§1. Классическое определение вероятности

ПАВЕЛ Е. РЯБОВ[1]

[1]Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации

PERyabov@fa.ru

6 февраля 2024 г.

Список используемой литературы

- *Солодовников, А. С.* Математика в экономике. Теория вероятностей и математическая статистика. В 3 ч. Ч. 3 : учебник для студ. экономич. спец. вузов / А. С. Солодовников, В. А. Бабайцев, А. В. Браилов. – Москва: Финансы и статистика, 2008. – 463 с.
- *Браилов А.В., Глебов В. И., Криволапов С. Я., Рябов П. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс]: учебник-практикум/ А.В. Браилов [и др.]. – Ижевск: Издательство «ИКИ», 2016. – 414 с.
- *А. В. Браилов, А. С. Солодовников* Сборник задач по курсу "Математика в экономике". В 3 ч. Ч. 3: Теория вероятностей: учебное пособие для студ.; под ред. В. А. Бабайцева, В. Б. Гисина. – Москва: Финансы и статистика, 2013, 2017. – 125 с.
- *Allan Gut*. An Intermediate Course in Probability, Second Edition, Springer, 2009, ISBN 978-1-4419-0161-3, 302 p.

- *Криволапов С. Я.* Использование языка Python в теории вероятностей: Учебник/ С.Я. Криволапов. – М.: Прометей, 2021. – 492 с.
- *Sheldon Ross.* A First Course in Probability, Global Edition 10th Edition. – Pearson Education, 2019. – 530 p. – ISBN 9780134753119.
- *Joseph K. Blitzstein and Jessica Hwang.* Introduction to Probability, Second Edition. – CRC Press Taylor & Francis Group, 2019. – 636 p. – ISBN 978-1-1383-6991-7
- *Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г.* Задачи по теории вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. – Новое изд., перераб. – М.: МЦНМО, 2023 – 384 с. ISBN 978-5-4439-1729-0.
- *Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И.* Теория вероятностей и математическая статистика. – Киев: Вища школа, 1979. – 408 с.

План лекции

- Пространство элементарных событий, случайное событие.
- Классическое и статистическое определение вероятности.
- Алгебра событий.
- Аксиомы теории вероятностей.
- Свойства вероятности.
- Свойство непрерывности вероятности.
- Пример, иллюстрирующий свойство непрерывности вероятности (пример А.В. Браилова)

План лекции

- Пространство элементарных событий, случайное событие.
- Классическое и статистическое определение вероятности.
- Алгебра событий.
- Аксиомы теории вероятностей.
- Свойства вероятности.
- Свойство непрерывности вероятности.
- Пример, иллюстрирующий свойство непрерывности вероятности (пример А.В. Браилова)

План лекции

- Пространство элементарных событий, случайное событие.
- Классическое и статистическое определение вероятности.
- Алгебра событий.
- Аксиомы теории вероятностей.
- Свойства вероятности.
- Свойство непрерывности вероятности.
- Пример, иллюстрирующий свойство непрерывности вероятности (пример А.В. Браилова)

§1. Классическое определение вероятности

План лекции

- Пространство элементарных событий, случайное событие.
- Классическое и статистическое определение вероятности.
- Алгебра событий.
- Аксиомы теории вероятностей.
- Свойства вероятности.
- Свойство непрерывности вероятности.
- Пример, иллюстрирующий свойство непрерывности вероятности (пример А.В. Браилова)

План лекции

- Пространство элементарных событий, случайное событие.
- Классическое и статистическое определение вероятности.
- Алгебра событий.
- Аксиомы теории вероятностей.
- Свойства вероятности.
- Свойство непрерывности вероятности.
- Пример, иллюстрирующий свойство непрерывности вероятности (пример А.В. Браилова)

