14.05.2024

Занятие № 12. Нормальные и лог-нормальные случайные величины. Закон больших чисел (збч) и центральная предельная теорема (цпт).

©*Составитель: д.ф.-м.н., проф. Рябов П.Е.*

Желательно (а для некоторых студентов обязательно), там, где есть ответ, придумать способ док-ва статистической устойчивости полученного ответа.

12.1. Для нормальной случайной величины X с математическим ожиданием $\mathbb{E}(X) = 0,7$ и дисперсией $\mathrm{Var}(X) = 49$ найдите вероятность $\mathbb{P}(|X| > 4,9)$.

12.2. Математические ожидания и дисперсии независимых нормальных случайных величин X, Y, Z, U равны 1. Найдите $\mathbb{P}(1 < 2X - 3Y + 5Z - U < 3)$.

12.3. Для независимых нормальных случайных величин X, Y известны их математические ожидания и дисперсии: $\mathbb{E}(X) = 15$; $\mathbb{E}(Y) = 19,9$; $\mathbb{V}ar(X) = 5$; $\mathbb{V}ar(Y) = 44$. Найдите $\mathbb{P}(3X < 2Y)$.

12.4. Для нормальной случайной величины X известно, что математическое ожидание $\mathbb{E}(X) = 20,3$ и вероятность $\mathbb{P}(X < 41) = 0,98928$. Найдите дисперсию $\mathrm{Var}(X)$.

12.5. Для нормальной случайной величины X известно, что дисперсия $\mathrm{Var}(X) = 81$ и вероятность $\mathbb{P}(X < 54) = 0,61791$. Найдите математическое ожидание $\mu = \mathbb{E}(X)$.

12.6. Случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $\mu = 25$. Вероятность попадания X в интервал $(10; 15)$ равна $0,2$. Найдите вероятность попадания X в интервал $(35; 40)$?

12.7. Пусть с.в. $Y \sim \mathcal{L}n(2; 25)$. Найдите вероятность $\mathbb{P}\left(\frac{1}{Y} < 3\right)$ и покажите статистическую устойчивость полученной вероятности.

Ответ: $0{,}73227974$.

12.8. Пусть X_1 и X_2 независимые случайные величины и известно, что $X_1 \sim \mathcal{L}n(2; 25)$, $X_2 \sim \mathcal{L}n(-3; 36)$. Найдите вероятность $\mathbb{P}(X_1 \cdot X_2 > 7)$ и покажите статистическую устойчивость полученной вероятности.

Ответ: $0{,}353018$.

12.9. Пусть $S(n)$ обозначает цену акции к концу n-ой недели, $n \geqslant 1$. Известно, что отношения цен $\frac{S(n)}{S(n-1)}$, $n > 1$, являются независимыми случайными величинами, которые распределены логнормально с параметрами $\mu = 0,00264$ и $\sigma = 0,0671$. Найдите вероятность того, что

а) цена акции будет расти подряд две недели; б) цена акции в конце четвертой недели будет выше, чем в конце первой недели; в) за три недели цена акции вырастет более, чем на 7%.

12.10. Пусть Q_1 – квантиль уровня $\frac{1}{4}$, а Q_3 – квантиль уровня $\frac{3}{4}$ нормального распределения $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Выведите формулу для квантилей уровня $q \in (0; 1)$ распределения $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ и с ее помощью найдите отношение $\frac{Q_3 - Q_1}{\sigma}$

Напомним, *квантиль уровня* $q \in (0; 1)$ распределения случайной величины X определяется как такое число x_q, что $\mathbb{P}(X < x_q) \leqslant q$, $\mathbb{P}(X \leqslant x_q) \geqslant q$. Квантиль уровня q также называется $100(1-q)$ – *(верхней) процентной точкой распределения* X. Пара неравенств, задающих квантиль x_q распределения *непрерывной* случайной величины X, эквивалентно одному уравнению: $F(x_q) = q$, где $F(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$ – функция распределения с.в. X. Таким образом $x_q = F^{-1}(q)$, где F^{-1} – функция, обратная к функции распределения $F(x)$.

12.11. 85%-я точка нормально распределенной случайной величины X равна 12, а 40%-я точка равна 16. Найдите математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины X.

12.12. Для независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots$, равномерно распределенных на отрезке $[1, 13]$, найдите предел

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X_1 + \ldots + X_n > 7n - \sqrt{n}\right).$$

12.13. Для независимых равномерно распределенных на отрезке $[-2; 2]$ случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ найдите предел $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_1 + X_2 + \ldots + X_n| > \sqrt{3n})$.

12.14. Пусть случайная величина X имеет *треугольное распределение (Triangular distribution)* на отрезке $[a, b]$ $(a < b)$ с параметром c, где $a \leqslant c \leqslant b$, ($X \sim \mathrm{Tri}([a; b]; c)$).

а) Покажите, что $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b+c}{3}$, $\quad \mathbb{V}ar(X) = \frac{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}{18}$.

