# §6. Непрерывные и абсолютно непрерывные случайные величины

ПАВЕЛ Е. РЯБОВ[1]

[1]Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации


PERyabov@fa.ru

16 апреля 2024 г.

# §6. Непрерывные и абсолютно непрерывные случайные величины

## План лекции

- Понятие непрерывной и абсолютно непрерывной случайной величины. Плотность распределения и её свойства.
- Числовые характеристики абсолютно непрерывной случайной величины: математическое ожидание и дисперсия
- Основные непрерывные распределения и их числовые характеристики: равномерное и показательное распределения
- Диаграмма одномерных распределений
- Нормальный закон распределения на прямой
- Распределение Коши
- Логнормальное распределение

# §6. Непрерывные и абсолютно непрерывные случайные величины

## План лекции

- Понятие непрерывной и абсолютно непрерывной случайной величины. Плотность распределения и её свойства.
- Числовые характеристики абсолютно непрерывной случайной величины: математическое ожидание и дисперсия
- Основные непрерывные распределения и их числовые характеристики: равномерное и показательное распределения
- Диаграмма одномерных распределений
- Нормальный закон распределения на прямой
- Распределение Коши
- Логнормальное распределение

# §6. Непрерывные и абсолютно непрерывные случайные величины

## План лекции

- Понятие непрерывной и абсолютно непрерывной случайной величины. Плотность распределения и её свойства.
- Числовые характеристики абсолютно непрерывной случайной величины: математическое ожидание и дисперсия
- Основные непрерывные распределения и их числовые характеристики: равномерное и показательное распределения
- Диаграмма одномерных распределений
- Нормальный закон распределения на прямой
- Распределение Коши
- Логнормальное распределение

# §6. Непрерывные и абсолютно непрерывные случайные величины

## План лекции

- Понятие непрерывной и абсолютно непрерывной случайной величины. Плотность распределения и её свойства.
- Числовые характеристики абсолютно непрерывной случайной величины: математическое ожидание и дисперсия
- Основные непрерывные распределения и их числовые характеристики: равномерное и показательное распределения
- Диаграмма одномерных распределений
- Нормальный закон распределения на прямой
- Распределение Коши
- Логнормальное распределение

# §6. Непрерывные и абсолютно непрерывные случайные величины

## План лекции

- Понятие непрерывной и абсолютно непрерывной случайной величины. Плотность распределения и её свойства.
- Числовые характеристики абсолютно непрерывной случайной величины: математическое ожидание и дисперсия
- Основные непрерывные распределения и их числовые характеристики: равномерное и показательное распределения
- Диаграмма одномерных распределений
- Нормальный закон распределения на прямой
- Распределение Коши
- Логнормальное распределение

# §6. Непрерывные и абсолютно непрерывные случайные величины

## План лекции

- Понятие непрерывной и абсолютно непрерывной случайной величины. Плотность распределения и её свойства.
- Числовые характеристики абсолютно непрерывной случайной величины: математическое ожидание и дисперсия
- Основные непрерывные распределения и их числовые характеристики: равномерное и показательное распределения
- Диаграмма одномерных распределений
- Нормальный закон распределения на прямой
- Распределение Коши
- Логнормальное распределение

# §6. Непрерывные и абсолютно непрерывные случайные величины

## План лекции

- Понятие непрерывной и абсолютно непрерывной случайной величины. Плотность распределения и её свойства.
- Числовые характеристики абсолютно непрерывной случайной величины: математическое ожидание и дисперсия
- Основные непрерывные распределения и их числовые характеристики: равномерное и показательное распределения
- Диаграмма одномерных распределений
- Нормальный закон распределения на прямой
- Распределение Коши
- Логнормальное распределение

**Определение**

*Случайная величина $X$ называется* ***непрерывной****, если её функция распределения (cdf) $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$ непрерывна в любой точке $x \in \mathbb{R}$.*

В частности, из общих свойств функции распределения следует, что

$$\mathbb{P}(X = a) = F_X(a) - F_X(a - 0) = 0,$$

т.е. вероятность отдельно взятого значения для непрерывной случайной величины равна нулю.
Более того, для непрерывной случайной величины $X$ из общих свойств функции распределения вытекает также, что

$$\mathbb{P}(a \leqslant X < b) = \mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) =$$
$$= \mathbb{P}(a < X \leqslant b) = \mathbb{P}(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a).$$

(вспомните формулу Ньютона-Лейбница из курса анализа).

