БАКАЛАВРИАТ

П.Н. БРУСОВ, П.П. БРУСОВ,
Н.П. ОРЕХОВА, С.В. СКОРОДУЛИНА

ЗАДАЧИ ПО ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКЕ

Рекомендовано УМО по образованию
в области финансов, учета и мировой экономики
в качестве **учебного пособия**
для студентов, обучающихся по специальностям
«Финансы и кредит», «Бухгалтерский учет, анализ и аудит»,
«Мировая экономика», «Налоги и налогообложение»

Второе издание, переработанное

КНОРУС • МОСКВА • 2014

KnorusMedia
электронные версии книг

УДК 330(075.8)
ББК 65.26я73
Б89

Рецензенты:
М.С. Красс, проф. кафедры математического моделирования экономических процессов Финансового университета при Правительстве РФ, д-р физ.-мат. наук, проф.,
Е.М. Панченко, заместитель директора НИИФ ЮФУ, д-р физ.-мат. наук, проф.,
Е.Д. Гутлянский, ведущий научный сотрудник НИИФ ЮФУ, д-р физ.-мат. наук,
Г.А. Панферов, доц. кафедры прикладной математики Финансового университета при Правительстве РФ, канд. экон. наук, доц.

Брусов П.Н.
Б89 Задачи по финансовой математике : учебное пособие / П.Н. Брусов, П.П. Брусов, Н.П. Орехова, С.В. Скородулина. — 2-е изд., перераб. — М. : КНОРУС, 2014. — 286 с. — (Бакалавриат).

ISBN 978-5-406-03746-1

Написано на основе компетентностного подхода в соответствии с программой курса «Финансовая математика» для бакалавров. Предназначено для использования в качестве задачника к учебному пособию тех же авторов. Включает в себя около 1000 задач и теоретических вопросов, рассчитано на прочное и творческое усвоение студентами финансовой математики. Около 120 подробно решенных задач помогут читателю решить остальные задачи пособия.

Соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования третьего поколения.

Для студентов бакалавриата всех профилей, включая финансы и кредит, бухгалтерский учет и аудит, налоги, страхование, финансовый менеджмент, инвестиционный менеджмент, международные экономические отношения и др. Будет полезно специалистам всех финансовых и экономических специальностей, финансовым директорам компаний, финансовым аналитикам, а также всем желающим освоить количественные методы в финансах и экономике.

УДК 330(075.8)
ББК 65.26я73

Брусов Петр Никитович, Брусов Павел Петрович,
Орехова Наталья Петровна, Скородулина Светлана Владимировна

ЗАДАЧИ ПО ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКЕ

Сертификат соответствия № РОСС RU. АЕ51. Н 16509 от 18.06.2013.

Изд. № 7475. Подписано в печать 24.01.2014. Формат 60×90/16.
Гарнитура «NewtonC». Печать офсетная.
Усл. печ. л. 18,0. Уч.-изд. л. 10,9. Тираж 16 экз.

ООО «КноРус».
117218, г. Москва, ул. Кедрова, д. 14, корп. 2.
Тел.: 8-495-741-46-28.
E-mail: office@knorus.ru http://www.knorus.ru

Отпечатано в ООО «Центр геологических информационных технологий».
115201, г. Москва, ул. Котляковская, д. 1, стр. 3.

ISBN 978-5-406-03746-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 2. Финансовые потоки

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие написано на основе компетентностного подхода по программе курса «Финансовая математика» для бакалавров и адресовано студентам для использования в качестве задачника к учебному пособию для бакалавров «Финансовая математика» тех же авторов, вышедшему в свет в 2010 г.[1] Оно включает в себя около 1000 задач и теоретических вопросов по финансовой математике и нацелено на прочное и творческое усвоение студентами финансовой математики, знание которой сегодня необходимо не только каждому финансисту, но и каждому грамотному экономисту широкого профиля. Около 120 подробно решенных задач помогут читателю решить остальные задачи, содержащиеся в пособии. Структура задачника отвечает структуре упомянутого учебного пособия и так же состоит из пяти глав: «Теория процентов», «Финансовые потоки и ренты», «Доходность и риск финансовой операции», «Портфельный анализ», «Облигации».

Пособие подготовлено на базе курса семинарских занятий, проводимых на протяжении ряда лет для студентов факультетов «Финансовый менеджмент», «Менеджмент и социология», «Финансы и кредит», «Финансы» Финансового университета при Правительстве Российской Федерации. От других задачников и учебных пособий отличается включением теоретических вопросов, а также большим количеством специально подобранных задач, которые не только иллюстрируют теоретические положения, но и расширяют изучаемую проблематику и вместе с тем позволяют приобрести навыки финансовых вычислений.

Ответы на вопросы и решение задач важны и для контроля степени усвоения материала, закрепления изученного.

Авторы являются энтузиастами внедрения математических методов в экономику и финансы. Понимание того, что финансы представляют по своей сути количественную науку, а количественные методы играют важнейшую роль в подготовке финансистов и экономистов всех профилей, все шире распространяется среди специалистов, отвечающих за их подготовку. Пример такого понимания — внедрение в Финансовом университете при Правительстве Российской Федерации по инициативе П.Н. Брусова курса «Основы финансовых вычислений (финансовая математика)» в качестве обязательного для бакалав-

---

[1] См.: *Брусов П.Н., Брусов П.П., Орехова Н.П., Скородулина С.В.* Финансовая математика : учебное пособие. М. : КНОРУС, 2010.

ров всех профилей, что является важным шагом на пути интеграции отечественного финансового и экономического образования в общемировое, где математическая составляющая финансовых дисциплин достигает 70% и более.

Учебное пособие предназначено для бакалавров всех финансовых, экономических и управленческих направлений (экономика, прикладная экономика, менеджмент и др.), а в рамках этих направлений — для бакалавров всех профилей, включая финансы и кредит, бухгалтерский учет и аудит, налоги, страхование, финансовый менеджмент, инвестиционный менеджмент, международные экономические отношения и др. Оно будет полезно специалистам всех финансовых и экономических специальностей, финансовым директорам и финансовым аналитикам компаний, а также всем желающим освоить количественные методы в финансах и экономике.

Во втором издании к большинству задач даны ответы, что поможет студентам и преподавателям контролировать правильность усвоения материала. Исправлены замеченные опечатки, ряд задач изменен с тем, чтобы их решение не требовало навыков и знаний, дополнительных к стандартному курсу высшей математики для экономистов.

ГЛАВА 1

ТЕОРИЯ ПРОЦЕНТОВ

1.1. Простые проценты

В схеме простых процентов к концу n-го промежутка начисления наращенная сумма равна

$$S_n = S_0(1+ni). \tag{1.1}$$

Данная формула называется ***формулой простых процентов***. Множитель $(1 + ni)$ называют ***коэффициентом (множителем) наращения***, а величину ni — ставкой процентов за время n.

Проценты за n лет можно представить в виде

$$I_n = S_0\, in. \tag{1.2}$$

Если на разных промежутках начисления процентов n_1, n_2, ..., n_m устанавливаются разные ставки процентов i_1, i_2, ..., i_m, то наращенная сумма S_n за время $n_1 + n_2 + ... + n_m$ будет равна

$$S_n = S_0\left(1+\sum_{i=1}^{m} n_k i_k\right). \tag{1.3}$$

Пример 1.1. Найти сумму накопленного долга и проценты, если ссуда 100 000 руб. выдана на 2 года под простые 15% годовых. Во сколько раз увеличится наращенная сумма при повышении ставки на 1%?

Наращенная сумма находится по формуле (1.1)

$$S_n = S_0(1 + ni) = 100\,000(1 + 2 \cdot 0{,}15) = 130\,000 \text{ руб.}$$

При увеличении ставки на 1% наращенная сумма станет равной

$$S_n = 100\,000(1 + 2 \cdot 0{,}16) = 132\,000 \text{ руб.}$$

и, следовательно, увеличится на 2000 руб., или в 132 000/130 000 = = 1,0154 раза.

Вопросы и задачи

1.1. Какова простая ставка процентов, при которой первоначальный капитал в размере 130 000 руб. достигнет через 100 дней 155 000 руб.?

1.2. Ссуда 700 000 руб. выдана на квартал под простые 15% годовых. Определить наращенную сумму.

1.3. Найдите сумму накопленного долга и проценты, если ссуда 180 000 руб. выдана на 3 года под простые 18% годовых. Во сколько раз увеличится наращенная сумма при повышении ставки на 2%?

1.4. Определите простую ставку процентов, при которой первоначальный капитал в размере 122 000 руб. достигнет через 120 дней величины 170 000 руб.

1.5. Определите период начисления, за который начальный капитал в размере 46 000 руб. вырастет до 75 000 руб., если ставка простых процентов равна 15% годовых.

1.6. Ссуда 150 000 руб. выдана на 4 года под 20% годовых (простые проценты). Во сколько раз увеличится наращенная сумма?

1.7. Цена товара увеличилась на 30%. На сколько процентов ее необходимо уменьшить, чтобы получить первоначальную цену?

1.2. Сложные проценты

В схеме сложных процентов к концу n-го промежутка начисления наращенная сумма равна

$$S_n = S_0(1+i)^n. \tag{1.4}$$

Наращенная сумма S_n пропорциональна начальной сумме S_0. Коэффициент пропорциональности $(1 + i)^n$ называют **множителем наращения**.

1.3. Проценты за нецелое число периодов

Если срок измеряется не в годах n, а в днях t, то в качестве n нужно взять $n = \frac{t}{K}$, где K — так называемая временна́я база, т.е. число дней в году, $K = 360$, 365 (366). Если временна́я база $K = 360$ дней (12 месяцев по 30 дней), то говорят, что в формуле (1.4) используются **обыкновенные**, или **коммерческие**, проценты; при использовании действительной продолжительности года, $K = 365$ (366) дней, получают **точные** проценты.

При дробном числе лет существуют два метода начисления процентов. При использовании первого метода применяется формула (1.4) с дробным числом лет n, при втором, смешанном, за целое число лет начисляются сложные проценты, а за дробную часть срока вклада (ссуды) — простые, т.е. наращенная сумма за n, b лет вычисляется по формуле

$$S_n = S_0(1+i)^n(1+bi), \quad (1.5)$$

где n — целое число лет, b — дробная часть срока вклада (ссуды).

Таблица 1.1

Порядковые номера дат в году

Дни	Месяцы											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29		88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31		90		151		212	243		304		365

Расчет числа дней вклада t бывает точным и приближенным. В первом случае при вычислении t берут фактическое число дней вклада (либо ссуды). День открытия счета и день возврата вклада (либо день выдачи ссуды и день ее погашения) считают за один день. Расчет числа дней удобно производить, используя табл. 1.1 порядковых номеров дней в году, при этом из порядкового номера дня закрытия вклада (либо дня погашения ссуды) вычитают порядковый номер дня открытия вклада (либо дня получения ссуды). Во втором случае (при приближенном расчете числа дней вклада (ссуды)) считают, что каждый полный месяц содержит 30 дней. День открытия счета и день возврата вклада (либо день выдачи ссуды и день ее погашения) так же, как и в первом случае, считают за один день.

На практике используют три варианта начисления процентов:

1) ***точные проценты с точным числом дней вклада (ссуды).***

Этот метод ($K = 365$ (366) или ACT/ACT) дает наиболее точные результаты. Применяется банками многих стран, например Великобритании, США и др.;

2) ***обыкновенные проценты с точным числом дней вклада (ссуды).***

Такой метод (банковский) ($K = 360$ или ACT/360) распространен в ссудных банковских операциях, поскольку дает больший результат, чем предыдущий. Применяется банками Франции, Бельгии, Швейцарии;

3) ***обыкновенные проценты с приближенным числом дней вклада (ссуды).***

Этот метод ($K = 360$) (обозначается 360/360) применяется, когда не требуется большая точность, например при промежуточных расчетах. Данный метод принят в банках Германии, Швеции, Дании.

По времени начисления процентов (в начале либо в конце периода начисления) различают *декурсивный* и *антисипативный* способы начисления процентов.

Декурсивный способ начисления процентов — способ, при котором проценты начисляются в конце каждого интервала начисления. Их величина определяется исходя из величины предоставляемого капитала. Соответственно **декурсивная процентная ставка** представляет собой выраженное в процентах отношение суммы начисленного за определенный интервал дохода к сумме, имеющейся на начало данного интервала.

Антисипативный (предварительный) способ начисления процентов — это способ, при котором проценты начисляются в начале каждого интервала начисления. Сумма процентных денег определяется исходя из наращенной суммы. **Процентной ставкой** будет выраженное в процентах отношение суммы дохода, выплачиваемого за определенный интервал, к величине наращенной суммы, полученной по прошествии этого интервала.

Пример 1.2. Вклад в размере 3000 руб. положен в банк на депозит 10 марта под 15% годовых по схеме сложных процентов. Какую сумму вкладчик получит 22 октября?

Используем формулу (1.4) для наращения по схеме сложных процентов

$$S_n = S_0(1+i)^n.$$

Продолжительность финансовой операции

$$n = \frac{t}{T} = \frac{20+30\cdot 6+22}{365} = 0{,}608$$

(считается, что в месяце 30 дней, в году — 365), поэтому имеем

$$S_n = S_0(1+i)^n = 3000(1+0{,}15)^{0{,}608} = 3266{,}07 \text{ руб.}$$

Итак, вкладчик получит 22 октября 3266,07 руб.

Пример 1.3. Клиент открыл вклад в банке на 1,5 года 02.12.2008, положив на счет 13 000 дол. Условия вклада не предусматривали возможность его пролонгации. По окончании срока на вклад с процентами начислялась ставка по вкладам «до востребования» (0,1%). Оценить потери клиента банка, если ставка была 4,5% годовых, а вклад востребован 02.12.2010.

При ставке 4,5% наращенная сумма за 1,5 года составила:

$$S = S_0(1 + i)^{0,5} = 13\,000 \cdot 1{,}045^{0,5} = 13\,887{,}3 \text{ дол.}$$

При ставке «до востребования» (0,1%) наращенная (практически ненаращенная) сумма за оставшиеся полгода составила бы:

$$S = S_0(1 + i)^{1/2} = 13\,887{,}3 \cdot 1{,}001^{1/2} = 13\,894{,}24 \text{ дол.}$$

и клиент получил бы 6,94 дол. в качестве процентов за оставшиеся полгода.

При пролонгации вклада на тех же условиях наращенная сумма составила бы:

$$S = S_0(1 + i)^{1/2} = 13\,887{,}3 \cdot 1{,}045^{1/2} = 14\,196{,}33 \text{ дол.}$$

и клиент получил бы 309,03 дол. в качестве процентов за оставшиеся полгода.

Таким образом, потери клиента банка составили 309,03 – 6,94 = = 302,09 дол., т.е. клиент теряет практически все проценты.

Вопросы и задачи

1.8. В банк 7 февраля на депозит положили сумму 20 000 у.е. под 11% годовых по схеме сложных процентов. Какую сумму вкладчик снимет 1 октября?

1.9. После вычета процентов за 6 месяцев заемщик получил 300 000 руб. Вычислите сумму долга и сумму выплаченных процентов, если процент годовых равен 15,5%.

1.10. Вклад 100 000 руб. помещен на 5,5 лет под 9,5% годовых. На сколько больше будет наращенная сумма, вычисленная по смешанному методу, чем по общему, если $K = 360$ дней?

1.11. Ссуда в размере 500 000 у.е. выдана 12.02 по 25.09 включительно под 7% простых годовых, год високосный. На сколько больше будет наращенная сумма ссуды при использовании *обыкновенных* процентов по сравнению с наращенной суммой при использовании *точных* процентов, если продолжительность пользования ссудой вычисляется точно?

1.12. Банк предоставил 19.02 ссуду 55 000 руб. с погашением через 10 месяцев под 20% годовых. Определите суммы к погашению при различных способах начисления процентов.

1.13. Вклад на 80 000 руб., открытый в банке на 10 месяцев, принес вкладчику 7000 руб. Под какой простой (сложный) процент годовых был открыт вклад?

1.14. Вклад на 50 000 руб. открыт в банке на 200 дней под 15% годовых ($K = 360$). Найдите процентный платеж.

1.15. Ссуда в 300 000 у.е. с удержанием процентов вперед выдана 20.03 по 15.06 включительно под 6,5% простых годовых процентов, год не високосный. Какую сумму на руки получит должник 20.03?

1.16. Чему равен процентный платеж, если кредит 170 000 руб. взят на 7 месяцев под 17% годовых?

1.17. На сумму в 3000 у.е. в течение 14 месяцев начисляются простые проценты. Базовая ставка 7,5% годовых повышается каждый месяц начиная со второго на 0,3%, временна́я база $K = 360$. Чему будут равны наращенная сумма и средняя процентная ставка?

1.18. Ссуда в размере 300 000 руб. выдана на срок с 15.02 по 20.09 включительно под 16% годовых (простые проценты). Определить величину долга в конце срока тремя методами (365/365, 365/360, 360/360).

1.19. Какую сумму следует положить на депозит 15.04 под 6,5% годовых, чтобы 31.12 накопить 20 000 руб., если используются: а) точные проценты, б) обыкновенные проценты ($K = 365$)?

1.20. Вклад в размере 17 000 руб. положен в банк 15.12 и закрыт 31.03 следующего года. Процентная ставка — 14% годовых. Найдите величину начисленных процентов при различных методах определения срока начисления.

1.21. Вклад в размере 1 000 000 руб. открыт в банке 15.05 по ставке 15% годовых. При закрытии вклада 23.09 вкладчику были начислены проценты в размере 50 949 руб. Какую практику начисления процентов использовал банк?

1.22. Вклад в размере 50 000 руб. открыт в банке 12.04 по ставке 17% годовых. 13.06 вклад был пополнен на сумму 30 000 руб.; 23.09 со счета была снята сумма 20 000 руб., а 31.12 счет был закрыт. Определите сумму, полученную вкладчиком при закрытии счета.

1.23. Какая должна быть процентная ставка, для того чтобы сумма долга, взятого 13.05, увеличилась бы на 40% к 15.10, если используются: а) точные проценты, б) обыкновенные проценты ($K = 365$)?

1.24. Кредит 40 000 руб. выдан под простую ставку процентов 22% годовых на 175 дней. Рассчитайте сумму, получаемую заемщиком, и сумму процентных денег, удерживаемых в момент выдачи кредита.

1.25. Ставка по годовому депозиту равна 8%. Какую ставку годовых процентов нужно назначить на полугодовой депозит, чтобы последовательное переоформление полугодового депозита привело бы к такому же результату, что и при использовании годового депозита ($K = 360$)?

1.26. Ссуда в размере 600 000 руб. взята в банке под 25% годовых на срок с 11.03 до 12.06. Найдите сумму, которую необходимо вернуть банку.

1.27. Кредит в сумме 345 000 у.е. выдан 23.02 под 7% годовых. Когда долг превысит 370 000 у.е., если начисляются: а) точные проценты ($K = 365$), б) обыкновенные проценты?

1.28. Заемщик должен уплатить 80 000 руб. через 65 дней. Кредит выдан под 19% годовых (простые проценты). Каковы первоначальная сумма долга и дисконт ($K = 360$)?

1.29. Кредит в сумме 240 000 у.е. выдан 15.06 по 20.12 включительно под 12,5% годовых (обыкновенные проценты). В счет погашения долга 14.07 уплачено 100 000 у.е. Какую сумму нужно вернуть 20.12?

Указание: 100 000 у.е. привести к дате 20.12.

1.30. Вклад в размере 10 000 руб. открыт в банке 14.02 и закрыт 31.12. Ставка — 18% годовых. Найдите сумму начисленных процентов при различных методах определения срока начисления.

1.31. Вклад 40 000 руб. открыт в банке 15.04 по ставке 13% годовых. При закрытии вклада 17.10 вкладчику начислены проценты в размере 2600 руб. Какую практику начисления процентов использовал банк?

1.32. На исходную сумму в 12 000 у.е. в течение 7,5 лет начисляются проценты по годовой ставке 9%. На сколько больше будет наращенная сумма при смешанном методе, чем при общем методе, если $K = 360$ дней?

1.33. Ссуда 160 000 руб. выдана на три года: с 06.11. 2010 по 06.11. 2013. Распределите начисленные проценты (ставка 17%, 365/360) по календарным годам.

1.34. Вклад 25 000 руб. сделан 12.04.2010, а 10.06.2010 изъят. Проценты начисляются под 11% годовых по простой схеме. Определите размер вклада, полученного клиентом.

1.35. Сумма 120 000 руб. выплачивается через 2,5 года. Найдите приведенную стоимость при ежемесячном начислении процентов, если ставка процентов — 15% годовых.

1.36. Вклад 10 000 руб. сделан 06.02.2008, а 18.07.2008 изъят. Проценты начисляются под 11% годовых по простой схеме. Каков размер вклада, полученного клиентом?

1.37. Вклад 30 000 руб. сделан 15.03, а закрыт 06.11. Проценты начисляются под 7% годовых по простой схеме. Найдите размер вклада, полученного клиентом.

1.38. Вклад 15 000 руб. положен 27.01 на месячный депозит под 4% годовых, затем продлен еще на четыре последующих месяца. Определите наращенную сумму при различных способах начисления процентов.

1.39. Вклад в размере 50 000 руб. положен в банк на депозит 14.02.2009 под 8% годовых по схеме сложных процентов. Какую сумму вкладчик получит 20.09.2011? В случае схемы простых процентов при той же ставке?

1.40. Определите сумму процентов при различной практике их начисления, если вклад 168 000 руб. был размещен под 12% годовых на срок с 14.03 по 17.11.

1.41. Вклад на 67 000 руб. открыт в банке с 15.04 по 21.08 под 7,5% ($K = 360$). Найдите процентный платеж за данное время.

1.42. Вкладчик открыл в банке вклад на 100 000 руб. на срок с 16.02 по 23.09 и получил доход 4800 руб. Под какой простой (сложный) процент годовых был открыт вклад ($K = 360$)?

1.43. За сколько дней вклад в 1 000 000 руб., открытый в банке под 15% годовых, принесет доход 100 000 руб. ($K = 360$)?

1.44. 16.01 заемщик получил заем 150 000 руб. При этом были вычтены проценты до 20.09 и выплачен остаток в сумме 134 800 руб. Чему равна годовая учетная ставка ($K = 360$)?

1.45. Половина суммы была вложена в банк на срок с 15.02 по 24.06 под 8% годовых, $^1/_3$ этой же суммы вложена на срок с 12.04 по 15.07 под 7% годовых, а остаток вложен на срок с 04.03 по 08.09 под 10% годовых. Какова величина этой суммы, если она принесла доход 1300 руб. ($K = 360$)?

1.46. Кредит взят в банке на срок 100 дней под 18% годовых. Заем с процентами составил 90 250 руб. Какой доход принесет вдвое больший капитал за срок 3 года под такие же годовые проценты?

1.47. Банк выдал заем 12.03, а 14.08 заемщик вернул заем с процентами, что составило 843 000 руб. Определите сумму займа, если он был выдан под 17% годовых ($K = 360$)?

1.48. Банк выдал заем 15 000 руб. 15.06. Заемщик в срок вернул заем с процентами, что составило 16 700 руб. Какого числа был возвращен заем, если он был взят под 23% годовых ($K = 360$)?

1.49. За какой срок вложенные в банк 180 000 руб. под 12% годовых ($K = 360$) принесут доход, равный доходу, полученному от капитала 16 000 руб., внесенного на срок с 10.04 до 18.12 под 10% годовых ($K = 365$)?

1.50. Банк выдал заем 70 000 руб. 31.01. Заемщик вернул заем вместе с процентами, что составило 92 000 руб. Когда был возвращен заем, если он был взят под 20% годовых ($K = 360$)?

1.51. При какой ставке простых (сложных) годовых процентов сумма долга, взятого 13.04, увеличится на 15% к 17.06 при использовании: а) точных процентов, б) обыкновенных процентов ($K = 365$)?

1.52. За какое время вклад в 300 000 руб., открытый в банке под 11% годовых ($K = 360$), дает тот же самый доход, что и капитал 125 000 руб., вложенный в банк с 15.02 по 27.08 под 10% годовых ($K = 365$)?

1.53. Кредит в сумме 110 000 руб. выдан с 25.03 по 6.10 включительно под 16% годовых (обыкновенные проценты). В счет погашения долга 1.07 уплачено 40 000 руб. Какую сумму нужно вернуть 6.10?

Указание: сумму в 40 000 руб. привести к дате 6.10.

1.54. Ссуда в размере 150 000 руб. выдана на 60 дней под 16% точных простых годовых процентов ($K = 366$ дней). Она не была возвращена в срок, а была погашена спустя 15 дней, не считая даты погашения. Какую сумму следует вернуть, если за просроченное время на сумму возврата долга начислялись точные простые проценты по ставке 20% годовых?

1.55. На вклад 8400 руб., открытый в банке на срок 8 месяцев, начислены проценты в сумме 620 руб. Найдите годовую ставку процента для простых и сложных процентов.

1.56. Кредит в сумме 220 000 руб. предоставлен 26.04 под 15% годовых (простые проценты). Когда долг превысит 245 000 руб., если начисляются: а) точные проценты ($K = 365$), б) обыкновенные проценты?

1.57. Кредит в сумме 87 000 руб. предоставлен 12.02 под 12% годовых (сложные проценты). Когда долг превысит 95 000 руб., если начисляются: а) точные проценты ($K = 365$), б) обыкновенные проценты?

1.58. Вклад на 100 000 руб. открыт в банке на 9 месяцев под 10% годовых. Какие проценты получит вкладчик?

1.59. На вклад, открытый в банке на срок 18 месяцев под 15% годовых, начислены проценты в сумме 10 000 руб. Найдите величину вклада.

1.4. Кратное начисление процентов

Если начисление процентов происходит несколько раз в году (m) (ежеквартально, ежемесячно и т.п.), то по истечении t лет наращенная сумма станет равной:

а) в случае простых процентов:

$$S(t, m) = S_0\left(1 + \frac{i}{m}mt\right) = S_0(1 + it), \tag{1.6}$$

т.е. наращенная сумма не зависит от кратности начисления. Этот вывод будет использован нами при рассмотрении непрерывного начисления процентов в случае простых процентов;

б) в случае сложных процентов:

$$S(t, m) = S_0\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt}. \tag{1.7}$$

1.5. Непрерывное начисление процентов

Если частота начисления сложных процентов m неограниченно возрастает, то имеет место **непрерывное начисление процентов**. По истечении t лет наращенная сумма будет равна:

а) в случае простых процентов:

$$S(t,\infty)=\lim_{m\to\infty}S(t,m)=\lim_{m\to\infty}S_0\left(1+\frac{i}{m}mt\right)=S_0(1+it),\tag{1.8}$$

т.е. наращенная сумма остается той же, что и при однократном начислении процентов. Этот вывод был сделан нами и в случае кратного начисления процентов; оба вывода связаны с тем, что при любой кратности начисления процентов начисление производится на исходную сумму пропорционально времени вклада;

б) в случае сложных процентов:

$$\begin{aligned}S(t,\infty)&=\lim_{m\to\infty}S(t,m)=\lim_{m\to\infty}S_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mt}=\\&=\lim_{m\to\infty}S_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\frac{mit}{i}}=S_0e^{it}.\end{aligned}\tag{1.9}$$

Процентную ставку i в (1.9) называют также **силой роста** и обозначают обычно буквой δ. С учетом этого (1.9) можно записать так:

$$S(t)=S_0\cdot e^{\delta t}.\tag{1.10}$$

При одной и той же ставке процента наращение по схеме простых процентов более выгодно для периода наращения менее года. Для периода наращения более года выгоднее наращение по схеме сложных процентов.

Пример 1.4. В банк положен депозит в размере 1000 руб. под 10% годовых по схеме сложных процентов. Найти величину депозита через 3 года при начислении процентов 1, 4, 6, 12 раз в году и в случае непрерывного начисления процентов.

По формуле (1.21) имеем:

$$S_{3/1}=1000(1+0{,}1)^3=1331 \text{ руб.};$$

$$S_{3/4}=1000\left(1+\frac{0{,}1}{4}\right)^{3\cdot4}=1344{,}9 \text{ руб.};$$

$$S_{3/6}=1000\left(1+\frac{0{,}1}{6}\right)^{3\cdot6}=1346{,}5 \text{ руб.};$$

$$S_{3/12}=1000\left(1+\frac{0{,}1}{12}\right)^{3\cdot12}=1348{,}2 \text{ руб.}$$

В случае непрерывного начисления процентов следует использовать формулу (1.10)

$$S_{3/\infty} = 1000e^{0,1\cdot 3} = 1349,6 \text{ руб.}$$

Проценты за 3 года составили (руб.):
— при однократном начислении процентов — 331;
— четырехкратном — 344,9;
— шестикратном — 346,5;
— двенадцатикратном — 348,2;
— непрерывном — 349,6.

Приходим к выводу, что наращенная сумма, как и величина процентных денег, в схеме сложных процентов растет с увеличением кратности начисления и достигает максимума при непрерывном начислении процентов. При этом скорость роста обеих величин убывает с увеличением кратности начисления.

Пример 1.5. На счет в банке кладется сумма в размере 20 000 руб. на 4 года под 11% годовых по схеме простых процентов с дальнейшей пролонгацией на последующие 2 года под 6% годовых по той же схеме. Найти размер вклада через 6 лет. Определить наращенную сумму, если вклад изымается через 4 года и кладется на новый счет на 2 года по той же схеме.

Для случая с пролонгацией размер вклада через 6 лет составит:

$$S_6 = S_0(1 + r_1n_1 + r_2n_2) = 20\,000 \cdot (1 + 0,11 \cdot 4 + 0,06 \cdot 2) = 31\,200 \text{ руб.}$$

Для второго случая посчитаем вначале наращенную сумму к концу 4 года:

$$S_4 = S_0(1 + r_1n_1) = 20\,000 \cdot (1 + 0,11 \cdot 4) = 28\,800 \text{ руб.}$$

Через 2 года эта сумма на новом счету достигнет значения:

$$S_6 = S_4(1 + r_2n_2) = 28\,800 \cdot (1 + 0,06 \cdot 2) = 32\,256 \text{ руб.}$$

Заметим, что во втором случае наращенная сумма за тот же период времени больше.

Пример 1.6. Клиент поместил в банк вклад в сумме 18 000 руб. под 8,5% годовых с ежемесячной выплатой процентов. Какую сумму клиент будет получать каждый месяц?

Решение. Наращенная сумма за каждый месяц составит $S_n = S_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^1 = 18\,000\left(1+\frac{0,085}{12}\right) = 18\,127,50$ руб. Сумма, которую клиент будет получать каждый месяц, равна $I = S_n - S_0 = 18\ 127{,}50 - 18\ 000 = 127{,}50$ руб.

Пример 1.7. Какую сумму нужно положить на депозит под 12% годовых, чтобы через 5 лет получить 500 000 руб.?

Решение.

$$S_0 = \frac{S_n}{(1+i)^n} = \frac{500\ 000}{(1+0{,}12)^5} = \frac{500\ 000}{1{,}7623} = 283\ 713{,}43 \text{ руб.}$$

Пример 1.8. Инвестор намерен положить некоторую сумму под 18% годовых с целью накопления через 2 года 3 млн руб. Определить сумму вклада.

Решение.

$$S_0 = \frac{S_n}{\left(1+i\right)^n} = \frac{3\ 000\ 000}{\left(1+0{,}18\right)^2} = \frac{3\ 000\ 000}{1{,}3924} = 2\ 154\ 553{,}29 \text{ руб.}$$

Пример 1.9. Клиент ростовского филиала «Северный» ЗАО МКБ «Москомприватбанка» положил на годовой депозит 30 800 у.е. под 7,5% годовых. Проценты начисляются ежемесячно (но не капитализируются). Сколько недополучит клиент через год, если в договоре вклада ежемесячная величина процентов указана в сумме 189 у.е.? С чем это может быть связано? Какова при этом эффективная ставка процентов?

Наращенная сумма в конце года должна быть равна (как при простых, так и при сложных процентах):

$$S_n = S_0(1 + i)^1 = 30\ 800(1 + 0{,}075) = 33\ 110 \text{ у.е.}$$

При ежемесячных процентах в сумме 189 у.е., как указано в договоре, наращенная сумма в конце года будет равна

$$S_n = 30\ 800 + 189 \cdot 12 = 30\ 800 + 2268 = 33\ 068 \text{ у.е.}$$

Таким образом, клиент недополучит через год

$$33\ 110 - 33\ 068 = 42 \text{ у.е.}$$

При этом эффективная ставка процентов будет равна

$$i_{\text{эфф}} = \frac{S_1 - S_0}{S_0} = \frac{33\ 068 - 30\ 800}{30\ 800} = \frac{2268}{30\ 800} = 0{,}0736 = 7{,}36\%,$$

т.е. она оказалась на 0,14% ниже объявленной номинальной ставки. Это связано с использованием банком схемы точных процентов с точным числом дней вклада ($K = 365$), а также с округлением полученных сумм в пользу банка.

Итак, расчеты банка таковы.

Проценты за год $I = S_n - S_0 = 30\,800 \cdot 0{,}075 = 2310$ у.е. делятся на точное число дней в году (365) и умножаются на 30, чтобы получить проценты за месяц, поскольку именно они указаны в договоре:

$$I_{\text{мес}} = \frac{2310 \cdot 30}{365} = 189{,}863 \text{ у.е.}$$

Банк отбрасывает 0,863 у.е. в месяц, округляя проценты до целых в свою пользу, в противовес правилам арифметики, что дает банку $0{,}863 \cdot 12 = 10{,}356$ у.е. Дополнительные деньги банк получает, недоначислив клиенту проценты за 5 дней за год ($365 - 30 \cdot 12 = 5$), что составляет $\frac{2310 \cdot 5}{365} = 31{,}643$ у.е. Складывая две последние цифры, получим $10{,}365 + 31{,}643 \approx 42$ у.е., т.е. ту же сумму, что и выше.

Пример 1.10. Условия те же, что и в предыдущей задаче. Сколько получит клиент через год, если проценты ежемесячно перечисляются на другой счет, где на них начисляются 6,75% годовых? Какова при этом эффективная ставка процентов?

Проценты составляют $189 \cdot 12 = 2268$ у.е., а проценты на проценты равны $2268 \cdot 0{,}0675 = 153{,}09$ у.е. Таким образом, суммарные проценты, полученные в этом случае клиентом, составят $2268 + 153{,}09 = 2421{,}09$ у.е., а эффективная ставка процентов равна $\frac{2421{,}09}{30\,800} \cdot 100\% = 7{,}86\%$.

Вопросы и задачи

1.60. Выведите формулу для наращенной суммы при непрерывном начислении процентов в случае простых процентов.

1.61. На годовом депозите можно получить 12% годовых, а на полугодовом – 11,5% годовых. Что выгоднее — положить средства на годовой депозит или на полугодовой депозит с пролонгацией на тех же условиях? Чему будут равны проценты в обоих случаях при сумме депозита 25 000 руб.?

1.62. В банк положена сумма 40 000 у.е. сроком на 2 года по ставке 10% годовых. Найдите наращенную сумму, величину полученного процента и эффективную процентную ставку для вариантов начисления процентов: а) ежеквартального, б) ежемесячного.

1.63. За какой период первоначальный капитал в размере 40 000 руб. вырастет до 75 000 руб. при простой (сложной) ставке 15% годовых?

1.64. В банк положена сумма 150 000 руб. сроком на 6 лет по ставке 14% годовых. Найдите наращенную сумму, величину полученного процента и эффективную процентную ставку для следующих вариантов начисления процентов: а) полугодового, б) ежеквартального, в) ежемесячного, г) непрерывного при силе роста 14%.

1.65. На сумму долга в течение 8 лет начисляются проценты по ставке 11% годовых. Насколько возрастет наращенная сумма, если проценты будут капитализироваться ежемесячно? ежеквартально? непрерывно?

1.66. В банк положен депозит в размере 2000 руб. на 3 года под 16% годовых по схеме простых процентов. Определите наращенную сумму через 6 лет для двух случаев: а) депозит пролонгирован на 3 года по ставке 10% годовых, б) депозит закрывается через 3 года и вклад кладется на 3 года под 10% годовых.

1.67. На какой срок необходимо положить в банк 12 000 руб., чтобы накопить 15 000 руб., если банк принимает вклады под простые (сложные) 8% годовых?

1.68. Предприятие получило кредит на год в размере 5 000 000 руб. с условием возврата 6 000 000 руб. Рассчитайте процентную и учетную ставку.

1.69. Банк принимает вклады от населения под простые и сложные проценты на 3 месяца под 2% годовых, на 6 месяцев — под 3,5% годовых, на 12 месяцев — под 5% годовых. Сравните доходность различных вкладов.

1.70. Банк принимает депозиты на сумму 500 000 руб. на условиях: а) под 10% годовых с ежеквартальным начислением процентов, б) под 11% годовых с полугодовым начислением процентов, в) под 11,5% годовых (во всех трех случаях проценты капитализируются). Выберите оптимальную схему вложения денежных средств.

1.71. Банк предоставил ссуду в размере 170 000 руб. на 7,5 лет под 25% годовых при полугодовом начислении процентов. Определите возвращаемую сумму при начислении простых (сложных) процентов.

1.72. Инвестор намерен положить некоторую сумму под 18% годовых с целью накопить через 2 года 3 млн руб. Определите сумму вклада.

1.73. За какой срок сумма 100 000 руб. достигнет 125 000 руб. при начислении по сложной процентной ставке 7,5% годовых? Рассмотрите случаи ежемесячного и ежеквартального начисления процентов.

1.74. В банк положена сумма 70 000 руб. сроком на 4 года по ставке 10% годовых. Найдите наращенную сумму, величину полученного процента и эффективную процентную ставку для следующих вариантов начисления процентов: а) полугодового, б) ежеквартального, в) ежемесячного, г) непрерывного при силе роста 10%.

1.75. Компания получила кредит на 3 года в размере 234 000 руб. с условием возврата 456 000 руб. Определите процентную ставку для случаев простого и сложного процента.

1.76. Предприятие получило кредит на 2 года в размере 11 млн руб. с условием возврата 12,5 млн руб. Рассчитайте процентную и учетную ставку.

1.77. Банк предлагает долгосрочные кредиты под 20% годовых с ежеквартальным начислением процентов, 22% годовых с полугодовым начислением процентов и 18% годовых с ежемесячным начислением процентов. Определите наиболее выгодный для банка (для заемщика) вариант кредитования.

1.78. Клиент поместил в банк вклад в сумме 7000 у.е. под 8% годовых с ежеквартальной выплатой процентов. Какую сумму клиент будет получать каждые 3 месяца?

1.79. Акция куплена за 75 000 руб., через 1,5 года ее цена составит 83 500 руб., проценты начисляются один раз в квартал. Определите доходность акции в виде номинальной ставки и годовой ставки сложных (простых) процентов.

1.80. Банк предлагает 13% годовых. Чему должен быть равен первоначальный вклад, чтобы через 3 года он стал равен 36 073 у.е.?

1.81. Вклад на 100 000 руб. открыт в банке на 5 лет под 12% годовых. Найдите величину процентного платежа.

1.82. Заемщик занял в банке деньги под 23% годовых. За три года он заплатил 10 000 руб. процентного платежа. Какой капитал взял заемщик в банке?

1.83. На срочный сберегательный счет в банке кладется сумма в размере 15 000 руб. на 3 года под 8% годовых по схеме простых процентов с дальнейшей пролонгацией на последующие 4 года под 5% годовых по той же схеме. Найдите размер вклада через 7 лет. Определите наращенную сумму, если вклад изымается через 3 года и кладется на новый счет на 4 года по той же схеме.

1.84. Вклад открыт под 14% годовых. На него начислен процентный платеж в сумме 1500 руб. Найдите величину вклада, если он был открыт: а) на 10 лет, б) 1 год, в) 6 месяцев, г) 10 дней.

1.85. По вкладу 7000 руб., открытому в банке на 7 лет, выплачены проценты в сумме 5000 руб. Найдите годовую ставку процента для простых и сложных процентов.

1.86. Банк предлагает 12% годовых. Каков должен быть первоначальный вклад, чтобы через 4 года он стал равен 30 000 руб.?

1.87. Инвестор намерен положить некоторую сумму под 14% годовых с целью накопить через 3 года 1 500 000 руб. Определите сумму вклада.

1.88. На исходную сумму в 125 000 у.е. в течение 5 лет начисляются каждые полгода сложные проценты по номинальной ставке 7%. На сколько изменится наращенная сумма, если номинальная ставка и число периодов капитализации процентов возрастут вдвое? втрое?

1.89. Ставка по депозиту равна 7,5% годовых. Какова ставка годовых процентов на месячные депозиты, если полугодовое последовательное переоформление этих депозитов приводит к такому же результату, что и использование полугодового депозита (при пренебрежении шестью днями, которые теряются при переоформлении депозитов) ($K = 360$)?

1.90. На исходную сумму в течение n лет начисляются сложные проценты по годовой ставке 8,5%. На сколько процентов возрастет исходная сумма при переходе к ежедневной капитализации процентов ($K = 365$) для: а) $n = 5$, б) $n = 7$?

1.91. Выведите формулу для наращенной суммы при непрерывном начислении процентов в случае сложных процентов.

1.92. Вклад на 80 000 руб., открытый в банке на 2 года, принес вкладчику проценты в сумме 14 000 руб. Под какой простой (сложный) процент годовых был открыт вклад?

1.93. Сравните наращение по простой и сложной ставкам процента.

1.94. На вклад, открытый в банке на срок 3 года под 12% годовых, начислены проценты в сумме 25 000 руб. Найдите величину вклада.

1.95. Дайте определение мультиплицирующих и дисконтирующих множителей.

1.96. После вычета процентов за 3 года заемщик получил 2 500 000 руб. Вычислите сумму долга и сумму выплаченных процентов, если процент годовых равен 18%.

1.97. На исходную сумму в течение 10 лет начисляются сложные годовые проценты по ставке 10%. Во сколько раз вырастет наращенная сумма, если проценты будут начисляться ежемесячно?

1.98. Один из двух вкладов, в сумме составляющих 45 000 руб., вложен в банк под 7% годовых, а второй — под 12% годовых. Сумма годового дохода от обоих капиталов равна 4300 руб. Определите величину каждого вклада.

1.99. Вклад 43 000 руб. открыт в банке. В конце второго года со счета снято 15 000 руб. Остаток в конце третьего года составлял 32 000 руб. Определите процентную ставку: а) при годовом начислении процентов, б) ежеквартальном, в) ежемесячном (проценты капитализируются).

1.100. Два взноса, один из которых на 12 000 руб. больше другого, вырастут за 10 лет до 200 000 руб. при процентной ставе 8%. Чему равны эти два взноса, если капитализация процентов ежемесячная?

1.101. На счет в банке 5 лет назад было помещено 10 000 руб., а 2 года назад — 20 000 руб. Сколько нужно поместить на счет сегодня, чтобы через 6 лет на счету стало 100 000 руб.? Процентная ставка равна 12%, капитализация — ежеквартальная.

1.102. На сумму долга в течение 5 лет начисляются сложные проценты по ставке 6% годовых. Сколько раз в году нужно начислять проценты по той же ставке, чтобы за 5 лет наращенная сумма выросла бы не менее чем на 1%?

1.103. На счет в банке 7 лет назад было помещено 17 000 руб., сегодня еще 25 000 руб. Какую сумму получит вкладчик через 6 лет (считая от сегодняшнего дня), если процентная ставка до сегодняшнего дня равнялась 10% при полугодовой капитализации, а с сегодняшнего дня — 6% при ежеквартальной капитализации?

1.104. На счет в банке помещено 55 000 руб., через 2 года на счет помещено еще 60 000 руб. В конце четвертого года на счету имеется 143 000 руб. Определите квартальную декурсивную (начисляемую в конце периода начисления) процентную ставку.

1.105. Один вклад больше другого на 1700 руб. Больший вклад вложен в банк на 6 месяцев под 7% годовых, а меньший — на 8 месяцев под 5% годовых Доход от большего вклада в 1,5 раза выше дохода от меньшего капитала. Найдите величину каждого вклада и величину дохода по каждому вкладу.

1.106. Вклад 15 000 руб. помещен в банк под 10% годовых, через полгода вложено еще 20 000 руб. под 8% годовых. Через сколько месяцев второй вклад будет на 117 001 руб. меньше первого?

1.107. Ссуда 2000 у.е. выдана на 8 лет под 6,25% годовых. В счет погашения долга в конце третьего года внесено 1500 у.е., которые пошли на уплату процентов, накопленных к этому сроку, а остальная сумма — на погашение основного долга. Какую сумму следует уплатить в конце восьмого года, чтобы полностью погасить задолженность?

1.108. Вклад 300 000 руб. помещен в банк под 11% годовых одновременно со вкладом 250 000 руб. под 13% годовых. Через сколько лет наращенные суммы обоих вкладов станут одинаковыми?

1.109. Вклад 100 000 руб. помещен в банк под 13% годовых в тот же день, что и вклад 190 000 руб. под некоторую процентную ставку. Найдите годовую процентную ставку для второго вклада, если: а) через 5 лет наращенные суммы обоих вкладов станут одинаковыми, б) через 7 лет наращенная сумма первого вклада будет на 30% больше наращенной суммы второго вклада.

1.110. Кредит выдан на 7 лет под 5,5% годовых. Какую номинальную годовую ставку процентов необходимо назначить, чтобы к концу седьмого года получить ту же наращенную сумму при ежеквартальном начислении процентов?

1.111. В банк одновременно помещены 50 000 руб. под 9% годовых и 40 000 руб. под 16% годовых. Через сколько лет оба дохода будут одинаковыми?

1.112. На срочный сберегательный счет в банке кладется сумма в размере 30 000 руб. на 3 года под 12% годовых по схеме простых процентов с дальнейшей пролонгацией на последующие 2 года под 10% годовых по той же схеме. Найдите размер вклада через 5 лет. Определите наращенную сумму, если вклад изымается через 3 года и кладется на новый счет на 2 года по той же схеме.

1.113. Вклад в банк под 10% годовых за несколько лет увеличился на 132 000 руб. Тот же вклад, вложенный на срок на 3 года меньше чем под 12% годовых, принес бы 40 000 руб. дохода. Определите величину вклада и срок, за который насчитывался доход.

1.114. Ставка по годовому депозиту равна 10% годовых (сложные проценты). Какой должна быть годовая процентная ставка для полугодового депозита, чтобы пролонгация полугодового депозита при той же ставке привела бы к той же наращенной сумме, что и при использовании годового депозита ($K = 360$)?

Указание: пренебречь одним днем, который теряется при переоформлении полугодового депозита.

1.115. Ставка по годовому депозиту равна 15% годовых (простые проценты). Какой должна быть годовая процентная ставка для полугодового депозита, чтобы пролонгация полугодового депозита при той же ставке привела бы к той же наращенной сумме, что и при использовании годового депозита ($K = 360$)?

Указание: пренебречь одним днем, который теряется при переоформлении полугодового депозита.

1.116. Чему равна годовая ставка сложных процентов, эквивалентная ставке непрерывных процентов?

1.117. Ставка по годовому депозиту равна 12% годовых (простые проценты). Какой должна быть годовая процентная ставка для полугодового депозита, чтобы закрытие и открытие вновь полугодового депозита при той же ставке привело бы к той же наращенной сумме, что и при использовании годового депозита ($K = 360$)?

Указание: пренебречь одним днем, который теряется при переоформлении полугодового депозита.

1.118. Ставка по годовому депозиту равна 17% годовых (сложные проценты). Какой должна быть годовая процентная ставка для трехмесячного депозита, чтобы его четырехкратная пролонгация депозита при той же ставке привела бы к той же наращенной сумме, что и при использовании годового депозита ($K = 360$)?

Указание: пренебречь одним днем, который теряется при переоформлении полугодового депозита.

1.119. Покажите, что при одной и той же ставке i более выгодным является наращение по схеме сложных процентов, если длина периода наращения превышает один год. Если же длина периода наращения менее года, то более выгодно наращение по схеме простых процентов.

1.120. Годовая процентная ставка для полугодового депозита равна 7% годовых (сложные проценты). Какой должна быть процентная ставка для годового депозита, чтобы пролонгация полугодового депозита при той же ставке привела бы к той же наращенной сумме, что и при использовании годового депозита ($K = 360$)?

Указание: пренебречь одним днем, который теряется при переоформлении полугодового депозита.

1.121. Годовая процентная ставка для трехмесячного депозита равна 4% годовых (сложные проценты). Какой должна быть процентная ставка для годового депозита, чтобы четырехкратная пролонгация трехмесячного депозита при той же ставке привела бы к той же наращенной сумме, что и при использовании годового депозита ($K = 360$)?

Указание: пренебречь одним днем, который теряется при переоформлении полугодового депозита.

1.122. Банк предлагает 12% годовых. Чему должен быть равен первоначальный вклад, чтобы через 5 лет он стал равен 115 000 руб.?

1.123. Покажите, что более выгодным для банка является дисконтирование по сложной учетной ставке, если срок учета составляет менее одного года. Если же срок учета превышает один год, то более выгодно дисконтирование по простой учетной ставке.

1.124. Докажите, что эффективная процентная ставка в схеме сложных процентов растет с увеличением кратности начисления и достигает максимума при непрерывном начислении процентов.

1.125. Вклад помещен на 3 года под 11% годовых. На сколько процентов возрастет наращенная сумма вклада при переходе к капитализации процентов: а) ежеквартальной, б) ежемесячной, в) ежедневной ($K = 365$)?

1.126. Вклад 50 000 руб. помещен на 4 года под 13% годовых. На сколько увеличится наращенная сумма, если номинальная ставка и число периодов капитализации процентов возрастут вдвое? втрое?

1.127. Докажите, что скорость роста эффективной процентной ставки в схеме сложных процентов убывает с увеличением кратности начисления и обращается в ноль при непрерывном начислении процентов.

1.6. Дисконтирование и удержание процентов

Дисконтирование и удержание процентов в определенном смысле являются обратными по отношению к начислению процентов. Различают *математическое дисконтирование* и *банковский учет*.

Математическое дисконтирование позволяет узнать, какую исходную сумму S_0 нужно вложить, чтобы получить по истечении t лет сумму S_t при начислении на S_0 процентов по ставке i.

В случае простых процентов:

$$S_0 = S_t/(1 + ti). \tag{1.11}$$

В случае сложных процентов:

$$S_0 = S_t/(1 + i)^t. \tag{1.12}$$

В случае непрерывного начисления процентов:

$$S_0 = S_t/\exp(\delta t). \tag{1.13}$$

Величина S_0 называется **приведенным значением** величины S_t. Величины i и δ, которые ранее именовались процентными ставками, теперь означают **ставки дисконтирования**.

Банковский учет — это покупка банком денежных обязательств по цене меньше номинальной указанной в них суммы. Примером денежных обязательств может служить **вексель** — долговая расписка, содержащая обязательство выплатить определенную денежную сумму (номинал) в определенный срок.

В случае покупки банком векселя говорят, что последний **учитывается**, а клиенту выплачивается сумма

$$S_n = S_0 - I_n\,, \tag{1.14}$$

где S_0 — номинальная сумма векселя; S_n — цена покупки векселя банком за n лет до погашения; I_n — дисконт, или доход банка (процентные деньги).

$$I_1 = S_0 d, \tag{1.15}$$

где d — учетная ставка (как правило, через d будем далее обозначать и ставку дисконтирования).

Учетная ставка может быть как простой, так и сложной в зависимости от того, какая схема используется — простых или сложных процентов.

В случае простых процентов последовательность сумм, оставшихся после дисконта $\{S_n\}$, образует убывающую арифметическую прогрессию с общим членом $S_n = S_0(1 - nd)$, равным сумме, которую получит клиент за n лет до погашения.

В случае сложных процентов последовательность сумм, оставшихся после дисконта $\{S_n\}$, образует убывающую геометрическую прогрессию с общим членом $S_n = S_0(1 - d)^n$, равным сумме, которую получит клиент за n лет до погашения.

Для банка ситуация с дисконтированием является инверсной по отношению к наращению. Так, при сроке учета менее одного года банку выгоднее проводить дисконтирование по сложной учетной ставке, а при сроке учета более одного года — по простой учетной.

Пример 1.11. Вексель стоимостью 100 000 руб. учитывается за 4 года до погашения по сложной учетной ставке 15% годовых. Найти сумму, получаемую векселедержателем, и величину дисконта.

Сумма, получаемая векселедержателем, равна

$$S_4 = S_0(1 - d)^4 = 100\,000(1 - d)^4 = 52\,200{,}6 \text{ руб.}$$

Величина дисконта равна

$$I_4 = S_0 - S_4 = 100\,000 - 52\,200{,}6 = 47\,799{,}3 \text{ руб.}$$

Пример 1.12. Клиент имеет вексель на 16 000 у.е., который он хочет учесть 10.01.2009 в банке по сложной учетной ставке 8%. Какую сумму он получит, если срок погашения 10.07.2009?

Продолжительность финансовой операции составит $n = \dfrac{t}{T} = \dfrac{30 \cdot 6}{365} =$ $= 0{,}49$. Сумма, полученная клиентом, — $S_{049} = 16\,000(1 - 0{,}08)^{0{,}49} =$ $= 15\,359{,}46$ у.е.

Пример 1.13. Предприятие получило кредит на один год в размере 7 млн руб. с условием возврата 7,77 млн руб. Надо рассчитать процентную и учетную ставку.

Годовая процентная ставка $r = S(1)/S(0) - 1 = 7{,}77/7 - 1 = 0{,}11$, или 11%.

Годовая учетная ставка $d = 1 - S(0)/S(1) = 1 - 7/7{,}77 = 0{,}099$, или 9,9%.

Пример 1.14. Банк учитывает вексель по номинальной учетной ставке 10% с ежемесячным начислением процентов. Найти сложную учетную ставку, при которой доход банка не изменился.

Эффективная учетная ставка $d_{эфф} = 1 - (1 - 0{,}1/12)^{12} = 0{,}0955$, или 9,55%.

Вопросы и задачи

1.128. Вексель стоимостью 550 000 руб. учитывается за 3 года до погашения по сложной учетной ставке 12% годовых. Найдите сумму, которую получит векселедержатель, и величину дисконта.

1.129. Вексель на сумму 60 000 руб. учтен по процентной ставке 14% годовых (сложные проценты), срок платежа наступает через 0,6 года. Определите сумму, полученную владельцем векселя при учете, и дисконт при ежеквартальном и ежемесячном дисконтировании.

1.130. Клиент имеет вексель на 20 000 руб., который он хочет учесть 24.04.2011 в банке по сложной учетной ставке 10%. Какую сумму он получит, если срок погашения 12.09.2011?

1.131. Дайте определение математического дисконтирования и банковского учета.

1.132. Банк учитывает вексель по номинальной учетной ставке 12% с ежемесячным начислением процентов. Найдите сложную учетную ставку, при которой доход банка не изменился.

1.133. Номинальная учетная ставка равна 10%. При этом проценты начисляются ежеквартально. Найдите эффективную учетную ставку.

1.134. Вексель в сумме 1200 у.е. должен быть оплачен через 160 дней. Учетная ставка с равной вероятностью лежит в пределах 6—7% годовых. Какую сумму P в среднем получит владелец векселя, если учтет его в банке через 15 дней? Какова вероятность, что полученная сумма P будет находиться в пределах 1168—1170 у.е.? Чему будет равен риск σ данной финансовой операции ($K = 360$)?

1.135. Банк учитывает вексель по номинальной учетной ставке 14% с ежеквартальным начислением процентов. Найдите сложную учетную ставку, при которой доход банка не изменится.

1.136. Клиент имеет вексель на 100 000 руб., который он хочет учесть 15.04 в банке по сложной учетной ставке 10%. Какую сумму он получит, если срок погашения 15.08?

1.137. Покажите, что более выгодным для банка является дисконтирование по сложной учетной ставке, если срок учета менее одного года. Если же срок учета превышает один год, то более выгодно дисконтирование по простой учетной ставке.

1.138. Вексель был куплен за 500 у.е. Через 3 месяца он был продан за 550 у.е. Какова доходность этой операции купли-продажи, измеренная в виде годовой ставки простых процентов ($K = 360$)?

1.139. Что выгоднее: положить 1000 у.е. в банк на год под 8% годовых или купить за 1000 у.е. вексель номиналом в 1100 у.е. и погашением через год? Чему равна доходность покупки векселя, измеренная в виде годовой ставки процентов?

1.140. Вексель куплен за 200 дней до его погашения. На момент покупки рыночная учетная ставка составляла 7% годовых. Через 50 дней вексель был продан по учетной ставке 6% годовых. Оцените эффективность данной финансовой операции в виде годовых ставок простых и сложных процентов.

1.141. Что предпочтительнее для инвестора: инвестировать 1000 у.е. в покупку векселя (сумма векселя — 1150 у.е., срок до погашения — 2 года) или купить за ту же сумму облигацию по курсу 95, с полугодовой выплатой процентов по купонной ставке 10% и погашением по номиналу через 2 года?

1.142. Сертификат номиналом в 2000 у.е. с объявленной ставкой в 7 простых годовых процентов и сроком обращения в 100 дней куплен за 2100 у.е. за 40 дней до погашения. Сертификат погашается по номиналу вместе с начисленными процентами. Планируется продать его через 15 дней. Прогнозируется, что в момент продажи рыночная ставка простых процентов может принять значение 6,5% с вероятностью 0,4; 7,5% — с вероятностью 0,45 и 8% — с вероятностью 0,15. Оцените числовые характеристики, характеризующие эффективность операции купли-продажи финансового инструмента: минимальное и максимальное значение, среднее ожидаемое значение, дисперсию.

1.143. Сертификат куплен за 10 000 руб. и продан за 11 200 руб. через 100 дней. Какова доходность этой финансовой операции, измеренная в виде годовых ставок простых и сложных процентов?

1.144. Сертификат куплен за 90 дней до его погашения и продан через 45 дней. В момент покупки ставка простых процентов была 7%, а в момент продажи — 7,5% годовых. Оцените доходность этой финансовой операции в виде годовых ставок простых и сложных процентов.

1.145. Сертификат номинала 100 000 руб. с объявленной доходностью 10 простых годовых процентов и сроком обращения 365 дней куплен за 105 000 руб. за 100 дней до его погашения. Рыночная ставка простых процентов на момент покупки составила 9%. Какова доходность инвестирования средств в сертификат до конца срока его обращения в виде годовых ставок простых и сложных процентов?

1.7. Конверсия платежей

Эквивалентными называется такие платежи, которые, будучи «приведенными» к некоторой *базисной дате* по ставке процентов, удовлетворяющей обе стороны, оказываются равными. Исходя из этого принципа получают *уравнение эквивалентности,* в котором сумма заменяемых платежей, приведенных к базисной дате, равна сумме платежей по новому обязательству, приведенных к той же дате [1].

Наиболее простой вид принимает уравнение эквивалентности при *консолидации* платежей, когда платежи S_1, S_2, ..., S_m со сроками оплаты соответственно n_1, n_2, ..., n_m заменяются одним в сумме S_0 и сроком оплаты n_0. Здесь возможны две постановки задачи: если задается срок n_0, то находится сумма S_0, и наоборот. При заданном n_0, если консолидация производится по ставке простых процентов i, размер консолидированного платежа равен

$$S_0 = \sum_j S_j\left(1+t_j i\right) + \sum_k \frac{S_k}{\left(1+t_k i\right)}, \tag{1.16}$$

где S_j — платежи со сроками оплаты $n_j < n_0$; $t_j = n_0 - n_j$,; S_k — платежи со сроками оплаты $n_k > n_0$; $t_k = n_k - n_0$.

Если консолидация производится по ставке сложных процентов i, размер консолидированного платежа

$$S_0 = \sum_j S_j\left(1+i\right)^{t_j} + \sum_k \frac{S_k}{\left(1+i\right)^{t_k}}. \tag{1.17}$$

Если требуется определить время n_0 оплаты консолидированного платежа S_0, составляем уравнение эквивалентности, выбрав в качестве базисной даты начало отсчета. Разрешив уравнение эквивалентности относительно n_0 для ставки простых процентов i (ставки «приведения»), получаем:

$$n_0 = \frac{1}{i}\left(\frac{S_0}{P} - 1\right);\ P = \sum_k \frac{S_k}{\left(1 + t_k i\right)}. \qquad (1.18)$$

Формула (1.18) имеет смысл, если размер консолидированного платежа не будет меньше «барьерного» значения P, т.е. для $S_0 > P$. Таким же образом определяют время оплаты.

Для ставки сложных процентов i (ставки «приведения») получаем:

$$n_0 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{P}\right)}{\ln(1+i)};\ P = \sum_k \frac{S_k}{(1+i)^{t_k}}. \qquad (1.19)$$

Пример 1.15. Два платежа: 15 000 и 24 000 руб., произведенные в начале второго периода и в конце четвертого, соответственно заменить одним платежом в начале шестого периода. Годовая ставка сложных процентов равна 12%.

Пример 1.16. Один платеж 43 000 руб. в начале третьего периода заменить тремя равными платежами, произведенными в начале первого и в конце четвертого и седьмого периодов соответственно. Годовая ставка простых процентов равна 17%.

Пример 1.17. Два платежа: 13 000 и 35 000 руб., произведенные в начале четвертого периода и в конце пятого, соответственно заменить двумя платежами в конце шестого и восьмого периодов. При этом первый платеж на 20% больше второго. Годовая ставка сложных процентов равна 9%.

Пример 1.18. Три платежа: 13 000, 25 000 и 35 000 руб., произведенные в начале третьего, начале четвертого периодов и в конце пятого, соответственно заменить двумя платежами в конце шестого и седьмого периодов. При этом первый платеж в 3 раза больше второго. Годовая ставка сложных процентов равна 11%.

Пример 1.19. Три платежа: 15 000, 26 000 и 45 000 руб., произведенные в начале третьего, начале четвертого периодов и в конце пятого, соответственно заменить платежом 90 000 руб. Годовая ставка сложных процентов равна 15%.

Требуется определить время n_0 платежа в 90 000 руб. Приведем все три платежа к начальному моменту времени и сложим их.

$$P = \frac{15\,000}{\left(1+0{,}15\right)^2} + \frac{26\,000}{\left(1+0{,}15\right)^3} + \frac{45\,000}{\left(1+0{,}15\right)^5} =$$
$$= 11\,342{,}155 + 17\,095{,}422 + 22\,372{,}953 = 50\,810{,}530 \text{ руб.}$$

Тогда по формуле $n_0 = \dfrac{\ln\left(\dfrac{S_0}{P}\right)}{\ln\left(1+i\right)}$, где $P = \sum_k \dfrac{S_k}{(1+i)^{t_k}}$, найдем n_0:

$$n_0 = \frac{\ln\left(\dfrac{90\ 000}{50\ 810{,}530}\right)}{\ln(1+0{,}15)} = \frac{0{,}5717}{0{,}1398} = 4{,}09 \approx 4 \text{ года.}$$

Проверка показывает правильность вычислений (с учетом приближений):

$$P = \frac{90\ 000}{(1+0{,}15)^{4{,}09}} = 50\ 814{,}580 \text{ руб.}$$

Пример 1.20. Три платежа: 20 000, 40 000 и 70 000 руб., произведенные в начале второго, начале пятого периодов и в конце шестого, соответственно заменить платежом 120 000 руб. Годовая ставка простых процентов равна 10%. Требуется определить время n_0 платежа в 120 000 руб.

Приведем все три платежа к начальному моменту времени и сложим их:

$$P = \frac{20\ 000}{(1+0{,}1)} + \frac{40\ 000}{(1+4\cdot 0{,}1)} + \frac{70\ 000}{(1+6\cdot 0{,}1)} =$$
$$= 18\ 181{,}818 + 28\ 571{,}429 + 43\ 750 = 90\ 503{,}247 \text{ руб.}$$

Тогда по формуле $n_0 = \dfrac{1}{i}\left(\dfrac{S_0}{P} - 1\right)$, где $P = \sum_k \dfrac{S_k}{\left(1+t_k i\right)}$, найдем n_0:

$$n_0 = \frac{1}{i}\left(\frac{S_0}{P} - 1\right) = \frac{1}{0{,}1}\left(\frac{120\ 000}{90\ 503{,}247} - 1\right) = 3{,}26 \text{ года.}$$

Проверка показывает правильность вычислений (с учетом приближений)

$$P = \frac{120\ 000}{\left(1+3{,}26\cdot 0{,}1\right)} = 90\ 497{,}738 \text{ руб.}$$

Вопросы и задачи

1.146. Заемщик через 3 года должен заплатить в банк 20 000 руб., а через 5 лет — 15 000 руб. Вместо этого он заплатил только один раз через 6 лет. Какую сумму заплатил заемщик, если годовая процентная ставка равна 12%?

1.147. Два платежа: 17 000 и 19 000 руб., произведенные в конце четвертого и шестого периодов соответственно, замените одним платежом в начале девятого периода. Годовая ставка простых процентов равна 15%.

1.148. Четыре платежа: 10 000, 12 000, 14 000 и 12 000 у.е. со сроками оплаты соответственно 5.03, 10.04, 12.06 и 15.08 (год не високосный) решено заменить одним платежом, выплачиваемым 1.07. При такой замене предполагается использовать годовую ставку простых процентов — 8%. В качестве базовой даты может быть выбрана любая из дат оплаты платежей. Какую базовую дату следует выбрать, чтобы консолидированный платеж был: а) минимальным, б) максимальным? Определите величину консолидированного платежа для каждого из вариантов.

1.149. Четыре платежа из условий предыдущей задачи решено консолидировать в один платеж S, выплачиваемый 10.02. При консолидации используется ставка простых процентов — 10%. Базовая дата — 10.02; временная база $K = 365$ дней. Какова величина S?

1.150. По условиям предыдущей задачи консолидация платежей производится на основе банковской учетной ставки 12% годовых ($K = 365$ дней). Какова величина S?

1.151. При сохранении условий задачи 1.148 четыре платежа решено погасить одним платежом в сумме 45 тыс. у.е. Консолидация производится на основе годовой ставки в 11 простых процентов. Определите дату уплаты консолидированного платежа.

1.152. Один платеж 85 000 руб. в начале первого периода замените тремя равными платежами, произведенными в начале первого и в конце четвертого и седьмого периодов соответственно. Годовая ставка простых процентов равна 15%.

1.153. Ссуда в размере 100 000 у.е. выдана на 100 дней под 9% точных, простых годовых процентов ($K = 366$ дней). Однако она не была возвращена в намеченный срок, а была погашена спустя 20 дней, не считая даты погашения. Какую сумму следует вернуть, если за просроченное время на сумму возврата долга начислялись точные, простые проценты по ставке 12% годовых?

1.154. Два платежа: 67 000 и 52 000 руб., произведенные в начале второго периода и в конце третьего соответственно, замените двумя платежами в конце пятого и десятого периодов. При этом первый платеж на 40% меньше второго. Годовая ставка сложных процентов равна 11%.

1.155. Имеются три векселя с датами погашения, указанными в скобках, на сумму 11 тыс. (1.03), 8 тыс. (15.04) и 10 тыс. у.е. (17.07).

Решено учесть их в банке 1.02. Банк учитывает векселя по ставке 8% годовых со сроками погашения от 250 до 360 дней, по ставке 7,5% со сроками погашения от 130 до 249 дней и по ставке 6,5% годовых для векселей со сроками погашения от 30 до 129 дней. Какую сумму получит владелец векселей, если учтет их одновременно в банке ($K = 360$)?

1.156. Два платежа: 32 000 и 43 000 руб., произведенные в начале четвертого периода и в конце пятого соответственно, замените двумя платежами в конце седьмого и восьмого периодов. При этом первый платеж на 17% меньше второго. Годовая ставка простых процентов равна 14%.

1.157. Три векселя (условия их погашения приведены в задаче (1.155)) решено заменить одним векселем в сумме 23 000 у.е. на основе банковской учетной ставки 8% годовых ($K = 360$). Укажите дату погашения этого векселя.

1.158. Три векселя (условия их погашения приведены в задаче (1.155)) решено заменить одним векселем, в котором необходимо указать целое число тысяч долларов. Замена производится на основе банковской учетной ставки 8% годовых ($K = 360$). Каково минимально допустимое значение этой суммы, при которой возможна подобная замена? Укажите дату погашения векселя с найденным значением минимально допустимой суммы.

1.159. Платежи в сумме 9000, 10 000 и 25 000 у.е. со сроками оплаты соответственно через 2, 3 и 4 года решили заменить одним платежом в сумме S, выплачиваемым через 5 лет. Подобная замена производится по сложной ставке 9% годовых. Чему равна сумма S? Зависит ли сумма S от выбора базовой даты?

1.160. Платежи из предыдущей задачи решили заменить одним платежом в размере 42 тыс. у.е. на основе сложной ставки 9% годовых. Через сколько лет должен быть оплачен этот консолидированный платеж?

1.161. Три платежа: 15 000, 25 000 и 45 000 руб., произведенные в начале второго, начале третьего и в конце пятого периодов соответственно, замените двумя платежами в конце седьмого и девятого периодов. При этом первый платеж в 5 раз меньше второго. Годовая ставка сложных процентов равна 19%.

1.162. Имеется обязательство оплатить 1.03 $S_1 = 7000$ у.е., 15.06 $S_2 = 14\,000$ у.е. и 15.12 $S_3 = 8000$ у.е. Решено на основе простой ставки процентов 8% годовых ($K = 365$) изменить порядок оплаты: 40% от $S_1 + S_2 + S_3$ выплачивается 31.07, а остальная задолженность R гасится

30.12. Определите величину R для случая, когда: а) в качестве базовой даты берется 31.07, б) базовая дата — 30.12.

1.163. Необходимо оплатить 100 000 у.е. через 6 лет. На основе сложной ставки 10% годовых решено изменить порядок оплат: задолженность погашается тремя равными частями S через год, три и пять лет. Чему равно S?

1.8. Эффективная учетная ставка

Пусть $d_{эфф}$ — годовая (эффективная) учетная ставка (ставка дисконтирования) при кратности начисления m. Эквивалентная эффективная учетная ставка определяется исходя из принципа эквивалентности:

$$S_0\left(1-d_{эфф}\right)^n = S_0\left(1-\frac{d}{m}\right)^{n\cdot m}, \tag{1.20}$$

откуда

$$1-d_{эфф} = \left(1-\frac{d}{m}\right)^{m}, \tag{1.21}$$

или

$$d_{эфф} = 1-\left(1-\frac{d}{m}\right)^{m}. \tag{1.22}$$

Обратно учетная ставка d выражается через эффективную учетную ставку $d_{эфф}$ следующим образом:

$$d = m\left(1-\sqrt[m]{1-d_{эфф}}\right). \tag{1.23}$$

Учетная ставка d и ставка процентов i приводят за промежуток времени t к одинаковому результату, если

$$S_0(1+it) = S_t \text{ и } S_0 = S_t(1-dt), \tag{1.24}$$

т.е.

$$(1+it)(1-dt) = 1. \tag{1.25}$$

Последнее равенство можно преобразовать следующим образом:

$$i = \frac{d}{1-td}\,;\ d = \frac{i}{1+ti}\,. \tag{1.26}$$

Можно записать также соотношения между номинальными ставками наращения и дисконтирования

$$\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}=\left(1-\frac{d}{p}\right)^{-p}, \tag{1.27}$$

поскольку обе части уравнения равны 1 + *i*.

При $m = p$ имеем

$$\left(1+\frac{i}{m}\right)=\left(1-\frac{d}{m}\right)^{-1}, \tag{1.28}$$

откуда

$$\frac{i}{m}-\frac{d}{m}=\frac{i}{m}\cdot\frac{d}{m}. \tag{1.29}$$

1.9. «Правило 70», «Правило 100», увеличение капитала в произвольное число раз

«Правило 70» позволяет ответить на вопрос: за сколько лет вклад, внесенный в банк под *i* процентов годовых, удвоится?

Удвоение капитала в схеме сложных процентов при ставке *i* происходит примерно за

$$T=\frac{70}{i}\ \text{лет.} \tag{1.30}$$

В случае простых процентов «Правило 70» заменяется «Правилом 100»:

$$T=\frac{100}{i}\ \text{лет.}$$

При непрерывном начислении процентов результат формально совпадает с «Правилом 70» случая сложных процентов, однако в данном случае формула $T = \ln 2/i$ является точной в отличие от случая сложных процентов, где она получена разложением в ряд.

В случае *m*-кратного начисления процентов за период имеем точную формулу

$$T=\frac{\ln 2}{m\ln\left(1+\frac{i}{m}\right)}, \tag{1.31}$$

а приближенная формула совпадает с «Правилом 70».

Увеличение капитала в произвольное число раз

В случае простых процентов увеличение капитала в произвольное число раз происходит за T лет:

$$T = (n-1)/i. \tag{1.32}$$

В случае сложных процентов имеем

$$T = \ln n / \ln i \approx \ln n / i. \tag{1.33}$$

При непрерывном начислении процентов формула $T = \ln n/i$ становится точной.

Пример 1.21. За сколько лет удвоится капитал в схеме сложных процентов при ставке 18% годовых?

$$T = \frac{70}{i} = \frac{70}{18} = 3{,}89 \text{ лет.}$$

Пример 1.22. За сколько лет удвоится капитал в схеме простых процентов при ставке 18% годовых?

$$T = \frac{100}{i} = \frac{100}{18} = 5{,}56 \text{ лет.}$$

Напомним, что в схеме сложных процентов удвоение при тех же условиях происходило за 3,89 лет.