План лекции

- Пространство элементарных событий, случайное событие.
- Классическое и статистическое определение вероятности.
- Алгебра событий.
- Аксиомы теории вероятностей.
- Свойства вероятности.
- Свойство непрерывности вероятности.
- Пример, иллюстрирующий свойство непрерывности вероятности (пример А.В. Браилова)

§1. Классическое определение вероятности

План лекции

- Пространство элементарных событий, случайное событие.
- Классическое и статистическое определение вероятности.
- Алгебра событий.
- Аксиомы теории вероятностей.
- Свойства вероятности.
- Свойство непрерывности вероятности.
- Пример, иллюстрирующий свойство непрерывности вероятности (пример А.В. Браилова)

Пространство элементарных событий, случайное событие.

Исходные понятия теории вероятностей:

- стохастический эксперимент,
- случайное событие,
- вероятность случайного события.

Определение

Стохастическими *называются эксперименты, результаты которых нельзя предугадать заранее.*

Пространство элементарных событий, случайное событие.

Каждому такому эксперименту (опыту) поставим в соответствие множество Ω, элементы которого ω_i изображают наиболее полную информацию о предполагаемых результатах данного эксперимента.

Определение

*Множество Ω называется **пространством элементарных событий**, а его точки ω_i — **элементарными событиями** или **исходами**.*

Обозначение: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_i, \ldots\}$. Предполагается, что в рамках данного эксперимента (опыта) нельзя разделить элементарный исход на более мелкие составляющие.

Примеры

1. Производится опыт: один раз бросают монету. Пространство элементарных событий имеет вид $\Omega = \{\omega_1 = \text{Г}, \omega_2 = \text{Р}\}$, где «Г» — появление герба, «Р» — появление решетки.
2. Монету бросают дважды. Пространство элементарных событий этого опыта является множество $\Omega = \{\omega_1 = \text{ГГ}, \omega_2 = \text{ГР}, \omega_3 = \text{РГ}, \omega_4 = \text{РР}\}$.
3. Игральную кость, на которой выбиты цифры 1,2,3,4,5,6, бросают один раз. Нас интересует число выпавших очков. Пространство элементарных исходов Ω состоит из 6 точек.
4. Игральную кость бросают n раз. Тогда $\Omega = \{\omega = (i_1, i_2, \ldots, i_n\}$, где i_k число выпавших очков при k-ом бросани, которое может принимать значения 1,2 3,4,5,6. Количество всех элементарных исходов равно $|\Omega| = 6^n$. Число $|\Omega|$ будем называть ***мощностью*** множества Ω.

Примеры

5. Предположим, что симметричную (правильную) монету бросают до первого появления герба. Пространство элементарных событий такого эксперимента является множество

$$\Omega = \left\{ \omega_1 = \text{Г}, \omega_2 = \text{РГ}, \ldots, \omega_n = \underbrace{\text{Р}\ldots\text{Р}}_{(n-1)\ \text{раз}}\text{Г}, \ldots ; \omega_\infty \right\},$$

где ω_n означает, что герб впервые появится при n-ом бросании монеты, а ω_∞ соответствует той возможности, что герб никогда не появится (в этом случае наш эксперимент продолжается бесконечно долго). В данном эксперименте множество Ω счётно.

Упражнение

Монету бросают n раз. Описать Ω и найти $|\Omega|$.

Определение

Случайным событием *A называется любое подмножество пространства элементарных событий Ω и состоит из всех элементарных исходов $\omega \in \Omega$, которые благоприятствуют появлению события A. Обозначение $A \subseteq \Omega$.*

Из определения следует, что само множество Ω, рассматриваемое как событие, обязательно происходит. Множество Ω называется ***достоверным событием***. По определению подмножеством любого множества Ω считается пустое множество $\varnothing$, которое не содержит ни одной точки Ω. Если $\varnothing$ сопоставить с событием, то это событие в эксперименте не происходит. Такое событие называется ***невозможным событием***.