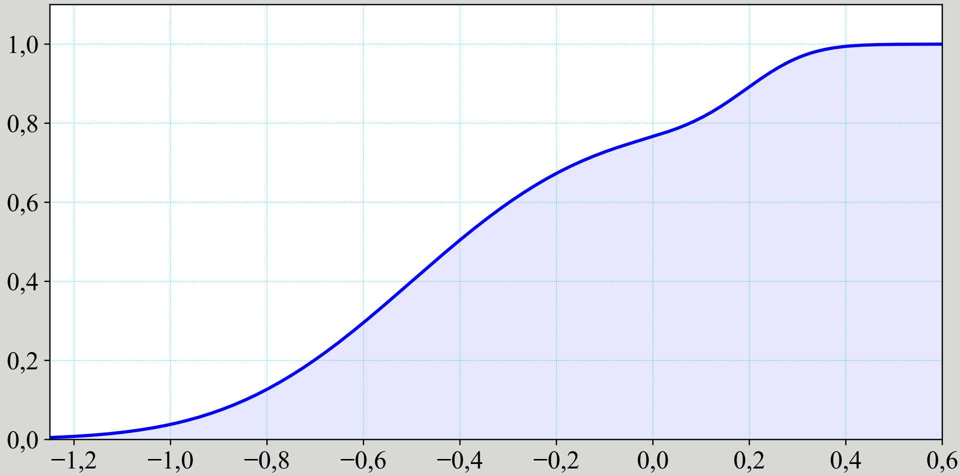



**Рис. 1.** *Типичный график функции распределения (cdf)* $F_X(x)$

### Определение

*Случайная величина $X$ называется **абсолютно непрерывной**, если существует **неотрицательная** функция $f_X(x) \geqslant 0$, которая называется **плотностью распределения (pdf)** (аналог (pmf) для дискретной случайной величины), такая, что для любых $a < b$ вероятность попадания в промежуток $[a; b]$ получается путем интегрирования данной функции*

$$\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \int\limits_a^b f_X(x)dx.$$

В данном определении один или оба конца промежутка могут быть равны бесконечности (со знаком «плюс» или «минус»).

### Упражнение

Привести пример ***непрерывного*** распределения, которое ***НЕ является абсолютно непрерывным***. В данном курсе такие сингулярные распределения мы рассматривать не будем.

Полагая $a = -\infty, b = x$, получаем выражение для ***функции распределения*** (cdf) $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \mathbb{P}(X \in (-\infty; x]) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)dt.$$

**Свойства плотности распредеделения (pdf) $f_X(x)$**

1) Функция плотности (pdf) $f_X(x)$ принимает только неотрицательные значения

$$f_X(x) \geqslant 0.$$

Это свойство вытекает из самого определения.

## Свойства плотности распределения (pdf) $f_X(x)$

2) Функция плотности (pdf) $f_X(x)$ обладает свойством ***нормированности***

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1.$$

Это свойство вытекает из того, что (cdf) $F_X(+\infty) = 1$.

3) Во всех точках, где функция плотности непрерывна, выполняетя равенство

$$f_X(x) = F'_X(x)$$

## Определение

*Абсолютно непрерывная случайная величина $X$ называется **сосредоточенной на отрезке** $[a; b]$, если функция плотности (pdf) $f_X(x)$ равна нулю **вне** этого отрезка.*

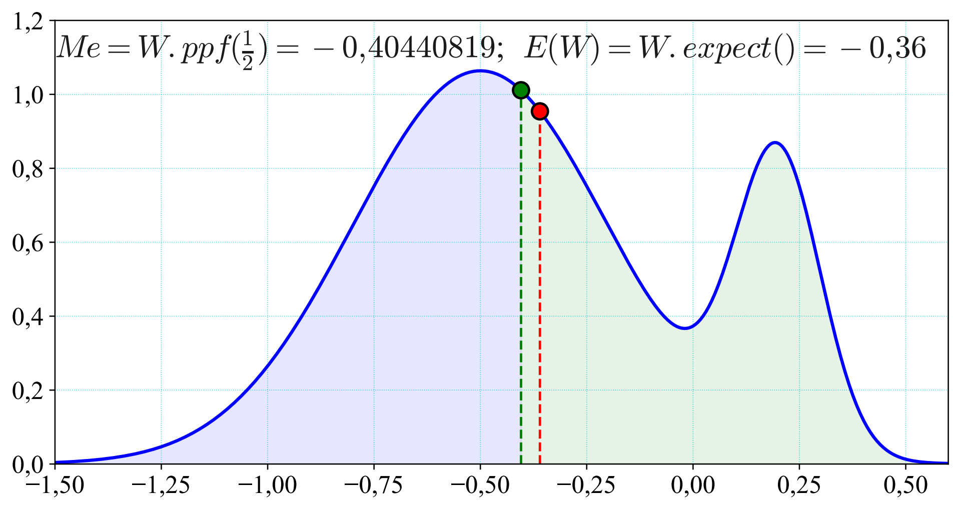



**Рис.2.** *Плотность распределения (pdf)* $f_X(x)$

### Пример

*Функция плотности вероятности случайной величины $X$ имеет вид*

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 6; \\ \frac{C}{x^2}, & \text{если} \quad x \geqslant 6. \end{cases}$$

*Найдите константу $C$ и вероятность $\mathbb{P}(X < 7)$, а также покажите статистическую устойчивость вероятности.*

### Упражнение

Случайная величина $X$ имеет плотность распределения $f_X(x)$. Найдите плотность распределения $g_Y(x)$ случайной величины $Y = X^2$.