б) Постройте график плотности для $X \sim \mathrm{Tri}\left([-1; 3]; c = -\frac{2}{3}\right)$.

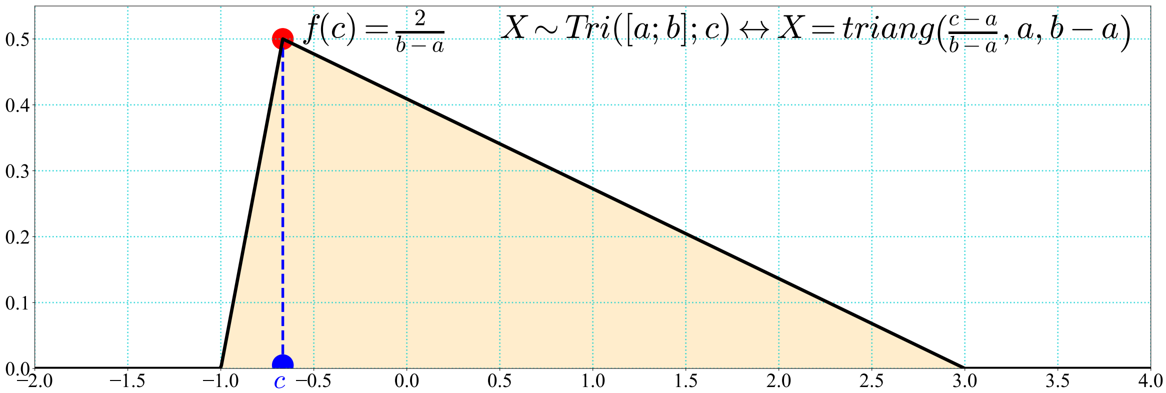
Можно использовать *X=triang*$\left(\frac{c-a}{b-a}, a, b-a\right)$ из библиотеки *from scipy.stats import triang*).

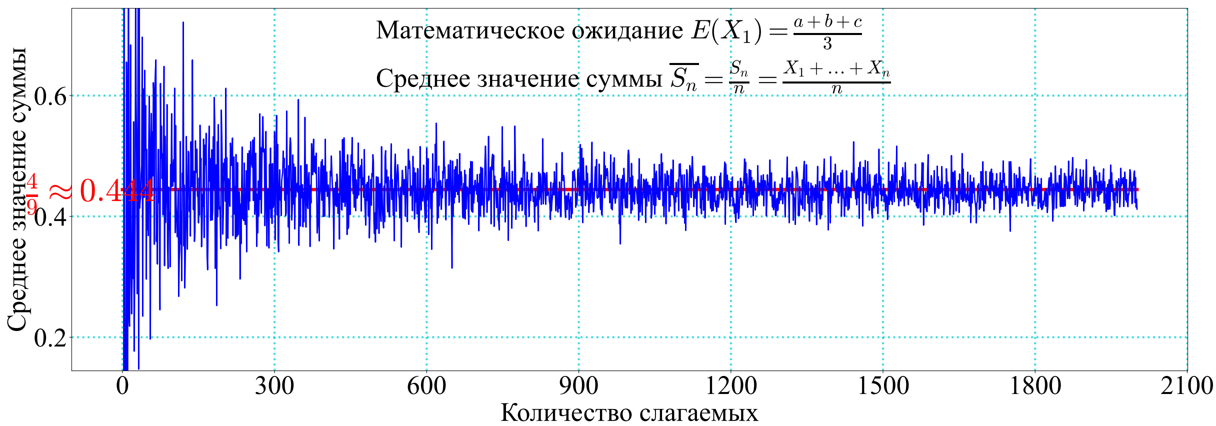
в) Пусть $X_1, X_2, \ldots$ бесконечная последовательность одинаково распределенных случайных величин, имеющих треугольное распределение на отрезке $[-1; 3]$ с параметром $c = -\frac{2}{3}$, ($X_k \sim \mathrm{Tri}\left([-1; 3]; c = -\frac{2}{3}\right)$). С помощью *IPython* продемонстрируйте ЗБЧ и ЦПТ для $\overline{S_n} = \frac{S_n}{n}$, где $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

Определение (См. From Wikipedia, the free encyclopedia MathWorld). *Случайная величина* X *имеет треугольное распределение (Triangular distribution) на отрезке* $[a, b]$ $(a < b)$ *с параметром* c, $a \leqslant c \leqslant b$, $(X \sim \mathrm{Tri}([a; b]; c))$, *если* *плотность распределения* $f(x)$ *имеет вид*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)}, \quad x \in [a;c); \\ \dfrac{2}{b-a}, \quad x = c; \\ \dfrac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)}, \quad x \in (c;b]; \\ 0, \quad x \notin [a;b]. \end{cases}$$

Ответ: б) и в) см. ниже.





С.в. $\frac{\sqrt{n}(\overline{S_n}-\mu)}{\sigma} \xrightarrow{d} Z$, где $Z \sim N(0;1)$