

```
Ввод [1]: 1 from PIL import ImageGrab
2 from IPython.display import display, Image
3 def ins(ratio=1.0):
4     im_data = ImageGrab.grabclipboard()
5     new_size = tuple([int(i*ratio) for i in im_data.size])
6     thumb = im_data.resize(new_size)
7     fn = "temp.PNG"
8     thumb.save(fn)
9     img = Image(filename=fn)
10    display(img)
```

```
Ввод [2]: 1 import numpy as np
2 from itertools import *
3 from more_itertools import *
4 from sympy import *
5 from scipy.special import *
6 import math
7 init_printing()
```

Размещения, сочетания, перестановки (порядок имеет значение):

Рассмотрим произвольное множество Ω , состоящее из n различных элементов $\Omega = \{a, b, c, \dots\}$.

Множество называется **упорядоченным**, если каждому элементу этого множества поставлено в соответствие некоторое число (номер элемента) от 1 до n , так что различным элементам соответствуют различные числа. Всякое конечное множество можно сделать упорядоченным, если, например, записать все его элементы в некоторый список $\{a, b, c, \dots\}$, а затем поставить в соответствие каждому элементу номер места, на котором он стоит в этом списке. Упорядоченные множества отличаются либо своими элементами, либо их порядком.

Пусть дано множество $\Omega = \{a, b, c, \dots\}$, вообще говоря неупорядоченное и состоящее из n различных элементов, $|\Omega| = n$.

Определение 1. Упорядоченное k -элементное подмножество n -элементного множества Ω называется **размещением из n по k** .

Теорема 1. Пусть A_n^k --- число всех различных размещений из n элементов по k . Тогда

$$P_{n,k} = A_n^k = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

.

Определение 2. Перестановками n -элементного множества Ω называются различные упорядоченные множества, состоящие из тех же элементов множества Ω и отличающиеся лишь порядком элементов.

Таким образом, если Ω состоит из n элементов, то по определению **перестановка** это n -элементное упорядоченное множество.

Например, если $\Omega = \{a, b, c\}$. Все его перестановки -- это 3-х элементные множества.

Теорема 2. Пусть P_n --- число всех перестановок множества Ω , состоящего из n элементов. Тогда

$$P_n = A_n^n = n!.$$

Ввод []:

1

Ввод [3]:

1 Omega='abc'

Ввод [4]:

```
1 B=list(permutations(Omega,2))
2 B
```

Out[4]: [('a', 'b'), ('a', 'c'), ('b', 'a'), ('b', 'c'), ('c', 'a'), ('c', 'b')]

Ввод [5]: 1 len(B)

Out[5]: 6

Ввод [6]: 1 math.perm(3,2)

Out[6]: 6

Ввод [7]: 1 C=list(permutations(Omega,3))
2 C

Out[7]: [('a', 'b', 'c'),
('a', 'c', 'b'),
('b', 'a', 'c'),
('b', 'c', 'a'),
('c', 'a', 'b'),
('c', 'b', 'a')]

Ввод [8]: 1 len(C)

Out[8]: 6

Ввод [9]: 1 math.perm(3)

Out[9]: 6

Определение 3. k -элементное неупорядоченное подмножество n -элементного множества Ω называется **сочетанием из n по k** .

Пример. Пусть $\Omega = \{a, b, c\}$. Выписать все различные сочетания из 3 по 2

Ввод [10]: 1 list(combinations('abc', 2))

Out[10]: [('a', 'b'), ('a', 'c'), ('b', 'c')]

Ввод [11]: 1 list(permutations('abc', 2))

Out[11]: [('a', 'b'), ('a', 'c'), ('b', 'a'), ('b', 'c'), ('c', 'a'), ('c', 'b')]

Теорема 3. Пусть C_n^k -- число всех сочетаний из n по k множества Ω , состоящего из n элементов. Тогда

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Ввод [12]: 1 math.comb(3,2)

Out[12]: 3

Ввод [13]: 1 def nPr(n, r):
2 return int(factorial(n)/factorial(n-r))
3 def nCr(n, r):
4 return int(factorial(n)/(factorial(n-r)*factorial(r)))

Ввод [14]: 1 nPr(3,2), nCr(3,2)

Out[14]: (6, 3)

```
Ввод [15]: 1 import scipy.special
           2 scipy.special.comb(10, 5, exact=True)
```

Out[15]: 252

```
Ввод [16]: 1 nCr(10,5)
```

Out[16]: 252

Разбиения на группы; перестановки с повторениями.