### Определение

*Пусть $X$ – абсолютно непрерывная случайная величина с плотностью распределения $f_X(x)$.* ***Математическим ожиданием*** *случайной величины $X$ называется величина*

$$\mathbb{E}(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx,$$

*если только указанный интеграл* ***сходится абсолютно***, *т.е. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x)\,dx < \infty$.*

Если указанный интеграл расходится или равен $\pm\infty$, то говорят, что у случайной величины $X$ математическое ожидание $\mathbb{E}(X)$ не существует.

Если случайная величина $X$ ***сосредоточена на отрезке*** $[a;b]$, то
$\mathbb{E}(X) = \int\limits_a^b x f_X(x)\,dx.$

## Теорема

Пусть $X$ – абсолютно непрерывная функция с плотностью распределения $f_X(x)$ и пусть $y = g(x)$ – непрерывная функция, тогда случайная величина $Y = g(X)$ является ***абсолютно непрерывной*** случайной величиной, причем

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}[g(X)] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx.$$

## Упражнение

Пусть $X$ абсолютно непрерывная ***неотрицательная*** случайная величина и пусть $F_X(x)$ – её функция распределения. Найдите $\int\limits_0^{+\infty} [1 - F_X(x)] dx$.

## Определение

***Дисперсией абсолютно непрерывной случайной величины*** $X$ *с плотностью* $f_X(x)$ *называется велчина*

$$\operatorname{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}(X))^2 f_X(x) dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx - [\mathbb{E}(X)]^2.$$

***Среднеквадратичное отклонение (или стандартное отклонение)*** *случайной величины* $X$ *определяется как* $\sigma_X = \sqrt{\operatorname{Var}(X)}$.

Для математического ожидания $\mathbb{E}(X)$ и дисперсии $\operatorname{Var}(X)$ абсолютно непрерывной случайной величины $X$ справедливы все общие теоремы из предыдущего параграфа с той лишь разницей, что приходится интегрировать с использованием плотности распределения (pdf) $f_X(x)$.

# Основные непрерывные распределения и их числовые характеристики

## Равномерное распределение на отрезке $[a; b]$, $U \sim U([a; b])$

### Определение

*Случайная величина $X$, сосредоточенная на $[a; b]$, называется* ***равномерно распределенной*** *на этом отрезке или имеет* ***равномерный закон распределения***, *если её плотность распределения $f_X(x)$ постоянна на этом отрезке, т.е. $f_X(x) = C, x \in [a; b]$ и $f_X(x) = 0$ вне этого отрезка.*

Поскольку $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$, то $C = \frac{1}{b-a}$. Таким образом, плотность (pdf) равномерного закона распределения имеет явный вид

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{если} \quad x \in [a; b], \\ 0, & \text{если} \quad x \notin [a; b]. \end{cases}$$

# Равномерное распределение на отрезке $[a; b]$

**Теорема**

Пусть с. в. $X \sim U([a;b])$. Тогда

1) функция распределения (cdf) $F_X(x)$ имеет явный вид

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \leqslant a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{если} \quad a \leqslant x \leqslant b; \\ 1, & \text{если} \quad x \geqslant b. \end{cases}$$

2) $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$, $\sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

3) $\mathbb{P}(X \in (\alpha, \beta)) = \frac{\beta-\alpha}{b-a}$, если $a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$ (в этом свойстве объяснение геометрической вероятности).

$a = 2, b = 5$

$X \sim U([a, b]) \Leftrightarrow X = uniform(loc = a, scale = b - a)$

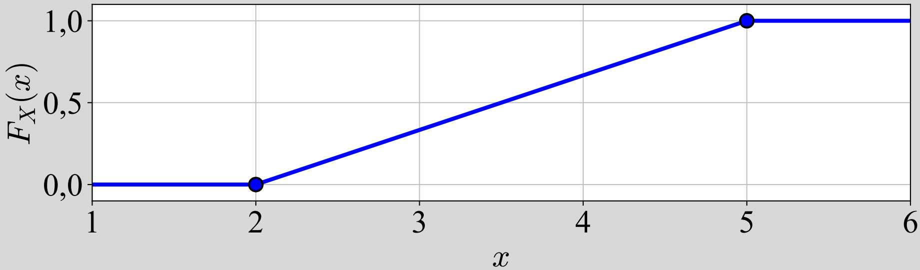



**Рис.3.** *Функция распределения (cdf)* $F_X(x)$ *для* $X \sim U([2;5])$

$a = 2, b = 5$

$U \sim U([a,b]) \Leftrightarrow U = uniform(loc = a, scale = b - a)$

## Пример

*Случайная величина* $X \sim U([-6;3])$. *Найдите* $\mathbb{P}\left(\frac{1}{X-2} > 3\right)$ *и покажите статистическую устойчивость вероятности.*