Примеры

1. Пусть монету бросают дважды и A — событие, которое состоит в том, что хотя бы один раз появится герб. Тогда $\Omega = \{\omega_1 = \text{ГГ}, \omega_2 = \text{ГР}, \omega_3 = \text{РГ}, \omega_4 = \text{РР}\}$, $A = \{\omega_1 = \text{ГГ}, \omega_2 = \text{ГР}, \omega_3 = \text{РГ}\}$. Здесь мощность множества A, т.е. количество благоприятствующих исходов, равно $|A| = 3$.
2. Предположим, что монету бросают до первого появления герба. Пусть A — событие, состоящее в том, что будет сделано не более трех бросаний. Тогда $A = \{\text{Г}, \text{РГ}, \text{РРГ}\}$.

Классическое и статистическое определение вероятности.

Пусть пространство элементарных исходов Ω не более, чем счётно, т.е. $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_i, \ldots\}$. Предположим, что каждому элементарному исходу ω_i приписан некоторый «вес» p_i, называемый ***вероятностью элементарного события*** ω_i, причём веса p_i обладают свойствами:

1) $p_i \geqslant 0$,
2) $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Определение

Вероятностью $\mathbb{P}(A)$ *случайного события* $A \subseteq \Omega$ *называется сумма вероятностей элементарных событий, благоприятствующих событию* A

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i. \tag{1}$$

Введенная таким способом вероятность обладает следующими свойствами:

1. $0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1$,
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
3. если A и B — *несовместные* события ($A \subset \Omega, B \subset \Omega, A \cdot B = \varnothing$), то $\mathbb{P}(A + B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Действительно, $0 \leqslant \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$,
$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{\omega_i \in \Omega} p_i = \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$,
$\mathbb{P}(A + B) = \sum_{\omega_i \in A+B} p_i = \sum_{\omega_i \in A} p_i + \sum_{\omega_i \in B} p_i = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$, если $A \cdot B = \varnothing$.

Для многих экспериментов пространство элементарных событий состоит из ***конечного числа одинаково возможных исходов*** $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, причём $\mathbb{P}(\omega_1) = \mathbb{P}(\omega_2) = \ldots = \mathbb{P}(\omega_n) = \frac{1}{n}$. Пусть событию $A \subseteq \Omega$ благоприятствует m элементарных исходов. Тогда

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i = \underbrace{\frac{1}{n} + \ldots \frac{1}{n}}_{m \text{ раз}} = \frac{m}{n}.$$

Определение (классическое определение вероятности)

Рассмотрим стохастический эксперимент, который состоит из n ***одинаково возможных исходов*** ω_i, *т.е.* $|\Omega| = n$, $\mathbb{P}(\omega_i) = \frac{1}{n}$. *Предположим, что событию A благоприятствует m из этих исходов т.е.* $|A| = m$. *Тогда*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{m}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|}. \quad (2)$$

Статистическое определение вероятности

Определение (статистическое определение вероятности)

Пусть некоторый опыт повторяется (реализуется) N раз. Для события A, связанного с данным опытом, обозначим через $N(A)$ его ***частоту*** *– количество реализаций, в которых "наблюдалось" (наступило) событие A. Определим* ***относительную частоту*** $\hat{p}(A)$ *события A как отношение частоты события A к N, т.е. $\hat{p}(A) \stackrel{def}{=} \frac{N(A)}{N}$.* ***Статистическое определение вероятности*** *утверждает, что при большом числе реализаций опыта N выполняется приближенное равенство*

$$\boxed{\mathbb{P}(A) \approx \hat{p}(A)}, \tag{3}$$

где $\hat{p}(A) \stackrel{def}{=} \frac{N(A)}{N}$.

Формально статистическое определение вероятности очень похоже на классическое определение вероятности: и в том и другом определении вероятность равна отношению. Различие, конечно, кроется в том смысле, который придается букве "эн":

- $n = |\Omega|$ – число элементарных исходов;
- N – число реализаций опыта.

