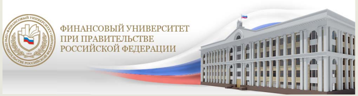
§1. Классическое определение вероятности

ПАВЕЛ Е. РЯБОВ[1]

[1]Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации



PERyabov@fa.ru

6 февраля 2024 г.

Список используемой литературы

- *Солодовников, А. С.* Математика в экономике. Теория вероятностей и математическая статистика. В 3 ч. Ч. 3 : учебник для студ. экономич. спец. вузов / А. С. Солодовников, В. А. Бабайцев, А. В. Браилов. – Москва: Финансы и статистика, 2008. – 463 с.
- *Браилов А.В., Глебов В. И., Криволапов С. Я., Рябов П. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс]: учебник-практикум/ А.В. Браилов [и др.]. – Ижевск: Издательство «ИКИ», 2016. – 414 с.
- *А. В. Браилов, А. С. Солодовников* Сборник задач по курсу "Математика в экономике". В 3 ч. Ч. 3: Теория вероятностей: учебное пособие для студ.; под ред. В. А. Бабайцева, В. Б. Гисина. – Москва: Финансы и статистика, 2013, 2017. – 125 с.
- *Allan Gut.* An Intermediate Course in Probability, Second Edition, Springer, 2009, ISBN 978-1-4419-0161-3, 302 p.

- *Криволапов С. Я.* Использование языка Python в теории вероятностей: Учебник/ С.Я. Криволапов. – М.: Прометей, 2021. – 492 с.
- *Sheldon Ross.* A First Course in Probability, Global Edition 10th Edition. – Pearson Education, 2019. – 530 p. – ISBN 9780134753119.
- *Joseph K. Blitzstein and Jessica Hwang.* Introduction to Probability, Second Edition. – CRC Press Taylor & Francis Group, 2019. – 636 p. – ISBN 978-1-1383-6991-7
- *Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г.* Задачи по теории вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. – Новое изд., перераб. – М.: МЦНМО, 2023 – 384 с. ISBN 978-5-4439-1729-0.
- *Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И.* Теория вероятностей и математическая статистика. – Киев: Вища школа, 1979. – 408 с.

§1. Классическое определение вероятности

План лекции

- Пространство элементарных событий, случайное событие.
- Классическое и статистическое определение вероятности.
- Алгебра событий.
- Аксиомы теории вероятностей.
- Свойства вероятности.
- Свойство непрерывности вероятности.
- Пример, иллюстрирующий свойство непрерывности вероятности (пример А.В. Браилова)

§1. Классическое определение вероятности

План лекции

- Пространство элементарных событий, случайное событие.
- Классическое и статистическое определение вероятности.
- Алгебра событий.
- Аксиомы теории вероятностей.
- Свойства вероятности.
- Свойство непрерывности вероятности.
- Пример, иллюстрирующий свойство непрерывности вероятности (пример А.В. Браилова)

План лекции

- Пространство элементарных событий, случайное событие.
- Классическое и статистическое определение вероятности.
- Алгебра событий.
- Аксиомы теории вероятностей.
- Свойства вероятности.
- Свойство непрерывности вероятности.
- Пример, иллюстрирующий свойство непрерывности вероятности (пример А.В. Браилова)

План лекции

- Пространство элементарных событий, случайное событие.
- Классическое и статистическое определение вероятности.
- Алгебра событий.
- Аксиомы теории вероятностей.
- Свойства вероятности.
- Свойство непрерывности вероятности.
- Пример, иллюстрирующий свойство непрерывности вероятности (пример А.В. Браилова)

План лекции

- Пространство элементарных событий, случайное событие.
- Классическое и статистическое определение вероятности.
- Алгебра событий.
- Аксиомы теории вероятностей.
- Свойства вероятности.
- Свойство непрерывности вероятности.
- Пример, иллюстрирующий свойство непрерывности вероятности (пример А.В. Браилова)

План лекции

- Пространство элементарных событий, случайное событие.
- Классическое и статистическое определение вероятности.
- Алгебра событий.
- Аксиомы теории вероятностей.
- Свойства вероятности.
- Свойство непрерывности вероятности.
- Пример, иллюстрирующий свойство непрерывности вероятности (пример А.В. Браилова)

§1. Классическое определение вероятности

План лекции

- Пространство элементарных событий, случайное событие.
- Классическое и статистическое определение вероятности.
- Алгебра событий.
- Аксиомы теории вероятностей.
- Свойства вероятности.
- Свойство непрерывности вероятности.
- Пример, иллюстрирующий свойство непрерывности вероятности (пример А.В. Браилова)

Пространство элементарных событий, случайное событие.

Исходные понятия теории вероятностей:

- стохастический эксперимент,
- случайное событие,
- вероятность случайного события.

Определение

Стохастическими *называются эксперименты, результаты которых нельзя предугадать заранее.*

Пространство элементарных событий, случайное событие.

