30.04.2024

Занятие № 11. Непрерывные одномерные распределения и их преобразования.

©*Составитель: д.ф.-м.н., проф. Рябов П.Е.*

Желательно (а для некоторых студентов обязательно), там, где есть ответ, придумать способ док-ва статистической устойчивости полученного ответа.

11.1. Плотность распределения случайной величины X имеет вид: $f(x) = ae^{-\lambda|x|}$. Найдите а) коэффициент a; б) функцию распределения случайной величины X; в) $\mathbb{E}(X)$ и $\mathbb{V}ar(X)$.

11.2. Случайная величина X имеет плотность распределения $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$ (*стандартное распределение Коши* $Co(0;1)$). Найдите вероятности: а) $\mathbb{P}(X \geqslant 1)$; б) $\mathbb{P}(|X| \geqslant 1)$.

11.3. Пусть случайные величины X имеет показательное распределение с параметром $\lambda = \frac{1}{3}$. Найдите вероятности: а) $\mathbb{P}(X > 3)$; б) $\mathbb{P}(X > 6|X > 3)$; в) $\mathbb{P}(X > t+3|X > t)$.

11.4. Пусть X – случайная величина, равномерно распределенная на $[-1;1]$. Найдите распределение случайной величины $Y = |X|$.

11.5. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[0;1]$. Найдите плотность распределения случайной величины: а) $Y = X^2$; б) $Y = \frac{1}{X}$; в) $Y = e^X$ и построить их графики.

11.6. Плотность распределения случайной величины X равна $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$. Найдите распределение случайной величины $Y = \operatorname{arctg}(X)$.

11.7. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[0;2]$. Найдите функцию распределения случайной величины $Y = |X-1|$.

11.8. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[a;b]$. Найдите a и b, если $\mathbb{E}(X^2) = 1$ и $\mathbb{E}(X) = -\mathbb{E}(X^3)$.

11.9. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[0;1]$. Найдите $\rho(X;X^3)$.

11.10. Случайная величина X имеет стандартное распределение Коши, $X \sim Ca(0;1)$, то есть, плотность $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Найдите плотность распределения случайной величины $Y = \frac{X^2}{1+X^2}$

11.11. Случайная величина X распределена по показательному закону с параметром $\lambda = 1$. Найдите распределение случайной величины $Y = [X]^2$, где $[x]$ обозначает целую часть x.

11.12. Случайная величина X распределена по показательному закону. Найдите математическое ожидание $\mathbb{E}[(X-9)(10-X)]$, если дисперсия $\mathbb{V}ar[10-4X] = 9$.

11.13. Случайная величина X имеет распределение Коши с плотностью распределения $f(x) = \frac{b}{\pi[b^2+(x-a)^2]}$. Найдите плотность распределения случайной величины $Y = \frac{1}{X}$.

11.14. Пусть с.в. $X \sim Ca(1;2)$. Найдите вероятность $\mathbb{P}\left(\frac{1}{X} > 3\right)$ и покажите статистическую устойчивость полученной вероятности.

Ответ: $\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}(7) \approx 0{,}0451672353$.

11.15. На окружности радиуса R берут две точки с равномерным распределением. Найдите функцию распределения расстояния γ между ними и вычислите $\mathbb{E}(\gamma)$. Используя инструментарий *IPython*, постройте график зависимости среднего значения расстояния от числа экспериментов для $R = 1$. (Можно использовать генератор *uniform.rvs(size=n)* из библиотеки *from scipy.stats import uniform*).

11.16. На отрезке $[0;T]$ наудачу бросили две точки. Пусть γ – расстояние между ними. Найдите функцию распределения γ и вычислите $\mathbb{E}(\gamma)$, $\mathbb{V}ar(\gamma)$, $\nu_k(\gamma) = \mathbb{E}(\gamma^k)$. Используя инструментарий *IPython*, постройте график зависимости среднего значения расстояния от числа экспериментов для $T = 1$. (Можно использовать генератор *uniform.rvs(size=n)* из библиотеки *from scipy.stats import uniform*).

11.17. Два человека договорились встретиться в промежутке времени $[0;T]$. Пусть τ – время, которое придется ждать одному из них до момента встречи. Найдите функцию распределения и вычислите $\mathbb{E}\tau$. Используя инструментарий *IPython*, постройте график зависимости среднего значения времени от числа экспериментов для $T = 1$. (Можно использовать генератор *uniform.rvs(size=n)* из библиотеки *from scipy.stats import uniform*).

11.18. Абсолютно непрерывная случайная величина X может принимать значения только в отрезке $[4;7]$. На этом отрезке плотность распределения случайной величины X имеет вид: $f(x) = C\left(1 + 3x^{0,5} + 6x^{0,7} + 9x^{0,9}\right)^{1,5}$, где C – положительная константа. Найдите:

1) константу C;
2) математическое ожидание $\mathbb{E}(X)$;
3) стандартное отклонение σ_X;
4) квантиль уровня $0{,}8$ распределения X.

Ответ: $C = 0,000573$; $E(X) = 5{,}6608$; $\sigma_X = 0{,}8521$; Квантиль$= 6{,}5294$.

11.19. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[4;8]$. Случайная величина Y выражается через X следующим образом:

$$Y = \left(1 + 6X^{0,5} + 4X^{0,7} + 5X^{0,9}\right)^{1,3}.$$

Найдите:

1) математическое ожидание $\mathbb{E}(Y)$;

2) стандартное отклонение σ_Y;

3) асимметрию $As(Y)$;

4) квантиль уровня $0{,}8$ распределения Y.

Ответ: Математическое ожидание = 182,11; 2) Стандартное отклонение = 33,056; 3) Асимметрия = -0,00159; 4) Квантиль = 216,4527.