При подбрасывании N раз симметричной монеты наблюдались следующие статистические закономерности (описываемые в литературе) появления герба $\hat{p}(A) = \frac{N(A)}{N}$:

Автор эксперимента	N	$\hat{p}(A) = \frac{N(A)}{N}$
Бюффон (1707–1788)	4040	0,507
Де Морган (1806-1871)	4090	0,5005
Джевонс (1835-1882)	20 480	0,5068
Пирсон К. (1857-1936)	24 000	0,5005
Студент ПМ2024	100 000	???

Примеры

1. Пусть симметричная игральная кость бросается дважды. Найти вероятность события A, состоящего в том, что сумма выпавших очков равна 5.
   Решение. Пространство элементарных исходов $\Omega = \{\omega_{ij} = (i, j) : i = \overline{1, 6}; j = \overline{1, 6}\}$, $n = |\Omega| = 6^2 = 36$, причём $\mathbb{P}(\omega_{ij}) = \frac{1}{36}$ (все исходы равновероятны). Событие $A = \{\omega_{14} = (1, 4), \omega_{23} = (2, 3), \omega_{32} = (3, 2), \omega_{41} = (4, 1)\}$, $m = |A| = 4$. Следовательно, $\mathbb{P}(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.
2. Предположим, что игральная кость не является симметричной и “вероятности” в ней распределены так, что “вероятность” каждой грани пропорциональна её номеру. Найти вероятность события A, состоящее в том, что при бросании несимметричной кости появившееся число очков кратно 3.
   Решение. $p_i = \mathbb{P}(\omega_i) = \frac{i}{21}$. $A = \{3, 6\}$, $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{21} + \frac{6}{21} = \frac{3}{7}$.

Примеры

1. Пусть симметричная игральная кость бросается дважды. Найти вероятность события A, состоящего в том, что сумма выпавших очков равна 5.
   Решение. Пространство элементарных исходов $\Omega = \{\omega_{ij} = (i, j) : i = \overline{1, 6}; j = \overline{1, 6}\}$, $n = |\Omega| = 6^2 = 36$, причём $\mathbb{P}(\omega_{ij}) = \frac{1}{36}$ (все исходы равновероятны). Событие $A = \{\omega_{14} = (1, 4), \omega_{23} = (2, 3), \omega_{32} = (3, 2), \omega_{41} = (4, 1)\}$, $m = |A| = 4$. Следовательно, $\mathbb{P}(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.
2. Предположим, что игральная кость не является симметричной и "вероятности" в ней распределены так, что "вероятность" каждой грани пропорциональна её номеру. Найти вероятность события A, состоящее в том, что при бросании несимметричной кости появившееся число очков кратно 3.
   Решение. $p_i = \mathbb{P}(\omega_i) = \frac{i}{21}$. $A = \{3, 6\}$, $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{21} + \frac{6}{21} = \frac{3}{7}$.

Примеры

3. Предположим, что симметричную монету бросают до первого появления герба. Найти вероятность события A, состоящего в том, что будет произведено не более трех бросаний.
   Решение. Пространство элементарных событий является множество

$$\Omega = \left\{ \omega_1 = \text{Г}, \omega_2 = \text{РГ}, \ldots, \omega_n = \underbrace{\text{Р}\ldots\text{Р}}_{(n-1)\ \text{раз}}\text{Г}, \ldots; \omega_\infty \right\},$$

   где ω_n означает, что герб впервые появится при n-ом бросании монеты, а ω_∞ соответствует той возможности, что герб никогда не появится (в этом случае наш эксперимент продолжается бесконечно долго). Припишем веса $\mathbb{P}(\omega_n) = \frac{1}{2^n}$, а $\mathbb{P}(\omega_\infty) = 0$. Тогда $\sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\omega) = 1$. Событие $A = \{\text{Г}, \text{РГ}, \text{РРГ}\}$. Поэтому
   $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$
   Ответ: $\mathbb{P}(A) = \frac{7}{8}$