Каждому такому эксперименту (опыту) поставим в соответствие множество Ω, элементы которого ω_i изображают наиболее полную информацию о предполагаемых результатах данного эксперимента.

Определение

Множество Ω называется ***пространством элементарных событий****, а его точки ω_i —* ***элементарными событиями*** *или* ***исходами****.*

Обозначение: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_i, \ldots\}$. Предполагается, что в рамках данного эксперимента (опыта) нельзя разделить элементарный исход на более мелкие составляющие.

Примеры

1. Производится опыт: один раз бросают монету. Пространство элементарных событий имеет вид $\Omega = \{\omega_1 = \text{Г}, \omega_2 = \text{Р}\}$, где «Г» — появление герба, «Р» — появление решетки.
2. Монету бросают дважды. Пространство элементарных событий этого опыта является множество $\Omega = \{\omega_1 = \text{ГГ}, \omega_2 = \text{ГР}, \omega_3 = \text{РГ}, \omega_4 = \text{РР}\}$.
3. Игральную кость, на которой выбиты цифры 1,2,3,4,5,6, бросают один раз. Нас интересует число выпавших очков. Пространство элементарных исходов Ω состоит из 6 точек.
4. Игральную кость бросают n раз. Тогда $\Omega = \{\omega = (i_1, i_2, \ldots, i_n\}$, где i_k число выпавших очков при k-ом бросани, которое может принимать значения 1,2 3,4,5,6. Количество всех элементарных исходов равно $|\Omega| = 6^n$. Число $|\Omega|$ будем называть ***мощностью*** множества Ω.

Примеры

5. Предположим, что симметричную (правильную) монету бросают до первого появления герба. Пространство элементарных событий такого эксперимента является множество

$$\Omega = \left\{ \omega_1 = \text{Г}, \omega_2 = \text{РГ}, \ldots, \omega_n = \underbrace{\text{Р}\ldots\text{Р}}_{(n-1)\ \text{раз}}\text{Г}, \ldots ; \omega_\infty \right\},$$

где ω_n означает, что герб впервые появится при n-ом бросании монеты, а ω_∞ соответствует той возможности, что герб никогда не появится (в этом случае наш эксперимент продолжается бесконечно долго). В данном эксперименте множество Ω счётно.

Упражнение

Монету бросают n раз. Описать Ω и найти $|\Omega|$.

Определение

Случайным событием *A называется любое подмножество пространства элементарных событий Ω и состоит из всех элементарных исходов $\omega \in \Omega$, которые благоприятствуют появлению события A. Обозначение $A \subseteq \Omega$.*

Из определения следует, что само множество Ω, рассматриваемое как событие, обязательно происходит. Множество Ω называется ***достоверным событием***. По определению подмножеством любого множества Ω считается пустое множество $\varnothing$, которое не содержит ни одной точки Ω. Если $\varnothing$ сопоставить с событием, то это событие в эксперименте не происходит. Такое событие называется ***невозможным событием***.

Примеры

1. Пусть монету бросают дважды и A — событие, которое состоит в том, что хотя бы один раз появится герб. Тогда $\Omega = \{\omega_1 = \text{ГГ}, \omega_2 = \text{ГР}, \omega_3 = \text{РГ}, \omega_4 = \text{РР}\}$, $A = \{\omega_1 = \text{ГГ}, \omega_2 = \text{ГР}, \omega_3 = \text{РГ}\}$. Здесь мощность множества A, т.е. количество благоприятствующих исходов, равно $|A| = 3$.
2. Предположим, что монету бросают до первого появления герба. Пусть A — событие, состоящее в том, что будет сделано не более трех бросаний. Тогда $A = \{\text{Г}, \text{РГ}, \text{РРГ}\}$.

Классическое и статистическое определение вероятности.

Пусть пространство элементарных исходов Ω не более, чем счётно, т.е. $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_i, \ldots\}$. Предположим, что каждому элементарному исходу ω_i приписан некоторый «вес» p_i, называемый ***вероятностью элементарного события*** ω_i, причём веса p_i обладают свойствами:

1) $p_i \geqslant 0$,
2) $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Определение

Вероятностью $\mathbb{P}(A)$ *случайного события* $A \subseteq \Omega$ *называется сумма вероятностей элементарных событий, благоприятствующих событию* A

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i. \tag{1}$$

Введенная таким способом вероятность обладает следующими свойствами:

1. $0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1$,
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
3. если A и B — *несовместные* события ($A \subset \Omega, B \subset \Omega, A \cdot B = \varnothing$), то $\mathbb{P}(A+B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Действительно, $0 \leqslant \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$,
$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{\omega_i \in \Omega} p_i = \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$,
$\mathbb{P}(A+B) = \sum_{\omega_i \in A+B} p_i = \sum_{\omega_i \in A} p_i + \sum_{\omega_i \in B} p_i = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$, если $A \cdot B = \varnothing$.