## Пример

*Случайные величины* $X$ *и* $Y$ ***независимы*** *и равномерно распределены на* $[9;12]$. *Найдите* $\mathbb{E}[30(X-Y)^2]$ *и покажите статистическую устойчивость полученного ответа.*

# Показательный закон распределения

## Определение

***Неотрицательная** случайная величина $X$ имеет **показательный закон распределения** (или **экспоненциальное распределение**) с параметром $\lambda > 0$, если плотность распределения (pdf) задается в виде явной функции*

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{если} \quad x \geqslant 0. \end{cases}$$

## Обозначение

$$X \sim Exp(\lambda)$$

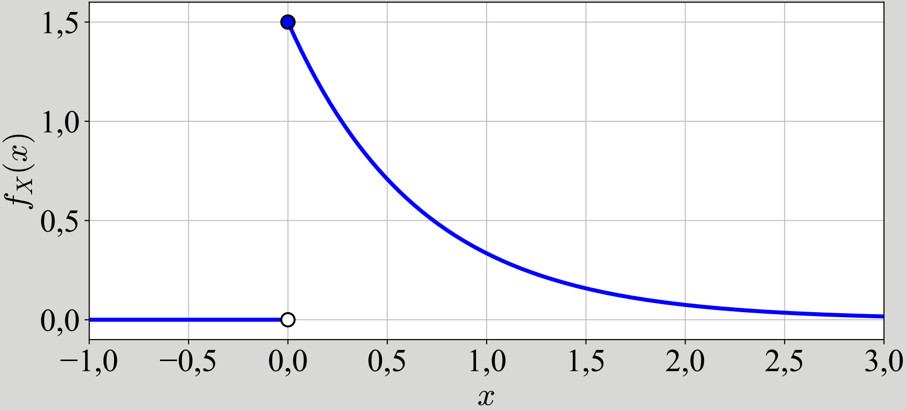



**Рис.4.** *Плотность распределения (pdf)* $f_X(x)$ *для* $X \sim Exp(\lambda)$

**from** scipy.stats **import** expon

$\lambda = \mathbf{1.5}; loc = \mathbf{0}; scale = \frac{1}{\lambda}$

$X \sim Exp(\lambda) \Leftrightarrow X = expon(loc, scale)$

## Теорема

Пусть с.в. $X \sim Exp(\lambda)$ (случайная величина $X$ распределена по показательному закону с параметром $\lambda > 0$). Тогда

1) функция распределения (cdf) $F_X(x)$ имеет явный вид

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \leqslant 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{если} \quad x \geqslant 0. \end{cases}$$

2) $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$; $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$; $\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$.
3) $\mathbb{P}(\alpha < X < \beta) = F_X(\beta) - F_X(\alpha) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}$, где $0 < \alpha < \beta$.

## Пример

*Случайная величина $X$ распределена по показательному закону. Найдите вероятность $\mathbb{P}(7 < X \leqslant 28)$, если $\mathbb{E}(X) = \frac{7}{\ln 2}$ и покажите статистическую устойчивость полученной вероятности.*

