9.04.2024

Занятие № 8. Основные дискретные распределения. Начальные и центральные моменты.

©*Составитель: д.ф.-м.н., проф. Рябов П.Е.*

Желательно (а для некоторых студентов обязательно), там, где есть ответ, придумать способ док-ва статистической устойчивости полученного ответа.

8.1. Две монеты подбрасывается до тех пор, пока одновременно не выпадут два герба. Найдите: а) математическое ожидание и дисперсию числа бросков; б) медиану распределения числа бросков. Разыграйте эксперимент на Python и найдите среднее значение числа бросков. Постройте график зависимости среднего значения числа бросков от числа экспериментов. (Можно использовать генератор *geom.rvs(p, size=n)* из библиотеки *from scipy.stats import geom*).

Квантиль уровня $q \in (0;1)$ распределения случайной величины X определяется как такое число x_q, что $\mathbb{P}(X < x_q) \leqslant q$, $\mathbb{P}(X \leqslant x_q) \geqslant q$. Квантиль уровня q также называется $100(1-q)$- ***(верхней) процентной точкой распределения*** X. Квантиль уровня $q = \frac{1}{2}$ называется *медианой*, $Me(X) = x_{\frac{1}{2}}$.

8.2. Две игральные (симметричные) кости бросаются до тех пор, пока сумма очков в последнем броске не окажется более 10. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа бросков. Постройте график зависимости среднего значения числа бросков от числа экспериментов.

8.3. Предположим, что игральная кость не является симметричной и массы в ней распределены так, что масса каждой грани пропорциональна её номеру. Несимметричная игральная кость бросается до тех пор, пока не выпадут все чётные цифры. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа бросков. Постройте график зависимости среднего значения числа бросков от числа экспериментов.

8.4. Найдите $\mu_2(X), \mu_3(X), \mu_4(X), \mathrm{As}(X)$ и $\mathrm{Ex}(X)$ для случайной величины X, распределённой по закону:

X	0	1	2	3
$\mathbb{P}$	0,4	0,3	0,2	0,1

.

8.5. Нестандартная игральная кость отличается от стандартной только тем, что вместо 6 очков на одной из её граней выбито 3 очка (в результате имеются две грани с таким числом очков). Нестандартная игральная кость подбрасывается 24 раза, S – сумма выпавших очков. Найдите $\mathrm{As}(S)$ и $\mathrm{Ex}(S)$.

8.6. Случайные величины $X_1, \ldots, X_{100}$ независимы и принимают только значения a и b. Найдите $\mathrm{As}(X_1 + \ldots + X_{100})$ и $\mathrm{Ex}(X_1 + \ldots + X_{100})$, если известно, что $a < b$ и $\mathbb{P}(X_i = b) = 0,2$ для $i = 1, \ldots, 100$.

8.7. Случайная величина X распределена по закону Пуассона с параметром λ. Найдите $\mathrm{As}(X)$.

8.8. Покажите, что $\mathrm{Ex}(X) \geqslant -2$.

8.9. Независимые пуассоновские случайные величины X, Y, Z имеют следующие стандартные отклонения: $\sigma_X = 0{,}3$; $\sigma_Y = 0{,}9$; $\sigma_Z = 1{,}8$. Пусть $S = X + Y + Z$. Найдите: 1) вероятность $\mathbb{P}(S = 7)$; 2) наиболее вероятное значение суммы S; 3) стандартное отклонение σ_S; 4) асимметрию $\mathrm{As}(S)$; 5) эксцесс $\mathrm{Ex}(S)$.

8.10. Имеется две корзины с белыми и черными шарами. В первой корзине всего 6 шаров, при этом количество белых шаров распределено по биномиальному закону с параметрами $n = 3$ и $p = 0{,}8$. Во второй корзине имеется всего 11 шаров, при этом количество белых шаров распределено по биномиальному закону с параметрами $n = 4$ и $p = 0{,}7$. Из обеих корзин все шары перекладываются в третью корзину. 1) Какова вероятность $\mathbb{P}(A)$, что случайно вынутый из третьей корзины шар окажется белым (событие A)? 2) Найдите условную вероятность $\mathbb{P}(H|A)$, того, что случайно вынутый из третьей корзины шар первоначально находился в первой корзине (событие H), при условии, что он белый (событие A)?

Ответ: 1) $\mathbb{P}(A) = 0{,}3059$; 2) $\mathbb{P}(H|A) = 0{,}4615$.

8.11. Симметричная игральная кость подбрасывается до тех пор, пока не выпадут все грани. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа бросаний. Разыграйте эксперимент на Python и найдите среднее значение числа бросков. Постройте график зависимости среднего значения количества бросков от числа экспериментов.

8.12.*** Предположим, что игральная кость ***не является симметричной*** и “вероятности” в ней распределены так, что “вероятность” каждой грани пропорциональна её номеру. Такая (несимметричная) игральная кость подбрасывается до тех пор, пока не выпадут все грани. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа бросаний. (Задача сложная, но все равно имеет аналитическое решение!!!) Разыграйте эксперимент на Python и найдите среднее значение числа бросков. Постройте график зависимости среднего значения количества бросков от числа экспериментов.

Ответ: $\mathbb{E}(X) = \frac{1315957}{50160} \approx 26{,}23518740031898$; $\mathbb{V}ar(X) \approx 340{,}0258005534602$.