Для многих экспериментов пространство элементарных событий состоит из ***конечного числа одинаково возможных исходов*** $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, причём $\mathbb{P}(\omega_1) = \mathbb{P}(\omega_2) = \ldots = \mathbb{P}(\omega_n) = \frac{1}{n}$. Пусть событию $A \subseteq \Omega$ благоприятствует m элементарных исходов. Тогда

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i = \underbrace{\frac{1}{n} + \ldots \frac{1}{n}}_{m \text{ раз}} = \frac{m}{n}.$$

Определение (классическое определение вероятности)

Рассмотрим стохастический эксперимент, который состоит из n ***одинаково возможных исходов*** ω_i, *т.е.* $|\Omega| = n$, $\mathbb{P}(\omega_i) = \frac{1}{n}$. *Предположим, что событию A благоприятствует m из этих исходов т.е.* $|A| = m$. *Тогда*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{m}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|}. \tag{2}$$

Статистическое определение вероятности

Определение (статистическое определение вероятности)

Пусть некоторый опыт повторяется (реализуется) N раз. Для события A, связанного с данным опытом, обозначим через $N(A)$ его ***частоту*** *– количество реализаций, в которых "наблюдалось" (наступило) событие A. Определим* ***относительную частоту*** $\hat{p}(A)$ *события A как отношение частоты события A к N, т.е. $\hat{p}(A) \stackrel{def}{=} \frac{N(A)}{N}$.* ***Статистическое определение вероятности*** *утверждает, что при большом числе реализаций опыта N выполняется приближенное равенство*

$$\boxed{\mathbb{P}(A) \approx \hat{p}(A)}, \qquad (3)$$

где $\hat{p}(A) \stackrel{def}{=} \frac{N(A)}{N}$.

Формально статистическое определение вероятности очень похоже на классическое определение вероятности: и в том и другом определении вероятность равна отношению. Различие, конечно, кроется в том смысле, который придается букве "эн":

- $n = |\Omega|$ – число элементарных исходов;
- N – число реализаций опыта.

При подбрасывании N раз симметричной монеты наблюдались следующие статистические закономерности (описываемые в литературе) появления герба $\hat{p}(A) = \frac{N(A)}{N}$:

Автор эксперимента	N	$\hat{p}(A) = \frac{N(A)}{N}$
Бюффон (1707–1788)	4040	0,507
Де Морган (1806-1871)	4090	0,5005
Джевонс (1835-1882)	20 480	0,5068
Пирсон К. (1857-1936)	24 000	0,5005
Студент ПМ2024	100 000	???

Примеры

1. Пусть симметричная игральная кость бросается дважды. Найти вероятность события A, состоящего в том, что сумма выпавших очков равна 5.
   Решение. Пространство элементарных исходов $\Omega = \{\omega_{ij} = (i,j) : i = \overline{1,6}; j = \overline{1,6}\}$, $n = |\Omega| = 6^2 = 36$, причём $\mathbb{P}(\omega_{ij}) = \frac{1}{36}$ (все исходы равновероятны). Событие $A = \{\omega_{14} = (1,4), \omega_{23} = (2,3), \omega_{32} = (3,2), \omega_{41} = (4,1)\}$, $m = |A| = 4$. Следовательно, $\mathbb{P}(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.
2. Предположим, что игральная кость не является симметричной и “вероятности” в ней распределены так, что “вероятность” каждой грани пропорциональна её номеру. Найти вероятность события A, состоящее в том, что при бросании несимметричной кости появившееся число очков кратно 3.
   Решение. $p_i = \mathbb{P}(\omega_i) = \frac{i}{21}$. $A = \{3,6\}$, $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{21} + \frac{6}{21} = \frac{3}{7}$.

Примеры

1. Пусть симметричная игральная кость бросается дважды. Найти вероятность события A, состоящего в том, что сумма выпавших очков равна 5.
   Решение. Пространство элементарных исходов $\Omega = \{\omega_{ij} = (i,j) : i = \overline{1,6}; j = \overline{1,6}\}$, $n = |\Omega| = 6^2 = 36$, причём $\mathbb{P}(\omega_{ij}) = \frac{1}{36}$ (все исходы равновероятны). Событие $A = \{\omega_{14} = (1,4), \omega_{23} = (2,3), \omega_{32} = (3,2), \omega_{41} = (4,1)\}$, $m = |A| = 4$. Следовательно, $\mathbb{P}(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.
2. Предположим, что игральная кость не является симметричной и “вероятности” в ней распределены так, что “вероятность” каждой грани пропорциональна её номеру. Найти вероятность события A, состоящее в том, что при бросании несимметричной кости появившееся число очков кратно 3.
   Решение. $p_i = \mathbb{P}(\omega_i) = \frac{i}{21}$. $A = \{3,6\}$, $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{21} + \frac{6}{21} = \frac{3}{7}$.

Примеры

3. Предположим, что симметричную монету бросают до первого появления герба. Найти вероятность события A, состоящего в том, что будет произведено не более трех бросаний.

