

МС-1. Дискретные случайные векторы, условные распределения и условные числовые характеристики

1. Распределение случайного вектора (X, Y) задано таблицей

	$X=3$	$X=10$	$X=12$
$Y=4$	0,17	0,13	0,25
$Y=5$	0,1		0,05

Найдите: 1) законы распределения компонент X и Y ; 2) вычислить вероятности $P\{X \geq 10, Y = 5\}$ и $P\{X > Y\}$; 3) $E[X], E[Y]$; 4) составить матрицу ковариаций C .

2. Распределение случайного вектора (X, Y) задано таблицей

	$Y=-1$	$Y=0$	$Y=2$
$X=1$	0,15	0,3	0,35
$X=2$		0,1	0,05

1) Найдите безусловные законы распределения компонент X и Y . 2) Постройте функцию распределения $F(x, y)$. 3) Установите, являются ли зависимыми величины X и Y . 4) Найдите $P\{X \geq Y\}$. 5) Найдите коэффициент корреляции.

3. Шесть футбольных команд, участвующие в турнире, разбиты на две группы по три команды. Победители групп выходят в финал. Пусть X и Y — случайные величины, соответствующие номерам команд претендентов, вышедших в финал из первой и второй групп. Эксперты оценивают вероятности появления финальных пар согласно данным таблицы:

	$Y=1$	$Y=2$	$Y=3$
$X=1$	2/9	1/9	0
$X=2$	1/9	0	1/9
$X=3$	2/9	1/9	1/9

Найдите наиболее вероятных претендентов на выход в финал и коэффициент корреляции между случайными величинами X и Y .

4. Три различных шара случайным образом раскладывают по четырем ящикам. Пусть X — число шаров в **первом** ящике, Y — число шаров в **четвертом** ящике. Найти совместное распределение случайных величин X и Y , их ковариацию и корреляцию. Являются ли величины X и Y независимыми?

5. Доказать, что если случайная величина $Y = aX + b$; $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $\sigma_X > 0$, то $\rho(X, Y) = 1$, если $a > 0$ и $\rho(X, Y) = -1$, если $a < 0$.

6. Игральная кость размечена таким образом, что сумма очков на противоположных гранях равна 7 (т. е. 1 и 6, 2 и 5, 3 и 4). Пусть X — число очков на верхней грани; Y — число очков на нижней грани. Построить совместный закон распределения случайных величин X и Y и найти коэффициент корреляции между ними.

7. Имеются две случайные величины X и Y , связанные соотношением $Y = 2 - 3X$. Числовые характеристики величины X заданы $m_X = -1$; $D[X] = 4$. Определить: а) $E(Y)$, $Var(Y)$; б) корреляционный момент (ковариацию) и коэффициент корреляции величин X и Y .

8. Предприятие имеет две поточные линии по сборке некоторой продукции. Технологические процессы на линиях связаны между собой. Рассмотрим случайные величины: X — количество единиц продукции, собранной за день на первой линии, а Y — на второй линии. Совместное распределение этих величин задано таблицей

	$X = 0$	$X = 1$
$Y = 0$	1/8	0
$Y = 1$	1/4	1/8
$Y = 2$	1/8	

Найдите: а) частные распределения случайных величин X и Y ; б) распределение, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = X + Y$ — суммарного количества единиц продукции, выпускаемой предприятием за день.

9. В группе 20 студентов. Из них 10 получают стипендию в размере 1000 руб., а другие 10 — в размере 1500 руб. Из группы отобраны 4 студента. Пусть Z — их суммарная стипендия. Найти $Var(Z)$.

10. Имеется два вида акций, цены которых X и Y изменяются случайным образом. Закон распределения двумерного случайного вектора (X, Y) имеет следующий вид:

	$X = 10$	$X = 20$	$X = 30$
$Y = 25$	0,2	0,1	0
$Y = 15$	0,1	0,3	0,1
$Y = 5$	0	0	0,2

Найдите $E(X)$, $E(Y)$, $Var(X)$, $Var(Y)$, $Cov(X, Y)$, $\rho(X, Y)$, $E(X + Y)$, $Var(X + Y)$.

11. Найдите распределение случайной величины $Z = \min(6, X - Y)$ и $E(Z)$, если известно распределение дискретного случайного вектора (X, Y) :

	$X = 3$	$X = 4$	$X = 5$
$Y = -2$	1/4	1/6	1/8
$Y = -1$	1/8	1/4	1/12

12. Найдите распределение случайной величины $Z = \max(X, Y)$ и $E(Z)$, если известно распределение дискретного случайного вектора (X, Y) :

	$X = -2$	$X = -1$	$X = 0$
$Y = -1$	1/12	1/24	5/24
$Y = 0$	1/6		1/3

- 13.** Игральную кость бросают два раза. Случайная величина X - число выпавших шестерок, случайная величина Y - принимает значение 0, если хотя бы на одной кости выпадет нечетное, и 1, если на обеих костях выпадет четное.
- а) Составить закон распределения двумерной случайной величины $Z = (X, Y)$;
 б) найти безусловные законы распределения X и Y ;
 в) $E(X+Y)$.
 г) Являются ли эти случайные величины независимыми?

- 14.** Распределение случайного вектора (X, Y) задано таблицей

	$Y=1$	$Y=3$	$Y=5$
$X=1$	0,1	0,3	0,1
$X=2$	0,2	0	0,3

Найдите: а) $P(X=1|Y=5)$; б) $P(X=1|Y=3)$.

