1. Распределение случайного вектора (X, Y) задано таблицей

	X=3	X=10	X=12
Y=4	0,17	0,13	0,25
Y=5	0,1		0,05

Найдите: 1) законы распределения компонент X и Y; 2) вычислить вероятности $P\{X \geq 10, Y = 5\}$ и $P\{X > Y\}$; 3) $E[X], E[Y]$; 4) составить матрицу ковариаций C.

$$\mathbb{P}(X = 10; Y = 5) = 1 - 0,17 - 0,13 - 0,25 - 0,1 - 0,05 = 0,3$$

	$X = 3$	$X = 10$	$X = 12$
$\mathbb{P}(X)$	0,17+0,1=**0,27**	0,13+0,3=**0,43**	0,25+0,05=**0,3**

	$Y = 4$	$Y = 5$
$\mathbb{P}(Y)$	0,17+0,13+0,25=**0,55**	0,1+0,3+0,05=**0,45**

$\mathbb{P}\{X \geqslant 10; Y = 5\} = 0,3 + 0,05 = 0,35$
$\mathbb{P}\{X > Y\} = 0,13 + 0,3 + 0,25 + 0,05 = 0.73$

$\mathbb{E}[X] = 0,27 * 3 + 0,43 * 10 + 0,3 * 12 = 8,71$ $\mathbb{E}[Y] = 0,55 * 4 + 0,45 * 5 = 4,45$

$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 89,63 - 75,8641 = 12,7659$
$Var(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = 0,2475$

$$C = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & Cov(X, Y) \\ Cov(X, Y) & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$$

$Cov(X, Y) = \mathbb{E}(X \cdot Y) - \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$
$\mathbb{E}(X \cdot Y) = 4 \cdot (0,17 \cdot 3 + 0,13 \cdot 10 + 0,25 \cdot 12) + 5 \cdot (0,1 \cdot 3 + 0,3 \cdot 10 + 0,05 \cdot 12) = 38$

$Cov(X, Y) = -0,0195$

$$C = \begin{pmatrix} 12,7659 & -0,0195 \\ -0,0195 & 0,2475 \end{pmatrix}$$

2. Распределение случайного вектора (X, Y) задано таблицей

	Y=-1	Y=0	Y=2
X=1	0,15	0,3	0,35
X=2		0,1	0,05

1) Найдите безусловные законы распределения компонент X и Y. 2) Постройте функцию распределения $F(x, y)$. 3) Установите, являются ли зависимыми величины X и Y. 4) Найдите $P\{X \geq Y\}$. 5) Найдите коэффициент корреляции.

$$\mathbb{P}(X = 1; Y = -1) = 1 - 0,15 - 0,3 - 0,35 - 0,1 - 0,05 = 0,05$$

	$X=1$	$X=2$
$\mathbb{P}(X)$	0,15+0,3+0,35=**0,8**	0,05+0,1+0,05=**0,2**

	$Y=-1$	$Y=0$	$Y=2$
$\mathbb{P}(Y)$	0,15+0,05=**0,2**	0,3+0,1=**0,4**	0,35+0,05=**0,4**

$$F(x,y) = F(X \leqslant x; Y \leqslant y)$$

	$y<-1$	$-1 \leqslant y < 0$	$0 \leqslant y < 2$	$y \geqslant 2$
$x<1$	0	0	0	0
$1 \leqslant x < 2$	0	$0,15$	$0,45$	$0,8$
$x \geqslant 2$	0	$0,2$	$0,6$	1

не являются не зависимыми, тк: $\mathbb{P}(X=1; Y=-1) \neq \mathbb{P}(X=1) \cdot \mathbb{P}(Y=-1)$

$\mathbb{P}\{X \geqslant Y\} = 0,15+0,3+0,05+0,1+0,05 = 0.65$

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

$\mathbb{E}(X) = 0,8 \cdot 1 + 0,2 \cdot 2 = 1,2$ $\mathbb{E}(Y) = 0,2 \cdot (-1) + 0,3 \cdot 0 + 0,4 \cdot 2 = 0,6$

$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 1 \cdot 0,8 + 4 \cdot 0,2 - 1,44 = 0,16$
$Var(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = 1 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,4 + 4 \cdot 0,4 - 0,36 = 1,44$

$\sigma_x = 0,4, \sigma_y = 1,2$

$\mathbb{E}(X \cdot Y) = -0,15 - 0,1 + 0,7 + 0,2 = 0,65$
$Cov(X,Y) = \mathbb{E}(X \cdot Y) - \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) = -0,07$

$\rho = \frac{-0,07}{0,4 \cdot 1,2} \approx -0,146$

4. Три различимых шара случайным образом раскладывают по четырем ящикам. Пусть X — число шаров в **первом** ящике, Y — число шаров в **четвертом** ящике. Найти совместное распределение случайных величин X и Y, их ковариацию и корреляцию. Являются ли величины X и Y независимыми?