***Ответ:*** $\frac{7}{16}$.

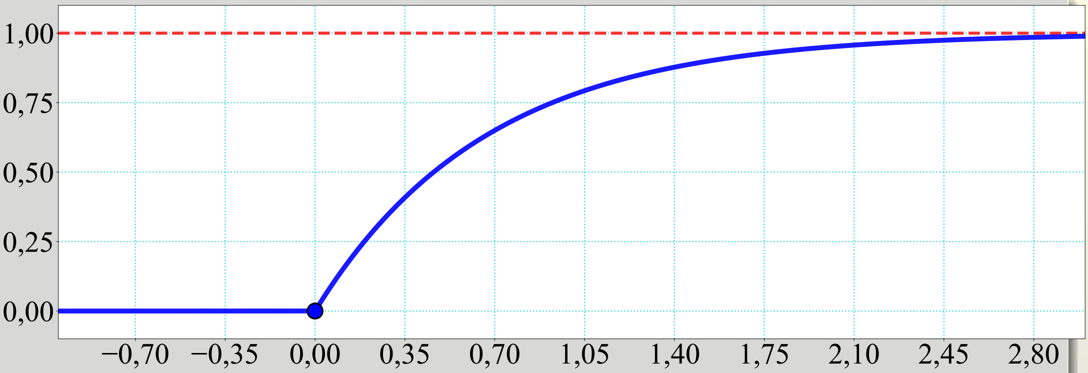



**Рис.5.** *Функция распределения (cdf)* $F_X(x)$ *для* $X \sim Exp(\lambda)$

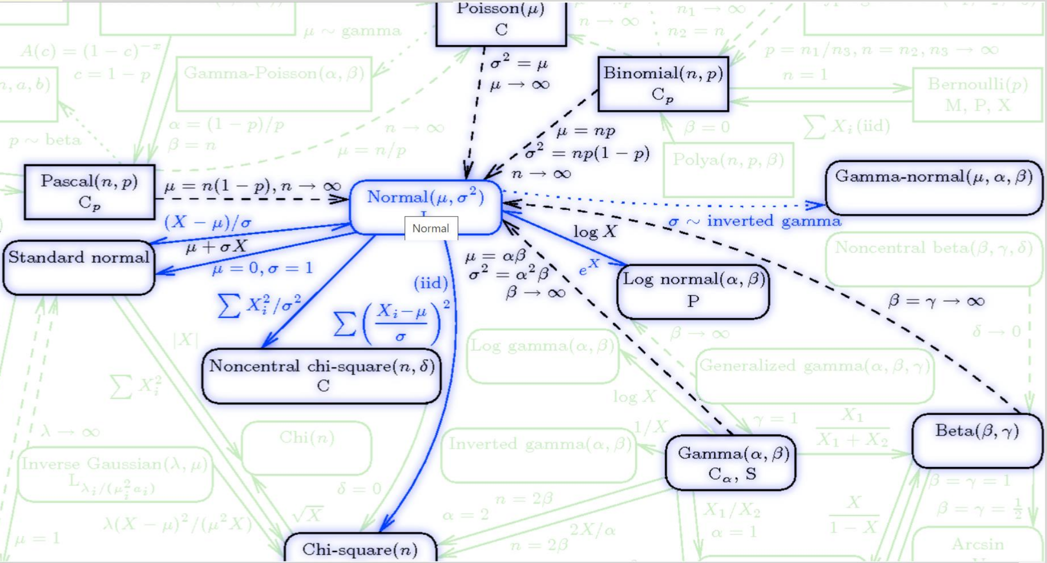
**from** scipy.stats **import** expon

$\lambda = 1.5; loc = 0; scale = \frac{1}{\lambda}$

$X \sim Exp(\lambda) \Leftrightarrow X = expon(loc, scale)$

# Univariate Distribution Relationships Chart

## http://www.math.wm.edu/ leemis/chart/UDR/UDR.html



# Нормальный закон распределения на прямой

## Определение

*Непрерывная случайная величина $X$ имеет* ***нормальный закон распределения (закон Гаусса)*** *или* ***нормальное распределение*** *с параметрами $\mu$ и $\sigma^2$, если плотность распределения вероятностей (pdf) $f_X(x)$ имеет явный вид*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

## Обозначение

$$X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$$

Если $\mu = 0, \sigma = 1$, т.е. $Z \sim \mathcal{N}(0; 1)$, то с.в. $Z$ называется ***стандартной нормальной*** случайной величиной. В этом случае, плотность распределения (pdf) $f_Z(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ – функция Гаусса.

## Плотность распределения (pdf) нормального закона, $X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$

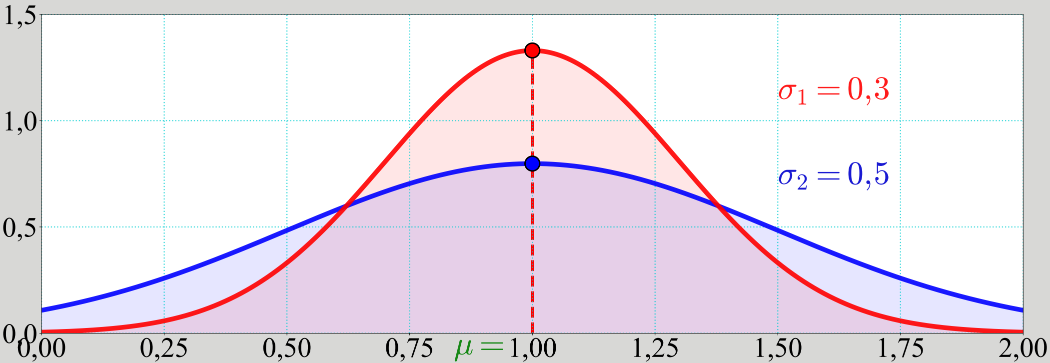



**Рис.7.** *Плотность распределения (pdf)* $f_X(x)$ *для* $X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$

**from** scipy.stats **import** norm

$\mu = \mathbf{1}; \sigma_1 = \mathbf{0.3}; \sigma_2 = \mathbf{0.5}$

$X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma^2) \Leftrightarrow X = norm(\mu, \sigma)$

## Простейшие свойства $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

1) $f_X(x)$ – симметричная функция относительно прямой $x = \mu$;
2) $\max f_X(x) = f_X(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \approx \frac{0{,}398942}{\sigma}$;
3) $f_X(x)$ имеет две точки перегиба $x = \mu \pm \sigma$ с ординатой $f_X(\mu \pm \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}} \approx \frac{0{,}24197}{\sigma}$.