Решение. Пространство элементарных событий является множество

$$\Omega = \left\{ \omega_1 = \text{Г}, \omega_2 = \text{РГ}, \ldots, \omega_n = \underbrace{\text{Р}\ldots\text{Р}}_{(n-1)\text{ раз}}\text{Г}, \ldots ; \omega_\infty \right\},$$

где ω_n означает, что герб впервые появится при n-ом бросании монеты, а ω_∞ соответствует той возможности, что герб никогда не появится (в этом случае наш эксперимент продолжается бесконечно долго). Припишем веса $\mathbb{P}(\omega_n) = \frac{1}{2^n}$, а $\mathbb{P}(\omega_\infty) = 0$. Тогда $\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) = 1$. Событие $A = \{\text{Г}, \text{РГ}, \text{РРГ}\}$. Поэтому

$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

Ответ: $\mathbb{P}(A) = \frac{7}{8}$

Примеры

3. Предположим, что симметричную монету бросают до первого появления герба. Найти вероятность события A, состоящего в том, что будет произведено не более трех бросаний.
Решение. Пространство элементарных событий является множество
$$\Omega = \left\{ \omega_1 = \text{Г}, \omega_2 = \text{РГ}, \ldots, \omega_n = \underbrace{\text{Р}\ldots\text{Р}}_{(n-1)\ \text{раз}}\text{Г}, \ldots; \omega_\infty \right\},$$
где ω_n означает, что герб впервые появится при n-ом бросании монеты, а ω_∞ соответствует той возможности, что герб никогда не появится (в этом случае наш эксперимент продолжается бесконечно долго). Припишем веса $\mathbb{P}(\omega_n) = \frac{1}{2^n}$, а $\mathbb{P}(\omega_\infty) = 0$. Тогда $\sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\omega) = 1$. Событие $A = \{\text{Г}, \text{РГ}, \text{РРГ}\}$. Поэтому
$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$
Ответ: $\mathbb{P}(A) = \frac{7}{8}$

Примеры

3. Предположим, что симметричную монету бросают до первого появления герба. Найти вероятность события A, состоящего в том, что будет произведено не более трех бросаний.

   Решение. Пространство элементарных событий является множество

$$\Omega = \left\{ \omega_1 = \text{Г}, \omega_2 = \text{РГ}, \ldots, \omega_n = \underbrace{\text{Р}\ldots\text{Р}}_{(n-1)\ \text{раз}}\text{Г}, \ldots; \omega_\infty \right\},$$

   где ω_n означает, что герб впервые появится при n-ом бросании монеты, а ω_∞ соответствует той возможности, что герб никогда не появится (в этом случае наш эксперимент продолжается бесконечно долго). Припишем веса $\mathbb{P}(\omega_n) = \frac{1}{2^n}$, а $\mathbb{P}(\omega_\infty) = 0$. Тогда $\sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\omega) = 1$. Событие $A = \{\text{Г}, \text{РГ}, \text{РРГ}\}$. Поэтому
   $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$
   Ответ: $\mathbb{P}(A) = \frac{7}{8}$

Упражнение

Предположим, что симметричную монету бросают до тех пор, пока она не выпадет дважды одной и той же стороной подряд. Построить вероятностную модель т.е. $(\Omega, \mathbb{P}(\cdot))$ и найти вероятность того, что потребуется чётное число бросаний.

Ответ: $\frac{2}{3}$

Упражнение

Предположим, что симметричную монету бросают до тех пор, пока она не выпадет дважды одной и той же стороной подряд. Построить вероятностную модель т.е. $(\Omega, \mathbb{P}(\cdot))$ и найти вероятность того, что потребуется чётное число бросаний.

Ответ: $\frac{2}{3}$

Алгебра событий

Поскольку события являются подмножества множества Ω, то над ними можно производить операции как над множествами.

Пусть с некоторым пространством элементарных событий Ω связаны события A и B.

Определение

Если событие B происходит всякий раз, когда происходит событие A, тогда событие B является ***следствием*** *события A,* $A \subset B$, *(событие A влечёт за собой событие B).*

Очевидно, для любого A, $A \subset \Omega$. По определению принимают $\varnothing \subset A$.

Пример

Пусть событие A состоит в том, что при бросании игральной кости выпало нечётное число, меньшее 5, а событие B — выпавшее число меньше 4. Тогда $A \subset B$.

Алгебра событий

Определение

Суммой *или* ***объединением*** *двух событий A и B называется событие $A+B$, которое состоит в наступлении хотя бы одного из данных событий.*

Пример

Пусть бросают игральную кость. Событие A — выпадение числа, кратного 2, а B — выпадение числа, кратного 3. Тогда $A+B$ — выпадение хотя бы одного из чисел 2,3,4,6.

Заметим, что для любого события A справедливы равенства $A+\varnothing=A$, $A+\Omega=\Omega$.