Примеры

3. Предположим, что симметричную монету бросают до первого появления герба. Найти вероятность события A, состоящего в том, что будет произведено не более трех бросаний.
   Решение. Пространство элементарных событий является множество

$$\Omega = \left\{ \omega_1 = \text{Г}, \omega_2 = \text{РГ}, \ldots, \omega_n = \underbrace{\text{Р}\ldots\text{Р}}_{(n-1)\ \text{раз}}\text{Г}, \ldots; \omega_\infty \right\},$$

   где ω_n означает, что герб впервые появится при n-ом бросании монеты, а ω_∞ соответствует той возможности, что герб никогда не появится (в этом случае наш эксперимент продолжается бесконечно долго). Припишем веса $\mathbb{P}(\omega_n) = \frac{1}{2^n}$, а $\mathbb{P}(\omega_\infty) = 0$. Тогда $\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) = 1$. Событие $A = \{\text{Г}, \text{РГ}, \text{РРГ}\}$. Поэтому
   $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$
   Ответ: $\mathbb{P}(A) = \frac{7}{8}$

Примеры

3. Предположим, что симметричную монету бросают до первого появления герба. Найти вероятность события A, состоящего в том, что будет произведено не более трех бросаний.

Решение. Пространство элементарных событий является множество

$$\Omega = \left\{ \omega_1 = \text{Г}, \omega_2 = \text{РГ}, \ldots, \omega_n = \underbrace{\text{Р}\ldots\text{Р}}_{(n-1)\ \text{раз}}\text{Г}, \ldots; \omega_\infty \right\},$$

где ω_n означает, что герб впервые появится при n-ом бросании монеты, а ω_∞ соответствует той возможности, что герб никогда не появится (в этом случае наш эксперимент продолжается бесконечно долго). Припишем веса $\mathbb{P}(\omega_n) = \frac{1}{2^n}$, а $\mathbb{P}(\omega_\infty) = 0$. Тогда $\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) = 1$. Событие $A = \{\text{Г}, \text{РГ}, \text{РРГ}\}$. Поэтому
$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

Ответ: $\mathbb{P}(A) = \frac{7}{8}$

Упражнение

Предположим, что симметричную монету бросают до тех пор, пока она не выпадет дважды одной и той же стороной подряд. Построить вероятностную модель т.е. $(\Omega, \mathbb{P}(\cdot))$ и найти вероятность того, что потребуется чётное число бросаний.

Ответ: $\frac{2}{3}$

Упражнение

Предположим, что симметричную монету бросают до тех пор, пока она не выпадет дважды одной и той же стороной подряд. Построить вероятностную модель т.е. $(\Omega, \mathbb{P}(\cdot))$ и найти вероятность того, что потребуется чётное число бросаний.

Ответ: $\frac{2}{3}$

Алгебра событий

Поскольку события являются подмножества множества Ω, то над ними можно производить операции как над множествами.

Пусть с некоторым пространством элементарных событий Ω связаны события A и B.

Определение

Если событие B происходит всякий раз, когда происходит событие A, тогда событие B является ***следствием*** *события* A, $A \subset B$, *(событие* A *влечёт за собой событие* B*).*

Очевидно, для любого A, $A \subset \Omega$. По определению принимают $\varnothing \subset A$.

Пример

Пусть событие A состоит в том, что при бросании игральной кости выпало нечётное число, меньшее 5, а событие B — выпавшее число меньше 4. Тогда $A \subset B$.

Алгебра событий

Определение

Суммой *или* ***объединением*** *двух событий A и B называется событие $A + B$, которое состоит в наступлении хотя бы одного из данных событий.*

Пример

Пусть бросают игральную кость. Событие A — выпадение числа, кратного 2, а B — выпадение числа, кратного 3. Тогда $A + B$ — выпадение хотя бы одного из чисел 2,3,4,6.