Пример 1.23. За сколько лет при ставке 10% годовых вклад вырастет в 4 раза в схеме простых процентов?

$$T = \frac{100}{i} = \frac{100}{18} = 5{,}56 \text{ лет.}$$

$$T \oplus \ln n / i \oplus 10 \ln 4 \oplus 13{,}86 \oplus 14 \text{ лет.}$$

Вопросы и задачи

1.164. При какой годовой процентной ставке сумма утроится за 6 лет, если проценты начисляются ежемесячно? ежеквартально?

1.165. При какой годовой процентной ставке сумма удвоится за 7 лет, если проценты начисляются ежеквартально?

1.166. Выведите «Правило 70» в случае сложных процентов.

1.167. Компания имеет на депозите в банке 100 000 руб. Депозитная ставка банка составляет 18% годовых. Предлагается объединить оборотные средства в совместном предприятии, которое прогнозирует утроение капитала через 8 лет. Сравните варианты вложения капитала.

1.168. Выведите «Правило 70» в случае простых процентов. Как его можно назвать в этом случае?

1.169. Выведите «Правило 70» в случае кратного начисления процентов.

1.170. Выведите «Правило 70» в случае непрерывного начисления процентов.

1.171. Найдите период времени n, за который сумма, положенная на депозит под 13% годовых по схеме сложных процентов, возрастет в 4 раза.

1.172. При какой годовой процентной ставке сумма увеличится в 3 раза за 10 лет, если проценты начисляются поквартально?

1.10. Влияние инфляции на ставку процента

Инфляция определяется как процесс повышения общего (среднего) уровня цен в экономике, что эквивалентно снижению покупательной способности денег. Инфляция называется **равномерной**, если темп общей инфляции не зависит от времени (от номера шага расчетного периода). Инфляция называется **однородной**, если темпы изменения цен всех товаров и услуг зависят только от номера шага расчетного периода, но не от характера товара или услуги. Инфляция называется **постоянной**, если ее темпы не меняются с течением времени.

Существует два основных показателя (параметра), характеризующих инфляцию: темп инфляции и индекс инфляции. Ниже дадим определение и приведем формулы для расчета обоих показателей (параметров) инфляции.

Инфляция оценивается за некоторый период времени.

Итак, для оценки инфляции в конце периода t_j по отношению к периоду t_i используются два основных показателя:

1) темп (уровень) инфляции α — относительный прирост среднего уровня цен в рассматриваемом периоде

$$\alpha = \left(P_1 - P_0\right) / P_0, \tag{1.34}$$

2) индекс инфляции (индекс изменения цен) I — рост среднего уровня цен в рассматриваемом периоде

$$I = P_1 / P_0. \tag{1.35}$$

Взаимосвязь между темпом и индексом инфляции

$$\alpha = I - 1 \tag{1.36}$$

и обратно

$$I = \alpha + 1. \tag{1.37}$$

Рассмотрим вначале подробнее темп инфляции.

1.10.1. Темп инфляции (формула Фишера)

Говорят, что инфляция составляет долю α в год (темп инфляции равен α), если стоимость товара за год увеличивается в $(1 + \alpha)$ раз. Для процентной ставки с учетом инфляции i_α имеет место формула Фишера

$$i_\alpha = \frac{i - \alpha}{1 + \alpha}, \tag{1.38}$$

где i — ставка процента без учета инфляции.

1.10.2. Темп инфляции за несколько периодов

Пусть темпы инфляции за последовательные периоды времени t_1, t_2, ..., t_n равны α_1, α_2, ..., α_n соответственно. Найдем темп инфляции α за период $t = t_1 + t_2 + ... + t_n$.

Здравый смысл подсказывает, что темп инфляции, по крайней мере приближенно, равен сумме темпов инфляции α_1, α_2, ..., α_n:

$$\alpha \approx \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n. \tag{1.39}$$

Точное выражение для темпа инфляции за суммарный период времени t имеет вид

$$\alpha = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (1 + \alpha_n) - 1. \tag{1.40}$$

Для равных темпов инфляции $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n$ (интересно, что при этом промежутки времени могут оставаться произвольными и не равными друг другу) имеем

$$\alpha = (1 + \alpha_1)^n - 1. \tag{1.41}$$

Если, наоборот, известен темп инфляции α за суммарный период времени t, то темп инфляции α_1 за составляющий период времени (при условии его постоянства) равен

$$\alpha_1 = \sqrt[n]{1 + \alpha} - 1. \tag{1.42}$$

Пример 1.24. Найти реальный доход вкладчика, если на депозит положено 200 000 у.е. на 4 года под 15% годовых с ежемесячным начислением процентов при квартальной инфляции, которая составляет в среднем за данный период 3%.

Наращенная сумма вклада при ежемесячном начислении процентов ($m = 12$) на конец четвертого года составит: $S_4(12) = 200\,000 \cdot (1 + 0{,}15/12)^{4\cdot 12} = 363\,070{,}97$ у.е. За это время темп инфляции достигнет значения $\alpha_4 = (1 + \alpha_{\text{кварт}})^{4\cdot 4} - 1 = (1 + 0{,}03)^{16} - 1 = 0{,}6047$, или 60,47%. Таким образом, за 4 года наращенная сумма обесценилась в $(1 + \alpha_4)$ раз и реальный доход вкладчика составил $S_4(12)/(1 + a_4) = 363\,070{,}97/(1 + 0{,}6047) = 226\,254{,}73$ у.е.

Пример 1.25. Какую ставку должен установить банк, чтобы при инфляции 8% годовых он мог бы иметь доходность 10%?

Решим уравнение Фишера $i_\alpha = \dfrac{i-\alpha}{1+\alpha}$ относительно i.

$$i = i_\alpha \cdot \left(1+\alpha\right) + \alpha = 0{,}1 \cdot \left(1+0{,}08\right) + 0{,}08 = 0{,}188 = 18{,}8\%.$$

Итак, ответ 18,8% на 0,8% превышает простой ответ 18%, получаемый из формулы (1.39) простым сложением темпа инфляции и эффективной процентной ставки.

Пример 1.26. Пусть темпы инфляции за два последовательных периода времени t_1, t_2 равны 10 и 20% соответственно. Тогда по формуле (1.40) темп инфляции α за период $t = t_1 + t_2$ равен

$$\alpha = \left(1+\alpha_1\right)\left(1+\alpha_2\right) - 1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_1\alpha_2 = \\ = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}32,$$

т.е. 32%. Таким образом, отличие от суммы темпов инфляции составляет 2%.

Пример 1.27. Пусть темп инфляции за год α равен 20%. Найти темп инфляции за квартал α_1 при условии его постоянства.

Применим формулу

$$\alpha = \left(1+\alpha_1\right)^n - 1.$$

Имеем $\alpha + 1 = \left(1+\alpha_1\right)^n$, $\alpha_1 + 1 = \sqrt[n]{1+\alpha}$, и окончательно $\alpha_1 = \sqrt[n]{1+\alpha} - 1$.

Подставив в это выражение $\alpha = 20\% = 0{,}2$, $n = 4$, получим для квартального темпа инфляции

$$\alpha_1 = \sqrt[4]{1+\alpha} - 1 = \sqrt[4]{1{,}2} - 1 \approx 1{,}0466 - 1 = 0{,}0466 \approx 4{,}66\%.$$

Видим, что темп инфляции за квартал оказался ниже получаемого простым делением годового темпа инфляции на четыре, т.е. $20\% : 4 = 5\%$. Разница составляет 0,36%.

Пример 1.28. Решим обратную задачу. Пусть темп инфляции за месяц α_1 равен 2%. Найти темп инфляции за год α при условии постоянства темпа инфляции в течение года.

Применим формулу $\alpha = (1+\alpha_1)^n - 1$.

Подставляя в нее $\alpha = 2\% = 0{,}02$, $n = 12$, получим для годового темпа инфляции

$$\alpha = \left(1+\alpha_1\right)^{12} - 1 = \left(1+0{,}02\right)^{12} - 1 =$$
$$= \left(1{,}02\right)^{12} - 1 \approx 1{,}268 - 1 = 0{,}268 = 26{,}8\%.$$

Видим, что темп инфляции за год оказывается выше получаемого простым умножением месячного темпа инфляции на 12, т.е. $2\% \cdot 12 = 24\%$. Разница составляет 2,8%.

По двум последним примерам можно сделать следующие выводы:

1) темп инфляции за суммарный период больше суммы темпов инфляции за составляющие периоды;

2) темп инфляции за составляющий период меньше соответствующей ему доли темпа инфляции за суммарный период.

Пример 1.29. Прогнозируется среднемесячный темп инфляции 1%. Годовая номинальная ставка 15%. Найти эффективную реальную ставку, если начисление происходит 6 раз в году.

Годовой темп инфляции при среднемесячной инфляции 1% составит

$$\alpha_{\text{год}} = \left(1+0{,}01\right)^{12} - 1 = 0{,}1268 \approx 12{,}68\%.$$

Эффективная ставка процента $i_{\text{эфф}} = (1 + 0{,}15/6)^{6\cdot 1} - 1 = 0{,}1597$, или 15,97%.

Реальную эффективную ставку найдем из формулы Фишера

$$i_0 = \frac{i_{\text{эфф}} - \alpha}{1+\alpha} = \frac{0{,}1597 - 0{,}1268}{1{,}1268} = 0{,}0292 \approx 2{,}92\%.$$

Пример 1.30. На депозит на 6 месяцев положили 120 000 руб. под 10% годовых ($K = 360$). Темп инфляции за год с равной вероятностью составит от 3 до 7%. Чему равно среднее ожидаемое значение реальной наращенной суммы депозита?

Средний темп инфляции за год равен 5%. Средняя эффективная процентная ставка равна

$$i_{\text{эфф}} = \frac{i - \alpha}{1+\alpha} = \frac{0{,}12 - 0{,}05}{1{,}05} = 0{,}0(6) \approx 6{,}7\%.$$

Среднее ожидаемое значение реальной наращенной суммы депозита равно

$$S = S_0(1 + i_{эфф})^{180/360} = 120\,000(1 + 0{,}067)^{1/2} = 123\,935{,}47 \text{ руб.}$$

Пример 1.31. Темп инфляции α за период $t = t_1 + t_2 + t_3$ равен 1,2. Темпы инфляции α_1, α_2, α_3 за периоды t_1, t_2, t_3 соответственно составляют арифметическую прогрессию с разностью 0,1. Найти темп инфляции за каждый период.

Используем формулу для темпа инфляции за несколько периодов

$$\alpha + 1 = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \cdot (1 + \alpha_3)$$

и учтем, что темпы инфляции α_1, α_2, α_3 за периоды t_1, t_2, t_3 соответственно составляют арифметическую прогрессию с разностью 0,1:

$$\alpha + 1 = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_1 + 0{,}1) \cdot (1 + \alpha_1 + 0{,}2),$$

$$2{,}2 = (1 + \alpha_1)(1{,}1 + \alpha_1) \cdot (1{,}2 + \alpha_1).$$

Раскрывая скобки, получим следующее кубическое уравнение

$$\alpha_1^3 + 3{,}3\alpha_1^2 + 2{,}52\alpha_1 - 0{,}88 = 0.$$

Решая его (например, методом последовательных приближений, взяв за исходное приближение $\alpha_1 \approx 1{,}2/3 = 0{,}4$), получим $\alpha_1 \approx 0{,}26$. Отсюда $\alpha_2 \approx 0{,}36$; $\alpha_3 \approx 0{,}46$.

Отметим, что $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0{,}26 + 0{,}36 + 0{,}46 = 1{,}08$, что меньше значения $\alpha = 1, 2$, как и должно быть.

Вопросы и задачи

1.173. Кредитор предполагает получить от предоставления ссуды реальную доходность 12% годовых. Годовая инфляция — 9,5%. Найдите процентную ставку по кредиту.

1.174. Кредитор предполагает получить от предоставления ссуды реальную доходность 9% годовых. Годовая инфляция — 13%. Найдите процентную ставку по кредиту.

1.175. Месячный темп инфляции составляет 3%. Найдите индекс цен и темп инфляции за год, определите наращенную сумму, если на сумму 200 000 руб. в течение года начислялась простая (сложная) процентная ставка 15% годовых ($K = 360$), и ставку, при которой наращение равно потерям из-за инфляции.

1.176. Какую ставку должен назначить банк, чтобы при годовой инфляции 11% реальная ставка оказалась 7%.

1.177. На депозит сроком на 4 месяца положено 230 000 руб. под 12% годовых ($K = 360$). Темп инфляции за год с равной вероятностью составит от 4 до 5%. Чему равно среднее ожидаемое значение реальной наращенной суммы депозита?

1.178. Исходя из условий предыдущей задачи подсчитайте вероятность попадания реальной наращенной суммы в интервал от 236 000 до 239 000 руб.

1.179. На депозит на 4 месяца положили 230 000 руб. под 12% годовых ($K = 360$). Темп инфляции за это время с равной вероятностью составит от 3 до 4%. Чему равно среднее ожидаемое значение реальной наращенной суммы депозита?

1.180. Исходя из условий предыдущей задачи подсчитайте вероятность попадания реальной наращенной суммы в интервал от 230 000 до 235 000 руб.

1.181. Прогнозируется среднемесячный темп инфляции 3%. Найдите квартальный, полугодовой и годовой темпы инфляции.

1.182. Годовой темп инфляции прогнозируется в размере 24%.Найдите среднеквартальный темп инфляции.

1.183. Месячный темп инфляции за 3 последовательных месяца квартала составляет 3%. Определите индекс цен и темп инфляции за квартал, наращенную сумму, если на сумму 150 000 руб. начислялась простая (сложная) процентная ставка 12% годовых ($K = 360$), а также ставку, при которой наращение равно потерям из-за инфляции.

1.184. Найдите реальный доход вкладчика, если на депозит положено 300 000 руб. на 2 года под 12% годовых с ежемесячным начислением процентов при квартальной инфляции, которая составляет в среднем за данный период 2,5%.

1.185. Прогнозируемый среднеквартальный темп инфляции — 5%, годовая номинальная ставка — 14%. Найдите эффективную реальную ставку, если начисление происходит ежеквартально.

1.186. Какую ставку должен назначить банк, чтобы при годовой инфляции 8,75% реальная ставка составила 10%?

1.187. Темпы инфляции за последовательные периоды времени t_1, t_2, ..., t_n равны α_1, α_2, ..., α_n соответственно. Исчислите темп инфляции α за период $t = t_1 + t_2 + ... + t_n$.

1.188. Среднемесячный темп инфляции равен 1,15%. Найдите полугодовой темп инфляции.

1.189. Годовой темп инфляции равен 20%. Определите среднеквартальный темп инфляции.

1.190. Каков реальный доход вкладчика, если на депозит положено 450 000 руб. на 5 лет под 14% годовых с ежемесячным начислением процентов при квартальной инфляции, которая составляет в среднем за данный период 2%?

1.191. Прогнозируемый среднемесячный темп инфляции — 2%, годовая номинальная ставка — 10%. Найдите эффективную реальную ставку, если начисление происходит ежеквартально.

1.192. Выведите формулу Фишера.

1.193. Прогнозируется среднемесячный темп инфляции 4%. Каков годовой темп инфляции?

1.194. Годовой темп инфляции равен 8%. Найдите среднемесячный темп инфляции.

1.195. Выведите формулу для темпа инфляции за несколько периодов.

1.196. Темп инфляции за год равен 18%. Найдите темп инфляции за месяц, предполагая его постоянство.

1.197. Темп инфляции за квартал равен 3%. Найдите темп инфляции за месяц, предполагая его постоянство.

1.198. Темп инфляции α за период $t = t_1 + t_2 + t_3$ равен 0,5. Темпы инфляции α_1, α_3 за периоды t_1, t_3 соответственно равны 0,1 и 0,15. Найдите темп инфляции за период t_2.

1.199. Темп инфляции α за период $t = t_1 + t_2$ равен 0,4, за первый период он в 1,173 раза меньше, чем за второй. Найдите темп инфляции за каждый период.

1.200. Темп инфляции α за период $t = t_1 + t_2$ равен 0,37, а за второй период — на 55% выше, чем за первый. Каков будет темп инфляции за каждый период?

1.201. Темп инфляции α за период $t = t_1 + t_2$ равен 0,65. Темп инфляции за первый период в 2 раза больше, чем за второй. Найдите темп инфляции за каждый период.

1.202. Темп инфляции α за период $t = t_1 + t_2$ равен 0,8. Темпы инфляции α_1, α_2 за периоды t_1, t_2 соответственно составляют арифметическую прогрессию с разностью 0,01. Найдите темп инфляции за каждый период.

1.203. Темп инфляции α за период $t = t_1 + t_2$ равен 0,75. Темпы инфляции α_1, α_2 за периоды t_1, t_2 соответственно составляют геометрическую прогрессию со знаменателем 0,9. Определите темп инфляции за каждый период.

1.204. Ставка процентов составляет 10% годовых. Месячный темп инфляции в первом полугодии был постоянен и составил 2%, во втором полугодии — 3%. Во сколько раз возрастет реальная наращенная сумма депозита за год?

1.205. Месячные темпы роста инфляции за предшествующие полгода характеризуются следующим рядом: 1,05; 1,10; 1,20; 1,30; 1,45; 1,53. На основе линейного прогноза месячных темпов инфляции укажите годовую ставку простых процентов, обеспечивающую реальный рост долга по трехмесячному кредиту в 4% годовых.

1.10.3. Индекс инфляции

Индекс инфляции, или **индекс потребительских цен**, — показатель, характеризующий изменения общего уровня цен на товары и услуги, приобретаемые населением для непроизводственного потребления.

Индекс потребительских цен отображает изменение стоимости фиксированного потребительского набора товаров и услуг в текущем периоде относительно предыдущего. **Потребительский набор товаров и услуг** — это набор наиболее представительных и важных для потребления товаров и услуг.

Индексация — способ сохранения реальной величины денежных ресурсов (капитала) и доходов в условиях инфляции. В ее основе лежит использование различных индексов. **Индекс цен** — показатель, характеризующий изменение цен за определенный период времени.

Виды индексов цен

1. *Индивидуальный (однотоварный)* — по отдельным видам продукции, ресурсов, услуг и т.п.:

$$I_{t,t_0} = P_t / P_{t_0}, \tag{1.43}$$

где P_t, P_{t_0} — цена данного вида продукции, ресурсов, услуг и т.п. соответственно в период времени t и в базисный (начальный) период t_0.

2. *Общий* (*групповой*, *агрегатный*) — индекс Пааше — по группе (или всей) продукции:

$$I^0_{t,t_0} = \sum P_t \cdot V_t \Big/ \sum P_{t_0} \cdot V_t, \tag{1.44}$$

где V_t — количество продукции, работ, услуг и т.п., реализованных в период времени t, нат. ед.

3. *Индекс стоимости* (индекс Ласпейреса) — отношение выручки данного периода к выручке прошлого периода в ценах соответствующего периода:

$$I^{C}_{t,\,t_0} = \frac{B_t}{B_{t_0}} = \frac{\sum P_t \cdot V_t}{\sum P_{t_0} \cdot V_{t_0}}, \tag{1.45}$$

где V_{t_0} — количество продукции, работ, услуг и т.п., реализованных за прошлый период, нат. ед.

4. *Базисный индекс цен* — определяется делением цен в каждый момент времени на цену, принятую за базу:

$$I_b = P_t / P_b. \tag{1.46}$$

5. *Цепной индекс цен* — определяется делением цен в последующий момент времени на цену в предыдущий момент времени:

$$I_C = P_t / P_{t-1}. \tag{1.47}$$

Взаимосвязи между базисными и цепными индексами:

$$I_{b,\,t} = I_{C,\,0} \cdot I_{C,1} \cdot \ldots \cdot I_{C,\,t} = \prod_{i=0}^{t} I_{C,\,i},\; I_{C,\,t} = \frac{I_{b,\,t}}{I_{b,\,t-1}}. \tag{1.48}$$

Для индекса инфляции справедливы следующие соотношения:

— индекс инфляции периода t_i по отношению к этому же периоду равен 1:

$$I_{t_i t_i} = 1;$$

— отношение индекса инфляции следующего периода к предыдущему и предыдущего к следующему (свойство обратимости):

$$I_{t_i t_j} = 1 / I_{t_j t_i}\ \text{, или}\ \ I_{t_i t_j} \cdot I_{t_j t_i} = 1;$$

— индекс инфляции периода t_j, к начальному периоду t_0, если известен индекс инфляции периода t_j к предыдущему периоду t_i (свойство транзитивности):

$$I_{t_i t_0} \cdot I_{t_j t_i} = I_{t_j t_0}. \tag{1.49}$$

Индекс цен за несколько (n) последовательных периодов:

$$I_t = \prod_{i=1}^{n} I_{t_i} = \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \alpha_i\right). \tag{1.50}$$

При постоянном в течение n-периодов темпе инфляции

$$I_t = I_{t_i}^{n} = (1 + \alpha_i)^n. \tag{1.51}$$

Обесцененная инфляцией сумма S_0 в конце n-го периода определяется по следующим формулам.

В случае простых процентов:

$$S = S_0 \frac{1+ni}{I_t} = S_0 \frac{1+ni}{(1+\alpha)^n}. \tag{1.52}$$

При этом процентная ставка i_0, при которой наращение равно обесцениванию суммы S_0, равна

$$i_0 = \frac{I_t - 1}{n} = \frac{(1+\alpha)^n - 1}{n}. \tag{1.53}$$

В случае сложных процентов:

$$S = S_0 \frac{(1+i)^n}{I_t} = S_0 \frac{(1+i)^n}{(1+\alpha)^n}. \tag{1.54}$$

Процентная ставка i_0, при которой наращение равно обесцениванию суммы S_0, равна

$$i_0 = \sqrt[n]{I_t} - 1 = \alpha .$$

Пример 1.32. Темп инфляции равен 3%. Найти индекс инфляции.

$$I = (1+\alpha) = 1{,}03.$$

Пример 1.33.
Индекс инфляции равен 1,15. Найти темп инфляции.

$$I = (1+\alpha).$$

Отсюда

$$\alpha = I - 1 = 1{,}15 - 1 = 0{,}15\,;\;\; \alpha = 15\%.$$

Пример 1.34. Темп инфляции за месяц равен 1,25%. Найти индекс инфляции за полгода, за год.

Индекс инфляции за полгода равен

$$I_{1-6} = \prod_{i=1}^{6} (1+\alpha_i) = 1{,}0125^6 = 1{,}07738.$$

Индекс инфляции за год равен

$$I_{1-12} = \prod_{i=1}^{12} (1+\alpha_i) = 1{,}0125^{12} = 1{,}16075.$$

Пример 1.35. Темп инфляции за первые полгода равен 4,25%, за вторые полгода равен 5,17%. Найти индекс инфляции за год.

$$I_{1-12} = I_{1-6} \cdot I_{7-12} = (1+\alpha_1)\cdot(1+\alpha_2) = 1{,}0425 \cdot 1{,}0517 = 1{,}0964.$$

Вопросы и задачи

1.206. Темп инфляции равен 3%. Найдите индекс инфляции.

1.207. Индекс инфляции равен 1,15. Найдите темп инфляции.

1.208. Темп инфляции за первые полгода равен 3,75%, за вторые полгода — 4,23%. Определите индекс инфляции за год.

1.209. Темп инфляции за месяц равен 2,15%. Найдите индекс инфляции за квартал, за полгода, за год.

1.210. Индекс инфляции α за период $t = t_1 + t_2$ равен 0,6. Темпы инфляции α_1, α_2 за периоды t_1, t_2 соответственно составляют арифметическую прогрессию с разностью 0,12. Найдите темп инфляции за каждый период.

1.211. Индекс инфляции α за период $t = t_1 + t_2$ равен 0,75. Темпы инфляции α_1, α_2 за периоды t_1, t_2 соответственно составляют геометрическую прогрессию со знаменателем 0,9. Найдите темп инфляции за каждый период.

1.212. Индекс инфляции α за период $t = t_1 + t_2 + t_3$ равен 2. Темпы инфляции α_1, α_3 за периоды t_1, t_3 соответственно равны 0,2 и 0,36. Найдите темп инфляции за период t_2.

1.213. Индекс инфляции α за период $t = t_1 + t_2$ равен 1,4. Темп инфляции за первый период в 1,6 раза меньше, чем за второй. Каков темп инфляции за каждый период?

1.214. Индекс инфляции α за период $t = t_1 + t_2$ равен 1,87. Темп инфляции за второй период на 23% выше, чем за первый. Найдите темп инфляции за каждый период.

1.215. Индекс инфляции α за период $t = t_1 + t_2$ равен 2,4. Темп инфляции за первый период в 2,2 раза меньше, чем за второй. Каким будет темп инфляции за каждый период?

1.11. Эффективная ставка процента

Эффективная ставка процента — это сумма, выплачиваемая заемщику (инвестору) в конце периода начисления за каждую единичную сумму, занятую (инвестируемую) в начале периода. Обозначая наращенное значение единичной суммы в момент времени t через a_t, ставку процента — через i, а наращенное значение полной суммы — через S_t, имеем для первого периода начисления

$$i_1 = \frac{(1+i)}{1} = \frac{a_1 - a_0}{a_0} = \frac{S_1 - S_0}{S_0}, \tag{1.55}$$

для n-го периода начисления

$$i_n = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}}. \tag{1.56}$$

1) n-й период начисления.

Эффективная ставка процента в схеме простых процентов

$$i_n = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}} = \frac{(1+in)-\big(1+i(n-1)\big)}{1+i(n-1)} = \frac{1}{1+i(n-1)} \tag{1.57}$$

убывает с ростом n.

Эффективная процентная ставка в схеме сложных процентов за n-й период начисления

$$i_n = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}} = \frac{(1+i)^n - (1+i)^{n-1}}{(1+i)^{n-1}} = \frac{i(1+i)^{n-1}}{(1+i)^{n-1}} = i \tag{1.58}$$

не зависит от n и равна номинальной;

2) при m-кратном начислении процентов эффективная процентная ставка в схеме сложных процентов равна

$$i_{\text{эфф}} = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1. \tag{1.59}$$

При m-кратном начислении процентов эффективная процентная ставка в схеме простых процентов равна номинальной

$$i_{\text{эфф}} = \left(1 + m\frac{i}{m}\right) - 1 = i;$$

3) при учете инфляции эффективная процентная ставка определяется формулой Фишера

$$i_\alpha = \frac{i-\alpha}{1+\alpha}; \tag{1.60}$$

4) учет налогов:

а) проценты по вкладу в банке не облагаются налогами, если они не превышают ставку рефинансирования Центробанка плюс 5% (в настоящее время $i_0 = 8{,}75\% + 5\% = 13{,}75\%$). В противном случае с процентов, превышающих ставку рефинансирования Центробанка, взимается налог $t = 35\%$. Проценты по вкладам в банках Российской Федерации достигают в настоящее время 10%, так что знание реальной (эффективной) процентной ставки крайне актуально.

Рассчитаем эффективную процентную ставку в этом случае. Рассмотрим один период начисления. Наращенная величина вклада в конце периода равна

$$S = S_0\left[\left(1+i\right)-t\left(i-i_0\right)\right] = S_0\left[1+i\left(1-t\right)+ti_0\right] = S_0\left(1+i_{\text{эфф}}\right). \quad (1.61)$$

Отсюда для эффективной процентной ставки при наличии налогов получаем

$$i_{\text{эфф}} = i\left(1-t\right)+ti_0; \quad (1.62)$$

б) если кредитная процентная ставка не превышает i^*, то реальная (эффективная) ставка по взятому кредиту D с учетом налога на прибыль компании t находится следующим образом:

$$iD - tiD = iD(1-t) = i_{\text{эфф}} D, \quad (1.63)$$

откуда

$$i_{\text{эфф}} = i(1-t). \quad (1.64)$$

Величина $(1 - t)$ носит название налогового щита и показывает финансовую выгоду компании от использования заемного капитала;

в) если кредитная процентная ставка превышает i^*, то из платы за кредит iD вычитается лишь величина $ti^* D$, поэтому имеем

$$\begin{aligned} i_{\text{эфф}} D &= iD - ti^* D = iD - tiD + tiD - ti^* D = \\ &= D\left[(1-t)+t(i-i^*)\right] = D\left[(1-t)+t\Delta i\right], \end{aligned} \quad (1.65)$$

откуда

$$i_{\text{эфф}} = i(1-t)+t\Delta i. \quad (1.66)$$

Пример 1.36. Вклад помещен в банк под 17% годовых. Найти эффективную процентную ставку с учетом налогов.

Для нахождения эффективной процентной ставки используем формулу (1.62):

$$i_{\text{эфф}} = i(1-t)+ti_0 = 0{,}17\cdot(1-0{,}35)+0{,}35\cdot 0{,}1 = 0{,}1455.$$

Таким образом, реальная (эффективная) процентная ставка 14,55% оказывается на 2,45% ниже объявленной номинальной (17%).

Пример 1.37. Кредит взят под 20% годовых. Найти эффективную кредитную процентную ставку, если ставка налога на прибыль составляет 13%, как и ставка отсечения i^* (10% + 3% = 13%).

Используя формулу (1.66), имеем

$$i_{\text{эфф}} = i(1-t) + t\Delta i = 0{,}2(1-0{,}13) + 0{,}13(0{,}2-0{,}13) = 0{,}1831 = 18{,}31\%.$$

Таким образом, эффективная кредитная процентная ставка равна 18,31% вместо 20%.

В пособии [1] доказано, что эффективная процентная ставка в схеме сложных процентов растет с увеличением кратности начисления и достигает максимума при непрерывном начислении процентов. При этом эффективная процентная ставка практически выходит на насыщение при $m \geq 6 \div 10$, т.е. выше этой кратности начисления рост эффективной процентной ставки резко замедляется.

Для доказательства того, что эффективная процентная ставка растет с увеличением кратности начисления, необходимо показать, что производная эффективной процентной ставки по кратности начисления

$$\frac{di_{\text{эфф}}}{dm} > 0. \tag{1.67}$$

Для доказательства того, что рост эффективной процентной ставки с ростом m замедляется и выходит на насыщение, надо показать, что вторая производная эффективной процентной ставки по кратности начисления

$$\frac{d^2 i_{\text{эфф}}}{dm^2} < 0 \text{ и при } m \to \infty \frac{d^2 i_{\text{эфф}}}{dm^2} \to 0. \tag{1.68}$$

Пример 1.38. Банк «Русский стандарт» выдавал потребительские кредиты под 23% годовых. При этом за любую транзакцию клиент платил 500 руб. Найти эффективную процентную ставку банка для клиента, взявшего 25 000 руб. и возвращавшего кредит ежемесячными платежами.

Проценты, выплаченные клиентом с учетом только номинальной ставки, составили

$$I = iS_0 = 0{,}23 \cdot 25\,000 = 5750 \text{ руб.}$$

За транзакции клиент уплатит $500 \cdot 13 = 6500$ руб. (помимо стоимости транзакций в виде ежемесячных платежей за выдачу кредита также взимается 500 руб.). Всего сверх суммы кредита клиент уплатит 5750 + + 6500 = 12 250 руб.

Таким образом, эффективная процентная ставка банка «Русский стандарт» составит

$$i_{\text{эфф}} = \frac{12\,250}{25\,000} = 0{,}5 = 50\% \text{ вместо объявленных } 23\%.$$

Некоторое время назад Государственная дума РФ обязала банки указывать в договорах о выдаче кредита эффективную процентную ставку, поэтому если бы клиент владел такой информацией, то клиентов у банка «Русский стандарт», по-видимому, стало бы меньше во столько же раз, во сколько эффективная процентная ставка больше номинальной (как минимум вдвое).

Вопросы и задачи

1.216. Выведите эффективную процентную ставку в случае простых процентов (три случая).

1.217. Номинальная процентная ставка составляет 15% годовых. Чему равна эффективная процентная ставка, если проценты начисляются ежемесячно? ежедневно? ежеквартально?

1.218. Номинальная процентная ставка составляет 12% годовых при годовом темпе инфляции 4%. Чему равна эффективная процентная ставка, если проценты начисляются ежемесячно? ежедневно? ежеквартально?

1.219. Выведите эффективную процентную ставку в случае сложных процентов (три случая).

1.220. Выведите эффективную процентную ставку в случае непрерывных процентов (три случая).

1.221. Номинальная процентная ставка составляет 11% годовых. Чему равна эффективная процентная ставка непрерывных процентов?

1.222. Выведите эффективную процентную ставку при наличии налогов (два случая).

1.223. Вклад помещен в банк под 15% годовых. Найдите эффективную процентную ставку с учетом налогов (учетная ставка ЦБ в настоящее время составляет 8,25%).

1.224. Кредит взят под 25% годовых. Рассчитайте эффективную кредитную процентную ставку, если ставка налога на прибыль составляет 20%.

1.12. Эквивалентность различных процентных ставок

1.12.1. Эквивалентность простых и сложных процентов

$$i_{\text{п}} = \frac{1}{n}\left[(1+i_c)^n - 1\right],\ i_{\text{с}} = \sqrt[n]{1+i_{\text{п}}n} - 1. \tag{1.69}$$

В случае m-кратного начисления процентов имеем за n периодов

$$i_{\text{п}} = \frac{1}{n}\left[\left(1+\frac{i_{\text{с}}}{m}\right)^{n\cdot m} - 1\right],\ i_{\text{с}} = m\cdot\left(\sqrt[m\cdot n]{1+i_{\text{п}}n} - 1\right). \tag{1.70}$$

1.12.2. Эквивалентность простых и непрерывных процентов

$$i_{\text{п}} = \frac{1}{n}(e^{i_{\text{н}}\cdot n} - 1),\ i_{\text{н}} = \frac{1}{n}\ln(1+i_{\text{п}}n). \tag{1.71}$$

1.12.3. Эквивалентность сложных и непрерывных процентов

$$i_{\text{н}} = \ln(1+i_{\text{с}}),\ i_{\text{с}} = e^{i_{\text{н}}} - 1. \tag{1.72}$$

Пример 1.39. Найти простую процентную ставку $i_{\text{п}}$, эквивалентную сложной ставке в 15% для временно́го интервала в 5 лет при ежемесячном начислении процентов.

Используя первую формулу из (1.69), получим

$$i_{\text{п}} = \frac{1}{n}\left[\left(1+\frac{i_{\text{с}}}{m}\right)^{n\cdot m} - 1\right] = \frac{1}{5}\left[\left(1+\frac{0{,}15}{12}\right)^{5\cdot 12} - 1\right] = \frac{1}{5}\left[(1{,}15)^{60} - 1\right] = 0{,}2214,$$

т.е. эквивалентная простая процентная ставка $i_{\text{п}} = 22{,}14\%$.

Пример 1.40. Найти непрерывную процентную ставку $i_{\text{н}}$, эквивалентную простой ставке в 15% для временно́го интервала в 5 лет.

Используя вторую формулу из (1.70), получим

$$i_{\text{н}} = \frac{1}{n}\ln(1+i_{\text{п}}n) = \frac{1}{5}\ln(1+0{,}15\cdot 5) = \frac{1}{5}\ln 1{,}75 = \frac{1}{5}0{,}5596 = 0{,}1119,$$

т.е. эквивалентная непрерывная процентная ставка $i_{\text{н}} = 11{,}19\%$.

Вопросы и задачи

1.225. Найдите простую процентную ставку $i_п$, эквивалентную сложной ставке 11%.

1.226. Найдите сложную процентную ставку $i_с$, эквивалентную простой ставке 10%.

1.227. Найдите сложную процентную ставку $i_с$, эквивалентную непрерывной ставке 8%.

1.228. Найдите непрерывную процентную ставку $i_н$, эквивалентную сложной ставке 5%.

1.229. Найдите простую процентную ставку $i_п$, эквивалентную непрерывной ставке 9%.

1.230. Найдите непрерывную процентную ставку $i_н$, эквивалентную простой ставке 6%.

1.231. Найдите простую процентную ставку $i_п$, эквивалентную сложной ставке в 8% для временно́го интервала в 10 лет при ежемесячном начислении процентов.

1.232. Найдите простую процентную ставку $i_п$, эквивалентную сложной ставке в 7% для временно́го интервала в 6 лет при ежеквартальном начислении процентов.

1.233. Найдите непрерывную процентную ставку $i_н$, эквивалентную простой ставке в 15% для временно́го интервала в 5 лет.

1.234. Найдите сложную процентную ставку $i_с$, эквивалентную сложной ставке в 6% для временно́го интервала в 8 лет при кратном (ежеквартальном) начислении процентов.

1.235. Найдите сложную процентную ставку $i_с$, эквивалентную сложной ставке в 10% для временно́го интервала в 4 года при кратном (ежемесячном) начислении процентов.

1.236. Найдите непрерывную процентную ставку $i_н$, эквивалентную сложной ставке в 6% для временно́го интервала в 8 лет при кратном (ежеквартальном) начислении процентов.

1.237. Найдите непрерывную процентную ставку $i_н$, эквивалентную сложной ставке в 11% для временно́го интервала в 3 года при кратном (ежемесячном) начислении процентов.

1.238. Найдите сложную процентную ставку $i_с$ при кратном (ежеквартальном) начислении процентов, эквивалентную непрерывной ставке 7,5%.

1.239. Найдите сложную процентную ставку $i_с$ при кратном (ежемесячном) начислении процентов, эквивалентную непрерывной ставке 9,5%.

1.240. Найдите сложную процентную ставку $i_с$ при полугодовом начислении процентов, эквивалентную непрерывной ставке 11,5%.

1.13. Операции с валютой

Рассмотрим некоторые операции с валютой.

1.13.1. Депозиты с конверсией валюты и без конверсии

Возможность конвертации рублей в валюту и обратно валюты в рубли, а также возможность размещения на депозите как рублей, так и валюты увеличивают количество схем получения дохода с помощью депозитов.

Сравним доходы от непосредственного размещения на депозите имеющихся денежных средств в национальной валюте (*RR*, *Russian ruble*) и через конвертацию национальной валюты в иностранную (*FC*, *Foreign currency*), размещение последней на депозите с последующей обратной конвертацией наращенной суммы в иностранной валюте в национальную валюту.

Возможны четыре схемы получения дохода:

1) $RR \to RR$;
2) $FC \to FC$;
3) $FC \to RR \to RR \to FC$;
4) $RR \to FC \to FC \to RR$.

Две первые схемы не связаны с конвертацией валюты, и они полностью исследованы нами в предыдущих параграфах, в то время как две последние схемы предполагают конвертацию валюты в начале и в конце финансовой операции.

Схема $FC \to RR \to RR \to FC$.

Рассмотрим третью схему $FC \to RR \to RR \to FC$.

Введем обозначения:

P_{FC} — величина депозита в *FC*;

P_{RR} — величина депозита в *RR*;

S_{FC} — наращенная сумма в *FC*;

P_{RR} — наращенная сумма в *RR*;

K_0 — курс обмена $FC \to RR$ в начале операции;

K_1 — курс обмена $FC \to RR$ в конце операции;

n — срок депозита;

i — процентная ставка в *RR*;

j — процентная ставка в *FC*.

Операция состоит из трех этапов: конвертации иностранной валюты в национальную валюту, размещения рублей на депозите с последующей обратной конвертацией наращенной суммы в иностранную валюту.

В результате всех этапов получим следующую наращенную сумму в иностранной валюте:

— в схеме простых процентов:

$$S_{FC} = P_{FC} K_0 (1 + in) / K_1; \tag{1.73}$$

— в схеме сложных процентов:

$$S_{FC} = P_{FC} K_0 (1 + i)^n / K_1. \tag{1.74}$$

Множитель наращения M с учетом двойной конвертации имеет вид:

— в схеме простых процентов:

$$M = K_0 (1 + in) / K_1 = \frac{(1 + in)}{K_1 / K_0}; \tag{1.75}$$

— в схеме сложных процентов:

$$M = K_0 (1 + i)^n / K_1 = \frac{(1 + i)^n}{K_1 / K_0}. \tag{1.76}$$

Множитель наращения растет с увеличением процентной ставки, срока депозита и начального обменного курса и убывает с ростом конечного обменного курса.

Найдем эффективную процентную ставку для операции в целом.

— в схеме простых процентов:

$$S_{FC} = P_{FC} K_0 (1 + in) / K_1 = P_{FC} (1 + i_{\text{эфф}} n), \tag{1.77}$$

откуда

$$i_{\text{эфф}} = \frac{K_0 (1 + in) / K_1 - 1}{n} = \frac{M - 1}{n}; \tag{1.78}$$

— в схеме сложных процентов:

$$S_{FC} = P_{FC} K_0 (1 + i)^n / K_1 = P_{FC} (1 + i_{\text{эфф}})^n, \tag{1.79}$$

откуда

$$i_{\text{эфф}} = \frac{1 + i}{\sqrt[n]{K_1 / K_0}} - 1 = \sqrt[n]{M} - 1. \tag{1.80}$$

При $n = 1$

$$i_{\text{эфф}} = \frac{1 + i}{K_1 / K_0} - 1 = M - 1. \tag{1.81}$$

Схема $RR \to FC \to FC \to RR$.

Рассмотрим четвертую схему $FC \to RR \to RR \to FC$.

Операция состоит из трех этапов: конвертации национальной валюты в иностранную, размещения иностранной валюты на депозите с последующей обратной конвертацией наращенной суммы в национальную валюту.

В результате всех этапов получим следующую наращенную сумму в национальной валюте:

— в схеме простых процентов:

$$S_{RR} = \frac{P_{RR}}{K_0}(1 + jn)K_1; \tag{1.82}$$

— в схеме сложных процентов:

$$S_{RR} = \frac{P_{RR}}{K_0}(1 + j)^n K_1. \tag{1.83}$$

Множитель наращения M с учетом двойной конвертации имеет вид:

— в схеме простых процентов:

$$M = \frac{K_1}{K_0}(1 + jn) = \frac{(1 + jn)}{K_0 / K_1}; \tag{1.84}$$

— в схеме сложных процентов:

$$M = \frac{K_1}{K_0}(1 + j)^n = \frac{(1 + j)^n}{K_0 / K_1}. \tag{1.85}$$

Множитель наращения растет с увеличением процентной ставки, срока депозита и конечного обменного курса и убывает с ростом начального обменного курса.

Найдем эффективную процентную ставку для операции в целом:

— в схеме простых процентов:

$$S_{RR} = P_{RR}K_1(1 + in)/K_0 = P_{RR}(1 + i_{\text{эфф}}n), \tag{1.86}$$

откуда

$$i_{\text{эфф}} = \frac{K_1(1 + in)/K_0 - 1}{n} = \frac{M - 1}{n}; \tag{1.87}$$

— в схеме сложных процентов:

$$S_{RR} = P_{RR}K_1(1 + i)^n / K_0 = P_{RR}(1 + i_{\text{эфф}})^n, \tag{1.88}$$

откуда

$$i_{\text{эфф}} = \frac{1+i}{\sqrt[n]{K_0/K_1}} - 1 = \sqrt[n]{M} - 1. \qquad (1.89)$$

При $n = 1$

$$i_{\text{эфф}} = \frac{1+i}{K_0/K_1} - 1 = M - 1. \qquad (1.90)$$

Пример 1.41. Поместим 2000 дол. после конвертации на депозит под простые проценты (i = 15%) сроком на 2 года. Курс продажи доллара на начало срока депозита — 26 руб., курс покупки доллара в конце операции — 34 руб. Ставка для долларового депозита (j = 5%). Сравните эффективность данной операции с эффективностью непосредственного помещения долларов на валютный депозит.

$$S_{FC} = P_{FC} K_0 (1+in)/K_1 = 2000 \cdot \frac{26}{34}(1+0{,}15 \cdot 2) = 1988{,}24 \text{ дол.}$$

Непосредственное помещение долларов на валютный депозит даст наращенную сумму

$$S_{FC} = P_{FC}(1+jn) = 2000(1+0{,}05 \cdot 2) = 2200 \text{ дол.}$$

Таким образом, выгоднее непосредственное помещение долларов на валютный депозит.

Пример 1.42. Рассчитаем стоимость бивалютной корзины (БК) на 21.10.2009. Курс доллара — 29,19 руб., курс евро — 43,69 руб. С учетом структуры корзины получим

$$\text{БК} = 29{,}19 \cdot 0{,}55 + 43{,}69 \cdot 0{,}45 = 35{,}72.$$

Итак, стоимость бивалютной корзины равна 35,72 руб.

Пример 1.43. В банке открыт мультивалютный вклад: 100 000 руб. под 16% годовых, 10 000 дол. под 6% годовых и 5000 евро под 5% годовых. Найти эффективную процентную ставку мультивалютного вклада, если курсы обмена валют в начале и конце (годового) срока вклада равны 29/34 и 43/46 соответственно.

Через год наращенные суммы составят:

$$S_p = P_p(1 + i) = 100\,000(1 + 0{,}16) = 116\,000 \text{ руб.},$$
$$S_{\text{дол.}} = P_{\text{дол.}}(1 + i) = 10\,000(1 + 0{,}06) = 10\,600 \text{ дол.},$$
$$S_{\text{евро}} = P_{\text{евро}}(1 + i) = 5000(1 + 0{,}05) = 5250 \text{ евро.}$$

Конвертируя валюту по курсам конца срока вклада, получим полную наращенную сумму

$$S = 116\,000 + 10\,600 \cdot 34 + 5250 \cdot 46 = 717\,900 \text{ руб.}$$

Найдем начальную сумму вклада в рублях:

$$S_0 = 100\,000 + 10\,000 \cdot 29 + 5000 \cdot 43 = 605\,000.$$

Эффективная процентная ставка мультивалютного вклада находится из формулы

$$S = S_0(1 + i_{\text{эфф}}),$$

откуда

$$i_{\text{эфф}} = \frac{S}{S_0} - 1 = \frac{S - S_0}{S_0} = \frac{717\,900 - 605\,000}{605\,000} = 18{,}67\%.$$

Итак, при ставках по отдельным валютам 16%,6% и 5% эффективная процентная ставка оказалась равной 18,67%. Факт, на первый взгляд странный, объясняется значительным ростом курсов конвертации за год (на 17,24% по доллару и 6,98% по евро).

Если же предположить, что курсы обмена сохранились на неизменном уровне, получим более понятный результат 7,3%.

$$S = 116\,000 + 10\,600 \cdot 29 + 5250 \cdot 43 = 649\,150 \text{ руб.};$$

$$i_{\text{эфф}} = \frac{S - S_0}{S_0} = \frac{649\,150 - 605\,000}{605\,000} = 7{,}30\%.$$

Тот же результат получится, если найти средневзвешенную процентную ставку

$$i_{\text{эфф}} = i_p \cdot w_p + i_{\text{дол.}} \cdot w_{\text{дол.}} + i_{\text{евро}} \cdot w_{\text{евро}} =$$

$$= 0{,}16 \cdot \frac{100\,000}{605\,000} + 0{,}06 \cdot \frac{10\,000 \cdot 29}{605\,000} + 0{,}05 \cdot \frac{5000 \cdot 43}{605\,000} = \frac{44\,150}{605\,000} = 7{,}30\%.$$

Вопросы и задачи

1.241. Поместим 120 000 руб. после конвертации в евро на депозит под сложные проценты ($j = 6\%$) сроком на 3 года. Курс продажи евро на начало срока депозита — 34 руб., курс покупки евро в конце операции — 44 руб. Ставка для депозита в рублях ($i = 14\%$). Сравните эффективность данной операции с эффективностью непосредственного помещения рублей на рублевый депозит.

1.242. Банк предлагает разместить вклады на следующих условиях: по ставке сложных процентов — 12% годовых с ежемесячной выплатой по рублевым вкладам; по сложным процентам — 5% годовых с ежемесячными выплатами по валютным вкладам. Определите оптимальную схему размещения 12 500 евро. Курс продажи/покупки евро составляет 42/41 руб./евро.

1.243. 500 000 руб. планируется поместить на полугодовой депозит. Обменный пункт покупает доллары по 30,50 руб., а продает по 31,05 руб. Ставка процентов по полугодовым депозитам составляет: 7% годовых по рублевым вкладам и 3% годовых по долларовым. Что выгоднее: использовать рублевый депозит или долларовый с двойной конверсией валюты, если предполагается, что курс покупки долларов за 6 мес. вырастет на 2%? Чему будет равна потеря при альтернативном вложении денежных средств?

1.244. В банке открыт мультивалютный вклад: 250 000 руб. под 12,5% годовых, 37 000 дол. под 5,5% годовых и 80 000 евро под 4,5% годовых. Найдите эффективную процентную ставку мультивалютного вклада, если курсы обмена валют в начале и конце (годового) срока вклада равны 30,5/31,2 и 41,2/41,9 соответственно.

1.245. Рассчитайте стоимость бивалютной корзины (БК) на текущий момент времени.

1.14. Переменные условия вкладов и ссуд

Вопросы и задачи

1.246. Начальное значение силы роста равно 6%. Ежегодный абсолютный прирост составлял 1,5% в течение 4 лет, затем в последующие 3 года происходило линейное падение силы роста на 2% в год. Чему будет равен множитель наращения за 7 лет?

1.247. Банк объявил следующие условия выдачи ссуды на один год: за первый квартал — ссудный процент 50%, за второй — 75, за третий — 100, за четвертый — 125%. Определите сумму к возврату в банк, если ссуда составляет 200 000 руб.

1.248. Контракт предусматривает следующий порядок начисления процентов: первый год — 11%, в каждом последующем полугодии ставка повышается на 1%. Определите множитель наращения за 2,5 года.

1.249. Банк предлагает вкладчикам на двухлетний срок два варианта начисления процентов: 1) в первый год — 2,5% ежеквартально, во второй — по 2% ежеквартально; 2) в первое полугодие — по 3,5% ежеквартально, а в каждом последующем полугодии ежеквартальная ставка убывает на 0,5%. Сравните варианты, используя множитель наращения, для схемы простых и сложных процентов.

1.250. Начальное значение силы роста равно 10%. Ежегодный абсолютный прирост составлял 1,5% в течение 2 лет, затем в течение последующих 3 лет происходило линейное падение силы роста на 2% в год. Чему будет равен множитель наращения за 5 лет?

1.251. Банк принимает депозиты на сумму 1 000 000 руб. на следующих условиях: а) на 1 день — под 2% годовых с последующим реинвестированием ежедневно в течение месяца, б) на 7 дней — под 1,5% годовых с последующим реинвестированием каждую неделю в течение месяца, в) на 1 месяц — под 3% годовых. Выберите наиболее выгодный вариант вложения денежных средств.

1.252. Кредит в размере 100 000 руб. выдается на 4,5 года. Ставка процентов за первый год — 20%, а за каждое последующее полугодие увеличивается на 2%. Определите наращенную сумму долга на конец срока действия кредита.

1.253. Найдите множитель наращения за 6 лет, если банк начисляет простые (сложные) проценты за первый год 10%, а в каждом последующем месяце ставка повышается на 0,1%.

1.254. Срок ссуды — 10 лет, базовая процентная ставка — 15% годовых плюс маржа 0,35% в первые 5 лет и 0,8% в оставшиеся годы. Найдите множитель наращения.

1.255. За какой срок сумма 70 000 руб. достигнет 900 000 руб. при непрерывном начислении процентов? Сила роста во времени изменяется по линейному закону, начальное значение силы роста $\delta_0 = 0{,}2$, а прирост силы роста $a = 0{,}15$.

1.256. Кредит в сумме 30 000 у.е. выдан на 6 лет. Сложная ставка годовых процентов менялась от периода к периоду: на протяжении первых 2 лет действовала ставка 5%, в следующие 2 года — 7%, в последние 2 года — 6%. Какую сумму нужно вернуть в конце шестого года? Чему равна средняя процентная ставка?

1.257. На счет в банке помещено 14 000 руб. В первый год процентная ставка равнялась a%, во второй год — $(a + 3)$%, в третий год — $(a - 1)$%. В конце третьего года счет с процентами достиг величины 19 500 руб. Вычислите процентную ставку a при ежеквартальной капитализации.

1.258. На счет в банке помещено 14 000 руб. под 8,75% годовых. Через 2 года сняли 3000 руб., а еще через год — 6000 руб. Чему будет равен остаток через 6 лет (со времени вложения первого взноса) при ежемесячной капитализации?

1.259. На счет в банке помещено 25 000 руб., а через 5 лет сняли 20 000 руб. Чему будет равна наращенная величина вклада через 12 лет (со дня помещения), если процентная ставка равна 11%, а капитализация полугодовая?

1.260. На счет в банке помещено 160 000 руб. За первые 5 лет и 6 месяцев процентная ставка равнялась 10%, а в следующие 7 лет и 4 месяца — 8%, капитализация полугодовая. Чему будет равна наращенная величина вклада через 12 лет и 10 месяцев?

1.261. Найдите начальное значение силы роста при ее линейном изменении во времени, если долг за 4 года увеличится с 25 000 до 48 000 руб. при приросте силы роста $a = -0{,}2$.

1.262. Банк принимает депозиты на 3 месяца по ставке 4% годовых, на 6 месяцев по ставке 5% годовых и на год по ставке 8% годовых. Определите суммы, которые может получить владелец депозита 770 000 руб., и выберите наиболее выгодный вариант размещения вклада.

1.263. Банк принимает вклады на следующих условиях: на срок 3 месяца с выплатой 10% годовых; на срок 6 месяцев с выплатой 12% годовых; на срок 1 год с выплатой 13,5% годовых. Выплата процентов — по окончании срока действия договора. Найдите наиболее выгодный вариант вложения средств.

1.264. Банк предлагает следующие варианты вложений денежных средств: на срок 1 месяц — 0,8% в месяц; на срок 2 месяца — 1%; на срок 3 месяца — 1,2% в месяц. Минимальная сумма первоначального взноса — 1000 руб. Размер дополнительного взноса — не менее 5000 руб. Производятся ежемесячные начисления процентов и их капитализация. Пролонгация договора по вкладу проводится без явки вкладчика. Определите наиболее выгодную схему вложений: а) для вкладчика, б) для банка.

ГЛАВА 2

ФИНАНСОВЫЕ ПОТОКИ

2.1. Финансовые потоки

Платеж P, произведенный в момент времени t, называется ***финансовым событием***, т.е. финансовое событие — это упорядоченная пара (P, t), состоящая из величины платежа P и момента платежа t. Платежи могут быть со знаком плюс (поступления) или со знаком минус (выплаты).

Конечная или бесконечная последовательность финансовых событий

$$(P_0, t_0), (P_1, t_1), (P_2, t_2), \ldots, (P_n, t_n), \ldots \tag{2.1}$$

называется (конечным или бесконечным) ***дискретным финансовым потоком***.

Пусть финансовый поток

$$CF = \{(P_0, t_0), (P_1, t_1), (P_2, t_2), \ldots, (P_n, t_n), \ldots\}. \tag{2.2}$$

Напомним, деньги имеют временну́ю ценность, что не позволяет непосредственно суммировать платежи, относящиеся к различным моментам времени. Для того чтобы вычислить ***величину потока*** в какой-то момент времени t, необходимо каждый платеж дисконтировать к этому моменту времени по некоторой процентной ставке i, которая предполагается известной и неизменной для всего потока, и затем суммировать эти дисконтированные платежи. Обычно дисконтирование происходит по схеме сложных процентов.

Сумма всех платежей денежного потока, приведенных к некоторому моменту времени t, называется ***текущим***, или ***приведенным***, ***значением потока*** (в момент времени t) и обозначается $PV_t(CF, i)$ (*present value*), или просто PV_t. Таким образом,

$$PV_t = \frac{P_0}{(1+i)^{t_0-t}} + \frac{P_1}{(1+i)^{t_1-t}} + \ldots . \tag{2.3}$$

Для момента $t > t_n$ величина потока равна

$$P = P_0(1+i)^{t-t_0} + P_1(1+i)^{t-t_1} + \ldots + P_n(1+i)^{t-t_n} = \sum_{k=0}^{n} P_k(1+i)^{t-t_k}. \qquad (2.4)$$

Величину (2.4) называют ***будущим накопленным значением*** потока (2.2) и обозначают $FV_t\,(CF, i)$ (*future value*), или просто FV_t.

Средним сроком финансового потока

$$CF = \{(P_0, t_0), (P_1, t_1), (P_2, t_2), \ldots, (P_n, t_n)\} \qquad (2.5)$$

относительно ставки дисконтирования i называется такой момент времени t, для которого приведенная величина равна простой сумме всех платежей

$$PV_t\,(CF) = P_1 + P_2 + \ldots + P_n. \qquad (2.6)$$

Для среднего срока финансового потока имеем

$$t = \frac{P_1 t_1 + \ldots + P_n t_n}{P_1 + \ldots + P_n}. \qquad (2.7)$$

Пример 2.1. Найти средний срок потока

$$CF = \{(0;\ 100), (1;\ 200), (2;\ 400), (3;\ 100)\}.$$

По формуле (2.7) имеем

$$t = \frac{P_1 t_1 + \ldots + P_n t_n}{P_1 + \ldots + P_n} = \frac{100 \cdot 0 + 200 \cdot 1 + 400 \cdot 2 + 100 \cdot 3}{100 + 200 + 400 + 100} = \frac{1300}{800} = 1{,}625;$$
$$t = 1{,}625\ .$$

Отметим, что если все платежи положительные, то $t_1 < t < t_n$, т.е. t лежит между начальным и конечным моментами времени. В общем же случае (когда платежи могут быть разных знаков) средний срок потока может лежать вне временно́го интервала платежей.

Пример 2.2. Пусть $CF = \{(1; -1300), (2;\ 1500), (3;\ 2500)\}$ — поток платежей. Найти приведенную стоимость и наращенную величину потока при ставке 10% по схеме сложных процентов.

Приведенная стоимость равна

$$PV(0) = \frac{-1300}{1+0{,}1} + \frac{1500}{(1+0{,}1)^2} + \frac{2500}{(1+0{,}1)^3} = -1181{,}81 + 1239{,}67 + 1878{,}29 = 1936{,}15.$$

Наращенная величина потока составляет

$$FV = PV(0)(1 + i)^3 = 1936{,}15(1 + 0{,}1)^3 = 2577{,}02.$$

Пример 2.3. Приведите поток

$$CF = \{(1;\ 900),\ (2;\ -200),\ (5;\ 450),\ (7;\ 800)\}$$

к моменту времени $t = 3$ при ставке 9%.

$$CF_3 = 900 \cdot (1+0{,}09)^{3-1} - 200 \cdot (1+0{,}09)^{3-2} + 450 \cdot (1+0{,}09)^{3-5} +$$
$$+800 \cdot (1+0{,}09)^{3-7} = 900 \cdot 1{,}09^2 - 200 \cdot 1{,}09^1 + \frac{450}{1{,}09^2} + \frac{800}{1{,}09^4} =$$
$$= 1069{,}29 - 218 + 378{,}76 + 566{,}74 = 1796{,}79.$$

Вопросы и задачи

2.1. Дайте определение финансового события и финансового потока.

2.2. Дайте определение и выведите формулу для среднего срока финансового потока.

2.3. Приведите поток $CF = \{(0;\ 600),\ (1;\ 250),\ (2;\ 350),\ (3;\ 600)\}$ к моменту времени $t = 2$ при ставке 8%.

2.4. Пусть $CF\ \{(0;\ -2500),\ (2;\ 2000),\ (4;\ 3000)\}$ — поток платежей и процентная ставка составляет 10%. Найдите приведенную стоимость и наращенную величину этого потока.

2.5. Даны два потока: $CF_1 = \{(1;\ 200),\ (2;\ 250),\ (3;\ 150)\}$ и $CF_2 = \{(1;\ 150),\ (2;\ 300),\ (3;\ 100)\}$. Какой из них предпочтительнее и почему?

2.6. Сравните два потока по среднему сроку:

$$CF_1 = \{(0;\ 500),\ (1;\ 300),\ (2;\ 450),\ (3;\ 100)\},$$
$$CF_2 = \{(0;\ 600),\ (1;\ 250),\ (2;\ 350),\ (4;\ 50)\}.$$

2.2. Внутренняя норма доходности

В общем случае говорят, что финансовый поток обладает внутренней нормой доходности (*IRR*), если уравнение для параметра i

$$NPV(i) = 0 \tag{2.8}$$

имеет единственное решение $i_0 > -1$; решение уравнения (2.8) называется внутренней нормой доходности финансового потока. Здесь *NPV* — чистый приведенный доход, равный сумме приведенных величин всех платежей (как положительных, так и отрицательных). Таким образом, **внутренняя норма доходности** — это такая процентная ставка (ставка дисконтирования), при которой чистый приведенный доход NPV обращается в ноль. Внутренняя норма доходности определяет максимальную доходность, выраженную в виде годовой процентной ставки, которую может получить инвестор и при которой проект все еще остается выгодным $NPV \geq 0$.

Пример 2.4. Определить доходность инвестиций, выраженную в виде годовой ставки сложного процента, если первоначальное вложение составляет 180 000 руб., а ежегодные доходы в конце каждого года будут равны 30 000 руб. Срок вложения — 17 лет.

Воспользуемся формулой для приведенной величины ренты постнумерандо

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Подставляя в формулу данные задачи, получим

$$180\,000 = 30\,000\ \frac{1-(1+i)^{-17}}{i},\quad 6 = \frac{1-(1+i)^{-17}}{i}.$$

Это уравнение 18-й степени относительно i может быть решено либо численно, либо с использованием приближенной формулы. Сначала решим его, подставляя в правую часть значения i и сравнивая полученный результат с левой частью.

Пусть $i = 10\%$. Тогда правая часть равна 8,02. Чтобы понизить величину правой части, ставку нужно увеличивать (это следует из структуры правой части).

При $i = 14\%$ правая часть равна 6,37. Выполнив еще несколько подстановок $i = 15\%$, 6,047, $i = 15{,}5\%$, 5,89, $i = 15{,}2\%$, 5,985, $i = 15{,}15\%$, 6,0007, находим доходность инвестиций $i = 15{,}15\%$.

Используя приближенную формулу

$$i \approx \frac{(R\cdot n)^2 - A^2}{A\cdot R\cdot n^2},\quad i \approx \frac{(30\,000\cdot 17)^2 - 180\ 000^2}{180\,000\cdot 30\,000\cdot 17^2} \approx 15{,}45\%,$$

получим для доходности инвестиций значения $i = 15{,}45\%$. Таким образом, ошибка при использовании приближенной формулы составляет 0,3%.

Вопросы и задачи

2.7. Дайте определение внутренней нормы доходности.

2.8. Исследуйте зависимость чистого приведенного дохода (*NPV*) от ставки приведения (принятой нормы доходности) i. Приведите качественный график данной зависимости.

2.9. Найдите внутреннюю норму доходности потока

$$CF = \{(0; -500), (1; 250), (2; 300)\}.$$

2.10. Найдите внутреннюю норму доходности потока

$$CF = \{(0; -400), (1; -350), (2; 2500)\},$$

используя разделение потока на «положительный» и «отрицательный».

2.11. Докажите, что любой типичный инвестиционный поток имеет однозначно определенную внутреннюю норму доходности.

2.12. Найдите внутреннюю норму доходности потока

$$CF = \{(0; -2500), (1; 2000), (2; 2500)\}.$$

2.13. Определите доходность инвестиций, выраженную в виде годовой ставки процента, если известно, что на 25 000 руб. вложений доход составит по 3000 руб. ежегодно в течение 17 лет.

2.14. Найдите внутреннюю норму доходности (*IRR*) потока платежей $\{(0; -3000), (1; 2000), (2; 2500)\}$.

2.3. Обыкновенные ренты

Поток положительных платежей, разделенных равными временны́ми интервалами, называется ***финансовой рентой***, или просто ***рентой***. Промежуток времени между двумя последовательными платежами называют ***периодом*** ренты (*rent period*, *payment period*). Считается, что каждый платеж производится либо в начале соответствующего ему периода, либо в конце. В первом случае ренту называют ***авансовой***, или ***пренумерандо*** (*annuity due*), во втором — ***обыкновенной***, а также ***подрасчетной***, или рентой ***постнумерандо*** (*ordinary annuity*). Ренты с конечным числом платежей называют ***конечными***. Промежуток времени между началом первого периода и окончанием последнего называется ***сроком*** конечной ренты. Ренты с бесконечным числом платежей называют ***бесконечными***, ***вечными***, или ***перпетуитетами*** — (*perpetuity*). Если все платежи равны между собой, ренту называют ***постоянной***. (Значительная часть главы 2 посвящена рассмотрению именно постоянных рент.)

Графическое изображение годовых постоянных рент пренумерандо и постнумерандо представлено на рис. 2.1 и 2.2.

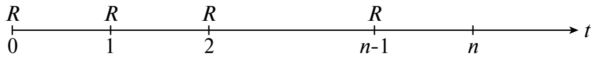

Рис. 2.1. Конечная годовая постоянная рента пренумерандо

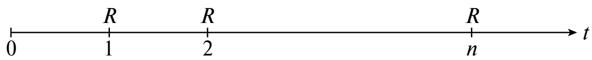

Рис. 2.2. Конечная годовая постоянная рента постнумерандо

Рента описывается следующими параметрами: размером отдельного платежа (член ренты), периодом ренты, сроком ренты и процентной ставкой, а также числом платежей в году (p-срочные ренты, непрерывные ренты ($p \to \infty$)) и методом (простые, сложные и непрерывные проценты) и частотой начисления процентов (ренты с ежегодным начислением процентов, с начислением k раз в году (k-кратные ренты), с непрерывным начислением).

Приведенная (текущая) стоимость A ренты постнумерандо равна

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \tag{2.9}$$

Множитель при R в правой части (2.9) называют ***коэффициентом приведения*** годовой (обыкновенной) ренты. В финансовых вычислениях его принято обозначать символом $a_{\overline{n}|i}$. Таким образом,

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \tag{2.10}$$

Коэффициент приведения ренты показывает, во сколько раз современная величина ренты больше величины платежа (годового).

Наращенная сумма S ренты определяется равенством

$$S = R\frac{(1+i)^{n}-1}{i}. \tag{2.11}$$

Множитель при R в правой части (2.11) называют ***коэффициентом наращения*** аннуитета и обозначают символом $s_{\overline{n}|i}$. Таким образом,

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^{n}-1}{i}. \tag{2.12}$$

Коэффициент наращения ренты имеет смысл, аналогичный коэффициенту приведения ренты: он показывает, во сколько раз наращенная величина ренты больше величины платежа.

Из (2.12) следует, что коэффициент наращения аннуитета зависит только от его срока (числа членов) и процентной ставки. При этом связь коэффициентов наращения и приведения аннуитета имеет вид

$$s_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i} \cdot (1+i)^n. \tag{2.13}$$

Аналогичная связь существует и между приведенной и наращенной величинами ренты постнумерандо

$$S = A(1+i)^n. \tag{2.14}$$

Пример 2.5. Определить размер вклада, который обеспечивает ежегодное (в конце года) получение дохода величины 1700 в течение 19 лет, если процентная ставка равна 11%.

Представим финансовую операцию в виде потока платежей

$$CF = \{(0; -x), (1; 1700), (2; 1700), ..., (19; 1700)\},$$

где x — размер начального вклада.

Выплата будет обеспечена, если приведенная величина потока отрицательна или равна нулю. Для определения величины x используем неравенство $PV < 0$, т.е.

$$-x + \frac{1700}{1+0{,}11} + \frac{1700}{(1+0{,}11)^2} + \ldots + \frac{1700}{(1+0{,}11)^{19}} < 0.$$

Суммируя геометрическую прогрессию, приходим к неравенству

$$x > 1700\frac{1-(1+0{,}11)^{-19}}{0{,}11}.$$

Отсюда $x > 13\,326{,}8$.

Пример 2.6. Формируется фонд на основе ежегодных отчислений в сумме 8000 у.е. с начислением на них сложных процентов по ставке 11%. Определить величину фонда через 10 лет.

Имеем R — 8000 у.е., $i = 0{,}11$, $n = 10$. Тогда

$$FV = 8000\frac{(1+0{,}11)^{10} - 1}{0{,}11} = 133\,776{,}07 \text{ у.е.}$$

Вопросы и задачи

2.15. Для создания премиального фонда один раз в год производятся взносы в размере 15 000 руб. На вносимые средства начисляются проценты под 12% годовых. Определите размер фонда через 7 лет в следующих случаях: а) поступление средств в конце года, ежеквартальное начисление процентов, б) поступление средств в конце квартала, начисление процентов 6 раз в году, в) ежемесячное поступление средств и ежеквартальное начисление процентов.

2.16. Фонд создается в течение 5 лет. Средства поступают в фонд в конце года по 50 000 руб., на них начисляется 13% годовых. В каком случае сумма фонда станет больше: а) при переходе к ежемесячным взносам в конце каждого месяца, б) при переходе к ежедневной капитализации процентов ($K = 365$ дней)?

2.17. Какую сумму нужно положить в банк женщине в пенсионном возрасте 55 лет, чтобы в течение 18 лет в конце каждого года снимать по 3000 у.е., если на остаток вклада меньше 10 000 у.е. начисляется 3% годовых, больше или равно 10 000 у.е. — 4% годовых?

2.18. Определите размер вклада, который обеспечивают ежегодное (в конце года) получение дохода величины 20 000 руб.: а) в течение 15 лет, б) в течение неограниченного срока, если процентная ставка равна 8%.

2.19. Стоит ли покупать за 965 руб. облигацию номиналом 1000 руб. и длительностью 4 года, если в конце каждого полугодия она дает 50 руб. процентного дохода и в конце срока погашается по номиналу и если есть возможность поместить эти денежные средства в банк под 11% годовых?

2.20. Фонд создается в течение 7,5 лет. На собранные средства начисляется 6,5% годовых. Годовые платежи по 40 000 руб. поступают в конце каждого месяца. На сколько процентов возрастет наращенная сумма фонда, если перейти к смешанной форме начисления процентов (за целое число лет начисляют сложные проценты, а за дробную часть года — простые)?

2.21. Фонд создается в течение 10 лет. Средства поступают в фонд в конце года равными суммами. На собранные средства в конце года начисляется 10% годовых. На сколько процентов возрастет наращенная сумма фонда при переходе: а) к ежемесячным взносам в конце каждого месяца, б) ежемесячному начислению процентов?

2.22. В течение 3 лет создается фонд. Взносы в сумме 56 000 у.е. поступают в конце каждого месяца. На поступившие средства начисляется 4,25% годовых. Чему равна сумма фонда, если: а) начисляются простые проценты, б) сложные проценты?

2.23. Фонд создается в течение 7 лет, взносы поступают в конце каждого полугодия равными суммами. На поступившие средства в конце года начисляется 12% годовых. На сколько процентов возрастет сумма фонда в конце седьмого года при переходе к непрерывной капитализации процентов?

2.24. В течение 8 лет создается фонд, годовые взносы в сумме 250 000 у.е. вносятся в конце каждого года под 4% годовых. На сколько можно уменьшить годовой взнос в фонд, чтобы получить ту же наращенную сумму, если взносы вносятся: а) в начале года, б) в начале каждого полугодия?

2.25. Сколько лет должна выплачиваться рента с годовым платежом 5000 руб., чтобы ее текущая стоимость превзошла величину 35 000 руб. при процентной ставке 9% годовых?

2.26. Какую сумму нужно положить в банк под 12% годовых мужчине 37 лет, чтобы по достижении им пенсионного возраста 60 лет в течение 15 лет в начале каждого месяца снимать по 10 000 рублей, если проценты капитализируются: а) в конце года, б) в конце каждого полугодия, в) в конце каждого квартала, г) в конце каждого месяца?

2.27. Семья планирует через 5 лет купить квартиру за 1 900 000 руб. и с этой целью ежемесячно на банковский депозит вносится определенная сумма. Какова эта сумма, если годовая банковская ставка составляет 11% с ежемесячным начислением процентов?

(Указание: используйте сведения по *p*-срочным рентам, см. п. 2.5.2).

2.28. Какую сумму нужно положить в банк под 8% женщине 42 лет, чтобы по достижении ею пенсионного возраста 55 лет в течение 25 лет в начале каждого месяца снимать по 15 000 руб., если проценты капитализируются: а) в конце года, б) в конце каждого полугодия, в) в конце каждого квартала, г) в конце каждого месяца?

(Указание: используйте сведения по *p*-срочным рентам, см. п. 2.5.2).

2.29. Резервный фонд создается в течение 18 лет. На поступающие в него средства начисляются сложные проценты по ставке 4,5% годовых. На протяжении первых 6 лет в конце каждого года в фонд вносили по 15 000 у.е., в течение последующих 4 лет — по 18 000 у.е., а в последние 8 лет — по 22 000 у.е. Чему будет равна сумма фонда через 18 лет?

(Указание: используйте сведения по *p*-срочным рентам, см. п. 2.5.2).

2.30. Фонд создается в течение 6 лет. На поступающие в него средства начисляется 3,45% годовых. Сумма годового взноса — 12 000 у.е., проценты начисляются в конце года. На сколько увеличится наращенная сумма при: а) ежедневных взносах, б) ежедневной капитализации процентов, в) ежедневных взносах и ежедневной капитализации процентов ($K = 365$ дней)?

(Указание: используйте сведения по p-срочным рентам, см. п. 2.5.2).

2.31. Резервный фонд создается в течение 10 лет. Взносы в него поступают в конце года в размере 4000 у.е. В течение первых 3 лет на поступившие средства начислялись 4%, в последующие 5 лет — 4,25% годовых и в последние 2 года — 4,75%. Определите величину резервного фонда.

2.32. Фирма не доплачивала 1000 у.е. налогов ежемесячно. Какую сумму она должна выплатить за последние 6 лет (налоги вместе с процентами (0,5% ежемесячно))?

(Указание: используйте сведения по p-срочным рентам, см. п. 2.5.2).

2.33. По вине Пенсионного фонда семье в течение 3 лет не доплачивали 625 руб. ежемесячно. Какую сумму должен выплатить фонд вместе с процентами (10% годовых)?

(Указание: используйте сведения по p-срочным рентам, см. п. 2.5.2).