Пусть Ω -- множество из n букв: k_1 - букв a_1 , k_2 -букв a_2 , ..., k_m -букв a_m , $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$.
Поставим задачу, сколько различных слов длины n можно составить из этих букв.

Определение 1 Слова длины n , которые можно получить из k_1 - букв a_1 , k_2 -букв a_2 , ..., k_m -букв a_m , $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$, называются **перестановками с повторениями**.

Пусть $\Omega = \{a, a, b, b\}$. Выписать все перестановки с повторениями.

Теорема 4. Число различных перестановок $P_n(k_1, \dots, k_m)$, среди которых имеется k_1 элементов первого типа, k_2 элементов второго типа, ..., k_m элементов m -го типа, равно

$$P_n(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}.$$

```
Ввод [16]: 1 Omega='aabb'
           2 z=sorted(distinct_permutations(Omega)) # Из библиотеки more_itertools
           3 z
```

Out[16]: [('a', 'a', 'b', 'b'),
 ('a', 'b', 'a', 'b'),
 ('a', 'b', 'b', 'a'),
 ('b', 'a', 'a', 'b'),
 ('b', 'a', 'b', 'a'),
 ('b', 'b', 'a', 'a')]

```
Ввод [17]: 1 len(z)
```

Out[17]: 6

```
Ввод [18]: 1 m22=multinomial_coefficients(2, 4)
           2 m22
```

Out[18]: {(0, 4): 1, (4, 0): 1, (1, 3): 4, (3, 1): 4, (2, 2): 6}

```
Ввод [19]: 1 len(m22)
```

Out[19]: 5

```
Ввод [20]: 1 m22[(2,2)]
```

Out[20]: 6

```
Ввод [21]: 1 def nPk1km(*params):
           2     return math.prod(math.comb(sum(params[:i]), x) for i, x in enumerate(params, 1))
```

```
Ввод [22]: 1 nPk1km(2,2)
```

Out[22]: 6

https://en.wikipedia.org/wiki/Multinomial_theorem#Multinomial_coefficients
(https://en.wikipedia.org/wiki/Multinomial_theorem#Multinomial_coefficients)

Ввод [17]:

1 ins(1)

Theorem [\[edit\]](#)

For any positive integer m and any non-negative integer n , the multinomial formula describes how a sum with m terms expands when raised to an arbitrary power n :

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n; k_1, k_2, \dots, k_m \geq 0} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} \prod_{t=1}^m x_t^{k_t},$$

where

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_m!}$$

is a **multinomial coefficient**. The sum is taken over all combinations of [nonnegative integer](#) indices k_1 through k_m such that the sum of all k_i is n . That is, for each term in the expansion, the exponents of the x_i must add up to n . Also, as with the [binomial theorem](#), quantities of the form x^0 that appear are taken to equal 1 ([even when \$x\$ equals zero](#)).

In the case $m = 2$, this statement reduces to that of the binomial theorem.

Example [\[edit\]](#)

The third power of the trinomial $a + b + c$ is given by

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2a + 3b^2c + 3c^2a + 3c^2b + 6abc.$$

This can be computed by hand using the distributive property of multiplication over addition, but it can also be done (perhaps more easily) with the multinomial theorem. It is possible to "read off" the multinomial coefficients from the terms by using the multinomial coefficient formula. For example:

$$a^2b^0c^1 \text{ has the coefficient } \binom{3}{2, 0, 1} = \frac{3!}{2! \cdot 0! \cdot 1!} = \frac{6}{2 \cdot 1 \cdot 1} = 3.$$

$$a^1b^1c^1 \text{ has the coefficient } \binom{3}{1, 1, 1} = \frac{3!}{1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{6}{1 \cdot 1 \cdot 1} = 6.$$

а) Найдите коэффициент у выражения $x^3y^3z^3$ в разложении $(2x + 3y - 4z + w)^9$

б) у x^3 в разложении $(1 + 2x - 3x^2)^5$.

