

МС-3.

Непрерывные случайные векторы. Равномерно распределенный в области $D \subset \mathbb{R}^2$ случайный вектор.

Условные законы распределения компонент непрерывной двумерной случайной величины. Регрессия.

1. Дана плотность распределения вероятности двумерной случайной величины

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} C(x^2 + y^2), & 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1; \\ 0, & (x,y) \notin [0,1] \times [0,1]. \end{cases}$$

Найдите C , $f_X(x)$, $f_Y(y)$, $E(X)$, $E(Y)$, σ_X , σ_Y . Выяснить, зависимы ли X и Y и при положительном ответе найти $Cov(X,Y)$.

2. Система двух непрерывных случайных величин (X,Y) имеет плотность распределения:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} Cxy, & (x,y) \in D; \\ 0, & (x,y) \notin D, \end{cases}$$

где $D = \{(x,y): x \geq 0, y \geq 0, x + y - 1 \leq 0\}$. Найдите C , $E(X)$, $E(Y)$, σ_X , σ_Y , $\rho(X,Y)$.

3. Для случайного вектора (X,Y) с плотностью распределения

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}x + C, & x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0, & x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

Найдите C , плотности распределения компонент $f_X(x)$, $f_Y(y)$, $E(X)$, $E(Y)$.

4. Двумерный случайный вектор (X,Y) **распределен равномерно** в области D , где $D = \{-2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2\}$. Найти вероятность события $\{X^2 + Y^2 \geq 1\}$.

5. Двумерный случайный вектор (X,Y) **распределен равномерно** в области D , где D – половина круга $x^2 + y^2 \leq 4$, $x \leq 0$. Определите: а) двумерную плотность вероятности $f(x,y)$; одномерные плотности вероятностей $f_X(x)$, $f_Y(y)$; б) зависимость или независимость случайных величин X,Y ; в) центр рассеивания; средние квадратические отклонения σ_X , σ_Y ; г) корреляционную матрицу.

6. Светящаяся точка, изображающая наблюдаемый объект на круглом экране радиолокатора, может случайным образом занимать любое положение на экране (плотность вероятности постоянна). Диаметр экрана равен D . Найти математическое ожидание расстояния R от светящейся точки до центра экрана.

7. Пусть имеется случайный вектор (X, Y) , где X — время появления первого покупателя в понедельник, а Y — время появления первого покупателя во вторник. Положим, что $f_{X,Y}(x, y) = e^{-x-y}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Требуется найти: 1) $F(x, y)$; 2) $F_X(x)$, $F_Y(y)$; 3) $f_X(x)$, $f_Y(y)$; 4) $f_{X|Y}(x|y)$, $f_{Y|X}(y|x)$.

8. Задана плотность совместного распределения непрерывной случайной величины (X, Y) :

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{x^2 + 2xy + 5y^2}{2}}.$$

Найдите: а) плотности распределения составляющих; б) условные плотности распределения составляющих.

9. Для случайного вектора (X, Y) с плотностью распределения

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2e^{-x-2y}, & x \geq 0, \quad y \geq 0, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найдите:

- а) плотность распределения $f_Y(y)$ случайной величины Y ;
- б) условную плотность распределения $f_{X|Y}(x|y)$;
- в) условное математическое ожидание $E(X|Y)$;
- г) линию **регрессии** X на Y .

10. Для случайного вектора (X, Y) с плотностью распределения

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} C(x + y), & (x, y) \in D; \\ 0, & (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Найдите функцию **регрессии** X на Y .

11. Двумерный случайный вектор (X, Y) **равномерно распределен** внутри треугольника $D = \{(x, y): x > 0, y > 0, x + y < 2\}$. Найдите условное распределение X при условии $Y = y$ и функцию регрессии.

12. Ежемесячные расходы владельцев A и B хорошо описываются случайным вектором (X, Y) , (X — расходы владельца A , Y — расходы владельца B), имеющим равномерное распределение в треугольнике, задаваемом ограничениями $D = \{(x, y): x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$. Найдите: а) Вероятность того, что совокупные расходы превысят половину бюджета, $P(X + Y > 1/2)$; б) Плотность распределения расходов владельца B . в) Вероятность того, что расходы владельца A составили менее трети бюджета, если известно, что владелец A израсходовал более половины семейного бюджета. г) Условную плотность

распределения и условное математическое ожидание расходов владельца А, при условии, что владелец В израсходовал половину бюджета. д) Математическое ожидание условного математического ожидания расходов владельца А, $E(E(X|Y))$ е) Коэффициент корреляции расходов владельца А и владельца В.

13. Пусть (X, Y) — случайный вектор, **равномерно распределенный** в треугольнике D с вершинами в точках $(0; 0)$, $(0; 4)$, $(2; 0)$. Требуется найти $E(Y | X)$ и $D(Y | X)$, записать уравнение **регрессии** Y на X .

14. Непрерывная двумерная случайная величина (X, Y) **равномерно распределена** внутри трапеции с вершинами $A(-6; 0)$, $B(-3; 4)$, $C(3; 4)$, $D(6; 0)$. Найдите двумерную плотность вероятности системы и плотности распределения составляющих.

Ответ.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{27} + \frac{2}{9}, & -6 < x \leq -3, \\ \frac{1}{9}, & -3 < x \leq 3 \\ -\frac{x}{27} + \frac{2}{9}, & 3 < x < 6, \\ 0, & x \notin [-6; 6] \end{cases}$$

Домашнее задание

1. Дана плотность распределения вероятности двумерной случайной величины

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} Cx^2y^2, & 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1; \\ 0, & (x, y) \notin [0, 1] \times [0, 1]. \end{cases}$$

Найти C , $f_X(x)$, $f_Y(y)$, $E(X)$, $E(Y)$, σ_X , σ_Y . Выяснить, зависимы ли X и Y и при положительном ответе найти $Cov(X, Y)$.

Ответ. $\sigma_X = \sigma_Y = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{5}} \approx 0,194$.

2. Плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} C \cos(x + y), & x + 2y \leq \frac{\pi}{2}, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найдите C , $f_X(x)$, $f_Y(y)$ и проверить, будут ли случайные величины независимыми. Вычислите вероятность попадания в квадрат, ограниченный линиями $x = 0, y = 0, x = \frac{\pi}{4}, y = \frac{\pi}{4}$.

3. Случайный вектор (X, Y) **равномерно распределён** в треугольнике $x \geq 0; y \geq 0; 33x + y \leq 33$.

Найдите $E(X^{10}Y)$.

4. Для случайного вектора (X, Y) с плотностью распределения

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} c, & \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1, \\ 0, & \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} > 1 \end{cases}$$

Найти C , плотности распределения компонент $f_X(x)$, $f_Y(y)$, и определить $Var(X|Y = y)$, $Var(Y|X = x)$. Записать **регрессии** Y на x и X на y .

5. Непрерывный случайный вектор (X, Y) имеет **равномерное распределение** в треугольнике ABC , где $A(-3; 0)$, $B(0; 1)$, $C(3; 0)$. Найдите $E(Var(Y | X))$.