Алгебра событий

Определение

Произведением *событий A и B называется событие $A \cdot B$, которое состоит в одновременном наступлении событий A и B.*

Пример

В предыдущем примере $A \cdot B = \{6\}$.

Отметим, что $A \cdot \varnothing = \varnothing$, $A \cdot \Omega = A$.

Определение

Два события A и B называются ***несовместными****, если их произведение $A \cdot B$ есть событие невозможное, т.е. $A \cdot B = \varnothing$.*

Алгебра событий

Определение

Событие, которое состоит в том, что не происходит событие A, называется ***противоположным*** *событию A и обозначается $\overline{A}$.*

Ясно, что $A + \overline{A} = \Omega$, $A \cdot \overline{A} = \varnothing$.

Пример

Покупаются три лотерейных билета. Пусть A_k обозначает событие выигрыша по k- ому билету, $k = 1, 2, 3$. Тогда событие $A_1 \cdot A_2 + A_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot A_3$ означает выигрыш ***не менее*** *по двум билетам, в то время как событие $A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3$ — означает выигрыш* ***ровно*** *по двум и только двум билетам.*

Алгебра событий

Определение

Разностью *событий* A *и* B *называется событие* $C = A \diagdown B$, *которое означает, что происходит событие* A, *но не происходит событие* B.

Очевидно, что $A \diagdown B = A \cdot \overline{B}$, $\overline{A} = \Omega \diagdown A$.

Упражнение

Доказать принцип двойственности

1. $\overline{A_1 + A_2 + \ldots + A_n} = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n$,
2. $\overline{A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n} = \overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \ldots + \overline{A}_n$

Алгебра событий

Рассмотренные свойства операций над событиями носят алгебраический характер. В теории вероятностей класс $\mathscr{F}$ всех возможных событий должен удовлетворять аксиомам событий.

Определение

*Класс $\mathscr{F}$ всех возможных событий из Ω называется **σ-алгеброй**, если*

I. *из того, что A является событием, $A \in \mathscr{F}$, следует, что $\overline{A}$ также является событием, т.е.$\overline{A} \in \mathscr{F}$;*

II. *из того, что A_i в конечном или счетном множестве являются событиями, $A_i \in \mathscr{F}, i = 1, 2, \ldots$, следует, что их сумма $A_1 + A_2 + \ldots$ также является событием, т.е. $A_1 + A_2 + \ldots \in \mathscr{F}$.*

Если класс $\mathscr{F}$ не пуст, то из определения следует, что $\Omega \in \mathscr{F}$, так как $\Omega = A + \overline{A}$. Следовательно, $\varnothing \in \mathscr{F}$, поскольку $\varnothing = \overline{\Omega}$. Наконец, согласно принципу двойственности, если $A_i \in \mathscr{F}$, то и произведение $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots$ также является событием, т.е. принадлежит классу $\mathscr{F}$.

Примеры

- $\{\varnothing, \Omega\}$ – ***минимальная*** σ-алгебра;
- $\mathscr{F} = 2^{\Omega}$ – ***максимальная*** σ-алгебра.

Любая другая σ-алгебра $\mathscr{F}$ подмножеств Ω занимает промежуточное положение:

$$\{\varnothing, \Omega\} \subset \mathscr{F} \subset 2^{\Omega}.$$

Пример

В опыте с бросанием симметричной игральной кости пространство Ω состоит из шести элементарных событий, а максимальная σ-алгебра $\mathscr{F} = 2^{\Omega}$ состоит из всех подмножеств Ω, т.е. из $2^6 = 64$ событий. И вообще, если Ω состоит из n элементарных событий, то $\mathscr{F} = 2^{\Omega}$ состоит из $2^{|\Omega|} = 2^n$ событий.

Аксиомы теории вероятностей

Рассмотрим некоторый стохастический эксперимент. Пусть Ω — пространство элементарных событий и $\mathscr{F}$ — непустая совокупность всех подмножеств множества Ω, которая является σ-алгеброй. Это означает, что выполнены аксиомы событий **I** и **II**.

Предположим, что каждому случайному событию A (множеству из $\mathscr{F}$) поставлено в соответствие число $\mathbb{P}(A)$, которое называется ***вероятностью случайного события*** A, обладающее следующими свойствами:

III. $\mathbb{P}(A) \geqslant 0$ для каждого $A \in \mathscr{F}$ (аксиома неотрицательности);

IV. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (аксиома нормированности);

V. если события $A_1, A_2, \dots$ попарно несовместны т.е. $A_i \cdot A_j = \varnothing, i \neq j$, то $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$ (аксиома σ-аддитивности или счётной аддитивности).

Если множество Ω является ***конечным***, то любая совокупность попарно не пересекающихся подмножеств состоит лишь из конечного числа подмножеств. Поэтому для случая конечного Ω аксиома **V** равносильна требованию

V′. $\mathbb{P}(A+B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$, если A и B несовместны.