Выясним вероятностный смысл параметров $\mu$ и $\sigma^2$.

## Теорема

Пусть $X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$. Тогда $\mathbb{E}(X) = \mu$, $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$.

## Пример

*Пусть с.в. $X$ имее плотность распределения (pdf) в виде $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{18\pi}} e^{-\frac{(x+2)^2}{18}}$. Тогда $X \sim \mathcal{N}(-2; 9)$. Почему?*

## Теорема

1) Если с.в. $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$ – ***стандартная нормальная*** случайная величина, то функция распределения (cdf)
$F_Z(x) = \mathbb{P}(Z \leqslant x) \equiv \Phi(x) \equiv \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt = \frac{1}{2} + \Phi_0(x)$,где
$\Phi_0(x) = \int\limits_{0}^{x} \varphi(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функция Лапласа.
2) Если с.в. $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$, то $\mathbb{P}(Z \leqslant -x) = 1 - \mathbb{P}(Z \geqslant x)$ и $F_Z(-x) = 1 - F_Z(x)$ т.е. $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, но $\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x)$.
3) Если с.в. $X \sim \mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$, то $X = \sigma Z + \mu$, где с.в. $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$; и функция распределения (cdf) $F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$. В частности,
   а) $\mathbb{P}(X \leqslant b) = \frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$;
   б) $\mathbb{P}(X \geqslant a) = \frac{1}{2} - \Phi_0\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$;
   в) $\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \Phi_0\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$.

## Следствие

*Пусть с.в.* $X \sim \mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$, *тогда*

а) $\mathbb{P}(|X-\mu| \leqslant \varepsilon) = 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$;

б) *В частности, для* $\varepsilon = 3\sigma$ *вероятность* $\mathbb{P}(|X-\mu| \leqslant \varepsilon) = 2\Phi_0(3) \approx 2 \cdot 0,49865 = 0,9973$ *(**«правило трех сигм» для нормального закона распределения**).*

## Упражнение

Для нормальной случайной величины $X$ с математическим ожиданием $\mathbb{E}(X) = 14$ и дисперсией $\mathrm{Var}(X) = 16$ найдите $\mathbb{P}(X > 9{,}2)$, а также покажите статистическую устойчивость полученной вероятности.

**Ответ:** 0,88493.

# Производящая функция моментов случайной величины $X$ (Moment-generating function (mgf))

## Определение

***Производящей функцией моментов (Moment-generating function (mgf))*** *случайной величины $X$ называется функция $M_X(s)$ от действительной переменной $s$*

$$M_X(s) = \mathbb{E}\left(e^{sX}\right) = \begin{cases} \sum_k^\infty e^{sx_k} p_k, \textit{если} \quad X - \textit{д.с.в.} \quad p_k = \mathbb{P}(X = x_k), \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} f_X(x) dx, \textit{если} \quad X - \textit{абс.непр.с.в.} \ (\textit{pdf}) f_X(x). \end{cases}$$

## Теорема

Если $X$ и $Y$ – независимые случайные величины с пфм $M_X(s)$ и $M_Y(s)$, то

$$M(X+Y)(s) = M_X(s) \cdot M_Y(s).$$

## Пример

*Пусть* $X \sim \mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$, *то пфм* $M_X(s) = e^{\mu s + \frac{\sigma^2 s^2}{2}}$.

## Нормальность суммы независимых нормальных случайных величин

### Теорема

Если $X$ и $Y$ независимые случайные величины и $X \sim \mathcal{N}(\mu_X;\sigma_X^2)$, $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y;\sigma_Y^2)$, то с.в. $X+Y \sim \mathcal{N}(\mu_X+\mu_Y;\sigma_X^2+\sigma_Y^2)$.

### Упражнение

Математические ожидания и дисперсии независимых нормальных случайных величин $X, Y, Z, U$ равны 1. Найдите вероятность $\mathbb{P}(X+Y-Z+U<1)$ и покажите статистическую устойчивость полученной вероятности.
**Ответ:** 0,3085375.

# Об одном свойстве производящей функции моментов

## Теорема

- Если с.в. $X$ имеет начальный момент $k$–ого порядка, $\nu_k(X) = \mathbb{E}(X^k)$, где $k \leqslant n$, то пфм $M_X(s)$ – дифференцируема $k \leqslant n$ раз, причем
$$\nu_k(X) = \mathbb{E}(X^k) = M_X^{(k)}(0), k = 1, 2, \dots, n;$$
- $$M_X(s) = M_X(0) + \frac{M_X'(0)}{1!}s + \frac{M_X''(0)}{2!}s^2 + \frac{M_X'''(0)}{3!}s^3 + \dots = \\ = 1 + \nu_1 s + \frac{\nu_2}{2!}s^2 + \frac{\nu_3}{3!}s^3 + \dots$$

## Пример

*Пусть* $Z \sim \mathcal{N}(0; 1)$. *Тогда* $M_Z(s) = e^{0\cdot s + \frac{1^2 s^2}{2}} = e^{\frac{s^2}{2}}$. *Тогда* $\nu_{2k-1} = 0, \nu_{2k} = \frac{(2k)!}{2^k \cdot k!}$. *В частности,* $\nu_4(Z) = \mu_4(Z) = 3$.

