Упражнение

Предположим, что симметричную монету бросают до тех пор, пока она не выпадет дважды одной и той же стороной подряд. Построить вероятностную модель т.е. $(\Omega, \mathbb{P}(\cdot))$ и найти вероятность того, что потребуется чётное число бросаний.

Ответ: $\frac{2}{3}$

$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 \left(= \Omega_1 \cup \Omega_2\right)$, где

$\Omega_1 = \{ \omega_1 = ГГ,\ \omega_2 = РГГ,\ \omega_3 = ГРГГ,\ \omega_4 = РГРГГ, \ldots$
$\omega_\infty = РГРГР\ldots \}$

$\Omega_2 = \{ \omega_1' = РР,\ \omega_2' = ГРР,\ \omega_3' = РГРР,\ \omega_4' = ГРГРР, \ldots \}$

$p_1 = p(\omega_1) = p(\omega_2) = \frac{1}{4}$ $\quad p_2 = \frac{1}{8}$ $\quad p_3 = \frac{1}{16}, \quad p_4 = \frac{1}{32} \ldots$

$p_n = \frac{1}{2^{n+1}} \quad n = 1, 2, 3 \ldots$

$$2 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 2 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots\right) =$$
$$= 2 \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}}\right) = 1$$

Пусть A – потребуется чётное число бросаний $\Rightarrow$

$A \subset \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ и $A = \{ \omega_1 = ГГ,\ \omega_1' = РР,\ \omega_3 = ГРГГ,$
$\omega_3' = РГРР, \ldots$

$$\mathbb{P}(A) = 2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots\right) =$$
$$= 2 \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4}}\right) = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$