2.34. Каждый год (с 1901 г.) присуждается шесть Нобелевских премий по 1 200 000 у.е. и 1 000 000 у.е. идет на организационные расходы. Какую сумму завещал Нобель на учреждение международных научных премий, если эта сумма была положена в банк под 10% годовых?

2.35. Студент получил кредит на пятилетнее обучение в вузе в размере 1 000 000 руб. под 4% годовых. Он обязуется выплачивать 25% от годовой зарплаты 240 000 руб. в конце года. Через сколько лет после окончания вуза он выплатит кредит?

(Указание: используйте сведения по p-срочным рентам, см. п. 2.5.2).

2.36. Семья имела на банковском счете 50 000 у.е., на который ежемесячно начислялись 2%. Отбыв в трехлетнюю командировку, она доверила банку потратить за это время весь счет на содержание сына. Сколько в месяц будет получать сын?

(Указание: используйте сведения по p-срочным рентам, см. п. 2.5.2).

2.37. Для ренты длительностью в 5 лет, в которой только один платеж в конце года и годовая ставка процента составляет 12%, определить, что более повысит наращенную величину ренты — увеличение длительности ренты на 1 год или процентной ставки на 1%?

2.3.1. Коэффициенты приведения и наращения за несколько соседних периодов

В случе нескольких (k) соседних периодов $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$

$$a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n_1}|i} + a_{\overline{n_2}|i}\nu^{n_1} + a_{\overline{n_3}|i}\nu^{n_1+n_2} + \ldots + a_{\overline{n_k}|i}\nu^{n_1+n_2+\ldots+n_{k-1}}; \qquad (2.15)$$

$$s_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n_k}|i} + s_{\overline{n_{k-1}}|i} \cdot v^{-n_k} + s_{\overline{n_{k-2}}|i} \cdot v^{-n_k - n_{k-1}} + \ldots + s_{\overline{n_1}|i} \cdot v^{-n_k - n_{k-1} - \ldots - n_2}. \qquad (2.16)$$

Пример 2.7. Найти коэффициент приведения за три соседних периода продолжительностью 1, 2, и 3 соответственно при ставке 10%.

Сначала определим коэффициенты приведения для каждого из периодов.

Используем формулу (2.10)

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Получаем

$$a_{\overline{n_1}|i} = \frac{1-(1+0{,}1)^{-1}}{0{,}1} = 0{,}909, \quad a_{\overline{n_2}|i} = \frac{1-(1+0{,}1)^{-2}}{0{,}1} = 1{,}736,$$

$$a_{\overline{n_3}|i} = \frac{1-(1+0{,}1)^{-3}}{0{,}1} = 2{,}487.$$

Далее по формуле (2.15)

$$a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n_1}|i} + a_{\overline{n_2}|i} v^{n_1} + a_{\overline{n_3}|i} v^{n_1+n_2} + \ldots + a_{\overline{n_k}|i} v^{n_1+n_2+\ldots+n_{k-1}}$$

имеем

$$a_{\overline{n}|i} = 0{,}909 + 1{,}736 \cdot \frac{1}{1{,}1^1} + 2{,}487 \cdot \frac{1}{1{,}1^{1+2}} =$$

$$= 0{,}909 + 1{,}578 + 1{,}869 = 4{,}356.$$

Результат легко проверить непосредственным вычислением коэффициента $a_{\overline{n}|i}$.

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{1-(1+0{,}1)^{-6}}{0{,}1} = 4{,}355.$$

Вопросы и задачи

2.38. Получите выражения для коэффициентов приведения и наращения ренты постнумерандо за два соседних периода.

2.39. Получите выражения для коэффициентов приведения и наращения ренты постнумерандо за несколько ($k > 2$) соседних периодов.

2.40. Получите выражения для коэффициентов приведения и наращения ренты пренумерандо за два соседних периода.

2.41. Получите выражения для коэффициентов приведения и наращения ренты пренумерандо за несколько ($k > 2$) соседних периодов.

2.42. Найдите коэффициент наращения за четыре соседних периода продолжительностью 1; 2,5 и 3 соответственно при ставке 8%.

2.3.2. Рента пренумерандо

Приведенная стоимость $\ddot{A}$ ренты пренумерандо равна

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i). \tag{2.17}$$

Множитель при R в правой части (2.17) называют ***коэффициентом приведения ренты пренумерандо***. В финансовых вычислениях его принято обозначать символом $\ddot{a}_{\overline{n}|i}$. Таким образом,

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i). \tag{2.18}$$

Коэффициент приведения ренты пренумерандо показывает, во сколько раз современная величина ренты больше величины платежа (годового).

Приведенная величина ренты $\ddot{A} = R \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|i}$.

Наращенная сумма $\ddot{S}$ ренты пренумерандо определяется равенством

$$\ddot{S} = R\frac{(1+i)^n-1}{i}(1+i). \tag{2.19}$$

Множитель при R в правой части (2.19) называют ***коэффициентом наращения ренты пренумерандо*** и обозначают символом $\ddot{s}_{\overline{n}|i}$. Таким образом,

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n-1}{i}(1+i). \tag{2.20}$$

Коэффициент наращения ренты пренумерандо имеет смысл, аналогичный коэффициенту приведения ренты пренумерандо: он показывает, во сколько раз наращенная величина ренты пренумерандо больше величины платежа.

Из (2.20) следует, что коэффициент наращения ренты пренумерандо, как и постнумерандо, зависит только от его срока (числа членов) и процентной ставки. При этом связь коэффициентов наращения и приведения ренты имеет вид, аналогичный случаю ренты постнумерандо:

$$\ddot{s}_{\overline{n|}i} = \ddot{a}_{\overline{n|}i} \cdot (1+i)^n. \tag{2.21}$$

2.3.3. Связь между приведенной величиной и наращенной суммой аннуитета

$$S = A(1+i)^n = \nu^{-n} A\,. \tag{2.22}$$

Здесь $\nu = (1+i)^{-1}$.

Отсюда

$$A = S(1+i)^{-n} = \nu^n S\,. \tag{2.23}$$

При начислении процентов k раз в году получаем

$$S = A(1+i/k)^{kn}; \tag{2.24}$$

$$A = S(1+i/k)^{-kn}. \tag{2.25}$$

Аналогичная связь, как отмечалось выше, существует и между коэффициентами приведения и наращения:

$$s_{\overline{n|}i} = a_{\overline{n|}i} \cdot (1+i)^n = a_{\overline{n|}i}\nu^{-n},\ a_{\overline{n|}i} = s_{\overline{n|}i} \cdot (1+i)^{-n} = s_{\overline{n|}i}\nu^n. \tag{2.26}$$

2.3.4. Связь между коэффициентами приведения и наращения рент пренумерандо и постнумерандо

Следующие соотношения, связывающие коэффициенты приведения и наращения рент пренумерандо и постнумерандо, вытекают непосредственно из определений:

$$\ddot{a}_{\overline{n|}i} = 1 + \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} = (1+i)a_{\overline{n|}i}; \tag{2.27}$$

$$\ddot{s}_{\overline{n|}i} = (1+i)^n + (1+i)^{n-1} + \ldots + (1+i) = (1+i)s_{\overline{n|}i}. \tag{2.28}$$

Вопросы и задачи

2.43. Дайте определение ренты, ренты пренумерандо, ренты постнумерандо.

2.44. Какими параметрами описывается рента?

2.45. Выведите формулы для коэффициентов приведения и наращения ренты постнумерандо.

2.46. Выведите формулы для коэффициентов приведения и наращения ренты пренумерандо.

2.47. Выведите связь между величинами $\ddot{s}_{\overline{n}|i}$ и A.

2.48. Выведите связь между величинами $\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ и S.

2.49. Выведите связь между величинами S и A.

2.50. Выведите связь между величинами S и $\ddot{s}_{\overline{n}|i}$.

2.51. Выведите связь между величинами $\ddot{S}$ и A.

2.52. Выведите связь между приведенной величиной и наращенной суммой аннуитета.

2.53. Выведите связь между коэффициентами приведения и наращения рент пренумерандо и постнумерандо.

2.4. Расчет параметров ренты

Рассмотрим параметры, характеризующие ренту: размер отдельного платежа R, срок ренты n, процентную ставку i, наращенную сумму S, приведенную величину ренты A. Эти величины являются зависимыми, поэтому одни из них можно выразить через другие. Подобные расчеты применяются для нахождения неизвестных параметров ренты [2]. При этом возможны различные случаи.

1. Пусть известны n, i, R. Тогда наращенную сумму S и приведенную величину ренты A можно найти по формулам

$$A = R \cdot a(n,i)\,,\ \ S = R \cdot s(n,i)\,, \tag{2.29}$$

где $a(n, i)$ и $s(n, i)$ — соответственно коэффициенты приведения и наращения ренты, их величины можно взять из соответствующих таблиц, зная срок ренты n и процентную ставку i.

2. Если известны A, i, R, то n находится из уравнения

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \tag{2.30}$$

и равно

$$n = \left[-\frac{\ln(1 - Ai / R)}{\ln(1+i)} \right]. \tag{2.31}$$

Здесь [...] означает целую часть числа.

Альтернативным методом определения n является решение уравнения $A = R \cdot a(n, i)$ относительно n. Имеем $A/R = a(n, i)$, далее находим n по таблице коэффициентов приведения ренты.

3. Аналогично предыдущему случаю, если известны S, i, R, то n находится из уравнения

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} \tag{2.32}$$

и равно

$$n = \left[\frac{\ln(1 + Si/R)}{\ln(1+i)}\right]. \tag{2.33}$$

n может быть также найдено из уравнения $S = R \cdot s(n, i)$. Имеем $S/R = s(n, i)$, далее находим n по таблице коэффициентов наращения ренты.

4. Если известны n, i, A, то $R = A/a(n, i)$.

5. При известных n, i, S $R = S/s(n, i)$.

6. Если заданы n, R, A, то процентная ставка i определяется из уравнения

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \tag{2.34}$$

7. Если заданы n, R, S, то процентная ставка i определяется из уравнения

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}. \tag{2.35}$$

Уравнения (2.34) и (2.35) не решаются аналитически, их можно решить только приближенно. Для нахождения процентной ставки i можно использовать линейное приближение либо итерационный метод.

Пример 2.7. Найти срок ренты постнумерандо, если известны $S = 2000$, $i = 15\%$, $R = 100$.

Воспользуемся формулой (2.33)

$$n = \left[\frac{\ln(1 + Si/R)}{\ln(1+i)}\right] = \left[\frac{\ln(1 + 2000 \cdot 0{,}15/100)}{\ln(1+0{,}15)}\right] =$$

$$= \left[\frac{\ln 4}{\ln 1{,}15}\right] = \left[\frac{1{,}386}{0{,}140}\right] = [9{,}9] = 9.$$

Итак, срок ренты составляет 9 лет (если брать целую часть срока ренты), точнее, 9,9 лет.

Вопросы и задачи

2.54. Пусть известны n, i, R. Найдите наращенную сумму S и приведенную величину ренты A.

2.55. Пусть известны A, i, R. Найдите срок ренты n.

2.56. Пусть известны S, i, R. Найдите срок ренты n.

2.57. Пусть известны n, i, A. Найдите рентный платеж R.

2.58. Пусть известны n, i, S. Найдите рентный платеж R.

2.59. Пусть заданы n, R, A. Найдите процентную ставку i.

2.60. Пусть заданы n, R, S. Найдите процентную ставку i.

2.61. Найдите срок ренты пренумерандо, если известны $S = 450$, $i = 12\%$, $R = 100$.

2.62. Кредит в сумме 500 000 у.е. выдан под 10% годовых. Планируется погасить задолженность, выплачивая по 68 000 у.е. в конце каждого года. За какой срок можно погасить задолженность? На сколько нужно увеличить намеченную сумму выплат, чтобы погасить задолженность не более чем за 8 лет?

2.63. Найдите срок ренты пренумерандо, если известны $A = 1000$, $i = 11\%$, $R = 200$.

2.64. Найдите срок ренты постнумерандо, если известны $A = 1500$, $i = 13\%$, $R = 250$.

2.65. Установите связь между приведенной и наращенной величинами ренты с k-кратным начислением процентов.

2.66. От каких параметров ренты зависит связь между приведенной и наращенной величинами ренты?

2.67. В течение 16 лет создается фонд. Взносы в конце каждого года составляют 15 000 у.е., на поступающие средства начисляется 4,5% годовых. Первые 6 лет взносы поступали согласно намеченному плану. Затем порядок взносов был изменен: в конце восьмого и в начале двенадцатого годов в фонд внесли по равной сумме S так, чтобы к концу шестнадцатого года получить намеченную ранее сумму фонда. На суммы S проценты начисляются по той же ставке, что и ранее. Чему равно значение S?

2.68. На счет в банке в течение 10 лет в конце каждого полугодия вносили по 5000 у.е. под 4% годовых. Со счета в конце пятого и шестого годов было снято по 5000 у.е. Накопление денежных средств было продолжено на этом счете по той же ставке процентов. Начиная с конца одиннадцатого года на счет в конце года вносили по 7000 у.е. в течение 5 лет. Какова сумма счета к концу пятнадцатого года?

2.69. Клиент банка в возрасте 25 лет решил создать фонд по дополнительной оплате к пенсии. Для этого он решил в течение 35 лет в конце каждого года вносить в банк по 300 у.е. под 3,5% годовых. Какую сумму можно будет снимать со счета ежемесячно, в конце каждого месяца, после достижения пенсионного возраста в 60 лет, чтобы на протяжении 15 лет (нынешний «срок дожития») полностью исчерпать накопленный фонд? На остаток средств в фонде начисляется 5% годовых.

2.70. Сколько лет должна выплачиваться рента с годовым платежом 1000 руб., чтобы ее приведенная стоимость превзошла величину 7000 руб. при процентной ставке 12% годовых?

2.71. Семья планирует через 5 лет купить машину за 50 000 у.е. С этой целью ежегодно (в конце года) на банковский депозит вносится определенная сумма в у.е. Найти этот ежегодный платеж, если годовая банковская ставка составляет 13%.

2.5. Вечные, срочные и непрерывные ренты

2.5.1. Вечные ренты

Рассмотрим вечную ренту

$$\{(0;\,0),\,(R;\,1),\,(R;\,2),\,...\}. \tag{2.36}$$

Ее приведенная стоимость A определяется как сумма ряда

$$A=\frac{R}{1+i}+\frac{R}{(1+i)^2}+\ldots\,. \tag{2.37}$$

и равна

$$A=\frac{R}{1+i}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{1+i}}=\frac{R}{i}. \tag{2.38}$$

Очевидно, что

$$\lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|i}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=\frac{1}{i}, \tag{2.39}$$

что согласуется с (2.38). С учетом этого полагаем

$$a_{\overline{\infty}|i}=\frac{1}{i}. \tag{2.40}$$

Равенство (2.38), записанное в виде

$$R = Ai, \tag{2.41}$$

можно интерпретировать следующим образом: заплатив (отдав в долг «навсегда») сумму A, владелец вечной ренты получает право на получение рентных платежей, равных процентам на сумму A.

Отметим, что наращенная величина вечной ренты, как и коэффициент наращения, равна бесконечности. Для последнего имеем

$$s_{\overline{\infty}|i} = \lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|i}(1+i)^n = a_{\overline{\infty}|i}\cdot\infty = \infty.$$

Пример 2.8. Найти размер вклада, обеспечивающего получение в конце каждого года 2000 руб. бесконечно долго при сложной ставке 14% годовых.

По формуле (2.38)

$$A = \frac{R}{i} = \frac{2000}{0{,}14} = 14\,285{,}71 \text{ руб.}$$

Итак, положив на вклад 14 285,71 руб. под 14% годовых, владелец вклада (и его наследники) будет получать 2000 руб. в конце каждого года бесконечно долго.

Пример 2.9. Во сколько раз больше будет наращенная сумма в конце n-го периода при ежепериодном (в конце периода) платеже R, чем при разовом платеже R в начальный момент времени?

Наращенная сумма в конце n-го периода при платежах R в конце периода равна

$$S_1 = R\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i}(1+i)\,.$$

Наращенная сумма в конце n-го периода при разовом платеже R в начальный момент времени равна

$$S_2 = R\cdot(1+i)^n\,.$$

Искомое отношение S_1/S_2 равно

$$\frac{S_1}{S_2} = R\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i}(1+i)\Big/R(1+i)^n = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i) = \ddot{a}_{\overline{n}|i}.$$

Видим, что это отношение равно коэффициенту приведения ренты пренумерандо.

Пример 2.10. Для бессрочной (вечной) ренты определить, что больше увеличит приведенную стоимость этой ренты: увеличение рентного платежа на 1% или уменьшение процентной ставки на 1%?

Приведенная стоимость вечной ренты равна $A = \frac{R}{i}$.

При увеличении рентного платежа на 1% R заменяется на $1{,}01R$ и приведенная стоимость ренты становится равной $A = \frac{1{,}01R}{i} = 1{,}01A$.

При уменьшении процентной ставки на 1% i заменяется на $0{,}99i$ и приведенная стоимость ренты становится равной $A = \frac{R}{0{,}99i} = 1{,}01A$.

Во втором случае приведенная стоимость ренты больше, следовательно, уменьшение процентной ставки на 1% больше увеличивает приведенную стоимость вечной ренты, чем увеличение рентного платежа на 1%.

Вопросы и задачи

2.72. Дайте определение вечной, срочной и непрерывной рент.

2.73. Найдите приведенную величину и наращенную сумму вечной ренты.

2.74. Увеличится ли приведенная стоимость бессрочной (вечной) ренты, если платежи сделать в 2 раза чаще, а годовую процентную ставку в 2 раза уменьшить? Ответ обосновать.

2.75. Для бессрочной (вечной) ренты определить, что больше увеличит приведенную стоимость этой ренты: увеличение рентного платежа на 15% или уменьшение процентной ставки на 15%?

2.5.2. *p*-срочная рента

Когда рентный платеж R производится не единовременно (один раз в конце годового периода), а разбит на p одинаковых платежей, равномерно распределенных в течение года, то соответствующий поток платежей имеет вид:

$$CF = \{(R/p;\ 1/p),\ (R/p;\ 2/p),\ \ldots,\ (R/p;\ n - 1/p)),\ (R/p;\ n)\} \quad (2.42)$$

и называется ***p*-срочной рентой** (рис. 2.3). Пусть при этом начисление процентов производится k раз в году. Рассмотрим следующие случаи: $k = 1$, $k = p$, $k \uparrow p$.

Рис. 2.3. *p*-срочная рента постнумерандо

Рис. 2.4. *p*-срочная рента пренумерандо

p-срочная рента (случай $k = 1$)

Найдем приведенную величину *p*-срочной ренты постнумерандо. Всего за *n* лет производится *np* платежей по R/p каждый. Приводя их к $t = 0$, получаем ***приведенную стоимость p-срочной ренты***:

$$A^{(p)} = \frac{R}{p(1+i)^{1/p}} \cdot \frac{1-(1+i)^{-np/p}}{1-(1+i)^{-1/p}} = \frac{R}{p} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{1/p}-1}. \tag{2.43}$$

Множитель

$$a_{\overline{n}|i}^{(p)} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{1/p}-1} \tag{2.44}$$

называется ***коэффициентом приведения p-срочной ренты***.

Для ***наращенной величины p-срочной ренты*** имеем

$$S(p) = \frac{R}{p} \cdot \frac{(1+i)^{n}-1}{(1+i)^{1/p}-1} = Rs_{\overline{n}|i}^{(p)}. \tag{2.45}$$

Множитель

$$s_{\overline{n}|i}^{(p)} = \frac{1}{p} \cdot \frac{(1+i)^{n}-1}{(1+i)^{1/p}-1} \tag{2.46}$$

называется ***коэффициентом наращения p-срочной ренты***.

Связь между приведенной и наращенной величинами *p*-срочной ренты имеет такой же вид, как и для обычной годовой ренты

$$S^{(p)} = A^{(p)} \cdot (1+i)^{n}. \tag{2.47}$$

p-срочная рента (случай $k \neq p$)

Рассмотрим наиболее общий случай — *p*-срочную ренту с начислением процентов *k* раз в году. Для ***наращенной величины p-срочной ренты*** имеем

$$S(p) = \frac{R}{p} \cdot \frac{(1+i/k)^{(k/p)(np)}-1}{(1+i/k)^{k/p}-1} = R \cdot \frac{(1+i/k)^{kn}-1}{p\left[(1+i/k)^{k/p}-1\right]} = Rs_{\overline{kn}|i/k}^{(p)}. \tag{2.48}$$

Для приведенной стоимости ренты имеем

$$A(p) = R \cdot \frac{1-(1+i/k)^{-nk}}{p\left[(1+i/k)^{k/p}-1\right]} = Ra^{(p)}_{\overline{kn}|i/k}. \qquad (2.49)$$

Связь между приведенной и наращенной величинами *p*-срочной ренты с *k*-кратным начислением процентов

$$S_k^{(p)} = A_k^{(p)} \cdot (1+i/k)^{kn}, \;\; A_k^{(p)} = S_k^{(p)} \cdot (1+i/k)^{-kn}. \qquad (2.50)$$

***p*-срочная рента (случай $k = p$)**

Число членов ренты равно числу начислений процентов, платежи по R/k каждый. Этот случай наиболее часто встречается на практике. Из (2.49), полагая $p = k$, получаем для приведенной стоимости ренты

$$A^{(p)} = \frac{R}{k} \cdot \frac{1-(1+i/k)^{-nk}}{i/k} = R \cdot \frac{1-(1+i/k)^{-nk}}{i}. \qquad (2.51)$$

Множитель

$$a^{(p)}_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i/p)^{-np}}{i} \qquad (2.52)$$

является коэффициентом приведения p-срочной ренты в случае $k = p$.

Для наращенной величины p-кратной ренты получаем

$$S^{(p)} = \frac{R}{k} \cdot \frac{(1+i/k)^{nk}-1}{i/k} = R \cdot \frac{(1+i/k)^{nk}-1}{i}. \qquad (2.53)$$

Вопросы и задачи

2.76. Найдите приведенную величину и наращенную сумму p-срочной ренты постнумерандо (случай $k = 1$, случай $k = p$).

2.77. Фонд создается в течение 11 лет с ежегодными взносами 60 000 у.е. в конце года. Какая должна быть ставка процентов, чтобы в фонде было накоплено 850 000 у.е. при капитализации процентов: а) ежегодной, б) ежемесячной?

2.78. Фонд создается в течение 12 лет с ежегодными взносами 120 000 у.е. в конце года. На поступившие средства начисляется 4% годовых, если сумма не превышает 250 000 у.е., и 4,5% годовых, если сумма превышает 250 000 у.е. Чему будет равна величина фонда через 12 лет?

2.79. Долг в сумме 500 000 у.е. должен быть погашен за 7,5 лет равными выплатами в конце каждого полугодия. На остаток долга начисляется 8% годовых. Какова будет величина разовой уплаты по погашению долга?

2.80. Долг в сумме 150 000 у.е., взятый под 7,5% годовых, гасится следующим образом: в течение 3 лет (льготный период) основной долг не гасится, затем сумма долга погашается равными платежами (постнумерандо) за 7 лет. Определите величину годовых платежей по погашению долга в течение семилетнего периода, если: а) на протяжении льготного периода в конце года выплачиваются только проценты, б) проценты за льготный период присоединяются к сумме долга.

2.81. Долг в сумме 300 000 у.е. гасится равными платежами в конце каждого года на протяжении 3 лет, затем гасится также равными платежами, но возросшими на 25% по сравнению с первым периодом, в течение последующих 2 лет в конце каждого года. На остаток задолженности начисляется 8% годовых. Чему равна величина годового платежа по погашению долга в первом периоде?

2.82. Долг в сумме 250 000 у.е., взятый под 8% годовых, должен быть погашен за 8 лет равными платежами в конце каждого года. Однако после двух выплат остальную задолженность было решено погасить равными суммами S_0 в конце третьего, четвертого и пятого годов по той же ставке процентов. Найдите значение S_0.

2.83. Найдите приведенную величину и наращенную сумму p-срочной ренты постнумерандо (случай $k \neq p$).

2.84. Сколько нужно вносить ежегодно на счет в банке под 5,5% годовых, чтобы через 14 лет накопить 90 000 у.е., если взносы: а) в конце каждого квартала, б) в конце каждого месяца?

2.85. Найдите приведенную величину и наращенную сумму p-срочной ренты пренумерандо (случай $k = 1$).

2.86. За сколько лет можно накопить 150 000 у.е., если в конце каждого квартала на счет вносится 10 000 у.е. и на данные средства начисляются проценты в конце каждого полугодия по ставке 6% годовых? На сколько нужно увеличить годовые выплаты, чтобы срок уменьшился на полгода?

2.87. За какой срок долг в сумме 400 000 у.е. может быть погашен годовыми платежами в 60 000 у.е. в конце каждого года, если на остаток долга начисляется 7,5% годовых? Если найденное значение округлить до ближайшего меньшего числа, то каким должен быть годовой член R по погашению долга, чтобы долг был погашен полностью?

2.88. Фонд создается в течение 5 лет. Делаются взносы — в конце года по 5000 у.е. На денежные средства начисляется 6% годовых. В каком случае сумма фонда станет больше, если перейти: а) к ежемесячным взносам в конце каждого месяца, б) ежедневной капитализации процентов ($K = 365$ дней)?

2.89. Найдите приведенную величину и наращенную сумму p-срочной ренты пренумерандо (случай $k \uparrow p$).

2.90. Фонд создается в течение 7 лет. Взносы делаются в конце года равными суммами. На собранные средства в конце года начисляется 8% годовых. На сколько процентов возрастет наращенная сумма фонда при переходе: а) к поквартальным взносам в конце каждого квартала, б) поквартальному начислению процентов, в) поквартальным взносам и начислению процентов?

2.91. Фонд создается в течение 10 лет, взносы поступают в конце каждого квартала равными суммами. На поступившие средства в конце года начисляется 7% годовых. На сколько процентов возрастет сумма фонда в конце десятого года при переходе к непрерывной капитализации процентов?

2.92. На счет в банке в течение 5 лет поступает 12 000 у.е. в конце года и начисляется 6% годовых. К какому увеличению (в процентном отношении) приведет переход к ежемесячным взносам в банк (в конце каждого месяца)?

2.93. Фонд создается взносами по 2000 у.е. в конце каждого года. Для наращенной суммы фонда S вычислите: $S_{\min}$, $S_{\max}$, $E\{S\}$, $\sigma = \sqrt{D}$, $P\{10\,000 \le S \le 15\,000\}$, если срок создания фонда и используемая годовая ставка процентов имеют следующее распределение вероятностей:

Срок создания	Годовая ставка, %		
	4	5	6
Два года	0,1	0,1	0,15
Пять лет	0,15	0,2	0,05
Семь лет	0,05	0,1	0,1

2.94. Долг 200 000 у.е. погашается в течение 8 лет равными годовыми платежами по 40 000 у.е. Какой вариант погашения долга предпочтителен для кредитора: а) погашение в конце каждого полугодия, начисление процентов на остаток долга в конце года, б) выплаты в конце года при ежемесячной капитализации процентов на остаток долга? Чему равна эффективность займа в обоих случаях в виде годовой ставки сложных процентов?

2.95. Продается фирма, приносящая ежегодный доход в 250 000 у.е., который можно получать в течение 50 лет. Сколько нужно добавить к стоимости фирмы, чтобы компенсировать потери, связанные с отказом от будущих доходов, если доход получают: а) в конце каждого года, б) в конце каждого месяца при ставке 8% годовых?

2.96. Найдите приведенную величину и наращенную сумму p-срочной ренты пренумерандо (случай $k = p$).

2.97. Задолженность предполагается погасить в течение 4 лет одним из следующих способов: а) выплачивать в конце каждого года по 100 000 у.е., б) выплачивать в конце каждого квартала по 23 500 у.е. Для ставки 11,5% годовых определить, какой из этих способов в большей мере возмещает задолженность? Для какой ставки дисконтирования оба способа погашения задолженности будут равноценны?

2.98. Установите связь между приведенной и наращенной величинами p-срочной ренты с k-кратным начислением процентов.

2.99. В течение 7 лет создается фонд, на поступающие в конце года средства начисляется 6% годовых. Годовой взнос — 1500 у.е. В первые 3 года взносы поступали в конце года, в следующие 2 года — по полугодиям и в последние 2 года — в конце каждого квартала. Определите величину фонда.

2.100. Фонд создается в течение 20 лет. На поступающие средства начисляется 5,5% годовых. В течение 8 лет в конце каждого полугодия в фонд вносили по 3000 у.е. Затем в конце пятнадцатого года было внесено 25 000 у.е., а в начале восемнадцатого года — 40 000 у.е. Чему будет равна величина фонда к концу двадцатого года?

p-срочная рента с непрерывным начислением процентов

Используя формулу (2.49)

$$A_k^{(p)} = R \cdot \frac{1-(1+i/k)^{-nk}}{p\left[(1+i/k)^{k/p}-1\right]}$$

и переходя к пределу при $k \to \infty$, получим для приведенной величины ренты

$$A_\infty^{(p)} = \lim_{k\to\infty} A_k^{(p)} = \lim_{k\to\infty} R \cdot \frac{1-(1+i/k)^{-nk}}{p\left[(1+i/k)^{k/p}-1\right]} = \frac{R}{p} \cdot \frac{1-e^{-ni}}{e^{i/p}-1};$$
$$A_\infty^{(p)} = \frac{R}{p} \cdot \frac{1-e^{-ni}}{e^{i/p}-1}. \tag{2.54}$$

Можно показать, что связь между приведенной и наращенной величинами p-срочной ренты с непрерывным начислением процентов имеет вид:

$$S_\infty^{(p)} = A_\infty^{(p)} \cdot e^{ni}. \tag{2.55}$$

Отсюда получаем выражение для наращенной величины p — срочной ренты с непрерывным начислением процентов

$$S_{\infty}^{(p)} = \frac{R}{p} \cdot \frac{1-e^{-ni}}{e^{i/p}-1} \cdot e^{ni} = \frac{R}{p} \cdot \frac{e^{ni}-1}{e^{i/p}-1}.$$

Вопросы и задачи

2.101. Установите связь между приведенной и наращенной величинами p-срочной ренты с непрерывным начислением процентов.

2.102. Выведите формулы для коэффициентов приведения и наращения p-срочной ренты постнумерандо с непрерывным начислением процентов.

2.5.3. Непрерывная рента

Переходя к пределу при $p \to \infty$, получим непрерывный поток платежей с постоянной плотностью $\mu(t) = R$, так называемую ***непрерывную ренту***.

Находя предел $A^{(p)} = \frac{R}{p} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{1/p}-1}$ при $p \to \infty$, получим выражение для приведенной величины непрерывной ренты

$$A^{(\infty)} = \lim_{p\to\infty} A^{(p)} = \frac{R}{p} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{1/p}-1} = R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{\ln(1+i)}. \tag{2.56}$$

Коэффициент приведения равен

$$a_{\overline{n}|i}^{(\infty)} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{\ln(1+i)}. \tag{2.57}$$

Для наращенной суммы и коэффициента наращения непрерывной ренты легко получаем из (2.56) и (2.57) следующие формулы:

$$S^{(\infty)} = R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{\ln(1+i)} \cdot (1+i)^n = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{\ln(1+i)}; \quad s_{\overline{n}|i}^{(\infty)} = \frac{(1+i)^n - 1}{\ln(1+i)}. \tag{2.58}$$

Из полученных формул видно, что переход от дискретных рент к непрерывным приводит к увеличению коэффициентов приведения и наращения в $i/\ln(1 + i)$ раз, т.е. имеем следующую связь между коэффициентами:

$$a_{\overline{n}|i}^{(\infty)} = \frac{i}{\ln(1+i)} a_{\overline{n}|i}, \; s_{\overline{n}|i}^{(\infty)} = \frac{i}{\ln(1+i)} s_{\overline{n}|i}. \tag{2.59}$$

Вопросы и задачи

2.103. Дайте определение непрерывной ренты и выведите формулы для ее коэффициентов приведения и наращения.

2.104. Найдите коэффициенты приведения и наращения непрерывной 10-летней ренты с процентной ставкой 15%.

2.105. Найдите приведенную и наращенную величины непрерывной шестилетней ренты с процентной ставкой 12% и рентным платежом 100 руб.

2.106. Во сколько раз отличаются приведенная и наращенная величины непрерывной 12-летней ренты с процентной ставкой 9%?

2.107. На сколько отличаются приведенная и наращенная величины непрерывной 15-летней ренты с процентной ставкой 6,5% и рентным платежом 12 000 руб.

2.108. 11-летняя рента пренумерандо с процентной ставкой 7% и рентным платежом 1400 руб. с пятого года заменена непрерывной. На сколько сократится срок ренты при условии сохранения ее наращенной величины?

2.109. Во сколько раз увеличится 10-летняя рента постнумерандо с процентной ставкой 14%, если ее заменить непрерывной?

2.110. На сколько уменьшится 16-летняя непрерывная рента с процентной ставкой 8,15% и рентным платежом 11 200 руб., если ее заменить полугодовой рентой пренумерандо с тем же рентным платежом?

2.111. На сколько уменьшится 12-летняя непрерывная рента с процентной ставкой 9,75% и рентным платежом 2300 руб., если ее заменить квартальной рентой пренумерандо с тем же рентным платежом.

Непрерывная рента с *k*-кратным начислением процентов

Найдем приведенную величину непрерывной ренты с k-кратным начислением процентов:

$$A_{\infty,k} = \lim_{p\to\infty} R\cdot\frac{1-(1+i/k)^{-nk}}{p\left[(1+i/k)^{k/p}-1\right]} = R\cdot\frac{1-(1+i/k)^{-nk}}{k\ln(1+i/k)}. \qquad (2.60)$$

Для наращенной величины непрерывной ренты с k-кратным начислением процентов имеем

$$S_{\infty,k} = \lim_{p\to\infty} R\cdot\frac{(1+i/k)^{kn}-1}{p\left[(1+i/k)^{k/p}-1\right]} = R\cdot\frac{\left(1+i/k\right)^{nk}-1}{k\ln(1+i/k)}. \qquad (2.61)$$

Связь между приведенной и наращенной величинами непрерывной ренты с k-кратным начислением процентов имеет вид:

$$S_{\infty,k} = A_{\infty,k}(1+i/k)^{nk}. \qquad (2.62)$$

Пример 2.11. Вычислить наращенную величину 8-летней 15%-ной непрерывной ренты с 12-кратным начислением процентов и рентным платежом $R = 150$.

По формуле (2.61)

$$S_{\infty,k} = R \cdot \frac{(1+i/k)^{nk} - 1}{k\ln(1+i/k)}.$$

Имеем

$$S_{\infty,12} = 150 \cdot \frac{(1+0{,}15/12)^{8 \cdot 12} - 1}{12\ln(1+0{,}15/12)} = 150 \cdot \frac{2{,}296}{0{,}149} = 2311{,}41.$$

Вопросы и задачи

2.112. Найдите приведенную величину и наращенную сумму непрерывной ренты с k-кратным начислением процентов.

2.113. Вычислить наращенную величину пятилетней 16%-ной непрерывной ренты с четырехкратным начислением процентов и рентным платежом $R = 150$.

2.114. На сколько уменьшится наращенная сумма 16-летней непрерывной ренты с процентной ставкой 6,35%, рентным платежом 13 200 руб. и ежемесячным начислением процентов при переходе: а) к поквартальному начислению процентов, б) начислению процентов один раз в год?

2.115. На сколько уменьшится наращенная сумма 10-летней непрерывной ренты с процентной ставкой 7%, рентным платежом 1000 руб. и ежедневным начислением процентов при переходе: а) к полугодовому начислению процентов, б) ежемесячному начислению процентов?

2.116. Во сколько раз уменьшится наращенная сумма 8-летней непрерывной ренты с процентной ставкой 9%, рентным платежом 1100 руб. и ежемесячным начислением процентов при переходе: а) к поквартальному начислению процентов, б) полугодовому начислению процентов?

2.117. Во сколько раз уменьшится наращенная сумма 6-летней непрерывной ренты с процентной ставкой 18%, рентным платежом

15 000 руб. и ежедневным начислением процентов при переходе: а) к начислению процентов 2 раза в месяц, б) ежемесячному начислению процентов?

2.118. На сколько уменьшится приведенная величина 18-летней непрерывной ренты с процентной ставкой 12%, рентным платежом 13 000 руб. и ежедневным начислением процентов при переходе: а) к полугодовому начислению процентов, б) ежемесячному начислению процентов?

2.119. Во сколько раз уменьшится приведенная величина девятилетней непрерывной ренты с процентной ставкой 11%, рентным платежом 8000 руб. и ежемесячным начислением процентов при переходе: а) к поквартальному начислению процентов, б) полугодовому начислению процентов?

Непрерывная рента с непрерывным начислением процентов

Из формулы (2.60)

$$A_{\infty,k} = R\cdot\frac{1-(1+i/k)^{-nk}}{k\ln(1+i/k)}$$

легко получить приведенную величину непрерывной ренты с непрерывным начислением процентов, переходя к пределу $k\to\infty$:

$$A_{\infty,\infty} = \lim_{k\to\infty} R\cdot\frac{1-(1+i/k)^{-nk}}{k\ln(1+i/k)} = \lim_{k\to\infty} R\cdot\frac{1-(1+i/k)^{\frac{k}{i}(-nk)\frac{i}{k}}}{\ln(1+i/k)^{\frac{k}{i}i}} = R\cdot\frac{1-e^{-ni}}{i}. \qquad (2.63)$$

Аналогично находится наращенная величина непрерывной ренты с непрерывным начислением процентов:

$$S_{\infty,\infty} = \lim_{k\to\infty} R\cdot\frac{(1+i/k)^{nk}-1}{k\ln(1+i/k)} = \lim_{k\to\infty} R\cdot\frac{(1+i/k)^{\frac{k}{i}(nk)\frac{i}{k}}-1}{\ln(1+i/k)^{\frac{k}{i}i}} = R\cdot\frac{e^{ni}-1}{i}. \qquad (2.64)$$

Связь между приведенной и наращенной величинами непрерывной ренты с непрерывным начислением процентов имеет вид:

$$S_{\infty,\infty} = A_{\infty,\infty}\cdot e^{ni}. \qquad (2.65)$$

Пример 2.12. Вычислить приведенную и наращенную величины непрерывной 10-летней ренты с непрерывным начислением процентов с рентным платежом $R = 300$ при ставке 14% годовых.

По формуле (2.63) найдем приведенную величину ренты

$$A_{\infty,\infty} = R \cdot \frac{1-e^{-ni}}{i} = 300 \cdot \frac{1-e^{-10 \cdot 0,14}}{0,14} = 300 \cdot 5,38 = 1614 .$$

Наращенную величину ренты можно найти либо по формуле (2.64)

$$S_{\infty,\infty} = R \cdot \frac{e^{ni}-1}{i} = 300 \cdot \frac{e^{10 \cdot 0,14}-1}{0.14} = 300 \cdot 21,823 = 6546,9,$$

либо используя связь между приведенной и наращенной величинами непрерывной ренты с непрерывным начислением процентов (2.65):

$$S_{\infty,\infty} = A_{\infty,\infty} \cdot e^{ni} = 1614 \cdot e^{10 \cdot 0,14} = 1614 \cdot 4,055 = 6544,8.$$

Возникшая небольшая разница (2 : 6545 = 0,03%) связана с приближенными вычислениями по двум различным схемам.

Вопросы и задачи

2.120. Найдите приведенную величину и наращенную сумму непрерывной ренты с непрерывным начислением процентов.

2.121. Установите связь между приведенной и наращенной величинами непрерывной ренты с непрерывным начислением процентов.

2.122. Вычислите приведенную и наращенную величины непрерывной 13-летней ренты с непрерывным начислением процентов с рентным платежом $R = 2700$ при ставке 17% годовых.

2.123. Вычислить приведенную и наращенную величины непрерывной 7-летней ренты с непрерывным начислением процентов с рентным платежом $R = 300$ при ставке 15% годовых.

2.124. На сколько уменьшится наращенная величина 6-летней непрерывной ренты с непрерывным начислением процентов с процентной ставкой 3,85%, рентным платежом 12 000 руб. при переходе: а) к поквартальному начислению процентов, б) начислению процентов 1 раз в год?

2.125. На сколько уменьшится наращенная величина 14-летней непрерывной ренты с непрерывным начислением процентов с процентной ставкой 5,35%, рентным платежом 4000 руб. при переходе: а) к полугодовому начислению процентов, б) ежемесячному начислению процентов, в) ежедневному начислению процентов?

2.126. Во сколько раз уменьшится наращенная величина трехлетней непрерывной ренты с непрерывным начислением процентов с процентной ставкой 17%, рентным платежом 7600 руб. при переходе:

а) к поквартальному начислению процентов, б) полугодовому начислению процентов?

2.127. Во сколько раз уменьшится наращенная величина 4-летней непрерывной ренты с непрерывным начислением процентов с процентной ставкой 25%, рентным платежом 16 500 руб. при переходе: а) к начислению процентов 2 раза в месяц, б) ежемесячному начислению процентов?

2.128. На сколько уменьшится приведенная величина 17-летней непрерывной ренты с непрерывным начислением процентов с процентной ставкой 11,5%, рентным платежом 11 400 руб. при переходе: а) к полугодовому начислению процентов, б) ежемесячному начислению процентов?

2.129. Во сколько раз уменьшится приведенная величина 14-летней непрерывной ренты с непрерывным начислением процентов с процентной ставкой 10,25%, рентным платежом 6000 руб. при переходе: а) к поквартальному начислению процентов, б) полугодовому начислению процентов?

2.6. Связь между приведенной и наращенной величинами произвольных рент

Анализ всех случаев связи между приведенной и наращенной величинами рент, проведенный нами, показывает, что коэффициент связи зависит *только* от кратности начисления процентов и не зависит от срочности ренты и любых других ее параметров.

Таким образом, имеем:

— при однократном начислении процентов:

$$S = A\cdot(1+i)^n\,,\ \ A = S\cdot(1+i)^{-n}; \tag{2.66}$$

— при k-кратном начислении процентов:

$$S = A\cdot(1+i/k)^{kn}\,,\ \ A = S\cdot(1+i/k)^{-kn}; \tag{2.67}$$

— при непрерывном начислении процентов:

$$S = A\cdot e^{ni}\,,\ \ A = S\cdot e^{-ni}. \tag{2.68}$$

Вопросы и задачи

2.130. Найдите связь между приведенной величиной и наращенной суммой ренты постнумерандо.

2.131. Найдите связь между приведенной величиной и наращенной суммой ренты пренумерандо.

2.132. Найдите связь между приведенной величиной и наращенной суммой ренты постнумерандо с ежеквартальным начислением процентов.

2.133. Найдите связь между приведенной величиной и наращенной суммой ренты пренумерандо с ежемесячным начислением процентов.

2.134. Найдите связь между приведенной величиной и наращенной суммой p-срочной ренты постнумерандо с ежемесячным начислением процентов.

2.135. Найдите связь между приведенной величиной и наращенной суммой p-срочной ренты пренумерандо с ежемесячным начислением процентов.

2.136. Найдите связь между приведенной величиной и наращенной суммой непрерывной ренты с непрерывным начислением процентов.

2.137. Приведенная величина 12-летней ренты пренумерандо с непрерывным начислением процентов, процентной ставкой 5% равна 27 000 руб. Найти наращенную сумму.

2.138. Приведенная величина 7-летней ренты пренумерандо с ежемесячным начислением процентов, процентной ставкой 7,5% равна 100 000 руб. Найдите наращенную сумму.

2.139. Наращенная сумма 5-летней ренты постнумерандо с ежеквартальным начислением процентов, процентной ставкой 4,25% равна 50 000 руб. Найдите приведенную величину.

2.140. Наращенная сумма 12-летней ренты постнумерандо с полугодовым начислением процентов, процентной ставкой 9,75% равна 74 000 руб. Найдите приведенную величину.

2.141. Наращенная сумма 12-летней непрерывной ренты с k-кратным начислением процентов, процентной ставкой 6,15% равна 26 000 руб. Найдите приведенную величину при $k = 1, 2, 4, 6, 12$.

2.7. Другие типы рент

2.7.1. Ренты пренумерандо

Как упоминалось выше, рентами пренумерандо называются ренты с платежами в начале периодов. По сравнению с рентой постнумерандо начисления на каждый член ренты (за исключением последнего) в данном случае выше в $(1 + i)$ раз за счет начислений за первый период. Поэтому наращенная сумма ренты пренумерандо $\ddot{S}$ в $(1 + i)$ раз больше наращенной суммы ренты постнумерандо:

$$\ddot{S} = S(1+i)\,. \tag{2.69}$$

Аналогичные соотношения имеют место для приведенных величин рент

$$\ddot{A} = A(1+i)\,. \tag{2.70}$$

Как отмечалось в предыдущих разделах, коэффициенты приведения и наращения рент пренумерандо и постнумерандо связаны следующими соотношениями:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = (1+i)a_{\overline{n}|i}; \quad \ddot{s}_{\overline{n}|i} = (1+i)s_{\overline{n}|i}\,. \tag{2.71}$$

Для годовой ренты с начислением процентов k раз в году имеем

$$\ddot{S} = S(1+i/k)^k, \quad \ddot{A} = A(1+i/k)^k\,. \tag{2.72}$$

Для p-срочной ренты с начислением процентов k раз в году имеем

$$\begin{aligned} k = 1 &: \ddot{S} = S(1+i)^{1/p}, \\ k \neq p &: \ddot{S} = S(1+i/k)^{k/p}. \end{aligned} \tag{2.73}$$

Переходя в каждом из равенств (2.73) к пределу при $p \to \infty$, получаем, что для непрерывных рент (при любой кратности начисления процентов) выполняются следующие соотношения:

$$\ddot{S} = S, \quad \ddot{A} = A\,. \tag{2.74}$$

То есть для непрерывных рент понятия пренумерандо и постнумерандо отсутствуют (или совпадают) в силу стремления к нулю интервала между платежами.

2.7.2. Ренты с платежами в середине периодов

В случаях, когда платежи распределяются более или менее равномерно, но их поступление не приходится на начало либо конец периода, можно суммарные платежи за период относить на середины периодов. В этом случае приведенные и наращенные величины ренты равны соответствующим величинам ренты постнумерандо, наращенным за половину периода:

$$S_{1/2} = S(1+i)^{1/2}, \ A_{1/2} = A(1+i)^{1/2} \text{ при } p = 1,\ k = 1; \tag{2.75}$$

$$S_{1/2} = S(1+i)^{1/2p}, \ A_{1/2} = A(1+i)^{1/2p} \ \text{при } p > 1, \ k = 1; \qquad (2.76)$$

$$S_{1/2} = S(1+i/k)^{k/2}, \ A_{1/2} = A(1+i/k)^{k/2} \ \text{при } p = 1, \ k > 1; \qquad (2.77)$$

$$S_{1/2} = S(1+i/k)^{k/2p}, \ A_{1/2} = A(1+i/k)^{k/2p} \ \text{при } p > 1, \ k > 1. \qquad (2.78)$$

Пример 2.12. Во сколько раз увеличится приведенная величина ренты постнумерандо, если платежи платить в начале периода? Ставка равна 15%.

$$\ddot{A} = A(1+i), \text{ откуда } \ddot{A}/A = (1+i) = 1{,}15\,.$$

Пример 2.13. Во сколько раз увеличится приведенная величина квартальной ренты постнумерандо, если платежи платить в начале периода? Ставка равна 18%.

$$\ddot{A} = A(1+i)^{1/p}, \text{ откуда } \ddot{A}/A = (1+i)^{1/4} = 1{,}18^{1/4} = 1{,}042.$$

Пример 2.14. Во сколько раз увеличится наращенная величина месячной ренты постнумерандо, если платежи платить в начале периода? Ставка равна 23%.

$$\ddot{S} = S(1+i)^{1/p}, \text{ откуда } \ddot{S}/S = (1+i)^{1/12} = 1{,}23^{1/12} = 1{,}0174\,.$$

Пример 2.15. Какова процентная ставка, если наращенная величина месячной ренты постнумерандо увеличится в 1,0135 раз, если платежи платить в начале периода?

$$\ddot{S} = S(1+i)^{1/p}, \text{ откуда } \ddot{S}/S = (1+i)^{1/12} = 1{,}0135\,.$$

$$\text{Далее } (1+i) = 1{,}175 \text{ и } i = 17{,}5\%\,.$$

Пример 2.16. Какова процентная ставка, если приведенная величина ежедневной ренты постнумерандо увеличится в 1,000261 раз, если платежи платить в начале периода ($K = 365$)?

$$\ddot{A} = A(1+i)^{1/p}, \text{ откуда } \ddot{A}/A = (1+i)^{1/365} = 1{,}000261\,.$$

$$\text{Далее } (1+i) = 1{,}1 \text{ и } i = 10\%\,.$$

Вопросы и задачи

2.142. Во сколько раз увеличится приведенная величина ренты постнумерандо, если платежи платить в начале периода? Ставка равна 20%.

2.143. Предполагается, что фирма будет существовать в течение 15 лет. В первые 7 лет чистый годовой доход может составить по 400 000 у.е. за каждый год, а в последние 8 лет — по 300 000 у.е. Оцените современную стоимость доходов фирмы при ставке 7,5% годовых.

Указание: используйте теорию рент с выплатами в середине периодов.

2.144. Во сколько раз увеличится приведенная величина ренты постнумерандо, если платежи платить в начале периода? Ставка равна 8,5%.

2.145. Во сколько раз увеличится приведенная величина квартальной ренты постнумерандо, если платежи платить в начале периода? Ставка равна 30%.

2.146. Во сколько раз увеличится наращенная величина месячной ренты постнумерандо, если платежи платить в начале периода? Ставка равна 25%.

2.147. Компания существует 10 лет. В первые 5 лет годовой доход составил по 250 000 у.е. за каждый год, а в последние 5 лет — по 160 000 у.е. Оцените приведенную и наращенную величины доходов компании при ставке 12,35% годовых.

Указание: используйте теорию рент с выплатами в середине периодов.

2.148. Какова процентная ставка, если наращенная величина месячной ренты постнумерандо увеличится в 1,0234 раза, если платежи платить в начале периода?

2.149. Какова процентная ставка, если приведенная величина ежедневной ренты постнумерандо увеличится в 1,000687 раз, если платежи платить в начале периода ($K = 360$)?

2.7.3. Немедленные и отложенные ренты

Немедленная рента — это рента, выплаты которой производятся в настоящее время (в начале или конце периодов). **Отсроченная рента** — это рента, начало выплат которой отложено на некоторое время t. Отсроченность ренты не влияет на ее наращенную величину, однако современная величина ренты ${}_tA$ при этом изменяется:

$$ {}_tA = A\nu^t = Ra_{\overline{n}|i}\nu^t . \tag{2.79}$$

Пример 2.17. Начало выплат годовой ренты со сроком 10 лет, с процентной ставкой 12,25% годовых, рентным платежом 10 000 руб. отложено на 2 года. Найти современную величину отсроченной ренты ${}_tA$.

$$ {}_tA = A\nu^t = Ra_{\overline{n}|i}\nu^t .$$

Поэтому найдем сначала современную (приведенную) величину немедленной ренты A и затем умножим ее на ν^t, где $\nu = 1/(1+i)$.

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 10\,000\cdot\frac{1-1{,}1225^{-10}}{0{,}1225} = 55\,928{,}67 \text{ руб.}$$

Теперь найдем современную величину отсроченной ренты ${}_tA$.

$${}_tA = A\nu^t = 55\,928{,}67\cdot 1{,}1225^{-2} = 44\,387{,}613 \text{ руб.}$$

Вопросы и задачи

2.150. Начало выплат годовой ренты со сроком 15 лет, процентной ставкой 14% годовых, рентным платежом 265 000 руб. отложено на 1,5 года. Найдите современную величину отсроченной ренты ${}_tA$.

2.151. В течение 12 лет предполагается погасить долг в размере 1 000 000 у.е. платежами постнумерандо, по 100 000 у.е. ежегодно. Первые пять выплат были сделаны согласно достигнутой договоренности. Затем было решено на 3 года отложить погашение задолженности и возобновить погашение равными выплатами постнумерандо начиная с конца восьмого года. Какими должны быть погасительные платежи во втором периоде, чтобы намеченная ранее эффективность погашения ссуды не изменилась?

2.152. Начало выплат годовой ренты со сроком 12 лет, процентной ставкой 11%, рентным платежом 16 000 руб. отложено на 4,5 года. Найдите современную величину отсроченной ренты ${}_tA$.

2.153. В течение 7 лет предполагается погасить долг в размере 400 000 у.е. равными выплатами в конце каждого года. На остаток долга начисляется 6% годовых. В каком случае годовые расходы по обслуживанию долга возрастут больше и на сколько, если: а) будет предоставлена полугодовая отсрочка по погашению долга, проценты за этот период присоединяются к сумме долга, б) ставка годовых процентов возрастет на 0,25%?

2.154. Начало выплат квартальной ренты со сроком 7 лет, процентной ставкой 8,5% годовых, рентным платежом 24 000 руб. отложено на 3 года. Найдите современную величину отсроченной ренты ${}_tA$.

2.155. Начало выплат квартальной 7-летней ренты с ежемесячным начислением процентов, процентной ставкой 9,75% годовых, рентным платежом 21 500 руб. отложено на 1,8 лет. Найдите современную величину отсроченной ренты ${}_tA$.

2.7.4. Сводка результатов для приведенной и наращенной величин рент постнумерандо и пренумерандо

В таблицах 2.1 и 2.2 дадим сводку для приведенной и наращенной величин рент постнумерандо и пренумерандо.

Таблица 2.1

Приведенная и наращенная величины рент постнумерандо

Тип ренты		Приведенная величина A	Наращенная величина S
Годовая		$R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$	$R\frac{(1+i)^n-1}{i}$
Вечная		R/i	∞
p-срочная	$k=1$	$\frac{R}{p}\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{1/p}-1}$	$\frac{R}{p}\cdot\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^{1/p}-1}$
	$k\neq p$	$R\cdot\frac{1-(1+i/k)^{-nk}}{p\left[(1+i/k)^{k/p}-1\right]}$	$R\cdot\frac{(1+i/k)^{kn}-1}{p\left[(1+i/k)^{k/p}-1\right]}$
	$k=p$	$R\cdot\frac{1-(1+i/k)^{-nk}}{i}$	$R\cdot\frac{(1+i/k)^{nk}-1}{i}$
Непрерывная		$R\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{\ln(1+i)}$	$R\cdot\frac{(1+i)^n-1}{\ln(1+i)}$
p-срочная с непрерывным начислением процентов		$\frac{R}{p}\cdot\frac{1-e^{-ni}}{e^{i/p}-1}$	$\frac{R}{p}\cdot\frac{e^{ni}-1}{e^{i/p}-1}$
Непрерывная с k-кратным начислением процентов		$R\cdot\frac{1-(1+i/k)^{-nk}}{k\ln(1+i/k)}$	$R\cdot\frac{(1+i/k)^{nk}-1}{k\ln(1+i/k)}$
Непрерывная с непрерывным начислением процентов		$R\cdot\frac{1-e^{-ni}}{i}$	$R\cdot\frac{e^{ni}-1}{i}$

Таблица 2.2

Приведенная и наращенная величины рент пренумерандо

Тип ренты		Приведенная величина A	Наращенная величина S
Годовая		$R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)$	$R\frac{(1+i)^n-1}{i}(1+i)$

Окончание

Тип ренты		Приведенная величина A	Наращенная величина S
Вечная		$R/i(1+i)$	∞
p-срочная	$k=1$	$\frac{R}{p}\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{1/p}-1}(1+i)^{1/p}$	$\frac{R}{p}\cdot\frac{(1+i)^{n}-1}{(1+i)^{1/p}-1}(1+i)^{1/p}$
	$k\neq p$	$R\cdot\frac{1-(1+i/k)^{-nk}}{p\left[(1+i/k)^{k/p}-1\right]}\times$ $\times\left(1+\frac{i}{k}\right)^{k/p}$	$R\cdot\frac{(1+i/k)^{kn}-1}{p\left[(1+i/k)^{k/p}-1\right]}\times$ $\times\left(1+\frac{i}{k}\right)^{k/p}$
	$k=p$	$R\cdot\frac{1-(1+i/k)^{-nk}}{i}\times$ $\times\left(1+\frac{i}{k}\right)$	$R\cdot\frac{(1+i/k)^{nk}-1}{i}\times$ $\times\left(1+\frac{i}{k}\right)$
Непрерывная		$R\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{\ln(1+i)}$	$R\cdot\frac{(1+i)^{n}-1}{\ln(1+i)}$
p-срочная с непрерывным начислением процентов		$\frac{R}{p}\cdot\frac{1-e^{-ni}}{e^{i/p}-1}\cdot e^{i/p}$	$\frac{R}{p}\cdot\frac{e^{ni}-1}{e^{i/p}-1}\cdot e^{i/p}$
Непрерывная с k-кратным начислением процентов		$R\cdot\frac{1-(1+i/k)^{-nk}}{k\ln(1+i/k)}$	$R\cdot\frac{(1+i/k)^{nk}-1}{k\ln(1+i/k)}$
Непрерывная с непрерывным начислением процентов		$R\cdot\frac{1-e^{-ni}}{i}$	$R\cdot\frac{e^{ni}-1}{i}$

2.8. Сравнение финансовых потоков и рент

Достаточно часто возникает необходимость выбора между несколькими рентами с разными параметрами. Для осознанного решения проблемы выбора необходимо уметь сравнивать ренты. Та же проблема возникает и при сравнении финансовых потоков более общего типа. Если сроки сравниваемых рент или финансовых потоков одинаковы, то надо сравнивать наращенные величины рент (потоков) и выбирать ту ренту (поток), наращенная величина которой больше. Альтернативными способами выбора ренты (потока) является сравнение их современных (дисконтированных к начальному моменту времени) или приведенных (дисконтированных к некоторому моменту времени между начальным и конечным моментами) величин.

Для рент с одинаковыми сроками, членами и размерами процентных ставок, отличающихся лишь двумя характеристиками — кратностью ренты и частотой начисления процентов, из приведенных нами выше формул можно получить ряд соотношений, которые оказываются полезными при предварительной оценке соглашения о ренте [2]:

$$S(1,1) < S(1,k) < S(1,\infty) < S(p,1) < S(p,k) < S(p,k) < S(p,k) < S(p,\infty),$$
$$k > 1 \quad p > 1 \quad p > k > 1 \quad p = k > 1 \quad k > p > 1. \tag{2.80}$$

2.9. Конверсия рент

Бывают ситуации, когда возникает необходимость изменить условия выплаты ренты, заменить одну ренту другой либо разовым платежом, либо, наоборот, заменить разовый платеж рентой, а также заменить несколько рент с разными параметрами одной. Во всех вышеперечисленных случаях производится конверсия рент, подчиняющаяся следующему простому правилу: современные величины старой (старых) и новой рент должны быть равны. Это следует из предположения о том, что конверсия рент не должна менять финансового положения сторон, т.е. должен соблюдаться принцип финансовой эквивалентности (принцип финансовой справедливости). Алгоритм расчета параметров новой ренты следующий:

1. Определяется современная величина старой (старых) ренты.
2. В случае объединения рент эти величины складываются и дают современную величину новой ренты.
3. Зная современную величину новой ренты, по методу, описанному нами выше, рассчитываются параметры новой ренты, такие как размер отдельного платежа R, срок ренты n и процентная ставка i.

Изменение параметров ренты

Определяется приведенная величина старой ренты, она будет равна приведенной величине новой ренты. Далее необходимо задать все параметры новой ренты, кроме одного, и из уравнения эквивалентности $A_1 = A_2$ найти недостающий параметр новой ренты.

Замена обычной ренты срочной

Рассмотрим три примера замены одной ренты другой. В качестве первого примера рассмотрим замену годовой ренты с параметрами R_1, n_1, p-кратной рентой с параметрами R_2, n_2, p. Приравняем современные величины старой и новой рент

$$R_1 a_{\overline{n_1}|i} = R_2 a^{(p)}_{\overline{n_2}|i}. \tag{2.81}$$

Из этого уравнения можно либо найти величину платежа срочной ренты R_2, если заданы ее срок n_2 и срочность p, либо определить срок ренты n_2, если заданы величина платежа R_2 и срочность ренты p.

В первом случае R_2 равна

$$R_2 = R_1 \frac{a_{\overline{n_1}|i}}{a^{(p)}_{\overline{n_2}|i}}. \tag{2.82}$$

Если сроки обеих рент, как и процентные ставки, одинаковы, а отличаются они только периодичностью рентных платежей (один платеж в год для первой ренты и p платежей в год для второй ренты), то платежи таких рент связаны следующим соотношением:

$$R_2 = R_1 \frac{p\left[(1+i)^{1/p} - 1\right]}{i}. \tag{2.83}$$

Во втором случае для нахождения срока ренты n_2 находим сначала коэффициент приведения для p-срочной ренты

$$a^{(p)}_{\overline{n_2}|i} = \frac{A}{R_2} = \frac{R_1}{R_2} a_{\overline{n_1}|i}. \tag{2.84}$$

Решая это уравнение относительно n_2, найдем затем срок p-срочной ренты [2]:

$$n_2 = \frac{\ln\left[1 - \frac{A}{R}\left[(1+i)^{1/p} - 1\right]\right]^{-1}}{\ln(1+i)}. \tag{2.85}$$

Пример 2.18. Заменить обычную (годовую) ренту с параметрами $R_1 = 200$, $n = 5$, $i = 10\%$ срочной (квартальной) рентой с параметрами $R_2 = 100$, $i = 10\%$.

Найдем сначала приведенную величину годовой ренты

$$A = R_1 \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 200 \cdot \frac{1-(1+0{,}1)^{-5}}{0{,}1} = 200 \cdot 3{,}79 = 758.$$

Далее по формуле (2.85) находим срок четарехсрочной ренты

$$n_2 = \frac{\ln\left[1 - \frac{A}{R_2}\left[(1+i)^{1/p} - 1\right]\right]^{-1}}{\ln(1+i)} = \frac{\ln\left[1 - \frac{758}{100}\left[(1+0{,}1)^{1/4} - 1\right]\right]^{-1}}{\ln(1+0{,}1)} =$$

$$= \frac{1{,}699}{0{,}0953} = 17{,}83 \text{ лет.}$$

Вопросы и задачи

2.156. Какую сумму нужно положить в банк под 7% годовых мужчине в возрасте 45 лет, чтобы по достижении им пенсионного возраста в 60 лет в течение 18 лет в начале каждого месяца снимать по 150 000 у.е., если проценты капитализируются: а) в конце года, б) в конце каждого полугодия, в) в конце каждого квартала, в) конце каждого месяца?

2.157. Какую сумму нужно положить в банк, чтобы в течение 30 лет в конце каждого года снимать по 3000 у.е., если на остаток вклада меньше 10 000 у.е. начисляется 4% годовых, больше 10 000 у.е. — 7% годовых?

2.158. Задолженность в 250 000 у.е. планируется погасить следующим образом: в течение 4 лет в конце года выплачивается по 20 000 у.е., а остальной долг гасится равными суммами S_0 в конце шестого и девятого годов. На остаток долга начисляется 5% годовых. Чему равно значение S_0?

2.159. Фирма может продать покупателю свою продукцию по одному из двух вариантов оплаты: а) через 2 года выплачивается 400 000 у.е., затем с интервалом в год еще 3 платежа по 300 000 у.е., б) через год выплачивается 300 000 у.е., затем с интервалом в полгода 10 платежей по 100 000 у.е. Какой из вариантов более приемлем для покупателя, если он имеет возможность разместить денежные средства в банке под 6,5% годовых?

Замена немедленной ренты отсроченной

В качестве второго примера рассмотрим замену немедленной ренты с параметрами R_1, n_1 отсроченной рентой с параметрами R_2, n_2, t. Приравняем современные величины старой и новой рент

$$R_1 a_{\overline{n_1}|i} = R_2 a_{\overline{n_2}|i} \nu^t, \qquad (2.86)$$

где

$$\nu^t = (1+i)^{-t}. \qquad (2.87)$$

Из этого уравнения можно найти либо величину платежа отсроченной ренты R_2, если заданы ее срок n_2 и продолжительность отсрочки t, либо определить срок ренты n_2, если заданы величина платежа R_2 и продолжительность отсрочки t.

В первом случае величина платежа R_2 равна

$$R_2 = R_1 \frac{a_{\overline{n_1}|i}}{a^{(p)}_{\overline{n_2}|i}}(1+i)^t. \tag{2.88}$$

Если сроки обеих рент равны, их платежи связаны следующим соотношением [1; 3].

$$R_2 = R_1(1+i)^t, \tag{2.89}$$

т.е. член отсроченной ренты равен наращенному за время отсрочки t члену немедленной ренты.

Во втором случае из равенства

$$R_1 a_{\overline{n_1}|i} = R_2 a_{\overline{n_2}|i} \nu^t \tag{2.90}$$

при заданных R_2 и t находим срок новой ренты (R_1 и n_1 известны). В случае сохранения размера члена ренты ($R_2 = R_1$) он определяется соотношением

$$n_2 = \frac{\ln\left[1-[1-(1+i)^{-n_1}](1+i)^t\right]}{\ln(1+i)}. \tag{2.91}$$

Пример 2.19. Замените немедленную ренту с параметрами R_1, $n_1 = 6$ отсроченной рентой с параметрами $R_2 = 2500$, $n_2 = 6$, $t = 3$ года при годовой ставке $i = 11\%$.

Так как сроки обеих рент равны, их платежи связаны следующим соотношением

$$R_2 = R_1(1+i)^t, \quad R_1 = R_2(1+i)^{-t} = 2500 \cdot 1{,}1^{-3} = 1878{,}287.$$

Вопросы и задачи

2.160. Дайте определение немедленной и отложенной рент. Укажите связь между приведенными величинами и наращенными суммами немедленной и отложенной рент.

2.161. Замените немедленную ренту с параметрами R_1, n_1 отсроченной рентой с параметрами R_2, n_2, t при годовой ставке i.

2.162. Замените немедленную ренту с параметрами $R_1 = 2000$, $n_1 = 5$ отсроченной рентой с параметрами $R_2 = 2500$, n_2, $t = 2$ года при годовой ставке $i = 15\%$.

2.163. Замените немедленную ренту с параметрами R_1, $n_1 = 4$ отсроченной рентой с параметрами $R_2 = 2500$, $n_2 = 4$, $t = 2$ года при годовой ставке $i = 10\%$.

2.164. Замените немедленную ренту с параметрами $R_1 = 1500$, $n_1 = 3$ отсроченной рентой с параметрами $R_2 = 1800$, $n_2 = 5$, t при годовой ставке $i = 12\%$.

2.165. Замените немедленную p-срочную ренту с параметрами $R_1 = 1300$, $n_1 = 6$, $p = 4$ отсроченной рентой с параметрами $R_2 = 1500$, $n_2 = 5$, t при годовой ставке $i = 8\%$.

2.166. Замените немедленную p-срочную ренту с параметрами $R_1 = 1400$, $n_1 = 7$, $p = 2$ отсроченной рентой с параметрами $R_2 = 1900$, n_2, $t = 3$ при годовой ставке $i = 7{,}5\%$.

Консолидация рент

При замене нескольких рент одной равенство современных величин старых и новой рент имеет вид:

$$A = \sum_i A_i \ . \tag{2.92}$$

Это равенство позволяет найти только один параметр консолидирующей ренты (член ренты либо ее срок), при этом все остальные ее параметры должны быть заданы. В случае если неизвестен член ренты, то он для ренты постнумерандо со сроком n находится по формуле

$$R = \frac{\sum_i A_i}{a_{\overline{n}|i}} \ . \tag{2.93}$$

Если же неизвестен срок консолидирующей ренты, то находим сначала коэффициент приведения

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{\sum_i A_i}{R} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \ , \tag{2.94}$$

откуда уже определяем срок ренты

$$n = \frac{-\ln(1+i\sum_i \dfrac{A_i}{R})}{\ln(1+i)}. \tag{2.95}$$

Важным частным случаем консолидации рент является ситуация, когда член консолидирующей ренты равен сумме членов заменяемых рент. При одинаковой процентной ставке всех рент из условия финансовой эквивалентности получаем:

$$R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=\frac{\sum_j R_j\left[1-(1+i)^{-n_j}\right]}{i}, \tag{2.96}$$

откуда находим срок ренты

$$n=\frac{\ln R-\ln\sum_j R_j(1+i)^{-n_j}}{\ln(1+i)}. \tag{2.97}$$

Пример 2.20. Заменить две ренты постнумерандо с параметрами

$$R_1=200, n_1=4, i_1=12\%, R_2=250, n_2=6, i_2=14\%$$

разовым платежом в момент времени $n=4, i=15\%$.

Вначале найдем приведенные величины обеих рент:

$$A_1=R_1\frac{1-(1+i)^{-n_1}}{i_1}=200\cdot\frac{1-(1+0{,}12)^{-4}}{0{,}12}=200\cdot 3{,}037=607{,}47;$$

$$A_2=R_2\frac{1-(1+i)^{-n_2}}{i_2}=250\cdot\frac{1-(1+0{,}14)^{-6}}{0{,}14}=250\cdot 3{,}889=972{,}17.$$

Далее определим сумму приведенных величин обеих рент:

$$A=A_1+A_2=607{,}47+972{,}17=1579{,}64\ .$$

Эта сумма должна равняться единовременному платежу, дисконтированному к начальному моменту времени:

$$A=\frac{P}{(1+i)^n}.$$

Отсюда

$$P=A\cdot(1+i)^n=1579{,}64\cdot(1+0{,}15)^4=2762{,}80\ .$$

$$P=2762{,}80\ .$$

Вопросы и задачи

2.167. Сформулируйте общий принцип сравнения финансовых потоков и рент.

2.168. Консолидируйте три ренты постнумерандо с параметрами $R_1 = 1000$, $n_1 = 3$, $R_2 = 1500$, $n_2 = 5$, $R_3 = 2000$, $n_3 = 7$, $i = 10\%$ четырехлетней рентой постнумерандо с $i = 15\%$.

2.169. Долг 100 000 у.е. должен быть погашен в течение 10 лет равными платежами в конце каждого года. На остаток долга начисляется 7% годовых. После 5 лет выплат должник решил гасить задолженность равными выплатами в конце каждого полугодия. Явившись в банк в конце девятого года, должник решил оставшуюся задолженность погасить разовым платежом. Какую сумму он должен вернуть банку?

2.170. Дайте определение и приведите пример выкупа ренты.

2.171. Замените годовую ренту $R_1 = 2$, $n_1 = 3$, $i = 20\%$ на p-срочную (квартальную) ренту $n_2 = 4$, $i = 20\%$.

2.172. Покупку недвижимости стоимостью 300 000 у.е. можно оплатить либо разовым платежом, либо в рассрочку на 17 лет с равными выплатами в конце каждого месяца. На остаток задолженности при покупке в рассрочку начисляется 6,25% годовых. Чему равны месячные погасительные платежи R и суммарные процентные платежи I, если здание приобретается в рассрочку?

2.173. На сколько изменятся суммарные процентные платежи в условиях предыдущей задачи, если погасительные платежи при покупке в рассрочку будут линейно убывать в год на 500 у.е. при выплатах в конце года?

2.174. Замените две ренты постнумерандо с параметрами $R_1 = 2000$, $n_1 = 3$, $i_1 = 10\%$, $R_2 = 2500$, $n_2 = 5$, $i_2 = 15\%$ разовым платежом в момент времени $n = 4$, $i = 12\%$.

2.175. Задолженность в сумме 100 000 у.е. должна быть погашена за 9 лет равными выплатами в конце каждого месяца, на остаток долга начисляется 6% годовых. После 4 лет выплат клиент попросил в банке отсрочку на 3 года по погашению основного долга. За последние 2 года долг должен быть погашен равными поквартальными платежами. Чему равен размер поквартальных платежей R, выплачиваемых в конце каждого квартала, если: а) в течение трехлетнего льготного периода выплачиваются только процентные платежи в конце каждого года, б) в течение льготного периода процентные платежи не выплачиваются, а присоединяются к сумме долга?

2.176. Долг в сумме 550 000 у.е. должен быть погашен за 8 лет равными выплатами в конце каждого года. На остаток долга начисляется 7,5% годовых. После 4 лет выплат должник попросил в банке отсрочку на 2 года для погашения основного долга. После этой отсрочки остаток долга предлагается гасить полугодовыми платежами постнумерандо в размере 15 000 у.е. Чему должно быть равно число полугодовых платежей n и чему равна недоплата b из-за округления n до целого числа, чтобы долг был полностью погашен, если: а) за время льготного двухлетнего периода процентные платежи периодически выплачивались в конце каждого года, б) процентные платежи за время льготного периода не выплачиваются, а присоединяются к сумме долга?

2.177. Замените годовую ренту с параметрами R_1, n_1 p-срочной рентой с параметрами R_2, n_2, p.

2.178. Решено за 12 лет создать фонд в сумме 950 000 у.е. равными годовыми платежами постнумерандо, на поступающие платежи начисляется 6,45% годовых. Платежи в фонд выплачивались 5 лет согласно намеченному графику. Затем в течение последующих 3 лет платежи в фонд не поступали. На сколько нужно увеличить сумму годовых платежей, чтобы накопить намеченную сумму к сроку?

2.179. В условиях предыдущей задачи в последние 4 года создания фонда решено вносить в него в конце каждого полугодия по 90 000 у.е. Насколько накопленная сумма фонда будет отличаться от намеченной суммы?

2.180. Консолидировать три ренты постнумерандо с параметрами $R_1 = 1000$, $n_1 = 3$, $R_2 = 1500$, $n_2 = 5$, $R_3 = 2000$, $n_3 = 7$, $i = 10\%$ четырехлетней рентой постнумерандо с $i = 15\%$.

