12.03.2024

Занятие № 5. Дискретные случайные величины. Независимость.

©*Составитель: д.ф.-м.н., проф. Рябов П.Е.*

Ко всем задачам, где есть числовой ответ, напишите программу (код) с использованием инструментария ***Jupyter Notebook***, который иллюстрирует статистическую устойчивость события A, а также постройте график зависимости относительной частоты $\hat{p}(A) \overset{\text{def}}{=} \frac{N(A)}{N}$ события A от числа проведенных реализаций опыта N.

5.1. Дискретные случайные величины X_1, X_2, X_3 независимы и имеют одинаковое распределение

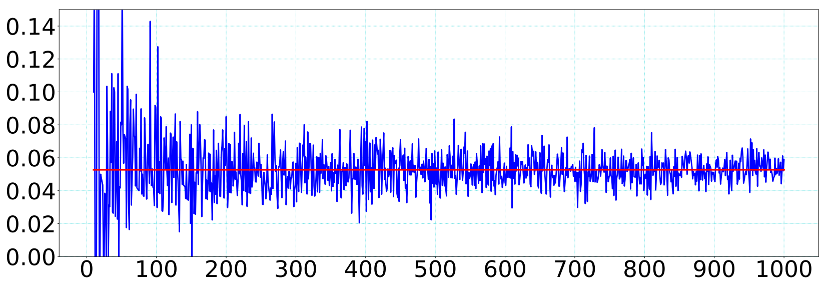
X_k	1	2	3	4	5
P	$0,2$	$0,2$	$0,2$	$0,2$	$0,2$

Пусть $Y = \max\{X_1; X_2; X_3\}$. Найдите распределение Y.

5.2. Дискретная случайная величина принимает только целые значения $1; 2;$ $3; 4; 5$ и 6, при этом все указанные значения равновероятны. Пусть Y_n – остаток от деления X на n ($n = 2$ или $n = 3$). Верно ли, что Y_2 и Y_3 независимы. Решить ту же задачу, если распределение X пропорционально принимаемым значениям, т.е. $\mathbf{P}\,(X = k) = A \cdot k, k = 1, \ldots, 6$.

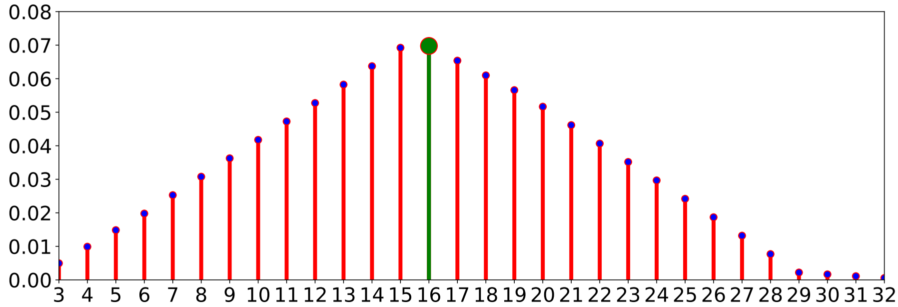
5.3. Независимые случайные величины X, Y, Z могут принимать только целые значения: X – от 0 до 12 с вероятностью $\frac{1}{13}$, Y – от 0 до 13 с вероятностью $\frac{1}{14}$, а Z только значения 3 и 7, при этом $\mathbf{P}\,(Z = 3) = \frac{9}{10}$. Найдите: а) вероятность того, что сумма данных случайных величин будет равна 12 и доказать ее статистическую устойчивость, построив график зависимости относительной частоты указанного события от числа экспериментов; б) наиболее вероятное значение суммы $X + Y + Z$ и вероятность такого события; в) распределение $X + Y + Z$.

Ответ: а) $\mathbb{P}(X + Y + Z = 12) = 0.05274725274725277$;



б) $M = 16, \mathbb{P}(X + Y + Z = M) = 0.0697802197802198$.

5.4. Независимые случайные величины X, Y, Z принимают только целые значения: X – от 1 до 15 с вероятностью $\frac{1}{15}$, Y – от 1 до 12 с вероятностью $\frac{1}{12}$,



Z – от 1 до 11 с вероятностью $\frac{1}{11}$. Найдите вероятность: а) $P(X < Y < Z)$; б) $P(2X < Y < 2Z)$ и доказать ее статистическую устойчивость, построив график зависимости относительной частоты указанного события от числа экспериментов.

Ответ: а) 0.08333333333333333 б) 0.10353535353535354.

5.5. Независимые случайные величины X, Y, Z могут принимать только целые значения: X – от 1 до 7 с вероятностью $\frac{1}{7}$, Y – от 1 до 14 с вероятностью $\frac{1}{14}$, а Z только значения 7 и 14, при этом $\mathbf{P}\left(Z = 7\right) = \frac{3}{5}$. Найдите вероятность того, что сумма данных случайных величин будет не меньше 29 и доказать ее статистическую устойчивость, построив график зависимости относительной частоты указанного события от числа экспериментов.

Ответ: 0.1142857142857142.

5.6. Независимые дискретные случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_9$ принимают только целые значения, при этом X_n принимает только значения от 0 до n и все эти значения равновероятны ($n = 1, \ldots, 9$).
Найдите $\mathbb{P}(X_1 X_2 \cdots X_9 = 0)$ и доказать ее статистическую устойчивость, построив график зависимости относительной частоты указанного события от числа экспериментов.

5.7. Независимые случайные величины X, Y, Z принимают только целые значения: X – от **1** до **13** с вероятностью, пропорциональной принимаемому целому значению, т.е. $\mathbf{P}\left(X = i\right) = A \cdot i, i = 1, \ldots, 13$; Y – от **1** до **12** с вероятностью также пропорционально принимаемому значению $\mathbf{P}\left(Y = j\right) = B \cdot j, j = 1, \ldots, 12$; Z – от **1** до **8** с вероятностью $\mathbf{P}\left(Z = k\right) = C \cdot k, k = 1, \ldots, 8$. Найдите вероятность того, что X, Y, Z примут разные значения, т.е. $\mathbf{P}\left(X \neq Y, X \neq Z, Y \neq Z\right)$ и доказать ее статистическую устойчивость, построив график зависимости относительной частоты указанного события от числа экспериментов.

Ответ: 0.7836479759556683.

5.8. Независимые дискретные случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_{40}$ принимают только положительные или отрицательные значения, при этом $\mathbb{P}(X_i > 0) = 0,98$ для всех X_i ($i = 1, 2, \ldots, 40$). Найдите $\mathbb{P}(X_1 X_2 \cdots X_{40} > 0)$ и доказать ее статистическую устойчивость, построив график зависимости относительной частоты указанного события от числа экспериментов.