# Распределение Коши (The Cauchy distribution)

## Определение

*Случайная величина $X$ имеет **распределение Коши с параметрами** $a$ **и** $b > 0$, если плотность распределения вероятностей (pdf) имеет вид*

$$f_X(x) = \frac{b}{\pi\left[(x-a)^2 + b^2\right]}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

## Обозначение

С.в. $X \sim Ca(a;b) \Leftrightarrow X = cauchy(a,b)(Python)$.

В частности, когда $a = 0$, $b = 1$ с.в.
$X \sim Ca(0;1) \Leftrightarrow X = cauchy()(Python)$ определяет ***стандартное распределение Коши***

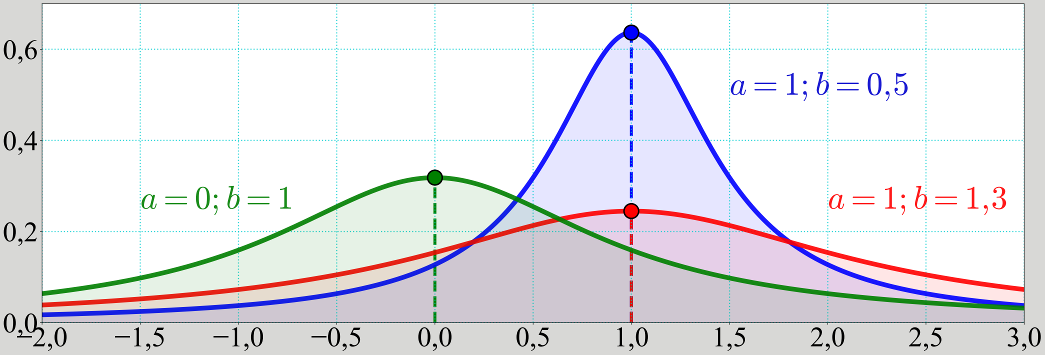



**Рис.8.** *Плотность распределения (pdf)* $f_X(x)$ *для* $X \sim Ca(a;b)$

**from** scipy.stats **import** cauchy

$a = 1; b = 0{,}5; loc = a; scale = b$

$X \sim Ca(a;b) \Leftrightarrow X = cauchy(loc, scale)$

## Теорема (Свойства распределения Коши, $X \sim Ca(a;b)$)

Пусть с.в. $X \sim Ca(a;b)$. Тогда

1) $\mathbb{E}(X) = \mathrm{Var}(X) = +\infty$;
2) Функция распрепделения (cdf) имеет вид
$F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x-a}{b}\right), \quad x \in \mathbb{R}$;
3) ***Квантильная функция*** $Q(p)$ (для непрерывных распределений квантильная функция определяется как обратная функция к функции распределения $Q(p) = F_X^{-1}(p)$) имеет вид
$Q(p) = F_X^{-1}(p) = a + b\,\mathrm{tg}\left[\pi\left(p - \frac{1}{2}\right)\right], \quad p \in (0;1)$;
4) Если с.в. $X \sim Ca(a;b)$, то с.в. $\frac{1}{X} \sim Ca\left(\frac{a}{a^2+b^2}; \frac{b}{a^2+b^2}\right)$;
5) Распределение Коши относится к ***устойчивым распределениям***, т.е. если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – независимые с.в. и $X_k \sim Ca(0;1)$, то ***выборочное среднее*** $\overline{X} \equiv \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \sim Ca(0;1)$;
6) Если с.в. $X$ и $Y$ – независимые с.в. и $X \sim \mathcal{N}(0;1)$, $Y \sim \mathcal{N}(0;1)$, то с.в. $\frac{X}{Y} \sim Ca(0;1)$.

## Упражнение

Пусть с.в. $X \sim Ca(1;2)$. Найдите вероятность $\mathbb{P}\left(\frac{1}{X} > 3\right)$ и покажите статистическую устойчивость полученной вероятности.

**Ответ:** $\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}(7) \approx 0{,}0451672353$.

## Упражнение

Пусть $O$ – начало координат, $P$ – случайная точка на оси $Ox$, а $Q$ – точка с координатами $(0;1)$. Известно, что угол $\alpha = \angle OQP$ равномерно распределен на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Найдите функцию распределения и плотность распределения для абсциссы точки $P$.