2.181. Происходит слияние фирм A и B с фирмой C. Фирма A 2 года назад взяла кредит в банке на сумму 350 000 у.е. на 3 года под 8% годовых с погашением равными выплатами в конце каждого квартала. Фирма B год назад взяла кредит на сумму 500 000 у.е. под 9% годовых на 6 лет с погашением равными выплатами в конце каждого года. Фирма С должна погасить долги фирм A и B в течение 5 лет равными платежами в конце каждого года при условии, что на остаток долга начисляется 9,5% годовых. Какую годовую сумму по оплате долга должна выплачивать фирма С, если к моменту объединения фирма A произвела восемь погасительных платежей, а фирма B — два?

2.182. Дайте определение и приведите пример рассрочки платежа.

2.183. Взнос помещен в банк на 29 лет под 10% годовых. Каждые 3 года со счета снимается по 10 000 у.е. Через 9 лет снятие равных сумм со счета стали проводить через каждые 2 года. Какую сумму нужно будет снимать со счета в банке?

2.184. Замените годовую ренту $R_1 = 4$, $n_1 = 2$, $i = 15\%$ на p-срочную (полугодовую) ренту $n_2 = 5$, $i = 20\%$.

2.185. Три фирмы A, B, C сливаются в одну фирму D. Фирма A 3 года назад взяла в банке кредит на сумму 100 000 у.е. на 5 лет с погашением задолженности равными уплатами в конце каждого полугодия. Фирма *B* 2 года назад взяла кредит на сумму 200 000 у.е. на 6 лет с погашением долга в конце каждого квартала равными выплатами. Фирма *C* 4 года назад получила кредит на сумму 400 000 у.е. на 8 лет и погашала его платежами в конце года, возрастающими каждый раз на 15 000 у.е. Процентная ставка для всех кредитов равна 12% годовых. Объединенная фирма *D* должна погасить долги фирм *A*, *B*, *C* за 4 года равными платежами в конце каждого года при условии, что на остаток долга начисляется 11% годовых. Какую сумму фирма *D* должна возвращать ежегодно?

2.186. В условиях предыдущей задачи фирма *D* решила разовым платежом (а) в момент слияния, б) через год после слияния) погасить долги фирм *A*, *B*, *C*. Какую сумму следует вернуть в обоих случаях?

2.187. Дайте определение и приведите пример консолидации рент.

2.188. Фонд создается в течение 6 лет в сумме 230 000 у.е. посредством равных полугодовых взносов постнумерандо. На средства начисляется 8% годовых. Взнос в фонд в конце третьего года был сделан в размере 50% от планируемого. Для компенсации недоплаты последующие годовые взносы вносятся в фонд ежемесячно, равными платежами постнумерандо. Сравните величину фонда с запланированной.

2.189. Фонд в сумме 1 500 000 у.е. создается в течение 9 лет равными годовыми платежами постнумерандо. На средства начисляется 7% годовых. После трех выплат в фонд выплаты стали производиться через 2 года платежами постнумерандо, возрастающими каждый раз на 40 000 у.е. Чему равна сумма взноса в фонд в конце седьмого года?

2.190. При тех же условиях, что и в предыдущей задаче, сумма, внесенная в фонд в конце пятого года, составила 200 000 у.е. На сколько должен возрастать либо убывать этот платеж в дальнейшем, чтобы к концу срока в фонде была накоплена намеченная сумма в 1 500 000 у.е.?

2.191. Приведите пример замены немедленной ренты отсроченной.

2.192. Фирма получила кредит в банке на 800 000 у.е. на 6 лет под 8% годовых. Погашение кредита предусмотрено равными выплатами в конце года. Спустя 3 года фирма разделилась на три фирмы *A*, *B*, *C*, у которых соответственно остались 20, 30 и 50% непогашенного долга фирмы. Этот долг должен быть погашен за 3 года. Фирма *A* погашает долг полугодовыми платежами, фирма *B* — годовыми, а фирма *C* — поквартальными платежами (все платежи постнумерандо). Определите сумму годовых платежей R_A, R_B, R_C фирм *A*, *B*, *C*.

2.193. Фонд в сумме 1 000 000 у.е. создается в течение 8 лет посредством равных взносов в конце года. На созданные средства начисляется 7% годовых. Через 3 года взносы решено вносить в конце каждого полугодия, увеличивая выплаты каждый раз на 20 000 у.е. по сравнению с предыдущим взносом. На сколько лет раньше будет создан фонд?

2.194. В условиях предыдущей задачи взносы в фонд после трех лет производятся по схеме возрастающей геометрической прогрессии, увеличивая каждую выплату на 15% по сравнению с предыдущим уровнем. На сколько лет раньше будет создан фонд?

2.195. Задолженность в сумме 850 000 у.е. должна быть погашена равными платежами R в конце каждого года за 5 лет. На остаток задолженности начисляется 14% годовых. Предполагается, что с равной вероятностью сумма первого погасительного платежа R_1 будет лежать в интервале $[0{,}8R;\ 1{,}3R]$, сумма второго погасительного платежа R_2, также с равной вероятностью, будет лежать в интервале $[0{,}95R;\ R]$. Последний погасительный платеж R_3 вносится таким, чтобы задолженность была полностью погашена. Считая, что платежи R_1 и R_2 являются независимыми равномерно распределенными случайными величинами, вычислите среднее значение R_3 и вероятность того, что $R_3 > R$.

2.196. Задолженность в сумме 100 000 у.е. должна быть погашена за 8 лет равными платежами R в конце каждого года. На остаток задолженности начисляется 6% годовых.Погасительные платежи могут отклоняться от намеченного уровня не более чем на 7%. Последний платеж должен полностью погасить долг. По 100 погашениям долга оцените математическое ожидание и дисперсию последнего платежа.

2.197. Замените две ренты постнумерандо с параметрами $R_1 = 2000$, $n_1 = 2$, $i_1 = 20\%$, $R_2 = 3500$, $n_2 = 4$, $i_2 = 12\%$ разовым платежом в момент времени $n = 5$, $i = 10\%$.

Выкуп ренты

Выкупом ренты называется замена ренты единовременным платежом. Принцип финансовой эквивалентности здесь сводится к тому, что единовременный платеж P должен равняться современной величине выкупаемой ренты A.

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = P. \qquad (2.98)$$

По этой формуле определяется величина единовременного платежа при известных параметрах выкупаемой ренты: размере отдельного платежа R, сроке ренты n и процентной ставке i.

Пример 2.21. Замените p-срочную ренту постнумерандо с параметрами $R_1 = 2500$, $n_1 = 6$, $i_1 = 12{,}5\%$, $p = 4$ единовременным платежом в момент времени $t = 4$.

Единовременный платеж в момент времени $t = 0$ найдем из уравнения

$$A^{(p)} = \frac{R}{p} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{1/p}-1} = P\,.$$

$$P = \frac{2500}{4} \cdot \frac{1-1{,}125^{-6}}{1{,}125^{1/4}-1} = 625 \cdot \frac{0{,}5067}{0{,}02988} = 10\,597{,}378 \text{ руб.}$$

Теперь найдем единовременный платеж в момент времени $t = 4$:

$$P_{t=4} = P \cdot (1+i)^4 = 10\,597{,}378 \cdot 1{,}125^4 = 16\,974{,}95\,.$$

Рассрочка платежа

Рассрочкой платежа называется замена долга (единовременного платежа) рентой. При этом задаются все параметры ренты, кроме одного, а этот неизвестный параметр определяется из условия равенства долга современной величине вводимой ренты:

$$P = A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\,. \tag{2.99}$$

Пример 2.22. Заменить единовременный платеж 345 000 руб. в момент времени $t = 2$ p-срочной рентой постнумерандо с параметрами R_1, $n_1 = 5$, $i_1 = 15\%$, $p = 6$.

Приведем единовременный платеж в момент времени $t = 2$ к моменту времени $t = 0$.

$$P_{t=0} = P_{t=2} \cdot (1+i)^{-2} = 345\,000 \cdot 1{,}15^{-2} = 260\,869{,}5652 \text{ руб.}$$

Приравнивая этот платеж к приведенной величине p-срочной ренты постнумерандо, получим

$$A^{(p)} = \frac{R}{p} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{1/p}-1} = P\,,$$

откуда

$$R = P \cdot p \cdot \frac{(1+i)^{1/p}-1}{1-(1+i)^{-n}} = 260\,869{,}5652 \cdot 6 \cdot \frac{1{,}15^{1/6}-1}{1-1{,}15^{-5}} = 73\,370{,}062 \text{ руб.}$$

Вопросы и задачи

2.198. Замените единовременный платеж 500 000 руб. в момент времени $t = 5$ p-срочной рентой постнумерандо с параметрами R_1, $n_1 = 5$, $i_1 = 10\%$, $p = 12$.

2.199. Замените единовременный платеж 8 500 000 руб. в момент времени $t = 3$ p-срочной рентой постнумерандо с параметрами R_1, $n_1 = 10$, $i_1 = 15{,}5\%$, $p = 4$.

2.200. Замените единовременный платеж 900 000 руб. в момент времени $t = 1$ p-срочной рентой постнумерандо с параметрами $R_1 = 500\,000$, n_1, $i_1 = 18{,}25\%$, $p = 12$.

2.201. Замените единовременный платеж 100 000 руб. в момент времени $t = 3$ p-срочной рентой постнумерандо с параметрами $R_1 = 3500$, $n_1 = 4$, i_1, $p = 6$.

2.202. Замените единовременный платеж 120 000 руб. в момент времени $t = 6$ p-срочной рентой постнумерандо с параметрами $R_1 = 1500$, $n_1 = 5$, $i_1 = 12\%$, p.

2.10. Переменные ренты

Арифметические и геометрические ренты

Рассмотрим ренты с постоянным абсолютным и постоянным относительным изменением платежей во времени, так называемые *арифметические* и *геометрические* ренты. В арифметической ренте величины периодических платежей изменяются линейно, в геометрической — экспоненциально.

2.10.1. Арифметические ренты

В арифметической ренте каждый следующий платеж отличается от предыдущего на одну и ту же величину Q. Поток платежей годовой арифметической ренты за n лет имеет вид

$$C^{(n)} = \{(R;\, 1),\, (R + Q;\, 2),\, \dots,\, (R + (n-1)\,Q;\, n)\}. \qquad (2.100)$$

Его можно представить в виде линейной комбинации двух рент $G^{(n)}$ и $I^{(n)}$

$$C^{(n)} = R \cdot G^{(n)} + Q \cdot I^{(n)}. \qquad (2.101)$$

Здесь обыкновенная единичная рента

$$G^{(n)} = \{(1;\, 1),\, (1;\, 2),\, \dots,\, (1;\, n)\}, \qquad (2.102)$$

единичная арифметическая рента

$$H^{(n)} = \{(0;\ 1),\ (1;\ 2),\ \ldots,\ (n-1;\ n)\}. \qquad (2.103)$$

Тогда

$$PV(C^{(n)}) = R \cdot PV(G^{(n)}) + Q \cdot PV(H^{(n)}). \qquad (2.104)$$

Приведем несколько способов вычисления приведенной стоимости единичной арифметической ренты.

1. Для $v = (1 + i)^{-1}$ имеем:

$$PV(H^{(n)}) = \nu^2 + 2\nu^3 + \ldots + (n-1)\nu^n = \nu^2(1 + 2\nu + \ldots + (n-1)\nu^{n-2}).$$

Положим

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}.$$

Тогда

$$f'(x) = 1 + 2x + \ldots + (n-1)x^{n-2}.$$

Значение $f(x)$ можно найти как сумму членов геометрической прогрессии:

$$f(x) = \frac{1-x^n}{1-x}.$$

Следовательно,

$$f'(x) = \frac{1-x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^{n-1}}{1-x}.$$

Поскольку

$$PV(H^{(n)}) = \nu^2(1 + 2\nu + \ldots + n\nu^{n-1}) = \nu^2 \cdot f'(\nu),$$

получаем

$$PV(H^{(n)}) = v^2 \cdot \frac{1-v^n}{(1-v)^2} - v\frac{nv^n}{1-v} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i^2} - \frac{n(1+i)^{-n}}{i}. \qquad (2.105)$$

Используя выражение для $a_{\overline{n}|i}$, можно переписать (2.105) в следующем виде:

$$PV(H^{(n)}) = \frac{a_{\overline{n}|i} - n(1+i)^{-n}}{i},\ n \geq 2. \qquad (2.106)$$

Отсюда получаем формулу будущей стоимости потока I (накопленной стоимости на момент времени $t = n$):

$$FV(H^{(n)}) = \frac{s_{\overline{n}|i} - n}{i}.$$

Запишем теперь формулы для приведенной и будущей стоимости арифметической ренты:

$$PV(C^{(n)}) = R \cdot a_{\overline{n}|i} + Q \frac{a_{\overline{n}|i} - n(1+i)^{-n}}{i}; \tag{2.107}$$

$$FV(C^{(n)}) = R \cdot s_{\overline{n}|i} + Q \frac{s_{\overline{n}|i} - n}{i}. \tag{2.108}$$

Переходя в (2.107) к пределу при n, стремящемся к бесконечности, получим приведенную стоимость бесконечной арифметической ренты $C^{(\infty)}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} n(1+i)^{-n} = 0$, то

$$PV(C^{(\infty)}) = \lim_{n\to\infty} PV(C^{(n)}) = R \cdot \frac{1}{i} + Q \cdot \frac{1}{i^2}. \tag{2.109}$$

2. Отметим, что так же, как и для обыкновенной ренты, формулы (2.107) и (2.108) для конечной арифметической ренты можно получить, начав с определения стоимости бесконечной ренты. В самом деле, поток платежей бесконечной арифметической ренты

$$H = \{(0;\,1),\ (1;\,2),\ (2;\,3),\ ...\}$$

можно представить в виде суммы отсроченной на один год обыкновенной вечной ренты с единичными платежами

$$G_1 = \{(0;\,1),\ (1;\,2),\ (1;\,3),\ ...\}$$

и бесконечной арифметической ренты

$$H_1 = \{(0;\,1),\ (0;\,2),\ (1;\,3),\ (2;\,4),\ ...\}.$$

Приведя стоимости всех рент к начальному моменту времени, получаем уравнение

$$PV(H) = \frac{1}{1+i} \cdot \left(\frac{1}{i} + PV(H)\right).$$

Отсюда

$$PV(H) = \frac{1}{i^2},$$

что и дает нам приведенную выше формулу (2.109).

Наконец, представляя конечную арифметическую ренту как разность двух бесконечных (начинающихся соответственно в моменты времени $t = 0$ и $t = n$) и применяя формулу (2.109), получаем

$$PV(C^{(n)}) = R \cdot \frac{1}{i} + Q \cdot \frac{1}{i^2} - \frac{1}{(1+i)^n} \left((R + nQ) \cdot \frac{1}{i} + Q\frac{1}{i^2} \right).$$

3. Приведем еще один способ вычисления приведенной стоимости арифметической ренты [1].

$$A = R\nu + (R + Q)\nu^2 + \ldots + (R + (n-1)Q)\nu^n. \tag{2.110}$$

Здесь $\nu = (1 + i)^{-1}$.

Умножая равенство (2.110) на $(1 + i)$ и вычитая из него равенство (2.109), получим

$$Ai = R + Q\nu + Q\nu^2 \ldots + Q\nu^{n-1} - \left[R + (n-1)Q\right]\nu^n = R(1-\nu^n) + Q\sum_{j=1}^{n-1}\nu^j - nQ\nu^n + Q\nu^n.$$

Отсюда

$$A = R\left(\frac{1-\nu^n}{i}\right) + \frac{Qa_{\overline{n}|i} - nQ\nu^n}{i} = \left(R + \frac{Q}{i}\right)a_{\overline{n}|i} - \frac{nQ\nu^n}{i}. \tag{2.111}$$

2.10.1.2. *p*-срочная арифметическая рента

Рассмотрим p-срочную арифметическую ренту

$$C^{(n)} = \{(R; 1), (R + Q/p; 2), \ldots, (R + (n-1)Q/p; n)\}.$$

Текущий платеж этой ренты равен $R + (j - 1)Q/p$, $j = 1, 2, \ldots, np$. Для приведенной и наращенной величин ренты постнумерандо имеем соответственно:

$$A = \sum_{j=1}^{pn}\left(R + \frac{Qj}{p}\right) \cdot \nu^{j/p}; \tag{2.112}$$

$$S = \sum_{j=1}^{pn}\left(R + \frac{Q(j-1)}{p}\right) \cdot \nu^{j/p-n}. \tag{2.113}$$

2.10.1.3. Непрерывные арифметические ренты

Непрерывным аналогом арифметической ренты служит поток платежей плотностью $\mu(t) = R + \gamma t$. Приведенная стоимость такого потока за промежуток времени от 0 до T составляет величину

$$A = \int_0^T (R + \gamma t) e^{-\delta t} dt, \tag{2.114}$$

где $\delta = \ln(1 + i)$ — сила роста. Вычисляя интеграл, находим

$$\begin{aligned} A &= -\left(\frac{\gamma}{\delta^2} + \frac{R}{\delta} + \frac{\gamma}{\delta} t \right) e^{-\delta t} \Big|_0^T = (\gamma\delta^2 + r\delta)(1 - e^{-\delta T}) - \gamma\delta T e^{-\delta T} = \\ &= R \cdot a_{\overline{T}|i}^{(\infty)} + \gamma \cdot \frac{a_{\overline{T}|i}^{(\infty)} - Te^{-\delta T}}{\delta}. \end{aligned} \tag{2.115}$$

(Напомним, что $a_{\overline{T}|i}^{(\infty)} = \dfrac{1 - e^{-\delta T}}{\delta}$.)

2.10.1.4. Геометрические ренты постнумерандо

Геометрической называется рента, в которой платежи меняются со временем с постоянным относительным ростом q, т.е. каждый следующий платеж отличается от предыдущего на одно и то же число процентов q. Другими словами, q является темпом прироста платежей. Поток платежей годовой геометрической ренты за n лет имеет вид

$$E^{(n)} = \{(1;\ R),\ (2;\ R(1 + q)),\ (3;\ R(1 + q)^2),\ \ldots,\ (n;\ R(1 + q)^{n-1})\}. \tag{2.116}$$

Вычисление приведенной стоимости геометрической ренты сводится к суммированию дисконтированных платежей, т.е. к вычислению суммы геометрической прогрессии с первым членом $R\nu$ и знаменателем $k = 1 + q$:

$$A = \sum_{t=1}^{n} \frac{R(1+q)^{t-1}}{(1+i)^t} = \frac{R}{1+i} \cdot \frac{1 - \left(\dfrac{1+q}{1+i} \right)^n}{1 - \dfrac{1+q}{1+i}} = R \cdot \frac{1 - \left(\dfrac{1+q}{1+i} \right)^n}{i - q}. \tag{2.117}$$

Отметим, что прирост может быть как положительным ($q > 0$), так и отрицательным ($q < 0$).

Для наращенной величины геометрической ренты получаем

$$S = A(1+i)^n = R\frac{k^n - (1+i)^n}{k - (1+i)} = R\frac{(1+q)^n - (1+i)^n}{q - i}. \tag{2.118}$$

2.10.1.5. *p*-срочная геометрическая рента

Если платежи производятся p раз в году, а проценты (по ставке i) начисляются один раз в году постнумерандо, то платежи представляют собой геометрическую прогрессию

$$C^{(n)} = \{(R;\, 1),\, (Rk;\, 2),\, \ldots,\, (Rk^{np-1};\, n)\}. \tag{2.119}$$

Здесь $k = 1 + q$ — темп роста за период. Дисконтируя и суммируя члены прогрессии, получим для наращенной величины ренты

$$S = R\frac{k^{np} - \left(1+i\right)^n}{k - (1+i)^{1/p}} = R\frac{(1+q)^{np} - \left(1+i\right)^n}{1+q-(1+i)^{1/p}} \,. \tag{2.120}$$

Для приведенной величины ренты имеем [2; 4]

$$A = R\frac{k^{np}\nu^n - 1}{k-(1+i)^{1/p}} = R\frac{(1+q)^{np}\nu^n - 1}{1+q-(1+i)^{1/p}} \,. \tag{2.121}$$

2.10.1.6. Геометрическая рента пренумерандо

Проводя аналогичные вычисления для геометрической ренты пренумерандо либо используя соотношения между приведенной и наращенной величинами ренты постнумерандо и пренумерандо, содержащимися в этой главе, получим следующие выражения для приведенной и наращенной величин ренты

$$\ddot{A} = R\frac{(k\nu)^n - 1}{k\nu - 1}(1+i) = R\frac{1-\left(\dfrac{1+q}{1+i}\right)^n}{q-i}(1+i)\,, \tag{2.122}$$

$$\ddot{S} = R\frac{(k\nu)^n - 1}{k\nu - 1}(1+i)^n = R\frac{1-\left(\dfrac{1+q}{1+i}\right)^n}{q-i}(1+i)^{n+1}\,. \tag{2.123}$$

Вопросы и задачи

2.203. Дайте определение арифметической и геометрической рент. Найдите приведенную величину и наращенную сумму арифметической ренты.

2.204. Задолженность в 2 000 000 руб. планируется погасить следующим образом: в течение 4 лет в конце года выплачивается по 100 000 руб., а остальной долг гасится равными суммами S в конце шестого и восьмого годов. На остаток долга начисляется 8,75% годовых. Чему равно значение S?

2.205. Фонд создан для погашения ссуды в размере 500 000 руб., выданной на 4 года под 12% годовых, которая должна быть погашена разовым платежом в конце четвертого года. На средства фонда начисляется 13% годовых. В течение первого года в банк вносили по 7000 руб. в конце каждого месяца, во второй год — по 24 000 руб. в конце каждого квартала. Какую сумму нужно внести в банк через 3,25 года для погашения долга?

2.206. Фонд в сумме 200 000 руб. создается в течение 7 лет. На поступающие средства начисляется 12% годовых. Каждый год взносы, поступающие в фонд в конце года, увеличиваются на 15 000 руб. Какова первоначальная сумма, внесенная в фонд?

2.207. Задолженность в сумме 1 400 000 руб. погашается платежами в конце года. На остаток задолженности начисляется 16% годовых. Первые 4 года в счет погашения задолженности вносилось по 140 000 руб., из которых 100 000 руб. направлялось на погашение основного долга. Затем в течение 5 лет в конце каждого года выплачивались только процентные платежи. Начиная с конца десятого года задолженность погашается путем выплаты суммы R в конце каждого года. Чему равно значение R, если задолженность должна быть полностью погашена к концу одиннадцатого года?

2.208. Задолженность в сумме 1 000 000 у.е. гасится в течение 10 лет годовыми выплатами в конце года по 100 000 у.е. На остаток задолженности в течение первых 5 лет начисляется 8% годовых. В последние 5 лет на остаток задолженности начисляется 10% годовых. Остаток непогашенной задолженности возвращается в конце десятого года. Сколько нужно уплатить по погашению задолженности в конце десятого года?

2.209. Доходы от инвестиций в 500 000 руб. в конце каждого года составят по 42 000 руб. в первые 7 лет, по 35 000 в последующие 6 лет и по 25 000 в последние 5 лет. При норме доходности 23% годовых окупят ли доходы произведенные инвестиции?

2.210. Дайте определение арифметической и геометрической рент. Найдите приведенную величину и наращенную сумму геометрической ренты.

2.211. Ипотечная ссуда в 4 500 000 руб. выдана на 20 лет под 17% годовых. Погашение ссуды — в конце каждого месяца. В первые 10 лет сумма погасительного платежа каждый месяц возрастает в 1,01 раза по сравнению с предыдущим месяцем. В последние 10 лет ежемесячные суммы погасительных платежей постоянны. Чему равна сумма первого погасительного платежа?

2.212. Задолженность в сумме 600 000 у.е. гасится в течение 6 лет платежами в конце каждого года. Каждый год платежи увеличиваются на 15 000 у.е., на остаток задолженности начисляется 9,5% годовых. Какова должна быть сумма первого платежа, чтобы долг был полностью погашен?

2.213. Доходы от инвестиций в 500 000 руб. в конце каждого года составят по 42 000 руб. в первые 7 лет, по 35 000 руб. в последующие 6 лет и по 25 000 в последние 5 лет. Рассчитайте эффективную ставку инвестирования средств в виде годовой ставки: а) сложных процентов, б) простых процентов.

2.214. Фонд в сумме 550 000 у.е. создается в течение 8 лет при ставке 12% годовых. Взносы, поступающие в фонд в конце года, каждый год увеличиваются на 17 000 у.е. Какую первоначальную сумму нужно внести в фонд?

2.215. На сколько возрастут или уменьшатся суммарные процентные платежи в условиях предыдущей задачи, если погасительные платежи линейно убывают в год на 43 000 руб. при выплатах в конце года?

2.216. В течение 10 лет гасится задолженность в сумме 4 000 000 руб., на остаток долга начисляется 18% годовых. После первых 4 лет выплат банк предоставил клиенту отсрочку на 3 года по погашению основного долга. За последние 3 года долг должен быть погашен равными поквартальными платежами. Чему равен размер поквартальных платежей R, выплачиваемых в конце каждого квартала, если: а) в течение трехлетнего льготного периода выплачиваются только процентные платежи в конце каждого года, б) в течение льготного периода процентные платежи не выплачиваются, а присоединяются к сумме долга?

2.217. Инвестиции составляют 300 000 у.е. Доходы в конце каждого года составляют по 80 000 у.е. в первые 6 лет, по 50 000 у.е. в последующие 6 лет и по 30 000 у.е. в последние 6 лет. При норме доходности 25% годовых окупят ли доходы произведенные затраты? Рассчитайте эффективную ставку инвестирования средств в виде годовой ставки сложных процентов.

2.218. Ссуда в размере 800 000 руб. выдана на 4 года под 17% годовых и должна быть погашена разовым платежом в конце четвертого года. Для погашения задолженности путем размещения денежных средств в банке под 10% годовых создан погасительный фонд. В течение первого года в банк вносится по 20 000 руб. в конце каждого месяца, на протяжении второго года — по 35 000 руб. в конце каждого квартала. Какую сумму нужно внести в банк через 3 года, чтобы суммы погасительного фонда было достаточно для погашения долга?

2.219. Фонд в сумме 1 000 000 руб. создается в течение 8 лет. На протяжении первых 5 лет в банк вносили в конце каждого года по 150 000 руб., затем по 50 000 руб. в конце каждого года в последние 3 года. Чему равна годовая процентная ставка размещения денежных средств в банке?

2.220. За 12 лет создается амортизационный фонд в сумме 620 000 руб. посредством равных ежегодных взносов пренумерандо. На собранные средства начисляется 16% годовых. Взнос в фонд в конце пятого года был сделан в 2 раза больше, а в конце седьмого года — в 3 раза меньше, чем запланированный. Если последующие годовые запланированные взносы вносятся в фонд ежеквартально равными платежами постнумерандо, будет ли при этом амортизационный фонд больше или меньше запланированного и насколько?

2.221. В условиях предыдущей задачи сумма, внесенная в фонд в конце седьмого года, составила 80 000 руб. На сколько должен возрастать либо убывать этот платеж в дальнейшем, чтобы к концу срока в фонде была накоплена намеченная сумма в 7 000 000 руб.?

2.222. Фонд создается путем размещения денежных средств в банке под 12% годовых в конце каждого года. В первые 3 года вносили по 30 000 руб. ежегодно, затем — по 50 000 руб. Через сколько лет величина фонда превысит 1 500 000 руб.?

2.223. Фонд создается путем размещения денежных средств в конце каждого года под 14% годовых. Первые 5 лет вносили по 100 000 руб. ежегодно, затем — по 120 000 руб. Через сколько лет сумма, накопленная в фонде, превысит 1 200 000 руб.?

2.224. Взносы в фонд вносят в конце года на протяжении 10 лет. Первые 4 года вносили по 50 000 руб., в последние 6 лет — по 75 000 руб. Первые 4 года годовая процентная ставка равна 9% с вероятностью 0,6 и 10% с вероятностью 0,4. Последующие 6 лет годовая процентная ставка равна 11% с вероятностью 0,78 и 11,5% с вероятностью 0,22. Для наращенной суммы фонда S определите следующие характеристики: $S_{\min}$, $S_{\max}$, $E\{S\}$, $D\{S\}$.

2.225. Фонд создается путем размещения денежных средств в конце каждого года под 9% годовых. В первые 5 лет в фонд вносили по 230 000 руб. В течение следующих 3 лет выплаты в фонд не проводились. Начиная с конца девятого года выплаты были возобновлены в размере 135 000 руб. в конце каждого года. Чему будет равна сумма фонда на конец двенадцатого года?

2.226. Для создания фонда денежные средства вносятся в конце года под 12% годовых. В первые 10 лет в фонд вносили по 50 000 руб. Затем, после трехлетнего перерыва (с конца четырнадцатого года), выплаты возобновились в размере 75 000 рублей ежегодно. Какова величина фонда в конце двадцатого года?

2.227. В условиях предыдущей задачи после трехлетнего перерыва (с конца четырнадцатого года) выплаты возобновились в размере 15 000 руб. ежемесячно. Какова величина фонда в конце восемнадцатого года?

2.228. За 15 лет создается амортизационный фонд в сумме 500 000 руб. посредством равных ежеквартальных взносов постнумерандо. На собранные средства начисляется 15% годовых. Взнос в фонд в конце пятого года был сделан в размере 80% от запланированного. Для компенсации недоплаты последующие годовые запланированные взносы вносятся в фонд ежемесячно, равными платежами постнумерандо. Будет ли при этом амортизационный фонд больше или меньше запланированного и насколько?

2.229. Задолженность в сумме 900 000 руб. погашается платежами в конце года. На остаток задолженности начисляется 9% годовых. Первые 4 года в счет погашения задолженности вносилось по 50 000 руб., из которых 40 000 руб. шло на погашение основного долга. Затем в течение 3 лет в конце года выплачивались только проценты. Начиная с конца восьмого года стали погашать задолженность, выплачивая сумму R в конце каждого года. Чему равно значение R, если задолженность должна быть полностью погашена к концу десятого года?

2.230. В условиях предыдущей задачи найти R, если на протяжении 3 лет, когда не гасилась основная задолженность, проценты не выплачивались, а присоединялись к сумме долга.

2.231. Фонд в размере 180 000 руб. создается в течение 8 лет. Определить размер ежегодных платежей по сложной ставке 25% годовых.

2.232. Фонд создается в течение 7 лет. В начале первого года на его счет внесено 30 000 у.е., в конце второго года –50 000 у.е., в конце четвертого года –120 000 у.е., в начале шестого года — 70 000 у.е., через полгода — 85 000 у.е. На собранные средства в течение первых 3 лет начислялось 6% годовых, в последние 4 года — 5%. Какова величина фонда к концу седьмого года?

2.233. Фонд в сумме 830 000 руб. создан за 8 лет. Для этого в банк в конце каждого года вносится по 150 000 руб. на протяжении первых 2 лет, затем по 120 000 руб. в конце каждого года в последние 4 года.

Какова годовая процентная ставка: а) сложных, б) простых процентов размещения денежных средств в банке?

2.234. Задолженность в сумме 900 000 у.е. погашается следующими выплатами: 160 000 у.е. в конце второго года, 120 000 у.е. в конце третьего года, 100 000 у.е. через 4,5 года после получения ссуды. На остаток задолженности начисляется 8% годовых. Какую сумму нужно вернуть в конце пятого года, чтобы погасить задолженность?

2.235. Определите размер ежегодных платежей для погашения кредита размером 250 000 руб. в течение 10 лет при простой (сложной) ставке 28% годовых.

2.236. Задолженность в сумме 1 000 000 у.е. должна быть погашена в течение 8 лет. В течение первых 3 лет выплачивается по 25 000 у.е. в конце каждого квартала, в последующие 2 года — по 35 000 у.е. в конце каждого полугодия. На последнем этапе планируется выплачивать равные суммы R в конце каждого квартала, чтобы полностью погасить задолженность. Чему должно быть равно значение R, если на остаток долга начисляется 10% годовых? Какую сумму единовременным платежом должен выплатить должник, чтобы полностью погасить долг: а) в конце третьего года, б) в конце шестого года?

2.237. Фонд создается путем размещения денежных средств в конце каждого года на протяжении 10 лет. В первые 6 лет вносится по 20 000 руб., в последние четыре года — по 50 000 руб. В первые 5 лет годовая процентная ставка будет равна 12% с вероятностью 0,6 и 13% с вероятностью 0,4. Последние 5 лет процентная ставка будет постоянной и составит 10% с вероятностью 0,2 и 11% с вероятностью 0,8. Для наращенной суммы фонда S найдите: $E\{S\}$, $D\{S\}$, $S_{\min}$, $S_{\max}$.

2.238. Фонд в сумме 780 000 руб. создается в течение 8 лет. Взносы в фонд в конце каждого года увеличиваются на 20 000 руб. На средства фонда начисляется 9,5% годовых. Каков должен быть первый взнос в фонд?

2.239. Годовые доходы компании, приведенные на конец года, линейно возрастают на 200 000 у.е. в год в течение 5 лет, затем в течение 8 лет доходы будут постоянны. В следующие 7 лет годовые доходы сокращаются на 60 000 у.е. в год. Чему равна приведенная величина всех доходов компании при нормативе доходности 16% годовых, если первый годовой доход равен 1 500 000 у.е.?

2.240. В условиях предыдущей задачи оцените эффективность инвестирования в компанию 10 000 000 у.е. в виде годовой ставки сложных процентов.

2.241. Ссуда в 65 000 у.е., выданная на 12 лет под 15% годовых, погашается в конце каждого месяца. Первые 5 лет сумма погасительного платежа возрастает в 1,01 раза по сравнению с предыдущим месяцем. В последние 7 лет ежемесячные суммы погасительных платежей постоянны. Чему равна сумма первого и последнего погасительных платежей?

2.242. Годовые доходы, приведенные на конец года, в течение 5 лет возрастают в 1,2 раза по сравнению с предыдущим годом. Затем в течение 10 лет доходы постоянны. Далее годовые доходы линейно сокращаются на 250 000 руб. в год в течение 4 лет. Чему равна современная стоимость всех доходов при нормативе доходности в 20% годовых, если первый годовой доход оценивается в 15 000 000 руб.?

2.243. Годовые доходы фирмы, приведенные на конец года, возрастают в 1,5 раза по сравнению с предыдущим годом в течение 5 лет. В течение следующих 10 лет годовые доходы постоянны. В следующие 3 года доходы растут линейно на 2 000 000 у.е. в год. Чему равна приведенная стоимость всех доходов фирмы при норме доходности в 15% годовых, если первый годовой доход оценивается в 15 000 000 у.е.?

2.244. Задолженность в 800 000 у.е. погашается в течение 15 лет по схеме возрастающей ренты, члены которой изменяются по арифметической прогрессии, причем абсолютный прирост за год равен половине первого члена. Погашение основного долга начинается с конца пятого года. Платежи и начисление процентов на остаток долга производятся в конце года, ставка — 8% в год. Первые 3 года выплачиваются только проценты в конце каждого года. Определите сумму всех выплат S по погашению долга и сумму процентных платежей I.

2.245. При сохранении условий предыдущей задачи определите те же значения S и I, если в течение первых 3 лет проценты не выплачиваются, а присоединяются к сумме долга.

2.246. Задолженность в 500 000 у.е. погашается в течение 11 лет по схеме возрастающей ренты, члены которой возрастают по геометрической прогрессии, увеличиваясь за год на 14%. Погашение основного долга начинается с конца четвертого года. Платежи и начисление процентов на остаток долга производятся в конце года, ставка — 7% в год. Первые 3 года проценты не выплачиваются, а присоединяются к сумме долга. Определите сумму всех выплат S по погашению долга и общую сумму процентных платежей I.

2.247. Фонд в сумме 500 000 у.е. создается в течение 7 лет взносами, поступающими в конце года и образующими возрастающую геометрическую прогрессию. На средства начисляется 12% годовых. Первый взнос в фонд составил 40 000 у.е. На сколько процентов должен возрастать каждый последующий взнос?

2.248. Задолженность в 850 000 у.е. погашается в течение 6 лет по схеме возрастающей ренты, члены которой увеличиваются по геометрической прогрессии, причем первая выплата равна 70 000 у.е. Платежи и начисление процентов на остаток долга производятся в конце года, ставка — 8,25%. Определите сумму всех процентных платежей I.

2.249. Долг в сумме 160 000 у.е. погашается в течение 9 лет платежами в конце года. Первая выплата равна 30 000 у.е. Далее долг гасится последовательностью платежей, изменяющейся либо по арифметической, либо по геометрической прогрессии. На остаток долга начисляются 7% годовых. По какой схеме платежей сумма процентных платежей будет больше и на сколько?

2.250. Долг в сумме 650 000 у.е. гасится рентными платежами, убывающими по арифметической прогрессии, абсолютное годовое уменьшение платежей составляет 12 000 у.е., срок погашения — 10 лет. Платежи и начисление процентов на остаток долга производятся в конце года, ставка — 11% в год. Определите сумму всех процентных платежей P. Как изменится сумма процентных платежей и на сколько, если долг будет погашаться по схеме возрастающей арифметической прогрессии с тем же абсолютным приростом?

2.251. В условиях предыдущей задачи ответьте на те же вопросы при условии, что долг гасится по схеме платежей, изменяющихся по геометрической прогрессии. Относительное годовое изменение платежей составляет 15%.

2.252. Долг в сумме 155 000 у.е. гасится в течение 6 лет платежами, убывающими в геометрической прогрессии и вносимыми в конце года. Первый взнос равен 30 000 у.е., на остаток долга начисляется 13% годовых. На сколько процентов должен убывать каждый платеж, чтобы долг был погашен?

2.253. Фонд создается в течение 10 лет взносами, на которые начисляется 7,7% годовых. В конце первого года вносится 100 000 у.е., в конце третьего — 160 000 у.е., в конце восьмого — 200 000 у.е. С равной вероятностью намеченные суммы могут отклоняться от своего номинала в положительную и отрицательную сторону не более чем на 10%. Для 100 реализаций выплат оцените среднюю сумму фонда, ее дисперсию и вероятность попадания суммы фонда в интервал (480 000 у.е. — 500 000 у.е.). Чему равны $S_{\min}$ и $S_{\max}$ наращенной суммы фонда?

2.254. Фонд создается в течение 14 лет. Взносы в фонд поступают в конце каждого месяца и возрастают каждый раз на 2%, первый взнос — 10 000 у.е. На поступающие средства начисляются проценты по ставке 9% годовых, проценты капитализируются поквартально. Найдите величину фонда.

2.255. Инвестиции равны 2 500 000 у.е. В течение первых 3 лет доходы составят по 300 000 у.е. в год, в следующие 6 лет — по 500 000 у.е. и в последние 2 года — по 400 000 у.е. в год. Доходы поступают непрерывно и равномерно в пределах соответствующих периодов. При нормативе доходности в 20% годовых оцените, на сколько приведенные доходы превысят инвестиции.

2.256. В условиях предыдущей задачи оцените, на сколько процентов возрос приведенный доход при непрерывном и равномерном распределении доходов в пределах года по сравнению со случаем, когда соответствующие доходы поступали бы в конце каждого года.

2.257. Планируется линейный и непрерывный рост выпуска продукции в течение 5 лет. Базовый объем выпуска продукции составляет 25 000 000 руб. Каким должен быть годовой прирост продукции, чтобы суммарный стоимостной объем выпуска продукции за 5 лет с начисленными процентами по непрерывной годовой ставке 12% составил бы 120 000 000 руб.?

2.258. Компания существует в течение 45 лет. Доход компании $R(t)$ поступает непрерывно. В течение 5 лет $R(t) = 400\,000 + 20\,000t$, где 400 000 у.е. — первоначальная величина дохода, 20 000 у.е. — ежегодный прирост. Далее, в течение 25 лет, ежегодный доход равен 750 000 у.е., причем в течение каждого года и всего периода он будет поступать равномерно и непрерывно. В течение следующих 15 лет он убывает экспоненциально, т.е. $R(t) = 750\,000 \cdot \exp\left(-0{,}2(t-30)\right)$. Для постоянной непрерывной годовой ставки $\delta = 12\%$. Рассчитайте приведенную величину дохода за все время существования компании.

2.259. Фонд создается в течение 5 лет. На поступающие средства начисляются сложные проценты по ставке 11% годовых. В течение первых 3 лет взносы поступали в конце каждого квартала и возрастали каждый раз на 2%, а проценты капитализировались по полугодиям. Первый взнос составил 1200 у.е. В последующие 2 года взносы вносились в конце каждого месяца и возрастали на 0,5% по отношению к предыдущему взносу, а проценты капитализировались поквартально. Определите величину фонда.

2.260. Фонд в размере 400 000 у.е. создается в течение 6 лет. Платежи в фонд поступают в конце каждого квартала, возрастая каждый раз на 1%. На поступающие платежи начисляются сложные проценты по ставке 8% годовых и капитализируются ежемесячно. Определите величину первого взноса в фонд.

2.261. Мужчина в возрасте 45 лет решил создать фонд к дополнительной оплате к пенсии. Для этого он ежеквартально вносит на счет в банк, под 14% годовых, суммы, возрастающие каждый раз на 1%, на протяжении 7 лет. Первый взнос составил 100 у.е. Какую сумму он сможет снимать со счета в банке равными суммами R в начале каждого месяца на протяжении 20 лет по достижении им пенсионного возраста, если на остаток счета в банке начисляется 7,5% годовых? Какова величина аналогичных платежей R_1, если на тех же условиях мужчина начал создавать фонд в возрасте 30 лет?

2.262. Фонд в размере 250 000 у.е. создается в течение 4 лет поквартальными платежами постнумерандо, возрастающими в геометрической прогрессии. Первый взнос равен 10 000 у.е. На поступающие платежи начисляются 9,25% годовых, проценты капитализируются по полугодиям. На сколько процентов должен возрастать каждый последующий платеж?

2.263. Планируется создать за 4,25 года фонд в размере 35 000 у.е. взносами в конце каждого месяца, возрастающими в геометрической прогрессии на 0,75% за месяц. Первый взнос составил 1000 у.е. По какой годовой ставке процентов на взносы должны начисляться проценты: а) с поквартальной, б) полугодовой капитализацией процентов?

2.264. Фонд в размере 150 000 у.е. создается взносами, поступающими в конце каждого квартала и возрастающими каждый раз на 0,25%. Первый взнос составил 5000 у.е. На поступающие платежи начисляется 7% годовых с поквартальной капитализацией процентов. За какой срок может быть создан фонд?

2.265. Создается фонд по дополнительной оплате к пенсии. Женщина желает получать в начале каждого месяца по 100 у.е. на протяжении 15 лет после достижения ею пенсионного возраста. Для этого она начала создавать этот фонд в возрасте 40 лет, внося в течение 10 лет на счет в банке суммы в конце каждого месяца. Платежи возрастают каждый раз на 0,5%. На данные средства начисляется 10% годовых, а после достижения пенсионного возраста — 11%. Какова величина первого взноса R в фонд? На сколько можно было бы уменьшить R, если бы фонд начал создаваться на 5 лет раньше на тех же условиях?

2.266. Задолженность в сумме 150 000 руб. погашается следующими выплатами: 30 000 руб. в конце первого года, 60 000 руб. в середине третьего года, 20 000 руб. в середине четвертого года. Какую сумму нужно вернуть в конце пятого года, чтобы полностью погасить задолженность, если на остаток задолженности начисляется 15% годовых?

2.267. Фонд создается в течение 7 лет. На поступающие платежи начисляется 10% годовых. В первые 3 года взносы вносились в конце каждого месяца по схеме возрастающей геометрической прогрессии. Причем каждый последующий платеж увеличивался на 0,75%. Первый взнос составил 1200 у.е. В этот период проценты капитализировались поквартально. В последующие 4 года взносы вносились в конце каждого квартала по схеме возрастающей арифметической прогрессии с приростом каждого последующего платежа на 150 у.е., капитализация процентов полугодовая. Какова величина фонда?

2.268. Долг в сумме 15 000 у.е. должен быть погашен за 3 года платежами, вносимыми в конце каждого квартала. Каждый последующий платеж должен быть больше предыдущего на 3%. На остаток долга начисляется 10,5% годовых, проценты капитализируются по полугодиям. Какова величина R первого платежа, идущего на погашение долга? Сколько процентов будет выплачено за весь срок?

2.269. Долг в сумме 2 500 000 руб. должен быть возвращен за 11 лет. В течение первых 3 лет выплачивается по 100 000 руб. в конце каждого полугодия, в последующие 4 года — по 450 000 руб. в конце каждого квартала. В течение последних 4 лет выплачиваются равные суммы R в конце каждого квартала, чтобы полностью погасить задолженность. Чему должно быть равно значение R, если на остаток долга начисляется 23% годовых (K – 360)? Какую сумму единовременным платежом должен выплатить должник, чтобы полностью погасить долг: а) в конце четвертого года, б) в середине десятого года, в) в конце третьего квартала одиннадцатого года?

2.270. Долг в сумме 22 000 у.е. должен быть погашен платежами, выплачиваемыми в конце каждого квартала, последующие платежи убывают на 2% относительно предыдущего. Первый платеж, идущий на погашение долга, составил 2500 у.е. За какой срок (в кварталах) может быть погашен долг, если на остаток долга начисляется 11,5% годовых и проценты капитализируются каждые полгода? На сколько нужно увеличить первый платеж, чтобы не было недоплаты?

2.271. Долг в 50 000 у.е. планируется выплатить полугодовыми платежами, возрастающими каждый раз на 4%. Первый платеж должен быть кратен 1000 у.е. На остаток долга начисляется 10% годовых и проценты капитализируются поквартально. Чему должен быть равен минимальный размер первого платежа R, чтобы продолжительность погашения долга не превосходила 6 лет?

2.272. Фонд создается в течение 10 лет. На счет фонда внесено 50 000 руб. в начале первого года, 150 000 руб. — в конце второго года, 120 000 руб. — в конце третьего года, 230 000 руб. — в конце шестого года и через полгода — 60 000 руб. На собранные средства в течение первых 3 лет начислялось 10% годовых, в последние 7 лет — 12% годовых (сложные проценты). Какова сумма фонда к концу десятого года?

2.273. Долг в сумме 650 000 у.е. должен быть погашен за 3,5 года платежами, выплачиваемыми в конце каждого месяца. На остаток долга начисляется 9% с полугодовой капитализацией процентов. В каком случае суммарная выплата процентов будет меньше, если: а) каждый последующий платеж будет возрастать на 3%, б) убывать на 2%? Чему равна минимальная сумма выплаченных процентов?

2.274. Разовый платеж за недвижимость 6 500 000 руб. заменен восьмилетним постоянными ежемесячными платежами. На остаток задолженности начисляется 17% годовых. Чему равны месячные погасительные платежи R/p и суммарные процентные платежи?

2.275. Долг 500 000 у.е. должен быть погашен за 144 месяца платежами в конце каждого месяца по схеме платежей с постоянным увеличением расходов по обслуживанию долга. При этом в первом периоде длительностью 40 месяцев каждый последующий платеж растет на 0,2%. В последние 104 месяца выплаты были постоянными. Какова величина первого платежа, если на остаток долга начисляется 12% годовых и проценты капитализируются в конце каждого квартала?

2.11. Отсрочка платежей

2.276. Долг в сумме 1 000 000 руб. должен быть погашен за 15 лет равными выплатами в конце года. На остаток долга начисляется 19% годовых. После 2 лет выплат банк предоставил клиенту отсрочку на 4 года для погашения основного долга. После этой отсрочки остаток долга предлагается гасить полугодовыми платежами постнумерандо в размере 100 000 руб. Чему должны быть равны число полугодовых платежей n и недоплата N из-за округления n до целого числа, чтобы долг был полностью погашен, если: а) за время льготного двухлетнего периода процентные платежи периодически выплачивались в конце каждого года, б) процентные платежи за время льготного периода не выплачиваются, а присоединяются к сумме долга?

2.277. Фонд в размере 370 000 руб. создается в течение 12 лет путем равных годовых платежей постнумерандо, на поступающие платежи начисляется 22% годовых. 3 года платежи выплачивались по графику. В течение последующих 4 лет платежи в фонд не поступали. На сколько следует увеличить сумму годовых платежей в последние 5 лет, чтобы накопить намеченную сумму к сроку?

ГЛАВА 3

ДОХОДНОСТЬ И РИСК ФИНАНСОВОЙ ОПЕРАЦИИ

Назовем ***финансовой операцией*** любую операцию, начальное и конечное состояние которой имеет финансовое (денежное) выражение (оценку) (P и P'). Одной из главных целей проведения любой финансовой операции является получение максимальной прибыли ($P' - P$), поэтому ***прибыль*** является одной из основных характеристик финансовой операции наряду с полученным в результате ее ***доходом*** (P'). Более точно финансовую операцию характеризует ее ***доходность*** ($(P' - P)/P$) (или эффективность).

3.1. Доходность за несколько периодов

Найдем доходность за несколько периодов, если доходность за каждый период известна. Пусть доходности за последовательные периоды времени $t_1, t_2, ..., t_n$ равны $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ соответственно (рис. 3.1).

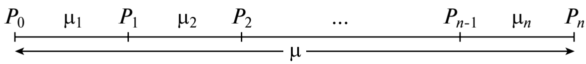

Рис. 3.1. Доходность за несколько периодов

Тогда доходность μ за период $t = t_1 + t_2 + ... + t_n$ выражается формулой

$$\mu = (\mu_1 + 1)\cdot(\mu_2 + 1)\cdot\ldots\cdot(\mu_n + 1) - 1\,. \qquad (3.1)$$

Для равных доходностей за отдельные периоды $\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_n$ (интересно, что при этом промежутки времени могут оставаться произвольными и не равными друг другу) имеем

$$\mu = (1 + \mu_1)^n - 1. \qquad (3.2)$$

Риском финансовой операции называется среднее квадратичное (стандартное) отклонение доходности $r(q) = \sigma(q) = \sqrt{D(q)}$. При увеличении масштаба операции в c раз, т.е. при увеличении всех значений случайного дохода в c раз, эффективность операции возрастает в c раз, риск — в $|c|$ раз, а средняя доходность не изменяется.

Средняя ожидаемая доходность операции $M(q)$ и ее риск $r(q)$ связаны неравенством Чебышева:

$$P(q - M(q)) > \delta) \le r_q^2 / \delta^2 \text{, или } P(q - M(q)) < \delta) > 1 - r_q^2 / \delta^2 . \quad (3.3)$$

Смысл неравенства Чебышева состоит в утверждении, что вероятность того, что отклонение доходности операции от среднего значения превысит заданное число δ, ограничена сверху числом $r_q^2 / \delta^2 = D / \delta^2$, или, соответственно, что вероятность того, что отклонение доходности операции от среднего значения не превысит заданное число δ, ограничена снизу числом $1 - r_q^2 / \delta^2 = 1 - D / \delta^2$. Таким образом, важность введения среднего квадратичного отклонения связана с тем, что оно определяет границы, в которых с заданной вероятностью следует ожидать значение случайной величины. Так, например, из неравенства Чебышева $P(|X - m| < \varepsilon) > 1 - D/\varepsilon^2$ следует «***правило* 3σ**»: для любой случайной величины X выполняется неравенство

$$P(|X - m| < 3\sigma) > 1 - D/9\sigma^2 = 8/9 . \quad (3.4)$$

Это означает, что если известны среднее значение случайной величины и ее стандартное отклонение, то с вероятностью большей 8/9 (89%) можно утверждать, что значение случайной величины будет находиться в интервале (m – 3σ, m + 3σ). То есть значения случайной величины вне этого интервала можно на практике не учитывать.

Более того, в действительности оказывается, что для большинства случайных величин, встречающихся на практике, такая вероятность значительно ближе к 1, чем 8/9. Так, при распределении случайной величины, близком к нормальному, с вероятностью 68% можно утверждать, что значение случайной величины X (в нашем случае доходности Q) находится в границах $M(q) \pm \sigma$, с вероятностью 95% — в пределах $M(q) \pm 2\sigma$, а с вероятностью 99,7% — в пределах $M(q) \pm 3\sigma$ и т.д.

3.2. Роль равномерного распределения

Важная роль равномерного распределения связана с двумя факторами:

1) это распределение является простейшим из всех распределений и в ситуации, когда истинное распределение вероятностей неизвестно, равномерное распределение используется для первичной (пусть и грубой) оценки числовых характеристик случайных величин;

2) целый ряд ситуаций обладает симметрией, делающей равномерное распределение хорошим приближением реального распределения, так что расчеты с помощью этого распределения в подобных ситуациях вполне оправданны.

3.3. Выделенная роль нормального распределения

Особая роль нормального распределения теоретически обоснована центральной предельной теоремой, которую идеологически можно сформулировать следующим образом: закон распределения среднеарифметического большого числа случайных величин при достаточно общих условиях близок к нормальному. Общие условия сводятся к тому, что отдельные отклонения каждой случайной величины должны быть одного порядка малости и малы по сравнению с суммарным отклонением (отклонением суммы случайных величин).

Поскольку в экономических и финансовых приложениях довольно часто имеют дело со среднеарифметическими (или суммами) большого числа случайных величин, важность нормального распределения трудно переоценить: по этому закону распределены величины финансовых потоков, доходы компаний, зависящие от большого числа факторов, ошибки измерений различных величин и т.д.

3.4. Коррелированность финансовых операций

Случайные величины X и Y называются ***коррелированными***, если их корреляционный момент (или ковариация)

$$K_{xy} = \operatorname{cov}(X,Y) = M\left[\left(x - M(x)\right)\left(y - M(y)\right)\right] = M(XY) - M(X)\cdot M(Y)$$

отличен от нуля, и некоррелированными, если он равен нулю. Корреляционный момент K_{xy} и коэффициент корреляции ρ_{xy} связаны между собой соотношением $K_{xy} = \sigma_x\sigma_y\rho_{xy}$; независимые случайные величины некоррелированы, обратное утверждение неверно.

Пусть операции $Q^{(1)}$ и $Q^{(2)}$ некоррелированы, тогда дисперсия их суммы равна сумме дисперсий, поэтому риск суммарной операции равен

$$r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}.$$

В общем случае, т.е. для двух произвольных финансовых операций $Q^{(1)}$ и $Q^{(2)}$, риск суммарной операции равен

$$r = \sqrt{r_1^2 + 2r_1r_2\rho_{12} + r_1^2},$$

где ρ_{12} — коэффициент корреляции случайных доходов операций.

Это следует из свойства дисперсии суммы случайных величин

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2\operatorname{cov}(X,Y). \tag{3.5}$$

Отметим, что коэффициент корреляции $|\rho_{12}| \le 1$.

Из формулы $|\rho_{12}| \le 1$ вытекает, что риск суммарной операции может быть как больше величины $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$ (если $\rho_{12} > 0$ — при так называемой положительной корреляции доходностей операций), так и меньше этой величины (если $\rho_{12} < 0$ — при отрицательной корреляции доходностей операции). Вообще говоря, риск суммарной операции находится в пределах

$$|r_1 - r_2| \le r \le r_1 + r_1. \tag{3.6}$$

При этом граничные значения ($|r_1 - r_2|$, $r_1 + r_2$) достигаются при полной отрицательной ($\rho_{12} = -1$) и полной положительной ($\rho_{12} = 1$) корреляции операций соответственно. Эти крайние случаи называются ***случаями полной антикорреляции*** и ***полной корреляции*** соответственно.

Коэффициент корреляции случайных величин X и $Y = \alpha X$ равен

$$\rho_{XY} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{\alpha D(X)}{|\alpha|\sigma_X^2} = \operatorname{sign}\alpha, \tag{3.7}$$

где

$$\operatorname{sign}\alpha = \begin{cases} 1, & \alpha > 0 \\ -1, & \alpha < 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

Видно, что операции X и $Y = \alpha X$ при $\alpha > 0$ положительно коррелированы с коэффициентом корреляции $\rho_{XY} = 1$, а при $\alpha < 0$ финансовые операции отрицательно коррелированы с коэффициентом корреляции $\rho_{XY} = -1$.

Отметим, что значения $\rho_{XY} = 1$ и $\rho_{XY} = -1$ показывают самую сильную корреляцию и антикорреляцию, что, как известно, и имеет место при линейной зависимости между случайными величинами.

3.5. Другие меры риска

Среднее квадратичное отклонение наилучшим образом характеризует количественно риск финансовой операции. Однако риски могут быть измерены и другими величинами. В большинстве случаев эти величины являются вероятностями нежелательных событий. Приведем ряд примеров.

Если известна функция распределения $F(d)$ случайного дохода D операции, то из ее определения следует, что вероятность того, что доход операции будет меньше заданного d, равен $P(D < d) = F(d)$. Вероятность того, что доход будет меньше среднего ожидаемого дохода m, также равна $F(m)$. При этом вероятность убытков равна $F(0)$, их средний ожидаемый размер равен $\int_{-\infty}^{0} x dF(x) = \int_{-\infty}^{0} x f(x) dx$ (здесь $f(x)$ — плотность распределения дохода), а отношение средних ожидаемых убытков к среднему ожидаемому доходу равно $\int_{-\infty}^{0} x dF(x) / \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x)$. Чем меньше это отношение, тем меньше риск разорения.

Еще одной мерой риска является рекомендованная Базельским комитетом по банковскому надзору стоимость под риском, VaR, наиболее распространенный сегодня метод измерения и контроля рыночных и кредитных рисков в нормальных бизнес-условиях.

VaR — это абсолютный максимальный размер потерь, которые можно ожидать при владении финансовым инструментом (или портфелем финансовых инструментов) в течение некоторого фиксированного (заданного) периода времени (временно́го горизонта) в нормальных рыночных условиях при заданном уровне доверительной вероятности.

Таким образом, VaR — это:

1) наибольший ожидаемый убыток от колебания стоимости портфеля активов заданной структуры, которое может произойти за данный период времени с заданной вероятностью появления. Более формально:

$$P(X \leq VaR) = 1 - \alpha,$$

где α — заданный уровень доверительной вероятности;

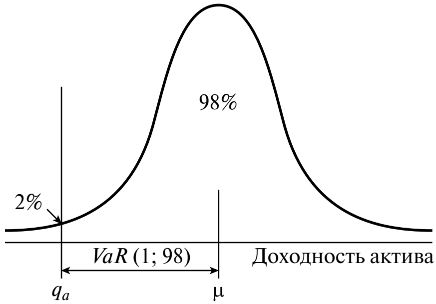

Рис. 3.2. Стоимость под риском *VaR* (1; 98).

2) величина убытка, который может быть превышен с вероятностью не более $1 - \alpha$ в течение последующих t дней (временно́го горизонта).

VaR не применяется для рынков, находящихся в состоянии шока, — для этого применяется методология стресс-тестинга.

VaR является основой для расчета необходимых резервов капитала. Требования к размеру резервного капитала рассчитываются как максимум двух величин: 1) текущей оценки непредвиденных потерь, определяемой как оценка максимально возможного убытка от неблагоприятного изменения рыночных цен, 2) среднего за предыдущие 60 дней, умноженного на фактор $\lambda \in [3; 4]$. При этом значение фактора λ зависит от точности однодневного предсказания модели за предыдущие периоды времени.

3.6. Методы уменьшения риска финансовых операций

Диверсификация

В основе метода диверсификации (применительно к некоррелированным финансовым операциям) лежит следующее утверждение: отношение риска (композитной) финансовой операции, состоящей из n некоррелированных финансовых операций, к ее среднему доходу обратно пропорционально $\sqrt{n}$, и, следовательно, с ростом n относительный риск композитной финансовой операции уменьшается.

Для финансовой операции, являющейся «среднеарифметическим» нескольких некоррелированных операций: $Q = (Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n) / n$, эффективность композитной операции равна $\mu = (\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n) / n$, т.е. остается примерно равной эффективности отдельной операции, а ее риск $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2} / n$ и, таким образом (поскольку $r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2 \infty n$, а $\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_n^2} \infty \sqrt{n}$), оказывается обратно пропорционален $\sqrt{n}$ и, следовательно, с ростом *n* уменьшается.

Таким образом, при увеличении числа некоррелированных операций их среднее арифметическое имеет эффективность порядка эффективности каждой из этих операций, а риск уменьшается. В случае операции, равной сумме исходных операций, как было показано выше, с ростом числа некоррелированных операций с увеличением *n* уменьшается относительный риск.

Этот эффект называется ***эффектом диверсификации*** и означает, что нужно проводить разнообразные, не связанные друг с другом операции. (Он также известен как принцип «не класть все яйца в одну корзину».)

Хеджирование

Для использования эффекта диверсификации композитную операцию составляют из нескольких существующих операций. Суть хеджирования (*hedge* — изгородь) состоит в подборе или специальном конструировании таких новых операций, которые при их проведении совместно с основной уменьшают риск.

При диверсификации необходимо проводить независимые (некоррелированные) операции либо отрицательно коррелированные. При хеджировании надо подбирать только операции, отрицательно коррелированные с основной операцией.

Рассмотрим дисперсию финансовой операции, состоящей из двух операций [4]: основной $Q1$ и вспомогательной $Q^{(2)}$. Тогда дисперсия композитной операции, равной сумме двух операций $Q^{(1)} + Q^{(2)}$, есть

$$D(Q_1 + Q_2) = r_1^2 + r_2^2 + 2\rho_{12} r_1 r_2 ,$$

где ρ_{12} — коэффициент корреляции основной и вспомогательной операций.

Видно, что дисперсия может быть меньше дисперсии основной операции, только в случае если коэффициент корреляции отрицателен. При этом должно выполняться условие

$$r_2^2 + 2\rho_{12} r_1 r_2 < 0,$$

или

$$\rho_{12} < -r_2/2r_1. \tag{3.9}$$

К методам уменьшения риска финансовых операций относятся также опционы и страхование.

3.7. Матрицы последствий и рисков

Степень неопределенности ситуации может быть различной. Если информация отсутствует полностью, ситуация является полностью неопределенной. Если известны, скажем, вероятности различных исходов, ситуация является вероятностной и лишь частично неопределенной. Рассмотрим обе такие ситуации и возможное поведение в них инвестора [3]. Предположим, что рассматривается вопрос о проведении финансовой операции. Результат операции неясен, поэтому проводится анализ нескольких возможных решений и их последствий. Ситуация неопределенна, известно лишь, что реализуется какой-то из рассматриваемых вариантов. Если будет принято i-е решение, а ситуация есть j-я, то инвестор получит доход q_{ij}. Матрица $\|q_{ij}\|$ называется ***матрицей последствий*** (возможных решений). (Альтернативой матрице последствий, составленной из возможных доходов, является матрица последствий, составленная из возможных доходностей.) Какое решение должен принять инвестор? В этой неопределенной ситуации могут быть высказаны лишь некоторые рекомендации предварительного характера. Они не обязательно будут приняты инвестором. Многое будет зависеть, например, от его склонности к риску. Оценим риск в данной схеме. Начнем с риска, который несет i-е решение. Реальная ситуация неизвестна, но если бы инвестор ее знал, то выбрал бы наилучшее решение, т.е. приносящее наибольший доход. Если ситуация j-я, то было бы принято решение, дающее доход $q_j = \max_i q_{ij}$. Значит, принимая i-е решение, мы рискуем получить не q_j, а только q_{ij}, т.е. принятие i-го решения несет риск недобрать $r_{ij} = q_j - q_{ij}$. Матрица $R = \|r_{ij}\|$ называется ***матрицей рисков***.

3.8. Принятие решений в условиях полной неопределенности

Ситуация полной неопределенности характеризуется отсутствием любой дополнительной информации (например, о вероятностях тех или иных вариантов, реальной ситуации). Существуют, однако, правила — рекомендации по принятию решений и в этой ситуации.

3.8.1. Правило Вальда (правило крайнего пессимизма)

Рассматривая i-е решение, будем полагать, что на самом деле ситуация складывается самая плохая, т.е. приносящая самый малый доход: $a_i = \min_j q_{ij}$ (работаем с матрицей последствий). Но теперь выберем решение i_0 с наибольшим a_{i0}. Итак, правило Вальда рекомендует принять решение i_0 такое, что $i_0 = \max_i \left(\min_j q_{ij} \right)$.

3.8.2. Правило Сэвиджа (правило минимального риска)

При применении этого правила анализируется матрица рисков $R = \left\| r_{ij} \right\|$. Рассматривая i-е решение, будем полагать, что на самом деле складывается ситуация максимального риска $b_i = \max_j r_{ij}$. Но теперь выберем решение i_0 с наименьшим b_{i_0}. Итак, правило Сэвиджа рекомендует принять решение i_0 такое, что $b_{i_0} = \min_i b_i \min_i \left(\max_j r_{ij} \right)$.

3.8.3. Правило Гурвица (взвешивающее пессимистический и оптимистический подходы к ситуации).

Принимается решение i, при котором достигается максимум $\left[\lambda \min_j q_{ij} + (1 - \lambda) \max_j q_{ij} \right]$, где $0 \le \lambda \le 1$. Значение λ выбирается из субъективных соображений. Если λ приближается к 1, то правило Гурвица приближается к правилу Вальда, при приближении λ к 0 правило Гурвица приближается к правилу «розового оптимизма».

3.9. Принятие решений в условиях частичной неопределенности

Предположим, что в рассматриваемой схеме известны вероятности того, что реальная ситуация развивается по варианту j. Именно такое положение называется частичной неопределенностью. Решение в такой ситуации принимается в соответствии с одним из следующих правил.

3.9.1. Правило максимизации среднего ожидаемого дохода

Доход, получаемый фирмой при реализации i-го решения, является случайной величиной Q_i с рядом распределения $p_j\ (q_{ij})$. Математическое ожидание $M(Q_i)$ и есть средний ожидаемый доход, обозначаемый также $\bar{Q}_i$. Итак, правило рекомендует принять решение, приносящее максимальный средний ожидаемый доход.

3.9.2. Правило минимизации среднего ожидаемого риска

Риск фирмы при реализации i-го решения является случайной величиной R_i с рядом распределения $p_j(r_{ij})$. Математическое ожидание, $M(R_i)$ и есть средний ожидаемый риск, обозначаемый также $\bar{R}_i$. Правило рекомендует принять решение, влекущее минимальный средний ожидаемый риск.

3.9.3. Оптимальная (по Парето) финансовая операция

Итак, при попытке выбрать наилучшее решение мы столкнулись с тем, что каждое решение имеет две характеристики — средний ожидаемый доход и средний ожидаемый риск. Теперь имеем оптимизационную двухкритериальную задачу по выбору наилучшего решения. Существует несколько способов постановки таких оптимизационных задач.

Рассмотрим такую задачу в общем виде. Пусть A — некоторое множество операций, каждая операция a имеет две числовые характеристики $E(a)$, $r(a)$ (эффективность и риск, например) и разные операции обязательно различаются хотя бы одной характеристикой. При выборе наилучшей операции желательно, чтобы E было больше, а r меньше.

Будем говорить, что операция a доминирует операцию b, и обозначать $a > b$, если $E(a) \geq E(b)$ и $r(a) \leq r(b)$ и хотя бы одно из этих неравенств строгое. При этом операция a называется доминирующей, а операция b — доминируемой. Ясно, что ни при каком разумном выборе наилучшей операции доминируемая операция не может быть признана таковой. Следовательно, наилучшую операцию надо искать среди доминируемых операций. Множество этих операций называется множеством Парето, или множеством оптимальности по Парето.

Можно доказать, что на множестве Парето каждая из характеристик E, r — (однозначная) функция другой. Другими словами, если операция принадлежит множеству Парето, то по одной ее характеристике можно однозначно определить другую.

3.9.4. Правило Лапласа равновозможности

Такое правило применяют в условиях полной неопределенности: все неизвестные вероятности p_j считают равными. После этого можно выбрать какое-нибудь из двух приведенных выше правил-рекомендаций принятия решений, т.е. правило максимизации среднего ожидаемого дохода, или правило минимизации среднего ожидаемого риска.

Пример 3.1. Пусть доходности за два последовательных периода времени t_1, t_2 равны 20 и 30% соответственно. Найти доходность μ за период $t = t_1 + t_2$.

По формуле (3.11) доходность μ за период $t = t_1 + t_2$ равна

$$\mu = (1 + \mu_1)(1 + \mu_2) - 1 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_1\mu_2 =$$
$$= 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}2 \times 0{,}3 = 0{,}56,$$

т.е. 56%. Таким образом, отличие от суммы доходностей составляет 6%.

Пример 3.2. Доходность актива за год μ равна 20%. Найти доходность актива за квартал μ_1 при условии ее постоянства.

Применим формулу

$$\mu = (1+\mu_1)^n - 1.$$

Имеем

$$\mu + 1 = (1+\mu_1)^n, \quad \mu_1 + 1 = \sqrt[n]{1+\mu},$$

и окончательно

$$\mu_1 = \sqrt[n]{1+\mu} - 1.$$

Подставляя сюда $\mu = 20\% = 0{,}2$, $n = 4$, получим для квартальной доходности

$$\mu_1 = \sqrt[4]{1+\mu} - 1 = \sqrt[4]{1{,}2} - 1 \approx 1{,}0466 - 1 = 0{,}0466 \approx 4{,}66\%.$$

Видим, что доходность за квартал ниже получаемой простым делением годовой доходности на 4, т.е. 20% : 4 = 5%. Разница составляет 5% – 4,66% = 0,34%.

Пример 3.3. Решим обратную задачу. Пусть доходность актива за месяц μ_1 равна 2%. Найти доходность актива за год μ при условии постоянства месячной доходности в течение года.

Применим формулу

$$\mu = \left(1+\mu_1\right)^n - 1.$$

Подставляя сюда $\mu = 2\% = 0{,}02$, $n = 12$, получим для годовой доходности

$$\mu = (1+\mu_1)^{12} - 1 = (1+0{,}02)^{12} - 1 =$$
$$= (1{,}02)^{12} - 1 \approx 1{,}268 - 1 = 0{,}268 = 26{,}8\%.$$

Видим, что доходность за год оказывается выше получаемой простым умножением месячной доходности на 12, т.е. $2\% \cdot 12 = 24\%$. Разница составляет 2,8%.

По двум последним примерам можно сделать следующие *выводы*:

1) доходность за суммарный период превышает сумму доходностей за составляющие периоды;

2) доходность за составляющий период меньше соответствующей ему доли доходности за суммарный период.

Пример 3.4. Пусть матрица последствий есть $Q = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 10 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}$.

Составим матрицу рисков, вычитая данный элемент из максимального в каждом столбце. Для максимального в каждом столбце элемента имеем

$$q_1 = \max_i q_{i1} = 10\,,\ q_2 = \max_i q_{i2} = 6\,,\ q_3 = \max_i q_{i3} = 9\,,\ q_4 = \max_i q_{i4} = 8\,.$$

Теперь можем записать матрицу рисков $R = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 8 & 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Проанализируем данную ситуацию полной неопределенности, применяя три правила-рекомендации по принятию решений и в этой ситуации.

1. Правило Вальда (правило крайнего пессимизма)

Рассматривая i-е решение, будем полагать, что на самом деле ситуация складывается самая плохая, т.е. приносящая самый малый доход: $a_i = \min_j q_{ij}$ (работаем с матрицей последствий). Но теперь выберем решение i_0 с наибольшим a_{i0}. Итак, правило Вальда рекомендует принять решение i_0 такое, что $i_0 = \max_i \left(\min_j q_{ij} \right)$. Так, в нашем примере имеем $a_1 = 3$, $a_2 = 6$, $a_3 = 1$. Теперь из чисел 3, 6, 1 находим максимальное: число 6. Значит, правило Вальда рекомендует принять *второе решение*.

2. Правило Сэвиджа (правило минимального риска)

При применении этого правила анализируется матрица рисков $R = \|r_{ij}\|$. Рассматривая i-е решение, будем полагать, что на самом деле складывается ситуация максимального риска $b_i = \max_j r_{ij}$. Но теперь выберем решение i_0 с наименьшим b_{i_0}. Итак, правило Сэвиджа рекомендует принять решение i_0 такое, что $b_{i_0} = \min_i b_i \min_i \left(\max_j r_{ij} \right)$.

Так, в нашем примере имеем $b_1 = 7$, $b_2 = 2$, $b_3 = 8$. Теперь из чисел 7, 2, 8 находим минимальное: число 2. Значит, правило Сэвиджа рекомендует принять *второе решение*.

3. Правило Гурвица (взвешивающее пессимистический и оптимистический подходы к ситуации).

Принимается решение i, при котором достигается максимум $\left[\lambda \min_j q_{ij} + (1-\lambda) \max_j q_{ij}\right]$, где $0 \le \lambda \le 1$. Значение λ выбирается из субъективных соображений.

В нашем примере:

1) при $\lambda = {}^1/_2$ имеем

$$c_1 = \frac{1}{2}(3+6) = 4{,}5;\ c_2 = \frac{1}{2}(6+10) = 8;\ c_3 = \frac{1}{2}(1+9) = 5.$$

Выбирая максимальное значение c_i, равное 8, приходим к выводу, что правило Гурвица рекомендует *второе решение*.

2) Если выбрать $\lambda = {}^1/_4$, тогда имеем

$$c_1 = \frac{1}{4}\cdot 3 + \frac{3}{4}\cdot 6 = 5{,}25;\ \ c_2 = \frac{1}{4}\cdot 6 + \frac{3}{4}\cdot 10 = 9;\ \ c_3 = \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{3}{4}\cdot 9 = 7.$$

Выбирая максимальное значение c_i, равное 9, приходим к выводу, что правило Гурвица и в этом случае рекомендует *второе решение*.

