28.05.2024

Занятие № 13. Двумерные случайные векторы и их преобразования.

©*Составитель: д.ф.-м.н., проф. Рябов П.Е.*

Желательно (а для некоторых студентов обязательно), там, где есть ответ, придумать способ док-ва статистической устойчивости полученного ответа.

13.1. Случайный вектор (X, Y) равномерно распределен в треугольнике

$$x \geqslant 0; \quad y \geqslant 0; \quad 5x + 12y \leqslant 60.$$

1) Найдите значение функции распределения $F_X(4)$. **2)** Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$ и $\mathbb{E}(X^9Y)$. **3)** Найдите $\mathrm{Cov}(X, Y)$ и $\rho(X, Y)$.

13.2. Плотность распределения случайного вектора (X, Y) имеет вид:

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{12}{\pi} e^{-\frac{51}{2}x^2 - 45xy - 9x - \frac{51}{2}y^2 - 7y - \frac{5}{6}}.$$

1) Найдите $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathrm{Var}(X)$, $\mathrm{Var}(Y)$, $\mathrm{Cov}(X, Y)$ и $\rho(X, Y)$.
2) Найдите $\mathbb{P}(2X - 3Y > 1)$.

Ответ: 1) $\mathbb{E}(X) = -\frac{1}{4}$; $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{12}$; $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = \frac{17}{192}$; $\mathrm{Cov}(X, Y) = -\frac{5}{64}$; $\rho(X, Y) = -\frac{15}{17}$; **2)** $\mathbb{P}(2X - 3Y > 1) = 0{,}112962$.

13.3. Известно, что $(X, Y) \sim \mathcal{N}(2; 4; 5, \sigma_Y^2; \rho)$. При каком σ_Y, случайные величины $2X - 3Y$ и $4X + 6Y$ независимы?

13.4. Для независимых нормальных случайных векторов $(X_1, Y_1) \sim \mathcal{N}(3; -4; 5; 7; \frac{1}{11})$ и $(X_2, Y_2) \sim \mathcal{N}(-2; 1; 4; 3; -\frac{1}{2})$ найдите такую константу α, что компоненты случайного вектора $(X_1, Y_1) + \alpha(X_2, Y_2)$ являются независимыми.

13.5. Пусть X, Y, Z – независимые случайные величины, равномерно распределены на $[0; 1]$. Найдите $\mathbb{P}(X \geqslant YZ)$.

13.6. Пусть случайные величины X и Y – независимы и каждая имеет показательное распределение с параметром λ. И пусть $V = \frac{X}{X+Y}$. Покажите, что случайная величина V равномерно распределена на $[0; 1]$.

13.7. Пусть случайные величины X и Y независимы и каждая имеет стандартное нормальное распределение. Покажите, что случайная величина $Z = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2)$ имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 1$.

13.8. Случайные величины X и Y независимы и равномерно распределены на отрезке $[0; 1]$. Найдите функцию распределения случайной величины $\frac{X}{X+Y}$.

13.9. Точка P равномерно распределена в круге радиуса R. Пусть Z – расстояние от точки P до центра круга. Найдите функцию распределения $F_Z(x)$ и плотность распределения $f_Z(x)$ случайной величины Z. Постройте графики функций $F_Z(x)$ и $f_Z(x)$. Найдите $\mathbb{E}(Z)$ и $\mathrm{Var}(Z)$.

13.10. Случайные величины X и Y нормально распределены $\mathcal{N}(0;\sigma^2)$ и независимы. Покажите, что отношение $Z = \frac{X}{Y}$ имеет распределение Коши.

13.11. Пусть случайные величины X и Y – независимы и каждая имеет показательное распределение с параметром λ. И пусть $U = X + Y$, $V = \frac{X}{X+Y}$. Найдите плотность распределения $f_{U,V}(x,y)$ случайного вектора (U,V).

13.12. Для нормального случайного вектора $(X,Y) \sim \mathcal{N}(-7;17;81;16;0{,}6)$ найдите вероятность $\mathbb{P}\left((X-4)(Y-3) < 0\right)$.

Ответ: $0{,}88896$.

13.13. Для нормального случайного вектора $(X,Y) \sim \mathcal{N}(-4;4;64;81;-0{,}31)$ найдите вероятность $\mathbb{P}\left((X-8)(X-10)(Y-1) < 0\right)$.

Ответ: $0{,}36569$.