МС-2. Формулы полного математического ожидания и полной дисперсии

1. Случайная величина X имеет следующее распределение:

X	1	2
P	0,4	0,6

Известно, что $E(Y|\, X = 1) = 5, E(Y \mid X = 2) = 3$. Найдите $E(Y)$.

2. Дискретный случайный вектор (X,Y) имеет распределение

	X=0	X =1	X =2
Y=2	1/ 12	1/12	5/24
Y=3	1/8	1/4	1/4

Найдите распределение условного математического ожидания $Z=E(X^2+Y^2|Y)$, E(Z).

3. Случайный вектор (X, Y) имеет следующее распределение:

	Y=1	Y =5	Y =8
X=1	0,3	0	0,3
X=4	0,1		0,2

Найдите Var(E(X |Y)) и E(Var(X|Y)).

4. Дискретный случайный вектор (X,Y) имеет распределение

	Y=10	Y =20	Y =30
X=1	0,2		0,1
X=2	0,3	0,1	0,1

Найдите $E(X|Y)$. Проиллюстрировать формулы полного математического ожидания и полной дисперсии.

5. Совместное распределение случайных величин X и Y задано таблицей:

	Y=1	Y=2	Y=3
X=4	0,1	0,2	0,3
X=5	0,3	0	0,1

Найдите:

а) условное математическое ожидание E(Y|X=5);

б) квадрат корреляционного отношения $\eta^2_{X|Y}$.

6. Распределение случайного вектора (X,Y) задано таблицей:

	Y=10	Y=20	Y=30
X=1	0,2	0,2	0,1
X=2	0,3	0,1	0,1

Найдите: а) E(X |Y >15); б) D(E(X |Y)); E(D(X |Y));в) $\eta^2_{X|Y}$.

(**Ответы**. а) 1,4; б) 1/75; в) 0,273; г) 0,0533)

7. Число Y радиотехнических приборов, сдаваемых покупателями в гарантийную мастерскую в течении дня, можно представить в виде случайной величины, хорошо описываемой распределением Пуассона $pois(\lambda)$, где λ является средним числом радиоприборов, сданных за день. Вероятность того, что сданный прибор потребует длительного ремонта, равна p. Найдите среднее число сданных приборов, требующих длительного ремонта.

8. Ежедневное количество покупателей магазина, совершивших покупку, описывается случайной величиной X, распределенной по биномиальному закону с параметрами n = 500 и p = 0.54. А сумма чека (в рублях) каждого из покупателей описывается случайной величиной Y, распределенной по нормальному закону с параметрами m = 5500 и σ = 80. Вычислите значения для среднего (E) и дисперсии выручки магазина. Оцените методом Монте-Карло ежедневную среднюю выручку магазина и ее дисперсию.

```
import numpy as np
from scipy.stats import binom
from scipy.stats import norm
import math

n=500
p=0.54
a=5500
sigma=80

E_X=binom.mean(n, p)  #   E_X=n*p
Var_X=binom.var(n, p)  #  Var_X=n*p*(1-p)

E_Yi=norm.mean(a, sigma)  #   E_Yi=a
Var_Yi=norm.var(a, sigma)  #  Var_Yi=sigma^2

print ('E_Y=', E_X*E_Yi)

Var_Y=Var_Yi*E_X+E_Yi**2*Var_X

print ('Var(Y)=', Var_Y)

print ('sigma(Y)=', math.sqrt(Var_Y))
```

```
E_Y= 1485000.0
Var(Y)= 3758777999.9999995
sigma(Y)= 61308.87374597579
```