3) Если выбрать $\lambda = {}^3/_4$, получим

$$c_1 = \frac{3}{4}\cdot 3 + \frac{1}{4}\cdot 6 = 3{,}75;\ \ c_2 = \frac{3}{4}\cdot 6 + \frac{1}{4}\cdot 10 = 7;\ \ c_3 = \frac{3}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 9 = 3.$$

Выбирая максимальное значение c_i, равное 7, приходим к выводу, что правило Гурвица и в этом случае рекомендует *второе решение*.

Вывод: все три правила (а правило Гурвица при всех трех значениях λ) рекомендуют *второе решение*, так что его и принимаем.

Вопросы и задачи

3.1. Дайте определение дохода, доходности и риска финансовой операции.

3.2. Выразите доходность актива за два периода через доходности актива за каждый из периодов.

3.3. Выразите доходность актива за три периода в целом через доходность актива за каждый из них.

3.4. Выразите доходность актива за несколько периодов в целом через доходность актива за каждый из них (используйте метод математической индукции).

3.5. В чем состоит синергетический эффект при рассмотрении доходности актива за несколько периодов?

3.6. Доходность актива за год равна 36%. Найдите доходность актива за месяц, предполагая ее постоянство.

3.7. Доходность актива за квартал равна 8%. Найдите доходность актива за месяц, предполагая ее постоянство.

3.8. Доходность актива μ за период $t = t_1 + t_2 + t_3$ равна 0,9. Доходности актива μ_1, μ_3 за периоды t_1, t_3 соответственно равны 0,2 и 0,35. Найдите доходность актива за период t_2.

3.9. Доходность актива μ за период $t = t_1 + t_2$ равна 0,6. Доходность актива за первый период в 1,011 раз меньше, чем за второй. Найдите доходность актива за каждый период.

3.10. Доходность актива μ за период $t = t_1 + t_2$ равна 0,65. Доходность актива за второй период на 25% выше, чем за первый. Определите доходность актива за каждый период.

3.11. Доходность актива μ за период $t = t_1 + t_2$ равна 0,99. Доходность актива за первый период в 3 раза больше, чем за второй. Найдите доходность актива за каждый период.

3.12. Доходность актива μ за период $t = t_1 + t_2$ равна 0,72. Доходности актива μ_1, μ_2 за периоды t_1, t_2 соответственно составляют арифметическую прогрессию с разностью 0,08. Какова доходность актива за каждый период?

3.13. Доходность актива μ за период $t = t_1 + t_2$ равна 0,75. Доходности актива μ_1, μ_2 за периоды t_1, t_2 соответственно составляют геометрическую прогрессию со знаменателем 1,2. Найти доходность актива за каждый период.

3.14. Доходность актива за месяц равна 4%. Найти годовую доходность актива μ, предполагая ее постоянство.

3.15. Доходность актива за месяц равна 1,15%. Найти полугодовую доходность актива μ, предполагая ее постоянство.

3.16. Доходность актива за год равна 20%. Найти среднеквартальную доходность актива μ, предполагая ее постоянство.

3.17. В чем состоит выделенная роль равномерного и нормального распределений?

3.18. Докажите, что коэффициент корреляции $|\rho_{12}| \le 1$.

3.19. Чем измеряется коррелированность финансовых операций?

3.20. Приведите известные вам меры риска.

3.21. Какие виды финансовых рисков вы знаете? Дайте им определение и краткую характеристику.

3.22. Дайте определение *VaR*.

3.23. Перечислите известные вам методы уменьшения риска финансовых операций, дайте им определение и краткую характеристику.

3.24. Дайте определение диверсификации. Приведите пример.

3.25. Дайте определение хеджирования. Приведите пример.

3.26. Дайте определение матрицам последствий и рисков.

3.27. Выберите матрицу последствий размерности 3×4, найдите матрицу рисков и проведите полный анализ ситуации.

3.28. Выберите матрицу последствий размерности 4×5, найдите матрицу рисков и проведите полный анализ ситуации.

3.29. Сформулируйте алгоритм принятия решений в условиях полной неопределенности.

3.30. Сформулируйте правила Вальда, Сэвиджа, Гурвица. Приведите примеры.

3.31. Сформулируйте правило максимизации среднего ожидаемого дохода. Приведите пример.

3.32. Сформулируйте правило минимизации среднего ожидаемого риска. Приведите пример.

3.33. Сформулируйте правило Лапласа равновозможности. Приведите пример.

3.34. Обменный курс доллара в рассматриваемом периоде может принимать следующие значения: 39 руб., 40,5 руб., 41 руб. и 42 руб. Компания может либо покупать доллары, либо продавать их, либо рассчитываться в рублях. Сделав предположения о доходах компании для различных ситуаций, постройте матрицу последствий необходимой размерности, найдите матрицу рисков и проведите полный анализ ситуации.

ГЛАВА 4

ПОРТФЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

4.1. Портфельный анализ

Пусть в течение некоторого времени инвестор владеет ценной бумагой, стоимость которой в начале интервала обозначим p_0, в конце интервала — p_1. Пусть d — дивиденды, выплаченные за рассматриваемый промежуток времени. Тогда ***доходностью*** ценной бумаги за этот интервал времени называется величина

$$r = \frac{p_1 + d - p_0}{p_0}. \tag{4.1}$$

Если не рассматривать дивиденды и другие величины, от которых зависит доходность (инфляция и т.п.), то формула (4.1) принимает максимально простой вид: $r = (p_1 - p_0)/p_0$.

Портфелем, состоящим из n видов ценных бумаг, называют вектор

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{4.2}$$

где x_i — доля инвестиций в ценные бумаги вида i.

Доходностью портфеля X называют величину

$$r_X = \frac{p_{X1} + d_X - p_{X0}}{p_{X0}}, \tag{4.3}$$

где p_{X0} — стоимость портфеля в начале периода, p_{X1} — в конце периода, d_X — дивиденды, полученные по всем бумагам портфеля.

Доходность портфеля X из n бумаг выражается формулой

$$r_X = x_1 r_1 + x_2 r_2 + \ldots + x_n r_n, \tag{4.4}$$

где $r_1, r_2, \ldots, r_n$ — доходности ценных бумаг, входящих в портфель X.

Стоимости ценных бумаг в начале периода p_{i0} — детерминированные величины, в то время как в конце периода они уже являются случайными величинами, поэтому и доходности отдельных ценных бумаг и доходность всего портфеля случайные величины, и мы их будем обозначать заглавными буквами R_i и R_X. Математическое ожидание доходности ценной бумаги называется ее ***эффективностью***, а математическое ожидание доходности портфеля называется ***эффективностью портфеля***.

Выражение для эффективности портфеля $\mu = M(R_X)$ через соответствующие характеристики ценных бумаг имеет вид

$$\mu = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 + \ldots + x_n\mu_n \, , \tag{4.5}$$

где $\mu_1 = M(R_1)$, $\mu_2 = M(R_2)$, ..., $\mu_n = M(R_n)$ — эффективности ценных бумаг (математические ожидания доходностей (R_1, R_2, ..., R_n), составляющих портфель.

Обозначим через $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)^T$ вектор эффективностей (ожидаемых доходностей) портфеля X, тогда формулу (4.5) можно записать в матричных обозначениях следующим образом:

$$\mu = \vec{\mu}^T X \, . \tag{4.6}$$

Для вычисления квадрата риска воспользуемся формулой

$$\sigma^2 = X^T V X \, , \tag{4.7}$$

где V — ковариационная матрица случайных величин R_1, R_2, ..., R_n.

В дальнейшем мы будем использовать матричные обозначения. При этом все векторы будут мыслиться векторами-столбцами. Обозначим вектор, состоящий из одних единиц, через $I = (1, 1, ..., 1)^T$.

Таким образом, с каждым портфелем X связаны две величины: эффективность (ожидаемая доходность) μ и риск σ. Инвестор хотел бы иметь такой портфель, который обеспечивал бы наибольшую ожидаемую доходность при минимальном риске. Такая задача, однако, противоречива, поскольку, вообще говоря, большая ожидаемая доходность влечет за собой увеличение риска. Поэтому можно рассмотреть следующие задачи.

2. Найти портфель минимального риска при заданной его эффективности (при эффективности не менее заданной, при произвольной эффективности).

3. Найти портфель максимальной эффективности при минимальном риске (при риске, не превышающем данный уровень).

Пример 4.1. Портфель состоит из пяти активов, ценовые доли которых образуют геометрическую прогрессию, причем ценовая доля второго актива равна 0,1. Найти портфель.

Условие нормировки имеет вид

$$x_1 + \ldots + x_5 = \frac{x_1(1-q^5)}{1-q} = 1 \, ,$$

$$x_1 q = 0{,}1 \, .$$

Подставляя в первое уравнение $x_1 = 0{,}1/q$, получим уравнение для q

$$\frac{0{,}1(1-q^5)}{(1-q)q} = 1\text{, или } 0{,}1\cdot(1-q^5) = (1-q)q.$$

Решая его численно, получим $q = 1{,}61$.

Портфель, следовательно, имеет вид (0,062; 0,1; 0,161; 0,259; 0,417).

Пример 4.2. Портфель состоит из трех видов акций, данные о которых приведены в таблице.

	A	*B*	*C*
Количество	100	150	250
Начальная цена	80	60	300
Конечная цена	90	50	340

Найти доходность портфеля двумя способами.

Решение. Вычислим начальную цену портфеля:

$$p_X^0 = 80\cdot 100 + 60\cdot 150 + 300\cdot 250 = 92\ 000$$

и его цену в конце года

$$p_X = 90\cdot 100 + 50\cdot 150 + 340\cdot 250 = 101\ 500.$$

По формуле (4.3) получим

$$\mu = \frac{p_X - p_X^0}{p_X^0} = \frac{101\ 500 - 92\ 000}{92\ 000} = 0{,}1033;$$

$$\mu = 10{,}33\%\ .$$

Для применения формулы (4.5) вычислим доли (ценовые) каждого вида акций и их доходности.

$$x_A = \frac{80\cdot 100}{92000}\cdot 100\% = 8{,}70\%\ ;\ x_B = \frac{60\cdot 150}{92000}\cdot 100\% = 9{,}78\%\ ;$$

$$x_C = \frac{300\cdot 250}{92000}\cdot 100\% = 81{,}52\%\ ;$$

$$\mu_A = \frac{p_A - p_A^0}{p_A^0} = \frac{90-80}{80}\cdot 100\% = 12{,}5\%;$$

$$\mu_B = \frac{p_B - p_B^0}{p_B^0} = \frac{50-60}{60} \cdot 100\% = -16,7\%;$$

$$\mu_C = \frac{p_C - p_C^0}{p_C^0} = \frac{340-300}{300} \cdot 100\% = 13,3\% .$$

Теперь по формуле (4.5) получим

$$\mu = 12,5\% \cdot 0,087 - 16,7\% \cdot 0,0978 + 13,3\% \cdot 0,8152 = 10,30\% ,$$

что совпадает с предыдущим результатом.

Вопросы и задачи

4.1. Дайте определение доходности ценной бумаги и портфеля.

4.2. Выведите формулу доходности портфеля из *n*-бумаг через доходности отдельных бумаг.

4.3. Портфель состоит из акций четырех видов, данные о которых приведены в таблице.

	A	*B*	*C*	*D*
Количество	200	350	150	400
Начальная цена	70	90	180	300
Конечная цена	100	60	250	310

Найдите доходность портфеля.

4.4. Портфель состоит из четырех видов акций, данные о которых приведены в таблице.

	A	*B*	*C*	*D*
Доля бумаги в портфеле	0,2	0,1	0,55	0,15
Начальная цена	60	105	120	235
Конечная цена	95	130	100	250

Найдите доходность портфеля с помощью вычисления доходности каждой бумаги.

4.5. Доли ценных бумаг в портфеле, состоящем из трех бумаг, равны $x_1 = 0,2$; $x_2 = 0,3$; $x_3 = 0,5$. Матрица ковариаций равна

$$V = \begin{pmatrix} 2 & 12 & -5 \\ 12 & 6 & 9 \\ -5 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

Найдите риск портфеля.

4.6. Портфель состоит из трех активов A, B и C, взятых в равных ценовых долях. Ожидаемые доходности активов равны $\mu_1 = -15\%$; $\mu_2 = 18\%$; $\mu_3 = 23\%$. Найдите ожидаемую доходность портфеля.

4.7. Даны пять видов акций, для каждой из которых ожидаемая доходность и риск приведены в таблице.

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
Доходность	0,15	0,1	0,25	0,15	0,30
Риск	0,3	0,5	0,3	0,2	0,6

Выстроите акции в порядке предпочтительности.

4.8. Портфель состоит из трех активов A, B и C. Ценовая доля актива A равна 0,4, а ценовая доля актива B в 1,46 раза больше ценовой доли актива C. Найдите портфель.

4.9. Портфель состоит из трех активов A, B и C. Ценовая доля актива B равна 0,26, а ценовая доля актива A на 1,56% больше ценовой доли актива C. Найдите портфель.

4.10. Портфель состоит из трех активов A, B и C, ценовые доли которых образуют арифметическую прогрессию, причем ценовая доля актива B равна 0,08. Найдите портфель.

4.11. Портфель состоит из трех активов A, B и C, ценовые доли которых образуют арифметическую прогрессию, причем ценовая доля актива A равна 0,22. Найдите портфель.

4.12. Портфель состоит из трех активов A, B и C, ценовые доли которых образуют геометрическую прогрессию, причем ценовая доля актива C равна 0,35. Найдите портфель.

4.13. Портфель состоит из десяти активов, ценовые доли которых образуют арифметическую прогрессию, причем ценовая доля шестого актива равна 0,3. Найдите портфель.

4.14. Портфель состоит из семи активов, ценовые доли которых образуют геометрическую прогрессию, причем ценовая доля третьего актива равна 0,18. Найдите портфель.

4.2. Портфель из двух бумаг

4.2.1. Необходимые сведения из теории вероятностей

Дисперсия портфеля из двух бумаг равна

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 x_1 x_2\,, \tag{4.8}$$

риск равен

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 x_1 x_2}\ ,$$

где ρ_{12} — коэффициент корреляции двух бумаг, σ_i — риск и x_i — ценовая доля i-бумаги.

Доходность портфеля равна

$$\mu = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2\ , \tag{4.9}$$

где μ_i — эффективность i-бумаги.

Условие нормировки имеет вид

$$x_1 + x_2 = 1\,. \tag{4.10}$$

Ковариация доходностей определяется как

$$\operatorname{cov}(r_i, r_j) = M(r_i \cdot r_j) - M(r_i)M(r_j)\ ; \tag{4.11}$$

$$\operatorname{cov}(r_i, r_j) = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j\ ; \tag{4.12}$$

$$\rho_{ij} = \frac{\operatorname{cov}(r_i, r_j)}{\sigma_i\sigma_j}\ ; \tag{4.13}$$

$$\left|\rho_{ij}\right| \le 1\,. \tag{4.14}$$

Ковариационная матрица — матрица, элементами которой являются соответствующие ковариации ценных бумаг. Так, для портфеля из трех бумаг имеем

$$\left\|\operatorname{cov}(r_1, r_2)\right\| = \begin{pmatrix} \operatorname{cov}(r_1, r_1) & \operatorname{cov}(r_1, r_2) & \operatorname{cov}(r_1, r_3) \\ \operatorname{cov}(r_2, r_1) & \operatorname{cov}(r_2, r_2) & \operatorname{cov}(r_2, r_3) \\ \operatorname{cov}(r_3, r_1) & \operatorname{cov}(r_3, r_2) & \operatorname{cov}(r_3, r_3) \end{pmatrix}; \tag{4.15}$$

$$\left\|\rho(r_1, r_2)\right\| = \begin{pmatrix} \dfrac{\operatorname{cov}(r_1, r_1)}{\sigma_1^2} & \dfrac{\operatorname{cov}(r_1, r_2)}{\sigma_1\sigma_2} & \dfrac{\operatorname{cov}(r_1, r_3)}{\sigma_1\sigma_3} \\ \dfrac{\operatorname{cov}(r_2, r_1)}{\sigma_2\sigma_1} & \dfrac{\operatorname{cov}(r_2, r_2)}{\sigma_2^2} & \dfrac{\operatorname{cov}(r_2, r_3)}{\sigma_2\sigma_3} \\ \dfrac{\operatorname{cov}(r_3, r_1)}{\sigma_3\sigma_1} & \dfrac{\operatorname{cov}(r_3, r_2)}{\sigma_3\sigma_2} & \dfrac{\operatorname{cov}(r_3, r_3)}{\sigma_3^2} \end{pmatrix}. \tag{4.16}$$

С учетом того, что

$$\operatorname{cov}(r_i,\, r_i) = M(r_i \cdot r_i) - M(r_i)M(r_i) = M(r_i^2) - M^2(r_i) = D(r_i) = \sigma_i^2$$

(диагональные элементы ковариационной матрицы равны дисперсиям ценных бумаг), получаем

$$\left\|\rho\left(r_i,r_j\right)\right\| = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\operatorname{cov}\left(r_1,r_2\right)}{\sigma_1\sigma_2} & \dfrac{\operatorname{cov}\left(r_1,r_3\right)}{\sigma_1\sigma_3} \\ \dfrac{\operatorname{cov}\left(r_2,r_1\right)}{\sigma_2\sigma_1} & 1 & \dfrac{\operatorname{cov}\left(r_2,r_3\right)}{\sigma_2\sigma_3} \\ \dfrac{\operatorname{cov}\left(r_3,r_1\right)}{\sigma_3\sigma_1} & \dfrac{\operatorname{cov}\left(r_3,r_2\right)}{\sigma_3\sigma_2} & 1 \end{pmatrix}. \qquad (4.17)$$

Замечание. Обратная задача нахождения ковариационной матрицы по заданной корреляционной матрице является неопределенной: она не имеет однозначного решения.

Пример 4.3. Дана ковариационная матрица $V = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 6 \\ -8 & 16 & -11 \\ 6 & -11 & 4 \end{pmatrix}$.

Найти корреляционную матрицу.

По диагонали стоят дисперсии, поэтому для рисков бумаг имеем

$$\sigma_1 = \sqrt{9} = 3\,,\ \sigma_2 = \sqrt{16} = 4\,, V = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 4 \\ 8 & 12 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее по формуле (4.13) $\rho_{ij} = \dfrac{\operatorname{cov}(r_i,r_j)}{\sigma_i\sigma_j}$ вычисляем недиагональные члены (все диагональные члены корреляционной матрицы равны 1):

$$\rho_{12} = \frac{\operatorname{cov}\left(r_1,r_2\right)}{\sigma_1\sigma_2} = \frac{-8}{3\cdot 4} = -\frac{2}{3} = \rho_{21};$$

$$\rho_{13} = \frac{\operatorname{cov}\left(r_1,r_3\right)}{\sigma_1\sigma_3} = \frac{6}{3\cdot 2} = 1 = \rho_{31};$$

$$\rho_{23} = \frac{\operatorname{cov}\left(r_2,r_3\right)}{\sigma_2\sigma_3} = \frac{-11}{4\cdot 2} = -\frac{11}{8} = \rho_{32}.$$

Получаем следующую корреляционную матрицу

$$\left\|\rho\left(r_i,r_j\right)\right\| = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{2}{3} & 1 \\ -\dfrac{2}{3} & 1 & -\dfrac{11}{8} \\ 1 & -\dfrac{11}{8} & 1 \end{pmatrix}.$$

Как отмечалось выше, обратная задача нахождения ковариационной матрицы по заданной корреляционной матрице является неопределенной: она не имеет однозначного решения. Это следует из того, что в силу симметричности корреляционной матрицы заданы лишь три величины $\rho(r_1, r_2)$, $\rho(r_1, r_3)$, $\rho(r_2, r_3)$, что позволяет записать три уравнения:

$$\frac{\operatorname{cov}(r_1,r_2)}{\sigma_1\sigma_2}=\rho(r_1,r_2),\ \frac{\operatorname{cov}(r_1,r_3)}{\sigma_1\sigma_3}=\rho(r_1,r_3),\ \frac{\operatorname{cov}(r_2,r_3)}{\sigma_2\sigma_3}=\rho(r_2,r_3)$$

для шести неизвестных

$$\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3;\operatorname{cov}(r_1,r_2),\operatorname{cov}(r_1,r_3),\operatorname{cov}(r_2,r_3).$$

Вопросы и задачи

4.15. Дана ковариационная матрица $V=\begin{pmatrix}10 & -5 & 6\\ -5 & 11 & -7\\ 6 & -7 & 12\end{pmatrix}$. Найдите корреляционную матрицу.

4.16. Дана ковариационная матрица $V=\begin{pmatrix}144 & 6 & 18\\ 6 & 49 & -11\\ 18 & -11 & 25\end{pmatrix}$. Найдите корреляционную матрицу.

4.17. Данные о распределении доходностей двух бумаг приведены в таблице. Найдите ковариацию и коэффициент корреляции этих бумаг.

A	–10	–12	11	4	8
B	12	14	18	13	–10
P (вероятность)	0,1	0,15	0,35	0,2	0,2

4.18. Дана ковариационная матрица $V=\begin{pmatrix}8 & 8 & 4\\ 8 & 12 & 0\\ 4 & 0 & 6\end{pmatrix}$. Найдите корреляционную матрицу.

4.19. Данные о распределении доходностей двух бумаг *A* и *B* приведены в таблице. Найдите ковариацию и коэффициент корреляции этих бумаг.

A	–0,8	–0,5	0,7	0,14	0,22
B	0,28	0,19	0,10	0,15	–0,8
P (вероятность)	0,2	0,1	0,3	0,05	0,35

4.20. Данные о распределении доходностей двух ценных бумаг приведены в таблице.

R_A	0,2	0,4	–0,3
R_B	0,3	–0,6	0,8
P (вероятность)	0,5	0,2	0,3

Найдите ковариацию и коэффициент корреляции этих бумаг.

4.21. Доли ценных бумаг в портфеле равны $x_1 = 0{,}2$; $x_2 = 0{,}3$; $x_3 = 0{,}5$, ожидаемые доходности $\mu_1 = -15\%$; $\mu_2 = 18\%$; $\mu_3 = 23\%$, ковариационная матрица имеет вид $V = \begin{pmatrix} 9 & -10 & -5 \\ -10 & 16 & 9 \\ -5 & 9 & 36 \end{pmatrix}$.

Найдите ожидаемую доходность и риск портфеля.

4.22. Доли ценных бумаг в портфеле относятся как 1 : 2 : 3, ожидаемые доходности равны $\mu_1 = 12\%$; $\mu_2 = 25\%$; $\mu_3 = -6\%$, ковариационная матрица имеет вид $V = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -3 & 36 & 6 \\ -4 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

Каковы портфель, его доходность и риск?

4.2.2. Случай полной корреляции

В случае полной корреляции

$$\rho_{12} = \rho = 1; \tag{4.18}$$

$$\sigma = \left| \sigma_1 x_1 + \sigma_2 x_2 \right|; \tag{4.19}$$

$$\sigma = \sigma_1 x_1 + \sigma_2 x_2 . \tag{4.20}$$

Заменяя $x_1 \to 1 - t$; $x_2 \to t$, так что $x_1 + x_2 = 1$, получим

$$\sigma = \sigma_1 \left(1 - t\right) + \sigma_2 t . \tag{4.21}$$

Это уравнение отрезка (AB), где точки A и B имеют следующие координаты:

$$(\cdot) A = \left(\mu_1, \sigma_1\right) \; ; \; (\cdot) B = \left(\mu_2, \sigma_2\right).$$

t пробегает значения от 0 до 1. При $t = 0$ портфель находится в точке A, при $t = 1$ — в точке B. Таким образом, допустимое множество портфелей в случае полной корреляции ценных бумаг представляет собой отрезок (*AB*) (рис. 4.1).

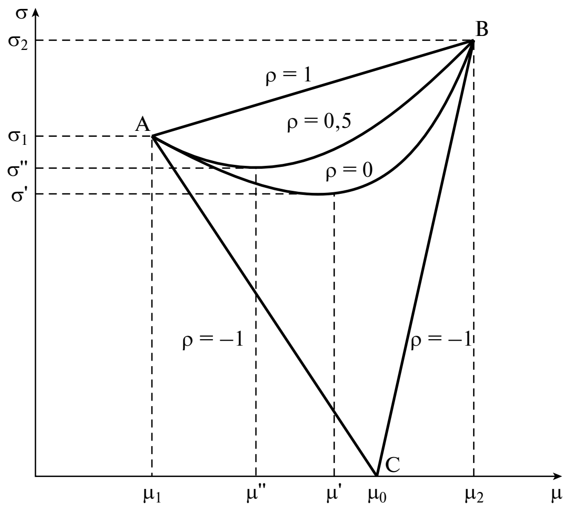

Рис. 4.1. Зависимость риска портфеля из двух бумаг от его эффективности при фиксированных параметрах обеих бумаг и увеличении коэффициента корреляции от –1 до 1.

Пример 4.4. Портфель состоит из двух ценных бумаг *A* и *B*, ожидаемая доходность и риск которых, выраженные в процентах, равны *A* (5; 12), *B* (25; 40). Коэффициент корреляции бумаг равен 1. Найти: а) портфель минимального риска, б) портфель максимальной доходности.

Поскольку допустимое множество портфелей в случае полной корреляции представляет собой отрезок (*AB*) (см. рис. 4.1), ясно, что портфель минимального риска состоит только из бумаг *A* и имеет вид (1; 0). Параметры портфеля совпадают с параметрами бумаги *A* (5; 12). Портфель же максимальной доходности состоит только из бумаг *B* и имеет вид (0; 1), а его параметры совпадают с параметрами бумаги *B* (25; 40).

Пример 4.5. Портфель состоит из двух ценных бумаг *A* и *B*, ожидаемая доходность и риск которых, выраженные в процентах, равны *A* (5; 12), *B* (25; 40). Коэффициент корреляции бумаг равен 1. Доходность портфеля равна 15%. Найти портфель и его риск.

$$\sigma = \sigma_1(1-t) + \sigma_2 t;$$

$$\mu = \mu_1(1-t) + \mu_2 t.$$

Найдем из второго уравнения значение параметра t, соответствующего доходности портфеля 15%:

$$0{,}15 = 0{,}05(1-t) + 0{,}25t,\ \ t = 0{,}5.$$

Риск портфеля определим, подставив значение параметра $t = 0{,}5$ в уравнение

$$\sigma = \sigma_1\left(1-t\right) + \sigma_2 t = 0{,}12 \cdot 0{,}5 + 0{,}40 \cdot 0{,}5 = 0{,}26.$$

Поскольку $(1 - t)$ и t играют роль x_1 и x_2 (см. [1]), портфель имеет вид:

$$\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

Пример 4.6. Портфель состоит из двух ценных бумаг A и B, ожидаемая доходность и риск которых, выраженные в процентах, равны A (20; 45), B (38; 68). Коэффициент корреляции бумаг равен 1. Риск портфеля равен 50%. Найти портфель и его доходность.

$$\sigma = \sigma_1(1-t) + \sigma_2 t\,;$$

$$\mu = \mu_1(1-t) + \mu_2 t\,.$$

Найдем из первого уравнения значение параметра t, соответствующего риску портфеля 50%.

$$0{,}5 = 0{,}45(1-t) + 0{,}68t,\ \ t = 0{,}217.$$

Доходность портфеля найдем, подставив значение параметра $t = 0{,}217$ в уравнение

$$\mu = \mu_1\left(1-t\right) + \mu_2 t = 0{,}2 \cdot 0{,}783 + 0{,}38 \cdot 0{,}217 = 0{,}239.$$

Поскольку, как и в предыдущем примере, $(1 - t)$ и t играют роль x_1 и x_2 (см. [1]), портфель имеет вид (0,783; 0,217).

Вопросы и задачи

4.23. Опишите портфель, состоящий из двух ценных бумаг, в случае полной корреляции.

4.24. Портфель состоит из двух ценных бумаг A и B, ожидаемая доходность и риск которых, выраженные в процентах, равны A (7; 19), B (12; 24). Коэффициент корреляции бумаг равен 1. Найдите множество допустимых портфелей, постройте график. Определите доходность портфеля минимального риска.

4.25. Портфель состоит из двух ценных бумаг *A* и *B*, ожидаемая доходность и риск которых, выраженные в процентах, равны *A* (5; 14), *B* (10; 85). Коэффициент корреляции бумаг равен 1. Определите доходность портфеля минимального риска и риск портфеля максимальной доходности.

4.26. Портфель состоит из двух ценных бумаг *A* и *B*, ожидаемая доходность и риск которых, выраженные в процентах, равны *A* (14; 25), *B* (45; 60). Коэффициент корреляции бумаг равен 1. Найдите: а) портфель минимального риска, б) портфель максимальной доходности.

4.27. Портфель состоит из двух ценных бумаг *A* и *B*, ожидаемая доходность и риск которых, выраженные в процентах, равны *A* (14; 25), *B* (45; 60). Коэффициент корреляции бумаг равен 1. Найдите: а) портфель максимального риска, б) портфель минимальной доходности.

4.28. Портфель состоит из двух ценных бумаг *A* и *B*, ожидаемая доходность и риск которых, выраженные в процентах, равны *A* (15; 25), *B* (20; 88). Коэффициент корреляции бумаг равен 1. Риск портфеля составляет 75%. Найдите портфель и его доходность.

4.29. Портфель состоит из двух ценных бумаг *A* и *B*, ожидаемая доходность и риск которых, выраженные в процентах, равны *A* (7; 13), *B* (40; 23). Коэффициент корреляции бумаг равен 1. Риск портфеля равен 18%. Найдите портфель и его доходность.

4.30. Портфель состоит из двух ценных бумаг *A* и *B*, ожидаемая доходность и риск которых, выраженные в процентах, равны *A* (15; 10), *B* (65; 20). Коэффициент корреляции бумаг равен 1. Доходность портфеля равна 35%. Найдите портфель и его риск.

4.31. Портфель состоит из двух ценных бумаг *A* и *B*, ожидаемая доходность и риск которых, выраженные в процентах, равны *A* (46; 18), *B* (70; 37). Коэффициент корреляции бумаг равен 1. Доходность портфеля равна 55%. Найдите портфель и его риск.

4.32. Портфель состоит из двух ценных бумаг *A* и *B*, ожидаемые доходности которых равны 19 и 55%, а ценовые доли относятся как 1 : 4. Коэффициент корреляции бумаг равен 1. Найдите портфель и его доходность.

4.33. Портфель состоит из двух ценных бумаг *A* и *B*, ожидаемые доходности которых равны 14 и 67%, а ценовая доля бумаги *A* в 3 раза меньше ценовой доли бумаги *B*. Найдите портфель и его доходность.

4.34. Портфель состоит из двух ценных бумаг *A* и *B*, ожидаемые доходности которых равны 30 и 21%, а ценовая доля бумаги *A* на 40% меньше ценовой доли бумаги *B*. Найдите портфель и его доходность.

4.2.3. Случай полной антикорреляции

В случае полной антикорреляции

$$\rho_{12} = \rho = -1; \tag{4.22}$$

$$\sigma = \left|\sigma_1 x_1 - \sigma_2 x_2\right|. \tag{4.23}$$

Допустимое множество портфелей в случае полной антикорреляции ценных бумаг представляет собой два отрезка (*A*, *C*) и (*B*, *C*) (см. рис. 4.1). В случае полной антикорреляции возможен портфель нулевого риска (точка *C* (μ_0, 0)). Портфель нулевого риска имеет вид

$$X_0 = \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}\right), \tag{4.24}$$

а его доходность равна

$$\mu_0 = \frac{\mu_1\sigma_2 + \mu_2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}. \tag{4.25}$$

Отметим, что портфель нулевого риска не зависит от доходностей бумаг, а определяется только их рисками, причем ценовая доля одной бумаги пропорциональна риску другой.

Поскольку $|\rho| \leq 1$, то все допустимые портфели находятся внутри ($|\rho| < 1$) или на границе ($|\rho| = 1$) треугольника *ABC*.

Пример 4.7. Портфель состоит из двух ценных бумаг *A* и *B*, ожидаемая доходность и риск которых, выраженные в процентах, равны *A* (10; 22), *B* (25; 60). Коэффициент корреляции бумаг равен –1. Найти портфель минимального риска и его доходность, а также портфель максимальной доходности и его риск.

В случае полной антикорреляции портфелем минимального риска является безрисковый портфель. Его доходность равна

$$\mu_0 = \frac{\mu_1\sigma_2 + \mu_2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} = \frac{0{,}1\cdot 0{,}6 + 0{,}25\cdot 0{,}22}{0{,}22 + 0{,}6} = 0{,}14.$$

Портфель минимального риска имеет вид

$$X = \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}\right) = \left(\frac{0{,}6}{0{,}82}, \frac{0{,}22}{0{,}82}\right) = (0{,}73; 0{,}27).$$

Таким образом, портфель минимального (в данном случае — нулевого) риска имеет вид (0,73; 0,27), а его параметры равны (14; 0).

В случае полной антикорреляции портфелем максимальной доходности является портфель, состоящий только из бумаги максимальной доходности (см. рис. 4.1). Он имеет вид (0; 1), а его параметры равны (25; 60).

Пример 4.8. Для портфеля из двух бумаг с доходностью и риском соответственно (0,2; 0,5) и (0,4; 0,7) в случае полной антикорреляции найти портфель нулевого риска и его доходность.

Сначала по формуле (4.24) найдем портфель нулевого риска

$$X_0 = \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}, \frac{\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2}\right) = \left(\frac{0{,}7}{0{,}5+0{,}7}, \frac{0{,}5}{0{,}5+0{,}7}\right) = (0{,}583;\ 0{,}417).$$

Затем по формуле (4.25) найдем его доходность

$$\mu_0 = \frac{\mu_1\sigma_2+\mu_2\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2} = \frac{0{,}2\cdot 0{,}7+0{,}4\cdot 0{,}5}{0{,}5+0{,}7} = 0{,}283.$$

Видим, что доходность портфеля является промежуточной между доходностями обеих бумаг (но при этом риск нулевой!).

Можно проверить результат для доходности портфеля, вычислив его по формуле (4.9)

$$\mu = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 = 0{,}583\cdot 0{,}2 + 0{,}417\cdot 0{,}4 = 0{,}283.$$

Пример 4.9. Портфель состоит из двух ценных бумаг A и B, ожидаемые доходности которых, равны 12 и 26%, а ценовые доли относятся как 2 : 3. Коэффициент корреляции бумаг равен –1. Найти портфель и его доходность.

Зная отношение ценовых долей $x_1 : x_1 = 2 : 3$, найдем портфель из условия нормировки $x_1 + x_2 = 1$.

$$x_1 = 2x_2/3,\ 2x_2/3 + x_2 = 5x_2/3 = 1.$$

Отсюда $x_2 = 3/5$; $x_1 = 2/5$.

Подставляя эти результаты в одну из формул для портфеля заданной эффективности (см. ниже)

$$x_1 = \frac{\mu-\mu_2}{\mu_1-\mu_2},$$

получим

$$\frac{3}{5} = \frac{\mu-0{,}26}{0{,}12-0{,}26},\ \mu = 0{,}176.$$

Таким образом, искомый портфель имеет вид $\left(\frac{3}{5};\frac{2}{5}\right)$ с доходностью 17,6%.

Пример 4.10. Портфель состоит из двух ценных бумаг *A* и *B*, ожидаемая доходность и риск которых, выраженные в процентах, равны *A* (14; 27), *B* (37; 46). Коэффициент корреляции бумаг равен –1, а его доходность равна 20%. Найти портфель и его риск.

Существует несколько способов решения. Наиболее простым является использование полученных в [1] результатов (см. ниже) для портфеля

$$x_1 = \frac{\mu - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}, \ x_2 = \frac{\mu_1 - \mu}{\mu_1 - \mu_2} \tag{4.26}$$

и уравнения

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_1^2(\mu - \mu_2)^2 + \sigma_2^2(\mu - \mu_1)^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}(\mu - \mu_1)\cdot(\mu - \mu_2)}{(\mu_2 - \mu_1)^2} \tag{4.27}$$

для нахождения риска портфеля.

Подставляя в (4.26) данные задачи, получим

$$x_1 = \frac{0,2 - 0,37}{0,14 - 0,37} = 0,739, \ \ x_2 = \frac{0,14 - 0,2}{0,14 - 0,37} = 0,261;$$

x_2, конечно, можно найти и из условия нормировки $x_1 + x_2 = 1$.

Подставляя в (4.27) данные задачи, получим

$$\sigma^2 = \frac{0,27^2(0,2 - 0,37)^2 + 0,46^2(0,2 - 0,14)^2}{(0,46 - 0,27)^2} -$$
$$- \frac{2\cdot 0,27\cdot 0,46\cdot(-1)(0,2 - 0,14)\cdot(0,2 - 0,37)}{(0,46 - 0,27)^2} = 0,00939.$$

Риск портфеля σ равен

$$\sigma = 0,939\% \approx 1\%.$$

Итак, портфель имеет вид (0,739; 0,261), а его риск составляет 1%.

Пример 4.11. Портфель состоит из двух ценных бумаг *A* и *B*, ожидаемая доходность и риск которых, выраженные в процентах, равны *A* (10; 15), *B* (45; 76). Коэффициент корреляции бумаг равен –1, а его риск равен 5%. Найти портфель и его доходность, объяснить неоднозначность решения задачи.

Существует несколько способов решения. Наиболее простым является использование полученных в [1] результатов (см. ниже) для портфеля

$$X = \left(\frac{\sigma_2 \pm \sigma}{\sigma_1 + \sigma_2}; \frac{\sigma_1 \mp \sigma}{\sigma_1 + \sigma_2} \right).$$

Подставляя сюда данные задачи, получим

$$X = \left(\frac{0{,}76 \pm 0{,}05}{0{,}15 + 0{,}76}; \frac{0{,}15 \mp 0{,}05}{0{,}15 + 0{,}76} \right).$$

Таким образом, имеем два портфеля

$$X_1 = \left(\frac{0{,}76 + 0{,}05}{0{,}15 + 0{,}76}; \frac{0{,}15 - 0{,}05}{0{,}15 + 0{,}76} \right) = (0{,}89; 0{,}11),$$

$$X_2 = \left(\frac{0{,}76 - 0{,}05}{0{,}15 + 0{,}76}; \frac{0{,}15 + 0{,}05}{0{,}15 + 0{,}76} \right) = (0{,}78; 0{,}22).$$

Их доходности определяем по формуле

$$\mu = x_1\mu_1 + x_2\mu_2,$$

$$\mu^{(1)} = x_1^{(1)}\mu_1 + x_2^{(1)}\mu_2 = 0{,}89 \cdot 0{,}1 + 0{,}11 \cdot 0{,}45 = 0{,}1385,$$

$$\mu^{(2)} = x_1^{(2)}\mu_1 + x_2^{(2)}\mu_2 = 0{,}78 \cdot 0{,}1 + 0{,}22 \cdot 0{,}45 = 0{,}177.$$

Окончательно имеем два портфеля: X_1 (0,89; 0,11) с параметрами (0,1385; 0,05) и X_2 (0,78; 0,22) с параметрами (0,177; 0,05).

Неоднозначность решения задачи связана с тем, что в случае полной антикорреляции допустимое множество портфелей имеет вид «угла» (см. рис. 4.1), и горизонтальная прямая $\sigma = 0{,}05$ пересекает этот угол в двух точках, имеющих разные значения доходности.

Вопросы и задачи

4.35. Опишите портфель из двух ценных бумаг в случае полной антикорреляции.

4.36. Для портфеля из двух ценных бумаг с доходностью и риском соответственно (0,3; 0,6) и (0,5; 0,9) в случае полной антикорреляции найдите портфель нулевого риска и его доходность.

4.37. Портфель состоит из двух ценных бумаг *A* и *B*, ожидаемая доходность и риск которых, выраженные в процентах, равны *A* (12; 18), *B* (20; 47). Коэффициент корреляции бумаг равен –1. Определите доходность портфеля минимального риска и риск портфеля максимальной доходности. Изобразите график допустимого множества портфелей.

4.38. Портфель состоит из двух активов, ожидаемая доходность и риск (в процентах) которых равны A (18; 6), B (10; 5). Коэффициент корреляции активов A и B равен −1. Определите доходность портфеля минимального риска и риск портфеля максимальной доходности. Изобразите график допустимого множества портфелей.

4.39. Портфель состоит из двух ценных бумаг A и B, ожидаемая доходность и риск которых, выраженные в процентах, равны A (20; 60), B (13; 45). Коэффициент корреляции бумаг равен −1. Определите доходность портфеля минимального риска и риск портфеля максимальной доходности. Постройте график допустимого множества портфелей.

4.40. Портфель состоит из двух ценных бумаг A и B, ожидаемая доходность и риск которых, выраженные в процентах, равны A (7; 14), B (44; 25). Коэффициент корреляции бумаг равен −1, а его доходность равна 15%. Найдите портфель и его риск.

4.41. Портфель состоит из двух ценных бумаг A и B, ожидаемая доходность и риск которых, выраженные в процентах, равны A (20; 24), B (41; 36). Коэффициент корреляции бумаг равен −1, а его доходность равна 32%. Найдите портфель и его риск.

4.42. Портфель состоит из двух ценных бумаг A и B, ожидаемая доходность и риск которых, выраженные в процентах, равны A (11; 9), B (18; 20). Коэффициент корреляции бумаг равен −1, а его доходность равна 14%. Определите портфель и его риск.

4.43. Портфель состоит из двух ценных бумаг A и B, ожидаемая доходность и риск которых, выраженные в процентах, равны A (15; 30), B (24; 45). Коэффициент корреляции бумаг равен −1, а его риск равен 5%. Найдите портфель и его доходность, объясните неоднозначность решения задачи.

4.44. Портфель состоит из двух ценных бумаг A и B, ожидаемая доходность и риск которых, выраженные в процентах, равны A (5; 15), B (23; 43). Коэффициент корреляции бумаг равен −1, а его риск составляет 7%. Найдите портфель и его доходность, объясните неоднозначность решения задачи.

4.45. Портфель состоит из двух ценных бумаг A и B, ожидаемая доходность и риск которых, выраженные в процентах, равны A (10; 28), B (20; 90). Коэффициент корреляции бумаг равен −1, а его риск равен 30%. Найдите портфель и его доходность, объясните однозначность решения задачи.

4.46. Портфель состоит из двух ценных бумаг *A* и *B*, ожидаемые доходности которых равны 15 и 46%, а ценовые доли относятся как 4 : 7. Коэффициент корреляции бумаг равен –1. Найдите портфель и его доходность.

4.47. Портфель состоит из двух ценных бумаг *A* и *B*, ожидаемые доходности которых равны 17 и 27%, а ценовая доля бумаги *A* в 4 раза меньше ценовой доли бумаги *B*. Коэффициент корреляции бумаг равен –1. Найдите портфель и его доходность.

4.48. Портфель состоит из двух ценных бумаг *A* и *B*, ожидаемые доходности которых равны 32 и 28%, а ценовая доля бумаги *B* на 24% меньше ценовой доли бумаги *A*. Коэффициент корреляции бумаг равен –1. Каковы портфель и его доходность?

4.2.4. Независимые бумаги

Для независимых бумаг

$$\rho_{12} = \rho = 0 \ . \tag{4.28}$$

Для квадрата риска (дисперсии) портфеля имеем

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 \ . \tag{4.29}$$

Портфель минимального риска имеет вид:

$$X = \left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right), \tag{4.30}$$

а его доходность

$$\mu = \frac{\mu_1 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} + \frac{\mu_2 \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \ . \tag{4.31}$$

Риск портфеля равен

$$\sigma = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}. \tag{4.32}$$

Отметим, что в случае трех независимых бумаг прямой аналогии с формулой (4.30) нет (см. [1] 4.2.5).

Пример 4.12. Портфель минимального риска из двух независимых бумаг (0,75; 0,33), (0,48; *x*) (первая цифра в скобках — доходность ценной бумаги, вторая — ее риск) имеет вид (0,65; 0,35). Найти риск второй бумаги, доходность и риск портфеля минимального риска.

$$X = \left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right).$$

Для первой компоненты портфеля имеем

$$x_1 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

Подставив в эту формулу данные, получим

$$0{,}65 = \frac{\sigma_2^2}{0{,}33^2 + \sigma_2^2}, \text{ откуда } \sigma_2 = 0{,}45.$$

Доходность портфеля определяем по формуле

$$\mu = \frac{\mu_1 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} + \frac{\mu_2 \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

Поставив в формулу данные, получим

$$\mu = \frac{0{,}75 \cdot 0{,}45^2}{0{,}33^2 + 0{,}45^2} + \frac{0{,}48 \cdot 0{,}33^2}{0{,}33^2 + 0{,}45^2} = \frac{0{,}151875 + 0{,}052272}{0{,}3114} = 0{,}656.$$

Риск портфеля определяется по формуле

$$\sigma = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}},$$

$$\sigma = \frac{0{,}33 \cdot 0{,}45}{\sqrt{0{,}3114}} = 0{,}266.$$

Итак, портфель минимального риска имеет следующие параметры (0,66; 0,27). Видно, что риск портфеля меньше риска любой из его бумаг, а доходность является промежуточной между доходностями обеих бумаг. Если бы инвестор хотел получить портфель максимальной доходности, он включил бы в него только первую бумагу и имел бы портфель (1; 0) с параметрами (0,75; 0,33).

Пример 4.13. Портфель минимального риска из двух независимых бумаг (0,92; 0,37), (x; y) (первая цифра в скобках — доходность ценной бумаги, вторая — ее риск) имеет вид (0,15; 0,85), его доходность равна 0,71. Найти риск второй бумаги, ее доходность, а также риск портфеля минимального риска.

$$X = \left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right).$$

Для первой компоненты портфеля имеем

$$x_1 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

Подставив сюда данные, получим

$$0{,}15 = \frac{\sigma_2^2}{0{,}37^2 + \sigma_2^2}, \text{ откуда } \sigma_2 = 0{,}155.$$

Доходность портфеля находится по формуле

$$\mu = \frac{\mu_1 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} + \frac{\mu_2 \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

Подставив сюда данные, получим

$$0{,}71 = \frac{0{,}92 \cdot 0{,}155^2}{0{,}37^2 + 0{,}155^2} + \frac{\mu_2 \cdot 0{,}37^2}{0{,}37^2 + 0{,}155^2}.$$

Найдем отсюда $\mu_2 = 0{,}673$.

Итак, мы нашли параметры второй бумаги (0,673; 0,155).

Риск портфеля определяется по формуле

$$\sigma = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}},$$

$$\sigma = \frac{0{,}37 \cdot 0{,}155}{\sqrt{0{,}16}} = 0{,}143.$$

Итак, портфель минимального риска имеет следующие параметры (0,71; 0,143). Видно, что риск портфеля меньше риска любой из его бумаг, а доходность является промежуточной между доходностями обеих бумаг. Если бы инвестор хотел получить портфель максимальной доходности, он включил бы в него только первую бумагу и имел бы портфель (1; 0) с параметрами (0,92; 0,37).

Вопросы и задачи

4.49. Для портфеля из двух независимых ценных бумаг найдите портфель минимального риска и его доходность.

4.50. Найдите портфель минимального риска из двух независимых бумаг, дисперсии которых равны 10 и 15 соответственно.

4.51. Портфель состоит из двух бумаг A и B. Ожидаемые доходности равны 0,5 и 0,8, а риски — 0,2 и 0,6. Коэффициент корреляции равен нулю. Определите портфель минимального риска и его доходность.

4.52. Портфель минимального риска из двух независимых бумаг (0,43; 0,23), (0,67; x) (первая цифра в скобках — доходность ценной бумаги, вторая — ее риск) имеет вид (0,5; 0,5). Каковы риск второй бумаги, доходность и риск портфеля минимального риска?

4.53. Портфель минимального риска из двух независимых бумаг (0,3; 0,4), (0,5; x) (первая цифра в скобках — доходность ценной бумаги, вторая — ее риск) имеет вид (0,2; 0,8). Найдите риск второй бумаги, доходность и риск портфеля минимального риска.

4.54. Ценовые доли портфеля минимального риска из двух независимых бумаг (0,3; 0,4), (0,5; x) (первая цифра в скобках — доходность ценной бумаги, вторая — ее риск) относятся как 1 : 2. Найдите риск второй бумаги, доходность и риск портфеля минимального риска.

4.55. В портфеле минимального риска из двух независимых бумаг (0,3; 0,4), (0,5; x) (первая цифра в скобках — доходность ценной бумаги, вторая — ее риск) ценовая доля первой бумаги в 3,5 раза больше ценовой доли второй. Найдите риск второй бумаги, доходность и риск портфеля минимального риска.

4.56. В портфеле минимального риска из двух независимых бумаг (0,3; 0,4), (0,5; x) (первая цифра в скобках – доходность ценной бумаги, вторая — ее риск) ценовая доля второй бумаги на 34% больше ценовой доли первой. Найдите риск второй бумаги, доходность и риск портфеля минимального риска.

4.57. Доходность портфеля минимального риска из двух независимых бумаг (0,75; 0,33), (x; 0,48) равна 0,65 (первая цифра в скобках — доходность ценной бумаги, вторая — ее риск). Определите портфель минимального риска, его риск, а также доходность второй бумаги.

4.58. Риск портфеля минимального риска из двух независимых бумаг (0,2; x), (0,6; 0,8) равен 0,5 (первая цифра в скобках — доходность ценной бумаги, вторая — ее риск). Найдите риск первой бумаги, портфель минимального риска и его доходность.

4.59. Портфель минимального риска из двух независимых бумаг (0,75; 0,33), (0,48; x) (первая цифра в скобках — доходность ценной бумаги, вторая — ее риск) имеет вид (0,75; 0,25). Найдите риск второй бумаги, доходность и риск портфеля минимального риска.

4.60. Портфель минимального риска из двух независимых бумаг (0,75; 0,33), (x; y) (первая цифра в скобках — доходность ценной бумаги, вторая — ее риск) имеет вид (0,75; 0,25), его доходность равна 0,63. Найдите риск второй бумаги, ее доходность, а также риск портфеля минимального риска.

4.61. Ценовые доли портфеля минимального риска из двух независимых бумаг (0,3; 0,4), (0,5; x) (первая цифра в скобках — доходность ценной бумаги, вторая — ее риск) относятся как 2 : 9. Найдите риск второй бумаги, доходность и риск портфеля минимального риска.

4.62. В портфеле минимального риска из двух независимых бумаг (0,25; 0,46), (0,56; x) (первая цифра в скобках — доходность ценной бумаги, вторая — ее риск) ценовая доля первой бумаги в 1,6 раза больше ценовой доли второй. Найдите риск второй бумаги, доходность и риск портфеля минимального риска.

4.63. В портфеле минимального риска из двух независимых бумаг (0,4; 0,2), (0,6; x) (первая цифра в скобках — доходность ценной бумаги, вторая — ее риск) ценовая доля второй бумаги на 10% больше ценовой доли первой. Каковы риск второй бумаги, доходность и риск портфеля минимального риска?

4.64. В портфеле минимального риска из двух независимых бумаг риск второй бумаги равен 20%, ценовая доля второй бумаги на 19% больше ценовой доли первой. Доходность портфеля равна 43%, а доходности бумаг относятся как 1 : 5. Найдите риск первой бумаги, доходности обеих бумаг и риск портфеля минимального риска.

4.65. В портфеле минимального риска из двух независимых бумаг риск второй бумаги равен 40%, ценовая доля второй бумаги в 1,47 раза больше ценовой доли первой. Доходность портфеля равна 15%, а доходности бумаг относятся как 3 : 7. Найдите риск первой бумаги, доходности обеих бумаг и риск портфеля минимального риска.

4.66. В портфеле минимального риска из двух независимых бумаг риск первой бумаги равен 17%, ценовая доля второй бумаги на 15% больше ценовой доли первой. Доходность портфеля равна 30%, а доходность второй бумаги на 33% больше доходности первой. Найдите риск второй бумаги, доходности обеих бумаг и риск портфеля минимального риска.

4.67. Доходности двух независимых бумаг, составляющих портфель минимального риска, равны 32 и 44%. Ценовая доля первой бумаги в 5 раз больше ценовой доли второй, а риск первой бумаги в 1,5 раза меньше риска второй. Найдите риски обеих бумаг, доходность портфеля минимального риска, если его риск равен 50%.

4.68. Доходности двух независимых бумаг, составляющих портфель минимального риска, равны 16% и 32%. Ценовая доля первой бумаги на 40% больше ценовой доли второй, а риск первой бумаги на 30% меньше риска второй. Найдите риски обеих бумаг, доходность портфеля минимального риска, если его риск равен 10%.

4.69. Доходности двух независимых бумаг, составляющих портфель минимального риска, равны 11 и 18%. Риски бумаг (первой ко второй) относятся как 1 : 2,4. Найдите риски обеих бумаг, доходность портфеля минимального риска, если его риск равен 10%.

4.2.5. Портфель из двух произвольных бумаг

Вопросы и задачи

4.70. Найдите портфель минимального риска из двух независимых бумаг, дисперсии которых равны 225 и 49 соответственно, и его риск.

4.71. Портфель состоит из двух ценных бумаг A и B, ожидаемая доходность и риск которых, выраженные в процентах, равны A (12; 14), B (18; 15). Коэффициент корреляции бумаг равен –0,5. Ожидаемая доходность портфеля равна 14,2. Найдите доли бумаг A и B в портфеле и риск портфеля.

4.72. Портфель состоит из двух активов, ожидаемая доходность и риск (в процентах) которых равны A (18; 6), B (10; 5). Коэффициент корреляции активов A и B равен –0,5. Найдите портфель минимального риска, его риск и доходность.

4.73. Портфель состоит из двух бумаг A и B. Ожидаемые доходности равны 0,2 и 0,4, а риски 0,3 и 0,5. Коэффициент корреляции равен 0,2. Найдите портфель минимального риска, его риск и доходность.

4.74. Портфель состоит из двух ценных бумаг A и B, ожидаемая доходность и риск которых, выраженные в процентах, равны A (20; 60), B (13; 45). Коэффициент корреляции бумаг равен –0,25. Определите портфель минимального риска, его риск и доходность.

4.75. Портфель состоит из двух бумаг A и B. Ожидаемые доходности равны 0,6 и 0,4, а риски 0,1 и 0,5. Коэффициент корреляции равен –0,3. Каковы портфель минимального риска, его риск и доходность?

4.76. Портфель состоит из двух ценных бумаг A и B, ожидаемая доходность и риск которых, выраженные в процентах, равны A (16; 25), *B* (10; 14). Коэффициент корреляции бумаг равен 0,3. Найдите портфель минимального риска, его риск и доходность.

4.77. Портфель состоит из двух бумаг *A* и *B*. Ожидаемые доходности равны 0,5 и 0,8, а риски 0,2 и 0,6. Коэффициент корреляции равен 1/2. Найдите портфель минимального риска, его риск и доходность.

4.78. Портфель состоит из двух ценных бумаг *A* и *B*, ожидаемая доходность и риск которых, выраженные в процентах, равны *A* (7; 19), *B* (12; 24). Коэффициент корреляции бумаг равен 0,35. Найдите портфель минимального риска, его риск и доходность.

4.79. Портфель состоит из двух бумаг *A* и *B*. Ожидаемые доходности равны 0,6 и 0,9, а риски 0,1 и 0,5. Коэффициент корреляции равен –0,36. Найдите портфель минимального риска, его риск и доходность.

4.80. Портфель состоит из двух бумаг *A* и *B*. Ожидаемые доходности равны 0,5 и 0,8, а риски 0,2 и 0,6. Коэффициент корреляции равен 0,7. Найдите портфель минимального риска, его риск и доходность.

4.81. Портфель состоит из двух бумаг *A* и *B*. Ожидаемые доходности равны 0,6 и 0,8, а риски 0,1 и 0,5. Коэффициент корреляции равен –0,15. Найдите портфель минимального риска, его риск и доходность.

4.82. Портфель состоит из двух бумаг *A* и *B*. Ожидаемые доходности равны 0,35 и 0,75, а риски 0,2 и 0,6. Коэффициент корреляции равен $^1/_2$. Найдите портфель минимального риска и его доходность.

4.83. Портфель состоит из двух бумаг *A* и *B*. Ожидаемые доходности равны 0,22 и 0,41, а риски 0,32 и 0,54. Коэффициент корреляции равен 0,2. Определите портфель минимального риска, его риск и доходность.

4.84. Портфель состоит из двух бумаг *A* и *B*. Ожидаемые доходности равны 0,6 и 0,9, а риски 0,1 и 0,5. Коэффициент корреляции равен –0,3. Риск портфеля равен 0,4. Найдите портфель и его доходность.

4.85. Портфель состоит из двух бумаг *A* и *B*. Ожидаемые доходности равны 0,5 и 0,8, а риски 0,2 и 0,6. Коэффициент корреляции равен 0,7. Доходность портфеля равна 0,7. Найдите портфель и его риск.

4.86. Портфель состоит из двух бумаг *A* и *B*. Ожидаемые доходности равны 0,2 и 0,4, а риски 0,3 и 0,5. Коэффициент корреляции равен 0,2. Риск портфеля равен 0,35. Найдите портфель и его доходность.

4.87. Портфель состоит из двух бумаг *A* и *B*. Ожидаемые доходности равны 0,6 и 0,8, а риски 0,1 и 0,5. Коэффициент корреляции равен –0,15. Доходность портфеля равна 0,66. Определите портфель и его риск.

4.88. Портфель состоит из двух бумаг *A* и *B*. Ожидаемые доходности равны 0,35 и 0,75, а риски 0,2 и 0,6. Коэффициент корреляции равен $^1/_2$. Риск портфеля равен 0,55. Найдите портфель и его доходность.

4.89. Портфель состоит из двух бумаг *A* и *B*. Ожидаемые доходности равны 0,22 и 0,41, а риски 0,32 и 0,54. Коэффициент корреляции равен 0,2. Доходность портфеля равна 0,34. Найдите портфель и его риск.

4.2.6. Три независимые бумаги

Для независимых бумаг

$$\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = 0\,. \tag{4.33}$$

Для квадрата риска (дисперсии) портфеля имеем

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + \sigma_3^2 x_3^2\,. \tag{4.34}$$

Портфель минимального риска имеет вид

$$X = \frac{1}{\sigma_2^2\sigma_3^2 + \sigma_1^2\sigma_3^2 + \sigma_1^2\sigma_2^2}\left(\sigma_2^2\sigma_3^2;\ \sigma_1^2\sigma_3^2;\ \sigma_1^2\sigma_2^2\right), \tag{4.35}$$

а его доходность равна

$$\mu = \frac{\mu_1\sigma_2^2\sigma_3^2 + \mu_2\sigma_1^2\sigma_3^2 + \mu_3\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_2^2\sigma_3^2 + \sigma_1^2\sigma_3^2 + \sigma_1^2\sigma_2^2}\,. \tag{4.36}$$

Риск портфеля равен

$$\sigma = \frac{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}{\sqrt{\sigma_2^2\sigma_3^2 + \sigma_1^2\sigma_3^2 + \sigma_1^2\sigma_2^2}}. \tag{4.37}$$

Пример 4.14. Для портфеля из трех независимых бумаг с доходностью и риском соответственно (0,1; 0,4), (0,2; 0,6) и (0,4; 0,8) найти портфель минимального риска, его риск и доходность.

Портфель минимального риска имеет вид (4.35)

$$X = \frac{1}{\sigma_2^2\sigma_3^2 + \sigma_1^2\sigma_3^2 + \sigma_1^2\sigma_2^2}\left(\sigma_2^2\sigma_3^2;\sigma_1^2\sigma_3^2;\sigma_1^2\sigma_2^2\right) =$$

$$= \frac{(0,6^2\cdot 0,8^2;\ 0,4^2\cdot 0,8^2;\ 0,4^2\cdot 0,6^2)}{0,6^2\cdot 0,8^2 + 0,4^2\cdot 0,8^2 + 0,4^2\cdot 0,6^2} = \frac{(0,2304;\ 0,1024;\ 0,0576)}{0,2304 + 0,1024 + 0,0576} =$$

$$= \frac{(0,2304;\ 0,1024;\ 0,0576)}{0,3904} = (0,590;\ 0,263;\ 0,147).$$

Итак, $X = (0{,}580;\ 0{,}263;\ 0{,}147)$.

Риск портфеля минимального риска находится по формуле (4.37):

$$\sigma = \frac{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}{\sqrt{\sigma_2^2\sigma_3^2 + \sigma_1^2\sigma_3^2 + \sigma_1^2\sigma_2^2}} = \frac{0{,}4\cdot 0{,}6\cdot 0{,}8}{\sqrt{0{,}6^2\cdot 0{,}8^2 + 0{,}4^2\cdot 0{,}8^2 + 0{,}4^2\cdot 0{,}6^2}} =$$

$$= \frac{0{,}192}{\sqrt{0{,}2304 + 0{,}1024 + 0{,}0576}} = \frac{0{,}192}{\sqrt{0{,}3904}} = \frac{0{,}192}{0{,}6348} = 0{,}307.$$

Наконец, доходность портфеля вычисляется по формуле (4.36):

$$\mu = \frac{\mu_1\sigma_2^2\sigma_3^2 + \mu_2\sigma_1^2\sigma_3^2 + \mu_3\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_2^2\sigma_3^2 + \sigma_1^2\sigma_3^2 + \sigma_1^2\sigma_2^2} =$$

$$= \frac{0{,}1\cdot 0{,}6^2\cdot 0{,}8^2 + 0{,}2\cdot 0{,}4^2\cdot 0{,}8^2 + 0{,}4\cdot 0{,}4^2\cdot 0{,}6^2}{0{,}6^2\cdot 0{,}8^2 + 0{,}4^2\cdot 0{,}8^2 + 0{,}4^2\cdot 0{,}6^2} =$$

$$\frac{0{,}02304 + 0{,}02048 + 0{,}02304}{0{,}2304 + 0{,}1024 + 0{,}0576} = \frac{0{,}06656}{0{,}3904} = 0{,}1705.$$

Видно, что риск портфеля меньше риска каждой отдельной бумаги, а доходность портфеля больше доходности первой бумаги, чуть меньше доходности второй и меньше доходности третьей.

Вопросы и задачи

4.90. Для портфеля из трех независимых ценных бумаг найдите портфель минимального риска и его доходность.

4.91. Найдите портфель минимального риска из трех независимых бумаг, дисперсии которых равны 9, 16 и 25 соответственно.

4.92. Найдите портфель минимального риска из трех независимых бумаг (0,35; 0,75), (0,2; 0,6), (0,4; 0,8), его доходность и риск (первая цифра в скобках — доходность ценной бумаги, вторая — ее риск).

4.93. Найдите портфель минимального риска из трех независимых бумаг (0,3; 0,25), (0,4; 0,3), (0,5; 0,67), его доходность и риск (первая цифра в скобках — доходность ценной бумаги, вторая — ее риск).

4.94. Портфель минимального риска из трех независимых бумаг (x; 0,75), (0,2; 0,6), (0,4; 0,8) имеет доходность 0,5 (первая цифра в скобках — доходность ценной бумаги, вторая — ее риск). Какова доходность первой бумаги?

4.95. Доходность портфеля минимального риска из трех независимых бумаг (0,15; 0,25), (0,9; 0,6), (x; 0,8) равна 0,75 (первая цифра в скобках — доходность ценной бумаги, вторая — ее риск). Найдите доходность третьей бумаги.

4.96. Риск портфеля минимального риска из трех независимых бумаг (0,4; x), (0,6; 0,9), (0,3; 0,6) равен 0,5. Определите риск первой бумаги, портфель минимального риска и его доходность.

4.97. Риск портфеля минимального риска из трех независимых бумаг (0,3; 0,2), (0,5; x), (0,8; 0,6) равен 0,1. Найдите риск второй бумаги, портфель минимального риска и его доходность.

4.98. Ценовые доли бумаг портфеля минимального риска из трех независимых бумаг относятся как 1 : 3 : 6, а риски первой и второй бумаг равны 11 и 18%. Найдите портфель минимального риска, его риск и риск третьей бумаги.

4.99. Ценовые доли бумаг портфеля минимального риска из трех независимых бумаг относятся как 2 : 5 : 7, а риски первой и третьей бумаг равны 15 и 27%. Найдите портфель минимального риска, его риск и риск второй бумаги.

4.100. Ценовые доли бумаг портфеля минимального риска из трех независимых бумаг составляют арифметическую прогрессию с разностью 0,12, а риски первой и третьей бумаг равны 9 и 16%. Найдите портфель минимального риска, его риск и риск второй бумаги.

4.101. Ценовые доли бумаг портфеля минимального риска из трех независимых бумаг составляют убывающую арифметическую прогрессию с разностью –0,2, а риски второй и третьей бумаг равны 25 и 30%. Найдите портфель минимального риска, его риск и риск первой бумаги.

4.102. Ценовые доли бумаг портфеля минимального риска из трех независимых бумаг составляют геометрическую прогрессию со знаменателем 1,13, а риски второй и третьей бумаг равны 16 и 45%. Найдите портфель минимального риска, его риск и риск первой бумаги.

4.103. Ценовые доли бумаг портфеля минимального риска из трех независимых бумаг составляют геометрическую прогрессию со знаменателем 0,85, а риски первой и третьей бумаг равны 14 и 23%. Определите портфель минимального риска, его риск и риск второй бумаги.

4.104. Доходность портфеля минимального риска из трех независимых бумаг (0,25; 0,16), (0,41; 0,65), (x; y) равна 0,35 (первая цифра в скобках — доходность ценной бумаги, вторая — ее риск). Ценовые доли бумаг портфеля составляют геометрическую прогрессию со знаменателем 0,35. Найдите портфель минимального риска, его риск, а также доходность и риск третьей бумаги.

4.105. Доходность портфеля минимального риска из трех независимых бумаг (0,35; 0,19), (0,46; 0,25), (x; y) равна 0,5 (первая цифра в скобках — доходность ценной бумаги, вторая — ее риск). Ценовые доли бумаг портфеля составляют арифметическую прогрессию с разностью 0,16. Каковы портфель минимального риска, его риск, а также доходность и риск третьей бумаги.

4.106. Доходность портфеля минимального риска из трех независимых бумаг (0,2; 0,4), (0,3; 0,5), (x; y) равна 0,29 (первая цифра в скобках — доходность ценной бумаги, вторая — ее риск). Ценовые доли бумаг относятся как 1 : 4 : 3. Найдите портфель минимального риска, его риск, а также доходность и риск третьей бумаги.

4.2.7. Безрисковая бумага

Пусть одна из двух ценных бумаг портфеля безрисковая. Портфель из n-бумаг, включающий безрисковую бумагу, носит имя Тобина. Рассмотрим, как влияет включение безрисковой ценной бумаги в портфель из двух бумаг.

Итак, имеем две бумаги: 1 (μ_1, 0) и 2 (μ_2, σ_2), при этом $\mu_1 < \mu_2$ (иначе необходимо было бы формировать портфель (1; 0), состоящий только из безрисковой бумаги, и мы имели бы безрисковый портфель максимальной доходности).

Исходные уравнения имеют вид

$$\begin{gathered}\mu = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2;\\ \sigma = \sigma_2 x_2;\\ \mu = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2\,.\end{gathered} \tag{4.38}$$

Допустимое множество портфелей задается уравнением

$$\mu = \mu_1(1 - x_2) + \mu_2 x_2 = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)x_2 = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)\frac{\sigma}{\sigma_2},$$

т.е. является отрезком

$$\mu = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)\frac{\sigma}{\sigma_2}, \quad 0 \le \sigma \le \sigma_2. \tag{4.39}$$

При $\sigma = 0$ портфель находится в точке 1 (μ_1, 0), а при $\sigma = \sigma_2$ в точке 2 (μ_2, σ_2) (рис. 4.2).

Хотя этот случай очень простой, тем не менее можно сделать два вывода:

1) допустимое множество портфелей не зависит от коэффициента корреляции (хотя обычно безрисковая ценная бумага считается некоррелированной с остальными (рисковыми) бумагами.

2) допустимое множество портфелей сузилось с треугольника до отрезка.

Аналогичный эффект имеет место и в случае портфеля Тобина.

В заключение приведем зависимость доходности и риска портфеля от доли безрисковой бумаги (рис. 4.3).

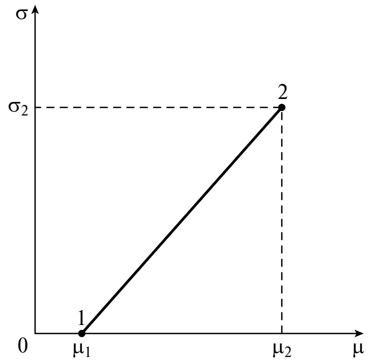

Рис. 4.2. Допустимое множество портфелей, состоящих из двух бумаг, одна из которых безрисковая

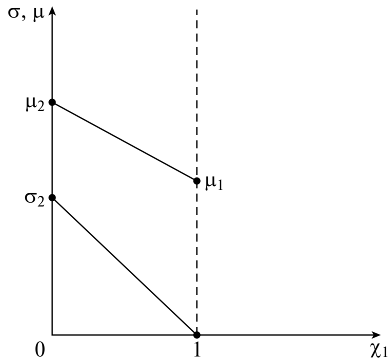

Рис. 4.3. Зависимость доходности и риска портфеля от доли безрисковой бумаги x_1

Из рисунка видно, что риск портфеля линейно убывает от σ_2 при $x_1 = 0$ до нуля при $x_1 = 1$, при этом доходность также линейно убывает от μ_2 при $x_1 = 0$ до μ_1 при $x_1 = 1$.

Пример 4.15. Одна из двух ценных бумаг портфеля является безрисковой. Рисковая бумага имеет параметры (0,3; 0,5), доходность безрисковой бумаги равна 0,2. Найти портфель и его риск, если его доходность равна 0,27.

Зависимость доходности портфеля от риска имеет вид:

$$\mu = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)\frac{\sigma}{\sigma_2}.$$

Подставляя сюда данные задачи, получим

$$0{,}27 = 0{,}2 + (0{,}3 - 0{,}2)\frac{\sigma}{0{,}5}.$$

Отсюда $\sigma = 0{,}35$.

Теперь найдем портфель.

$$\sigma = \sigma_2 x_2\ ,\ \ x_2 = \frac{\sigma}{\sigma_2} = \frac{0{,}35}{0{,}5} = 0{,}7,$$

$$x_1 = 1 - x_2 = 0{,}3\ .$$

Портфель имеет вид (0,3; 0,7).

Пример 4.16. Одна из двух бумаг портфеля является безрисковой. Рисковая бумага имеет параметры (0,4; 0,7), доходность безрисковой бумаги равна 0,31. Найти портфель и его доходность, если его риск равен 0,55.

Зависимость доходности портфеля от риска имеет вид

$$\mu = \ \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)\frac{\sigma}{\sigma_2}.$$

Подставляя сюда данные задачи, получим

$$\mu = \ 0{,}31 + \left(0{,}4 - 0{,}31\right)\frac{0{,}55}{0{,}7}.$$

Отсюда $\mu = 0{,}38$.

Теперь найдем портфель.

$$\sigma = \sigma_2 x_2\ ,\ \ x_2 = \frac{\sigma}{\sigma_2} = \frac{0{,}55}{0{,}7} = 0{,}786,$$

$$x_1 = 1 - x_2 = 0{,}214\ .$$

Портфель имеет вид (0,214; 0,786).

Вопросы и задачи

4.107. Опишите свойства портфеля из двух независимых бумаг, одна из которых безрисковая.

4.108. Выведите и изобразите на рисунке зависимость доходности и риска портфеля от доли безрисковой бумаги.

4.109. Изобразите на рисунке допустимое множество портфелей, состоящих из двух бумаг, одна из которых безрисковая.

4.110. Одна из двух бумаг портфеля является безрисковой. Рисковая бумага имеет параметры (0,5; 0,2), доходность безрисковой бумаги равна 0,3. Найдите портфель и его риск, если его доходность равна 0,15.

4.111. Одна из двух бумаг портфеля безрисковая. Рисковая бумага имеет параметры (0,6; 0,3), доходность безрисковой бумаги равна 0,4. Найдите портфель и его риск, если его доходность равна 0,45.

4.112. Одна из двух бумаг портфеля является безрисковой. Рисковая бумага имеет параметры (0,36; 0,71), доходность безрисковой бумаги равна 0,05. Найдите портфель и его доходность, если его риск равен 0,34.

4.113. Одна из двух бумаг портфеля является безрисковой. Рисковая бумага имеет параметры (0,45; 0,66), доходность безрисковой бумаги равна 0,17. Определите портфель и его доходность, если его риск равен 0,49.

4.2.8. Портфель заданной эффективности

В случае портфеля из двух бумаг задание эффективности портфеля либо его риска однозначно определяет портфель (за исключением случая $\mu_1 = \mu_2$, когда только задание риска портфеля однозначно определяет и сам портфель).

При задании эффективности портфеля он однозначно находится как решение системы

$$\begin{cases} \mu = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 \\ x_1 + x_2 = 1, \end{cases} \tag{4.40}$$

а при задании риска портфеля — как решение системы

$$\begin{cases} \sigma^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 x_1 x_2 \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases} \tag{4.41}$$

Поэтому в случае портфеля из двух бумаг говорить о минимальной границе (минимальном риске портфеля при заданной его эффективности) не приходится. Рассуждения по этому поводу в ряде пособий ошибочны.

Рассмотрим первый случай — задана эффективность портфеля. Тогда портфель имеет вид

$$x_1 = \frac{\mu - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}, \quad x_2 = \frac{\mu_1 - \mu}{\mu_1 - \mu_2}. \tag{4.42}$$

Интересно отметить, что в этой задаче портфель определяется не рисками составляющих портфель бумаг, а их доходностями в отличие от всех рассмотренных ранее случаев.