Сколько различных 9-значных целых числе можно составить из трех 3, четырех 6 и двух 9.

Например, 333666699, 366336699

Ввод [4]:

```
1 Omega=np.array([3,3,3,6,6,6,6,9,9])
2 Omega
```

Out[4]: array([3, 3, 3, 6, 6, 6, 6, 9, 9])


```
Ввод [26]: 1 m39=multinomial_coefficients(3,9)
           2 m39
```

```
Out[26]: {(9, 0, 0): 1,
          (8, 1, 0): 9,
          (7, 2, 0): 36,
          (6, 3, 0): 84,
          (5, 4, 0): 126,
          (4, 5, 0): 126,
          (3, 6, 0): 84,
          (2, 7, 0): 36,
          (1, 8, 0): 9,
          (0, 9, 0): 1,
          (8, 0, 1): 9,
          (7, 1, 1): 72,
          (6, 2, 1): 252,
          (5, 3, 1): 504,
          (4, 4, 1): 630,
          (3, 5, 1): 504,
          (2, 6, 1): 252,
          (1, 7, 1): 72,
          (0, 8, 1): 9,
          (7, 0, 2): 36,
          (6, 1, 2): 252,
          (5, 2, 2): 756,
          (4, 3, 2): 1260,
          (3, 4, 2): 1260,
          (2, 5, 2): 756,
          (1, 6, 2): 252,
          (0, 7, 2): 36,
          (6, 0, 3): 84,
          (5, 1, 3): 504,
          (4, 2, 3): 1260,
          (3, 3, 3): 1680,
          (2, 4, 3): 1260,
          (1, 5, 3): 504,
          (0, 6, 3): 84,
          (5, 0, 4): 126,
          (4, 1, 4): 630,
          (3, 2, 4): 1260,
          (2, 3, 4): 1260,
          (1, 4, 4): 630,
          (0, 5, 4): 126,
          (4, 0, 5): 126,
          (3, 1, 5): 504,
          (2, 2, 5): 756,
          (1, 3, 5): 504,
          (0, 4, 5): 126,
          (3, 0, 6): 84,
          (2, 1, 6): 252,
          (1, 2, 6): 252,
          (0, 3, 6): 84,
          (2, 0, 7): 36,
          (1, 1, 7): 72,
          (0, 2, 7): 36,
          (1, 0, 8): 9,
          (0, 1, 8): 9,
          (0, 0, 9): 1}
```

```
Ввод [27]: 1 len(m39)
```

```
Out[27]: 55
```

```
Ввод [28]: 1 m39[(3,4,2)]
```

```
Out[28]: 1260
```

```
Ввод [29]: 1 m39=multinomial_coefficients(3, 9)
           2 m39
```

```
Out[29]: {(9, 0, 0): 1,
          (8, 1, 0): 9,
          (7, 2, 0): 36,
          (6, 3, 0): 84,
          (5, 4, 0): 126,
          (4, 5, 0): 126,
          (3, 6, 0): 84,
          (2, 7, 0): 36,
          (1, 8, 0): 9,
          (0, 9, 0): 1,
          (8, 0, 1): 9,
          (7, 1, 1): 72,
          (6, 2, 1): 252,
          (5, 3, 1): 504,
          (4, 4, 1): 630,
          (3, 5, 1): 504,
          (2, 6, 1): 252,
          (1, 7, 1): 72,
          (0, 8, 1): 9,
          (7, 0, 2): 36,
          (6, 1, 2): 252,
          (5, 2, 2): 756,
          (4, 3, 2): 1260,
          (3, 4, 2): 1260,
          (2, 5, 2): 756,
          (1, 6, 2): 252,
          (0, 7, 2): 36,
          (6, 0, 3): 84,
          (5, 1, 3): 504,
          (4, 2, 3): 1260,
          (3, 3, 3): 1680,
          (2, 4, 3): 1260,
          (1, 5, 3): 504,
          (0, 6, 3): 84,
          (5, 0, 4): 126,
          (4, 1, 4): 630,
          (3, 2, 4): 1260,
          (2, 3, 4): 1260,
          (1, 4, 4): 630,
          (0, 5, 4): 126,
          (4, 0, 5): 126,
          (3, 1, 5): 504,
          (2, 2, 5): 756,
          (1, 3, 5): 504,
          (0, 4, 5): 126,
          (3, 0, 6): 84,
          (2, 1, 6): 252,
          (1, 2, 6): 252,
          (0, 3, 6): 84,
          (2, 0, 7): 36,
          (1, 1, 7): 72,
          (0, 2, 7): 36,
          (1, 0, 8): 9,
          (0, 1, 8): 9,
          (0, 0, 9): 1}
```

```
Ввод [30]: 1 len(z)
```

```
Out[30]: 1260
```

```
Ввод [31]: 1 len(m39)
```

```
Out[31]: 55
```

