



Maestría en Ciencia de Datos
Probabilidad y Estadística para Ciencia de Datos

Técnicas de conteo: principio de adición, principio de multiplicación, permutaciones, ordenaciones y combinaciones.

Profesora: Ana Delia Olvera Cervantes
Alumno: Melchor Nolasco Cosijoeza

6 de octubre de 2024

1. Técnicas de conteo

Las técnicas de conteo son métodos utilizados en matemáticas, especialmente en combinatoria, para determinar cuántas maneras diferentes hay de organizar o seleccionar elementos de un conjunto. Estas técnicas son fundamentales para resolver problemas de probabilidad, estadística y optimización.

1.1. Principio de adición

El principio de adición, o también llamado regla de la suma, es una técnica fundamental en probabilidad y estadística que se utiliza para calcular el número total de formas en que un evento puede ocurrir, cuando dicho evento puede ser el resultado de varias alternativas o posibilidades que son mutuamente excluyentes, esto quiere decir que no suceden al mismo tiempo.

Supongamos que tienes dos eventos, **A** y **B**, que son mutuamente excluyentes o dicho de otra manera no pueden ocurrir al mismo tiempo. Entonces, el número total de formas en que pueden ocurrir **A** o **B** es la suma de las formas en que puede ocurrir **A** y las formas que puede ocurrir **B**. En términos matemáticos: Total de formas de que ocurra $A \cup B$ = Número de formas de que ocurra **A** + Número de formas de que ocurra **B**.

Ejemplo:

Supongamos que se tiene 3 camisas rojas y 5 camisas azules y se necesita saber cuántas formas se tiene de elegir una camisa roja o una camisa azul. Como no se puede elegir una camisa que sea roja y una camisa que sea azul a la vez, los eventos son mutuamente excluyentes, y se puede aplicar el principio de la adición. Total de formas de elegir una camisa = 3 camisas rojas + 5 camisas azules = 8 camisas en total.

1.2. Principio de multiplicación

La regla de la multiplicación o la regla del producto, es otro concepto fundamental en las técnicas de conteo usadas en probabilidad y estadística. Este principio se utiliza cuando se desea contar el número total de formas en que pueden ocurrir varios eventos, uno tras otro, en situaciones donde los eventos no son mutuamente excluyentes o dicho de otra manera, pueden ocurrir al mismo tiempo y cada uno es independiente de los demás.

Si un evento **A** puede ocurrir de n maneras diferentes, y otro evento **B**, independiente de **A**, puede ocurrir de m maneras diferentes, entonces el número total de formas en que los eventos **A** y **B** pueden ocurrir juntos es el producto de las formas en que pueden ocurrir **A** y **B**. En términos matemáticos:

Total de formas de que ocurra **A** y **B** = $n \times m$.

En términos de probabilidad, el principio de multiplicación también se aplica cuando se calculan probabilidades conjuntas de eventos independientes. Si los eventos **A** y **B** son independientes, la probabilidad de que ambos eventos ocurran juntos es el producto de las probabilidades individuales.

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Ejemplos:

- Supongamos que se tienen 3 camisas, roja, azul y verde y 2 tipos de pantalones, negros y grises. Si se desea saber cuántas combinaciones diferentes de ropa se puede formar eligiendo una camisa y un pantalón, se aplicaría el principio de multiplicación: Total de combinaciones = 3 tipos de camisas \times 2 tipos de pantalones = 6 combinaciones en total. Esto sucede porque cada camisa puede combinarse con uno de los pantalones, lo que genera 6 combinaciones posibles.

- Si lanzas una moneda y un dado, la probabilidad de que la moneda salga cara $P(\mathbf{A}) = 1/2$ y que el dado muestre un 6 es $P(\mathbf{B}) = 1/6$ entonces:

$$P(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

1.3. Permutaciones

La permutación es una técnica fundamental de conteo en probabilidad y estadística que se utiliza cuando queremos ordenar o organizar un conjunto de elementos. Una permutación es una forma de organizar todos o parte de un conjunto de elementos en un orden específico. A diferencia de la combinación, en las permutaciones el orden importa.

Una permutación de un conjunto de n elementos es cualquier disposición ordenada de esos elementos. El número total de permutaciones de un conjunto de n elementos distintos se puede calcular como:

$$P(n) = n!$$

1.3.1. Permutaciones de un subconjunto

Si se necesita formar permutaciones de r elementos seleccionados de un conjunto de n elementos, el número total de permutaciones de r elementos seleccionados de n es: $P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$. Este cálculo nos da el número de formas de seleccionar y organizar r elementos de un conjunto de n elementos.

Ejemplos:

Si tienes tres letras A,B y C, las permutaciones son:

- ABC
- ACB
- BAC
- BCA
- CAB
- CBA

Supongamos que hay 8 finalistas en una competencia, y se quiere saber cuántas maneras diferentes se pueden otorgar los premios de oro, plata y bronce. Como el orden de los premios importa (oro, plata y bronce son diferentes), se trata de una permutación.

$$P(8,3) = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!} = 8 \times 7 \times 6 = 336$$

Por lo tanto hay 336 formas diferentes de otorgar estos premios.<

1.4. Ordenaciones y Combinaciones

El principio de la ordenación o también conocido como principio de combinaciones es una técnica importante en el conteo dentro de la probabilidad y estadística. Se utiliza para contar cuantas formas distintas hay de seleccionar y organizar elementos de un conjunto, pero sin importar el orden de los elementos seleccionados. Este principio se emplea cuando el orden de los elementos no tiene relevancia para el problema que estamos resolviendo. Una combinación es una selección de r elementos de un conjunto de n elementos, donde el orden no importa. El número total de combinaciones de r elementos de un conjunto de n elementos se denota como $C(n,r)$ o $\binom{n}{r}$ y se calcula con la siguiente fórmula:

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

El principio de combinaciones es útil en problemas de probabilidad cuando necesitamos contar el número de formas en que un evento puede ocurrir sin considerar el orden. Esto es común en situaciones donde se seleccionan elementos para formar un grupo o un subconjunto.

Ejemplo: Supongamos que tienes un grupo de 10 personas y que quieres seleccionar a 4 de ellas para formar un comité. No importa el orden en que se seleccionen, solo importa quién está en el comité. El número de formas de seleccionar a 4 personas de un grupo de 10 es:

$$C(10,4) = \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{5040}{24} = 210$$

Por lo tanto hay 210 maneras de seleccionar 4 personas para el comité.