Подставляя данные выражения в выражение для квадрата риска портфеля, получим

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_1^2(\mu-\mu_2)^2 + \sigma_2^2(\mu-\mu_1)^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}(\mu-\mu_1)(\mu-\mu_2)}{(\mu_2-\mu_1)^2}. \quad (4.43)$$

Это уравнение является уравнением (однозначной) связи риска портфеля с его эффективностью, а не уравнением минимальной границы, как ошибочно указано в некоторых пособиях.

Лишь в случае $\mu_1 = \mu_2$, когда для всех значений x_1 и x_2 выполняется равенство $\mu = \mu_1 = \mu_2$ и допустимое множество портфелей с треугольника сужается до вертикального отрезка, можно говорить о минимальной границе, которая в этом случае состоит из единственной точки (μ, σ_1) (при $\sigma_1 < \sigma_2$) или (μ, σ_2) (при $\sigma_1 > \sigma_2$).

Случай полной корреляции $(\rho_{12} = 1)$

$$\sigma = \left|\frac{\sigma_1(\mu-\mu_2) - \sigma_2(\mu-\mu_1)}{(\mu_2-\mu_1)}\right|. \quad (4.44)$$

Случай полной антикорреляции $(\rho_{12} = -1)$

$$\sigma = \left|\frac{\sigma_1(\mu-\mu_2) + \sigma_2(\mu-\mu_1)}{(\mu_2-\mu_1)}\right|. \quad (4.45)$$

2) ***Независимые бумаги*** $(\rho_{12} = 0)$

Уравнение (4.43) принимает вид

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_1^2(\mu-\mu_2)^2 + \sigma_2^2(\mu-\mu_1)^2}{(\mu_2-\mu_1)^2}. \quad (4.46)$$

Для промежуточных значений коэффициента корреляции ρ риск портфеля как функция его эффективности имеет вид

$$\sigma^2 = \frac{\alpha\mu^2 - 2\beta\mu + \gamma}{\delta}. \quad (4.47)$$

Если найти вид зависимости риска портфеля от его эффективности для фиксированного портфеля (μ_1, σ_1), (μ_2, σ_2), но при различных значениях коэффициента корреляции ρ, то можно прийти к следующему заключению: при увеличении коэффициента корреляции от -1 до 1 происходит уменьшение μ_M. При этом график зависимости риска портфеля от его эффективности становится все более вытянутым по оси абсцисс, т.е. при фиксированном изменении ожидаемой доходности μ увеличение риска σ становится все меньше (см. рис. 4.1).

Если дополнительно предположить, что $x_1 \in [0, 1]$, а значит, и $x_2 \in [0, 1]$, то из первой формулы (4.40) следует, что $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$ в предположении $\mu_1 < \mu_2$, так как является их выпуклой комбинацией. Портфели составляют часть границы *AMB*, а именно ее часть, соединяющую точки (μ_1, σ_1) и (μ_2, σ_2) (см. рис. 4.1). Таким образом, в случае $n = 2$ и при дополнительном предположении $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ множество портфелей представляет собой куски гипербол или ломаных, соединяющих точки (μ_1, σ_1) и (μ_2, σ_2).

Вопросы и задачи

4.114. Портфель состоит из двух бумаг *A* и *B*. Ожидаемые доходности равны 0,4 и 0,9, а риски — 0,1 и 0,5. Коэффициент корреляции равен 0,5. Доходность портфеля равна 0,55. Найдите портфель и его риск.

4.115. Портфель состоит из двух бумаг *A* и *B*. Ожидаемые доходности равны 0,2 и 0,6, а риски — 0,3 и 0,4. Коэффициент корреляции равен –0,5. Доходность портфеля равна 0,5. Найдите портфель и его риск.

4.116. Портфель состоит из двух бумаг *A* и *B*. Ожидаемые доходности равны 0,5 и 0,8, а риски — 0,25 и 0,7. Коэффициент корреляции равен –0,8. Доходность портфеля равна 0,75. Найдите портфель и его риск.

4.117. Портфель из двух бумаг (x; 0,23), (0,67; 0,35) (первая цифра в скобках — доходность ценной бумаги, вторая — ее риск) имеет вид (0,55; 0,45) и доходность 0,47. Коэффициент корреляции равен –0,4. Каковы доходность первой бумаги и риск портфеля?

4.118. Ценовые доли портфеля из двух бумаг (0,2; 0,4), (x; 0,5) (первая цифра в скобках — доходность ценной бумаги, вторая — ее риск) относятся как 1 : 3,4, а доходность равна 0,23. Коэффициент корреляции равен 0,1. Найдите портфель, его риск и доходность второй бумаги.

4.119. В портфеле из двух бумаг (0,3; 0,26), (x; 0,6) (первая цифра в скобках — доходность ценной бумаги, вторая — ее риск) ценовая доля первой бумаги в 4,5 раза больше ценовой доли второй, а доходность составляет 0,34. Коэффициент корреляции равен –0,24. Найдите портфель, его риск и доходность второй бумаги.

4.120. В портфеле из двух бумаг (0,4; 0,5), (x; 0,6) (первая цифра в скобках — доходность ценной бумаги, вторая — ее риск) ценовая доля второй бумаги на 15% больше ценовой доли первой, а доходность равна 0,45. Коэффициент корреляции равен 0,6. Найдите портфель, его риск и доходность второй бумаги.

4.121. Докажите, что уравнение $\sigma = \sqrt{\dfrac{\alpha\mu^2 - 2\beta\mu + \gamma}{\delta}}$ является ветвью гиперболы, и найдите ее асимптоты.

4.2.9. Портфель заданного риска

Пусть теперь задан риск портфеля.

Портфель теперь находится как (однозначное или двузначное, см. рис.) решение системы

$$\begin{cases} \sigma^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 x_1 x_2, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases} \tag{4.48}$$

Портфель при заданном риске портфеля σ (он входит в дискриминант D) имеет вид

$$X = \left(\frac{-\sigma_2(\rho_{12}\sigma_1 - \sigma_2) \pm \sqrt{D}}{\sigma_1^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}; \frac{\sigma_1(\sigma_1 - \rho_{12}\sigma_2) \mp \sqrt{D}}{\sigma_1^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} \right), \tag{4.49}$$

где дискриминант D равен

$$D = \sigma_1^2(\sigma^2 - \sigma_2 + \rho_{12}^2\sigma_2^2) + \sigma_2^2\sigma^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2\sigma^2 . \tag{4.50}$$

Видно, что в общем случае портфель определяется неоднозначно, и существует два портфеля с одним и тем же значением риска, естественно, обладающих разной доходностью.

Существует, однако, значение риска портфеля, при котором портфель определяется однозначно.

Условием однозначности является равенство нулю дискриминанта D. Из него находим значение риска портфеля, при котором портфель определяется однозначно:

$$D = \sigma_1^2\left(\sigma^2 - \sigma_2^2 + \rho_{12}^2\sigma_2^2\right) + \sigma_2^2\sigma^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2\sigma^2 = 0,$$

отсюда

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_1^2\left(\sigma_2^2 - \rho_{12}^2\sigma_2^2\right)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}, \ \sigma = \sqrt{\frac{\sigma_1^2\left(\sigma_2^2 - \rho_{12}^2\sigma_2^2\right)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}} .$$

Рассмотрим различные предельные случаи, разобранные нами выше.

Независимые бумаги ($\rho_{12} = 0$):

$$D = \sigma_1^2\left(\sigma^2 - \sigma_2^2\right) + \sigma_2^2\sigma^2 ; \tag{4.51}$$

$$X = \left(\frac{\sigma_2^2 \pm \sqrt{D}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}; \frac{\sigma_1^2 \mp \sqrt{D}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right). \tag{4.52}$$

Отметим, что это не найденный нами выше портфель минимального риска, имеющий вид $X = \left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}; \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right)$, а портфель, имеющий риск σ.

Случай полной корреляции ($\rho_{12} = 1$):

$$D = \sigma_1^2\sigma^2 + \sigma_2^2\sigma^2 - 2\sigma_1\sigma_2\sigma^2 = \sigma^2\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2; \tag{4.53}$$

$$X = \left(\frac{-\sigma_2 \pm \sigma}{\sigma_1 - \sigma_2}; \frac{\sigma_1 \mp \sigma}{\sigma_1 - \sigma_2} \right). \tag{4.54}$$

Случай полной антикорреляции ($\rho_{12} = -1$):

$$D = \sigma_1^2\sigma^2 + \sigma_2^2\sigma^2 + 2\sigma_1\sigma_2\sigma^2 = \sigma^2\left(\sigma_1 + \sigma_2\right)^2; \tag{4.55}$$

$$X = \left(\frac{\sigma_2 \pm \sigma}{\sigma_1 + \sigma_2}; \frac{\sigma_1 \mp \sigma}{\sigma_1 + \sigma_2} \right). \tag{4.56}$$

Отсюда легко получить портфель нулевого риска, положив $\sigma = 0$

$$X = \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}; \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \right), \tag{4.57}$$

естественно, совпадающий с полученным нами выше другим способом.

Вопросы и задачи

4.122. Портфель состоит из двух бумаг *A* и *B*. Ожидаемые доходности равны 0,1 и 0,5, а риски 0,4 и 0,6. Коэффициент корреляции равен 0,4. Риск портфеля равен 0,45. Найдите портфель и его доходность.

4.123. При каком условии задание риска портфеля однозначно определяет портфель?

4.124. Портфель состоит из двух бумаг *A* и *B*, риски которых равны 0,8 и 0,4. Коэффициент корреляции равен –0,3. При каких значениях риска портфеля портфель определяется однозначно? Зависят ли эти значения от величины коэффициента корреляции?

4.125. Портфель состоит из двух бумаг *A* и *B*, риски которых равны 0,2 и 0,5. Коэффициент корреляции равен 0,7. При каком значении риска портфеля портфель определяется однозначно?

4.126. Портфель состоит из двух бумаг *A* и *B*, риски которых равны 0,1 и 0,35. Коэффициент корреляции равен –0,6. Найдите значение риска портфеля, при котором портфель определяется однозначно.

4.127. Портфель состоит из двух бумаг A и B, риск первой бумаги равен 0,25, риск портфеля равен 0,35, а его ценовые доли относятся как 2 : 5. Коэффициент корреляции равен –0,6. Найти портфель и риск второй бумаги.

4.128. Портфель состоит из двух бумаг A и B, риск первой бумаги равен 0,4, риск портфеля равен 0,3. Ценовая доля бумаги A в 2 раза меньше ценовой доли бумаги B. Коэффициент корреляции равен –0,6. Найдите портфель и риск второй бумаги.

4.129. Портфель состоит из двух бумаг A и B, риск первой бумаги равен 0,6, риск портфеля равен 0,5. Ценовая доля бумаги A на 15% меньше ценовой доли бумаги B. Коэффициент корреляции равен –0,4. Найдите портфель и риск второй бумаги.

4.130. Портфель состоит из двух бумаг A и B, ожидаемые доходности которых равны 0,3 и 0,4, риск бумаги A равен 0,26, риск портфеля равен 0,4, а его ценовые доли относятся как 1 : 3. Коэффициент корреляции равен 0,74. Найдите портфель, его доходность и риск бумаги B.

4.131. Портфель состоит из двух бумаг A и B, ожидаемые доходности которых равны 0,5 и 0,8, риск бумаги A равен 0,17, риск портфеля равен 0,1. Ценовая доля бумаги A в 3 раза меньше ценовой доли бумаги B. Коэффициент корреляции равен –0,6. Найдите портфель, его доходность и риск бумаги B.

4.132. Портфель состоит из двух бумаг A и B, ожидаемые доходности которых равны 0,25 и 0,35, риск бумаги A равен 0,7, риск портфеля равен 0,65. Ценовая доля бумаги A на 25% меньше ценовой доли бумаги B. Коэффициент корреляции равен –0,35. Найдите портфель, его доходность и риск бумаги B.

4.3. Портфели из n-бумаг. Портфели Марковица

4.3.1. Портфель минимального риска при заданной его эффективности

Итак, мы рассматриваем следующую задачу: требуется найти портфель $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, который минимизировал бы риск σ и обеспечивал заданную величину ожидаемой доходности μ.

В математической постановке данная задача выглядит следующим образом: найти минимум целевой функции

$$\frac{1}{2}\sigma^2 = \frac{1}{2}X^T VX \to \min \tag{4.58}$$

при условиях

$$\vec{\mu}^T X = \mu; \tag{4.59}$$

$$I^T X = 1. \tag{4.60}$$

Заметим, что числовой множитель в целевой функции введен для удобства. Мы ищем минимум квадрата риска, это обусловлено также техническими соображениями. Условие (4.59) обеспечивает данный уровень эффективности. Условие (4.60) следует из определения вектора X.

Если дополнительно предполагать, что вектор X состоит из неотрицательных чисел

$$X \geq 0\ , \tag{4.61}$$

то компоненты X можно интерпретировать в качестве долей инвестиций, вложенных в соответствующий актив. В общем случае среди чисел x_1, x_2, ..., x_n могут встречаться отрицательные, что означает долговое обязательство.

В дальнейшем мы предполагаем, что ковариационная матрица V положительно определена, а вектор эффективностей $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \propto_n)^T$ не коллинеарен вектору I, иными словами, не все эффективности равны.

Первое предположение, в частности, означает, что ковариационная матрица невырождена, что выполняется на практике для рисковых активов (акций). В частности, существует обратная матрица V^{-1}, которая также положительно определена. Случай безрискового актива рассмотрим позже. В случае нарушения второго предположения рассматриваемая задача имеет более простое решение, которое будет указано ниже.

Далее будем использовать следующие константы:

$$\begin{aligned} &\alpha = I^T V^{-1} I, \beta = I^T V^{-1}\vec{\mu} = \vec{\mu}^T V^{-1} I, \\ &\gamma = \vec{\mu}^T V^{-1}\vec{\mu}, \delta = \alpha\gamma - \beta^2, \end{aligned} \tag{4.62}$$

при этом константы α, γ, δ — положительные числа.

Задача нахождения оптимального портфеля с целевой функцией (4.58) при условиях (4.59)—(4.60) имеет единственное решение

$$X = V^{-1}\left(\lambda I + \nu\vec{\mu}\right),\ \lambda = \left(\gamma - \beta\mu\right)/\delta\ ,\ \nu = \left(\alpha\mu - \beta\right)/\delta. \tag{4.63}$$

Чтобы найти явные формулы (4.63), воспользуемся методом множителей Лагранжа. Рассмотрим функцию Лагранжа для оптимизационной задачи (4.58)—(4.60):

$$L(X,\lambda,\nu)=\frac{1}{2}X^TVX+\lambda\left(1-I^TX\right)+\nu\left(\mu-\vec{\mu}^TX\right). \qquad (4.64)$$

Приравнивая нулю производные по X, λ, ν, получим систему из трех уравнений

$$\begin{cases} VX=\lambda I+\nu\vec{\mu}, \\ I^TX=1, \\ \vec{\mu}^TX=\mu. \end{cases} \qquad (4.65)$$

Выразим неизвестное X из первого уравнения

$$X=V^{-1}\left(\lambda I+\nu\vec{\mu}\right) \qquad (4.66)$$

и подставим во второе и третье уравнения системы

$$\begin{cases} \alpha\lambda+\beta\nu=1, \\ \beta\lambda+\gamma\nu=\mu. \end{cases} \qquad (4.67)$$

Определитель системы (4.67) $\delta \neq 0$ (мы доказали выше, что $\delta > 0$), так что она имеет единственное решение

$$\lambda=\frac{\gamma-\beta\mu}{\delta},\ \nu=\frac{\alpha\mu-\beta}{\delta}. \qquad (4.68)$$

Эти формулы вместе с равенством (4.66) дают решение оптимизационной задачи (4.58)—(4.60):

$$X=V^{-1}\left(\frac{\gamma-\beta\mu}{\delta}I+\frac{\alpha\mu-\beta}{\delta}\vec{\mu}\right). \qquad (4.69)$$

Итак, для каждого значения ожидаемой доходности μ имеется единственный портфель X, обеспечивающий минимальное значение риска $\sigma=\sigma_{\min}$, т.е. определена функция

$$\sigma=\sigma(\mu). \qquad (4.70)$$

График функции (4.70) называют ***минимальной границей***.

Минимальная граница представляет собой ветвь гиперболы, уравнение которой имеет вид

$$\sigma=\sqrt{\frac{\alpha\mu^2-2\beta\mu+\gamma}{\delta}}, \qquad (4.71)$$

с асимптотами $\sigma = \sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}\left|\mu - \frac{\beta}{\alpha}\right|$ и абсолютным минимумом $M\left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)$.

Для нахождения искомого уравнения достаточно подставить найденное решение X в выражение для σ:

$$\begin{aligned}\sigma^2 = X^T V X = \left(V^{-1}\left(\lambda I + \nu\vec{\mu}\right)\right)^T V \cdot V^{-1}\left(\lambda I + \nu\vec{\mu}\right) = \\ = \left(\lambda I^T + \nu\vec{\mu}^T\right)V^{-1}\left(\lambda I + \nu\vec{\mu}\right) = \lambda^2\alpha + 2\lambda\nu\beta + \nu^2\gamma = \\ = \lambda\left(\lambda\alpha + \nu\beta\right) + \nu\left(\lambda\beta + \nu\gamma\right).\end{aligned} \tag{4.72}$$

Подставляя значения для выражений в скобках из системы (4.67), имеем

$$\sigma^2 = \lambda + \nu\mu = \frac{\gamma - \beta\mu}{\delta} + \frac{\alpha\mu - \beta}{\delta}\mu = \frac{\alpha\mu^2 - 2\beta\mu + \gamma}{\delta}, \tag{4.73}$$

откуда и получаем уравнение минимальной границы. Приведем это уравнение к каноническому виду $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, или, в наших переменных, $\frac{\sigma^2}{a^2} - \frac{\mu^2}{b^2} = 1$. Для этого выделим полный квадрат в правой части уравнения

$$\sigma^2 = \frac{\alpha}{\delta}\left[\left(\mu - \frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right] = \frac{\alpha}{\delta}\left[\left(\mu - \frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \frac{\delta}{\alpha^2}\right] = \frac{\alpha}{\delta}\left(\mu - \frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \frac{1}{\alpha}.$$

Каноническое уравнение минимальной границы имеет вид

$$\alpha\sigma^2 - \frac{\alpha^2}{\delta}\left(\mu - \frac{\beta}{\alpha}\right)^2 = 1,$$

или

$$\frac{\sigma^2}{a^2} - \frac{\tilde{\mu}^2}{b^2} = 1, \tag{4.74}$$

где

$$a^2 = 1/\alpha,\ b^2 = \delta/\alpha^2,\ \tilde{\mu} = \mu - \frac{\beta}{\alpha}. \tag{4.75}$$

Минимальная граница представляет собой ветвь гиперболы с асимптотами $\sigma = \sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}\left|\mu - \frac{\beta}{\alpha}\right|$ и абсолютным минимумом $M\left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)$. Получим уравнение асимптот.

Уравнение асимптот имеет вид $y = \pm\frac{b}{a}x$, или, в наших переменных,

$$\sigma = \pm\frac{a}{b}\tilde{\mu} = \pm\frac{a}{b}\left|\mu - \frac{\beta}{\alpha}\right| = \frac{\alpha}{\alpha\sqrt{\delta\alpha}}\left|\mu - \frac{\beta}{\alpha}\right| = \sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}\left|\mu - \frac{\beta}{\alpha}\right|. \qquad (4.76)$$

Нетрудно видеть, что в вырожденном случае, когда все ожидаемые доходности совпадают и равны μ, минимальная граница сводится к одной точке $M\left(\mu, \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)$, причем $X = \frac{1}{\alpha}V^{-1}I$.

График минимальной границы изображен на рис. 4.4.

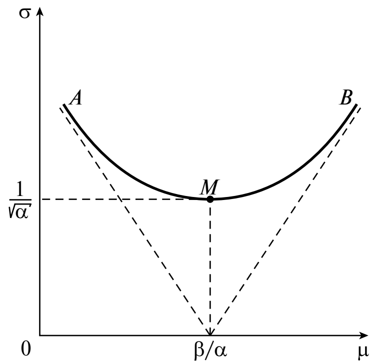

Рис. 4.4. Вид минимальной границы для портфеля Марковица

AMB — минимальная граница, $M\left(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)$ — точка абсолютного минимума, пунктиром обозначены асимптоты.

Пример 4.17. Дан портфель из трех бумаг с доходностями $\mu_1 = 10\%$, $\mu_2 = 20\%$, $\mu_3 = 30\%$ и ковариационной матрицей $V = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 9 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. Найти портфель минимального риска с доходностью $\mu = 25\%$ и его риск. Написать уравнение минимальной границы.

Отметим, что V является положительно определенной. Найдем обратную матрицу V^{-1}:

$$V^{-1} = \frac{1}{14}\cdot\begin{pmatrix} 16 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдем константы

$$\alpha = I^T V^{-1} I\ ,\ \beta = I^T V^{-1}\vec{\mu} = \vec{\mu}^T V^{-1} I\ ,\ \gamma = \vec{\mu}^T V^{-1}\vec{\mu}\ ,\ \delta = \alpha\gamma - \beta^2.$$

Здесь $I = (1, 1, 1)^T$, $\mu = (10; 20; 30)^T$.

$$\alpha = I^T V^{-1} I = \frac{1}{14}(1{,}1{,}1)\cdot\begin{pmatrix}16 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{14}\cdot(19{,}5{,}6)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{15}{7};$$

$$\beta = I^T V^{-1}\vec{\mu} = \frac{1}{14}(1{,}1{,}1)\cdot\begin{pmatrix}16 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10\\20\\30\end{pmatrix} = \frac{1}{14}(19{,}5{,}6)\cdot\begin{pmatrix}10\\20\\30\end{pmatrix} = \frac{235}{7};$$

$$\gamma = \vec{\mu}^T V^{-1}\vec{\mu} = \frac{1}{14}(10{,}20{,}30)\cdot\begin{pmatrix}16 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10\\20\\30\end{pmatrix} = \frac{1}{14}(230{,}90{,}150)\cdot\begin{pmatrix}10\\20\\30\end{pmatrix} = \frac{4300}{7};$$

$$\delta = \alpha\gamma - \beta^2 = \frac{4300}{7}\cdot\frac{15}{7} - \left(\frac{235}{7}\right)^2 = \frac{9275}{49} = 189{,}3.$$

Найдем также константы

$$\lambda = (\gamma - \beta\mu)/\delta \ \text{ и } \ \nu = (\alpha\mu - \beta)/\delta;$$

$$\lambda = (\gamma - \beta\mu)/\delta = \left(\frac{4300}{7} - \frac{235}{7}\cdot 25\right)\Big/189{,}3 = -225/189{,}3 = -1{,}19;$$

$$\nu = (\alpha\mu - \beta)/\delta = \left(\frac{15}{7}\cdot 25 - \frac{235}{7}\right)\Big/189{,}3 = 20/189{,}3 = 0{,}106.$$

Теперь можем найти портфель минимального риска с доходностью $\mu = 25\%$

$$X = V^{-1}(\lambda I + \nu\vec{\mu}) = \frac{1}{14}\cdot\begin{pmatrix}16 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1{,}19 + 0{,}106\cdot 10\\ -1{,}19 + 0{,}106\cdot 20\\ -1{,}19 + 0{,}106\cdot 30\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{14}\cdot\begin{pmatrix}16 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-0{,}13\\ 0.93\\ 1{,}99\end{pmatrix} = \frac{1}{14}\cdot\begin{pmatrix}1{,}77\\ 3{,}59\\ 8{,}76\end{pmatrix} = (0{,}12;\ 0{,}26;\ 0{,}62)^T.$$

Таким образом, портфель минимального риска с доходностью $\mu = 25\%$ равен $X = (0,12;\ 0,26;\ 0,62)^T$: необходимо взять 12% бумаг первого вида, 26% — второго и 62% — третьего вида.

Найдем риск портфеля

$$\sigma = \sqrt{X^T V X} = \left(0,12;\ 0,26;\ 0,62\right)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 9 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0,12 \\ 0,26 \\ 0,62 \end{pmatrix} =$$

$$= \sqrt{\left(-0,14;\ 0,98;\ 1,96\right)\begin{pmatrix} 0,12 \\ 0,26 \\ 0,62 \end{pmatrix}} = \sqrt{1,4532} = 1,205.$$

Риск портфеля оказался чуть больше риска первой бумаги ($\sigma_1 = 1$), но меньше риска второй ($\sigma_2 = 3$) и третьей ($\sigma_3 = 2$) бумаг. При этом его доходность (25%) на 15% больше доходности первой бумаги, на 5% больше доходности второй и лишь на 5% меньше доходности третьей бумаги.

Отметим интересный факт: доля (ценовая) второй бумаги в портфеле минимального риска оказалась выше доли первой более чем в 2 раза, при том что риск второй бумаги выше, чем риск первой, в 3 раза. Это означает, что риск портфеля в значительной степени зависит от корреляций бумаг, а не только от их индивидуальных рисков.

В заключение запишем вид минимальной границы. По формуле (4.71)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\alpha\mu^2 - 2\beta\mu + \gamma}{\delta}},$$

подставляя сюда найденные нами значения констант α, β, γ, δ, получим

$$\sigma = \sqrt{\frac{\frac{15}{7}\cdot\mu^2 - 2\cdot\frac{235}{7}\cdot\mu + \frac{4300}{7}}{\frac{9275}{49}}} = \sqrt{0,011\mu^2 - 0,355\mu + 3,245}.$$

Итак, минимальная граница имеет вид

$$\sigma = \sqrt{0,011\mu^2 - 0,355\mu + 3,245},$$

или

$$31,6\cdot\sigma = \sqrt{11\mu^2 - 355\mu + 3245}.$$

Вопросы и задачи

4.133. Опишите свойства портфелей Марковица.

4.134. Найдите портфель минимального риска заданной ожидаемой доходности μ.

4.135. Дан портфель из двух бумаг с доходностями $\mu_1 = 18\%$, $\mu_2 = 23\%$, $\mu_3 = 35\%$ и ковариационной матрицей $V = \begin{pmatrix} 25 & 5 & 12 \\ 5 & 36 & -10 \\ 12 & -10 & 81 \end{pmatrix}$. Найдите портфель минимального риска с доходностью $\mu = 27\%$ и его риск. Напишите уравнение минимальной границы.

4.136. Дан портфель из трех бумаг с доходностями $\mu_1 = 8\%$, $\mu_2 = 28\%$, $\mu_3 = 45\%$ и ковариационной матрицей $V = \begin{pmatrix} 16 & 2 & 10 \\ 2 & 9 & -8 \\ 10 & -8 & 25 \end{pmatrix}$. Найдите портфель минимального риска с доходностью $\mu = 35\%$ и его риск. Напишите уравнение минимальной границы.

4.137. Дан портфель из трех бумаг с доходностями $\mu_1 = 6\%$, $\mu_2 = 24\%$, $\mu_3 = 34\%$ и ковариационной матрицей $V = \begin{pmatrix} 64 & 4 & -14 \\ 4 & 49 & -9 \\ -14 & -9 & 36 \end{pmatrix}$. Найдите портфель минимального риска с доходностью $\mu = 26\%$ и его риск. Напишите уравнение минимальной границы.

4.138. Выведите уравнение минимальной границы $\sigma = \sqrt{\dfrac{\alpha\mu^2 - 2\beta\mu + \gamma}{\delta}}$.

4.139. Докажите, что уравнение минимальной границы $\sigma = \sqrt{\dfrac{\alpha\mu^2 - 2\beta\mu + \gamma}{\delta}}$ представляет собой ветвь гиперболы.

4.3.2. Портфель Марковица минимального риска с эффективностью не меньшей заданной

Наряду с задачей (1) ((4.58)—(4.60)) найдем портфель минимального риска из всех портфелей эффективности не менее заданной (задача (1')). Такой портфель назовем оптимальным портфелем Марковица. Для этого рассмотрим оптимизационную задачу: найти минимум целевой функции

$$\frac{1}{2}\sigma^2 = \frac{1}{2}X^T VX \to \min \tag{4.77}$$

при условиях

$$\vec{\mu}^T X \geq \mu, \tag{4.78}$$

$$I^T X = 1. \tag{4.79}$$

Из строения квадратичной функции (4.73), задающей уравнение минимальной границы, видно, что задачи (1) и (1') имеют одно и то же решение при любом $\mu \geq \mu_0$ β/α, а именно $\sigma_{\min} = \sqrt{\dfrac{\alpha\mu^2 - 2\beta\mu + \gamma}{\delta}}$, сам портфель $X = V^{-1}\left(\dfrac{\gamma - \beta\mu}{\delta} I + \dfrac{\alpha\mu - \beta}{\delta}\vec{\mu}\right)$.

При $\mu \leq \beta/\alpha$ рассматриваемые задачи имеют разные решения: именно решение задачи (1') при всех $\mu \leq \beta/\alpha$ есть одно-единственное решение задачи (1) при $\mu \leq \beta/\alpha$ (см. рис. 4.4). А именно

$$\sigma_{\min} = \sqrt{\frac{\alpha\mu_0^2 - 2\beta\mu_0 + \gamma}{\delta}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \tag{4.80}$$

а сам портфель

$$\begin{aligned} X &= V^{-1}\left(\frac{\gamma - \beta\mu_0}{\delta} I + \frac{\alpha\mu_0 - \beta}{\delta}\vec{\mu}\right) = \\ &= V^{-1}\left(\frac{\gamma - \beta^2/\alpha}{\delta} I + \frac{\beta - \beta}{\delta}\vec{\mu}\right) = \frac{1}{\alpha}V^{-1} I. \end{aligned} \tag{4.81}$$

Понятно, что при $\mu \leq \beta/\alpha$ нет смысла решать задачу (1) — надо решать задачу (1') и решение этой задачи будет лучше решения задачи (1), ибо эффективность портфеля, являющегося решением задачи (1'), равна $\mu_0 = \beta/\alpha$, т.е. даже больше, чем требуется, а дисперсия равна $\sigma^2 = 1/\alpha$, т.е. даже меньше, чем у портфеля, представляющего собой решение задачи (1) при данном μ. При $\mu \geq \beta/\alpha$ решением задачи будет портфель Марковица

$$X = V^{-1}\left(\frac{\gamma - \beta\mu}{\delta} I + \frac{\alpha\mu - \beta}{\delta}\vec{\mu}\right).$$

Пример 4.18. Дан портфель из трех бумаг с доходностями $\mu_1 = 10\%$, $\mu_2 = 20\%$, $\mu_3 = 30\%$ и ковариационной матрицей $V = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 9 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Найти портфель минимального риска с доходностью: а) не менее $\mu = 25\%$, б) не менее 13% и их риски.

Этот пример для фиксированной доходности $\mu = 25\%$ разобран нами выше. Согласно изложенной выше теории, мы должны сравнить минимальные значения доходностей с величиной $\mu_0 = \beta/\alpha$.

При этом возникает два варианта:

1) при $\mu \geq \beta/\alpha$ решением задачи является портфель Марковица

$$X = V^{-1}\left(\frac{\gamma - \beta\mu}{\delta} I + \frac{\alpha\mu - \beta}{\delta}\vec{\mu}\right);$$

2) при $\mu \leq \beta/\alpha$ решением задачи, даже лучшим, чем требуется, будет портфель с эффективностью $\mu_0 = \beta/\alpha$, т.е. даже большей, чем требуется, и дисперсией, равной $\sigma^2 = 1/\alpha$, т.е. даже меньшей, чем у портфеля, являющегося решением задачи (1) при данном μ.

Найдем константы

$$\alpha = I^T V^{-1} I,\ \beta = I^T V^{-1}\vec{\mu} = \vec{\mu}^T V^{-1} I,\ \gamma = \vec{\mu}^T V^{-1}\vec{\mu},\ \delta = \alpha\gamma - \beta^2,$$

где $I = (1,\ 1,\ 1)^T$, $\mu = (10;\ 20;\ 30)^T$;

$$\alpha = I^T V^{-1} I = \frac{1}{14}(1;1;1)\cdot\begin{pmatrix}16 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{14}\cdot(19;5;6)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{15}{7};$$

$$\beta = I^T V^{-1}\vec{\mu} = \frac{1}{14}(1;1;1)\cdot\begin{pmatrix}16 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10\\20\\30\end{pmatrix} = \frac{1}{14}(19;5;6)\cdot\begin{pmatrix}10\\20\\30\end{pmatrix} = \frac{235}{7}.$$

Отношение этих константов равно $\beta/\alpha = \frac{235}{7} : \frac{15}{7} = 15,(6)$.

То есть при минимальной доходности, большей 15,7%, решением задачи является портфель Марковица, а при минимальной доходности, меньшей 15,7%, решением задачи является портфель с доходностью $\mu_0 = \beta/\alpha$ и риском, равным $\sigma = \sqrt{1/\alpha}$.

Для фиксированной доходности $\mu = 25\%$ пример был разобран нами выше и дал следующие результаты. Портфель равен $X = (0{,}12;\ 0{,}26;\ 0{,}62)^T$: необходимо взять 12% бумаг первого вида, 26% — второго и 62% — третьего вида.

Риск портфеля $\sigma = \sqrt{X^T V X} = 1{,}205$. Такой портфель выбираем в качестве портфеля минимального риска с доходностью не менее $\mu = 25\%$.

При минимальной доходности 13% (меньшей 15,7%) решением задачи является портфель с доходностью $\mu_0 = \beta/\alpha$ и риском, равным $\sigma = \sqrt{1/\alpha}$.

Таким образом, $\mu_0 = \beta/\alpha = 15{,}7\%$, $\sigma = \sqrt{1/\alpha} = \sqrt{7/15} = 0{,}68$.

Видно, что риск данного портфеля меньше риска портфеля фиксированной доходности $\mu = 25\%$ (1,205). Так и должно быть, поскольку $\sigma = \sqrt{1/\alpha} = 0{,}68$ является минимально возможным риском для данного портфеля.

Теперь можем найти портфель минимального риска с доходностью $\mu = 13\%$.

Для этого вычислим константы γ, δ, λ, ν. Две первые не зависят от требуемой минимальной доходности портфеля и были вычислены нами выше

$$\gamma = \vec{\mu}^T V^{-1}\vec{\mu} = \frac{1}{14}(10;\, 20;\, 30)\cdot\begin{pmatrix}16 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10\\ 20\\ 30\end{pmatrix} = \frac{1}{14}(230;\, 90;\, 150)\cdot\begin{pmatrix}10\\ 20\\ 30\end{pmatrix} = \frac{4300}{7}.$$

$$\delta = \alpha\gamma - \beta^2 = \frac{4300}{7}\cdot\frac{15}{7} - \left(\frac{235}{7}\right)^2 = \frac{9275}{49} = 189{,}3.$$

Вычислим теперь константы λ, ν, зависящие от требуемой минимальной доходности портфеля

$$\lambda = (\gamma - \beta\mu)/\delta = \left(\frac{4300}{7} - \frac{235}{7}\cdot 13\right)\Big/ 189{,}3 = 177{,}86/189{,}3 = 0{,}9396.$$

$$\nu = (\alpha\mu - \beta)/\delta = \left(\frac{15}{7}\cdot 13 - \frac{235}{7}\right)\Big/ 189{,}3 = -5{,}714/189{,}3 = -0{,}03.$$

$$X = V^{-1}(\lambda I + \nu\vec{\mu}) = \frac{1}{14}\cdot\begin{pmatrix}16 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}9396 - 0{,}03\cdot 10\\ 0{,}9396 - 0{,}03\cdot 20\\ 0{,}9396 - 0{,}03\cdot 30\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{14}\cdot\begin{pmatrix}16 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}6396\\ 0{,}3396\\ 0{,}0396\end{pmatrix} = \frac{1}{14}\cdot\begin{pmatrix}10{,}952\\ 1{,}998\\ 1{,}1376\end{pmatrix} = (0{,}78;\ 0{,}14;\ 0{,}08)^T.$$

Таким образом, портфель минимального риска с доходностью не менее $\mu = 13\%$ равен $X = (0{,}78;\, 0{,}14;\, 0{,}08)^T$: необходимо взять 78% бумаг первого вида, 14% — второго и 8% — третьего вида. Понятно, что структура этого портфеля резко отличается от структуры портфеля минимального риска с доходностью не менее $\mu = 25\%$: первой бумаги берется в 6,5 раза больше, второй — в 1,86 раза меньше, третьей — в 7,75 раза меньше.

Вопросы и задачи

4.140. Опишите портфель Марковица минимального риска с эффективностью не меньшей заданной.

4.141. Дан портфель из трех бумаг с доходностями $\mu_1 = 18\%, \mu_2 = 23\%$, $\mu_3 = 35\%$ и ковариационной матрицей $V = \begin{pmatrix} 25 & 5 & 12 \\ 5 & 36 & -10 \\ 12 & -10 & 81 \end{pmatrix}$. Найдите портфель минимального риска с доходностью не менее: а) $\mu = 10\%$, б) $\mu = 30\%$ и его риск. Напишите уравнение минимальной границы.

4.142. Дан портфель из трех бумаг с доходностями $\mu_1 = 8\%$, $\mu_2 = 28\%$, $\mu_3 = 45\%$ и ковариационной матрицей $V = \begin{pmatrix} 16 & 2 & 10 \\ 2 & 9 & -8 \\ 10 & -8 & 25 \end{pmatrix}$. Найдите портфель минимального риска с доходностью не менее: а) $\mu = 5\%$, б) $\mu = 35\%$ и его риск. Напишите уравнение минимальной границы.

4.143. Дан портфель из трех бумаг с доходностями $\mu_1 = 6\%$, $\mu_2 = 24\%$, $\mu_3 = 34\%$ и ковариационной матрицей $V = \begin{pmatrix} 64 & 4 & -14 \\ 4 & 49 & -9 \\ -14 & -9 & 36 \end{pmatrix}$. Найдите портфель минимального риска с доходностью не менее: а) $\mu = 4\%$, б) $\mu = 26\%$ и его риск.

4.3.3. Портфель минимального риска

Решим еще одну оптимизационную задачу: найти портфель минимального риска из всех возможных портфелей, т.е. портфелей любой эффективности [7].

Для этого необходимо найти минимум целевой функции

$$\frac{1}{2}\sigma^2 = \frac{1}{2} X^T V X \to \min \tag{4.82}$$

при условии

$$I^T X = 1. \tag{4.83}$$

Функция Лагранжа в этом случае имеет вид

$$L(X,\lambda)=\frac{1}{2}X^T VX+\lambda(1-I^T X). \tag{4.84}$$

Портфель минимального риска есть

$$X=\frac{V^{-1}I}{I^T V^{-1}I}=\frac{V^{-1}I}{\alpha}. \tag{4.85}$$

Сама же минимальная дисперсия равна

$$X^T VX=\left(\frac{I^T V^{-1}}{\alpha}\right)V\left(\frac{V^{-1}I}{\alpha}\right)=\frac{I^T V^{-1}I}{\alpha^2}=\frac{1}{\alpha}. \tag{4.86}$$

Итак, обратная величина параметра α численно равна минимальной дисперсии всех портфелей.

Интересно отметить, что минимальная дисперсия и сам портфель минимального риска определяются исключительно матрицей V (или, точнее, V^{-1}). Однако эффективность такого портфеля зависит и от вектора $\vec{\alpha}$ и она равна

$$\mu=\vec{\mu}^T X=\frac{\vec{\mu}^T V^{-1}I}{\alpha}=\frac{\beta}{\alpha}. \tag{4.87}$$

Итак, эффективность портфеля минимального риска равна β/α. Отметим, что предположение $\delta > 0$ здесь не используется.

Пример 4.19. Дан портфель из трех бумаг с доходностями $\mu_1 = 10\%$, $\mu_2 = 20\%$, $\mu_3 = 30\%$ и ковариационной матрицей $V=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 9 & -2\\ 0 & -2 & 4\end{pmatrix}$. Найти портфель минимального риска из портфелей любой доходности, его доходность и риск.

Портфель минимального риска равен

$$X=\frac{V^{-1}I}{I^T V^{-1}I}=\frac{V^{-1}I}{\alpha}. \tag{4.88}$$

Мы уже вычисляли параметры α, β, а также V^{-1} в предыдущих задачах.

$$\alpha=I^T V^{-1}I=\frac{1}{14}(1;1;1)\cdot\begin{pmatrix}16 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{14}\cdot(19;5;6)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{15}{7};$$

$$\beta = I^T V^{-1}\vec{\mu} \;=\; \frac{1}{14}(1;1;1)\cdot\begin{pmatrix}16 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10\\ 20\\ 30\end{pmatrix} = \frac{1}{14}(19;5;6)\cdot\begin{pmatrix}10\\ 20\\ 30\end{pmatrix} = \frac{235}{7}.$$

Отношение этих параметров равно $\beta/\alpha = \frac{235}{7}:\frac{15}{7} = 15,(6).$

$$V^{-1} = \frac{1}{14}\cdot\begin{pmatrix}16 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}.$$

Тогда для искомого портфеля имеем

$$X = \frac{V^{-1}I}{I^T V^{-1} I} = \frac{V^{-1}I}{\alpha} = \frac{1}{14}\cdot\frac{7}{15}\cdot\begin{pmatrix}16 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix} = \frac{1}{30}\cdot\begin{pmatrix}19\\ 5\\ 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}19/30\\ 1/6\\ 1/5\end{pmatrix}.$$

Итак, портфель равен $X = \left(\frac{19}{30};\frac{1}{6};\frac{1}{5}\right).$

Минимальная дисперсия портфеля равна

$$X^T V X = \left(\frac{I^T V^{-1}}{\alpha}\right) V \left(\frac{V^{-1} I}{\alpha}\right) = \frac{I^T V^{-1} I}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha} = \frac{7}{15}, \tag{4.89}$$

а риск $\sigma = \sqrt{\frac{7}{15}}.$

Эффективность портфеля минимального риска зависит и от вектора $\vec{\alpha}$ и она равна

$$\mu = \vec{\mu}^T X = \frac{\vec{\mu}^T V^{-1} I}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} = 15{,}7\%.$$

Вопросы и задачи

4.144. Опишите портфель минимального риска из портфелей любой эффективности.

4.145. Дан портфель из трех бумаг с доходностями $\mu_1 = 18\%$, $\mu_2 = 23\%$, $\mu_3 = 35\%$ и ковариационной матрицей $V = \begin{pmatrix}25 & 5 & 12\\ 5 & 36 & -10\\ 12 & -10 & 81\end{pmatrix}$. Найдите портфель минимального риска из портфелей любой доходности, его доходность и риск.

4.146. Дан портфель из трех бумаг с доходностями $\mu_1 = 8\%$, $\mu_2 = 28\%$, $\mu_3 = 45\%$ и ковариационной матрицей $V = \begin{pmatrix} 16 & 2 & 10 \\ 2 & 9 & -8 \\ 10 & -8 & 25 \end{pmatrix}$. Найдите портфель минимального риска из портфелей любой доходности, его доходность и риск.

4.147. Дан портфель из трех бумаг с доходностями $\mu_1 = 6\%$, $\mu_2 = 24\%$, $\mu_3 = 34\%$ и ковариационной матрицей $V = \begin{pmatrix} 64 & 4 & -14 \\ 4 & 49 & -9 \\ -14 & -9 & 36 \end{pmatrix}$. Найдите портфель минимального риска из портфелей любой доходности, его доходность и риск.

4.3.4. Портфель максимальной эффективности из всех портфелей риска не более заданного

Наряду с портфелями минимального риска имеет также смысл искать и портфели максимальной эффективности из некоторого множества портфелей.

Эта задача сводится к решению следующей оптимизационной задачи: найти максимум целевой функции

$$\vec{\mu}^T X \to \max \tag{4.90}$$

при условиях

$$\frac{1}{2} X^T V X = \frac{1}{2}\sigma^2 \tag{4.91}$$

$$I^T X = 1. \tag{4.92}$$

Прямой подход — составление функции Лагранжа и т.д. — не приводит к решению задачи. Поэтому предлагается следующий подход.

Ранее мы получили, что для портфеля, являющегося решением задачи (1)

$$\frac{1}{2}\sigma^2 = \frac{1}{2} X^T V X \to \min$$

при условиях

$$\vec{\mu}^T X = \mu,$$

$$I^T X = 1.$$

дисперсия и эффективность связаны формулой (4.71) $\sigma^2 = \frac{\alpha\mu^2 - 2\beta\mu + \gamma}{\delta}$. Рассмотрим плоскость ($\mu$, V). На этой плоскости изобразим кривую (4.71).

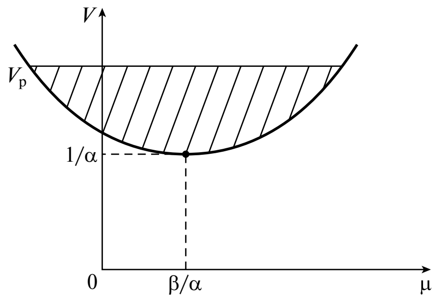

Рис. 4.5. К нахождению портфеля Марковица максимальной эффективности из всех портфелей риска не более заданного

На рисунке 4.5 множество портфелей заштриховано, β/α, $1/\alpha$ — эффективность и дисперсия портфеля минимального риска.

Итак, если фиксировать эффективность портфеля μ, то низшая точка заштрихованного множества, лежащая на соответствующей вертикали, есть портфель Марковица — решение задачи (1). Если же фиксировать дисперсию портфеля V, то самая правая точка заштрихованного множества, лежащая на соответствующей горизонтали, даст, очевидно, решение задачи (4.90)—(4.92), т.е. портфель максимальной эффективности и заданного риска.

Итак, решение задачи (4.90)—(4.92) можно получить следующим образом:

1) вычислить константы α, β, γ, δ по формулам (4.62);

2) для заданного значения дисперсии портфеля V решить квадратное уравнение (4.71)

$$\alpha\mu^2 - 2\beta\mu + \gamma = V\delta; \tag{4.93}$$

3) найти наибольший корень μ_0 этого уравнения.

$$\mu_0 = \frac{\beta}{\alpha} + \sqrt{\left(V - \frac{1}{\alpha}\right)\frac{\delta}{\alpha}}. \tag{4.94}$$

Его абсцисса отстоит от β/α вправо на величину $\sqrt{\left(V - \frac{1}{\alpha}\right)\frac{\delta}{\alpha}}$, при этом $\left(V - \frac{1}{\alpha}\right)$ есть превышение задаваемой дисперсии портфеля над минимальным ее значением. Понятно, что решение задачи (4.90)—(4.92) существует только при $V \geq 1/\alpha$;

4) найти вектор X по формуле $X = V^{-1}(\lambda I + \nu\vec{\mu})$.

Теперь видно, что рассмотренная задача (4.90)—(4.92) эквивалентна формально более общей задаче: найти максимум целевой функции

$$\vec{\mu}^T X \to \max \tag{4.95}$$

при условиях

$$\frac{1}{2} X^T V X = \frac{1}{2}\sigma^2 \leq \frac{1}{2} V; \tag{4.96}$$

$$I^T X = 1. \tag{4.97}$$

Пример 4.20. Дан портфель из трех бумаг с доходностями $\mu_1 = 10\%$, $\mu_2 = 20\%$, $\mu_3 = 30\%$ и ковариационной матрицей $V = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 9 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. Найти портфель максимальной доходности из всех портфелей риска не более заданного: а) 50%, б) 70%, в) 75%.

Данный пример является модификацией примера 4.19 на случай портфеля максимальной доходности из всех портфелей риска не более заданного. Поэтому из примера 4.19 возьмем вычисленные там значения констант.

Решение данной задачи существует только при $V > 1/\alpha$, где V — дисперсия портфеля. Это связано с тем, что только при таком условии горизонталь $\sigma = \text{const}$ пересекает допустимое множество портфелей (точка минимума на минимальной границе имеет координаты $(\beta/\alpha, 1/\alpha)$.

Мы уже вычисляли параметры α, β, а также γ, δ в предыдущих задачах.

$$\alpha = I^T V^{-1} I = \frac{1}{14}(1; 1; 1) \cdot \begin{pmatrix} 16 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \cdot (19; 5; 6) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{15}{7};$$

$$\beta = I^T V^{-1} \vec{\mu} = \frac{1}{14}(1; 1; 1) \cdot \begin{pmatrix} 16 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}(19; 5; 6) \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} = \frac{235}{7};$$

$$\gamma = \vec{\mu}^T V^{-1} \vec{\mu} = \frac{1}{14}(10; 20; 30) \cdot \begin{pmatrix} 16 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}(230; 90; 150) \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} = \frac{4300}{7}.$$

$$\delta = \alpha\gamma - \beta^2 = \frac{4300}{7}\cdot\frac{15}{7} - \left(\frac{235}{7}\right)^2 = \frac{9275}{49} = 189{,}3\ .$$

Решение данной задачи существует только при $V > 1/\alpha = 0{,}4(6)$, т.е. для риска портфеля $\sigma > \sqrt{1/\alpha} = \sqrt{0{,}4(6)} = 0{,}683$.

Поэтому в случае п. «а» задача не имеет решения (50% < 68,3%).

Рассмотрим два остальных случая (п. «б» и п. «в»):

б) мы должны для заданного значения дисперсии портфеля $V = 0{,}49$ решить квадратное уравнение (4.71)

$$\alpha\mu^2 - 2\beta\mu + \gamma = V\delta$$

и найти наибольший корень μ_0 этого уравнения.

$$\mu_0 = \frac{\beta}{\alpha} + \sqrt{\left(V - \frac{1}{\alpha}\right)\frac{\delta}{\alpha}}\ .$$

$$\mu_0 = \frac{235}{7} : \frac{15}{7} + \sqrt{\left(0{,}49 - \frac{7}{15}\right)\cdot 189{,}3 \cdot \frac{7}{15}} = 17{,}102.$$

Зная μ_0, теперь вычислим необходимые нам для нахождения портфеля константы λ и ν:

$$\lambda = (\gamma - \beta\mu)/\delta \ \text{ и } \ \nu = (\alpha\mu - \beta)/\delta;$$

$$\lambda = (\gamma - \beta\mu)/\delta = \left(\frac{4300}{7} - \frac{235}{7}\cdot 17{,}102\right)\Big/ 189{,}3 = 0{,}212;$$

$$\nu = (\alpha\mu - \beta)/\delta = \left(\frac{15}{7}\cdot 17{,}102 - \frac{235}{7}\right)\Big/ 189{,}3 = 3.076/189{,}3 = 0{,}0162.$$

Теперь можем найти портфель максимальной доходности из всех портфелей риска не более 70%:

$$X = V^{-1}(\lambda I + \nu\bar{\mu}) = \frac{1}{14}\cdot\begin{pmatrix} 16 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0{,}212 + 0{,}0162\cdot 10 \\ 0{,}212 + 0{,}0162\cdot 20 \\ 0{,}212 + 0{,}0162\cdot 30 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{14}\cdot\begin{pmatrix} 16 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0{,}374 \\ 0{,}536 \\ 0{,}698 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}554 \\ 0{,}180 \\ 0{,}264 \end{pmatrix}.$$

Итак, портфель максимальной доходности из всех портфелей риска не более 70% равен $X = (0{,}554;\ 0{,}180;\ 0{,}264)$, а сама максимальная доходность равна $\mu_0 = 17{,}102\%$.

Предоставляем читателю самому найти портфель максимальной доходности из всех портфелей риска не более 75% (п. «в» данного примера). Все вычисления проводятся аналогично проведенным нами в п. б).

Вопросы и задачи

4.148. Опишите портфель максимальной эффективности риска не более заданного.

4.149. Дан портфель из трех бумаг с доходностями $\mu_1 = 18\%$, $\mu_2 = 23\%$, $\mu_3 = 35\%$ и ковариационной матрицей $V = \begin{pmatrix} 25 & 5 & 12 \\ 5 & 36 & -10 \\ 12 & -10 & 81 \end{pmatrix}$. Найдите портфель максимальной доходности из всех портфелей риска не более заданного: а) 7%, б) 15%, в) 30%.

4.150. Дан портфель из трех бумаг с доходностями $\mu_1 = 8\%$, $\mu_2 = 28\%$, $\mu_3 = 45\%$ и ковариационной матрицей $V = \begin{pmatrix} 16 & 2 & 10 \\ 2 & 9 & -8 \\ 10 & -8 & 25 \end{pmatrix}$. Найдите портфель максимальной доходности с дисперсией: а) не более 2, б) не более 8, в) не более 20 и его доходность.

4.151. Дан портфель из трех бумаг с доходностями $\mu_1 = 6\%$, $\mu_2 = 24\%$, $\mu_3 = 34\%$ и ковариационной матрицей $V = \begin{pmatrix} 64 & 4 & -14 \\ 4 & 49 & -9 \\ -14 & -9 & 36 \end{pmatrix}$. Найдите портфель максимальной доходности из всех портфелей риска не более заданного: а) 6%, б) 20%, в) 25%.

4.152. Дан портфель из трех бумаг с доходностями $\mu_1 = 6\%$, $\mu_2 = 24\%$, $\mu_3 = 34\%$ и ковариационной матрицей $V = \begin{pmatrix} 64 & 4 & -14 \\ 4 & 49 & -9 \\ -14 & -9 & 36 \end{pmatrix}$. Найдите портфель максимальной доходности риска не более заданного: а) 6%, б) 20%, в) 25%.

4.153. Дан портфель из трех бумаг с доходностями $\mu_1 = 25\%$, $\mu_2 = 56\%$, $\mu_3 = 68\%$ и ковариационной матрицей $V = \begin{pmatrix} 25 & 4 & 12 \\ 4 & 36 & -10 \\ 12 & -10 & 49 \end{pmatrix}$.

Найдите портфель максимальной доходности риска: а) не более 2, б) не более 6, в) не более 10 и его доходность.

4.154. Дан портфель из трех бумаг с доходностями $\mu_1 = 16\%$, $\mu_2 = 33\%$, $\mu_3 = 55\%$ и ковариационной матрицей $V = \begin{pmatrix} 54 & -8 & -12 \\ -8 & 35 & -11 \\ -12 & -11 & 46 \end{pmatrix}$. Найдите портфель максимальной доходности риска: а) не более 6, б) не более 8, в) не более 45 и его доходность.

4.4. Произвольный портфель

Вопросы и задачи

4.155. Опишите портфель минимального риска при заданной его эффективности.

4.156. Что такое минимальная граница и каковы ее свойства.

4.157. Портфель состоит из трех ценных бумаг с ожидаемыми доходностями $\mu_1 = 0{,}35\%$, $\mu_2 = 0{,}26\%$, $\mu_3 = 0{,}41\%$. Ковариационная матрица равна $V = \begin{pmatrix} 11 & 5 & -2 \\ 5 & 12 & 6 \\ -2 & 6 & 13 \end{pmatrix}$. Найдите уравнение минимальной границы, портфель минимального риска и его характеристики.

4.158. Опишите портфель минимального риска с эффективностью не меньшей заданной.

4.159. Опишите портфель минимального риска.

4.160. Опишите портфель максимальной эффективности риска не более заданного.

4.161. Дан портфель из трех бумаг с доходностями $\mu_1 = 5\%$, $\mu_2 = 10\%$, $\mu_3 = 15\%$ и ковариационной матрицей $V = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 16 & -3 \\ 0 & -3 & 25 \end{pmatrix}$. Найдите портфель минимального риска с доходностью $\mu = 12\%$ и его риск. Напишите уравнение минимальной границы.

4.162. Дан портфель из трех независимых бумаг с дисперсиями $D_1 = 3$, $D_2 = 10$, $\mu_3 = 5$. Найдите портфель минимального риска.

4.163. Опишите портфель минимального риска из всех портфелей заданной эффективности.

4.164. Опишите портфель максимальной эффективности из всех портфелей риска не более заданного.

4.5. Портфели Тобина

Добавление в портфель безрисковой бумаги существенно меняет стратегию формирования оптимального портфеля. Этот случай был впервые исследован Дж. Тобиным. Обозначим эффективность безрисковой бумаги μ_f и будем считать ее положительной.

4.5.1. Портфель Тобина минимального риска из всех портфелей заданной эффективности

Итак, предположим, что вместе с n-рисковыми активами портфель инвестора включает безрисковую бумагу с детерминированной доходностью $\mu_f = R_f$ и долей в портфеле, составляющей x_f. При этом задача (4.58)—(4.60) будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 = \frac{1}{2}X^T VX \to \min \tag{4.98}$$

при условиях

$$\mu_f x_f + \vec{\mu}^T X = \mu, \tag{4.99}$$

$$x_f + I^T X = 1. \tag{4.100}$$

Выражение для квадрата риска не изменилось из-за безрисковости добавленного актива. В этом случае вид минимальной границы изменится:

$$\lambda = \frac{\mu - \mu_f}{d^2},$$

$$X = \frac{\mu - \mu_f}{d^2} V^{-1}\left(\vec{\mu} - \mu_f I\right) \text{ —} \tag{4.101}$$

искомый вектор рисковых долей, безрисковая доля находится следующим образом из соотношения (4.100):

$$x_f = 1 - I^T X = 1 - \frac{\mu - \mu_f}{d^2} I^T V^{-1}\left(\vec{\mu} - \mu_f I\right). \tag{4.102}$$

уравнение минимальной границы

$$\sigma^2 = \left(\frac{\mu - \mu_f}{d}\right)^2. \tag{4.103}$$

Обычно предполагают, что ожидаемая доходность портфеля должна быть не меньше доходности безрискового актива, т.е. $\mu \geq \mu_f$. В противном случае следовало бы сформировать портфель только из него одного. Поэтому уравнение (4.103) превращается в линейное

$$\sigma = \frac{\mu - \mu_f}{d}. \tag{4.104}$$

Прямая σ (4.104) является касательной к графику минимальной границы (4.71) (рис. 4.6).

Эффективность касательного портфеля μ_T равна

$$\mu_T = \frac{\gamma - \beta\mu_f}{\beta - \alpha\mu_f}, \tag{4.105}$$

а риск касательного портфеля σ_T равен

$$\sigma_T = \frac{d}{(\beta - \alpha\mu_f)}.$$

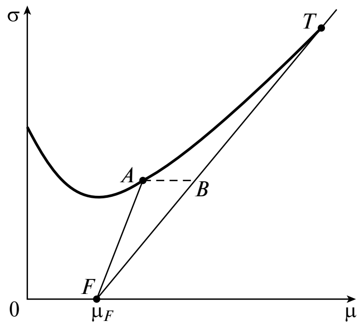

Рис. 4.6. Минимальная граница портфеля Тобина, касательный портфель

Для координат касательного портфеля имеем

$$\mu_T = \frac{\gamma - \beta\mu_f}{\beta - \alpha\mu_f}, \ \sigma_T = \frac{d}{\beta - \alpha\mu_f}. \tag{4.106}$$

При этом сам касательный портфель T находится из (4.101) подстановкой $\mu = \mu_T$:

$$T = \frac{\mu_T - \mu_f}{d^2} V^{-1}\left(\vec{\mu} - \mu_f I\right). \tag{4.107}$$

Отметим, что точки минимальной границы представляются в виде линейной комбинации

$$M = \lambda F + (1 - \lambda) T,$$

причем при движении точки от F до T параметр λ меняется от 1 до 0.

Пример 4.21. Портфель состоит из трех бумаг: безрисковой с эффективностью (ожидаемой доходностью) 5% и двух рисковых с эффективностью соответственно 10 и 15% и ковариационной матрицей $\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 5 & 36 \end{pmatrix}$. Найти портфели Тобина ожидаемой доходности 10, 11 и 12% и минимального риска и их риски.

Из (4.125) и (4.126) имеем для параметра d и искомого портфеля X следующие выражения:

$$d = \sqrt{\left(\vec{\mu} - \mu_f I\right)^T V^{-1}\left(\vec{\mu} - \mu_f I\right)}, \quad X = \frac{\mu - \mu_f}{d^2} V^{-1}\left(\vec{\mu} - \mu_f I\right).$$

1) $\mu = 10\%$.

Здесь $\vec{\mu} = (10; 15)^T$, $\mu = 10$, $\mu_f = 5$.

Вычислим параметр d:

$$d^2 = \left(\vec{\mu} - \mu_f I\right)^T V^{-1}\left(\vec{\mu} - \mu_f I\right) = \frac{1}{299}(5;10)\begin{pmatrix} 36 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{299}(130; 65)\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1300}{299} = 4{,}35.$$

Теперь можно найти портфель X.

$$X = \frac{\mu - \mu_f}{d^2} V^{-1}\left(\vec{\mu} - \mu_f I\right) = \frac{10-5}{4{,}35} \cdot \frac{1}{299}\begin{pmatrix} 36 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} =$$

$$= 0{,}00384 \cdot \begin{pmatrix} 130 \\ 65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}25 \end{pmatrix}.$$

$$x_f = 1 - x_1 - x_2 = 0{,}25.$$

Таким образом, портфель ожидаемой доходности 10% и минимального риска имеет вид

$$X = (0{,}5;\ 0{,}25;\ x_f = 0{,}25).$$

Риск портфеля равен

$$\sigma = \sqrt{X^T V X} = \sqrt{(0{,}5; 0{,}25)\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 5 & 36 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}25 \end{pmatrix}} = \sqrt{(5{,}75; 11{,}5)\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}25 \end{pmatrix}} = 2{,}4 .$$

Отметим, что риск портфеля меньше риска каждой из рисковых бумаг, которые равны $\sqrt{9} = 3$ и $\sqrt{36} = 6$ соответственно для первой и второй бумаг.

2) $\mu = 11\%$.

Здесь $\vec{\mu} = (10; 15)^T$, $\mu = 11$, $\mu_f = 5$.

Параметр d по-прежнему равен 4,35.

Найдем портфель X.

$$X = \frac{\mu - \mu_f}{d^2} V^{-1}\left(\vec{\mu} - \mu_f I\right) = \frac{11-5}{4{,}35} \cdot \frac{1}{299}\begin{pmatrix} 36 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} =$$

$$= 0{,}00461 \cdot \begin{pmatrix} 130 \\ 65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

$$x_f = 1 - x_1 - x_2 = 0{,}1.$$

Таким образом, портфель ожидаемой доходности 11% и минимального риска имеет вид

$$X = (0{,}6;\ 0{,}3;\ x_f = 0{,}1).$$

Риск портфеля равен

$$\sigma = \sqrt{X^T V X} = \sqrt{(0{,}6; 0{,}3)\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 5 & 36 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}} = \sqrt{(6{,}9; 13{,}8)\begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}} = 2{,}88.$$

Отметим, что, несмотря на увеличение требуемой доходности на 1%, риск портфеля остается меньше риска каждой из рисковых бумаг.

3) Здесь $\vec{\mu} = (10; 15)^T$, $\mu = 12$, $\mu_f = 5$.

Вычислим параметр d:

$$d^2 = \left(\vec{\mu} - \mu_f I\right)^T V^{-1}\left(\vec{\mu} - \mu_f I\right) = \frac{1}{299}(5; 10)\begin{pmatrix} 36 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{299}(130; 65)\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1300}{299} = 4{,}35.$$

Теперь можно найти портфель X.

$$X = \frac{\mu - \mu_f}{d^2} V^{-1}\left(\vec{\mu} - \mu_f I\right) = \frac{12-5}{4{,}35} \cdot \frac{1}{299}\begin{pmatrix} 36 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} =$$

$$= 0{,}00538 \cdot \begin{pmatrix} 130 \\ 65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}7 \\ 0{,}35 \end{pmatrix}.$$

Сумма долей уже рисковых активов превышает 1, поэтому сформировать портфель Тобина ожидаемой доходности 12% (и выше) и минимального риска не удается.

Пример 4.22. Для условия предыдущего примера найти касательный портфель, его ожидаемую доходность и риск.

Итак, портфель состоит из трех бумаг: безрисковой с эффективностью (ожидаемой доходностью) 5% и двух рисковых с эффективностью соответственно 10 и 15% и ковариационной матрицей $\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 5 & 36 \end{pmatrix}$.

Искомый касательный портфель T имеет вид (4.107)

$$T = \frac{\mu_T - \mu_f}{d^2} V^{-1}\left(\vec{\mu} - \mu_f I\right),$$

а для его координат из (4.106) имеем

$$\mu_T = \frac{\gamma - \beta\mu_f}{\beta - \alpha\mu_f}, \ \sigma_T = \frac{d}{\beta - \alpha\mu_f}.$$

Для параметра d имеем следующее выражение:

$$d = \sqrt{\left(\vec{\mu} - \mu_f I\right)^T V^{-1}\left(\vec{\mu} - \mu_f I\right)};$$

$$d^2 = \left(\vec{\mu} - \mu_f I\right)^T V^{-1}\left(\vec{\mu} - \mu_f I\right) = \frac{1}{299}(5; 10)\begin{pmatrix} 36 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{299}(130; 65)\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1300}{299} = 4{,}35.$$

Найдем константы

$$\alpha = I^T V^{-1} I, \ \beta = I^T V^{-1}\vec{\mu} = \vec{\mu}^T V^{-1} I, \ \gamma = \vec{\mu}^T V^{-1}\vec{\mu}.$$

Здесь $I = (1, \ 1)^T$, $\mu = (10; \ 15)^T$.

$$\alpha = I^T V^{-1} I = (1, 1)\cdot\frac{1}{299}\begin{pmatrix} 36 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{299}(31; 4)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{35}{299} = 0{,}117;$$

$$\beta = I^T V^{-1}\vec{\mu} = (1, 1)\cdot\frac{1}{299}\begin{pmatrix} 36 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix} = \frac{1}{299}(31; 4)\cdot\begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix} = \frac{370}{299} = 1{,}24;$$

$$\gamma = \vec{\mu}^T V^{-1}\vec{\mu} = (10; 15)\cdot\frac{1}{299}\cdot\begin{pmatrix} 36 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix} = \frac{1}{299}(285; 85)\cdot\begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix} = \frac{4125}{299} = 13{,}80.$$

Найдем теперь координаты касательного портфеля T:

$$\mu_T = \frac{\gamma - \beta\mu_f}{\beta - \alpha\mu_f} = \frac{13{,}8 - 1{,}24\cdot 5}{1{,}24 - 0{,}117\cdot 5} = \frac{7{,}6}{0{,}655} = 11{,}6;$$

$$\sigma_T = \frac{d}{\beta - \alpha\mu_f} = \frac{\sqrt{4{,}35}}{1{,}24 - 0{,}117 \cdot 5} = \frac{2{,}086}{0{,}655} = 3{,}18\ .$$

И, наконец, найдем касательный портфель T:

$$T = \frac{\mu_T - \mu_f}{d^2} V^{-1}\left(\vec{\mu} - \mu_f I\right) =$$

$$= \frac{11{,}6 - 5}{4{,}35} \cdot \frac{1}{299}\begin{pmatrix} 36 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = 0{,}00507 \cdot \begin{pmatrix} 130 \\ 65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6597 \\ 0{,}3298 \end{pmatrix}.$$

Итак, касательный портфель равен $T = (0{,}66;\ 0{,}33)$, т.е. он включает 66% первой бумаги и 33% второй бумаги и практически не включает безрисковую бумагу.

Отметим, что риск касательного портфеля, $\sigma_T = 3{,}18$, чуть выше риска первой бумаги ($\sigma_1 = 3$) и почти вдвое меньше риска второй бумаги ($\sigma_2 = 6$).

Доходность касательного портфеля $\mu_T = 11{,}6\%$ является максимальной доходностью, при которой можно сформировать портфель минимального риска.

Учитывая результаты предыдущего примера, можно сделать очевидный вывод, что с повышением доходности от 10 до 12% риск портфеля растет от 2,4% (при $\mu = 10\%$) до 2,88% (при $\mu = 11\%$) и далее до 3,18% (при $\mu = 11{,}6\%$ у касательного портфеля). А при $\mu = 11{,}6\%$ сформировать портфель минимального риска уже не удается.

Пример 4.23. Докажите, что прямая $\sigma = \dfrac{\mu - \mu_f}{d}$ является касательной к графику минимальной границы $\sigma^2 = \dfrac{\alpha\mu^2 - 2\beta\mu + \gamma}{\delta}$.

Для доказательства найдем точки пересечения гиперболы и прямой, решая совместно их уравнения, и убедимся, что такая точка одна. Приравнивая правые части уравнений прямой и гиперболы, получим

$$\left(\frac{\mu - \mu_f}{d}\right)^2 = \frac{\alpha\mu^2 - 2\beta\mu + \gamma}{\delta}. \qquad (4.108)$$

Далее получим квадратное относительно μ уравнение и найдем его корни

$$\mu^2\left(\frac{\delta}{d^2} - \alpha\right) + 2\mu\left(\beta - \frac{\delta}{d^2}\mu_f\right) + \left(\frac{\delta}{d^2}\mu_f^2 - \gamma\right) = 0. \qquad (4.109)$$

Дискриминант данного уравнения равен нулю:

$$4\left(\beta-\frac{\delta}{d^2}\mu_f\right)^2-4\left(\frac{\delta}{d^2}-\alpha\right)\left(\frac{\delta}{d^2}\mu_f^2-\gamma\right)=0. \qquad (4.110)$$

Это доказывает, что прямая $\sigma=\dfrac{\mu-\mu_f}{d}$ является касательной к графику минимальной границы $\sigma^2=\dfrac{\alpha\mu^2-2\beta\mu+\gamma}{\delta}$.

Пример 4.24. Найти координаты касательного портфеля (его доходность и риск).

Найдем координаты точки касания (координаты касательного портфеля):

$$\mu=\frac{-2\left(\beta-\dfrac{\delta}{d^2}\mu_f\right)}{2\left(\dfrac{\delta}{d^2}-\alpha\right)}=-\frac{\beta d^2-\delta\mu_f}{\delta-\alpha d^2}=$$

$$=-\frac{\alpha\left(\gamma-\beta\mu_f\right)\left(\mu_f-\dfrac{\beta}{\alpha}\right)}{\alpha^2\left(\mu_f-\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2}=-\frac{\left(\gamma-\beta\mu_f\right)}{\alpha\left(\mu_f-\dfrac{\beta}{\alpha}\right)}.$$

Итак, эффективность касательного портфеля μ_T равна

$$\mu_T=\frac{\gamma-\beta\mu_f}{\beta-\alpha\mu_f}. \qquad (4.111)$$

Подставляя найденное значение эффективности μ_T в уравнение касательной, найдем риск касательного портфеля σ_T:

$$\sigma=\frac{\mu-\mu_f}{d}=\frac{\dfrac{\gamma-\beta\mu_f}{\beta-\alpha\mu_f}-\mu_f}{d}=$$

$$=\frac{\gamma-2\beta\mu_f+\alpha\mu_f^2}{d(\beta-\alpha\mu_f)}=\frac{d^2}{d(\beta-\alpha\mu_f)}=\frac{d}{(\beta-\alpha\mu_f)}.$$

Итак, касательный портфель имеет следующие координаты:

$$\left(\frac{\gamma-\beta\mu_f}{\beta-\alpha\mu_f},\frac{d}{\beta-\alpha\mu_f}\right).$$

Вопросы и задачи

4.165. Опишите портфели Тобина.

4.166. Найдите касательный портфель, его ожидаемую доходность и риск, если портфель состоит из трех бумаг: безрисковой с эффективностью (ожидаемой доходностью) 7% и двух рисковых с эффективностью соответственно 12 и 20% и ковариационной матрицей $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 25 \end{pmatrix}$.

4.167. Портфель состоит из трех бумаг: безрисковой с ожидаемой доходностью 4% и двух рисковых с эффективностью соответственно 8 и 12% и ковариационной матрицей $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$. Найдите портфели Тобина ожидаемой доходности 7, 8, 10 и 11% и минимального риска и их риски.

4.168. Уравнение минимальной границы портфеля Марковица имеет вид $\sigma = \sqrt{\mu^2 - 15\mu + 200}$. Безрисковая доходность равна 5%. Найдите ожидаемую доходность и риск касательного портфеля и уравнение минимальной границы портфеля Тобина.

4.169. Сформируйте портфель Тобина ожидаемой доходности 8% и минимального риска из трех видов ценных бумаг: безрисковых с ожидаемой доходностью 4% и некоррелированных рисковых с ожидаемыми доходностями 9 и 12% и рисками 5 и 6%.

4.170. Дано уравнение минимальной границы $\sigma = \sqrt{3\mu^2 - 20\mu + 340}$. Безрисковая доходность равна 6%. Найдите ожидаемую доходность и риск касательного портфеля.

4.171. Сформируйте портфель Тобина максимальной ожидаемой доходности и заданного риска 6% из трех видов ценных бумаг: безрисковых с ожидаемой доходностью 7% и некоррелированных рисковых с ожидаемыми доходностями 10 и 20% и рисками 8 и 11%.

4.172. Сформируйте портфель Тобина ожидаемой доходности 14% и минимального риска из трех видов ценных бумаг: безрисковых с ожидаемой доходностью 4% и некоррелированных рисковых с ожидаемыми доходностями 15 и 20% и рисками 5 и 7%.

4.173. Имеются три ценные бумаги с доходностями 16, 18 и 20%, ковариационная матрица доходностей которых имеет вид

$$V = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 12 & -5 \\ 0 & -5 & 16 \end{pmatrix}.$$

Найдите уравнение минимальной границы и постройте ее график при условии, что безрисковая ставка равна $\mu_F = 10\%$. Найти координаты касательного портфеля.

4.174. Докажите, что прямая $\frac{\mu-\mu_f}{d}=\sigma$ является касательной к графику минимальной границы $\sigma^2=\frac{\alpha\mu^2-2\beta\mu+\gamma}{\delta}$.

4.175. Найдите координаты касательного портфеля (его доходность и риск).