1	m39[(3,3,3)]
---	--------------

Out[32]: 1680

1	$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot (-4) \cdot 3 \cdot m_{39}[(3, 3, 3)]$
---	--

Out[33]: -23224320

```
1 m35=multinomial_coefficients(3, 5)
2 m35
```

```
Out[34]: {(5, 0, 0): 1,
(4, 1, 0): 5,
(3, 2, 0): 10,
(2, 3, 0): 10,
(1, 4, 0): 5,
(0, 5, 0): 1,
(4, 0, 1): 5,
(3, 1, 1): 20,
(2, 2, 1): 30,
(1, 3, 1): 20,
(0, 4, 1): 5,
(3, 0, 2): 10,
(2, 1, 2): 30,
(1, 2, 2): 30,
(0, 3, 2): 10,
(2, 0, 3): 10,
(1, 1, 3): 20,
(0, 2, 3): 10,
(1, 0, 4): 5,
(0, 1, 4): 5,
(0, 0, 5): 1}
```

```
1 z=sorted(distinct_permutations([1, 1, 2,2,3,3, 4,4]))
2 z
```

```
Out[37]: [(1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4),
(1, 1, 2, 2, 3, 4, 3, 4),
(1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 3),
(1, 1, 2, 2, 4, 3, 3, 4),
(1, 1, 2, 2, 4, 3, 4, 3),
(1, 1, 2, 2, 4, 4, 3, 3),
(1, 1, 2, 3, 2, 3, 4, 4),
(1, 1, 2, 3, 2, 4, 3, 4),
(1, 1, 2, 3, 2, 4, 4, 3),
(1, 1, 2, 3, 3, 2, 4, 4),
(1, 1, 2, 3, 3, 4, 2, 4),
(1, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 2),
(1, 1, 2, 3, 4, 2, 3, 4),
(1, 1, 2, 3, 4, 2, 4, 3),
(1, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 4),
(1, 1, 2, 3, 4, 3, 4, 2),
(1, 1, 2, 3, 4, 4, 2, 3),
(1, 1, 2, 3, 4, 4, 3, 2),
(1, 1, 2, 4, 2, 3, 3, 4),
```

```
1 len(z)
```

Out[38]: 2520

```
1 math.perm(4, 2)
```

Out[39]: 12

Сочетания с повторениями

Определение. Сочетаниями из m элементов по n элементов с повторениями называются группы, содержащие n элементов, причем каждый элемент принадлежит одному из m типов.

