26.03.2024

Занятие № 6. Числовые характеристики случайных величин и их свойства.

©*Составитель: д.ф.-м.н., проф. Рябов П.Е.*

Желательно, там, где есть ответ, придумать способ док-ва статистической устойчивости полученного ответа.

6.1. Распределение случайной величины X задано таблицей

X	7	8	11	14	15
P	$0,25$	$0,2$	$0,1$	$0,2$	$0,25$

.

Найдите математическое ожидание $\mu = \mathbb{E}(X)$, среднее квадратичное отклонение $\sigma = \sigma_X$ и вероятность $\mathbb{P}(|X-\mu| < \sigma)$.

6.2. Независимые случайные величины $X_1, \ldots, X_4$ могут принимать только значения 0 и 1. При этом $\mathbb{P}(X_i = 0) = 0,4$, $i = 1, \ldots, 4$. Найдите математическое ожидание $\mathbb{E}\left[2^{X_1+\ldots+X_4}\right]$.

6.3. Независимые случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ принимают только целые значения $-6, -5, \ldots, 3, 4$. Найдите математическое ожидание $\mathbb{E}(X_1 \cdot X_2 \cdots X_{10})$, если известно, что возможные значения равновероятны.

6.4. Независимые случайные величины $X_1, \ldots, X_{90}$ могут принимать только значения 0 и 1. При этом $\mathbb{P}(X_i = 0) = 0,7$, $i = 1, \ldots, 90$. Найдите математическое ожидание $\mathbb{E}[(X_1 + \ldots + X_{90})^2]$.

6.5. Для независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_4$ известно, что их математические ожидания $\mathbb{E}(X_i) = -1$, дисперсии $\mathrm{Var}(X_i) = 3$, $i = 1, \ldots, 4$. Найдите дисперсию произведения $\mathrm{Var}(X_1 \cdots X_4)$.

6.6. Подбрасываются три различных симметричных кубика: с четырьмя гранями, с шестью гранями и двенадцатью гранями. Обозначим через S сумму выпавших очков. Найдите математическое ожидание $\mathbb{E}(S)$ и дисперсию $\mathrm{Var}(S)$. Разыграйте эксперимент на Python и найдите среднее значение суммы выпавших очков. Постройте график зависимости среднего значения суммы от числа экспериментов.

6.7. Подбрасываются четыре симметричные игральные кости (с шестью гранями). Обозначим через X минимальное значение выпавших очков (например, если выпало на первой кости 1, на второй $-$ 2, на третьей $-$ 6, на четвертой $-$ 1, тогда минимальное значение составляет 1). Найдите (аналитически) математическое ожидание $\mathbb{E}(X)$ и дисперсию $\mathrm{Var}(X)$. Разыграйте эксперимент на Python и найдите среднее значение такой величины. Постройте график зависимости среднего значения от числа экспериментов.

Ответ: $\mathbb{E}(X) = 1.7554$; $\mathrm{Var}(X) = 0.910079$.

6.8. Подбрасываются четыре симметричные игральные кости (с шестью гранями). Обозначим через X максимальное значение выпавших очков (например, если выпало на первой кости 1, на второй – 2, на третьей – 6, на четвертой – 1, тогда максимальное значение составляет 6). Найдите (аналитически) математическое ожидание $\mathbb{E}(X)$ и дисперсию $\mathrm{Var}(X)$. Разыграйте эксперимент на Python и найдите среднее значение такой величины. Постройте график зависимости среднего значения от числа экспериментов.

Ответ: $\mathbb{E}(X) = 5.2446$; $\mathrm{Var}(X) = 0.910079$.

6.9. Подбрасываются четыре симметричные игральные кости (с шестью гранями). Обозначим через S сумму наибольших трех выпавших очков (например, если выпало на первой кости 1, на второй – 2, на третьей – 6, на четвертой – 1, тогда значение такой суммы составляет 9). Найдите (аналитически) математическое ожидание $\mathbb{E}(S)$. Разыграйте эксперимент на Python и найдите среднее значение такой суммы. Постройте график зависимости среднего значения суммы от числа экспериментов.

Ответ: 12.2446;

6.10. Вероятность повышения цены акции за один рабочий день на 2% равна $0,4$, вероятность повышения на $0,2\%$ равна $0,4$, а вероятность понижения на 4% равна $0,2$. Найдите математическое ожидание изменения цены акции за 100 рабочих дней, считая, что начальная цена акции составляет $1\,000$ рублей, а относительные изменения цены за различные рабочие дни – независимые случайные величины.

6.11. События A, B и C имеют вероятности: $\mathrm{P}(A) = 0,4$, $\mathrm{P}(B) = 0,3$, $\mathrm{P}(C) = 0,2$. Эти события попарно независимы, но все три одновременно наступить не могут. Пусть X – индикатор A, Y – индикатор B, Z – индикатор C, а $V = 2X + 4Y + 6Z$. Найдите: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(V)$; 2) дисперсию $\mathrm{Var}(V)$.

6.12. Внутри квадрата площади **100** расположены треугольник и круг. Площади этих фигур даны: треугольник – **43**, круг – **60**. Также известно, что площадь пересечения треугольника и круга равна **17**. В квадрате случайным независимым образом выбираются точки $\omega_1, ..., \omega_6$. Определим случайные величины: X_i – индикатор попадания ω_i в треугольник, Y_i – индикатор попадания ω_i в круг, $Z_i = X_i + Y_i$, $i = 1, ..., 6$. Определим также сумму $U = Z_1 + ... + Z_6$ и произведение $V = Z_1 ... Z_6$. Найдите: 1) математическое ожидание $\mathbb{E}(U)$; 2) дисперсию $\mathrm{Var}(U)$; 3) математическое ожидание $\mathbb{E}(V)$; 4) дисперсию $\mathrm{Var}(V)$.

6.13. Случайные величины X_i, где $i = 1, 2, 3$, независимы и одинаково распределены. Их общее распределение задано таблицей

X_i	3	6	9	10
P	0,15	0,45	0,15	0,25

.

Пусть $S = X_1 + X_2 + X_3$. Найдите: **1)** математическое ожидание $\mathbb{E}(S)$; **2)** наименьшее число $MedMin$, для которого $\mathbb{P}(S \leqslant MedMin) \geqslant 0{,}5$; **3)** наибольшее число $MedMax$, для которого $\mathbb{P}(S \geqslant MedMax) \geqslant 0{,}5$; **4)** наименьшее число $ModMin$, вероятность которого, $\mathbb{P}(S = ModMin)$, максимальна; **5)** наибольшее число $ModMax$, вероятность которого, $\mathbb{P}(S = ModMax)$, максимальна.