оценками которых являются относительная частота $\hat{p}(A) \overset{\text{def}}{=} \frac{N(A)}{N}$ события A, выборочное среднее $\overline{X}$ и выборочная дисперсия $\widehat{\sigma}^2$, а также постройте график зависимости относительной частоты $\hat{p}(A)$ события A от числа проведенных реализаций опыта N.

10.1. В первой корзине имеется 11 шаров, при этом количество белых шаров равно либо 3, либо 10. Оба варианта равновероятны. Во второй корзине имеется 25 шаров, а количество белых шаров равно 2, 23 или 25. Эти три варианта также равновероятны. Из обеих корзин все шары перекладываются в третью корзину. **1)** Какова вероятность $\mathbb{P}(A)$, что случайно вынутый из третьей корзины шар окажется белым (событие A)? **2)** Найдите условную вероятность $P(H|A)$, того, что случайно вынутый из третьей корзины шар первоначально находился в первой корзине (событие H), при условии, что он белый (событие A)?

Ответ: 1) $\mathbb{P}(A) = 0{,}6435$; **2)** $\mathbb{P}(H|A) = 0{,}2806$.

10.2. Имеется две корзины с белыми и черными шарами. В первой корзине количество белых − 9, количество черных − 13. Во второй корзине количество белых − 19, количество черных − 20. Из первой корзины случайно, без возвращения, излекаются 7 шаров, а из второй − 8 шаров. Отобранные из обеих корзин шары перекладываются в третью корзину. **1)** Какова вероятность $\mathbb{P}(A)$, что случайно вынутый из третьей корзины шар окажется белым (событие A)? **2)** Найдите условную вероятность $\mathbb{P}(H|A)$, того, что случайно вынутый из третьей корзины шар первоначально находился в первой корзине (событие H), при условии, что он белый (событие A)?

Ответ: 1) $\mathbb{P}(A) = 0{,}4507$; **2)** $\mathbb{P}(H|A) = 0{,}4235$.

10.3. Банк выдал кредиты двум группам заемщиков: 180 заемщиков в первой группе и 70 − во второй. Известно, что заемщики из первой группы возвращают кредит с вероятностью $0{,}93$, а заемщики из второй группы − с вероятностью $0{,}92$. Пусть X − суммарное количество возвращенных кредитов для обеих групп. Предполагая независимость заемщиков, найдите: **1)** стандартное отклонение X; **2)** асимметрию X. Указание: используйте присущее третьему центральному моменту свойство аддитивности.

Ответ: 1) $\sigma_X = 4{,}11$; **2)** $\mathrm{As}(X) = -0{,}2079$.

10.4. Монеты в количестве 20 штук подбрасываются до тех пор, пока 19 раз не выпадет 12 гербов. Пусть X – число бросков до первого появления 12 гербов, а Y – число бросков до последнего появления 12 гербов (Y = общее число бросков). Найдите: **1)** математическое ожидание X; **2)** стандартное отклонение X; **3)** коэффициент корреляции между X и Y; **4)** математическое ожидание XY.

Ответ: **1)** $\mathbb{E}(X) = 8{,}3240$; **2)** $\sigma_X = 7{,}8080$; **3)** $\rho(X;Y) = 0{,}2294$; **4)** $\mathbb{E}(XY) = 1377{,}46$;

10.5. Корзина содержит 35 шаров, среди которых 17 -– красных и 5 -– синих. Из корзины, случайным образом, без возвращения извлекаются 19 шаров. Пусть X и Y обозначают количество красных и синих шаров среди извлеченных, соответственно. Найдите ковариацию $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Ответ: $\mathrm{Cov}(X, Y) = -0{,}620$.

10.6. Несимметричная игральная кость подбрасывается до тех пор, пока не выпадут цифры 1 и 2. Пусть X – число сделанных при этом бросков. Даны вероятности появления цифр в одном броске: $\mathbb{P}(1) = 0{,}13$ и $\mathbb{P}(2) = 0{,}17$. Требуется найти: **1)** $\mathbb{E}(X)$; **2)** дисперсию X, если известно, что из 1 и 2 сначала выпала цифра 2.

Ответ: **1)** $\mathbb{E}(X) = 10{,}2413$; **2)** $\mathbb{V}ar(X) = 59{,}2571$.

10.7. Несимметричная игральная кость подбрасывается до тех пор, пока не выпадут цифры 2, 3 и 4. Пусть X – число сделанных при этом бросков. Даны вероятности появления цифр в одном броске: $\mathbb{P}(2) = 0{,}17$, $\mathbb{P}(3) = 0{,}11$ и $\mathbb{P}(4) = 0{,}13$. Требуется найти: **1)** $\mathbb{E}(X)$; **2)** дисперсию X, если известно, что из 2, 3 и 4 сначала выпала цифра 2, затем – 3.

Ответ: **1)** $\mathbb{E}(X) = 14{,}0332$; **2)** $\mathbb{V}ar(X) = 68{,}1835$.

10.8. В прямоугольной области, заданной ограничениями $|x| \leqslant 20$ и $|y| \leqslant 8$, случайным образом выбираются две точки: (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Пусть A и B – события, состоящие в том, что: A – расстояние между выбранными точками меньше 11; B – модуль разности $|x_1 - x_2|$ меньше **14**. Найдите приближенно, методом Монте-Карло: **1)** вероятность $\mathbb{P}(A)$; **2)** условную вероятность $\mathbb{P}(A|B)$. Указание: получите в заданной прямоугольной области 100000 пар точек и, используя все эти точки, найдите ответы, округляя их до одного знака после запятой.

Ответ: **1)** $\mathbb{P}(A) = 0{,}37$; **2)** $\mathbb{P}(A|B) = 0{,}64$.

10.9. В области, ограниченной эллипсом $\left(\frac{u}{23}\right)^2 + \left(\frac{v}{6}\right)^2 = 1$, случайным образом выбираются две точки. Пусть A и B – события, состоящие в том, что: A – расстояние между выбранными точками меньше $9{,}2$; B – координаты первой точки больше 0, а координаты второй точки меньше 0. Найдите приближенно, методом Монте-Карло: **1)** вероятность $\mathbb{P}(A)$; **2)** условную вероятность $\mathbb{P}(A|B)$. Указание: получите внутри заданного эллипса 100000 пар точек и, используя все эти пары точек, найдите ответы, округляя их до одного знака после запятой.

Ответ: 1) $\mathbb{P}(A) = 0{,}35$; **2)** $\mathbb{P}(A|B) = 0{,}07$.

10.10. В кубе объема 1 случайным образом выбираются точки A, B и C. Пусть R, S и T – события, состоящие в том, что: R – наименьший угол в треугольнике ABC меньше $26{,}7°$; S – наибольший угол в треугольнике ABC меньше $81{,}9°$; T – треугольник ABC остроугольный. Найдите приближенно, методом Монте-Карло: **1)** условную вероятность $\mathbb{P}(R|T)$; **2)** условную вероятность $\mathbb{P}(S|T)$. Указание: получите 100000 остроугольных треугольников ABC и, используя все эти треугольники, найдите ответы, округляя их до одного знака после запятой.

Ответ: 1) $\mathbb{P}(R|T) = 0{,}11$; **2)** $\mathbb{P}(S|T) = 0{,}65$.