**Ответ:**

# Логнормальное распределение

**Определение**

*С.в. $Y$ имеет* ***логарифмически нормальное распределение*** *или* ***логнормальна*** *с параметрами $\mu$ и $\sigma^2$, если с.в. $X = \ln(Y)$ имеет нормальное распределение с параметрами $\mu$ и $\sigma^2$.*

**Обозначение**

$Y \sim \mathcal{L}n(\mu;\sigma^2) \Leftrightarrow X = \ln(Y) \sim \mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$.

Из определения следует, что если $Y \sim \mathcal{L}n(\mu;\sigma^2)$, то с.в. $Y = e^X$, где $X \sim \mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$.

## Теорема

Пусть $Y \sim \mathcal{L}n(\mu;\sigma^2)$. Тогда

1) плотность распределения вероятностей (pdf) $f_Y(x)$ имеет вид

$$f_Y(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x > 0, \sigma > 0, \mu \in \mathbb{R}.$$

2) функция распределения (cdf) $F_Y(x)$ задается в виде

$$F_Y(x) = \Phi\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – cdf с.в. $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$,

$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функция Лапласа.

## Теорема

Пусть $Y \sim \mathcal{L}n(\mu;\sigma^2)$. Тогда

3) ***Квантильная функция*** $Q(p)$ имеет вид

$$Q(p) = F_Y^{-1}(p) = e^{\mu+\sigma\mathbf{\Phi^{-1}(p)}}, \quad p \in (0;1);$$

4) $\mathbb{E}(Y) = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$, $\mathrm{Var}(Y) = e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2}-1\right)$;

5) Если $Y \sim \mathcal{L}n(\mu;\sigma^2)$, то с.в. $\frac{1}{Y} \sim \mathcal{L}n(-\mu;\sigma^2)$;

6) Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – последовательность ***независимых*** с.в. и $X_k \sim \mathcal{L}n(\mu_k;\sigma_k^2)$, то с.в. произведение $\prod\limits_{k=1}^{n} X_k = X_1 \cdot X_2 \ldots \cdot X_n \sim \mathcal{L}n(\mu;\sigma^2)$, где $\mu = \sum\limits_{k=1}^{n}\mu_k$, $\sigma^2 = \sum\limits_{k=1}^{n}\sigma_k^2$.

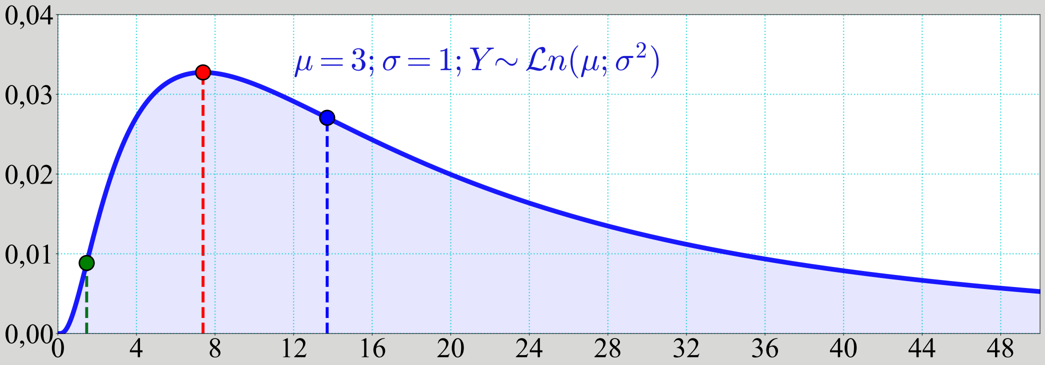



**Рис.9.** *Плотность распределения (pdf) $f_Y(x)$ для $Y\sim\mathcal{L}n(\mu;\sigma^2)$*

**from** scipy.stats **import** lognorm

$\mu=3;\sigma^2=1;loc=0;scale=e^{\mu}$

$Y\sim\mathcal{L}n(\mu;\sigma^2)\Leftrightarrow Y=lognorm(sigma,loc,scale)$

### Упражнение

1) $\max\limits_{x>0} f_Y(x) = f_Y(x_0)$, где $x_0 = e^{\mu-\sigma^2}$; $\lim\limits_{x\to 0+0} f_Y(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f_Y(x) = 0$;

2) $f_Y(x)$ имеет две точки перегиба $x_{1,2} = e^{\mu - \frac{3}{2}\sigma^2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2+4}}$;

### Упражнение

Пусть с.в. $Y \sim \mathcal{L}n(2;25)$. Найдите вероятность $\mathbb{P}\left(\frac{1}{Y} < 3\right)$ и покажите статистическую устойчивость полученной вероятности.

**Ответ:** 0,73227974.

### Упражнение

Пусть $X_1$ и $X_2$ независимые случайные величины и известно, что $X_1 \sim \mathcal{L}n(2;25)$, $X_2 \sim \mathcal{L}n(-3;36)$. Найдите вероятность $\mathbb{P}(X_1 \cdot X_2 > 7)$ и покажите статистическую устойчивость полученной вероятности.

**Ответ:** 0,353018.