	$X=0$	$X=1$	$X=2$	$X=3$
$Y=0$	$0,125$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{64}$
$Y=1$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{64}$	0
$Y=2$	$\frac{3}{32}$	$\frac{3}{64}$	0	0
$Y=3$	$\frac{1}{64}$	0	0	0

$$\tilde{A}_m^n = m^n$$

$\mathbb{P}(X=0; Y=0) = \frac{\tilde{A}_2^3}{\tilde{A}_4^3} = 0,125$
$\mathbb{P}(X=1; Y=0) = \frac{3\cdot 4}{\tilde{A}_4^3} = \frac{3}{16}$
$\mathbb{P}(X=2; Y=0) = \frac{3\cdot 2}{\tilde{A}_4^3} = \frac{3}{32}$
$\mathbb{P}(X=3; Y=0) = \frac{1}{\tilde{A}_4^3} = \frac{1}{64}$
$\mathbb{P}(X=1; Y=1) = \frac{6\cdot 2}{\tilde{A}_4^3} = \frac{3}{16}$
$\mathbb{P}(X=2; Y=1) = \frac{3}{64}$

5. Доказать, что если случайная величина $Y = aX + b;\ a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, \sigma_X > 0$, то $\rho(X,Y) = 1$, если $a > 0$ и $\rho(X,Y) = -1$, если $a < 0$.

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(a\cdot X + b) = a \cdot \mathbb{E}(X) + b$
$Var(Y) = \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}(Y))^2] = \mathbb{E}[a\cdot X + b - a^2 \cdot \mathbb{E}(X)^2 - 2\cdot ab \cdot \mathbb{E}(X) - b^2] = a^2 Var(X)$

$\sigma_Y = |a|\sigma_X$

$Cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X)) \cdot (Y - \mathbb{E}(Y))] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X)) \cdot (a\cdot X + b - a\cdot \mathbb{E}(X) - b] =$
$\rho(X,Y) = \frac{a\cdot Var(X)}{|a|\sigma_X^2} = \frac{a}{|a|}$

10. Имеется два вида акций, цены которых X и Y изменяются случайным образом. Закон распределения двумерного случайного вектора (X,Y) имеет следующий вид:

	X =10	X =20	X =30
$Y = 25$	0,2	0,1	0
$Y = 15$	0,1	0,3	0,1
$Y = 5$	0	0	0,2

Найдите $E(X), E(Y), Var(X), Var(Y), Cov(X,Y), \rho(X,Y), E(X+Y), Var(X+Y)$.

	$X=10$	$X=20$	$X=30$
$\mathbb{P}$	0,3	0,4	0,3

	$Y=25$	$Y=15$	$Y=5$
$\mathbb{P}$	0,3	0,5	0,2

$\mathbb{E}(X) = 0,3\cdot 10 + 0,4\cdot 20 + 0,3\cdot 30 = 20$
$\mathbb{E}(Y) = 0,3\cdot 25 + 0,5\cdot 15 + 0,3\cdot 5 = 16$

$$\mathbb{E}(X \cdot Y) = 10 \cdot (25 \cdot 0,2 + 15 \cdot 0,15 \cdot 0) + 20 \cdot (25 \cdot 0,1 + 15 \cdot 0,3 + 5 \cdot 0) + 30 \cdot (25 \cdot 0 +$$

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}(X \cdot Y) - \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) = 280 - 320 = -40$$

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 100 \cdot 0,3 + 400 \cdot 0,4 + 900 \cdot 0,3 - 400 = 60$$

$$Var(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = 625 \cdot 0,3 + 225 \cdot 0,5 + 25 \cdot 0,2 - 196 = 494$$