Пусть $\Omega = \{a, b, c\}$. Написать из 3 элементов все сочетания с повторениями по два элемента

```
Ввод [17]: 1 w=list(combinations_with_replacement('abc', 2))
           2 w
```

```
Out[17]: [('a', 'a'), ('a', 'b'), ('a', 'c'), ('b', 'b'), ('b', 'c'), ('c', 'c')]
```

```
Ввод [41]: 1 len(w)
```

```
Out[41]: 6
```

Теорема. Число различных сочетаний из m элементов по n с повторениями равно

$$f_m^n = \overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^{m-1}.$$

```
Ввод [19]: 1 math.comb(3+2-1,3-1) # из библиотеки math
```

```
Out[19]: 6
```

```
Ввод [18]: 1 comb(3, 2, exact=True, repetition=True) # из библиотеки scipy.special
```

```
Out[18]: 6
```

Сколько слагаемых содержится в разложении $(x + y + z)^7$.

```
Ввод [205]: 1 #a+b+c=7
```

```
Ввод [123]: 1 math.comb(7+3-1,3-1)
```

```
Out[123]: 36
```

```
Ввод [126]: 1 comb(3, 7, exact=True, repetition=True)
```

```
Out[126]: 36
```

```
Ввод [132]: 1 m37=multinomial_coefficients(3, 7) # ответ в виде словаря
            2 m37
```

```
Out[132]: {(7, 0, 0): 1,
(6, 1, 0): 7,
(5, 2, 0): 21,
(4, 3, 0): 35,
(3, 4, 0): 35,
(2, 5, 0): 21,
(1, 6, 0): 7,
(0, 7, 0): 1,
(6, 0, 1): 7,
(5, 1, 1): 42,
(4, 2, 1): 105,
(3, 3, 1): 140,
(2, 4, 1): 105,
(1, 5, 1): 42,
(0, 6, 1): 7,
(5, 0, 2): 21,
(4, 1, 2): 105,
(3, 2, 2): 210,
(2, 3, 2): 210,
(1, 4, 2): 105,
(0, 5, 2): 21,
(4, 0, 3): 35,
(3, 1, 3): 140,
(2, 2, 3): 210,
(1, 3, 3): 140,
(0, 4, 3): 35,
(3, 0, 4): 35,
(2, 1, 4): 105,
(1, 2, 4): 105,
(0, 3, 4): 35,
(2, 0, 5): 21,
(1, 1, 5): 42,
(0, 2, 5): 21,
(1, 0, 6): 7,
(0, 1, 6): 7,
(0, 0, 7): 1}
```

```
Ввод [149]: 1 sol=np.array(list(m37.keys()))
            2 print(sol[0])
```

```
[7 0 0]
```

```
Ввод [150]: 1 len(sol)
```

```
Out[150]: 36
```

```
Ввод [151]: 1 len(m37)
```

```
Out[151]: 36
```

```
Ввод [96]: 1 Omega='xyz'
```

```
Ввод [99]: 1 w1=list(combinations_with_replacement(Omega, 4))
```

Ввод [100]:

```
1 w1
```

```
Out[100]: [('x', 'x', 'x', 'x'),
            ('x', 'x', 'x', 'y'),
            ('x', 'x', 'x', 'z'),
            ('x', 'x', 'y', 'y'),
            ('x', 'x', 'y', 'z'),
            ('x', 'x', 'z', 'z'),
            ('x', 'y', 'y', 'y'),
            ('x', 'y', 'y', 'z'),
            ('x', 'y', 'z', 'z'),
            ('x', 'z', 'z', 'z'),
            ('y', 'y', 'y', 'y'),
            ('y', 'y', 'y', 'z'),
            ('y', 'y', 'z', 'z'),
            ('y', 'z', 'z', 'z'),
            ('z', 'z', 'z', 'z')]
```

Ввод [101]:

```
1 len(w1)
```

```
Out[101]: 15
```

Ввод [105]:

```
1 Omega=np.array([0,0,1,1,1,1])
```

Ввод [108]:

```
1 w2=sorted(distinct_permutations(Omega))
2 w2
```

```
Out[108]: [(0, 0, 1, 1, 1, 1),
            (0, 1, 0, 1, 1, 1),
            (0, 1, 1, 0, 1, 1),
            (0, 1, 1, 1, 0, 1),
            (0, 1, 1, 1, 1, 0),
            (1, 0, 0, 1, 1, 1),
            (1, 0, 1, 0, 1, 1),
            (1, 0, 1, 1, 0, 1),
            (1, 0, 1, 1, 1, 0),
            (1, 1, 0, 0, 1, 1),
            (1, 1, 0, 1, 0, 1),
            (1, 1, 0, 1, 1, 0),
            (1, 1, 1, 0, 0, 1),
            (1, 1, 1, 0, 1, 0),
            (1, 1, 1, 1, 0, 0)]
```