4.5.2. Портфель максимальной эффективности из всех портфелей риска не более заданного

Наряду с задачей Тобина (4.98)—(4.100) рассмотрим оптимизационную задачу

$$\mu_f x_f + \vec{\mu}^T X \to \max \tag{4.112}$$

при условиях

$$\frac{1}{2}\sigma^2 = \frac{1}{2}X^T VX < \frac{1}{2}V, \tag{4.113}$$

$$x_f + I^T X = 1. \tag{4.114}$$

Для решения задачи рассмотрим плоскость (μ, σ) (в переменных эффективность — риск) (рис. 4.7). На этой плоскости изобразим ломаную

$$\sigma = \left|\mu-\mu_f\right|/d,$$

где

$$d=\sqrt{\left(\vec{\mu}-\mu_f I\right)^T V^{-1}\left(\vec{\mu}-\mu_f I\right)}=\sqrt{\alpha\mu_f^2-2\beta\mu_f+\gamma}.$$

На рисунке 4.7 множество портфелей для рассматриваемой ситуации заштриховано.

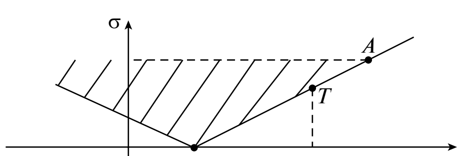

Рис. 4.7. Нахождение портфеля максимальной эффективности из всех портфелей риска не более заданного

Итак, если фиксировать эффективность портфеля μ, то низшая точка заштрихованного множества, лежащая на соответствующей вертикали, есть портфель Тобина — решение задачи (4.98)—(4.100). Если же фиксировать риск портфеля σ, то самая правая точка заштрихованного множества, лежащая не выше соответствующей горизонтали, т.е. в точности на ней, даст, очевидно, решение задачи (4.112)—(4.114), т.е. портфель максимальной эффективности и ограниченного риска. Из (4.104) находим

$$\mu = \mu_f + d \cdot \sigma, \tag{4.115}$$

После этого для найденного μ по формуле (4.101) находим искомый портфель X.

Пример 4.25. Портфель состоит из трех бумаг: безрисковой с эффективностью (ожидаемой доходностью) 5% и двух рисковых с эффективностью соответственно 10 и 15% и ковариационной матрицей $\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 5 & 36 \end{pmatrix}$. Найти портфель максимальной эффективности из всех портфелей риска: а) не более 2%, б) не более 1,27% и его доходность.

Из уравнения касательной

$$\sigma = \frac{\mu - \mu_f}{d}$$

получаем

$$\mu = \mu_f + d \cdot \sigma.$$

Подставляя сюда доходность безрисковой бумаги 5% и риск портфеля 2%, а также вычисленное в предыдущих примерах

$$d = \sqrt{\left(\vec{\mu} - \mu_f I\right)^T V^{-1} \left(\vec{\mu} - \mu_f I\right)} = \sqrt{4{,}35} = 2{,}086,$$

получим соответствующее значение максимальной доходности

$$\mu_1 = \mu_f + d \cdot \sigma_1 = 5 + 2{,}086 \cdot 2 = 9{,}172 \,.$$

Для найденного μ по формуле

$$X = \frac{\mu - \mu_f}{d^2} V^{-1} \left(\vec{\mu} - \mu_f I\right)$$

находим искомый портфель X.

Матрица V^{-1} была вычислена нами в предыдущих примерах и равна

$$V^{-1} = \frac{1}{299} \begin{pmatrix} 36 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Для X имеем:

$$X = \frac{\mu - \mu_f}{d^2} V^{-1}\left(\vec{\mu} - \mu_f I\right) = \frac{9{,}172 - 5}{4{,}35} \cdot \frac{1}{299} \begin{pmatrix} 36 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} =$$

$$= 0{,}00321 \cdot \begin{pmatrix} 130 \\ 65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}417 \\ 0{,}208 \end{pmatrix}.$$

Тогда доля безрисковой бумаги равна 1 – 0,417 – 0,208 = 0,375, и портфель максимальной эффективности из всех портфелей риска не более 2% имеет вид

$$X = (0{,}417;\ 0{,}208;\ x_f = 0{,}375).$$

Доходность портфеля равна 9,172%.

Для риска не более 1,27% проводим аналогичные вычисления (их мы предоставляем читателям выполнить самостоятельно).

Вопросы и задачи

4.176. Найдите портфель максимальной эффективности из всех портфелей риска не более заданного.

4.177. Портфель состоит из трех бумаг: безрисковой с эффективностью (ожидаемой доходностью) 5% и двух рисковых с эффективностью соответственно 10 и 15% и ковариационной матрицей $\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 5 & 36 \end{pmatrix}$. Найдите портфель максимальной эффективности из всех портфелей риска а) не более 1%, б) не более 0,5% и его доходность.

4.178. Портфель состоит из трех бумаг: безрисковой с эффективностью (ожидаемой доходностью) 8% и двух рисковых с эффективностью соответственно 12 и 18% и ковариационной матрицей $\begin{pmatrix} 25 & -6 \\ -6 & 49 \end{pmatrix}$. Найдите портфель максимальной эффективности из всех портфелей риска: а) не более 2,5%, б) не более 1,5% и его доходность.

4.6. Оптимальные неотрицательные портфели

Рассмотрим неотрицательные портфели $X \geq 0$. В этом случае к условиям оптимальной задачи (4.58)—(4.60) следует добавить условие (4.61). Неотрицательность компонент портфеля означает, что их можно теперь трактовать как ценовые (стоимостные) доли инвестиций в ту или иную бумагу портфеля. При этом, однако, меняется и алгоритм решения задачи, и само решение. Теперь условия (4.58)—(4.61) определяют выпуклый многогранник, т.е. ограниченное замкнутое множество. Решение оптимальных задач при таких условиях (наличие ограничений не только в виде равенств, но и в форме неравенств) имеет свою специфику. Эти задачи являются задачами нахождения экстремумов выпуклых (вогнутых) функций, заданных на выпуклых множествах. Решение оптимальных задач такого типа требует модификации метода, основанного на поиске экстремумов функции Лагранжа, что составляет алгоритм нахождения условных экстремумов (при наличии ограничений только в виде равенств). Такая модификация может быть произведена с помощью применения теоремы Куна — Таккера и связанных с ней теорем. Смысл этих теорем сводится к тому, что точка локального экстремума (и даже стационарная точка) выпуклой (вогнутой) функции, заданной на выпуклом множестве, является на этом множестве точкой глобального экстремума.

Доходность неотрицательного портфеля μ лежит на отрезке $[\mu_{\min}, \mu_{\max}]$, где $\mu_{\min}$ и $\mu_{\max}$ — минимальное и максимальное значения доходностей отдельных бумаг, входящих в портфель:

$$\mu_{\min} = \min(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n), \tag{4.116}$$

$$\mu_{\max} = \max(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n), \tag{4.117}$$

т.е. что доходность μ удовлетворяет неравенствам

$$\mu_{\min} \le \mu \le \mu_{\max}. \tag{4.118}$$

Задача Марковица (4.58)—(4.61) заключается в том, чтобы найти минимум целевой функции

$$\frac{1}{2}\sigma^2 = \frac{1}{2}X^T VX \to \min \tag{4.119}$$

при условиях

$$\vec{\mu}^T X = \mu, \;\; I^T X = 1, \;\; X \ge 0. \tag{4.120}$$

Это и есть классическая постановка задачи Марковица. Так как допустимое множество компактно, то искомый портфель существует. Предположим, что матрица V положительно определена, тогда, учитывая строгую выпуклость целевой функции, линейность ограничения и дифференцируемость рассматриваемых функций, заключаем, что условия Куна — Таккера — необходимые и достаточные условия условного минимума:

$$X^T V - \lambda I^T - \nu \vec{\mu}^T \geq 0\,,\ \left(X^T V - \lambda I^T - \vec{\mu}^T\right) X = 0,$$

$$I^T X = 1\,,\ \vec{\mu}^T X = \mu\,,\ X \geq 0\,. \qquad (4.121)$$

Решение этой системы уравнений и неравенств в общем случае крайне сложно. При небольшом числе n-ценных бумаг можно решить систему (4.121) перебором случаев.

Можно доказать, что задача (4.119)—(4.120) имеет решение для любого $\mu \in [\mu_{\min}, \mu_{\max}]$, а минимальная граница есть выпуклая кривая, состоящая из конечного числа частей гипербол.

4.6.1. Неотрицательный портфель из двух бумаг

Рассмотрим вначале неотрицательный портфель из двух независимых бумаг.

$$\rho_{12} = \rho = 0. \qquad (4.122)$$

Для квадрата риска (дисперсии) портфеля имеем

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2. \qquad (4.123)$$

Анализ дает три портфеля:

1) $X = \left(\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}; \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)$, 2) $X = (1;\, 0)$; 3) $X = (0;\, 1)$.

Если изобразить полученные портфели на плоскости (x_1, x_2), легко увидеть (рис. 4.9), что точка (1) $\left(\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)$ лежит на отрезке, соединяющем точки (2) и (3).

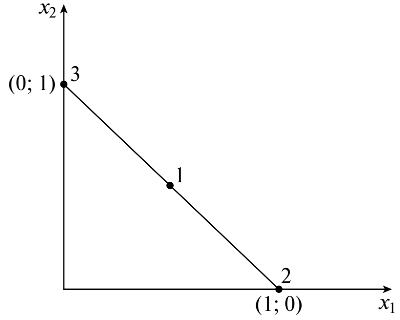

Рис. 4.9. Неотрицательный портфель из двух ценных бумаг на плоскости (x_1, x_2)

Таким образом, множество эффективных портфелей представляет собой отрезок, соединяющий точки (0; 1) и (1; 0).

Вопросы и задачи

4.179. Сформулируйте и докажите теорему Куна — Таккера.

4.180. Как изменяется алгоритм нахождения оптимальных портфелей при рассмотрении неотрицательных портфелей?

4.181. Опишите свойства доходности неотрицательного портфеля.

4.182. Найдите портфель минимального риска, заданной эффективности с неотрицательными компонентами.

4.183. Изобразите неотрицательный портфель из двух бумаг на плоскости (x_1, x_2).

4.184. Докажите, что доходность неотрицательного портфеля μ лежит на отрезке $[\mu_{\min}, \mu_{\max}]$, где $\mu_{\min}$ и $\mu_{\max}$ — минимальное и максимальное значение доходностей отдельных бумаг, входящих в портфель

$$\mu_{\min} = \min(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n),$$

$$\mu_{\max} = \max(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n),$$

т.е. что доходность μ удовлетворяет неравенствам $\mu_{\min} \le \mu \le \mu_{\max}$.

4.6.2. Неотрицательные портфели из трех независимых бумаг

Пример 4.26. Пусть риски независимых ценных бумаг трех видов равны

$$\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 2, \sigma_3 = 3,$$

а их ожидаемые доходности

$$\mu_1 = 10\%, \mu_2 = 20\%, \mu_3 = 30\%.$$

Для нахождения эффективной границы необходимо найти точку глобального минимума выпуклой функции σ^2 (x_1, x_2, x_3), используя условия Куна — Таккера.

Поскольку ковариационная матрица доходностей ценных бумаг невырождена, квадрат риска портфеля

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + \sigma_3^2 x_3^2 \qquad (4.124)$$

является строго выпуклой функцией. Эффективный портфель с ожидаемой доходностью μ мы будем искать как точку минимума функции σ^2 на множестве ограничений.

Составим функцию Лагранжа:

$$\begin{aligned} L = x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + \lambda(1 - x_1 - x_2 - x_3) + \\ + \kappa(\mu - 0{,}1x_1 - 0{,}2x_2 - 0{,}3x_3) + \nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \nu_3 x_3. \end{aligned} \tag{4.125}$$

К исходным ограничениям

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}3x_3 = \mu, \\ x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3 \end{gathered} \tag{4.126}$$

добавляются условия Куна — Таккера:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - \lambda - 0{,}1k + v_1 = 0, \\ &\frac{\partial L}{\partial x_2} = 8x_2 - \lambda - 0{,}2k + v_2 = 0, \\ &\frac{\partial L}{\partial x_3} = 18x_3 - \lambda - 0{,}3k + v_3 = 0, \\ &\nu_i x_i = 0,\ \ i = 1, 2, 3, \\ &\nu_i \geq 0,\ \ i = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{4.127}$$

Данная система условий представляется достаточно сложной. Однако рассмотрение специальных случаев облегчает задачу.

1) $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0$.

Из условий Куна — Таккера находим

$$X = \left(\frac{1}{2}(\lambda + 0{,}1\kappa); \frac{1}{8}\left(\lambda + 0{,}2\kappa\right); \frac{1}{18}(\lambda + 0{,}3\kappa) \right). \tag{4.128}$$

Затем из исходных ограничений получаем систему

$$\begin{cases} \dfrac{49}{72}\lambda + \dfrac{11}{120}\kappa = 1, \\ \dfrac{11}{120}\lambda + \dfrac{3}{200}\kappa = \mu, \end{cases} \tag{4.129}$$

находим

$$\lambda = \frac{108 - 660\mu}{13}; \quad \kappa = \frac{620 + 12\,100\mu}{39}. \tag{4.130}$$

Отсюда

$$X^*(\mu)=\left(\frac{9}{2}-\frac{55\mu}{2}+\frac{31}{39}+\frac{605\mu}{39};\ \frac{9}{8}-\frac{55\mu}{8}+\frac{62}{39}+\frac{1210\mu}{39};\right.$$
$$\left.1-\frac{55\mu}{72}+\frac{31}{117}+\frac{605\mu}{117}\right)=\left(\frac{413}{78}-\frac{935\mu}{78};\frac{847}{312}+\frac{7535\mu}{312};\ \frac{148}{117}+\frac{37125\mu}{8424}\right). \tag{4.131}$$

Так как $X \geq 0$, то $\mu \leq 0{,}44$. На самом деле, как следует из доказанного нами свойства доходности портфеля, $\mu \leq \mu_{\max} \leq 0{,}3$.

2) $\nu_1=\nu_2=x_3=0$.

Из условий Куна — Таккера находим

$$X=\left(\frac{1}{2}(\lambda+0{,}1\kappa);\frac{1}{8}(\lambda+0{,}2\kappa);\,0\right),\ \nu_3=\lambda+0{,}3\kappa. \tag{4.132}$$

Затем из исходных ограничений получаем систему

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\lambda+0{,}1\kappa\right)+\dfrac{1}{8}\left(\lambda+0{,}2\kappa\right)=1, \\ \dfrac{1}{20}\left(\lambda+0{,}1\kappa\right)+\dfrac{1}{40}\left(\lambda+0{,}2\kappa\right)=\mu, \end{cases} \tag{4.133}$$

находим

$$\lambda=-120\mu+16;\quad \kappa=1000\mu-120. \tag{4.134}$$

Отсюда

$$X^*(\mu)=\left(-10\mu+2;80\mu-8;\ 0\right),\ \nu_3=180\mu-20. \tag{4.135}$$

Так как $X \geq 0$, $\nu_3 \geq 0$, то $\mu \in [10\%;\,20\%]$.

Рассматривая далее все остальные специальные случаи:

3) $\nu_1=x_2=\nu_3=0$,

4) $x_1=\nu_2=\nu_3=0$,

5) $x_1=x_2=\nu_3=0$, портфель $X=(0;\,0;\,1)$,

6) $x_1=\nu_2=x_3=0$, портфель $X=(0;\,1;\,0)$,

7) $\nu_1=x_2=x_3=0$, портфель $X=(1;\,0;\,0)$,

найдем остальные ***угловые портфели***.

Далее, поскольку ковариационная матрица доходностей ценных бумаг невырождена, то из условий Куна — Таккера следует, что эффективное множество портфелей является конечнозвенной ломаной в R^n, вершинами которой являются угловые портфели. Так что всякий эффективный портфель есть линейная комбинация смежных угловых портфелей.

Пример 4.27. Приведем еще один более простой пример [1]. Ковариационная матрица доходностей ценных бумаг трех видов задается формулой

$$V = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \tag{4.136}$$

а их ожидаемые доходности — равенствами

$$\mu_1 = 3\%, \mu_2 = 6\%, \mu_3 = 9\% . \tag{4.137}$$

Найти эффективную границу.

Мы найдем точку глобального минимума выпуклой функции $\sigma^2(x)$, используя условия Куна — Таккера.

Поскольку дисперсии доходностей ценных бумаг всех трех видов одинаковы, наименее рискованный портфель — вектор

$$\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right). \tag{4.138}$$

Ожидаемая доходность такого портфеля будет

$$\mu_0 = \frac{3\% + 6\% + 9\%}{3} = 6\%. \tag{4.139}$$

Поскольку ковариационная матрица доходностей ценных бумаг невырождена, функция (квадрат риска портфеля)

$$\sigma_X^2 = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + \sigma_3^2 x_3^2 \tag{4.140}$$

является строго выпуклой. Эффективный портфель с ожидаемой доходностью μ будем искать как точку минимума функции σ_X^2 на множестве ограничений. Соответствующая функция Лагранжа имеет вид

$$\begin{gathered} L = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \lambda(1 - x_1 - x_2 - x_3) + \\ + \kappa(\mu - 3x_1 - 6x_2 - 9x_3) + \nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \nu_3 x_3. \end{gathered} \tag{4.141}$$

Эффективные портфели находятся путем исследования следующих условий.

Исходные ограничения:

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 = \mu, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3. \end{gathered} \tag{4.142}$$

Условия Куна — Таккера:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial x_1} = x_1 - \lambda - 3\kappa + v_1 = 0, \\ &\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_2 - \lambda - 6\kappa + v_2 = 0, \\ &\frac{\partial L}{\partial x_3} = x_3 - \lambda - 9\kappa + v_3 = 0, \\ &\nu_i x_i = 0,\ \ i = 1, 2, 3, \\ &\nu_i \geq 0,\ \ i = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{4.143}$$

Рассмотрим специальные случаи.

1) $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0$.

Из условий Куна — Таккера находим

$$X = (\lambda + 3\kappa; \lambda + 6\kappa; \lambda + 9\kappa). \tag{4.144}$$

Затем из исходных ограничений получаем систему

$$\begin{cases} 3\lambda + 18\kappa = 1, \\ 18\lambda + 126\kappa = \mu. \end{cases} \tag{4.145}$$

Находим

$$\lambda = \frac{7 - \mu}{3}; \quad \kappa = \frac{\mu}{18} - \frac{1}{3}. \tag{4.146}$$

Отсюда

$$X^*(\mu) = \left(\frac{4}{3} - \frac{\mu}{6};\ \frac{1}{3};\ \frac{\mu}{6} - \frac{2}{3} \right). \tag{4.147}$$

Так как $X \geq 0$, то $\mu \in [4; 8]$. При этом $X^*(\mu)$ — эффективный портфель, если $\mu \geq \mu_0 = 6$.

2) $x_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0$.

Из условий Куна — Таккера находим

$$X = (0; \lambda + 6\kappa; \lambda + 9\kappa),\ \ \nu_1 = -\lambda - 3\kappa. \tag{4.148}$$

Затем из исходных ограничений получаем систему

$$\begin{cases} 2\lambda + 15\kappa = 1, \\ 15\lambda + 117\kappa = \mu. \end{cases} \tag{4.149}$$

Находим

$$\lambda = \frac{117 - 15\mu}{9}; \quad \kappa = \frac{2\mu - 15}{9}. \tag{4.150}$$

Отсюда

$$X^*(\mu) = \left(0; 3 - \frac{\mu}{3}; \frac{\mu}{3} - 2\right), \ \nu_1 = \mu - 8. \tag{4.151}$$

Так как $X \geq 0$, $\nu_1 \geq 0$, то $\mu \in [8; 9]$.

Рассмотрев остальные специальные случаи, найдем все угловые портфели:

3) $x_1 = x_2 = \nu_3 = 0$, портфель $X = (0; 0; 1)$,

4) $x_1 = \nu_2 = x_3 = 0$, портфель $X = (0; 1; 0)$,

5) $\nu_1 = x_2 = x_3 = 0$, портфель $X = (1; 0; 0)$.

Из полученных нами формул ясно, что эффективные портфели образуют ломаную в R^3 с вершинами

$$\begin{gathered} X^*(6) = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right), \ X^*(8) = \left(0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right), \ X^*(9) = \left(0; 0; 1\right), \\ X^*(3) = \left(1; 0; 0\right), X^*(6) = \left(0; 1; 0\right). \end{gathered} \tag{4.152}$$

Эффективное множество портфелей является ломаной в R^3, проведенной через полученные точки (угловые портфели).

Вопросы и задачи

4.185. Пусть риски независимых ценных бумаг трех видов равны

$$\sigma_1 = 2{,}2, \sigma_2 = 3{,}08, \sigma_3 = 3{,}96,$$

а их ожидаемые доходности

$$\mu_1 = 0{,}14, \mu_2 = 0{,}22, \mu_3 = 0{,}31.$$

Найдите эффективную границу.

4.186. Ковариационная матрица доходностей ценных бумаг трех видов задается формулой $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$, а их ожидаемые доходности равны: $\mu_1 = 0{,}05$, $\mu_2 = 0{,}12$, $\mu_3 = 0{,}19$. Найдите эффективную границу.

4.187. Пусть дисперсии независимых ценных бумаг трех видов равны $D_1 = 4$, $D_2 = 8$, $D_3 = 16$, а их ожидаемые доходности $\mu_1 = 0{,}09$, $\mu_2 = 0{,}17$, $\mu_3 = 0{,}25$. Найдите эффективную границу.

4.188. Ковариационная матрица доходностей ценных бумаг трех видов задается формулой $V = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$, а их ожидаемые доходности равны: $\mu_1 = 0{,}2$, $\mu_2 = 0{,}32$, $\mu_3 = 0{,}38$. Найдите эффективную границу.

4.6.3. Портфель максимального риска с неотрицательными компонентами

Искать портфель максимального риска на первый взгляд представляется абсурдной задачей, поскольку все инвесторы стремятся минимизировать риск портфеля. Однако рассмотрение подобной задачи может иметь смысл. Во-первых, повышение доходности портфеля, как правило, влечет за собой увеличение его риска, поэтому поиск высокоэффективных портфелей тесно связан с рассмотрением портфелей с высокими рисками. Во-вторых, венчурное инвестирование всегда подразумевает высокие риски, так что инвестирование в развитие новых технологий также связано с рассмотрением портфелей с высокими рисками. И, наконец, на практике может сложиться ситуация, когда задача о портфеле минимального риска (в отличие от портфеля максимального риска) не может быть решена или по каким-либо причинам такой портфель не может быть сформирован. В этой ситуации знание структуры портфелей с высокими рисками позволит инвестору их избежать.

Итак, решим оптимизационную задачу

$$\frac{1}{2}\sigma^2 = \frac{1}{2}X^T VX \to \max \tag{4.153}$$

при условиях

$$I^T X = 1, \;\; X \geq 1. \tag{4.154}$$

Так как множество рассматриваемых портфелей компактно (напомним, что число различных видов ценных бумаг конечно), то точка максимума существует. Пусть Z — какая-нибудь точка максимума.

Пусть $c = z_1 + z_2$, $T = \{(t_1, t_2, z_3, ..., z_n): t_1 + t_2 = c, t_1, t_2 \geq 0\}$. Поскольку допустимое множество задачи выпукло, то T лежит в допустимом множестве. Выпуклая функция $\frac{1}{2}X^T VX$ на множестве T принимает наибольшее значение на одном из двух концов T, т.е. одна из переменных z_1, z_2 должна быть равна 0. Из этого рассуждения вытекает, что только одна из компонент точки Z может быть отлична от 0.

Следовательно, портфель максимального риска с неотрицательными компонентами состоит просто из бумаг максимального риска. А максимальное значение риска такого портфеля совпадает с риском бумаг максимального риска.

Полученные выводы остаются в силе и при наличии на рынке безрисковой бумаги.

4.6.4. Портфель максимальной эффективности с неотрицательными компонентами

Для нахождения портфеля максимальной эффективности с неотрицательными компонентами необходимо решить оптимизационную задачу

$$\vec{\mu}X \to \max \tag{4.155}$$

при условиях

$$I^T X = 1,\ X \geq 1. \tag{4.156}$$

Рассматриваемая задача является задачей линейного программирования. Из теории линейного программирования известно, что в оптимальном решении задачи (4.155)—(4.156) только одна переменная может быть отлична от нуля. Следовательно, искомый портфель состоит только из бумаги наибольшей эффективности.

4.6.5. Портфель минимального риска с неотрицательными компонентами

Если имеется безрисковая бумага, то портфель, составленный только из нее, есть искомый. Если безрисковой бумаги нет, то матрицу V можно считать положительно определенной. В этом случае решим оптимизационную задачу

$$\frac{1}{2}\sigma^2 = \frac{1}{2}X^T VX \to \min \tag{4.157}$$

при условиях

$$I^T X = 1,\ X \geq 1. \tag{4.158}$$

Так как допустимое множество компактно, то искомый портфель существует. Учитывая строгую выпуклость целевой функции, линейность ограничения и дифференцируемость рассматриваемых функций, заключаем, что условия Куна — Таккера дают необходимые и достаточные условия условного минимума:

$$X^T V - \lambda I^T \geq 0,\ (X^T V - \lambda I^T)X = 0,\ I^T X = 1,\ X \geq 1. \tag{4.159}$$

Решение этой системы уравнений и неравенств в общем случае крайне сложно. При небольшом числе n-ценных бумаг можно решить систему (4.159) перебором случаев.

Пример 4.28. Ковариационная матрица доходностей ценных бумаг трех видов задается формулой $V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$, а их ожидаемые доходности равны: $\mu_1 = 0{,}2$, $\mu_2 = 0{,}32$, $\mu_3 = 0{,}38$. Найти портфель минимального риска.

Поскольку есть безрисковая бумага (первая), то портфель, составленный только из нее, и есть искомый. То есть имеем портфель нулевого риска (1, 0, 0) с доходностью 20%.

Пример 4.29. Портфель состоит из трех бумаг: безрисковой с эффективностью (ожидаемой доходностью) 8% и двух рисковых с эффективностью соответственно 12 и 19% и ковариационной матрицей $\begin{pmatrix} 12 & -1 \\ -1 & 24 \end{pmatrix}$. Найти портфель минимального риска с неотрицательными компонентами.

При наличии безрисковой бумаги портфель, составленный только из нее, и есть искомый. То есть имеем портфель нулевого риска (1; 0; 0) с доходностью 8%.

Пример 4.30. Ковариационная матрица доходностей ценных бумаг трех видов задается формулой $V = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$, а их ожидаемые доходности равны: $\mu_1 = 0{,}3$, $\mu_2 = 0{,}4$, $\mu_3 = 0{,}55$. Найти портфель максимального риска.

Портфель максимального риска с неотрицательными компонентами состоит просто из бумаг максимального риска. А максимальное значение риска такого портфеля совпадает с риском бумаг максимального риска. То есть имеем портфель (0, 0, 1) риска $\sigma = \sqrt{14} = 3{,}74$ с доходностью 55%.

Пример 4.31. Портфель состоит из трех бумаг: безрисковой с эффективностью (ожидаемой доходностью) 7,5% и двух рисковых с эффективностью соответственно 15 и 25% и ковариационной матрицей $\begin{pmatrix} 12 & -1 \\ -1 & 24 \end{pmatrix}$. Найти портфель максимального риска с неотрицательными компонентами.

Портфель максимального риска с неотрицательными компонентами состоит просто из бумаг максимального риска. А максимальное значение риска такого портфеля совпадает с риском бумаг максимального риска. То есть имеем портфель (0, 0, 1) риска $\sigma = \sqrt{24} = 4{,}899$ с доходностью 25%.

Пример 4.32. Ковариационная матрица доходностей ценных бумаг трех видов задается формулой $V = \begin{pmatrix} 15 & 2 & 0 \\ 2 & 19 & 4 \\ 0 & 4 & 29 \end{pmatrix}$, а их ожидаемые доходности равны: $\mu_1 = 0{,}16$, $\mu_2 = 0{,}25$, $\mu_3 = 0{,}4$. Найти портфель максимальной доходности.

Для нахождения портфеля максимальной эффективности с неотрицательными компонентами необходимо решить оптимизационную задачу $\vec{\mu}X \to \max$ при условиях $I^TX = 1$, $X \geq 1$.

Рассматриваемая задача является задачей линейного программирования. Из теории линейного программирования известно, что в оптимальном решении данной задачи только одна переменная может быть отлична от нуля. Следовательно, искомый портфель состоит только из бумаги наибольшей эффективности, т.е. имеем портфель (0; 0; 1) с доходностью 40% риска $\sigma = \sqrt{29} = 5{,}385$.

Пример 4.33. Портфель состоит из трех бумаг: безрисковой с эффективностью (ожидаемой доходностью) 6,8% и двух рисковых с эффективностью соответственно 16 и 35% и ковариационной матрицей $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 36 \end{pmatrix}$. Найти портфель наибольшей эффективности с неотрицательными компонентами.

Искомый портфель состоит только из бумаги наибольшей эффективности. То есть имеем портфель (0; 0; 1) с доходностью 35% риска $\sigma = \sqrt{36} = 6$.

Вопросы и задачи

4.189. Опишите портфель максимального риска с неотрицательными компонентами.

4.190. Найдите портфель максимальной эффективности с неотрицательными компонентами.

4.191. Найдите портфель минимального риска с неотрицательными компонентами.

4.192. Ковариационная матрица доходностей ценных бумаг трех видов задается формулой $V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$, а их ожидаемые доходности равны: $\mu_1 = 0{,}3$, $\mu_2 = 0{,}35$, $\mu_3 = 0{,}4$. Найдите портфель минимального риска.

4.193. Портфель состоит из трех бумаг: безрисковой с эффективностью (ожидаемой доходностью) 4% и двух рисковых с эффективностью соответственно 18 и 29% и ковариационной матрицей $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 25 \end{pmatrix}$. Найдите портфель минимального риска с неотрицательными компонентами.

4.194. Ковариационная матрица доходностей ценных бумаг трех видов задается формулой $V = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, а их ожидаемые доходности равны: $\mu_1 = 0{,}21$, $\mu_2 = 0{,}32$, $\mu_3 = 0{,}44$. Найдите портфель максимального риска.

4.195. Портфель состоит из трех бумаг: безрисковой с эффективностью (ожидаемой доходностью) 6,75% и двух рисковых с эффективностью соответственно 13 и 27% и ковариационной матрицей $\begin{pmatrix} 16 & -5 \\ -5 & 37 \end{pmatrix}$. Найдите портфель максимального риска с неотрицательными компонентами.

4.196. Ковариационная матрица доходностей ценных бумаг трех видов задается формулой $V = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 7 \\ 4 & 14 & -3 \\ 7 & -3 & 25 \end{pmatrix}$, а их ожидаемые доходности равны: $\mu_1 = 0{,}08$, $\mu_2 = 0{,}11$, $\mu_3 = 0{,}33$. Найдите портфель максимальной доходности.

4.197. Портфель состоит из трех бумаг: безрисковой с эффективностью (ожидаемой доходностью) 3% и двух рисковых с эффективностью соответственно 10 и 35% и ковариационной матрицей $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 64 \end{pmatrix}$. Найдите портфель наибольшей эффективности с неотрицательными компонентами.

4.7. Диверсификация портфеля

Диверсификация (от лат. *diversus* — разный и *facere* — делать, англ. *diversification*) в области финансов — это распределение инвестиций по разным финансовым инструментам.

Диверсификация инвестиционного портфеля — это распределение средств между различными объектами инвестирования с целью избежать серьезных потерь в случае падения цен одного или нескольких активов инвестиционного портфеля.

В основе метода диверсификации (применительно к некоррелированным финансовым операциям) лежит следующее утверждение, доказанное в [1]: отношение риска (композитной) финансовой операции, состоящей из n-некоррелированных финансовых операций, к ее среднему доходу обратно пропорционально $\sqrt{n}$ и, следовательно, с ростом n относительный риск композитной финансовой операции уменьшается.

Таким образом, относительный риск композитной финансовой операции с ростом n уменьшается. При доказательстве утверждения предполагалось, что доходы финансовых операций, составляющих операцию X, являются величинами одного порядка, равно как и их риски.

В том же параграфе доказано, что при увеличении числа некоррелированных операций их среднее арифметическое имеет эффективность порядка эффективности каждой из этих операций, а риск ($\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2} \big/ n \propto 1 \big/ \sqrt{n}$) оказывается обратно пропорционален $\sqrt{n}$ и, следовательно, с ростом n уменьшается.

Этот эффект называется ***эффектом диверсификации*** и означает, что нужно проводить разнообразные, не связанные друг с другом либо отрицательно коррелированные операции. (Он также известен как принцип «не класть все яйца в одну корзину».) При такой стратегии эффективность финансовой операции, либо портфеля, усредняется, а риск уменьшается.

В более узком смысле вопрос о диверсификации портфеля рассмотрен в пособии [4]. Там изучен вопрос об изменении минимальной границы при пополнении портфеля Марковица новым активом. Ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Пусть к портфелю $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ добавили ценную бумагу, так что получился портфель $\tilde{X} = \left(X, x_{n+1}\right)$. Тогда для уравнений минимальных границ $\sigma_X\left(\mu\right)$ и $\sigma_{\tilde{X}}\left(\mu\right)$ для всех μ выполняется неравенство

$$\sigma_{\tilde{X}}\left(\mu\right) \le \sigma_X\left(\mu\right). \tag{4.160}$$

Действительно, задача (4.58)—(4.60) для портфеля X является частным случаем аналогичной задачи для портфеля $\tilde{X}$, а именно надо положить $x_{n+1} = 0$. Отсюда следует неравенство (4.160).

Таким образом, пополнение портфеля новым активом по крайней мере не ухудшает ситуацию для инвестора, так как минимальный риск при той же доходности не увеличивается. На практике, однако, не всегда удается сформировать оптимальный портфель (портфель минимального риска), в этом случае риск портфеля при добавлении нового актива может вырасти.

В общем случае «размазывание» портфеля по большому числу некоррелированных либо отрицательно коррелированных ценных бумаг снижает риск портфеля.

Пример 4.34. С помощью формулы (4.32) легко продемонстрировать влияние диверсификации на риск портфеля. Пусть портфель состоит из двух независимых бумаг с рисками $\sigma_1 = 0{,}1$ и $\sigma_2 = 0{,}2$ соответственно. Вычислим риск портфеля по формуле (4.32)

$$\sigma = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}2}{\sqrt{0{,}01 + 0{,}04}} \approx 0{,}0894.$$

Итак, риск портфеля $\sigma \approx 0{,}0894$ оказался ниже риска каждой из бумаг (0,1; 0,2). Это и есть иллюстрация принципа диверсификации: при «размазывании» портфеля по независимым бумагам его риск уменьшается.

Вопросы и задачи

4.198. Портфель состоит из двух независимых бумаг с рисками $\sigma_1 = 0{,}3$ и $\sigma_2 = 0{,}5$ соответственно. Продемонстрируйте влияние диверсификации на риск портфеля, найдя его зависимость от коэффициента корреляции во всем диапазоне изменений последнего.

4.199. Портфель состоит из двух независимых бумаг с рисками $\sigma_1 = 0{,}3$ и $\sigma_2 = 0{,}5$ соответственно и доходностями $\mu_1 = 0{,}07$ и $\mu_2 = 0{,}42$. Продемонстрируйте влияние диверсификации на риск портфеля, найдя его зависимость от коэффициента корреляции во всем диапазоне изменений последнего. Исследуйте зависимость доходности портфеля от коэффициента корреляции во всем диапазоне изменений последнего.

ГЛАВА 5

ОБЛИГАЦИИ

По источникам финансирования финансовые средства компании делятся на собственные, заемные, привлеченные и государственные. В качестве заемных средств помимо кредитов может выступать облигационный заем или облигации, выпускаемые эмитентом для заимствования денежных средств.

Облигацию характеризуют следующие параметры:

— ***дата погашения*** $t = T$, где T — время обращения облигации с момента выпуска и ***срок погашения*** $n = T - \tau$, где τ — текущая дата;

— ***номинальная стоимость*** N — сумма денег, которая выплачивается владельцу облигации на дату погашения. Номинальная стоимость обычно указывается на самой облигации;

— ***выкупная стоимость*** (если она отличается от номинальной стоимости);

— ***купонный доход*** C — постоянные платежи, которые выплачиваются владельцу ежегодно по ***купонной ставке*** (норма дохода) $c = \dfrac{C}{N}$. Если выплаты по купонам не предусмотрены, то такую облигацию называют ***бескупонной***. Доход по такой облигации образуется за счет курсовой разницы стоимости облигации.

5.1. Текущая стоимость облигации

С каждой облигацией связан поток платежей, состоящий из ежегодной выплаты купонного дохода и выплаты номинальной стоимости на дату погашения. Поэтому в момент времени t можно говорить о ***текущей стоимости*** P облигации. Пусть r — ставка рефинансирования (процентная ставка), а до погашения облигации осталось ровно n лет. Тогда имеем [1]

$$P = \sum_{k=1}^{n} \frac{C}{(1+r)^k} + \frac{N}{(1+r)^n}. \tag{5.1}$$

Купонные платежи $C = cN$ образуют простую ренту, так что формулу (5.1) можно переписать в замкнутой форме

$$P = cN\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} + N(1+r)^{-n}. \tag{5.2}$$

Купонная процентная ставка является измерителем доходности только в случае, когда облигация продается по номиналу, так что рассмотрим текущую доходность и доходность к погашению.

После выпуска облигации она поступает на рынок, где свободно продается и покупается по рыночной цене V, которая, вообще говоря, не совпадает с текущей стоимостью, рассчитанной по формулам (5.1), (5.2).

При этом отношение рыночной цены облигации V к номиналу N называется курсом облигации (K):

$$K = \frac{V}{N}\cdot 100. \tag{5.3}$$

Пример 5.1. Рыночная цена 12-процентной облигации номиналом 1000 руб. за 2 года до погашения равна 1200 руб. Найти текущую стоимость облигации при процентной ставке: а) 10%, б) 14%, в) 12% и ее курс.

Найдем сначала текущую стоимость облигации по формуле

$$P = cN\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} + N(1+r)^{-n}.$$

а) $P = 0{,}12\cdot 1000\dfrac{1-(1+0{,}1)^{-2}}{0{,}1} + 1000(1+0{,}1)^{-2} = 208{,}264 + 826{,}446 =$ $= 1034{,}71$ руб.;

б) $P = 0{,}12\cdot 1000\dfrac{1-(1+0{,}14)^{-2}}{0{,}14} + 1000(1+0{,}14)^{-2} = 197{,}599 + 769{,}468 =$ $= 967{,}067$ руб.;

в) $P = 0{,}12\cdot 1000\dfrac{1-(1+0{,}12)^{-2}}{0{,}12} + 1000(1+0{,}12)^{-2} = 202{,}806 + 797{,}194 =$ $= 1000$ руб.

Итак, мы видим, что при ставке рефинансирования (10%) меньшей купонной ставки (12%) текущая стоимость облигации (1034,71 руб.) больше номинальной (1000 руб.). При ставке рефинансирования

(14%) большей купонной ставки (12%) текущая стоимость облигации (967,067 руб.) меньше номинальной (1000 руб.). При ставке рефинансирования (12%) равной купонной ставке (12%) текущая стоимость облигации (1000 руб.) равна номинальной (1000 руб.).

Курс облигации во всех трех случаях определяется отношением рыночной цены облигации V к номиналу N и равна

$$K = \frac{V}{N} \cdot 100 = \frac{1200}{1000} \cdot 100 = 120.$$

Пример 5.2. Найти текущую стоимость облигации номинальной стоимостью 1000 руб., сроком погашения 5 лет и ежегодными выплатами по купонной ставке 15% при годовой процентной ставке, составляющей 20%.

Имеем

$$N = 1000, \quad n = 5, \quad c = 0{,}15, \quad r = 0{,}2.$$

Подставляя в формулу (5.2), получим

$$P = cN \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} + N(1+r)^{-n} =$$

$$= 150 \frac{1-1{,}2^{-5}}{0{,}2} + 1000 \cdot 1{,}2^{-5} = 448{,}59 + 401{,}88 = 850{,}47.$$

Таким образом, текущая стоимость облигации $P = 850{,}47$, что меньше номинальной стоимости.

Вопросы и задачи

5.1. Перечислите и дайте определение параметрам, характеризующим облигацию.

5.2. Дайте определение и приведите формулу для текущей стоимости облигации.

5.3. Дайте определение курса (курсовой стоимости) облигации, приведите пример.

5.4. Рыночная цена 15-процентной облигации номиналом 7500 руб. за 2 года до погашения равна 7800 руб. Найдите текущую стоимость облигации при процентной ставке: а) 11%, б) 15%, в) 17% и ее курс.

5.5. Рыночная цена 9-процентной облигации номиналом 500 руб. за 4 года до погашения равна 620 руб. Найдите текущую стоимость облигации при процентной ставке: а) 8%, б) 9%, в) 12% и ее курс.

5.6. Рыночная цена 20-процентной облигации номиналом 3500 руб. за 2 года до погашения равна 4300 руб. Определите текущую стоимость облигации при процентной ставке: а) 14%, б) 20%, в) 23% и ее курс.

5.7. Определите текущую цену двухлетней облигации с номиналом в 1500 у.е. и купонной ставкой 6%, если купонные выплаты производятся 4 раза в год и процентная ставка составляет 10% годовых.

5.8. Найдите текущую цену облигации, номинальная стоимость которой составляет 1300 у.е., срок до погашения — 7 лет, ежегодная купонная ставка — 14%, процентная ставка — 10% годовых.

5.9. Три облигации с одинаковой номинальной стоимостью 1000 у.е., сроком погашения 5 лет, купонной ежегодной ставкой 9% имеют различные доходности к моменту погашения — 10, 11 и 12%. Как будут отличаться рыночные цены облигаций? Найдите эти значения.

5.10. Определите текущую цену пятилетней облигации с номиналом в 1000 у.е. и купонной ставкой 12%, если купонные выплаты выплачиваются 12 раз в год и процентная ставка составляет 10% годовых.

5.11. Рыночная цена облигации составляет 4000 у.е., номинальная стоимость равна 2500 у.е., срок до погашения — 5 лет, купонные ежегодные платежи — 700 у.е., доходность — 10%. Стоит ли продать облигацию и почему?

5.12. Рыночная цена облигации составляет 7000 у.е., срок до погашения — 3 года, номинальная стоимость — 9000 у.е., купонная ставка — 7%. Определите доходность к моменту погашения. Стоит ли покупать эту облигацию, если приемлемая учетная ставка для инвестиций с таким риском составляет: а) 8%, б) 10%?

5.13. Рыночная цена двух облигаций одинакова и составляет 5000 у.е., номинальная стоимость — 6000 у.е., ежегодная купонная ставка — 4%, сроки погашения — 5 лет и 2 года. Найдите их доходности. Объяснить различие.

5.14. Найдите величину дисконта облигации номинальной стоимостью 10 000 у.е., купонные выплаты по которой составляют 700 у.е. ежегодно, цена за 5 лет до погашения составляет 6000 у.е., если при одной и той же доходности для всех сроков облигация будет продаваться: а) через 3 года, б) через 4 года. Объясните такие различия.

5.15. Облигация со сроком обращения 5 лет, номиналом 1500 у.е. и ежегодными купонными выплатами в размере 300 у.е. продается по цене 2800 у.е. Найти процентное изменение цены облигации при увеличении и уменьшении доходности на 1%.

5.2. Текущая доходность облигации

Текущая доходность i облигации равна отношению купонных выплат

$$cN = C \tag{5.4}$$

к рыночной цене облигации V

$$i = \frac{cN}{V} = \frac{C}{V}. \tag{5.5}$$

Отметим, что если купонные выплаты производятся p раз в году по ставке c/p, то и в этом случае текущая доходность облигации рассчитывается по формуле (5.5).

Из (5.5) следует, что если облигация куплена с дисконтом ($V < N$), то текущая доходность облигации больше купонной ставки, $i > c$, если же облигация куплена с премией $V > N$, то текущая доходность облигации меньше купонной ставки, $i < c$.

Если купонные выплаты (купонный доход) изменяются во времени и известны их величины, то можно найти среднюю текущую доходность облигации

$$\bar{i} = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j}{n} \frac{N}{V}. \tag{5.6}$$

Если по условиям эмиссии облигаций предусмотрен постоянный относительный прирост купонных выплат (купонного дохода) q, то купонные выплаты образуют геометрическую прогрессию со знаменателем q:

$$c, cq, cq^2, \ldots .$$

Вычислив сумму n-членов геометрической прогрессии по формуле

$$S_n = c\frac{1-q^n}{1-q}, \tag{5.7}$$

получим выражение для средней купонной ставки

$$\bar{c} = c\frac{1-q^n}{1-q} \cdot \frac{1}{n}. \tag{5.8}$$

При этом текущая доходность таких облигаций равна

$$\bar{i} = \bar{c}\frac{N}{V}. \tag{5.9}$$

Пример 5.3. Курс облигации равен 95, купонный доход — 15%, выплаты производятся ежеквартально. Найти текущую доходность облигации.

Текущая доходность i облигации равна отношению купонных выплат $cN = C$ к рыночной цене облигации V:

$$i = \frac{cN}{V} = \frac{C}{V}.$$

Учитывая $K = \frac{V}{N} \cdot 100$, получим

$$i = \frac{cN}{V} = \frac{cN}{KN} = \frac{c}{K} = \frac{15}{95} \cdot 100 = 15{,}789\%.$$

Таким образом, текущая доходность i облигации равна 15,789%.

Отметим еще раз, что текущая доходность облигации не зависит от количества купонных выплат в году и в этом случае рассчитывается также по формуле (5.5).

Пример 5.4. Пусть курс облигации равен 105, купонный доход — 15%. Найти текущую доходность облигации.

Подставив в (5.5) вместо $V = KN/100$, получим

$$i = 100c/K = 15/105 = 0{,}14285 = 14{,}285\%.$$

Таким образом, текущая доходность облигации равна 14,285%.

Вопросы и задачи

5.16. Дайте определение и приведите формулу для текущей доходности облигации. Приведите пример.

5.17. Курс облигации равен 98, купонный доход — 10%, выплаты ежемесячно. Найдите текущую доходность облигации.

5.18. Курс облигации равен 106, купонный доход — 12%, выплаты производятся дважды в год. Какова текущая доходность облигации?

5.19. Рыночная цена 750-рублевой облигации равна 810 руб., купонный доход — 15%. Проценты выплачиваются 4 раза в год. Найдите текущую доходность облигации.

5.20. Рыночная цена 1000-рублевой облигации равна 935 руб., купонный доход — 8%, выплаты осуществляются дважды в год. Определите текущую доходность облигации.

5.3. Доходность к погашению

Текущая доходность с точки зрения оценки эффективности инвестирования в облигации имеет существенный недостаток, поскольку не учитывает вторую часть дохода по облигациям, а именно изменение стоимости облигации к концу ее срока.

Более важным показателем в этой связи является доходность к погашению ρ. Эта величина служит заменой процентной ставки r в ситуации, когда текущая стоимость P облигации не совпадает с ее рыночной стоимостью V.

Если известны рыночная цена облигации V, ее номинальная стоимость N, срок погашения n и купонная ставка c, то доходность к погашению определяют как решение уравнения

$$V = \sum_{k=1}^{n} \frac{cN}{(1+\rho)^k} + \frac{N}{(1+\rho)^n}. \tag{5.10}$$

Суммируя геометрическую прогрессию в первом слагаемом с $a_1 = \frac{1}{(1+\rho)}$, $q = \frac{1}{(1+\rho)}$, получим эквивалентное уравнение для ρ

$$V = cN\frac{1-(1+\rho)^{-n}}{\rho} + N(1+\rho)^{-n}. \tag{5.11}$$

При больших значениях n для нахождения доходности к погашению используют приближенные формулы. Одна из таких формул имеет вид

$$\rho \approx \frac{2(cn+1-K)}{K-1+n(1+K)}. \tag{5.12}$$

Поделив обе части уравнения (5.11) на N, получим

$$K = c\frac{1-(1+\rho)^{-n}}{\rho} + (1+\rho)^{-n}. \tag{5.13}$$

Можно показать, что если рыночная цена больше номинальной стоимости, то доходность к погашению меньше купонной ставки. Оказывается, что в общем случае выполняются следующие утверждения.

1. Рыночная цена облигации равна ее номинальной стоимости тогда и только тогда, когда доходность к погашению равна купонной ставке.

2. Рыночная цена облигации больше ее номинальной стоимости тогда и только тогда, когда доходность к погашению меньше купонной ставки.

3. Рыночная цена облигации меньше ее номинальной стоимости тогда и только тогда, когда доходность к погашению больше купонной ставки.

4. Дайте определение и приведите формулу для доходности облигации к погашению. Приведите пример.

5. Какова связь рыночной цены облигации с ее номинальной стоимости при различных соотношениях доходности к погашению и купонной ставки?

Зависимость доходности к погашению облигации от параметров

Имеют место следующие две теоремы:

1) относительное изменение цены облигации (в процентах) в результате изменения доходности к погашению будет тем меньше, чем выше купонная ставка;

2) уменьшение доходности облигации приведет к росту ее рыночной цены на величину большую, чем соответствующее уменьшение рыночной цены при увеличении доходности на ту же величину.

Пример 5.5. Найти доходность к погашению облигации со сроком обращения 10 лет и номинальной стоимостью $N = 1000$ у.е., купонные выплаты по которой составляют 50 у.е. ежегодно, если облигация продается по 900 у.е.

$$K = c\frac{1-(1+\rho)^{-n}}{\rho} + (1+\rho)^{-n};$$

$$\frac{900}{1000} = \frac{50}{1000}\cdot\frac{1-(1+\rho)^{-10}}{\rho} + (1+\rho)^{-10}; \tag{5.14}$$

$$0{,}9 = 0{,}05\cdot\frac{1-(1+\rho)^{-10}}{\rho} + (1+\rho)^{-10}.$$

Решаем это уравнение методом последовательных приближений.

В качестве нулевого приближения берем $\rho = 0{,}05$, в правой части получаем 1,0.

Далее берем $\rho = 0{,}07$, в правой части получаем 0,859.

Далее берем $\rho = 0{,}065$, в правой части получаем 0,892. Это примерно равно 0,9 в левой части уравнения (5.14).

Таким образом, доходность к погашению облигации равна 6,5%.

Пример 5.6. Найти доходность к погашению облигации со сроком обращения 8 лет, номинальной стоимостью 3000 руб. и купонной ставкой 8%, если: 1) она продается за 3000 руб., 2) ее рыночная цена увеличится на 10%, 3) уменьшится на 5%?

В первом случае облигация продается по номиналу, поэтому доходность к погашению равна купонной ставке $\rho = 8\%$.

Во втором случае облигация продается с премией за 3300 руб., поэтому надо ожидать, что доходность к погашению упадет ниже 10%. Действительно, в этом случае $K = 1{,}1$, так что вычисления по формуле (5.12) дают следующее приближенное значение:

$$\rho \approx \frac{2(cn+1-K)}{K-1+n(1+K)} = \frac{2(0{,}08\cdot 8+1-1{,}1)}{1{,}1-1+8(1+1{,}1)} = \frac{1{,}08}{16{,}9} = 0{,}0639 = 6{,}39\%.$$

В третьем случае облигация продается с дисконтом за 2850 руб., поэтому, согласно теореме, доходность должна быть больше 8%.

В этом случае $K = 0{,}95$.

Вычисления дают в этом случае $\rho = 8{,}87\%$.

$$\rho \approx \frac{2(cn+1-K)}{K-1+n(1+K)} = \frac{2(0{,}08\cdot 8+1-0{,}95)}{0{,}95-1+8(1+0{,}95)} = \frac{1{,}38}{15{,}55} = 0{,}0887 = 8{,}87\%.$$

Заметим, что в обоих случаях изменения доходности пропорциональны изменениям курса облигации $\frac{10\%}{5\%} \approx \frac{1{,}61\%}{0{,}87\%}$ $(2 \approx 1{,}85)$.

Пример 5.7. Найти изменение дисконта облигации со сроком обращения $n_1 = 7$ лет с номинальной стоимостью $N = 5000$, купонной ставкой $c = 8\%$ и доходностью к погашению $\rho = 10\%$ при продаже ее в настоящий момент и при продаже ее через год.

Дисконт I (разность между номиналом N и текущей рыночной стоимостью облигации V) при продаже ее в настоящий момент равен

$$I_1 = N - V_1.$$

Вычислим текущую рыночную стоимость облигации в настоящий момент V_1 по формуле (5.11):

$$V_1 = cN\frac{1-(1+\rho)^{-n}}{\rho} + N(1+\rho)^{-n} = 0{,}08\cdot 5000\frac{1-(1+0{,}1)^{-7}}{0{,}1} +$$
$$+5000(1+0{,}1)^{-7} = 1947{,}37 + 2565{,}79 = 4513{,}16.$$

Дисконт I при продаже облигации через год равен

$$I_2 = N - V_2 .$$

Вычислим текущую рыночную стоимость облигации V_2 через год по той же формуле (5.11):

$$V_2 = 0{,}08 \cdot 5000 \frac{1-(1+0{,}1)^{-6}}{0{,}1} + 5000(1+0{,}1)^{-6} = 1742{,}10 + 2822{,}37 = 4564{,}47.$$

Теперь найдем величины дисконтов

$$I_1 = N - V_1 = 5000 - 4513{,}16 = 486{,}84,$$

$$I_2 = N - V_2 = 5000 - 4564{,}47 = 435{,}53.$$

Таким образом, дисконт уменьшился с 486,84 до 435,53.

Пример 5.8. Найти изменение текущей рыночной стоимости облигации со сроком обращения $n_1 = 7$ лет с номинальной стоимостью $N = 5000$, купонной ставкой $c = 8\%$ и доходностью к погашению $\rho = 10\%$ при увеличении и уменьшении доходности к погашению на 2%.

1) Вычислим текущую рыночную стоимость облигации в настоящий момент V_0 по формуле (5.11) (см. пример 5.4):

$$V_0 = cN \frac{1-(1+\rho)^{-n}}{\rho} + N(1+\rho)^{-n} = 0{,}08 \cdot 5000 \frac{1-(1+0{,}1)^{-7}}{0{,}1} +$$

$$+5000(1+0{,}1)^{-7} = 1947{,}37 + 2565{,}79 = 4513{,}16.$$

2) Вычислим текущую рыночную стоимость облигации в настоящий момент V_1 при увеличении доходности к погашению на 2% по формуле (5.11):

$$V_1 = cN \frac{1-(1+\rho)^{-n}}{\rho} + N(1+\rho)^{-n} = 0{,}08 \cdot 5000 \frac{1-(1+0{,}12)^{-7}}{0{,}12} +$$

$$+5000(1+0{,}12)^{-7} = 0{,}08 \cdot 5000 \frac{1-(1+0{,}12)^{-7}}{0{,}12} +$$

$$+5000(1+0{,}12)^{-7} = 1825{,}50 + 2261{,}75 = 4087{,}25.$$

Найдем изменение текущей рыночной стоимости облигации:

$$\Delta V_1 = V_1 - V_0 = 4087{,}25 - 4513{,}16 = -425{,}91.$$

Итак, при увеличении доходности к погашению на 2% рыночная стоимость облигации снизилась на 425,91.

3) Вычислим теперь текущую рыночную стоимость облигации в настоящий момент V_2 при уменьшении доходности к погашению на 2% по той же формуле (5.11):

$$V_2 = cN\frac{1-(1+\rho)^{-n}}{\rho} + N(1+\rho)^{-n} = 0{,}08\cdot 5000\frac{1-(1+0{,}08)^{-7}}{0{,}08} +$$

$$+5000(1+0{,}08)^{-7} = 2082{,}55 + 2917{,}45 = 5000.$$

Этот результат можно было предсказать, поскольку при уменьшении доходности к погашению на 2% она стала равной купонной ставке, а при этом рыночная стоимость облигации становится равной номинальной.

Найдем изменение текущей рыночной стоимости облигации:

$$\Delta V_2 = V_0 - V_1 = 5000 - 4513{,}16 = 486{,}84.$$

Таким образом, при уменьшении доходности к погашению на 2% рыночная стоимость облигации снизилась на 486,84.

Отметим, что в соответствии с доказанным выше утверждением уменьшение доходности облигации привело к росту ее рыночной цены на величину (486,84) бо́льшую, чем соответствующее уменьшение рыночной цены при увеличении доходности на ту же величину (425,91).

Вопросы и задачи

5.21. Проанализируйте зависимость доходности к погашению облигации от параметров.

5.22. Найдите доходность к моменту погашения облигации со сроком обращения 6 лет и номинальной стоимостью $N = 800$ у.е., купонные выплаты по которой составляют 50 у.е. ежегодно, если: а) облигация продается по 800 у.е., б) цена облигации увеличится до 1000 у.е., в) цена облигации упадет до 600 у.е.

5.23. Найдите величину дисконта облигации со сроком обращения 7 лет и номинальной стоимостью $N = 1200$ у.е., купонные выплаты по которой составляют 70 у.е. ежегодно, цена — 1000 у.е., если: а) облигация продается в настоящий момент, б) облигация будет продаваться через год.

5.24. Как изменяется цена облигации со сроком обращения $T = 5$ лет и купонной ставкой 6% при увеличении и уменьшении доходности на 1%, если в настоящий момент облигация продается по номиналу $N = 1000$ у.е.?

5.25. Определите доходность к погашению облигации со сроком обращения 15 лет, если ее курс равен 110, купонные выплаты составляют 12% годовых.

5.26. Выведите приближенную формулу для относительного изменения цены облигации при изменении ее доходности.

5.27. Найдите доходность к погашению облигации со сроком обращения 7 лет и номинальной стоимостью $N = 2000$ у.е., купонные выплаты по которой составляют 150 у.е. ежегодно, если облигация продается по 1900 у.е.

5.28. Докажите, что уменьшение доходности облигации приведет к росту ее рыночной цены на величину бóльшую, чем соответствующее уменьшение рыночной цены при увеличении доходности на ту же величину.

5.29. Докажите, что относительное изменение цены облигации (в процентах) в результате изменения доходности к погашению будет тем меньше, чем выше купонная ставка.

5.4. Средний срок поступления дохода

Кроме доходности облигации необходимо также уметь оценивать ее риск, который связан со сроком облигации: чем больше срок до погашения, тем выше риск. Необходимо учитывать также распределение доходов во времени. Для такого рода оценки облигации вводят средний срок поступления дохода от облигации.

Средний срок поступления дохода является средней взвешенной величиной всех видов поступлений (доходов) от облигации. В качестве весов берутся суммы поступлений (доходов). Отметим, что *средний срок поступления дохода от облигации* отличается от *среднего срока жизни облигации* $\overline{t}$, который усредняет только сроки оплаты номинала облигаций (допускающих досрочное погашение), но не учитывает сроки выплат купонного дохода

$$\overline{t} = \sum_{i=1}^{k} x_i t_i, \tag{5.15}$$

где k — количество серий, x_i — последовательные доли погашения облигаций.

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = 1. \tag{5.16}$$

Средний срок поступления дохода от облигации, T, определим следующим образом:

$$T = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i S_i}{\sum_{i=1}^{n} S_i}. \tag{5.17}$$

Здесь S_i — сумма дохода, n — срок облигации, t_i — сроки поступления купонных доходов.

Расчет по формуле (5.17) можно упростить и использовать следующую формулу:

$$T = \frac{c(n+1)}{2} + 1 \Big/ c + \frac{1}{n}. \tag{5.18}$$

Отметим, что средний срок поступления дохода от облигации не зависит от величины номинала. При этом чем больше купонный доход, тем меньше средний срок. При сроке жизни облигации более года средний срок поступления дохода уменьшается с ростом купонного дохода облигации.

Отметим также, что у облигаций с купонным доходом $T < n$, а у бескупонных облигаций или выплатой процентов в конце срока $T < n$. Облигации с последовательным погашением номиналов (например, серийные облигации) имеют меньший средний срок, чем облигации с погашением в конце срока.

Пусть теперь купоны оплачиваются p раз в году.

Тогда для суммы сроков платежей имеем

$$\sum_{i=1}^{np} t_i = \frac{np\left(n + 1/p\right)}{2}. \tag{5.19}$$

Здесь n — срок облигации в годах, $t_i = 1/p, 2/p, ..., n$.

Средний срок поступления дохода от облигации вместо формулы (5.18) определяется выражением

$$T = \frac{c(n+1/p)}{p} + 1 \Big/ c + \frac{1}{n}. \tag{5.20}$$

Увеличение кратности выплаты процентов по облигации снижает средний срок поступления дохода от облигации.

Пример 5.9. Купонный доход 15-летней облигации номиналом 1500 руб. равен 17% годовых (выплаты в конце года). Найти средний срок поступления дохода от облигации.

Отметим, что средний срок поступления дохода от облигации не зависит от величины номинала. Поскольку купонные выплаты осуществляются один раз в год, средний срок поступления дохода от облигации определяется по формуле

$$T = \frac{\frac{c(n+1)}{2}+1}{c+\frac{1}{n}} = \frac{\frac{0{,}17\cdot 16}{2}+1}{0{,}17+\frac{1}{15}} = \frac{2{,}36}{0{,}23(6)} = 9{,}97 \approx 10 \text{ лет.}$$

Таким образом, средний срок поступления дохода от облигации равен 10 годам.

Пример 5.10. Купонный доход 10-летней облигации номиналом 800 руб. равен 14% годовых, выплаты производятся четырежды в год. Найти средний срок поступления дохода от облигации.

Отметим еще раз, что средний срок поступления дохода от облигации не зависит от величины номинала. Поскольку купоны оплачиваются p раз в году, для вычисления среднего срока поступления дохода от облигации необходимо использовать формулу

$$T = \frac{\frac{c(n+1/p)}{p}+1}{c+\frac{1}{n}} = \frac{\frac{0{,}14\left(10+\frac{1}{4}\right)}{4}+1}{0{,}14+\frac{1}{4}} = \frac{1{,}35875}{0{,}39} = 3{,}48 \approx 3{,}5 \text{ года.}$$

Таким образом, средний срок поступления дохода от облигации равен 3,5 года.

Вопросы и задачи

5.30. Дайте определение и приведите формулу для среднего срока поступления дохода облигации. Приведите пример.

5.31. Купонный доход 12-летней облигации номиналом 2500 руб. равен 8,5% годовых (выплаты в конце года). Найдите средний срок поступления дохода от облигации.

5.32. Купонный доход 7-летней облигации номиналом 1200 руб. равен 13% годовых, выплаты — четырежды в год. Определите средний срок поступления дохода от облигации.

5.33. Купонный доход 5-летней облигации номиналом 750 руб. равен 9% годовых, выплаты ежемесячные. Найдите средний срок поступления дохода от облигации.

5.34. Для трех облигаций с купонными ставками 6, 8,5 и 10,5%, сроками 4, 6 и 8 лет и кратностью купонных выплат 12, 4 и 2 раза в год соответственно рассчитайте средние сроки поступления дохода.

5.35. Облигация без обязательного погашения с ежеквартальной выплатой процентов по ставке 6% годовых куплена с премией по курсу 105. Вычислите ставку помещения для данной облигации.

5.36. Облигация реализуется по курсу 92, проценты и номинал погашаются в конце срока. Проценты начисляются по ставке 5,5% годовых. Определите ставку помещения в данную облигации при: а) сроке в 10 лет, б) сроке в 14 лет.

5.37. Докажите, что при сроке жизни облигации более года средний срок поступления дохода уменьшается с ростом купонного дохода облигации. Приведите пример.

5.38. Компания выпускает облигации с купонной ставкой 7% и выплатой процентов в конце каждого года, погашение через 6 лет с премией по курсу 102. Облигации размещаются на первичном рынке по номиналу. Три года назад компания выпустила облигации с тем же сроком, но с купонной ставкой 6% и выплатой процентов ежеквартально и погашением по номиналу. По какой курсовой стоимости необходимо продавать ранее выпущенные облигации в момент выпуска новых облигаций, чтобы их инвестиционная привлекательность была бы такой же, как и у вновь выпускаемых облигаций?

5.39. Пусть в условиях предыдущей задачи вновь выпускаемая облигация размещается на первичном рынке с дисконтом по курсу 93, а погашается по номиналу. Насколько изменится, по сравнению с предыдущим случаем, курс ранее выпущенных облигаций?

5.40. Докажите, что увеличение кратности выплаты процентов по облигации снижает средний срок поступления дохода от облигации.

5.41. Облигация продается за 5 лет до ее погашения, проценты и номинал погашаются в конце срока, проценты начисляются по ставке 7% годовых. Определите, по какому курсу должна продаваться данная облигация, чтобы ставка помещения составила 8% годовых?

5.42. Поясните смысл понятия «средний срок поступления дохода от облигации».

5.43. Компания *A* 3 года назад выпустила в обращение облигацию сроком 8 лет, номинал и проценты по ставке 10% годовых погашаются в конце срока. Облигации были размещены по курсу 97. В данный момент компания *B* выпускает облигацию сроком 6 лет с купонной ставкой 9% годовых и выплатой процентов по полугодиям. Облигация будет погашена по номиналу. Определите, по какой курсовой стоимости следует начать продавать компании *B* эти облигации, чтобы доходность по ним была бы не ниже доходности компании *A*?

5.44. Компания выпустила облигации сроком 4 года без выплаты процентов на сумму 500 000 у.е. В конце срока облигации погашались по номиналу. Облигация реализовывалась по курсу 75. Определите доходность помещения капитала в данные облигации в виде годовой ставки сложных процентов.

5.45. Облигация без обязательного погашения с периодической выплатой процентов в конце каждого года по годовой ставке 5% куплена по курсу 94. На купонный доход накладывается налог по ставке 13%. Вычислите реальную эффективность инвестирования средств в данную облигацию в виде годовой ставки сложных процентов с учетом налогообложения.

5.46. В условиях предыдущей задачи определите, по какому курсу должна была продаваться через 1,5 года после выпуска облигация компании, чтобы обеспечить ее владельцу доходность в 10% годовых.

5.47. Облигация сроком 10 лет погашается по номиналу вместе с процентами по ставке 8% годовых в конце срока ее обращения, размещается на первичном рынке по номиналу. В каких пределах будет колебаться курсовая стоимость такой облигации через год, если предполагается, что ставка помещения будет колебаться в пределах 10—11% годовых?

5.48. Облигация *A* со сроком до погашения 6 лет, проценты по которой выплачиваются в конце года по ставке 7%, погашается по номиналу и продается по курсу 95. Облигация *B* со сроком до погашения 8 лет продается по курсу 110, проценты по ней выплачиваются также в конце года по ставке 10% годовых. Облигация погашается по выкупной цене 103. Какая из двух облигаций — *A* или *B* — более предпочтительна для инвестирования, если ориентироваться на ставку помещения?

5.49. Облигация со сроком до погашения 6 лет и выплатой процентов один раз в конце года по норме 7% годовых куплена по курсу 94. Облигация в конце срока погашается по номиналу. На купонный доход начисляется налог по ставке 13%, а на прирост капитала — 20%. Вычислите ставку помещения данной облигации с учетом налогообложения.

5.50. Пусть выполняются условия задачи 5.49, но ставка налога на прирост капитала не начисляется. Вычислите ставку помещения с учетом налогообложения.

5.51. Стоит ли покупать по курсу 95 облигации за 6 лет до их погашения с купонными платежами в конце каждого полугодия по годовой ставке 7% и погашением по номиналу, если есть возможность поместить эти денежные средства в банк под 8% годовых? Какова реальная эффективность инвестирования средств в данный вид облигаций в виде годовой ставки сложных процентов?

5.52. Компания выпускает в обращение облигацию сроком 7 лет и погашением по номиналу. По облигации ежегодно выплачивается купонный доход в 8% годовых. На первичном рынке облигация размещена по курсу 108. Расходы акционерного общества по выпуску и реализации облигаций составили 1% к номиналу всех облигаций. Какова цена выпуска облигаций для компании (в виде годовой ставки сложных процентов)?

5.53. Портфель облигаций, приобретенный за 70 000 у.е., содержит облигации трех типов: *A*, *B*, *C*. Облигаций типа *A* приобретено 100 штук по цене 185 у.е., с номиналом 200 у.е., срок до погашения — 2 года, выплата процентов — по годам, по ставке 7%, погашение — по номиналу. Облигаций типа *B* приобретено 60, по цене — 200 у.е., номинал — 250 у.е., срок — 5 лет, погашаются по номиналу без выплаты процентов. Облигаций типа С приобретено 170 штук по номиналу в 180 у.е., срок — 4 года, выплата процентов — полугодовая по ставке 8% годовых, в конце срока облигация погашается по номиналу. Вычислите ставку помещения в данный портфель облигаций.

5.54. В условиях примера 5.53 изменим количество облигаций типа *B*, *C*. Пусть теперь облигаций типа *B* в портфеле находится 65, а облигаций типа *C* — 160. Какова теперь ставка помещения? Будет ли новый портфель более привлекателен для инвестирования, чем портфель задачи 5.53?

5.55. Фирма выпускает облигацию сроком 5 лет, погашение по номиналу и выплата процентов по ставке 7,5% годовых в конце срока обращения облигации. На первичном рынке облигация располагается с премией по курсу 108. Расходы по выпуску облигации и ее распространению на первичном рынке составили 0,7% от номинала. Какова цена выпуска облигации для фирмы (в виде годовой ставки сложных процентов)?

5.5. Дюрация облигации

Введенное выше понятие среднего срока поступления дохода от облигации имеет тот очевидный недостаток, что в нем игнорируется временна́я стоимость денег. Этот недостаток отсутствует в другой величине, учитывающей не размеры доходов, а их дисконтированные величины. Эта величина носит название дюрации.

Дюрацией D потока платежей $\{(t_1, R_1), (t_2, R_2), \ldots, (t_n, R_n)\}$ называют величину

$$D = \sum_{k=1}^{n} w_k t_k, \tag{5.21}$$

где

$$w_k = \frac{R_k (1+y)^{-t_k}}{\sum_{k=1}^{n} R_k (1+y)^{-t_k}} = \frac{R_k (1+y)^{-t_k}}{P} \text{ —} \tag{5.22}$$

весовые коэффициенты, определяющие вес каждого платежа R_k в текущей стоимости всего потока.

В случае положительных потоков платежей все весовые коэффициенты w_k положительные числа, сумма которых равна единице. Поэтому дюрация — это центр тяжести платежей на временной шкале (рис. 5.2).

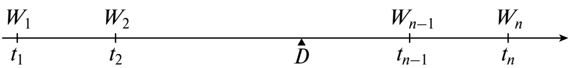

Рис. 5.2. Дюрация — центр тяжести платежей на временной шкале

Свойства дюрации

Рассмотрим некоторые свойства дюрации для положительных потоков платежей.

1. Если $n = 1$, то $D = t_n$. Если $n > 1$, то $D < t_n$.
2. Выполняется соотношение

$$\frac{P'(y)}{P(y)} = -\frac{D}{1+y} = -MD. \tag{5.23}$$

Эта формула является одной из основных формул, связанных с дюрацией. Она показывает, что дюрация, а точнее, модифицированная дюрация $MD = D/1 + y$ определяет чувствительность цены облигации к изменению уровня процентной ставки на рынке. В этом состоит основная ценность данного показателя.

Модифицированная дюрация для облигации с выплатами купонного дохода p раз в году равна $MD = \dfrac{D}{1 + y/p}$.

3. $D = D(y)$ — убывающая функция от процентной ставки y.

Применяя вышеизложенный материал к случаю облигаций, получим, что поток платежей относительно процентной ставки (доходности к погашению) y имеет вид

$$\{(1;\, cN), (2;\, cN), \ldots, (n;\, cN + N)\},$$

где c — купонная ставка, N — номинальная стоимость, n — срок погашения.

Свойства 1—3 в случае облигаций формулируются следующим образом.

1. Для бескупонной облигации ($c = 0$) дюрация совпадает со сроком погашения $D = n$.

2. Для относительного изменения цены облигации $\dfrac{\varnothing V}{V}$ при изменении доходности на Δy справедлива приближенная формула

$$\frac{\Delta V}{V} \approx -\frac{D}{1+y}\Delta y. \tag{5.24}$$

3. $D = D(y)$ — убывающая функция относительно доходности к погашению y. Дюрация облигации не зависит от номинальной стоимости и выражается формулой

$$D = \frac{1+y}{y} - \frac{n(c-y)+1+y}{c\big((1+y)^n - 1\big) + y}. \tag{5.25}$$

4. Если облигация продается по номиналу, т.е. $c = y$, то

$$D = \frac{1+y}{y}\big(1-(1+y)^{-n}\big), \tag{5.26}$$

что непосредственно вытекает из формулы (5.25).

5. $D = D(c)$ — убывающая функция купонной ставки c.

6. Для бессрочных облигаций ($n \to \infty$)

$$D_\infty = \frac{1+y}{y} \tag{5.27}$$

Наиболее сложной задачей является выяснение зависимости D от аргумента n. Справедливо утверждение, что если купонная ставка больше или равна доходности к погашению ($c \ge y$), то $D = D(n)$ — возрастающая функция от n.

Если $c < y$, то функция $D(n)$ имеет единственный максимум, приближенная оценка которого

$$n_{\max} \approx \frac{1}{\ln(1+y)} + \frac{1+y}{y-c}.$$

Поэтому $D(n)$ возрастает при $n < n_{\max}$ и убывает при $n > n_{\max}$.

Производная по n имеет вид:

$$D'(n) = \frac{c(1+y)^n\Big(n(c-y)\ln(1+y)+(1+y)\ln(1+y)-(c-y)\Big)+(c-y)^2}{d^2},$$

где $d = c\big((1+y)^n - 1\big) + y$. Функция $D(n)$ имеет горизонтальную асимптоту $D = D_\infty$, и график $D(n)$ пересекается с асимптотой тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$n(c-y)+1+y=0.$$

Поэтому, если $c \geq y$, то это уравнение не имеет решения для положительных значений n, так что выполняется неравенство $D(n) < D_\infty$. Поскольку уравнение $D'(n) = 0$ имеет не более одного корня, то график $D(n)$ выглядит следующим образом (рис. 5.3, I).