Заметим, что для любого события A справедливы равенства $A + \varnothing = A$, $A + \Omega = \Omega$.

Алгебра событий

Определение

Произведением *событий* A *и* B *называется событие* $A \cdot B$*, которое состоит в одновременном наступлении событий* A *и* B*.*

Пример

В предыдущем примере $A \cdot B = \{6\}$*.*

Отметим, что $A \cdot \varnothing = \varnothing$, $A \cdot \Omega = A$.

Определение

Два события A *и* B *называются* ***несовместными****, если их произведение* $A \cdot B$ *есть событие невозможное, т.е.* $A \cdot B = \varnothing$*.*

Определение

Событие, которое состоит в том, что не происходит событие A, называется ***противоположным*** *событию A и обозначается $\overline{A}$.*

Ясно, что $A + \overline{A} = \Omega$, $A \cdot \overline{A} = \varnothing$.

Пример

Покупаются три лотерейных билета. Пусть A_k обозначает событие выигрыша по k- ому билету, $k = 1, 2, 3$. Тогда событие $A_1 \cdot A_2 + A_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot A_3$ означает выигрыш ***не менее*** *по двум билетам, в то время как событие $A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3$ — означает выигрыш* ***ровно*** *по двум и только двум билетам.*

Алгебра событий

Определение

Разностью *событий A и B называется событие* $C = A \setminus B$, *которое означает, что происходит событие A, но не происходит событие B.*

Очевидно, что $A \setminus B = A \cdot \overline{B}$, $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

Упражнение

Доказать принцип двойственности

1. $\overline{A_1 + A_2 + \ldots + A_n} = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n$,
2. $\overline{A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n} = \overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \ldots + \overline{A}_n$

Алгебра событий

Рассмотренные свойства операций над событиями носят алгебраический характер. В теории вероятностей класс $\mathscr{F}$ всех возможных событий должен удовлетворять аксиомам событий.

Определение

*Класс $\mathscr{F}$ всех возможных событий из Ω называется **σ-алгеброй**, если*

I. *из того, что A является событием, $A \in \mathscr{F}$, следует, что $\overline{A}$ также является событием, т.е.$\overline{A} \in \mathscr{F}$;*

II. *из того, что A_i в конечном или счетном множестве являются событиями, $A_i \in \mathscr{F}, i = 1, 2, \ldots$, следует, что их сумма $A_1 + A_2 + \ldots$ также является событием, т.е. $A_1 + A_2 + \ldots \in \mathscr{F}$.*

Если класс $\mathscr{F}$ не пуст, то из определения следует, что $\Omega \in \mathscr{F}$, так как $\Omega = A + \overline{A}$. Следовательно, $\varnothing \in \mathscr{F}$, поскольку $\varnothing = \overline{\Omega}$. Наконец, согласно принципу двойственности, если $A_i \in \mathscr{F}$, то и произведение $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots$ также является событием, т.е. принадлежит классу $\mathscr{F}$.

Примеры

- $\{\varnothing, \Omega\}$ – ***минимальная*** σ-алгебра;
- $\mathscr{F} = 2^{\Omega}$ – ***максимальная*** σ-алгебра.

Любая другая σ-алгебра $\mathscr{F}$ подмножеств Ω занимает промежуточное положение:

$$\{\varnothing, \Omega\} \subset \mathscr{F} \subset 2^{\Omega}.$$

Пример

В опыте с бросанием симметричной игральной кости пространство Ω состоит из шести элементарных событий, а максимальная σ-алгебра $\mathscr{F} = 2^{\Omega}$ состоит из всех подмножеств Ω, т.е. из $2^6 = 64$ событий. И вообще, если Ω состоит из n элементарных событий, то $\mathscr{F} = 2^{\Omega}$ состоит из $2^{|\Omega|} = 2^n$ событий.