Имитационное моделирование (метод Монте-Карло):

```
import random
import numpy as np
import math

n=500
p=0.54
a=5500
sigma=80

N = 10**5 # n- сколько всего дней
X=np.random.binomial(n,p,N)  # X[i] количество покупателей в день
Y=np.repeat(0,N) # первоначальный нулевой доход в каждый день

for i in range(N): # i=1,2,…,N, i - конкретный день
    Z=np.random.choice(np.random.normal(a,sigma,X[i]),X[i],True)
    Y[i]=np.sum(Z)

E_Y=np.mean(Y)
print ('E_Y=', E_Y)
Var_Y=np.var(Y)
print ('Var(Y)=', Var_Y)
sigma_Y=np.std(Y)
print ('sigma_Y=', sigma_Y)
```

```
E_Y= 1485118.96233
Var(Y)= 3770870760.1211715
sigma_Y= 61407.41616548584
```

9. Количество продаж в день кофейного автомата описывается дискретной случайной величиной Y, распределенной по биномиальному закону с параметрами n=260 и p=0.88. При этом выручка автомата за каждую j-ую покупку зависит от выбранного сорта кофе и описывается случайной величиной Zj, принимающей значения 15, 20, 30, 45 и 50 рублей с вероятностями соответственно: 0.2, 0.4, 0.1, 0.2 и 0.1. Вычислите значения для среднего (E) и дисперсии суммарного ежедневного дохода. Оцените методом Монте-Карло средний суммарный ежедневный доход и его дисперсию.

10. Имеется 36 игральных костей. В первый раз бросаются все игральные кости, во второй раз – только те, на которых в первый раз выпало 6 очков. Пусть S – сумма очков при втором броске. Найдите E(S) и Var(S). (**Ответ**. 21 и 78,75)

11. Для случайной цены Y известны вероятности: $P(Y = 9) = 0{,}7$ и $P(Y = 14) = 0{,}3$. При условии, что $Y = y$, распределение выручки X является равномерным на отрезке $[0{,}14y]$. Найдите: 1) математическое ожидание $E(XY)$; 2) ковариацию $Cov(X, Y)$. (**Ответ**: 808,5; 36,75)

12. Найдите верхнюю 5-процентную точку распределения X, если Y принимает с равной вероятностью значения 20 и 80, а при фиксированном $Y = y$ случайная величина X **равномерно распределена** на отрезке $[0; y]$.

Домашнее задание

1. Дискретный случайный вектор (X,Y) имеет распределение

	X=-2	X=-1	X=0	X=1
Y=-2	0	0	0,1	0,2
Y=0	0,1	0,1	0,1	0,1
Y=1	0,1	0,1		0

Найти условный закон распределения случайной величины $Z = (Y|\ |X| > |Y|)$, $E(Z), Var(Z)$ Составить законы распределения $E(X|Y)$ и $Var(X|Y)$. Проиллюстрировать формулы полного математического ожидания и полной дисперсии.

2. Случайные величины X и Y независимы и с равной вероятностью принимают значения: 1, 2, 3, 4, 5. Найдите E(X|X>Y) и D(X|X>Y). (**Ответ**. 4 и 1)

3. Количество опоздавших на самолет пассажиров для каждого рейса описывается случайной величиной X, распределенной по закону Пуассона с параметром $\lambda = 4$. При этом стоимость билета, который не подлежит возврату, описывается нормально распределенной случайной величиной Y с параметрами m=3500 и σ=207.9. Вычислите значения для среднего (E) и среднеквадратического отклонения (σ) суммы стоимости пропавших билетов на рейс. Оцените методом Монте-Карло среднюю сумму стоимости пропавших билетов и ее среднеквадратическое отклонение, приходящиеся на каждый рейс.

4. Имеется 12 игральных костей. В первый раз бросаются все игральные кости, во второй раз – только те, на которых в первый раз выпало четное число очков. Пусть S – сумма очков при втором броске. Найдите E(S) и D(S). (**Ответ**. 21 и 54,25)

5. Игральная кость подбрасывается до тех пор, пока не выпадет 6 очков. Пусть S – сумма очков во всех бросках, кроме последнего (S=0, если 6 очков выпало при первом броске). Найдите E(S) и D(S). (**Ответ**. 15 и 280)