- 15.** Дискретный случайный вектор (X, Y) имеет распределение

	$X=-1$	$X=1$	$X=10$
$Y=-2$	0,3		0,1
$Y=2$	0	0,1	0,4

Найдите $P(X<2|Y=2)$.

- 16.** Дискретный случайный вектор (X, Y) имеет распределение

	$X=-1$	$X=0$	$X=4$
$Y=-2$	0,1		0
$Y=2$	0	0,1	0,7

Найдите $P(X<1|Y=-2)$.

- 17.** Дискретный случайный вектор (X, Y) имеет распределение

	$X=3$	$X=6$	$X=11$
$Y=-11$	0	0	
$Y=-3$	0,2	0,1	0,6

Найдите $P(X+Y=0|X>3)$.

- 18.** Случайный вектор (X, Y) распределен по закону

	$X=1$	$X=2$
$Y=1$	0,16	0,15
$Y=2$		0,18
$Y=3$	0,12	0,25

Найдите условный закон распределения случайной величины Y при $X=1$.

- 19.** Случайный вектор (X, Y) задан законом распределения

	$Y=0$	$Y=1$
$X=-1$	0,15	0,25
$X=0$	0,05	0,2
$X=2$	0,1	0,25

Найдите условный закон распределения случайной величины X при $Y=0$.

20. Случайный вектор (X, Y) задан законом распределения

	$X=-1$	$X=0$	$X=1$	$X=2$
$Y=-1$	0	0,1	0,1	0,1
$Y=0$	0,1	0	0,1	0,1
$Y=1$	0,1	0,1	0	0,2

Найдите условный закон распределения случайной величины $Z=(Y | |X| < 2)$.

21. Случайный вектор (X, Y) задан законом распределения

	$Y=2$	$Y=3$	$Y=4$
$X=0$	0,2	0,1	0,2
$X=8$	0,3	0,2	0

Найдите $E(X)$, $E(X|Y \leq 3)$.

22. Случайный вектор (X, Y) задан законом распределения

	$X=-1$	$X=0$	$X=1$	$X=2$
$Y=-1$	0	0,1	0,1	0,1
$Y=0$	0,1	0	0,1	0,1
$Y=1$	0,1	0,1	0	0,2

Найдите $E(Y|X=-1)$, $\text{Var}(Y|X=-1)$.

23. Случайный вектор (X, Y) задан законом распределения

	$X=0$	$X=1$	$X=2$
$Y=0$	$1/12$	$1/24$	$5/24$
$Y=1$	$1/6$	$1/6$	$1/3$

Найдите $E(Y|X \geq 1)$.

24. Распределение случайного вектора (X, Y) задано таблицей

	$Y=5$	$Y=10$
$X=-2$	0,25	0,25
$X=0$	0,2	0
$X=2$	0,15	

Найдите распределение условного математического ожидания $E(Y | X)$.

Домашнее задание

1. Распределение случайного вектора (X, Y) задано таблицей

	$Y=-1$	$Y=0$	$Y=1$
$X=1$	0,15	0,3	0,35
$X=2$	0,05	0,05	

Найдите: 1) безусловные законы распределения компонент X и Y ; 2) вычислить вероятности $P\{X = 2, Y \geq 0\}$ и $P\{X > Y\}$; 3) $E[X], E[Y]$; 4) составить матрицу ковариаций C .

Ответ. $P\{X = 2, Y \geq 0\} = 0,15$; $P\{X > Y\} = 0,65$; $C = \begin{pmatrix} 0,16 & 0 \\ 0 & 0,5875 \end{pmatrix}$.

2. Дискретный случайный вектор (X, Y) имеет распределение

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$	$Y = 4$	$Y = 5$	$Y = 6$
$X = 0$	0,202	0,174	0,113	0,062	0,049	0,023	0,004
$X = 1$	0	0,099	0,064	0,04	0,031	0,02	0,006
$X = 2$	0	0	0,031	0,025	0,018	0,013	0,008
$X = 3$	0	0	0	0,001	0,002	0,004	0,011

Найдите: 1) $P\{Y \geq 2\}$; 2) $E[X], E[Y]$; 3) составить **корреляционную** матрицу R .

Ответ. $P\{Y \geq 2\} = 0,113$; $C = \begin{pmatrix} 2,6 & 0,561 \\ 0,561 & 0,548 \end{pmatrix}$.

3. Бросаются две игральные кости. Пусть X — число очков на **первой** кости и Y — **большее из двух** выпавших чисел. Выписать совместное распределение X и Y . Найти математические ожидания, дисперсии и ковариацию этих случайных величин.

4. Три различных шара случайным образом раскладывают по четырем ящикам. Рассмотрим случайные величины X — число **занятых** ящиков и Y — число шаров в **первом** ящике. Найти распределение случайных величин X и Y , построить их функции распределения, найти математические ожидания и дисперсии. Решить ту же задачу для неразличимых шаров.

5. Из урны, содержащей 5 красных, 3 зеленых и 2 синих шара случайным образом извлекают 3 шара. Пусть X — число красных, а Y — число синих шаров среди извлеченных. Составить:

- закон распределения двумерной случайной величины $Z = (X, Y)$;
- безусловные законы распределения X и Y ;
- $E(Z)$.