Утверждения **I–V** и составляют систему аксиом теории вероятностей. В таком виде аксиоматика теории вероятностей была сформулирована А.Н. Колмогоровым.

Определение

Тройка $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}(\cdot))$, где Ω — пространство элементарных событий, $\mathscr{F}$ — σ-алгебра, а $\mathbb{P}(\cdot)$ — вероятность на $\mathscr{F}$, называется ***вероятностным пространством.***

Примеры

1. Пусть $\Omega = \{a, b\}$ – множество, состоящее из двух произвольных различных элементов. В качестве $\mathscr{F}$ рассмотрим множество всех подмножеств в Ω. Таким образом,

$$\mathscr{F} = 2^{\Omega} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\} = \Omega\}.$$

Чтобы задать вероятность $\mathbb{P}$, зафиксируем некоторое число $p \in (0; 1)$. После чего зададим вероятность с помощью следующих равенств

$$\mathbb{P}(\varnothing) = 0; \mathbb{P}(\{a\}) = p; \mathbb{P}(\{b\}) = 1 - p; \mathbb{P}(\{a, b\}) = 1.$$

Полученная тройка $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}(\cdot))$ является самым простым примером вероятностного пространства, в котором имеются события с вероятностью, отличной от 0 и 1. Данное вероятностное пространство может служит моделью опыта, состоящего в подбрасывании ***несимметричной монеты***.

Примеры вероятностных пространств

2. Пусть пространство элементарных событий Ω состоит из **конечного** числа одинаково возможных элементарных исходов, т.е. $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$. В качестве $\mathscr{F}$ возьмем σ-алгебру всех подмножеств из Ω, которая состоит из 2^n событий. Положим $\mathbb{P}(A) = \frac{m}{n}$, где m — число элементарных событий, входящих (благоприятствующих) в A. Тогда все аксиомы теории вероятностей выполнены (проверить). Таким образом, $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}(\cdot))$ — вероятностое пространство, которое называется ***классическим вероятностным пространством***.

Упражнение

Является ли вероятностное пространство из предыдущего примера классическим вероятностным пространством?

Примеры

3. Пусть $\Omega = [a, b]$ — отрезок числовой прямой. Опыт заключаются в бросании точки наугад в Ω. В качестве событий будут выступать открытые интервалы $(\alpha, \beta) \subseteq [a, b]$ и все множества, которые можно получить из них с помощью теоретико-множественных операций. Такие множества называются ***борелевскими***. Пусть $\mathscr{F}$ есть σ-алгебра борелевских множеств из Ω. Если все точки Ω «одинаково возможны», то для каждого события $A = (\alpha, \beta) \subseteq \Omega$ в качестве вероятности положим $\mathbb{P}(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$, где $m(A) = \beta - \alpha$ — длина. Легко проверить справедливость аксиом **I–V**. Таким образом, построено вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}(\cdot))$, которое не является дискретным. Вероятность $\mathbb{P}(\cdot)$ называется ***геометрической вероятностью***.

Свойства вероятности

Используя аксиомы **I–V**, можно установить все теоремы, включая самые сложные, формально-логическим путем.

Теорема

Вероятность события, противоположного событию A, равна $1 - \mathbb{P}(A)$:

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A). \tag{4}$$

Доказательство.

Так как $A + \overline{A} = \Omega$, $A \cdot \overline{A} = \varnothing$, то согласно аксиомам **IV**,**V** имеем $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$. Поэтому $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$. $\square$

Следствие

Вероятность невозможного события равна нулю: $\mathbb{P}(\varnothing) = \mathbf{0}$.

Доказательство.

Положим в равенстве **(4)**, которое справедливо для любого $A \in \mathscr{F}$, $A = \Omega$. Тогда $\mathbb{P}(\varnothing) = \mathbb{P}(\overline{\Omega}) = \mathbf{1} - \mathbb{P}(\Omega) = \mathbf{0}$, поскольку в силу аксиомы **IV** имеем $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. □

Замечание

Иногда ошибочно считают, что событие нулевой вероятности обязательно есть невозможное событие. Это не так. Например, пусть выбирается наугад число из отрезка $[0, 1]$. Положим $\Omega = [0, 1]$. Пусть $\mathscr{F}$ — есть σ-алгебра борелевских множеств отрезка $[0, 1]$ и $\mathbb{P}(A) = m(A) = \beta - \alpha$, если $A = (\alpha, \beta) \subseteq [0, 1]$. а $B = \mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел отрезка $[0, 1]$. Тогда вероятность того, что событие B произойдет, равна 0 т.е. $\mathbb{P}(B) = 0$ (проверить). Однако событие B может произойти, оно не является невозможным.

Теорема

Пусть A и B — случайные события, такие, что $A \subset B$. Тогда

$$\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A). \tag{5}$$

Доказательство.