Ввод [109]:

```
1 len(w2)
```

```
Out[109]: 15
```

Ввод [116]:

```
1 comb(3, 4, exact=True, repetition=True) # из библиотеки scipy.special
```

```
Out[116]: 15
```

Ввод [114]:

```
1 len(w2)
```

```
Out[114]: 15
```

Ввод [18]:

```
1 from sympy import *
```

Ввод [19]:

```
1 a,b,c =symbols('a b c')
```

Ввод [20]:

```
1 a,b,c
```

```
Out[20]: (a, b, c)
```

Ввод [26]:

1 expand((a+b+c)**9)

Out[26]: $a^9 + 9a^8b + 9a^8c + 36a^7b^2 + 72a^7bc + 36a^7c^2 + 84a^6b^3 + 252a^6b^2c + 252a^6bc^2 + 84a^6c^3 + 126a^5b^4 + 126a^5c^4 + 126a^4b^5 + 630a^4b^4c + 1260a^4b^3c^2 + 1260a^4b^2c^3 + 630a^4bc^4 + 126a^4c^5 + 84a^3b^6 + 504a^3b^5c + 1260a^3b^4c^2 + 504a^3bc^5 + 84a^3c^6 + 36a^2b^7 + 252a^2b^6c + 756a^2b^5c^2 + 1260a^2b^4c^3 + 1260a^2b^3c^4 + 72ab^7c + 252ab^6c^2 + 504ab^5c^3 + 630ab^4c^4 + 504ab^3c^5 + 252ab^2c^6 + 72abc^7 + 9ac^8 + b^9 + 9b^8c + 84b^3c^6 + 36b^2c^7 + 9bc^8 + c^9$

Ввод [23]:

1 m39=multinomial_coefficients(3, 9)
2 m39

Out[23]: {(0, 0, 9) : 1, (0, 1, 8) : 9, (0, 2, 7) : 36, (0, 3, 6) : 84, (0, 4, 5) : 126, (0, 5, 4) : 126, (0, 6, 3) : 84, (0, 7, 2) : 36, (0, 8, 1) : 9, (0, 9, 0) : 1, (1, 0, 8) : 9, (1, 1, 7) : 72, (1, 2, 6) : 252, (1, 3, 5) : 504, (1, 4, 4) : 630, (1, 5, 3) : 1260, (1, 6, 2) : 1260, (1, 7, 1) : 84, (1, 8, 0) : 9, (2, 0, 7) : 36, (2, 1, 6) : 252, (2, 2, 5) : 756, (2, 3, 4) : 1260, (2, 4, 3) : 1260, (2, 5, 2) : 504, (2, 6, 1) : 36, (2, 7, 0) : 1, (3, 0, 6) : 84, (3, 1, 5) : 504, (3, 2, 4) : 1260, (3, 3, 3) : 1680, (3, 4, 2) : 1260, (3, 5, 1) : 504, (3, 6, 0) : 9, (4, 1, 4) : 630, (4, 2, 3) : 1260, (4, 3, 2) : 1260, (4, 4, 1) : 630, (4, 5, 0) : 126, (5, 0, 4) : 126, (5, 1, 3) : 1260, (5, 2, 2) : 504, (5, 3, 1) : 504, (5, 4, 0) : 126, (6, 0, 3) : 84, (6, 1, 2) : 252, (6, 2, 1) : 252, (6, 3, 0) : 84, (7, 0, 2) : 36, (7, 1, 1) : 9, (7, 2, 0) : 1, (8, 0, 1) : 9, (8, 1, 0) : 9, (9, 0, 0) : 1}

Ввод [28]:

1 m39[(3,4,2)]

Out[28]: 1260

Ввод []:

1