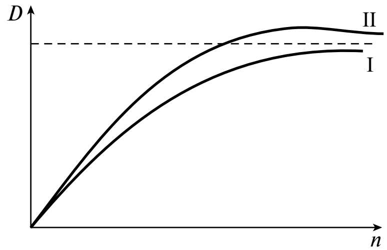

Рис. 5.3. Зависимость дюрации D облигации от ее срока погашения n при $c \geq y$ (I) и $c < y$ (II)

Пусть теперь $c < y$. Тогда график пересекает асимптоту при $n_0 = \dfrac{1+y}{y-c}$.

Поэтому имеется единственный максимум функции $D(n)$, приближенное значение которого можно получить из уравнения

$$n(c-y)\ln(1+y)+(1+y)\ln(1+y)-(c-y)=0,$$

так что

$$n_{\max} \approx \frac{1+y}{y-c} + \frac{1}{\ln(1+y)}.$$

Типичный график имеет вид рис. 5.3, II.

Пример 5.11. Облигация продается по номинальной стоимости со сроком погашения 10 лет и купонной ставкой 11% (с ежегодной выплатой). Найдите дюрацию облигации.

Так как облигация продается по номинальной стоимости, то доходность к погашению совпадает с купонной ставкой, т.е. $\rho = y = c = 11\%$.

Тогда по формуле $D = \frac{1+y}{y} - \frac{n(c-y)+1+y}{c\left((1+y)^n - 1\right)+y}$ при $y = c = 11\%$, $n = 10$ получим

$$D = \frac{1+0{,}11}{0{,}11} - \frac{1{,}11}{0{,}11\left((1{,}11)^{10}-1\right)+0{,}11} = 10{,}(09) - 3{,}55 = 6{,}54 \text{ года.}$$

Таким образом, дюрация облигации равна 6,54 года.

Пример 5.12. Найти дюрацию потока платежей {(100; 1), (200; 2), (300; 3), (400; 4)} при процентной ставке $y = 12\%$.

Приведем поток к начальному моменту времени

$$P = 100 \cdot 1{,}12^{-1} + 200 \cdot 1{,}12^{-2} + 300 \cdot 1{,}12^{-3} + 400 \cdot 1{,}12^{-4} =$$
$$= 89{,}29 + 159{,}44 + 213{,}53 + 254{,}21 = 716{,}47.$$

Далее найдем весовые коэффициенты по формуле (5.22):

$$w_k = \frac{R_k\left(1+y\right)^{-t_k}}{P};$$

$$w_1 = \frac{100 \cdot 1{,}12^{-1}}{716{,}47} = 0{,}125, \quad w_2 = \frac{200 \cdot 1{,}12^{-2}}{716{,}47} = 0{,}223;$$

$$w_3 = \frac{300 \cdot 1{,}12^{-3}}{716{,}47} = 0{,}298, \quad w_4 = \frac{400 \cdot 1{,}12^{-4}}{716{,}47} = 0{,}355.$$

Легко проверить, что сумма всех весов равна единице:

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 1.$$

Теперь по формуле (5.21) найдем

$$D = \sum_{k=1}^{4} w_k t_k = 0{,}125 \cdot 1 + 0{,}223 \cdot 2 + 0{,}298 \cdot 3 + 0{,}355 \cdot 4 = 2{,}885.$$

Пример 5.13.

Найти дюрацию облигации, продаваемой по номинальной стоимости со сроком погашения $n = 10$ лет и купонной ставкой $c = 8\%$ (с ежегодной выплатой).

Так как облигация продается по номиналу, то $y = c = 0{,}08$ и можно воспользоваться формулой (5.26):

$$D = \frac{1+y}{y}\left(1-(1+y)^{-n}\right) = \frac{1{,}08}{0{,}08}(1-1{,}08^{-10}) = 7{,}25.$$

Пример 5.14. Облигация со сроком погашения n = 15 лет и купонной ставкой c = 10% (с ежегодной выплатой) имеет доходность к погашению $y = 8\%$. Найти ее дюрацию.

Воспользуемся формулой (5.25):

$$D = \frac{1+y}{y} - \frac{n(c-y)+1+y}{c\left((1+y)^n-1\right)+y} =$$

$$= \frac{1{,}08}{0{,}08} - \frac{15 \cdot 0{,}02 + 1{,}08}{0{,}1(1{,}08^{12}-1)+0{,}08} = 13{,}5 - \frac{1{,}38}{0{,}2318} = 7{,}55.$$

Наиболее важное приложение дюрации связано с применением формулы (5.24) ввиду ее простоты.

Пример 5.15. Дюрация облигации равна $D = 10$. Известно, что ее доходность к погашению увеличилась с 12 до 13,5%. На сколько процентов изменилась цена облигации?

Воспользуемся формулой (5.24):

$$\frac{\Delta V}{V} \approx -\frac{D}{1+y}\Delta y = -\frac{10}{1+0{,}12} \cdot 1{,}5\% = -13{,}39\%.$$

Таким образом, цена облигации уменьшилась на 13,39%.

Для уточнения приближенной формулы (5.26) вводится понятие выпуклости.

Вопросы и задачи

5.56. Дайте определение и приведите формулу для дюрации облигации. Приведите пример.

5.57. Перечислите свойства дюрации для положительных потоков платежей.

5.58. Докажите, что для бескупонной облигации (c = 0) дюрация совпадает со сроком погашения $D = n$.

5.59. Докажите, что для относительного изменения цены облигации $\frac{\varnothing V}{V}$ при изменении доходности на Δy справедлива приближенная формула

$$\frac{\Delta V}{V} \approx -\frac{D}{1+y}\Delta y.$$

5.60. Докажите, что дюрация облигации не зависит от номинальной стоимости и дается формулой

$$D=\frac{1+y}{y}-\frac{n(c-y)+1+y}{c\left((1+y)^n-1\right)+y}.$$

5.61. Докажите, что дюрация облигации является убывающей функцией доходности к погашению y.

5.62. Докажите, что дюрация облигации является убывающей функцией купонной ставки c.

5.63. Докажите, что для бессрочных облигаций ($n\to\infty$)

$$D_\infty=\frac{1+y}{y}.$$

5.64. Найдите дюрацию облигации сроком до погашения 4 года, если ежегодный купонный платеж составляет 100 у.е., номинал — 1500 у.е. Облигация продается по цене 1000 у.е.

5.65. Облигация продается по номинальной стоимости со сроком погашения 7 лет и купонной ставкой 9% (с ежегодной выплатой). Какова дюрация облигации?

5.66. Дайте определение и приведите формулу для модифицированной дюрации облигации. Проиллюстрируйте на примере.

5.67. Портфель содержит 35% облигаций A и 65% облигаций B с дюрациями D(A) = 5 лет и D(B) = 4 года. Найдите дюрацию портфеля.

5.68. Облигация продается за 2000 у.е. при доходности 6%. Дюрация облигации составляет 9 лет. Насколько изменится цена облигации при увеличении доходности до 7%? Найдите новую цену облигации при таком изменении.

5.69. Докажите, что для относительного изменения цены облигации $\frac{\varnothing V}{V}$ при изменении доходности на Δy справедлива приближенная формула

$$\frac{\Delta V}{V}\approx-\frac{D}{1+y}\Delta y+\frac{1}{2}W\cdot\left(\Delta y\right)^2.$$

5.70. Менеджер должен выплатить через 4 года долг в размере 100 000 у.е. Сколько двухлетних бескупонных облигаций типа A (цена одной такой облигации составляет 700 у.е. и номинал — 900 у.е.) и сколько четырехлетних облигаций типа B (купонная ставка — 12%, номинал — 1500 у.е., доходность к погашению — 6%) ему следует купить, чтобы защитить средства от изменений процентной ставки?

5.71. Облигация со сроком погашения 10 лет и купонной ставкой 5% (с ежегодной выплатой) имеет доходность к моменту погашения 12%. Найдите дюрацию облигации.

5.72. Облигация сроком до погашения 5 лет, купонной ставкой 10% и номиналом 1000 у.е. продается по цене 800 у.е. Вычислите дюрацию облигации.

5.73. Облигация продается по номинальной стоимости со сроком погашения 6 лет и купонной ставкой 7% (с ежегодной выплатой). Определите дюрацию облигации. Найдите изменение дюрации при увеличении доходности облигации на 1%, при уменьшении доходности облигации на 1%. Объясните полученные результаты.

5.74. Дюрация облигации составляет 5 лет. Найдите относительное изменение цены облигации при увеличении доходности к погашению с 7 до 10%.

5.75. Облигация номиналом 1000 у.е. приобретена по цене 900 у.е. за 3 года до погашения. Купонная ставка составляет 10% (с ежегодной выплатой). Прогнозируется рост доходности на 2%. Используя дюрацию, найдите в первом приближении ожидаемую цену облигации.

5.6. Выпуклость облигации

Выпуклостью облигации $W(y)$ при данной доходности y называют величину

$$W(y) = \frac{V''(y)}{V(y)}(1+y)^2. \tag{5.28}$$

Для нахождения выпуклости используют следующую формулу, которая получается непосредственным дифференцированием формулы (5.2) с заменой переменной ρ на y:

$$W(y) = \frac{c}{K}\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(1+y)^{-k} + \frac{n(n+1)}{K}(1+y)^{-n}. \tag{5.29}$$

Напомним, что c — купонная ставка, $K = \dfrac{V}{N}$ — курс облигации, n — срок погашения, y — доходность облигации.

Основное применения понятия «выпуклость» — это уточнение приближенной формулы (5.26). А именно справедливо следующее утверждение: для относительного изменения цены облигации $\dfrac{\varnothing V}{V}$ при изменении доходности на Δy справедлива приближенная формула

$$\frac{\Delta V}{V} \approx -\frac{D}{1+y}\Delta y + \frac{1}{2}W \cdot (\Delta y)^2. \tag{5.30}$$

На рисунке 5.4 даны графики зависимостей $V = V(y)$ для двух облигаций, у которых при $y = y_0$ совпадают доходности и дюрации, однако выпуклость одной (показана штрихом) больше другой (сплошная линия).

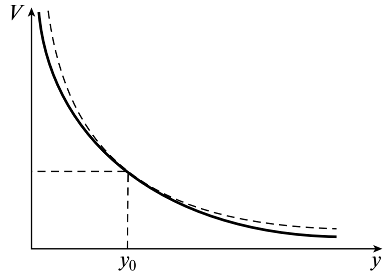

Рис. 5.4. Зависимости цены облигации V от доходности облигации $yV = V(y)$ для двух облигаций с разной выпуклостью

Вопросы и задачи

5.76. Дайте определение выпуклости облигации и приведите формулу для ее вычисления.

5.7. Иммунизация портфеля облигаций

Под **иммунизацией портфеля облигаций** понимается такое управление портфелем, которое позволяет сохранять уровень его доходности на протяжении некоторого периода, несмотря на скачки рыночной процентной ставки. Примером иммунизированного портфеля может служить портфель облигаций, принадлежащий, скажем, пенсионному фонду, если дюрация портфеля облигаций равна дюрации обязательств этого фонда.

Существует теорема об иммунизации. Предположим, необходимо выплатить долг R ровно через n лет. Дюрация такого платежа равна n. Один из способов оплаты долга состоит в покупке бескупонной n-годичной облигации номинальной стоимостью $N = R$ под годовую процентную ставку r. Тогда покупка облигации обойдется в $P = N/(1 + r)^n$. Пол Самуэльсон указал на возможность замены одной облигации двумя так, что при данной процентной ставке текущая стоимость не меняется, а при изменении процентной ставки только увеличивается. Это связано с тем, что текущая стоимость есть убывающая функция от процентной ставки, а облигации с разными сроками погашения по-разному реагируют на изменение процентной ставки.

Итак, пусть требуется выплатить долг в размере R в момент времени t. Покупка облигации номинальной стоимостью $N = R$ со сроком погашения t обеспечит выплату долга. Назовем ее облигацией I. Текущая стоимость облигации I равна

$$P_1 = N/(1+r)^t. \tag{5.31}$$

Рассмотрим две бескупонные облигации с номинальными стоимостями N_1 и N_2 и сроками погашения соответственно t_1 и t_2, причем выполняется неравенство

$$t_1 < t < t_2.$$

Портфель, состоящий из этих облигаций, назовем облигацией II. Облигация II имеет текущую стоимость

$$P_2 = \frac{N_1}{(1+r)^{t_1}} + \frac{N_2}{(1+r)^{t_2}}. \tag{5.32}$$

Потребуем, чтобы при $r = r_0$ выполнялись условия

$$\begin{cases} P_1(r_0) = P_2(r_0), \\ D_1(r_0) = D_2(r_0). \end{cases} \tag{5.33}$$

Эти условия обеспечивают эквивалентность двух денежных потоков, связанных с облигациями I и II, и равенство их дюраций при $r = r_0$. При этом графики функций $P_1(r)$ и $P_2(r)$ выглядят так же, как на рис. 5.4, т.е. они касаются в некоторой точке $r = r_0$. Можно показать, что для остальных значений r выполняется неравенство

$$P_1(r) < P_2(r). \tag{5.34}$$

Для этого достаточно убедиться, что такое же неравенство справедливо для вторых производных при $r = r_0$.

Отметим, для того чтобы обеспечить выполнение условий (5.33), достаточно потребовать, чтобы веса платежей w_1, w_2 удовлетворяли системе уравнений

$$\begin{cases} w_1 + w_2 = 1, \\ t_1 w_1 + t_2 w_2 = t. \end{cases} \tag{5.35}$$

В рассмотренной ситуации говорят, что облигация II иммунизирует облигацию I.

Пример 5.16. Построить портфель из трехлетней и пятилетней облигаций, иммунизирующий четырехлетнюю облигацию номинальной стоимостью 3000 у.е. для процентной ставки 15%.

Запишем систему уравнений (5.35):

$$\begin{cases} w_1 + w_2 = 1, \\ 3w_1 + 5w_2 = 4, \end{cases}$$

откуда находим

$$w_1 = \frac{1}{2},\ w_2 = \frac{1}{2}.$$

Теперь определим текущие стоимости всех облигаций:

$$P = 3000 \cdot 1{,}15^{-4} = 1715,\ 26;\ P_1 = \frac{1}{2}P = 857,\ 63;\ P_2 = \frac{1}{2}P = 857,\ 63.$$

Далее найдем номинальные стоимости облигаций, входящих в портфель:

$$N_1 = P_1 \cdot 1{,}15^3 = 1304,\ 35;\ N_2 = P_2 \cdot 1{,}15^5 = 1725.$$

Таким образом, иммунизирующий портфель состоит из трехлетней облигации номинальной стоимостью 1304,35 у.е. и пятилетней номиналом 1725 у.е. Можно легко проверить, что при изменении процентной ставки текущая стоимость данного портфеля будет выше.

Вопросы и задачи

5.77. Дайте определение иммунизации портфеля облигаций.

5.78. Сформулируйте и докажите теорему об иммунизации портфеля облигаций.

5.8. Портфель облигаций

Портфель облигаций, состоящий из облигаций разных видов, сроков погашения, размеров купонного дохода и других характеристик, имеет свою доходность, средний срок поступлений, дюрацию, модифицированную дюрацию, выпуклость и другие параметры, характеризующие портфель в целом. Обсудим вычисление этих характеристик портфеля.

5.8.1. Доходность портфеля облигаций

Напомним, как определяется доходность отдельной облигации. Если известны рыночная цена облигации, ее номинальная стоимость N, срок погашения n и купонная ставка c, то доходность к погашению ρ определяют как решение уравнения

$$V = \sum_{k=1}^{n} \frac{cN}{(1+\rho)^k} + \frac{N}{(1+\rho)^n} \tag{5.36}$$

или эквивалентно как решение уравнения

$$V = cN\frac{1-(1+\rho)^{-n}}{\rho} + N(1+\rho)^{-n}. \tag{5.37}$$

При определении доходности портфеля облигаций она также находится как решение уравнения, в котором сумма приведенных величин общего потока доходов приравнивается к общей рыночной стоимости облигаций, составляющих портфель

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{S_i}{(1+\rho)^i} = \sum_{k=1}^{m} q_k P_k\ , \tag{5.38}$$

где S_i — суммарный доход от облигаций в момент времени $t = i$; q_k — количество облигаций вида k; P_k — цена облигации вида k; m — количество видов облигаций в портфеле; n — максимальный срок выплаты дохода.

В общем случае решение уравнения (5.38) относительно процентной ставки (доходности портфеля) ρ находится итерационными методами, например методом Ньютона — Рафсона, или на основе линейной интерполяции. В последнем случае можно использовать формулу

$$\rho = \rho' + \frac{P' - P}{P' - P''}(\rho' - \rho''), \tag{5.39}$$

где ρ', ρ'' — минимальное и максимальное значения доходности портфеля облигаций, ограничивающие интервал, в пределах которого ожидается неизвестное значение доходности портфеля ρ; P — рыночная стоимость портфеля; P', P'' — расчетные стоимости портфеля при применении ставок ρ', ρ''.

Величину ставки удобнее определять не по формуле (5.39), а как среднюю взвешенную величину доходности всей совокупности облигаций. Теперь под ρ будем подразумевать среднюю взвешенную величину доходности. В качестве веса берется рыночная стоимость соответствующего количества облигаций ($q_k P_k$ или $q_k K_k$)

$$\rho = \frac{\sum_k \rho_k q_k P_k}{\sum_k q_k P_k} = \frac{\sum_k \rho_k q_k K_k}{\sum_k q_k K_k}, \tag{5.40}$$

где K_k — курс облигаций вида k.

Более адекватным, однако, является использование в качестве весов произведение дюрации каждого вида облигации, D_k, на стоимость соответствующего количества облигаций

$$\rho = \frac{\sum_k \rho_k D_k q_k P_k}{\sum_k D_k q_k P_k} = \frac{\sum_k \rho_k D_k q_k K_k}{\sum_k D_k q_k K_k}. \tag{5.41}$$

Пример 5.17. Найти доходность портфеля облигаций, состоящего из двух видов облигаций по 10 и 20 штук с доходностями 30 и 40% и курсами 102 и 110 соответственно.

Используем формулу для доходности портфеля облигаций

$$\rho = \frac{\sum_k \rho_k q_k K_k}{\sum_k q_k K_k} = \frac{0,3 \cdot 10 \cdot 102 + 0,4 \cdot 20 \cdot 110}{10 \cdot 102 + 20 \cdot 110} = \frac{1186}{3220} = 0,3683.$$

Таким образом, доходность портфеля облигаций равна 36,83%.

Вопросы и задачи

5.79. Дайте определение доходности портфеля облигаций и приведите формулу для ее вычисления.

5.80. Какие параметры используются в качестве весов при определении доходности портфеля облигаций?

5.81. Найдите доходность портфеля облигаций, состоящего из двух видов облигаций по 15 и 36 штук с доходностями 20 и 60% и курсами 97 и 104 соответственно.

5.82. Найдите доходность портфеля облигаций, состоящего из трех видов облигаций по 100, 150 и 190 штук с доходностями 10, 23 и 50% и курсами 97, 115 и 104 соответственно.

5.83. Найдите доходность портфеля облигаций, состоящего из четырех видов облигаций по 100, 200, 250 и 30 штук с доходностями 12, 25, 16 и 30% и курсами 95, 110, 99 и 106 соответственно.

5.84. Найдите доходность портфеля облигаций, состоящего из двух видов облигаций по 15 и 36 штук с доходностями 20 и 60% и ценами 1000 руб. и 2000 руб. соответственно.

5.85. Найдите доходность портфеля облигаций, состоящего из трех видов облигаций по 100, 150 и 190 штук с доходностями 10, 23 и 50% и ценами 500, 1600 и 2300 руб. соответственно.

5.86. Найдите доходность портфеля облигаций, состоящего из четырех видов облигаций по 100, 200, 250 и 30 штук с доходностями 12, 25, 16 и 30% и ценами 400,1200, 850 и 2800 руб. соответственно.

5.8.2. Средний срок поступления дохода портфеля облигаций

Средний срок поступления дохода портфеля облигаций в целом T_0 находится как средняя взвешенная величина. В качестве весов берутся стоимости облигаций

$$T_0 = \frac{\sum_k T_k q_k P_k}{\sum_k q_k P_k}. \tag{5.42}$$

Здесь T_k — средний срок поступления дохода облигаций вида k.

Портфель с меньшим средним сроком поступления дохода при прочих равных условиях имеет меньший риск, чем с более длительным сроком.

Пример 5.18. Найти средний срок поступления дохода портфеля облигаций, состоящего из двух видов облигаций по 100 и 150 штук со средними сроками поступления 3,5 года и 5 лет и ценами 920 и 1100 руб. соответственно.

Используем формулу для среднего срока поступления дохода портфеля облигаций.

$$T_0 = \frac{\sum_k T_k q_k P_k}{\sum_k q_k P_k} = \frac{3{,}5 \cdot 100 \cdot 920 + 5 \cdot 150 \cdot 1100}{100 \cdot 920 + 150 \cdot 1100} = \frac{1\,147\,000}{257\,000} = 4{,}46 \text{ года.}$$

Таким образом, средний срок поступления дохода портфеля облигаций равен 4,46 года, или приблизительно 4,5 года.

Вопросы и задачи

5.87. Какие параметры используются в качестве весов при определении среднего срока поступления дохода портфеля облигаций?

5.88. Найдите средний срок поступления дохода портфеля облигаций, состоящего из двух видов облигаций по 30 и 67 штук со средними сроками поступления 2,5 года и 7 лет и ценами 800 и 900 руб. соответственно.

5.89. Найдите средний срок поступления дохода портфеля облигаций, состоящего из двух видов облигаций по 25 и 45 штук со средними сроками поступления 3 года и 8 лет и ценами 1200 и 700 руб. соответственно.

5.90. Найдите средний срок поступления дохода портфеля облигаций, состоящего из трех видов облигаций по 125, 200 и 345 штук со средними сроками поступления 2 года, 4 года и 6 лет и ценами 750, 1400 и 550 руб. соответственно.

5.91. Найдите средний срок поступления дохода портфеля облигаций, состоящего из трех видов облигаций по 15, 20 и 35 штук со средними сроками поступления 1 год, 2,5 года и 5,5 лет и ценами 250, 300 и 450 руб. соответственно.

5.92. Найдите средний срок поступления дохода портфеля облигаций, состоящего из четырех видов облигаций по 100, 200, 300 и 350 штук со средними сроками поступления 3 года, 2,5 года, 7 лет и 6,5 лет и ценами 2000, 3000, 1500 и 2500 руб. соответственно.

5.8.3. Дюрация портфеля облигаций

Дюрация — это средняя взвешенная продолжительность выплат доходов от облигации с весами, равными дисконтированным величинам доходов. Ниже мы установим связь между дюрацией портфеля облигаций и дюрациями отдельных облигаций данного портфеля.

Пусть портфель состоит из двух облигаций с потоками доходов R_k и S_k и дюрациями

$$D_1 = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k R_k \left(1+y\right)^{-t_k}}{\sum_{k=1}^{n} R_k \left(1+y\right)^{-t_k}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k R_k \left(1+y\right)^{-t_k}}{P_1} \text{ и } D_2 = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k S_k \left(1+y\right)^{-t_k}}{P_2}. \quad (5.43)$$

Для объединенного потока доходов от двух облигаций имеем

$$D_0 = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k R_k \left(1+y\right)^{-t_k} + \sum_{k=1}^{n} t_k S_k \left(1+y\right)^{-t_k}}{P_1 + P_2}. \quad (5.44)$$

Если в портфеле q_1 и q_2 облигаций, то потоки доходов увеличиваются пропорционально этим величинам. Имеем

$$D_0 = \frac{q_1 \sum_{k=1}^{n} t_k R_k (1+y)^{-t_k} + q_2 \sum_{k=1}^{n} t_k S_k (1+y)^{-t_k}}{q_1 P_1 + q_2 P_2}. \qquad (5.45)$$

Из (5.43) следует, что

$$D_1 P_1 = \sum_{k=1}^{n} t_k R_k (1+y)^{-t_k} \text{ и } D_2 P_2 = \sum_{k=1}^{n} t_k S_k (1+y)^{-t_k},$$

поэтому

$$D_0 = \frac{D_1 q_1 P_1 + D_2 q_2 P_2}{q_1 P_1 + q_2 P_2}. \qquad (5.46)$$

Таким образом, приходим к выводу, что дюрация портфеля облигаций равна средней взвешенной дюраций отдельных облигаций данного портфеля с весами, равными стоимостям облигаций.

Обобщая (5.46) на случай m-видов облигаций, получим

$$D_0 = \frac{\sum_{k=1}^{m} D_k q_k P_k}{\sum_{k=1}^{m} q_k P_k} = \sum_{k=1}^{m} D_k h_k, \qquad (5.47)$$

где h_k — стоимостная доля облигаций вида k.

Стоимостную долю облигаций можно получить на основе не только цен облигаций, но и их курсов. В данном случае

$$h_k = \frac{q_k P_k}{\sum_{k=1}^{m} q_k P_k} = \frac{q_k K_k}{\sum_{k=1}^{m} q_k K_k}, \qquad (5.48)$$

при этом

$$\sum_{k=1}^{m} h_k = 1. \qquad (5.49)$$

Пример 5.19. Найти дюрацию портфеля облигаций, состоящего из двух видов облигаций по 10 и 15 штук с дюрациями 4 года и 5 лет и ценами 950 и 1000 руб. соответственно.

Используем формулу для дюрации портфеля облигаций

$$D_0 = \frac{D_1 q_1 P_1 + D_2 q_2 P_2}{q_1 P_1 + q_2 P_2} = \frac{4 \cdot 10 \cdot 950 + 5 \cdot 15 \cdot 1000}{10 \cdot 950 + 15 \cdot 1000} = \frac{11\,3000}{24\,500} = 4{,}6 \text{ года.}$$

Таким образом, дюрация портфеля облигаций равна 4,6 года.

Вопросы и задачи

5.93. Какие параметры используются в качестве весов при определении дюрации портфеля облигаций?

5.94. Найдите дюрацию портфеля облигаций, состоящего из двух видов облигаций по 30 и 67 штук с дюрациями 2,5 года и 7 лет и ценами 800 и 900 руб. соответственно.

5.95. Найдите дюрацию портфеля облигаций, состоящего из двух видов облигаций по 35 и 55 штук с дюрациями 3 года и 8 лет и ценами 1200 и 700 руб. соответственно.

5.96. Найдите дюрацию портфеля облигаций, состоящего из трех видов облигаций по 225, 300 и 445 штук с дюрациями 2 года, 4 года и 6 лет и ценами 750, 1400 и 550 руб. соответственно.

5.97. Найдите дюрацию портфеля облигаций, состоящего из трех видов облигаций по 12, 25 и 40 штук с дюрациями 1 год, 3,5 года и 6 лет и ценами 250, 400 и 550 руб. соответственно.

5.98. Найдите дюрацию портфеля облигаций, состоящего из четырех видов облигаций по 200, 300, 400 и 350 штук с дюрациями 3 года, 4 года, 8 и 9 лет и ценами 3000, 4000, 5500 и 6500 руб. соответственно.

5.99. Найдите дюрацию портфеля облигаций, состоящего из двух видов облигаций по 35 и 55 штук с дюрациями 3 года и 8 лет и курсами 96 и 100 соответственно.

5.100. Найдите дюрацию портфеля облигаций, состоящего из трех видов облигаций по 225, 300 и 445 штук с дюрациями 2 года, 4 года и 6 лет и курсами 95, 105 и 101 соответственно.

5.101. Найти дюрацию портфеля облигаций, состоящего из четырех видов облигаций по 100, 300, 200 и 650 штук с дюрациями 3 года, 2 года, 5 и 6 лет и курсами 92, 103, 89 и 104 соответственно.

5.8.4. Выпуклость портфеля облигаций

Выпуклость портфеля облигаций C_0, как и дюрация, находится как средняя взвешенная выпуклость отдельных облигаций данного портфеля с весами, равными стоимостям облигаций.

$$C_0 = \frac{\sum_{k=1}^{m} C_k q_k P_k}{\sum_{k=1}^{m} q_k P_k} = \sum_{k=1}^{m} C_k h_k. \tag{5.50}$$

Вопросы и задачи

5.102. Дайте определение доходности портфеля облигаций.

5.103. Какие величины берутся в качестве весов при вычислении средней взвешенной величины доходности портфеля облигаций?

5.104. Дайте определение среднего срока поступления дохода портфеля облигаций.

5.105. Какие величины берутся в качестве весов при вычислении среднего срока поступления дохода портфеля облигаций как средней взвешенной величины?

5.106. Выведите связь между дюрацией портфеля облигаций и дюрациями отдельных облигаций данного портфеля.

5.107. Выразите стоимостную долю облигаций через их курсовую стоимость (курсы облигаций).

5.108. Дайте определение и приведите формулу для выпуклости портфеля облигаций.

5.109. Какие величины берутся в качестве весов при вычислении выпуклости портфеля облигаций как средней взвешенной величины?

5.110. Менеджер должен выплатить через 3 года долг в размере 650 000 у.е. и через 5 лет долг в размере 300 000 у.е. Сколько двухлетних и девятилетних бескупонных облигаций ему следует купить, чтобы защитить средства от изменений процентной ставки при условии, что процентная ставка составляет 10% (номиналы облигаций равны 1000 у.е.)?

5.111. Найдите изменение цены облигации со сроком погашения $n = 7$ лет, доходностью $y = 8$, купонной ставкой $c = 7$ при уменьшении доходности до 5%.

5.112. Стоит ли покупать за 1000 руб. облигацию номиналом 1200 руб. и длительностью 7 лет, если она в конце каждого полугодия дает 50 руб. процентного дохода и в конце срока погашается по номиналу, когда есть возможность поместить эти денежные средства в банк под 7% годовых?

5.113. Облигация с номиналом 5000 руб. и объявленной доходностью 7,5% годовых сроком погашения через 3 года куплена в момент ее выпуска 15 февраля. По облигации каждый квартал выплачивается купонный доход. Через некоторое время владелец облигации решил ее продать. Какую цену владелец облигации назначит за облигацию при норме доходности 7,5% годовых, если: а) облигация продается 20.03 следующего года, б) продается 25.09 следующего года? Временна́я база $K = 360$ дней.

ОТВЕТЫ

К главе I

1.1. 69,2%
1.2. 726 250 руб.
1.3. 277 200 руб.; 97 200 руб.; в 1,04 раза
1.4. 119,7%
1.5. 4,2 года
1.6. В 1,8 раза
1.7. На 23,1%
1.8. 21 396,1 у.е.
1.9. 325 203,25 руб.; 25 203,25 руб.
1.10. 164 901,64 руб.; 164 731,88 руб.; на 169 руб. 63 коп.
1.12. Простой — 64 166,67 руб., сложный — 64 024,63 руб.
1.13. Простой — 10,56%, сложный —10,66%
1.14. 4040,33 руб.
1.16. 16 304,78 руб.
1.17. 3330,75 у.е., 9,45%
1.18. (365/365) × 328 537 руб.; (365/360) × 328 933 руб.; (360/360) × × 328 667 руб.;
1.20. (365/365) × 659,32 руб.; (365/360) × 668,58 руб.; (360/360) × × 662,33 руб.
1.21. Сложный процент
1.22. 67 828,58 руб.
1.24. S = 44 277,78 руб.; R = 4277,78 руб.
1.25. 16%
1.26. 634 847,6 руб.
1.28. 77 347 руб.; 2653 руб.
1.29. 149 965,28 у.е.
1.30. 1562 руб.; 1585 руб.; 1570 руб.
1.32. На 17,65 у.е.
1.33. 27 608,66 руб.; 32 372,64 руб.; 37 958,67 руб.
1.34. 25 437,25 руб.
1.35. 82 666,64 руб.

1.36. 10 443,06 руб.
1.37. 31 347,5 руб.
1.38. Простой — 15 246,58 руб.; сложный — 15 243,75 руб.
1.39. 52 351,77 руб.; 52 388,89 руб.
1.40. 13 664 руб.; 13 477 руб.; 13 276 руб.; 13 413 руб.; 13 222 руб.
1.41. 1758,75 руб.
1.42. 7,96%; 8,1%
1.43. 240 дней
1.44. 16,75%
1.45. 44 827,59 руб.
1.46. 110 921 руб.
1.47. 786 527,34 руб.
1.48. 28.08 следующего года
1.49. 19 дней
1.50. 25.08 (540 дн.)
1.51. а) 84,23%; б) 84,38%
1.52. 73 дня
1.53. 77 808,89 руб.
1.54. 155 196,18 руб.
1.55. Простые — 11,07% ; сложные — 11,28%
1.56. 277 дней; 281 день
1.57. 20 дней, 19 дней
1.58. Простой — 7500 руб.; сложный — 7410 руб.
1.59. Простой — 44 444,44 руб.; сложный — 42 874,73 руб.
1.60. $S_n = S_0\, e^n$
1.61. Годовой депозит выгоднее; 3000 руб.; 2785 руб.
1.62. а) 48 736,12 у.е.; 8736,12 у.е.; 10,38%; б) 48 815,64 у.е.; 8815,64 у.е.; 10,47%
1.63. За 5 лет
1.64. а) 337 828,73 руб.; 187 828 руб.; 14,5%; б) 342 499,27 руб.; 192 499,3 руб.; 14,75%; в) 345 769,74 руб.; 195 770 руб.; 14,93%; г) 347 455 руб.; 197 455 руб.; 15%;
1.65. 4,16%; 3,34%; 4,60%
1.66. а) 3560 руб.; б) 3848 руб.
1.67. а) 3,1 года; б) 2,9 лет
1.68. 20%; 16,67%
1.70. 551 906,5 руб.; 556 512,5 руб.; 557 500 руб.
1.71. 488 750 руб.; 994 802 руб.
1.72. 2 154 553,29 руб.; 14,48%
1.73. За 2,97 года; за 3 года

1.74. а) 103 422 руб.; 33 422 руб.; 10,25%; б) 103 915 руб.; 33 915 руб.; 10,38%; в) 104 255 руб.; 34 255 руб.; 10,47%
1.75. 31,6%; 24,9%
1.76. 6,6%
1.77. Наиболее выгодный вариант для заемщика — 22% с полугодовым начислением, для банка — 18% с ежемесячным начислением
1.78. 140 у.е.
1.79. 7,2%; 7,5%
1.80. 25 000, 4 у.е.
1.81. Простой — 60 000 руб., сложный — 76 234,17 руб.
1.82. 24 493 руб.
1.83. 21 600 руб., 22 200 руб.
1.84. 554,07 руб.; 10 714,29 руб.; 22 059 руб.; 416 667 руб.
1.85. Простой — 10,2%, сложный — 8%
1.86. 19 065,54 руб.
1.87. 1 012 457 руб.
1.88. 72 398,76 у.е.; 174 524,36 у.е.
1.90. 53%; 81,3%
1.92. 8,75%; 8,4%
1.93. Наращение по схеме простых процентов выгоднее при сроке $n < 1$, по схеме сложных процентов — при сроке $n > 1$, при сроке $n = 1$ обе схемы эквивалентны
1.94. 61 739,37 руб.
1.96. 7 003 428,9 руб.; 4 503 428,9 руб.
1.97. В 1,046 раза
1.98. 22 000 руб.; 23 000 руб.
1.99. 3,5%; 3,45%; 3,445%
1.100. 51 045 руб.; 3904 руб.
1.101. 5796,86 руб.
1.102. $m = 2$
1.103. 83 853 руб.
1.104. 7,35%
1.105. 4103,44 руб.; 135,41 руб.; 5803,44 руб.; 203,12 руб.
1.106. 117 руб. (простой процент)
1.107. 2002 у.е.
1.108. Через 9,2 года
1.109. Простой — 7,5%, 1,63%; сложный — 9,02%, 4,62%
1.110. 5,39%
1.111. 3,6 лет

1.112. 46 800 руб.; 40 800 руб.; 48 960 руб.
1.113. 264 423,86 руб.; 4,3 года
1.114. 9,8%
1.115. 15%
1.117. 11,6%
1.118. 12,76%
1.120. 7,04%
1.121. 3,94%
1.122. 65 254 руб.
1.125. а) на 1,26% больше; б) на 1,56% больше; в) на 1,70% больше
1.126. 51 399 руб.; 135 202 руб.
1.128. 175 190,4 руб.
1.129. 39 127,22 руб.; 20 872,78 руб.
1.130. 19 219 руб.
1.133. 9,6%
1.135. 13%
1.136. 97 407,4 руб.
1.138. 40%
1.140. 10,56%
1.143. Сложные — 0,51; простые — 0,438
1.144. 6,69%; 6,89%
1.147. 54 861 руб.
1.149. 46 749 у.е.
1.159. 50 786,25 у.е.
1.161. 165 979,74 руб.; 235 043,91 руб.
1.163. 20 697,38 у.е.; 25 043,83 у.е.; 30 303,03 у.е.
1.165. 10%
1.167. Выгоднее депозит
1.171. 10,66 лет
1.176. 18,77%
1.179. 230 782,9 руб.
1.181. 9,27%; 19,4%; 42,58%
1.182. 5,5%
1.183. 21,4%
1.186. 19,6%
1.188. 7,1%
1.189. 4,66%
1.198. 18,6%
1.199. 19,8%; 16,8%
1.200. 13,23%; 20,51%

1.201. 38,4%; 19,2%
1.204. В 0,818 раз
1.207. 0,15
1.210. 0,206; 0,326
1.211. 0,340; 0,306
1.213. 22,5%
1.217. 16,075%; 16,18; 15,865
1.221. 11,63%
1.225. 11%
1.228. 4,9%
1.231. 12,2%
1.234. 10,5%
1.237. 6%
1.240. 11,8%

К главе 2

2.3. 1875,4
2.4. 1202; 1759,75
2.5. Предпочтительнее второй поток, у которого средний срок (1,91) меньше среднего срока первого потока (1,92)
2.6. Предпочтительнее второй поток, у которого средний срок (0,92) меньше среднего срока первого потока (1,11)
2.9. 6,38%
2.10. 110%
2.12. 47,7%
2.13. 12%
2.14. 30,55%
2.15. а) 153 812,98 руб.; б) 161 343,28 руб.; в) 120 876,85 руб.
2.16. В случае «а» (а) 342 892,89; б) 329 714,21). Указание: использовать формулы для *p*-срочной ренты
2.18. а) 171 189,57 руб.; б) 250 000 руб.
2.19. Поместить в банк
2.20. а) на 4,49%; б) на 2,32%
2.22. а) 175 140 у.е.; б) 175 241,15 у.е.
2.23. На 2,51%. Указание: использовать формулы для *p*-срочной ренты
2.25. > 6,88 года
2.27. 23 893,36 руб.

2.30. а) 1343,63 у.е.; б) 118,49 у.е.; в) 1486,61 у.е.
2.31. 45 450,8 у.е.
2.34. 82 000 000 у.е.
2.35. Через 15,3 года
2.37. Увеличение длительности ренты, 1,76R; 0,127R
2.44. A, i, n, R, S
2.47. $\ddot{s} = \dfrac{A(1+i)^{n+1}}{R}$
2.48. $\ddot{a} = \dfrac{S}{R(1+i)^{n-1}}$
2.49. $S = A \cdot (1 + i)^n$
2.50. $S = R \cdot \ddot{s} \cdot (1+i)^{-1}$
2.51. $\ddot{S} = A \cdot (1+i)^{n+1}$
2.52. $S = A \cdot (1 + i)^n$
2.53. $\ddot{s} = a \cdot (1+i)^{n+1}$
2.54. $\ddot{a} = s \cdot (1+i)^{-n+1}$
2.61. 3,147 года
2.62. За 22,45 года; на 44 466,33
2.63. 7,18 года
2.64. 12,39 года
2.65. $S = A \cdot (1 + i/k)^{kn}$; $A = \dfrac{S}{(1+i/k)^{kn}}$;
2.66. От i и n
2.67. 69 079 у.е.
2.68. 170 915 у.е.
2.69. 906,36 у.е.
2.71. 7005,82 у.е.
2.74. Увеличится в $\dfrac{i}{\sqrt{1+i}-1}$ раз (чуть более чем в 2 раза)
2.75. Уменьшение i
2.77. а) 4,95%; б) 4,84%
2.78. 3 008 153,65 у.е.
2.79. 49 940 у.е.
2.81. 62 421,97 у.е.
2.82. 78 038,32 у.е.
2.86. 10,8 года; на 2620,1 у.е.
2.87. n = 9,58 года; R = 62 706,86 у.е.
2.88. а) 28 952,41 у.е.; б) 29 152 у.е.
2.90. а) на 3,03%; б) на 0,78%; в) на 3,85%
2.91. На 31,6%

2.92. 2,72%; 67 645,12 у.е.; 69 485,78 у.е.
2.94. Выгоднее а) 12,5%, так как б) 11,15%
2.95. а) 3 058 371,16 у.е.; б) 3 168 953,32 у.е.
2.97. а) 306 961,4 у.е.; б) 296 272,5 у.е.
2.99. 6029 + 3523 + 3159 = 12711 у.е.
2.100. 182 615 у.е.
2.104. 5,43; 21,79
2.105. 435,3 руб.; 859,3 руб.
2.106. В 2,81 раза
2.107. 183 262,5 руб.
2.108. Сократится на 1,25 года
2.110. 6846,84 руб.
2.111. На 1587,076 руб.: 50 795,376 руб.; – 49 208,3 руб.
2.112. $A = R \cdot \dfrac{1-(1+i/k)^{-nk}}{k\ln(1+i/k)}$; $S = R \cdot \dfrac{(1+i/k)^{nk}-1}{k\ln(1+i/k)}$
2.113. 1138,86
2.114. а) на 48,279 руб.; б) на 187,095 руб.; 14 481,646 руб.; 14 433,367 руб.; 14 294,55 руб.
2.117. а) в 0,998 раз; б) в 1,027 раз
2.120. $A = R \cdot \dfrac{1-e^{-ni}}{i}$; $S = R \cdot \dfrac{e^{ni}-1}{i}$
2.121. $S = A \cdot e^{ni}$
2.122. 14 140,049; 128 896,68
2.123. 1300,6; 3719,1
2.124. а) на 46,45 руб.; б) на 182,065 руб.; 80 995,088 руб.; 80 948,642 руб.; 80 813,023 руб.
2.129. 44 909,6 руб.; 45 214 руб.
2.130. $S = A(1 + i)^n$
2.131. $\ddot{S} = \ddot{A}(1+i)^n$
1.132. $S = A(1 + i/4)^{4n}$
1.133. $\ddot{S} = \ddot{A}(1+i/12)^{12n}$
2.134. $S = A \cdot e^{ni}$
2.139. 40 473,36 руб.
2.140. 23 610,45 руб.
2.157. 37 299,92 у.е.
2.158. 127 925,9 у.е.
2.168. 6273,9
2.169. 12 219,63 у.е.

2.171. $R = 1{,}51$
2.172. 2362 у.е.; $I = 182\ 868$ у.е.
2.173. 68 000 у.е.
2.174. 21 012,92
2.176. 2,89.
2.178. 51 139,3 у.е.
2.179. 339 069 у.е.
2.180. 6273,2
2.181. 117 499,69 у.е.
2.183. 13 398 у.е.
2.185. 169 056,33 у.е.
2.186. а) 405 774; б) 274 879
2.188. 12 145 у.е.
2.189. 402 583 у.е.
2.192. 34 517; 52 779; 85 641
2.193. На 5 лет
2.198. 78 368,64 руб.
2.199. 461 921,15 руб.
2.200. В 1,79 раза
2.201. 1,1%
2.202. $p = 1{,}5$
2.231. 9071,73 руб.
2.235. 6477,93 руб.
2.274. $R/p = 119\ 682{,}43$ руб.; $I = 16\ 324\ 446{,}2$ руб.

К главе 3

3.6. 2,6%
3.7. 2,6%
3.8. 0,173
3.9. 0,263; 0,266
3.10. 0,253; 0,317
3.11. 0,646; 0,215
3.12. 0,272; 0,352
3.13. 0,294; 0,353
3.14. 60,1%
3.15. 7,1%
3.16. 4,66%

К главе 4

4.3. $\mu = 5{,}2\%$
4.4. 5,8%
4.5. $\sigma = 2{,}29$
4.6. $\mu = 8{,}7\%$
4.7. *C*, *D*, *A*, *B*, *E*
4.8. $X = (0{,}4;\ 0{,}356;\ 0{,}244)$
4.9. $X = (0{,}373;\ 0{,}26;\ 0{,}367)$
4.10. $X = (0{,}08;\ 0{,}333;\ 0{,}587)$
4.11. $X = (0{,}22;\ 0{,}333;\ 0{,}447)$
4.12. $X = (0{,}317;\ 0{,}333;\ 0{,}35)$
4.13. 0,055; 0,065; ...; 0,145
4.14. 0,254; 0,217; 0,18; ...; 0,032
4.15. $\|\rho\| = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}477 & 0{,}548 \\ -0{,}477 & 1 & -0{,}609 \\ 0{,}548 & -0{,}609 & 1 \end{pmatrix}$

4.16. $\|\rho\| = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}0714 & 0{,}3 \\ 0{,}0714 & 1 & -0{,}314 \\ 0{,}3 & -0{,}314 & 1 \end{pmatrix}$

4.17. $\mathrm{cov} = -0{,}07978;\ \rho = -0{,}3055$

4.18. $\|\rho\| = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}816 & 0{,}577 \\ 0{,}816 & 1 & 0 \\ 0{,}577 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4.20. $\mathrm{cov} = 0{,}1143;\ \rho = -0{,}886$
4.21. $\mu = 0{,}139;\ \sigma = 3{,}36$
4.22. $X = \left(\frac{1}{6};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{2}\right);\ \mu = 7{,}33\%;\ \sigma = 7{,}27$

4.24. 7%
4.25. $\mu = 5\%;\ \sigma = 85\%$
4.26. (1,0); (0,1)
4.27. а) (0,1); (1,0)
4.28. $X = (0,\ 21;\ 0,\ 79);\ \mu = 0{,}1895$
4.29. $X = (0,\ 5;\ 0,\ 5);\ \mu = 0{,}235$
4.30. $X = (0{,}6;\ 0{,}4);\ \sigma = 0{,}14$
4.31. $X = (0{,}625;\ 0{,}375);\ \sigma = 0{,}252$

4.32. $X = (0{,}2;\ 0{,}8)$; $\mu = 0{,}478$
4.33. $X = (0{,}25;\ 0{,}75)$; $\mu = 0{,}5375$
4.34. $X = (0{,}375;\ 0{,}625)$; $\mu = 0{,}2438$
4.36. $X = (0{,}6;\ 0{,}4)$; $\mu = 0{,}38$
4.37. $\sigma = 0{,}47$; $\mu = 0{,}142$
4.38. $X_{\min\sigma} = (0{,}45;\ 0{,}55)$; $\mu = 13{,}6\%$; $X_{\min\mu} = (1{,}0)$; $\sigma = 6\%$
4.39. $X_{\min\sigma} = (0{,}429;\ 0{,}571)$; $\mu = 0{,}16$; $\sigma = 0{,}6$
4.40. $X = (0{,}784;\ 0{,}216)$; $\sigma = 0{,}0558$
4.41. $X = (0{,}43;\ 0{,}57)$; $\sigma = 0{,}102$
4.42. $X = (0{,}57;\ 0{,}43)$; $\sigma = 0{,}0347$
4.43. $X_1 = (0{,}67;\ 0{,}33)$; $\mu_1 = 0{,}18$; $X_2 = (0{,}53;\ 0{,}47)$; $\mu_2 = 0{,}19$
4.44. $X = (0{,}86;\ 0{,}14)$; $\mu = 7{,}42\%$; $X = (0{,}62;\ 0{,}38)$; $\mu = 12\%$
4.45. $X = (0{,}51;\ 0{,}49)$; $\mu = 0{,}149$
4.46. $X = (0{,}37;\ 0{,}63)$; $\mu = 0{,}3453$
4.47. $X = (0{,}2;\ 0{,}8)$; $\mu = 0{,}25$
4.48. $X = (0{,}38;\ 0{,}62)$; $\mu = 29{,}52\%$
4.50. $X = (0{,}6;\ 0{,}4)$
4.51. $X = (0{,}9;\ 0{,}1)$; $\mu = 53\%$
4.52. $\sigma_2 = 0{,}23$; $\mu_0 = 0{,}55$; $\sigma = 0{,}707$
4.53. $X = (\mu = 0{,}46;\ \sigma = 0{,}18)$; $\sigma_2 = 0{,}2$
4.54. $X = \left(\dfrac{1}{3};\ \dfrac{2}{3}\right)$; $\mu = 43{,}3\%$; $\sigma = 0{,}231$
4.55. $X = (0{,}78;\ 0{,}22)$; $\sigma_2 = 0{,}753$; $\mu = 0{,}344$; $\sigma = 0{,}353$
4.56. $\sigma_2 = 0{,}35$; $\mu = 0{,}41$; $\sigma = 0{,}26$
4.57. $\mu_2 = 0{,}4375$
4.58. $X = (0{,}\ 61;\ 0{,}\ 39)$; $\mu = 0{,}356$; $\sigma = 0{,}64$
4.59. $\sigma_2 = 0{,}57$; $\mu = 0{,}68$; $\sigma = 0{,}29$
4.60. $\sigma_2 = 0{,}57$; $\mu_2 = 0{,}27$; $\sigma = 0{,}286$
4.61. $X = \left(\dfrac{2}{11};\ \dfrac{9}{11}\right)$; $\sigma_2 = 0{,}189$; $\sigma_0 = 0{,}17$; $\mu = 0{,}464$
4.62. $\sigma_2 = 0{,}58$; $\mu = 0{,}37$; $\sigma = 0{,}36$
4.63. $X = (0{,}\ 45;\ 0{,}\ 55)$; $\sigma_2 = 0{,}18$; $\mu = 0{,}51$; $\sigma = 0{,}134$
4.64. $X = (0{,}\ 457;\ 0{,}543)$; $\sigma_1 = 0{,}218$; $\mu_1 = 0{,}136$; $\mu_2 = 0{,}678$; $\sigma = 0{,}147$
4.65. $\sigma_1 = 0{,}49$; $\mu = 0{,}08$; $\mu_2 = 0{,}195$; $\sigma = 0{,}31$
4.66. $X = (0{,}465;\ 0{,}535)$; $\mu_1 = 0{,}25$; $\mu_2 = 0{,}34$; $\sigma_2 = 0{,}16$
4.67. $\sigma_2 = 0{,}4$; $\mu = 0{,}8756$; $\sigma_1 = 0{,}6$
4.68. $(0{,}42;\ 0{,}58)$; $\sigma_1 = 2{,}5\%$; $\sigma_2 = 3{,}25\%$
4.69. $X = (0{,}853;\ 0{,}147)$; $\sigma_1 = 0{,}108$; $\mu_2 = 0{,}1203$; $\sigma_2 = 0{,}26$
4.70. $X = (0{,}179;\ 0{,}821)$; $\sigma = 6{,}34$

4.71. (0,63; 0,37); 7,7%
4.73. $X = (0{,}79; 0{,}21)$; $\mu = 0{,}2419$; $\sigma = 0{,}2777$
4.74. (0,39; 0,61); $\mu = 15{,}7\%$; $\sigma = 31{,}3\%$
4.77. $X = (1, 0)$; $\sigma = 0{,}2$; $\mu = 0{,}5$
4.81. $X = (0{,}936; 0{,}064)$; $\sigma = 0{,}1$; $\mu = 0{,}6118$
4.83. (0,8; 0,2); $\mu = 25{,}8\%$; $\sigma = 30\%$
4.85. $X = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$; $\sigma = 0{,}449$
4.86. (0,91; 0,09); $\mu = 21{,}8\%$
4.89. $X = (0{,}37; 0{,}63)$; $\sigma = 0{,}371$; $\mu = 0{,}34$
4.91. $X = (0{,}52; 0{,}29; 0{,}19)$
4.92. $X = (0{,}29; 0{,}568; 0{,}142)$
4.93. $X = (0{,}545; 0{,}379; 0{,}076)$; $\sigma = 0{,}1846$; $\mu = 0{,}35$
4.94. $X = (0{,}29; 0{,}45; 0{,}26)$; $\mu_1 = 1{,}055$
4.97. $\sigma_2 = 0{,}118$; $X = (0{,}035; 0{,}102; 0{,}863)$; $\mu = 0{,}752$
4.98. $X = \left(\frac{1}{10}; \frac{3}{10}; \frac{6}{10}\right)$; $\sigma_3 = 7\%$; $\sigma = 5{,}6\%$
4.99. $X = (0{,}14; 0{,}36; 0{,}5)$; $\sigma_2 = 32{,}4\%$
4.100. $X = (0{,}213; 0{,}333; 0{,}454)$; $\sigma_2 = 11{,}1\%$; $\sigma = 6{,}4\%$
4.101. $X = (0{,}534; 0{,}333; 0{,}133)$; $\sigma_1 = 18\%$; $\sigma = 13{,}13\%$
4.102. $X = (0{,}29; 0{,}33; 0{,}38)$; $\sigma_1 = 24\%$; $\sigma = 13\%$
4.103. $X = (0{,}389; 0{,}33; 0{,}281)$; $\sigma_1 = 12{,}8\%$; $\sigma = 8{,}7\%$
4.104. $X = (0{,}679; 0{,}238; 0{,}083)$; $\mu = 0{,}996$; $\sigma_3 = 51{,}6\%$; $\sigma = 14{,}9\%$
4.105. $X = (0{,}173; 0{,}333; 0{,}493)$; $\sigma = 10{,}8\%$
4.106. $X = \left(\frac{1}{8}; \frac{4}{8}; \frac{3}{8}\right)$; $s_3 = 40\%$; $\sigma = 24{,}6\%$
4.111. $\mathrm{X} = (0{,}75; 0{,}25)$; $\sigma = 7{,}5\%$
4.113. $X = (0{,}16; 0{,}74)$; $\mu = 37{,}8\%$
4.114. $X = (0{,}7; 0{,}3)$; $s_2 = 0{,}195$
4.115. $X = \left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right)$; $\sigma = 0{,}34$
4.116. $X = (0{,}17; 0{,}83)$; $\sigma = 0{,}548$
4.117. $\mu_1 = 0{,}306$; $\sigma = 15{,}77\%$
4.118. $X = (0{,}23; 0{,}77)$; $\sigma = 0{,}405$; $\mu_2 = 0{,}24$
4.119. $X = \left(\frac{2}{11}; \frac{9}{11}\right)$; $\mu_2 = 0{,}53$; $\sigma = 0{,}21$
4.120. $\mu_2 = 0{,}49$; $\sigma = 49{,}6\%$

4.122. А) $X = (0{,}86; 0{,}14)$; $\mu = 0{,}156$; В) $X = (0{,}75; 0{,}25)$; $\mu = 0{,}2$
4.123. Для портфеля из двух бумаг $\sigma \in \{\sigma_{min} \cup < \{\sigma \leqslant \sigma_{max}\}\}$, где σ_{min} и σ_{max} — минимальное и максимальное значение риска бумаг портфеля
4.124. $0{,}4 < \sigma \leqslant 0{,}8$
4.125. 18,4%
4.126. $35\% < \sigma \leqslant 10\%$; $\sigma = 6{,}7\%$
4.127. $\sigma_2 = 51{,}1\%$; $X = \left(\frac{2}{7}; \frac{5}{7}\right)$
4.128. (0,33; 0,67); $\sigma = 86\%$
4.129. (0,46; 0,54); $\sigma_2 = 99{,}6\%$
4.130. (0,25; 0,75); $\mu = 1{,}05$; $\sigma_2 = 47\%$
4.131. (0,25; 0,75); $\mu = 72{,}5\%$; $\sigma_2 = 63{,}5\%$
4.132. (0,43; 0,57)

К главе 5

5.4. а) 8013,76; б) 7500,00; в) 7262,22; $K = 104$
5.5. а) 516,56; б) 500,00; в) 454,36; $K = 124$
5.6. а) 3500; б) 3179,16; в) 3035,70; $K = 122{,}8$
5.7. 1401,65
5.8. 1553,16
5.10. 1095,39
5.11. Не стоит, так как текущая стоимость облигации (4205,85 у.е.) выше рыночной цены
5.12. Стоит, так как текущая стоимость облигации в обоих случаях (а) 8768,06; б) 8328,55) выше рыночной цены
5.17. 10,2%
5.18. 11,32%
5.19. 13,89%
5.20. 8,56%
5.22. а) 6,25%; б) 1,82%; в) 12,20%
5.25. 10,76%
5.31. 6,56 года
5.32. 3,25 года
5.33. 5,99 года
5.34. 3,29 года; 4,5 года; 6,29 года

5.80. Рыночные стоимости соответствующего количества облигаций либо, что более адекватно, произведение дюрации каждого вида облигации на стоимость соответствующего количества облигаций
5.81. 48,8%
5.82. 31,72%
5.83. 19,44%
5.87. Стоимости облигаций
5.88. 5,72 года
5.89. 5,56 года
5.90. 4,34 года
5.91. 4,13 года
5.92. 1,08 года
5.93. Стоимости облигаций
5.94. 5,72 года
5.95. 5,39 года
5.96. 4,18 года
5.97. 4,86 года
5.98. 7,12 года
5.99. 6,10 года
5.100. 4,48 года
5.101. 4,65 года
5.103. Рыночные стоимости соответствующего количества облигаций либо, что более адекватно, произведение дюрации каждого вида облигации на стоимость соответствующего количества облигаций
5.105. Стоимости облигаций
5.109. Стоимости облигаций

ЛИТЕРАТУРА

1. *Брусов П.Н., Брусов П.П., Орехова Н.П., Скородулина С.В.* Финансовая математика. М. : КНОРУС, 2010.
2. *Kellison S.G.* The theory of interest. Irwin/McGraw-Hill, 1991.
3. *Четыркин Е.М.* Финансовая математика. М. : Дело, 2001.
4. *Малыхин В.И.* Финансовая математика. М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2000.
5. *Малыхин В.И.* Оптимальные портфели и пакеты ценных бумаг. М. : ГУУ, 2002.
6. *Четыркин Е.М.* Облигации. М. : Дело, 2005.
7. *Кириллица В.П.* Финансовая математика. Руководство к решению задач. Минск : ТетраСистемс, 2005.
8. *Печенежская И.А.* Финансовая математика. Сборник задач. Ростов-н/Д : Феникс, 2008.

ПРИМЕРЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ

Практика проведения экзамена в Финансовом университете такова.

Экзамен рассчитан на два астрономических часа, за ответ на каждый вопрос можно получить до 10 баллов, т.е. максимальная оценка по экзамену — 80 баллов. 20 баллов студент может получить за работу в семестре (триместре). Результаты экзамена и аттестации суммируются, и оценка ставится следующим образом (в баллах):

0—50 — неудовлетворительно;

51—69 — удовлетворительно;

70—85 — хорошо;

86—100 — отлично.

Возможны и другие схемы итоговой аттестации студентов.

Билет № 1

1. Выведите эффективную процентную ставку в случае простых процентов (три случая).

2. Выведите формулу для приведенной величины p-срочной ренты постнумерандо.

3. Замените две ренты постнумерандо с параметрами $R_1 = 2000$, $n_1 = 3$, $i_1 = 10\%$, $R_2 = 2500$, $n_2 = 5$, $i_2 = 15\%$ разовым платежом в момент времени $n = 4$, $i = 12\%$.

4. Портфель состоит из двух бумаг A и B. Ожидаемые доходности равны 0,6 и 0,4, а риски 0,1 и 0,5. Коэффициент корреляции равен –0,3. Найдите портфель минимального риска и его доходность.

5. Выведите связь между дюрацией портфеля облигаций и дюрациями отдельных облигаций данного портфеля.

6. Найдите портфель минимального риска из трех независимых бумаг, дисперсии которых равны 9, 16 и 25 соответственно.

7. Темп инфляции за год равен 24%. Найдите темп инфляции за месяц.

8. Постройте портфель из двухгодичной и четырехлетней облигаций, иммунизирующий трехлетнюю облигацию номинальной стоимостью 1500 руб. для процентной ставки 12%.

Билет № 2

1. Выведите эффективную процентную ставку в случае сложных процентов (три случая).

2. Выведите формулу для коэффициента приведения непрерывной ренты.

3. Консолидируйте три ренты постнумерандо с параметрами $R_1 = 1000$, $n_1 = 3$, $R_2 = 1500$, $n_2 = 5$, $R_3 = 2000$, $n_3 = 7$, $i = 10\%$ четырехлетней рентой постнумерандо с $i = 15\%$.

4. Опишите портфель из двух ценных бумаг в случае полной антикорреляции.

5. Портфель состоит из двух бумаг A и B. Ожидаемые доходности равны 0,5 и 0,8, а риски 0,2 и 0,6. Коэффициент корреляции равен 1/2. Найдите портфель минимального риска и его доходность.

6. Выразите доходность актива за три периода в целом через доходность актива за каждый из периодов.

7. Докажите, что уравнение минимальной границы $\sigma = \sqrt{\dfrac{\alpha\mu^2 - 2\beta\mu + \gamma}{\delta}}$ является ветвью гиперболы и найдите ее асимптоты.

8. Найдите изменение цены облигации со сроком погашения $n = 6$ лет, доходностью $y = 6$, купонной ставкой $c = 6$ при уменьшении доходности до 4,5%.

Билет № 3

1. Выведите формулу для среднего срока финансового потока.

2. Выведите формулу для наращенной величины p-срочной ренты постнумерандо.

3. Замените годовую ренту $R_1 = 2$, $n_1 = 3$, $i = 20\%$ на p-срочную (квартальную) ренту $n_2 = 4$, $i = 20\%$.

4. Выведите формулу доходности портфеля из n-бумаг через доходности отдельных бумаг.

5. Портфель состоит из двух бумаг A и B. Ожидаемые доходности равны 0,2 и 0,4, а риски 0,3 и 0,5. Коэффициент корреляции равен 0,2. Найдите портфель минимального риска, его риск и доходность.

6. Найдите доходность к погашению облигации со сроком обращения 7 лет номинальной стоимостью 2000 у.е. и купонной ставкой 6%, если: 1) она продается за 2000 у.е., 2) ее рыночная цена увеличится на 5%, 3) уменьшится на 15%?

7. Найдите портфель минимального риска из двух независимых бумаг, дисперсии которых равны 10 и 15 соответственно.

8. Менеджер должен выплатить через 4 года долг в размере 300 000 у.е. и через 6 лет долг в размере 400 000 у.е. Сколько трехлетних бескупонных облигаций и сколько 10-летних бескупонных облигаций

ему следует купить, чтобы защитить средства от изменений процентной ставки при условии, что процентная ставка составляет 12% (номиналы облигаций равны 2000 у.е.)?

Билет № 4

1. Вклад 25 000 руб. сделан 12.04.2010, а 10.06.2010 изъят. Проценты начисляются под 11% годовых по простой схеме. Найдите размер вклада, полученного клиентом.

2. Клиент имеет вексель на 20 000 руб., который он хочет учесть 24.04.2011 в банке по сложной учетной ставке 10%. Какую сумму он получит, если срок до погашения 12.09.2011?

3. Кредит в сумме 700 000 у.е. выдан под 10% годовых. Планируется погасить задолженность, выплачивая по 68 000 у.е. в конце каждого года. За какой срок можно погасить задолженность? На сколько нужно увеличить намеченную сумму выплат, чтобы погасить задолженность не более чем за 8 лет?

4. Для бессрочной (вечной) ренты определите, что больше увеличит приведенную стоимость этой ренты: увеличение рентного платежа на 15% или уменьшение процентной ставки на 15%?

5. Найдите приведенную величину и наращенную сумму p-срочной ренты постнумерандо (случай $k = 1$).

6. Ценовые доли портфеля из двух бумаг (0,2; 0,4), (x; 0,5) (первая цифра в скобках — доходность ценной бумаги, вторая — ее риск) относятся как 1 : 3,4, а доходность равна 0,23. Коэффициент корреляции равен 0,1. Найдите портфель, его риск и доходность второй бумаги.

7. Докажите, что уравнение $\sigma = \sqrt{\dfrac{\alpha\mu^2 - 2\beta\mu + \gamma}{\delta}}$ является ветвью гиперболы и найдите ее асимптоты.

8. Найдите доходность к погашению облигации со сроком обращения 10 лет и номинальной стоимостью $N = 1000$ у.е., купонные выплаты по которой составляют 50 у.е. ежегодно, если облигация продается по 900 у.е.

Билет № 5

1. Сумма 120 000 руб. выплачивается через 2,5 года. Найдите приведенную стоимость при ежемесячном начислении процентов, если ставка процентов — 15% годовых).

2. Вексель на сумму 60 000 руб. учтен по процентной ставке 14% годовых (сложные проценты), срок платежа наступает через 0,6 года.

Определите сумму, полученную владельцем векселя при учете, и дисконт при ежеквартальном и ежемесячном дисконтировании.

3. Найдите срок ренты постнумерандо, если известны $A = 2500$, $i = 13\%$, $R = 250$.

4. Увеличится ли приведенная стоимость бессрочной (вечной) ренты, если платежи сделать в 2 раза чаще, а годовую процентную ставку в 2 раза уменьшить? Ответ обоснуйте.

5. Найдите приведенную величину и наращенную сумму p-срочной ренты пренумерандо (случай $k = 1$).

6. Портфель состоит из двух бумаг A и B. Ожидаемые доходности равны 0,5 и 0,8, а риски 0,25 и 0,7. Коэффициент корреляции равен –0,8. Доходность портфеля равна 0,75. Найдите портфель и его риск.

7. Дан портфель из трех бумаг с доходностями $\mu_1 = 10\%$; $\mu_2 = 20\%$; $\mu_3 = 30\%$ и ковариационной матрицей $V = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 9 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите портфель минимального риска с доходностью: а) не менее $\mu = 25\%$, б) не менее 13% и их риски.

8. Рыночная цена 20-процентной облигации номиналом 3500 руб. за 2 года до погашения равна 4300 руб. Найдите текущую стоимость облигации при процентной ставке: а) 14%, б) 20% в) 23% и ее курс.

Билет № 6

1. Вклад 10 000 руб. сделан 06.02.2008, а 18.07.2008 изъят. Проценты начисляются под 11% годовых по простой схеме. Найдите размер вклада, полученного клиентом.

2. Вексель стоимостью 550 000 руб. учитывается за 3 года до погашения по сложной учетной ставке 12% годовых. Найдите сумму, которую получит векселедержатель, и величину дисконта.

3. Найдите срок ренты пренумерандо, если известны $A = 3000$, $i = 11\%$, $R = 200$.

4. Найдите приведенную величину и наращенную сумму вечной ренты.

5. Найдите приведенную величину и наращенную сумму p-срочной ренты постнумерандо (случай $k \neq p$).

6. Портфель из двух бумаг (x; 0,23), (0,67; 0,35) (первая цифра в скобках — доходность ценной бумаги, вторая — ее риск) имеет вид (0,55; 0,45) и доходность 0,47. Коэффициент корреляции равен –0,4. Найдите доходность первой бумаги и риск портфеля.

7. Опишите портфель Марковица минимального риска заданной ожидаемой доходности μ.

8. Найдите величину дисконта облигации номинальной стоимостью 10 000 у.е., купонные выплаты по которой составляют 700 у.е. ежегодно, цена за 5 лет до погашения составляет 6000 у.е., если при одной и той же доходности для всех сроков облигация будет продаваться: а) через 3 года; б) через 4 года. Объясните такие различия.

КОМПЕТЕНЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА» ДЛЯ БАКАЛАВРОВ

1. Уметь вычислять наращенную сумму в случае простых и сложных процентов, в случае кратного и непрерывного начисления процентов. Уметь сравнивать наращение по простой и сложной ставкам процента. Уметь проводить дисконтирование и удержание процентов. Уметь сравнивать дисконтирование по сложной и простой учетной ставкам. Уметь рассчитывать мультиплицирующие и дисконтирующие множители. Уметь производить конверсию платежей.

2. Знать и уметь применять «Правило 70», а также его обобщение на случай простых процентов («Правило 100»), непрерывных процентов, кратного начисления процентов. Уметь рассчитывать увеличение капитала в произвольное число раз в случае простых процентов, сложных процентов, непрерывных процентов, кратного начисления процентов.

3. Уметь учитывать влияние инфляции на ставку процента. Знать связь номинальной и реальной процентных ставок (формула Фишера). Уметь вычислять темп инфляции за несколько периодов. Владеть понятием синергетического эффекта в случае изменения темпа инфляции за несколько периодов.

4. Владеть понятием эффективной процентной ставки. Уметь рассчитывать эффективную ставку процента для n-го периода начисления в случае простых и сложных процентов. Уметь рассчитывать эффективную ставку процента в случае кратного начисления процентов, в случае непрерывных процентов, а также с учетом инфляции и налогов. Знать эквивалентность различных процентных ставок (простых и сложных процентов, простых и непрерывных процентов, сложных и непрерывных процентов).

5. Уметь рассчитывать эффективность операций с валютой, доходность депозитов с конверсией валюты и без конверсии, мультивалютных депозитов.

6. Владеть понятием внутренней нормы доходности. Уметь вычислять внутреннюю норму доходности типичных инвестиционных потоков, а также финансовых потоков с чередованием положительных и отрицательных платежей.

7. Владеть понятием финансового потока. Уметь рассчитывать его приведенную и наращенную величины. Владеть понятием и уметь вычислять средний срок финансового потока.

8. Владеть понятием непрерывного потока платежей, уметь вычислять его наращенную и приведенную стоимости. Уметь вычислять наращенную и приведенную стоимости линейно изменяющегося и экспоненциально изменяющегося потоков платежей.

9. Владеть понятием регулярных потоков платежей, обыкновенных рент. Знать и уметь рассчитывать коэффициенты приведения и наращения рент постнумерандо и пренумерандо.

10. Уметь рассчитывать коэффициенты приведения и наращения за несколько соседних периодов. Знать связь между приведенной величиной и наращенной суммой аннуитета. Знать связь между коэффициентами приведения и наращения рент пренумерандо и постнумерандо. Уметь рассчитывать параметры ренты.

11. Владеть понятиями вечной, кратной и непрерывной ренты. Уметь рассчитывать их коэффициенты приведения и наращения. Знать связь между приведенной и наращенной величинами p-срочной ренты для разной кратности начисления процентов. Знать связь между приведенной и наращенной величинами произвольных рент.

12. Владеть понятиями рент с платежами в середине периодов, немедленных и отложенных рент. Владеть понятиями арифметических и геометрических рент, в том числе срочных и непрерывных.

13. Знать общий принцип сравнения финансовых потоков и рент и уметь их сравнивать. Уметь сравнивать годовые и срочные ренты. Уметь проводить конверсию рент, а именно:

— изменение параметров ренты;
— замену одной ренты другой;
— замену обычной ренты срочной;
— замену немедленной ренты отсроченной;
— консолидацию рент;
— выкуп ренты;
— рассрочку платежа.

14. Владеть понятиями дохода и доходности финансовой операции. Уметь рассчитывать доходность за несколько периодов. Владеть понятием синергетического эффекта в случае доходности за несколько периодов.

15. Владеть понятием риска финансовой операции. Знать различные количественные оценки риска финансовой операции. Знать выделенную роль равномерного и нормального распределений. Владеть понятием коррелированности финансовых операций. Владеть понятием стоимости под риском (*Value at risk*, *VaR*). Знать виды финансовых рисков. Знать методы уменьшения риска финансовых операций (диверсификация, хеджирование, опционы, страхование).

16. Уметь анализировать финансовые операции в условиях неопределенности. Владеть понятиями матриц последствий и рисков. Знать алгоритм принятия решений в условиях полной неопределенности. Знать правила минимакса: Вальда, Сэвиджа, Гурвица. Знать алгоритм принятия решений в условиях частичной неопределенности. Знать правило максимизации среднего ожидаемого дохода и правило минимизации среднего ожидаемого риска. Владеть понятием оптимальной (по Парето) финансовой операции. Знать правило Лапласа равновозможности.

17. Владеть понятием доходности и риска ценной бумаги и портфеля. Уметь анализировать портфель из двух ценных бумаг. Знать предельные случаи (полной корреляции и полной антикорреляции), промежуточные случаи. Уметь анализировать случаи независимых бумаг (две бумаги, три и более). Уметь анализировать портфель из двух ценных бумаг, одна из которых безрисковая. Уметь находить портфель заданной эффективности и портфель заданного риска из двух ценных бумаг.

18. Уметь находить портфели Марковица из *n*-бумаг (минимального риска при заданной эффективности, минимального риска с эффективностью не меньшей заданной, минимального риска).

19. Владеть понятием минимальной границы и знать ее свойства.

20. Уметь находить портфели Тобина из *n*-бумаг (минимального риска из всех портфелей заданной эффективности, максимальной эффективности из всех портфелей риска, не более заданного).

21. Уметь находить оптимальные неотрицательные портфели. Уметь рассчитывать доходность неотрицательного портфеля. Уметь анализировать неотрицательный портфель из двух и из трех бумаг. Уметь находить портфели с неотрицательными компонентами (максимальной эффективности, минимального риска). Владеть понятием «диверсификация портфеля».

22. Владеть понятием облигации, ее текущей стоимости, текущей доходности и доходности к погашению. Знать зависимость доходности к погашению облигации от параметров. Знать дополнительные характеристики облигации:

— средний срок поступления дохода;

— дюрацию и ее свойства;

— выпуклость.

23. Владеть понятием иммунизации портфеля облигаций. Для портфеля облигаций уметь рассчитывать доходность, средний срок поступления дохода. Владеть понятиями и уметь рассчитывать дюрацию и выпуклость портфеля облигаций.