Так как $A \subset B$, то $B = A + (B \setminus A)$, причём $A \cdot (B \setminus A) = \varnothing$. Поэтому по аксиоме **V** имеем $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A)$, а отсюда следует равенство (refeq:1-5). $\square$

Следствие

Если $A \subset B$, то $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.

Доказательство.

Действительно, по аксиоме **III** имеем $\mathbb{P}(B \setminus A) \geqslant 0$. Тогда из равенства (5) получаем $\mathbb{P}(B) \geqslant \mathbb{P}(A)$. $\square$

Свойства вероятности

Следствие

Для каждого случайного события A имеет место неравенство

$$\mathbb{P}(A) \leqslant 1.$$

Этот факт не содержится непосредственно ни в одной из аксиом **III-V**.

Доказательство.

В самом деле, для каждого случайного события A, $A \subset \Omega$. Поэтому $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(\Omega) = 1$. □

Теорема (формула сложения вероятностей)

Для любых событий A и B выполняется формула сложения вероятностей:

$$\mathbb{P}(A+B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cdot B). \qquad (6)$$

Доказательство.

Рассмотрим соотношения между событиями (как между подмножествами множества Ω): $A = A \cdot \Omega = A \cdot (B + \overline{B}) = A \cdot B + A \cdot \overline{B}$, $A + B = B + A \cdot \overline{B}$. Применяя к обоим равенствам аксиому **V**, получим

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cdot B) + \mathbb{P}(A \cdot \overline{B}),$$
$$\mathbb{P}(A+B) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cdot \overline{B}).$$

Вычитая из последнего равенства предыдущее, приходим к формуле (6). □

Свойства вероятности

Следствие (правило сложения вероятностей)

Если события A и B несовместны, то

$$\mathbb{P}(A+B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B). \quad (7)$$

Доказательство.

Действительно, поскольку события A и B несовместны, то $A \cdot B = \varnothing$ и $\mathbb{P}(A \cdot B) = 0$. Поэтому из формулы (6) следует (7). $\square$

Упражнения

1. Доказать формулу сложения для трёх событий A, B и C:

$$\mathbb{P}(A+B+C) = \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}(A\cdot B)-\mathbb{P}(A\cdot C)-\mathbb{P}(B\cdot C)+\mathbb{P}(A\cdot B\cdot C).$$

Свойства вероятности

2. Доказать формулу суммирования вероятностей (*тождество Пуанкаре (аналог принципа включений–исключений в комбинаторике*) для произвольного конечного числа событий:

$$\mathbb{P}(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) - \sum_{1 \leqslant k_1 < k_2 \leqslant n} \mathbb{P}(A_{k_1} \cdot A_{k_2}) + \\ + \sum_{1 \leqslant k_1 < k_2 < k_3 \leqslant n} \mathbb{P}(A_{k_1} \cdot A_{k_2} \cdot A_{k_3}) + \ldots + (-1)^{n-1} \mathbb{P}(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n).$$

3. Вывести аналог тождества Пуанкаре для вероятности пересечения событий.

Свойства вероятности

Теорема

Для любого конечного или счётного числа случайных событий $\{A_n\}$ *имеют место следующие неравенства:*

$$\mathbb{P}\left(A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) \tag{8}$$

$$\mathbb{P}\left(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n \cdot \ldots\right) \geqslant 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\overline{A}_n) \tag{9}$$

Доказательство.

Для доказательства (8) положим $B_1 = A_1$, $B_2 = \overline{A}_1 \cdot A_2, \ldots$ $B_n = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_{n-1} \cdot A_n, \ldots$. Тогда события B_n попарно несовместны, $B_n \subset A_n$ и $A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots = B_1 + B_2 + \ldots + B_n + \ldots$. Поэтому

$$\mathbb{P}\left(A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots\right) = \mathbb{P}\left(B_1 + B_2 + \ldots + B_n + \ldots\right) \overset{\text{аксиома}\,\mathbf{V}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Неравенство (9) вытекает из следующих рассуждений:

$$\mathbb{P}\left(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n \cdot \ldots\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n \cdot \ldots}\right) =$$

$$= 1 - \mathbb{P}\left(\overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \ldots + \overline{A}_n + \ldots\right) \geqslant 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\overline{A}_n),$$

здесь использовано неравенство

$$\mathbb{P}\left(\overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \ldots + \overline{A}_n + \ldots\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\overline{A}_n).$$

Свойство непрерывности вероятности

Определение

Последовательность событий $\{A_n, n \geqslant 1\}$ *называется* ***монотонно убывающей****, если* $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \cdots$.
Последовательность событий $\{A_n, n \geqslant 1\}$ *называется* ***монотонно возрастающей****, если* $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \cdots$.

