

Занятие № 3. Геометрическая вероятность

Ко всем задачам, где есть числовой ответ, напишите программу (код) с использованием инструментария *Jupyter Notebook*, который иллюстрирует статистическую устойчивость события A , а также постройте график зависимости относительной частоты $\hat{p}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{N(A)}{N}$ события A от числа проведенных реализаций опыта N .

©Составитель: д.ф.-м.н., проф. Рябов П.Е.

- 3.1.** Два лица A и B условились встретиться в определенном месте между двумя и тремя часами дня. Лицо A ждет другого в течение 10 минут, после чего уходит; лицо B ждет другого в течение 12 минут. Считая, что момент прихода на встречу выбирается каждым «наудачу» в пределах указанного часа, найдите вероятность, что встреча состоится. Найти соответствующую статистическую вероятность и показать статистическую устойчивость вероятности в зависимости от числа экспериментов N .

Ответ: 0,332778 Статистическая устойчивость события A для числа экспериментов $N = 150\,000$ с детализацией изображена на рисунке (статистическая вероятность $p_{stat} = 0.33268$):



Рис. 1. Ответ к задаче 3.1.

- 3.2.** Иван и Пётр договорились о встрече в определённом месте между 11 и 12 часами. Каждый приходит и ждёт другого до истечения часа, но не более 15 минут. Найдите вероятности следующих событий: A – встреча состоялась; B – встреча не состоялась; C – Ивану не пришлось ждать Петра; D – встреча состоялась после 11 ч. 30 мин; E – Иван опоздал на встречу; F – встреча состоялась, когда до истечения часа оставалось меньше 5 минут.

А также найти соответствующие статистические вероятности и показать статистическую устойчивость вероятности в зависимости от числа экспериментов N

- 3.3.** На отрезке $[a, b]$, лежащем на числовой оси, наудачу выбирается первая точка с координатой x , после чего на отрезке $[a, x]$ наудачу выбирается вторая точка с координатой . Найдите вероятности следующих событий: A –

вторая точка ближе к b , чем первая к a ; B – расстояние между точками x и y меньше половины длины отрезка; C – первая точка ближе ко второй, чем к точке b .

Найти соответствующие статистические вероятности и показать статистическую устойчивость вероятности в зависимости от числа экспериментов N

- 3.4. Найти вероятность того, что сумма двух случайных положительных чисел x и y ($x \leq 1, y \leq 1$) не превзойдёт 1, а их произведение будет не меньше $\frac{2}{9}$.

- 3.5. Отрезок $[0; 1]$ случайным образом делится на 3 части. Найти вероятность того, что из полученных отрезков можно сложить треугольник и этот треугольник будет остроугольным. Найти соответствующую статистическую вероятность и показать статистическую устойчивость вероятности в зависимости от числа экспериментов N . Найти аналитическое решение.

Ответ: Пусть x – координата *первой* выбранной точки, y – координата *второй*, вслед за первой, выбранной точки.

1) Пространство элементарных исходов

$$\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1; x \leq y\}, \quad \mu(\Omega) = \frac{1}{2}.$$

2) A – можно составить остроугольный треугольник

Ограничения, вытекающие из свойств остроугольного треугольника, можно записать в виде следующей системы неравенств:

$$A : \begin{cases} x \leq y; y \geq \frac{1}{2}; x \leq \frac{1}{2}; y \leq x + \frac{1}{2}; \\ x^2 + (1 - y)^2 \geq (y - x)^2; \\ x^2 + (y - x)^2 \geq (1 - y)^2; \\ (y - x)^2 + (1 - y)^2 \geq x^2. \end{cases}$$

Тогда

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{\frac{3}{2} \ln(2) - 1}{\frac{1}{2}} = 3 \ln(2) - 2 \approx 0,0794415417$$

Статистическая устойчивость события A для числа экспериментов $N = 1\,000\,000$ с детализацией изображена на рисунке (статистическая вероятность $p_{stat} = 0,0793190$):

- 3.6. В круге радиуса 1 наудачу выбирается отрезок. Найти вероятность того, что длина этого отрезка будет меньше радиуса круга.

Ответ: 0,3396432285792928.

- 3.7. n лиц условились о встрече между 10 и 11 часами утра, причем договорились ждать друг друга не более $60 \cdot q$ минут ($q < 1$). Считая, что момент

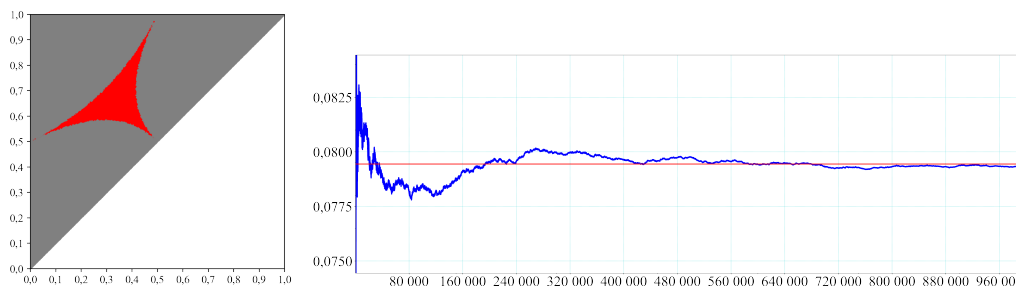


Рис. 2. Ответ к задаче 3.5.

прихода на встречу выбирается каждым «наудачу» в пределах указанного часа, докажите, что вероятность того, что встреча состоится, определяется равенством $P_n = nq^{n-1} - (n-1)q^n$. Проверь формулу для $n = 2$ и $n = 3$. Для $n = 3$ найти также вероятность того, что встреча по крайней мере двух лиц состоится.

3.8. (Продолжение)** Пусть n лиц имеют время ожидания w_1, w_2, \dots, w_n , выраженные в долях от общего интервала времени. Считая, что момент прихода на встречу выбирается каждым «наудачу» в пределах указанного часа, докажите, что вероятность того, что встреча состоится, определяется следующими равенствами для а) $n = 2$; б)*** $n = 3$; в) $n = 3$, $w_1 = \frac{1}{4}$, $w_2 = \frac{1}{3}$, $w_3 = \frac{1}{2}$, (15 минут, 20 минут, 30 минут); д)*** $n = 4$;

$$a) P_2 = 1 - \frac{(1-w_1)^2}{2} - \frac{(1-w_2)^2}{2};$$

$$b)*** P_3 = w_1 w_2 + w_1 w_3 + w_2 w_3 - \frac{1}{2} (w_1 w_2^2 + w_1 w_3^2 + w_2 w_3^2) - \frac{1}{3} w_1^3 - \frac{1}{6} w_2^3;$$

$$c) P_3 = \frac{1435}{5184} = 0,27681.$$

$$d)*** P_4 = w_1 w_2 w_3 + w_1 w_2 w_4 + w_1 w_3 w_4 + w_2 w_3 w_4 - \frac{w_4^2}{2} (w_1 w_2 + w_1 w_3 + w_2 w_3) - \frac{w_3^3}{6} (w_1 + w_2) - \frac{w_1 w_2 w_3^2}{2} - \frac{w_1 w_2^3}{3} - \frac{w_1^4}{4} - \frac{w_2^4}{12}.$$