Если $\{A_n, n \geqslant 1\}$ является монотонно убывающей,то существует ***предел последовательности*** $\lim_{n\to\infty} A_n = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$. Аналогично, для монотонно возрастающей последовательности $\{A_n, n \geqslant 1\}$ предел последовательности $\lim_{n\to\infty} A_n$ определяется равенством $\lim_{n\to\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Пример

Для монотонно убывающей последовательности $A_n = \left(x - \frac{1}{n}; x + \frac{1}{n}\right)$ *имеем* $\lim_{n\to\infty} A_n = \cap_{n=1}^{\infty} \left(x - \frac{1}{n}; x + \frac{1}{n}\right) = \{x\}$.

Свойство непрерывности вероятности

Теорема (свойство непрерывности вероятности)

Если последовательность событий $\{A_n, n \geqslant 1\}$ является монотонной (убывающей или возрастающей), то

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right). \tag{10}$$

Свойство непрерывности вероятности

Доказательство.

Предположим, что $\{A_n, n \geqslant 1\}$ — монотонно возрастающая последовательность событий. Определим новую последовательность событий $\{B_n, n \geqslant 1\}$:

$$B_1 = A_1$$
$$B_n = A_n \cdot \left(\overline{\cup_{k=1}^{n-1} A_k}\right) = A_n \cdot \overline{A}_{n-1}, \quad n \geqslant 2.$$

В последнем равенстве использовали то, что $\cup_{k=1}^{n-1} A_k = A_{n-1}$, поскольку $\{A_n, n \geqslant 1\}$ — монотонно возрастающая последовательность событий. Другими словами, событие B_n состоит из тех исходов, что и в A_n, которые не принадлежат ни одному из A_i для $i < n$. Тогда события B_n попарно несовместны и справедливы равенства:

$$B_1 + B_2 + \ldots + B_n + \ldots = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots,$$
$$B_1 + B_2 + \ldots + B_n = A_1 + A_2 + \ldots + A_n, \quad n \geqslant 1.$$

Доказательство.

Поэтому

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \mathbb{P}\left(A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots\right) = \mathbb{P}\left(B_1 + B_2 + \ldots + B_n + \ldots\right)$$

$$\overset{\text{аксиома}\mathbf{V}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_1 + B_2 + \ldots + B_n) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Пусть теперь $A_n, n \geqslant 1$ — монотонно убывающая последовательность событий. Тогда из предыдущих соотношений следует, что

$$\mathbb{P}\left(\cup_{k=1}^{\infty} \overline{A}_k\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\overline{A}_n\right).$$

□

Доказательство.

Поскольку $\cup_{k=1}^{\infty} \overline{A}_k = \overline{\left(\cap_{k=1}^{\infty} A_k\right)}$, то из предыдущего равенства следует, что

$$\mathbb{P}\left(\overline{\left(\cap_{k=1}^{\infty} A_k\right)}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\overline{A}_n\right).$$

или

$$\mathbf{1} - \mathbb{P}\left(\cap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\mathbf{1} - \mathbb{P}(A_n)\right) = \mathbf{1} - \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Следовательно,

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\cap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

$\square$

Пример, иллюстрирующий свойство непрерывности вероятности (пример А.В. Браилова)

В качестве примера, иллюстрирующего понятия σ-аддитивности и непрерывности вероятности, рассмотрим следующий опыт.

Пример

Монета подбрасывается до тех пор, пока не выпадет "герб". Пусть A – событие, состоящее в том, что это произойдет в нечетном броске. Требуется найти вероятность события A

- *а) используя σ-аддитивность вероятности;*
- *б) используя свойство непрерывности вероятности.*

Решение. Определим следующие события:

$$A_k = \{\text{"Герб"выпал в броске с нечетным номером } n \leqslant 2k-1\},\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

Например, A_3 – это событие, состоящее в том, что "герб"выпал либо в первом, либо в третьем, либо в пятом бросках. Определим также события:

$$B_k = \{\text{"Герб"выпал в броске с номером } 2k-1\},\ k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Каждое из событий A_k можно представить как сумму попарно несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_k$. Например,

$$A_3 = B_1 + B_2 + B_3.$$

Сначала найдем вероятность $\mathbb{P}(B_k)$, применяя классическое определение,

$$\mathbb{P}(B_k) = \frac{1}{2^{2k-1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^{k-1}}.$$

Затем, с учетом равенства

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$$

и попарной несовместности $B_1, B_2, \ldots$, используя σ-аддитивность вероятности, находим:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^{k-1}} = \frac{2}{3}.$$

Теперь тот же результат получим с помощью свойства непрерывности вероятности.

Используя равенство

$$A_k = B_1 + B_2 + \ldots + B_k,$$

и попарной несовместности $B_1, B_2, \ldots, B_k$, находим

$$\mathbb{P}(A_k) = \sum_{i=1}^{k} B_i = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{4^{k-1}}\right) =$$
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \cdot \left(1 - \frac{1}{4^k}\right) = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{4^k}\right).$$

Получаем $\mathbb{P}(A)$ по непрерывности:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(A_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{4^k}\right) = \frac{2}{3}.$$

Univariate Distribution Relationships Chart

http://www.math.wm.edu/ leemis/chart/UDR/UDR.html